PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

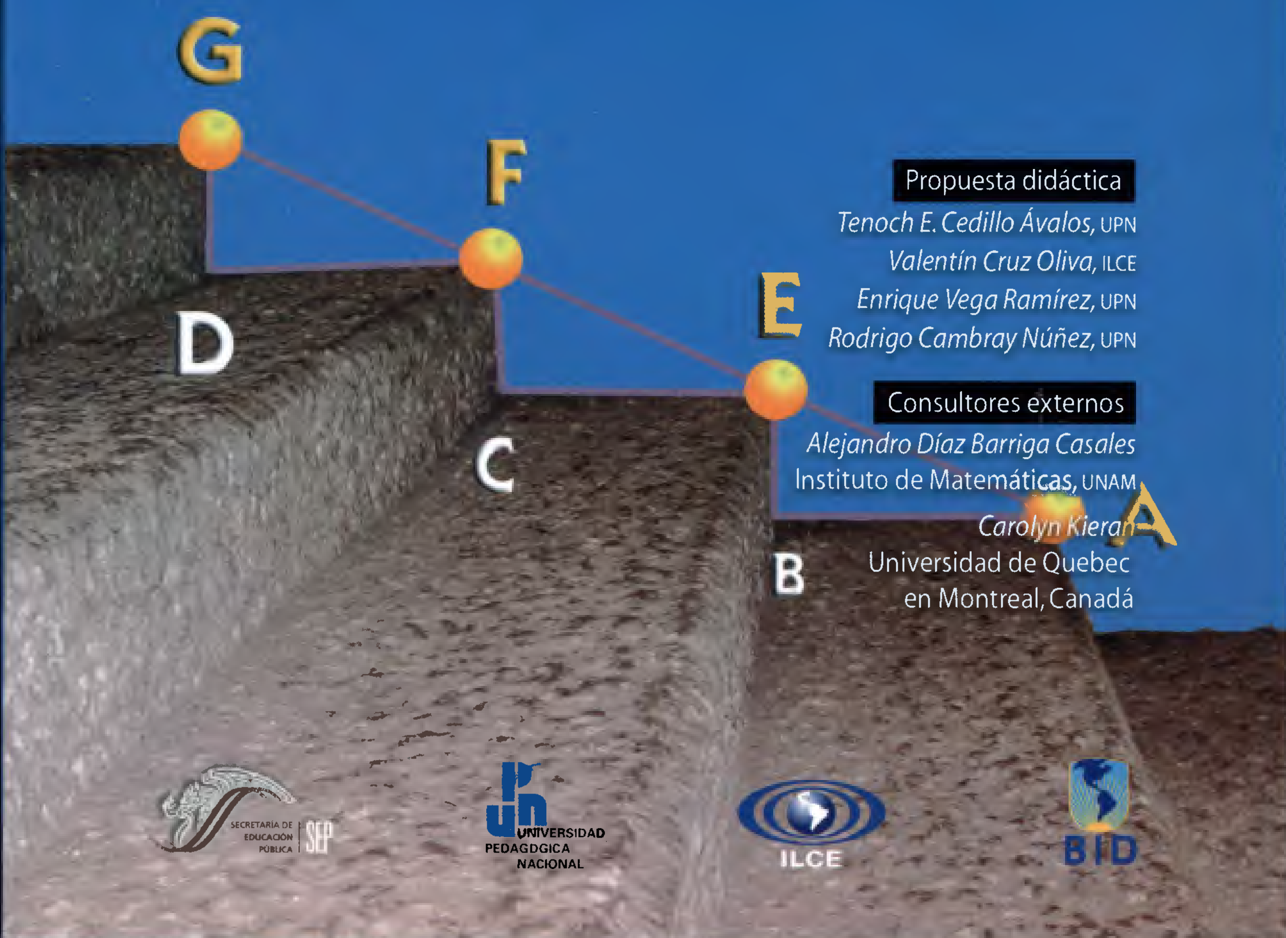
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

M Ó D U L O 9

GEOMETRÍA

Medición y razones trigonométricas



Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM
Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA SEP
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
ILCE
BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 9

GEOMETRÍA

Medición y razones trigonométricas

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Geometría

Módulo 9: Medición y razones trigonométricas

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, c.p. 14200,
Tlalpan, ciudad de México, D.F.
www.upn.mx

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-181-0 módulo 9

Impreso y hecho en México

Í N D I C E

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

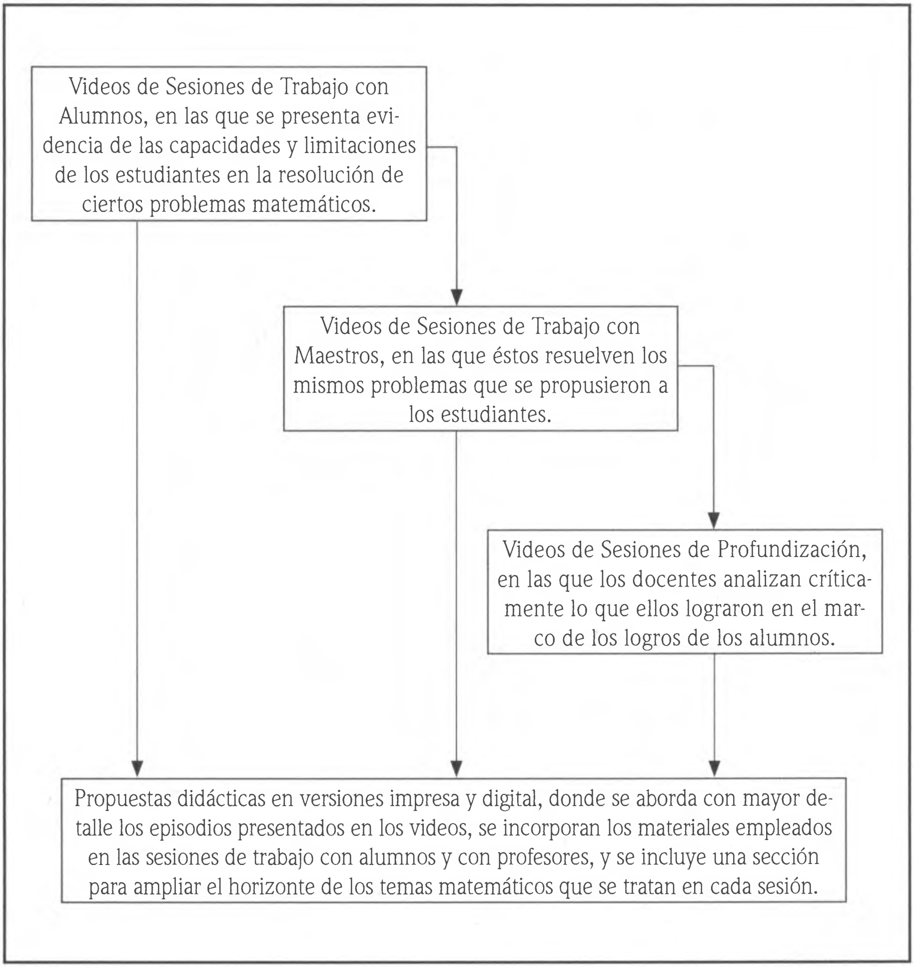
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término “sesiones de trabajo”, en lugar de “clase modelo”, para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste “entrega” sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para “recibirlos”. Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo.* Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización.* La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son "recipientes que esperan ser llenados", y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*,1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education*, 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

Dos triángulos son semejantes entre sí
cuando son indistinguibles excepto por su tamaño.
G. W. Leibniz (1646-1716)

En los 1950, se enunciaron consignas en relación con la enseñanza de la geometría como la siguiente: "Permitan que Arquímedes y no Euclides sea nuestro guía" (Meder, 1958, p. 584). También se hicieron aseveraciones en el sentido de que Euclides había escrito *Los Elementos,* una obra sobre geometría y aritmética, para preparar filósofos y no matemáticos (véanse, por ejemplo: Meder, 1958; y Daus, 1960). Pero conviene hacer notar que incluso Arquímedes (*ca.* 287-212 a. C.) basó sus investigaciones en Euclides: Proclo nos informa que "Arquímedes, quien vivió después de la época del primer Ptolomeo, menciona a Euclides" (Proclus, 1992, p. 56).

Varios escritores han valorado la importancia histórica de esa obra de Euclides por su influencia en todas las generaciones desde que fue escrita: durante más de dos milenios ha mostrado a la humanidad cómo usar el poder del razonamiento deductivo para lograr el conocimiento. Gemignani (1967, p. 162) concluye que "la obra de Euclides [...] durante mucho tiempo fue una fuente de inspiración para los matemáticos y es el fundamento y la guía para algunas partes de las matemáticas más finas incluso hasta la época presente".

En cuanto al aprendizaje de la geometría en la educación secundaria (grados 7 a 9), desde 1950 se dio énfasis al rigor lógico y se hicieron a un lado o se ignoraron las relaciones con las experiencias de los alumnos en el mundo que los rodea. Esta pedagogía antihistórica se basó en la suposición de que, para un aprendizaje óptimo, las matemáticas se deberían enseñar en una secuencia lógica de acuerdo con su organización formal. Este enfoque no ha tenido éxito.

Desde los 1980, se ha fortalecido la postura de que la investigación educativa puede contribuir al mejoramiento de las prácticas de enseñanza de las *matemáticas escolares* (un *corpus* distinto al de las matemáticas mismas, aunque fuertemente ligado a éstas). Más importante aún ha sido el señalamiento de que la investigación educativa en las matemáticas escolares puede "servir como una herramienta analítica para estudiar las relaciones entre las matemáticas y la sociedad en su conjunto" (Schubring, 1992, p. 49). Hans Freudenthal (1992, p. 27), en la parte final de una conferencia que dio en 1980, señaló la importancia de la investigación educativa siempre que se llevara a cabo *en* el ámbito de la educación y no que se hiciera investigación *de* la educación.

En años recientes, se ha puesto menos énfasis en el enfoque axiomático de la enseñanza de la geometría en la educación secundaria. Ahora se intenta que en este nivel educativo las ideas, nociones y conceptos de la geometría se aborden con base en la experiencia de los alumnos, auxiliándose de objetos tangibles como lo puede ser un geoplano de madera, el doblado de papel o unas ligas de hule. Actualmente no es una meta dentro del aprendizaje de la geometría en la educación secundaria que los alumnos desarrollen habilidades en los métodos de demostración.

Hay reportes de investigación que concuerdan en la conveniencia de reintegrar el razonamiento espacial en las matemáticas escolares. Bishop (1992, p. 29), por ejemplo, explicó que la geometría trata de la matematización del espacio; a este respecto señaló que existen tres áreas conceptuales en las que aparecen obstáculos para los alumnos en el aprendizaje de la geometría: *a)* aprendizaje acerca del espacio, *b)* aprendizaje acerca de la matematización del espacio, y *c)* aprendizaje acerca de la geometría; en su tratamiento de esta tercer área Bishop destacó el papel que desempeña la visualización.

En el desarrollo de las distintas actividades diseñadas para los tres módulos de geometría de la serie de matemáticas, tanto alumnos como maestros participaron en el planteamiento de conjeturas, sin que se tuviera como meta final la demostración formal de las mismas: para validarlas, incluso, se utilizaron procedimientos de índole empírica (mediciones directas, por ejemplo). Los tres temas generales de geometría seleccionados para desarrollarse en las sesiones de trabajo con los alumnos y en los talleres con los maestros fueron los siguientes:

- Medición y semejanza de triángulos
- Medición y razones trigonométricas
- Áreas y Teorema de Pitágoras

En las sesiones de trabajo con los alumnos y en los talleres con los maestros, que se videograbaron, los tres temas se desarrollaron estudiando sus relaciones con otras áreas de las matemáticas escolares, como la aritmética, el álgebra, y el registro y procesamiento de la información. Por otra parte, los temas de geometría mencionados se incluyen en los programas oficiales de la educación secundaria en la mayoría de los países, particularmente, en los de América Latina y el Caribe.

En este módulo 9 de esta propuesta didáctica se incluye una introducción al estudio de la trigonometría. En el módulo 8 se tratan los criterios de semejanza de triángulos y en el 10, el Teorema de Pitágoras.

Como se mencionó, durante el desarrollo de las sesiones de trabajo no se puso énfasis en cuestiones formales de demostración, aunque sí se validaron los resultados a que se llegaba. La atención se centró en el descubrimiento por parte de alumnos y maestros, partiendo de lo que ellos ya conocían y avanzando aún más a partir de sus nuevos logros.

En el apartado de "Ampliación del tema" de cada uno de los módulos 8, 9 y 10, se han desarrollado presentaciones de resultados relacionados con los temas seleccionados. Esto se llevó a cabo bajo la perspectiva de que la recreación de determinados resultados matemáticos sea útil a los maestros para fortalecer su conocimiento de las matemáticas que están enseñando, y que aborden esos temas un poco más allá de lo que los programas de estudio para sus alumnos les exigen. Así, se incluye una demostración de la "fórmula de Herón" en cada uno de estos tres módulos como una muestra de la interrelación de los temas seleccionados para la sección de geometría. Esa "fórmula" es un algoritmo que permite calcular el área de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados.

MEDICIÓN Y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Una aplicación de la semejanza de triángulos ocurrió en las matemáticas mismas en el estudio de los elementos de figuras triláteras: en la trigonometría como estudio de las razones (cocientes) de lados de triángulos rectángulos, que se basa en los conceptos de triángulos semejantes. Sin embargo, la trigonometría fue creada por cuestiones prácticas en los estudios astronómicos, y no por la resolución de triángulos rectángulos en un plano.

Están tan íntimamente relacionados los temas de proporcionalidad y semejanza con la trigonometría que, por ejemplo, el matemático, filósofo y metafísico Alfred North Whitehead (1861-1947) definió la *semejanza geométrica* en el capítulo de trigonometría de un texto de divulgación de las matemáticas. La definición que presentó fue la siguiente:

> Dos figuras son semejantes (i) si a cualquier punto en una figura le corresponde un punto en la otra figura, de modo que para cada línea haya una línea correspondiente, y a cada ángulo le corresponda otro ángulo, y (ii) si las longitudes de líneas correspondientes están en una proporción fija, y las magnitudes de ángulos correspondientes son las mismas (Whitehead, 1999, pp. 131-132).

Se considera que fue Hiparco de Nikaia (*ca.* 180-125 a. C.) el inventor de la trigonometría; sobresalió en el desarrollo de esta rama de las matemáticas Claudio Ptolomeo de Alejandría (*ca.* 85-165). Sin embargo, fue Bartolomé Pitiscus (1561-1613) quien por primera vez usó el término *trigonometría,* siendo el título de su obra publicada en 1600 *Trigonometriae sive, de dimensione triangulis, Liber* (Libro de trigonometría, o la medición de triángulos). Fue el primer texto en el que "se planteó un problema que explícitamente implicaba la resolución de un verdadero triángulo plano sobre la Tierra" (Katz, 1998, p. 367).

Las actividades diseñadas para esta segunda parte de la sección de geometría, básicamente, consistieron en trabajar con la resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a distintos problemas.

Objetivos

Los objetivos planteados para las sesiones de trabajo en el módulo de **Medición y razones trigonométricas** fueron los siguientes.

Que los alumnos:

- Reconocieran la invariancia de razones entre lados correspondientes de triángulos rectángulos semejantes (cateto opuesto a hipotenusa, cateto adyacente a hipotenusa, y cateto opuesto a cateto adyacente).
- Aplicaran el teorema de Pitágoras para calcular longitudes de lados de triángulos rectángulos.
- Usaran los términos *seno, coseno* y *tangente* para referirse a cada una de las tres razones de los lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos: cateto opuesto a hipotenusa, cateto adyacente a hipotenusa, y cateto opuesto a cateto adyacente, respectivamente.
- Comprendieran y usaran las propiedades de dos tipos especiales de triángulos rectángulos: el que se obtiene como la mitad de un cuadrado mediante su diagonal (triángulo rectángulo isósceles) y el que se obtiene como la mitad de un triángulo equilátero mediante una de sus alturas.
- Determinaran el *seno,* el *coseno* y la *tangente* de los ángulos notables de 30° y 60°, a partir de la utilización de un triángulo equilátero, y del de 45° a partir de un triángulo rectángulo isósceles.
- Determinaran el *seno,* el *coseno* y la *tangente* de cualquier ángulo agudo en un triángulo rectángulo mediante medición directa (por ejemplo, para un ángulo de 40°).

- Usaran las tablas trigonométricas y la calculadora en problemas de resolución de triángulos rectángulos.
- Resolvieran problemas de aplicación de las razones trigonométricas básicas (*seno, coseno* y *tangente).*

Planeación de las actividades con los alumnos

P

Inicio (1 min). El maestro saluda al grupo y explica brevemente que, para motivar el tema de la sesión de trabajo, se verá una videograbación.

Proyección de una videograbación (6 min). La videograbación trata del planteamiento de un problema sobre la determinación de la longitud de la escalinata en una de las caras laterales de una pirámide cuadrangular, esto es, la apotema de la pirámide (cápsula en videograbación, reproductora de videograbaciones, televisión).

La pirámide "El Castillo" (1 min). Se explica brevemente en qué consistirán algunos problemas de medición de determinados elementos que componen la pirámide "El Castillo", en Chichén Itzá; se proyectan imágenes en PowerPoint (cañón, computadora y pantalla).

La Torre de Pisa (1 min). Se explica brevemente en qué consistirán algunos problemas de medición de determinados elementos implicados en La Torre de Pisa; se proyectan imágenes en PowerPoint (cañón, computadora y pantalla).

Hoja de trabajo 1 (1 min). Explicación detallada de los problemas planteados en la *Hoja de trabajo 1*; discusión sobre qué tipo de triángulo está implicado en estos problemas (rotafolios y fotocopias).

Trabajo en equipo (2 min). Los alumnos trabajan en equipo para resolver los problemas planteados en la *Hoja de trabajo 1*, bajo supervisión del maestro (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (1 min). Voluntariamente, algunos de los alumnos presentan sus resultados al grupo (rotafolios, pizarrón y plumones).

Hoja de trabajo 2 (1 min). Lectura de los problemas planteados en la *Hoja de trabajo 2*; discusión sobre cómo se podrían resolver (rotafolios y fotocopias).

Trabajo en equipo (3 min). Los alumnos trabajan en equipo para resolver los problemas planteados en la *Hoja de trabajo 2*, bajo supervisión del maestro (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (1 min). Voluntariamente, algunos de los alumnos presentan sus resultados al grupo (rotafolios, pizarrón y plumones).

Trabajo en equipo (2 min). Los alumnos trabajan en equipo para resolver los problemas planteados en la *Hoja de trabajo 3*, bajo supervisión del maestro (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (2 min). Voluntariamente, algunos de los alumnos presentan sus resultados al grupo; se discute el porqué de tales resultados (rotafolios, pizarrón y plumones).

Hoja de trabajo 4 (2 min). Explicación del problema planteado en la *Hoja de trabajo 4* y, para su comprensión cabal, discusión de los elementos que lo componen (rotafolios y fotocopias).

Trabajo en equipo (8 min). Los alumnos trabajan en equipo para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 4*, bajo supervisión del maestro (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (6 min). Integrantes de distintos equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para encontrar los datos pedidos en cada una de las tres filas de la tabla presentada en el problema de la *Hoja de trabajo 4* (rotafolios, pizarrón, plumones y calculadoras).

Hoja de trabajo 5 (1 min). Explicación del problema planteado en la *Hoja de trabajo 5* y, para su comprensión cabal, discusión de los elementos que lo componen (rotafolios y fotocopias).

Trabajo en equipo (4 min). Los alumnos trabajan en equipo para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 5* (fotocopias, hojas en blanco, plumines, calculadoras, escalímetros, escuadras y reglas graduadas).

Presentación de resultados (2 min). Cada equipo anota sus resultados en la segunda columna de la tabla que aparece en la *Hoja de trabajo 5* (rotafolios y plumones).

Presentación de resultados (1 min). Integrantes de distintos equipos anotan los promedios pedidos en la tercera columna de la tabla que aparece en la *Hoja de trabajo 5* (rotafolios y plumones).

Tablas trigonométricas (2 min). Presentación de una tabla de valores trigonométricos y explicación de su contenido (rotafolios y fotocopias).

Comparación (1 min). Se comparan los resultados obtenidos para completar la tabla de la *Hoja de trabajo 5* con los que aparecen en la tabla trigonométrica (rotafolios y fotocopias).

Conclusión y despedida (1 min). El maestro describe brevemente lo logrado en esta sesión de trabajo y enuncia lo que se tratará en la siguiente sesión, antes de despedirse.

Segunda sesión

Inicio (3 min). El maestro saluda al grupo; se inicia esta segunda sesión resumiendo el trabajo que los alumnos realizaron durante la primera sesión para determinar las razones entre lados de triángulos rectángulos (cateto opuesto a hipotenusa, cateto adyacente a hipotenusa, y cateto opuesto a cateto adyacente) con ángulos de 30°, 45° y 60° (rotafolios con la lámina que muestra el trabajo hecho por los alumnos en la primera sesión).

Razones trigonométricas de ángulos complementarios (3 min). Discusión sobre la igualdad de algunas razones trigonométricas correspondientes a ángulos complementarios, según se observan en la tabla completada para los ángulos notables de 30°, 45° y 60° (rotafolios con la lámina que muestra el trabajo hecho por los alumnos en la primera sesión).

Términos convencionales (1 min). Se explica brevemente el uso de los términos *seno, coseno* y *tangente* (rotafolios).

Lectura de tablas trigonométricas (2 min). Dado el valor del *seno*, el *coseno* o la *tangente* de un ángulo, los alumnos determinan, a partir de la lectura de una tabla de valores trigonométricos, la amplitud del ángulo correspondiente en grados (tabla de valores trigonométricos en fotocopia).

Longitud de la escalinata de la pirámide "El Castillo" (2 min). Se plantea el problema de determinar la longitud de la escalinata en una de las caras laterales de la pirámide "El Castillo", en Chichén Itzá, dadas las medidas de la huella y el peralte de uno de sus 91 escalones iguales; se presentan en rotafolios un esquema de uno de los escalones y una imagen de la pirámide; se proyectan las mismas imágenes en PowerPoint usadas en la primera sesión de trabajo (rotafolios, cañón, computadora y pantalla).

Trabajo en equipo (2 min). Los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para calcular la longitud de la escalinata de la pirámide "El Castillo" (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (2 min). Integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para calcular la longitud de la escalinata de la pirámide "El Castillo" (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Altura de la pirámide "El Castillo" (1 min). Se pregunta cuál es la altura de la pirámide "El Castillo", en Chichén Itzá, desde el suelo hasta la base de la plataforma superior (rotafolios, cañón, computadora y pantalla).

Trabajo en equipo (1 min). Los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para calcular la altura de la pirámide "El Castillo" (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (1 min). Integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para calcular la altura de la pirámide "El Castillo" (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Medición de la inclinación de las caras laterales de la pirámide "El Castillo" (1 min). Se plantea el problema de determinar el ángulo de inclinación de una cara lateral de la pirámide "El Castillo" con la base de ésta (rotafolios, cañón, computadora y pantalla).

Trabajo en equipo (3 min). Los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para calcular la inclinación de una de las caras laterales de la pirámide "El Castillo" (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (2 min). Integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para calcular la inclinación de una de las caras laterales de la pirámide "El Castillo" (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Resolución de un triángulo rectángulo (1 min). Se plantea el problema de resolver un triángulo rectángulo uno de cuyos ángulos agudos es de 55° y el cateto adyacente a éste es de 2 unidades de longitud (rotafolios y fotocopias).

Discusión (1 min). Se discute acerca de la determinación de la medida del otro ángulo agudo del triángulo de este problema (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Trabajo en equipo (2 min). Los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para determinar las medidas de los otros dos lados del triángulo propuesto (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (2 min). Integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para determinar las medidas de los otros dos lados del triángulo propuesto (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Resolución de un triángulo isósceles (1 min). Se plantea el problema de resolver un triángulo isósceles dada la longitud de cada uno de sus dos lados iguales (3.31 cm) y la amplitud de uno de sus ángulos iguales (25°) (rotafolios y fotocopias).

Discusión (1 min). Se discute acerca de la determinación de la medida de los otros dos ángulos del triángulo de este problema (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Trabajo en equipo (4 min). Los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para determinar la medida del tercer lado del triángulo propuesto (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (3 min). Integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para determinar la medida del tercer lado, así como la de la amplitud de los otros dos ángulos, del triángulo propuesto (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Medición de la inclinación de la Torre de Pisa (2 min). Se plantea el problema de determinar el ángulo de inclinación de la Torre de Pisa con respecto al suelo; se presentan en rotafolios un esquema de las medidas de algunos componentes de la torre Inclinada de Pisa; se proyectan las mismas imágenes en PowerPoint usadas en la primera sesión de trabajo (fotocopias, rotafolios, cañón, computadora, pantalla).

Trabajo en equipo (5 min). Los alumnos trabajan en equipo bajo supervisión del maestro para resolver el problema planteado de la Torre de Pisa (fotocopias, hojas en blanco, plumines y calculadoras).

Exposición (3 min). Integrantes de uno de los equipos exponen ante el grupo los detalles de su trabajo realizado para determinar la medida del ángulo de inclinación de la Torre de Pisa con respecto al suelo (pizarrón, rotafolios, plumones y calculadoras).

Conclusión y despedida (1 min). El maestro felicita al grupo por sus logros durante las dos sesiones de trabajo; plantea que se trabajará en otros problemas de aplicación de la trigonometría durante las siguientes sesiones, y se despide.

Descripción de las actividades

P

El maestro saludó al grupo y, brevemente, indicó que durante estas sesiones de trabajo en la clase se resolverían problemas de matemáticas que uno mismo puede plantear acerca de situaciones en nuestro entorno. El maestro no mencionó, a propósito, qué tema se iba a tratar.

Enseguida, pidió a los alumnos que vieran con atención en la televisión una cápsula de videograbación, con una duración de aproximadamente 6 minutos, acerca de un problema de la determinación de la longitud de la escalinata en una de las caras laterales de una pirámide cuadrangular. Después de ver la videograbación, el maestro describió diversos detalles de la pirámide "El Castillo", que se localiza en Chichén Itzá, México. El primer problema que planteó el maestro fue el de determinar cuál es la inclinación de la escalinata de esta pirámide (el ángulo que forma la escalinata con el suelo), aunque indicó que primero se resolvería el problema de determinar la longitud de la escalinata de la pirámide (marcada con línea roja en la fotografía que se muestra en la *Hoja de trabajo 9*).

Luego, se mostraron varias imágenes de la pirámide "El Castillo", proyectándolas sobre el pizarrón mediante un cañón para computadora, así como de la torre inclinada de Pisa. Se indicó a los alumnos que con lo que lograran aprender en esta sesión de trabajo podrían determinar también cuál es la inclinación de la Torre de Pisa.

Ya se les habían entregado a los alumnos fotocopias de las hojas de trabajo 1, 2 y 3. Pero antes el maestro explicó, usando un diagrama como el de la figura que aparece en la *Hoja de trabajo 9*, reproducida en una cartulina pegada sobre el pizarrón, las medidas de uno de los escalones de la pirámide "El Castillo".

El maestro explicó en qué consistían los problemas planteados en las Hojas de trabajo 1, 2 *y* 3, usando para ello el diagrama que se presenta en la figura de la *Hoja de trabajo 1*, reproducida en una cartulina pegada sobre el pizarrón. Se describió que se iba a considerar que tanto la huella como el peralte de cada escalón representado en esta figura tenían 1 unidad de longitud. El maestro planteó verbalmente la primera pregunta que se presenta en esta hoja de trabajo: ¿qué tipo de triángulo es el *ABE*? (véase la *Hoja de trabajo 1*). Un alumno contestó que era un triángulo isósceles. Entonces, el maestro preguntó si alguien tenía alguna respuesta distinta o si observaban alguna otra característica en particular en este triángulo *ABE*. Dos alumnas explicaron que se trataba de un triángulo rectángulo. Luego, se tenía un triángulo isósceles y a la vez rectángulo.

Se dieron verbalmente a los alumnos las instrucciones de la *Hoja de trabajo* 1. El maestro supervisó el trabajo que realizaban los alumnos en cada equipo; cuando terminaron sus cálculos, en voz alta, algunos alumnos individualmente dieron los resultados de los cocientes pedidos.

El maestro dio a los alumnos verbalmente las instrucciones de la *Hoja de trabajo* 2; luego, les pregunto qué se les ocurría hacer para calcular la longitud del lado $\overline{AE}$ del triángulo ABE. Un alumno respondió que se podía utilizar el teorema de Pitágoras. Preguntó el maestro al grupo si conocían este teorema y todos respondieron afirmativamente. Así que se dedicaron a hacer cálculos, habiéndoseles indicado que podían utilizar calculadoras.

Mientras el maestro supervisaba el trabajo que realizaban en cada equipo, en uno de ellos una alumna le explicó cómo había utilizado el teorema de Pitágoras para determinar que la hipotenusa, $\overline{AE}$, medía $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ a partir de que cada uno de los catetos, $\overline{AB}$ y $\overline{BE}$, tenía 1 unidad de longitud. El maestro les pidió entonces a los integrantes de este equipo que mediante el mismo procedimiento determinaran la longitud de cada uno de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{AG}$.

El maestro continuó supervisando el trabajo que desarrollaban en equipo los alumnos, y después de algunos minutos pidió que dijeran en voz alta los resultados obtenidos. Un alumno respondió que $\overline{AE}$ medía $\sqrt{2}$, "que es 1.4142", otro alumno respondió que $\overline{AF}$ medía 2.8284 (cabe hacer notar que este resultado es el doble del anterior, lo cual es correcto, según se puede observar en la figura de la *Hoja de trabajo 1*), y, finalmente, otro alumno respondió que $\overline{AG}$ medía 5.6568, resultado que es incorrecto.

Mientras el maestro continuaba dando las instrucciones para calcular los cocientes de cateto vertical entre hipotenusa para cada uno de los tres triángulos bajo estudio,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}, \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} \text{ y } \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}},$$

un alumno encontró $\sqrt{18} = 4.2426$ como resultado para la longitud de $\overline{AG}$. El maestro pidió al grupo que verificara el resultado.

El resultado que dieron, en voz alta, para cada uno de los tres cocientes pedidos fue el mismo: 0.7071. A la pregunta de por qué se obtenía el mismo resultado si se tenían tres triángulos de distinto tamaño, una alumna dijo, literalmente, que era porque "la hipotenusa crece *a la misma cantidad* que crecen los catetos".

El maestro pidió a los alumnos que siguieran las instrucciones de la *Hoja de trabajo 3.* En ésta se pedía calcular los cocientes de cateto horizontal entre hipotenusa para cada uno de los tres triángulos bajo estudio:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}, \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} \text{ y } \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}}.$$

El maestro pidió que plantearan una conjeturara sobre qué resultados se iban a obtener, antes de hacer los cálculos. Un alumno dijo que iba a salir lo mismo porque (por ejemplo) $\overline{AB} = \overline{BE}$. Entonces, el maestro hizo notar que se tenía que en cada uno de los tres triángulos el cateto vertical era igual al cateto horizontal y, por ello, se iban a obtener los mismos resultados para estos cocientes pedidos en la *Hoja de trabajo 3.* De cualquier manera, los alumnos decidieron hacer los cálculos, pero ya no se discutieron más los resultados.

Se les entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 4*, en la que se pide completar una tabla con los cocientes

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \text{ y } \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

para triángulos rectángulos en los que el ángulo considerado es de 30°, 45° y 60°, respectivamente, con base en las figuras de un triángulo rectángulo isósceles y de uno equilátero.

El maestro explicó que en la primera figura se tenía un cuadrado cuya longitud de lado era de 1 unidad. Preguntó entonces cuánto medía uno de los ángulos formados con una diagonal del cuadrado y uno de sus lados (el ángulo GAD, por ejemplo; véase la *Hoja de trabajo 4*), y un alumno explicó que este ángulo medía 45° porque era la mitad de un ángulo recto. Así que el maestro indicó que se podría utilizar esta figura para completar el segundo renglón de la tabla contenida en la *Hoja de trabajo 4*, pero que se tenía que determinar qué hacer para completar los otros dos renglones, el primero y el tercero. Con base en la segunda figura, después de que el maestro indicó que los tres lados de este triángulo medían lo mismo, preguntó cómo se le llama a un triángulo así. Un alumno contestó que se trataba de un triángulo equilátero. Luego preguntó cuánto medía cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero y un alumno explicó por qué cada uno medía 60°. Después el maestro indicó a los alumnos que para sus cálculos consideraran que el lado $\overline{AB}$ del triángulo equilátero tenía 2 unidades de longitud, por lo que (indicó un alumno) el segmento $\overline{AD}$ tenía 1 unidad de longitud.

Después de aproximadamente 5 minutos de trabajo en equipo, que el maestro estuvo supervisando, un alumno explicó en el pizarrón cómo había hecho sus cálculos para completar el primer renglón de la tabla de la *Hoja de trabajo 4*. Las figuras que aparecen en esta hoja de trabajo también se mostraron en una cartulina sobre el pizarrón. Como se muestra en la segunda figura de la *Hoja de trabajo 4*, se estaba considerando el triángulo rectángulo ACD, cuyo ángulo recto es el $\angle ADC$. El maestro pidió a este alumno que antes de que regresara a su equipo anotara los tres resultados obtenidos en la tabla de la cartulina sobre el pizarrón.

Después de otros dos minutos de trabajo en equipo, otro alumno completó los datos en el segundo renglón de la tabla, esto es, las razones (cocientes) pedidas para el ángulo de 45°. Después de que anotó sus resultados, explicó cómo los había obtenido.

Transcurrieron aproximadamente dos minutos más de trabajo en equipo, supervisado por el maestro, antes de que otro alumno anotara los resultados de los cocientes pedidos para el ángulo de 60°. Anotó, en el último renglón de la tabla: 0.866, 0.5 y 0.5773. Se discutió con el grupo la verificación de estos resultados, y se cambió el resultado del último cociente por 1.7320, pues se había calculado "al revés":

$$\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}=\frac{1}{1.7320}=0.5773.$$

Así que la tabla de la *Hoja de trabajo 4* quedó como se muestra a continuación.

Ángulo (Grados)	$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
30°	0.5	0.8660	0.5773
45°	0.7071	0.7071	1
60°	0.866	0.5	1.7320

Después el maestro entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 5*, en la que se pide calcular los mismos cocientes anteriores correspondientes a un ángulo de 40° en un triángulo rectángulo. En esta actividad, sin embargo, se tenían que medir directamente las longitudes de los lados del triángulo dado. Como se puede observar en esta hoja de trabajo, cada equipo debía anotar el resultado que obtuviera para cada cociente y, finalmente, se iba a obtener el promedio de los resultados anotados en cada caso. El desarrollo de esta actividad tomó aproximadamente 10 minutos y no hubo ninguna dificultad en particular para hacer los cálculos pedidos. Los promedios obtenidos al final fueron los siguientes.

Angulo (Grados)	$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$
40°	0.6512	0.769	0.8468

El maestro entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 6*. Explicó que en cada una de las columnas aparecían los encabezados “seno”, “coseno” y "tangente". Brevemente, el maestro indicó que así se le llama respectivamente a cada uno de los cocientes de los lados de un triángulo rectángulo:

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}, \ \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} \ \text{y} \ \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}.$$

En esta actividad, se pedía completar la tabla con los valores para estos cocientes correspondientes a ángulos múltiplos de 5, desde 5° hasta 85°. El maestro indicó que para completar esta tabla debían proceder de manera parecida a como lo habían hecho para los ángulos de 30°, 60°, 45° y 40°, que deberían construir triángulos en los que aparecieran los ángulos requeridos de 5° en 5°. Luego el maestro indicó que conforme fueran terminando de completar la tabla, se podrían retirar de la clase. Pero enseguida aclaró que era una broma y que ese tipo de tablas ya existen; entregó entonces una copia de la *Hoja de trabajo 8* a cada alumno. También explicó que los valores mostrados en esta tabla están integrados en algunas calculadoras, y que durante la siguiente sesión de trabajo se practicaría tanto el uso de la calculadora para determinar los valores contenidos en este tipo de tablas como el uso de éstas. Antes de concluir esta primera sesión de trabajo, el maestro pidió a los alumnos que compararan sus resultados obtenidos para el ángulo de 40° con los valores que aparecen en la tabla de la *Hoja de trabajo 8* correspondientes a ese ángulo.

Ángulo (Grados)	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**
40°	0.643	0.766	0.839

Rápidamente, se hizo notar que se había cometido un error en cada caso, y que seguramente era a causa de los instrumentos utilizados para medir las longitudes de los lados del triángulo rectángulo con un ángulo de 40° con el que se trabajó.

Finalmente, antes de despedirse, el maestro dijo a los alumnos que en la siguiente sesión de trabajo se resolverían los problemas relacionados con la pirámide "El Castillo", de Chichén-Itzá, y con la torre inclinada de Pisa.

Segunda sesión

El maestro saludó al grupo y, brevemente, indicó que durante esta segunda sesión de trabajo en la clase se resolverían problemas de matemáticas relacionados con el tema que se había empezado a estudiar en la sesión anterior. Con el fin de hacer un recordatorio de algunos de los puntos importantes de las actividades que los alumnos habían desarrollado en la sesión anterior, el maestro presentó en el pizarrón la tabla de la *Hoja de trabajo 4* y describió cómo la habían completado.

Con base en la misma tabla completada de la *Hoja de trabajo 4*, el maestro pidió que observaran que el valor correspondiente al cociente $\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$ para el ángulo de 30° y el correspondiente al cociente $\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$ para el ángulo de 60° era el mismo, 0.5; que el valor correspondiente al cociente $\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$ para el ángulo de 30° y el correspondiente al cociente $\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$ para el ángulo de 60° también era el mismo, 0.866; y que para el ángulo de 45° ambos cocientes, $\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$ y $\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$, habían dado el mismo resultado, 0.7071.

El maestro pidió entonces que, en un periodo breve, pensaran por qué ocurría lo anterior; mientras tanto, entregó fotocopias de la *Hoja de trabajo 8*. Dos alumnos dieron una explicación correcta de cómo en ángulos complementarios de un triángulo rectángulo se intercambian los papeles de ambos catetos.

Después de hacer notar que para triángulos del mismo tipo, pero de distinto tamaño, de los cuales algunos alumnos habían dicho que sus lados crecían proporcionalmente, se obtenían los mismos valores para los cocientes de lados de un triángulo rectángulo, al igual que en la primera sesión el maestro informó que a cada uno de los cocientes

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}, \; \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} \text{ y } \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

se les denomina respectivamente *seno, coseno* y *tangente.*

Se mostró en el pizarrón una cartulina con la tabla de la *Hoja de trabajo 6* y el maestro pidió que respondieran algunas preguntas que él les iba a plantear. Para ello, podían utilizar la tabla de la *Hoja de trabajo 8.* Las preguntas fueron las siguientes:

- ¿Cuánto mide el ángulo cuya tangente es igual a 11.43?
- ¿Cuánto mide el ángulo cuyo seno es igual a 0.259?
- ¿Cuánto mide el ángulo cuyo coseno es igual a 0.574?

Las respuestas correctas respectivas dadas por los alumnos se muestran en la primera columna de la siguiente tabla.

85°			11.430
15°	0.259		
55°		0.574	

El maestro hizo notar que de esta manera se pueden utilizar las tablas trigonométricas para determinar las medidas de los ángulos a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. El maestro preguntó si se les ocurría qué otra aplicación podrían tener estas tablas. Como no hubo alguna participación o comentario al respecto por parte de los alumnos, para continuar se regresó al problema de la pirámide "El Castillo". Se mostró en una cartulina sobre el pizarrón el diagrama que aparece en la *Hoja de trabajo 9* de uno de sus escalones; enseguida, se pidió a los alumnos que contestaran la primera pregunta que aparece en esta hoja de trabajo (calcular la longitud de la escalinata). Después de que transcurrieron casi dos minutos, el maestro explicó, nuevamente, basándose en las dos figuras de la *Hoja de trabajo 9* reproducidas en cartulinas pegadas sobre el pizarrón, que se tenía que calcular la longitud de la escalinata, marcada con una línea roja en una fotografía de la pirámide, desde la base del suelo hasta la base donde empezaba la plataforma superior de la pirámide. Luego, antes de que algún alumno pasara al pizarrón a explicar sus cálculos, se proyectaron nuevamente las imágenes en PowerPoint de la pirámide “El Castillo” usadas en la primera sesión de trabajo. Una alumna calculó que la longitud de la escalinata de esta pirámide era de 36.11 metros.

El maestro preguntó si podían calcular la altura de la pirámide, desde el suelo hasta donde inicia la plataforma superior. Un alumno explicó sus cálculos en el pizarrón: simplemente multiplicó la longitud del peralte de cada escalón por el número de escalones, habiendo obtenido $26 \times 91 =$ 2 366 cm o 23.66 metros.

Utilizando el mismo diagrama que había trazado este alumno en el pizarrón, el maestro planteó el problema de determinar el ángulo que forma la escalinata de la pirámide con la base (el suelo). Esto es, calcular la inclinación de la escalinata con respecto al suelo. Mientras desarrollaban su trabajo en equipo, el maestro tuvo que explicar a uno de los alumnos por qué el ángulo que se debía calcular no era de 45°. En otro equipo, un alumno pensó que el ángulo pedido era de 30°. El maestro simplemente le dijo que el ángulo pedido no era de 30°, y continuó supervisando el trabajo en los demás equipos. En un equipo más, habían calculado los cocientes

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{26}{39.69} = 0.6550,$$

$$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{30}{39.69} = 0.7558$$

y

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{26}{30} = 0.8667.$$

(Aunque se habían equivocado en el último cociente, pues habían dividido en realidad cateto adyacente entre cateto opuesto, el maestro les indicó a los alumnos de este equipo que era suficiente con que calcularan alguno de los tres cocientes.) Entonces, el maestro preguntó cuál ángulo de los que aparecen en la tabla de la *Hoja de trabajo 8* se acercaba más al resultado, e identificaron que era el de 40 grados.

El maestro dio indicaciones en este equipo sobre cómo utilizar la calculadora para determinar el valor del ángulo con mayor precisión (40.92547705°). Después, un alumno explicó en el pizarrón cómo habían obtenido este resultado. El maestro pidió a todo el grupo que identificaran cuál ángulo de los que aparecen en la tabla de la *Hoja de trabajo 8* se acercaba más al que tiene como *seno* el valor 0.6550, y contestaron que era el de 40°, aunque el alumno que explicó sus resultados al grupo había anotado en el pizarrón el valor del ángulo que habían obtenido con la calculadora: 40.91° (esto a causa del uso sólo de dos valores decimales en sus cálculos).

Para la siguiente actividad, el maestro entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 10*, habiendo hecho referencia a que resolverían otros tipos de problemas en los que están implicadas *razones trigonométricas*. Se trataba de determinar los demás elementos de un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos $\overline{AB} = 2$ y uno de sus ángulos $\angle CAB = 55°$. Un alumno explicó que el otro ángulo medía 35°, y otro alumno explicó cómo había determinado el valor del cateto opuesto, 2.856, mediante el uso de la trigonometría, y el de la hipotenusa, 3.486, mediante el teorema de Pitágoras.

Para verificar algunos de los resultados que mostró este alumno en el pizarrón, el maestro pidió al grupo de alumnos que con su calculadora determinaran el valor del cociente del cateto adyacente entre la hipotenusa con referencia al ángulo de 35°: $\frac{2.856}{3.486} = 0.819$. Así, buscando este valor en la columna de coseno de la tabla trigonométrica, encontraron que sí correspondía al ángulo de 35 grados.

El maestro entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 11*. La actividad descrita en esta hoja de trabajo consistía en determinar los demás elementos de un triángulo isósceles —no se indica a los alumnos de qué tipo de triángulo se trata— siendo la longitud de cada uno de sus lados iguales $\overline{AC} = \overline{BC} = 3.31$ cm y la amplitud de uno de sus ángulos iguales $\angle CAB = 25^\circ$. De cualquier manera, el maestro planteó verbalmente este problema a los alumnos, auxiliándose de una cartulina sobre el pizarrón en la que aparecía el mismo diagrama de la *Hoja de trabajo 11*.

Después de aproximadamente tres minutos de trabajar en equipo, una de las alumnas indicó que ya había determinado la longitud de la base $\overline{AB}$ del triángulo, pero se había equivocado al considerar que estaba trabajando con un triángulo rectángulo (habló de la medida de los catetos, por ejemplo). Un alumno explicó por qué el $\angle ABC = 25^\circ$ y el $\angle ACB = 130$ grados.

Durante aproximadamente cinco minutos, el maestro estuvo supervisando el trabajo que realizaban en cada equipo y dio algunas pistas a los alumnos para que plantearan un procedimiento de resolución de este problema. Finalmente, una alumna explicó en el pizarrón cómo habían determinado en su equipo que la base $\overline{AB}$ del triángulo dado tenía 5.99772 unidades de longitud. Después, el maestro hizo un resumen del procedimiento que siguieron los alumnos para determinar la longitud de la base del triángulo isósceles dado, haciendo resaltar la idea que tuvieron de trazar la altura de este triángulo y, así, poder trabajar con un triángulo rectángulo.

El maestro indicó que para finalizar la clase iban a resolver el problema de la torre inclinada de Pisa. Les entregó a los alumnos fotocopias de la *Hoja de trabajo 12*, y se proyectaron nuevamente las imágenes en PowerPoint de la torre inclinada de Pisa usadas en la primera sesión de trabajo. Después, mostró en una cartulina sobre el pizarrón el mismo diagrama que aparece en la *Hoja de trabajo 12*, y les indicó a los alumnos que lo único que tenían que hacer era calcular el ángulo de inclinación con base en los datos que aparecen en este diagrama. Los alumnos estuvieron trabajando en equipo para resolver este problema durante casi cinco minutos.

Después una alumna explicó que había determinado la longitud

$$\overline{DF} = \sqrt{55.863^2 + 2.40^2} = 55.91$$

utilizando el teorema de Pitágoras y mediante la razón *seno* obtuvo

$$\frac{55.863}{55.91} = 0.99915,$$

cociente que corresponde a un ángulo de 87.63°. El maestro explicó que mediante este procedimiento habían hecho un cálculo innecesario: la determinación de la longitud de la hipotenusa. Les pidió que calcularan el valor del cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente, $\frac{55.863}{2.40} = 23.27625$, que corresponde a un ángulo de 87.53 grados.

El maestro dio por terminada esta sesión de trabajo mostrando sorpresa por lo que habían logrado aprender los alumnos sobre trigonometría, y por el tipo de problemas que habían resuelto. Indicó que en la siguiente clase continuarían resolviendo diversos problemas de aplicación de la trigonometría.

Lo que hicieron los alumnos

Un alumno dio respuesta a la primera pregunta que se presenta en la *Hoja de trabajo 1*, diciendo que se trataba de un triángulo isósceles, y explicó que era así porque este triángulo tiene dos lados iguales y uno desigual. Después, una alumna hizo notar que este triángulo *ABE* tiene un ángulo de 90°, y, enseguida, otra respondió que a un triángulo así se le llama "triángulo rectángulo".

Acerca de los cocientes que se pedía calcular en la *Hoja de trabajo 1*,

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}, \frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} \text{ y } \frac{\overline{DG}}{\overline{AD}},$$

se preguntó por qué se obtenía el mismo resultado en estos tres cocientes, si los tres triángulos considerados eran de distinto tamaño. Un alumno expresó: "porque sus lados van aumentando *proporcionalmente*".

Acerca del triángulo equilátero mostrado en la *Hoja de trabajo 4*, un alumno explicó que los tres ángulos internos "juntos" de cualquier triángulo deben ser igual a 180°, y como este triángulo es equilátero, sus tres ángulos son iguales y cada uno debe ser igual a 60°. En la figura del triángulo equilátero, se trazó la altura $\overline{CD}$ a la base $\overline{AB}$, formándose, así, los ángulos ACD y DCB. Se preguntó cuánto medía el ángulo ACD, y un alumno indicó que éste medía 30° porque era la mitad de uno de 60 grados.

Con base en las figuras que aparecen en la *Hoja de trabajo 4,* un alumno indicó primero cuál era el ángulo de 30° que iba a considerar y, de esta manera, cuál era el cateto opuesto a ese ángulo; explicó que "como toda la base mide 2", este cateto medía 1, porque era la mitad de la base del triángulo equilátero; y que la hipotenusa, que era uno de los lados del triángulo equilátero, medía 2. El ángulo de 30° que marcó en el pizarrón fue el $\angle ACD$. Así, obtuvo primero que

$$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Luego explicó cómo había determinado que la longitud del otro cateto ("el cateto adyacente es el que forma parte del ángulo", dijo este alumno), del $\overline{CD}$, era igual a 1.7320, mediante el teorema de Pitágoras: representando a la longitud de $\overline{CD}$ con c, como $1 + c^2 = 2^2$, resulta que $c^2 = 4 - 1$, esto es, $c = \sqrt{3} = 1.7320$. Ya con este resultado, calculó que

$$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1.7320}{2} = 0.8660$$

y, finalmente, que

$$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{1.7320} = 0.5773.$$

Otro alumno explicó cómo había obtenido los resultados para el ángulo de 45°. Primero tuvo que rehacer en el pizarrón el diagrama del cuadrado, pues el maestro lo había quitado para mostrar la tabla que se tenía que completar. Después de indicar que la hipotenusa $\overline{AG}$ del triángulo ADG medía $\sqrt{2} = 1.4142$ (sin necesidad de hacer el cálculo nuevamente, pues ya se había pedido hacerlo para otro problema en la *Hoja de trabajo 2*, y este alumno transfirió aquella solución para usarla en este problema de la *Hoja de trabajo 2*), mostró que

$$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{1.4142} = 0.7071.$$

Luego, sin necesidad de hacer más cálculos, indicó que el cateto adyacente también medía 1, pues los dos catetos considerados eran lados de un mismo cuadrado; por lo que

$$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{1.4142} = 0.7071,$$

y que por la misma razón (sin hacer cálculos), se tenía que

$$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{1} = 1.$$

Para el ángulo de 60°, se discutió con el grupo la verificación de los resultados presentados por uno de los alumnos, comenzando por la identificación del ángulo de 60° en el triángulo rectángulo *ADC* de la segunda figura de la *Hoja de trabajo 4*. Entonces, los alumnos indicaron que la hipotenusa era $\overline{AC} = 2$, el cateto adyacente $\overline{AD} = 1$, y el cateto opuesto $\overline{DC} = 1.7320$. Así que los resultados correctos fueron:

$$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1.7320}{2} = 0.866,$$

$$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{2} = 0.5$$

y

$$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{1.7320}{1} = 1.7320.$$

Durante la primera parte de la segunda sesión, un alumno explicó por qué el cociente $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ para el ángulo de 30° y el correspondiente al cociente $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ para el ángulo de 60° era el mismo, 0.5; y análogamente el valor correspondiente al cociente $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ para el ángulo de 30° y el correspondiente al cociente $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ para el ángulo de 60° también era el mismo, 0.866: Se obtenía el mismo resultado porque (en el mismo triángulo rectángulo considerado) "el cateto adyacente para el ángulo de 30° es el mismo que el cateto opuesto para el de 60°". Entonces, el maestro le pidió a este mismo alumno que pasara al frente y, utilizando la escuadra que tiene un ángulo de 30° y otro de 60°, explicara a sus compañeros lo que acaba de decir. Así lo hizo, sin dificultad alguna. En cuanto a los cocientes que se pidió observar para el ángulo de 45°, otro alumno contestó que ambos eran iguales porque en ese triángulo rectángulo ambos catetos, el adyacente y el opuesto, eran iguales.

Una alumna explicó cómo había determinado la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se muestra en la figura de la *Hoja de trabajo 9*, mediante el teorema de Pitágoras. Mientras daba su explicación iba anotando en el pizarrón lo siguiente:

$$30^2 + 26^2 = h^2$$
$$900 + 676 = h^2$$
$$h = \sqrt{1\,576} = 39.69 \text{ cm.}$$

Así, indicó que multiplicando el número de escalones, 91, por el valor determinado para la hipotenusa, *h*, se obtendría la longitud pedida de la escalinata: 3 611.79 cm; en metros, anotó esta alumna en el pizarrón: 36.11 metros.

Para el problema planteado en la *Hoja de trabajo 10*, un alumno explicó que el otro ángulo del triángulo dado medía 35°: explicó que en un triángulo todos sus ángulos deben sumar 180°, y como este triángulo tenía un ángulo recto (de 90°) y la medida de uno de sus ángulos agudos está dada, 55°, el otro ángulo debería medir 35°. Después, otro alumno explicó cómo había determinado las longitudes de los otros dos lados del triángulo dado. Basándose en el ángulo de 55°, usó la tangente en los valores de la tabla trigonométrica: la *tangente* de 55° es igual a 1.428. Luego, como la *tangente* es igual a cateto opuesto entre cateto adyacente y éste mide 2 para el ángulo de 55° en el triángulo dado, al multiplicar 2 por 1.428, obtuvo el valor del cateto opuesto: 2.856. La longitud de la hipotenusa fue calculada por este alumno mediante el teorema de Pitágoras: $\sqrt{2^2 + 2.856^2} = 3.486$.

Para el problema planteado en la *Hoja de trabajo 11*, un alumno explicó que el $\angle ABC$ medía 25° porque se tenía un triángulo isósceles, y éste y el ángulo dado eran los opuestos a los lados iguales; luego, dijo que la suma de estos dos ángulos era igual a 50° y que, por lo tanto, faltarían 130° para completar los 180°. Así que el tercer ángulo, el $\angle ACB$, debería ser igual a 130°. Después, una alumna explicó en el pizarrón cómo habían resuelto este problema en su equipo. Para explicar que habían trazado la altura del triángulo dado desde su vértice *C*, dijo que habían dividido la figura a la mitad para no hacer tantos cálculos. De esta manera, tenían ahora un ángulo recto formado con la base del triángulo dado y la altura trazada. Enseguida, explicó que habían utilizado el dato de que el *coseno* de 25° es igual a 0.906. Entonces, obtuvo que $0.906 \times 3.31 = 2.99886$ (aunque en el pizarrón anotó 2.9986); multiplicando este resultado por 2, llegó a que $\overline{AB} = 5.99772$. La razón que dio para multiplicar por 2 fue que inicialmente habían dividido al triángulo por la mitad.

Para calcular la inclinación de la Torre de Pisa, una alumna determinó primero la longitud $\overline{DF}$ que se muestra en la figura de la *Hoja de trabajo 12* utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{55.863^2 + 2.40^2} = 55.91.$$

Luego, utilizó la razón seno, cateto opuesto entre hipotenusa, y, habiendo obtenido

$$\frac{55.863}{55.91} = 0.99915,$$

determinó que correspondía a un ángulo de 87.63 grados.

Una alumna dictó como resultado del cociente de cateto opuesto entre cateto adyacente el número 0.0429622. El maestro lo anotó en el pizarrón. Luego, con la calculadora determinaron que el ángulo cuya tangente era el valor obtenido de ese cociente era de 2.46°. Entonces, se dieron cuenta de que habían hecho la división "al revés"; corrigieron e indicaron que el valor correcto de la división era igual a 23.27625, y que el ángulo cuya tangente corresponde a este valor es el de 87.53° (en realidad indicaron que era 87.63°; el error de una décima que aquí se anota es a causa de la cantidad de decimales que se usan en los cálculos).

Respuestas esperadas

Se esperaba que los alumnos conocieran el teorema de Pitágoras y que lo utilizaran para hacer sus cálculos trigonométricos a partir de las actividades planteadas en la *Hoja de trabajo 2*.

Se esperaba que los alumnos llegaran a la conclusión de que las razones trigonométricas de lados de triángulos rectángulos de distinto tamaño, pero de la misma forma (es decir, semejantes), dieran el mismo resultado. También se esperaba que descubrieran la reciprocidad de las razones de ángulos complementarios, siendo el triángulo rectángulo isósceles un caso particular (45° + 45° = 90°).

Se esperaba que sí conocieran la clasificación de los triángulos según las medidas de sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y según las medidas de sus ángulos (rectángulo, acutángulo, obtusángulo), aunque se dio énfasis a la resolución de problemas en los que estaban implicados triángulos rectángulos.

Desde luego que se esperaba que se cometieran errores de medición al calcular las razones correspondientes al *seno*, el *coseno* y la *tangente* del ángulo de 40° en la actividad de la *Hoja de trabajo 5*.

Para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 11*, sí se esperaba que trazaran la altura a la base del triángulo isósceles dado para formar, así, un triángulo rectángulo en el cual se pudieran aplicar los conocimientos adquiridos sobre razones trigonométricas.

Respuestas no esperadas

En los cálculos pedidos en la *Hoja de trabajo 2*, no se esperaba que algún alumno determinara que la longitud de $\overline{AG}$ era 5.6568; este resultado es el doble del segundo resultado, lo cual es incorrecto según se puede observar en la figura de la *Hoja de trabajo 1* ($\overline{AG}$ no es del doble de longitud que $\overline{AF}$). Cuando esto ocurrió, otro alumno hizo notar que el resultado dado como longitud de $\overline{AG}$ no era 5.6568. Este alumno explicó que se tenía que cada cateto medía 3 y, por lo tanto, la hipotenusa, $\overline{AG}$, tenía una longitud de $\sqrt{18} = 4.2426$.

No se esperaba que algún alumno visualizara que a partir del triángulo rectángulo que representaba uno de los escalones de la pirámide "El Castillo", las longitudes de cuyos catetos eran 30 cm y 26 cm, se podía formar un cuadrado (lo cual es falso: en realidad, se forma un rectángulo de base y altura desiguales), y que por eso la diagonal, que era la hipotenusa del triángulo, dividía al ángulo recto en dos ángulos iguales. Tampoco se esperaba que algún alumno pensara que el ángulo pedido era de 30°: un alumno visualizó que el triángulo rectángulo que representaba uno de los escalones de la pirámide tenía la misma forma que la escuadra con ángulos de 30 y 60 grados.

No se esperaba que algún equipo calculara los tres cocientes,

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}, \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} \text{ y } \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

para determinar el ángulo de inclinación de la escalinata de la pirámide con respecto al suelo.

No se esperaba que en el problema de la *Hoja de trabajo 11* alguien se confundiera pensando que el triángulo *ABC* era un triángulo rectángulo.

Planeación de las actividades del taller de los maestros

Inicio (1 min). El coordinador de las actividades de trabajo saluda al grupo de maestros participantes en el taller y explica, brevemente, que se trabajará con trigonometría.

Ángulos notables (1 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 1* a los maestros, se explica en qué consiste la primera actividad del taller: anotar los valores de las razones trigonométricas (*seno, tangente, secante, coseno, cotangente* y *cosecante*, en ese orden) de los ángulos notables de 30°, 45° y 60° (fotocopias, hojas en blanco, lápices, plumines, escuadras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Exposición (8 min). Uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller sus resultados para el ángulo de 30°; otro maestro presenta los resultados para el ángulo de 45°, y finalmente otro, los del ángulo de 60° (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Discusión de resultados (5 min). Se discute con el grupo de maestros la naturaleza de los resultados con los que se completó la tabla de la *Hoja de trabajo 1*; a partir de los valores presentados por los maestros, se discute sobre las razones trigonométricas de los ángulos notables de 30°, 45° y 60° *a)* en cuanto a ángulos complementarios, y *b)* en cuanto a reciprocidad multiplicativa (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

La pirámide cuadrangular (6 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 2* a los maestros, el coordinador del taller explica y discute con ellos en qué consiste el problema planteado; los maestros trabajan por parejas para resolver este problema, con el auxilio del coordinador del taller; después uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller su comprensión del problema y su estrategia de resolución, sin resolverlo aún (fotocopias, lápices, plumines, hojas en blanco, calculadoras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Trabajo en equipo (3 min). Los maestros continúan trabajando por parejas para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2*, con el auxilio del coordinador del taller (fotocopias, hojas en blanco, lápices, plumines y calculadoras).

Exposición (3 min). Uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller su procedimiento para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2,* así como sus resultados (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Discusión (3 min). Los participantes en el taller y el coordinador del mismo discuten la naturaleza del procedimiento para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2* y sobre los resultados obtenidos (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Área de un segmento de un círculo (6 min). Después de entregar fotocopias de la *Hoja de trabajo 3* a los maestros, el coordinador del taller explica y discute con ellos en qué consiste el problema planteado; los maestros trabajan por parejas para resolver este problema, con el auxilio del coordinador del taller; después uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller su comprensión del problema y su estrategia de resolución, sin resolverlo aún (fotocopias, lápices, plumines, hojas en blanco, calculadoras y pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Trabajo en equipo (3 min). Los maestros continúan trabajando por parejas para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2*, con el auxilio del coordinador del taller (fotocopias, hojas en blanco, lápices, plumines y calculadoras).

Exposición (3 min). Uno de los maestros presenta ante los demás participantes en el taller su procedimiento para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2,* así como sus resultados (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Discusión (3 min). Los participantes en el taller y el coordinador del mismo discuten la naturaleza del procedimiento para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2* y sobre los resultados obtenidos (pizarrón electrónico con sus aditamentos).

Conclusión y despedida (1 min). El coordinador del taller agradece a los maestros su participación y se despide.

Descripción de las actividades

El coordinador de las actividades del taller saludó a los maestros participantes y les informó que se dedicarían al estudio de algunas cuestiones de trigonometría. Hizo entrega de fotocopias de la *Hoja de trabajo 1* y explicó verbalmente en qué consistía la actividad de completar la tabla que aparece en esta hoja, la cual también se mostró proyectada en el pizarrón electrónico. Para todos los maestros participantes en este taller, fue claro que se trataba de determinar los valores de las razones trigonométricas *seno, tangente, secante, coseno, cotangente* y *cosecante* para triángulos rectángulos con un ángulo agudo de 30, 45 o 60 grados.

Mientras los maestros trabajaban para calcular los valores pedidos, el coordinador del taller observaba lo que hacían. Después de poco más de un minuto, un maestro explicó un procedimiento para determinar los valores pedidos para el ángulo de 45°, con base en una escuadra. Otro maestro explicó que sin necesidad de la escuadra, se podían obtener estos mismos resultados a partir de un cuadrado de lado unitario.

Se designó otro breve periodo para determinar los valores pedidos en las otras dos columnas de la tabla y, después, uno de los maestros explicó un procedimiento análogo al anterior, con base en dos escuadras con un ángulo de 30° y otro de 60° cada una. Hizo un diagrama y anotó los resultados en la columna correspondiente a 60° en la tabla de la *Hoja de trabajo 1* mostrada en el pizarrón electrónico.

El coordinador del taller preguntó si alguien podía explicar cómo hacer los cálculos para el ángulo de 30°. Un maestro dio una explicación basada en la complementariedad de dos ángulos y, después, otro maestro anotó en el pizarrón electrónico los cocientes pedidos.

Otro maestro propuso hacer los cálculos con base en un triángulo equilátero de lado 2. El coordinador pidió a este maestro que, en el pizarrón, expusiera su propuesta y anotara los resultados que obtuviera para la primera columna de la tabla. (La tabla con todos los resultados se muestra en la página siguiente.) En la primera columna se anotan los resultados obtenidos por los dos maestros que expusieron su trabajo. Aunque aparentemente el signo de igualdad indica que se hicieron operaciones con lo indicado en el primer miembro, en realidad se anotaron directamente tal y como las obtuvo el segundo maestro.

Para desarrollar la siguiente actividad, el coordinador les entregó a los maestros fotocopias de la *Hoja de trabajo* 2 y, enseguida, explicó verbalmente en qué consistía. Se trataba de calcular el ángulo que forma una cara lateral de una pirámide cuadrangular con su base. Inicialmente, algunos maestros pensaron que esto era equivalente a calcular el ángulo formado por una de las aristas de dos caras laterales y uno de los lados de la base. El coordinador no aclaró si esto era correcto o no: simplemente comentó que no estaba seguro de que se tratara del mismo ángulo. Sin embargo, mientras supervisaba el trabajo que desarrollaban los maestros y les planteaba preguntas adicionales o escuchaba las descripciones de sus procedimientos, tuvo que hacer uso de dos hojas de papel para mostrar visualmente a dos de los maestros que no se trataba del mismo ángulo.

Ángulo A (En grados) / Razón Trigonométrica	30°	45°	60°
sen A	$\dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
tan A	$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{1}{1} = 1$	$\sqrt{3}$
sec A	$\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\dfrac{2}{1} = 2$
cos A	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$
ctg A	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	$\dfrac{1}{1} = 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
csc A	$\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$	$\dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Después de que transcurrieron aproximadamente siete minutos, un maestro explicó ante los demás participantes en el taller el procedimiento que había diseñado para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2*. Se hizo notar que hasta este punto se tenían los siguientes resultados: $\overline{AE} = 40$ m, $\overline{AB} = 30$ m y $\overline{AF} = \overline{FO} = 15$ m. El coordinador informó que la altura de cada uno de los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide se denomina *apotema*, y preguntó si se requería determinar alguna otra magnitud para poder resolver el problema planteado de la pirámide.

Después de discutir un poco sobre la identificación de los elementos de la representación de la pirámide, el coordinador sugirió a los maestros que se fijaran en el triángulo AFE. Determinaron que $\overline{FE} = 37.08$ m; el coordinador preguntó para qué se requería saber la longitud de $\overline{FE}$, y un maestro indicó que ahora ya teníamos más información sobre el triángulo rectángulo FOE. Finalmente, calcularon que el ángulo indicado era de 66.14 grados.

El coordinador preguntó si había algún comentario adicional que se quisiera plantear sobre el problema de la *Hoja de trabajo 2*, y uno de los maestros comentó sobre la viabilidad de plantear este mismo problema a sus alumnos. Informó el coordinador que ya quedaba poco tiempo del asignado al desarrollo de este taller y que por ello ya no se iba a calcular la amplitud del ángulo EAB, e indicó a los maestros que, posteriormente, con calma, ellos podrían verificar si el $\angle EAB$ era de $66.14°$ o no.

Se entregaron fotocopias de la *Hoja de trabajo 3* a los maestros para desarrollar la última actividad de este taller sobre trigonometría. El coordinador explicó verbalmente en qué consistía el problema planteado en esta hoja de trabajo: se trataba de calcular el área de un *segmento de círculo*. Por cuestión de tiempo, se indicó a los maestros que sólo plantearan un procedimiento de resolución, aunque ya no hicieran los cálculos implicados en dicho procedimiento. El coordinador supervisó el trabajo que desarrollaban los maestros y, en determinado momento, les planteó la pregunta: ¿cuántas alturas tiene un triángulo? Después de que respondieron que tres, les expresó que esperaba que escogieran una altura adecuada para resolver fácilmente este problema del área de un segmento de círculo. Después de que transcurrió un periodo de casi seis minutos, uno de los maestros explicó un procedimiento basado en trazar la bisectriz del ángulo central ACB (véase la figura en la *Hoja de trabajo 3*).

El coordinador preguntó a los maestros de qué manera se podría utilizar la información del área del triángulo *ABC* para calcular la del segmento de círculo sombreado en la figura de la *Hoja de trabajo 3*. Otro maestro indicó que sería necesario calcular el área del círculo y, luego, restarle a ésta la del triángulo; y aseveró que esta diferencia sería el área pedida del segmento de círculo. El coordinador simplemente expresó que no era así, e inmediatamente el maestro que estaba dando su explicación corrigió y dijo que la diferencia sería el área del segmento de círculo más toda la del círculo que rodeaba al triángulo. Finalmente, este maestro expresó que se tendría que determinar qué parte proporcional del arco corresponde a la circunferencia completa.

Para finalizar, el coordinador replanteó esta observación del maestro e indicó que se tendría que trabajar con la proporción en la que interviene la razón del área del círculo a 360° y la del sector circular *ADBC* (véase la figura en la *Hoja de trabajo 3*), que se desconoce, a 50°. Luego, restando al área del sector circular *ADBC* la del triángulo *ABC*, se obtendría el área pedida del segmento de círculo. Así, se indicó que ya se tenía un procedimiento establecido y que sólo faltaba hacer los cálculos para resolver este último problema.

El coordinador agradeció a los maestros su participación en el taller y su esfuerzo para resolver cada uno de los problemas planteados.

Lo que hicieron los maestros

Después de poco más de un minuto desde que se había iniciado la primera actividad, un maestro explicó un procedimiento para determinar los valores pedidos con base en una escuadra con dos ángulos de 45°. Indicó que había considerado que cada uno de los dos lados iguales de esta escuadra tenía 1 unidad de longitud y, mediante el teorema de Pitágoras, se determinó que el tercer lado, el opuesto al ángulo recto en la escuadra, la hipotenusa, tenía una longitud de $\sqrt{2}$. Luego, fue anotando en el pizarrón electrónico los resultados en la columna correspondiente a 45° en la tabla de la *Hoja de trabajo 1*, en el mismo orden en que aparecen, de arriba hacia abajo, mientras mencionaba cuál cociente iba obteniendo.

Otro maestro, desde su lugar, explicó que sin necesidad de basarse en la escuadra, se podían obtener estos mismos resultados a partir de un cuadrado de lado unitario trazando una de sus diagonales, la cual forma con cada lado del cuadrado un ángulo de 45 grados.

Para determinar las razones trigonométricas pedidas para los ángulos de 30° y 60°, un maestro explicó un procedimiento análogo al anterior, pero ahora con base en dos escuadras con un ángulo de 30° y otro de 60° cada una. Mostró cómo colocándolas juntas por su lado opuesto al ángulo de 60° se formaba un triángulo equilátero. Consideró que cada lado de este triángulo tenía 1 unidad de longitud, y mostró que, con base en una sola de estas escuadras, se tenía un triángulo rectángulo cuya longitud de hipotenusa era de 1 unidad, un cateto de ½ unidad de longitud y, mediante el teorema de Pitágoras, determinó que el otro cateto medía $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Este maestro hizo un diagrama en el que anotó las longitudes de cada uno de los tres lados del triángulo rectángulo considerado para hacer los cálculos. Así, fue mencionando cuál cociente iba obteniendo, en el siguiente orden: Primero, determinó que

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

luego, indicó que el inverso (multiplicativo) de este valor corresponde a

$$\csc 60° = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Enseguida, determinó que

$$\cos 60^\circ = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

y, siendo la *secante* la inversa (multiplicativa) del *coseno*,

$$\sec 60^\circ = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Para el valor correspondiente a tan 60°, sólo indicó que "la división" de cateto opuesto entre cateto adyacente le daba $\sqrt{3}$, y que la inversa era por lo tanto

$$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Para el ángulo de 30°, otro maestro anotó en el pizarrón electrónico los cocientes que debían calcularse para obtener los valores del *seno*, la *tangente* y el *coseno* (en ese orden) que hacían falta en la primera columna de la tabla para el ángulo de 30°. Enseguida, comentó que tomaría los inversos (multiplicativos) de las razones obtenidas para determinar la *cosecante*, la *secante* y la *cotangente* del ángulo de 30°, y anotó los cocientes correspondientes.

Otro maestro propuso que los cálculos para los ángulos de 30° y 60° se facilitarían si se iniciaba construyendo un triángulo equilátero cuya longitud de lado fuese de 2 unidades. Este maestro hizo un diagrama del triángulo propuesto; trazó la altura y determinó que ésta medía $\sqrt{3}$ (habiendo determinado primero que la mitad de la base medía 1). Esto es, formó un triángulo rectángulo con un ángulo de 60°, y otro de 30° cuya hipotenusa medía 2, el cateto opuesto al ángulo de 30° medía 1, y el cateto adyacente a este ángulo era igual a $\sqrt{3}$. Así, obtuvo los valores para el *seno*, la *tangente*, el *coseno*, la *secante*, la *cotangente* y la *cosecante* (en este orden). Además, este maestro fue comparando sus resultados de las razones trigonométricas para el ángulo de 30° con los del ángulo de 60°, fijándose en las razones complementarias: el *coseno*, la *cotangente,* el *seno,* la *cosecante,* la *tangente* y la *secante,* respectivamente.

Un maestro expuso un procedimiento para resolver el problema planteado en la *Hoja de trabajo 2*, que consistió en localizar primero el punto de intersección de las dos diagonales de la base de la pirámide, al cual llamó "centro de la base" y lo denotó con O. Luego, localizó el punto medio F del lado $\overline{AD}$ de la base; trazó una perpendicular a este lado sobre la base hasta el punto O, la cual resultó ser también el pie de la altura bajada desde la cúspide E de la pirámide a su base. Finalmente, trazó la línea recta (apotema) que va del punto medio F de $\overline{AD}$ hasta la cúspide E de la pirámide, formando, así, el triángulo rectángulo FOE. A partir de que la base de la pirámide es cuadrada y tiene 900 m^2, se determinó que el lado de este cuadrado medía 30 m y, por lo tanto, el segmento $\overline{FO}$ medía 15 m. Así, indicó este maestro que el ángulo que se requería calcular era el $\angle EFO$. Luego, otro maestro indicó que se debería tomar el lado $\overline{AE}$, cuya longitud ya se sabía que era de 40 m, y que ya se tenía la longitud del lado $\overline{AF}$, la cual era de 15 m. Finalmente, indicó que hacía falta calcular la longitud de $\overline{FE}$ mediante el teorema de Pitágoras. Resultó que $\overline{FE} = 37.08$ metros.

Para determinar el ángulo pedido en el problema, los maestros sugirieron utilizar la función *coseno* directamente, ya que se conocía el cateto adyacente ($\overline{FO} = 15$ m) y la hipotenusa ($\overline{FE} = 37.08$ m) de dicho ángulo. Un maestro había determinado que $\angle EFO = 66.14$ grados.

Para resolver el problema del área de un segmento de círculo planteado en la *Hoja de trabajo 3*, un maestro explicó que trazando la bisectriz del ángulo central se formarían dos ángulos centrales de 25° cada uno. Con el pie de esta altura (la bisectriz misma) se determinaba un triángulo rectángulo cuya longitud de base se representó con x, que era la mitad de la cuerda $\overline{AB}$, y la longitud de la altura se representó con y. La hipotenusa de este triángulo, $\overline{AB}$, que era el radio del círculo, medía 2 cm. El maestro explicó que con esta información sería posible calcular el área del triángulo isósceles ABC.

Respuestas esperadas

Para completar la tabla de valores de las razones trigonométricas de la *Hoja de trabajo 1*, se esperaba que los maestros utilizaran la notación de la raíz cuadrada, y que no determinaran la expresión decimal de la extracción de una raíz cuadrada mediante la calculadora.

Respuestas no esperadas

En la actividad planteada en la *Hoja de trabajo 2*, no se esperaba que los maestros no distinguieran entre el ángulo diedro formado por una cara lateral de la pirámide y la base de ésta, y el ángulo formado por una arista común de dos caras laterales y uno de los lados de la base. No se tenía planeado dar una explicación de esta situación visualmente recurriendo al uso de dos hojas de papel y un escalímetro o algún otro artefacto.

Lo que señalaron los maestros

En cuanto a las razones trigonométricas para el ángulo de 30°, un maestro explicó que los valores de las razones correspondientes a este ángulo estaban implícitos en la figura que había trazado en el pizarrón otro maestro para el ángulo de 60°. Su argumento central fue que como en todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°, teniendo este triángulo rectángulo un ángulo de 90° y uno de 60°, la suma de estos dos es igual a 150°, por lo que el tercer ángulo debe ser de 30°. Así, sólo había que notar que los papeles desempeñados para el ángulo de 60° por los catetos opuesto y adyacente se intercambian para el de 30 grados.

Dos maestros hicieron comentarios sobre la conveniencia de trabajar con un triángulo equilátero de lado 2, por la facilidad para obtener los resultados directamente para las razones trigonométricas del ángulo de 30°, sin necesidad de hacer *cocientes de fracciones*. El coordinador resumió lo que ya habían dicho los maestros sobre las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios (los que suman 90°), así como sobre los valores recíprocos obtenidos, por ejemplo, para sen 30° y csc 30°. Se argumentó que esto ocurre así porque geométricamente se ve que se intercambian los papeles del dividendo y el divisor; esto es, por ejemplo, la razón *seno* es igual al cateto opuesto entre la hipotenusa y la razón *cosecante* es igual a la hipotenusa entre el cateto opuesto.

Un maestro argumentó que el problema de la pirámide planteado en la *Hoja de trabajo 2* podría ser complicado para los alumnos de 3er grado de secundaria (grado 9), en cuanto a que inicialmente se puede pensar que se requiere calcular el ángulo entre una de las aristas de dos caras laterales con una de las de la base de la pirámide cuadrangular (por ejemplo, $\angle EAB$) y no el que se determinó en esta actividad.

Recomendaciones para la enseñanza

Puede resultar interesante y muy formativo para todos los alumnos que, en vez de que el maestro simplemente corrija los errores cometidos por algunos de ellos, se platique con todo el grupo sobre cuál es la fuente del error (por ejemplo, confusión de ideas o conceptos), como el caso del alumno que mecánicamente obtuvo el cuádruple de 1.4142 cuando lo que se requería era el triple, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4.2426$.

Asimismo, se recomienda que se platique o se discuta con todos los alumnos del grupo los errores de visualización que cometan algunos de ellos, pues los demás alumnos pueden ayudar a identificar en qué consiste el error cometido. Sólo por hacer resaltar dos ejemplos de esta situación: *a)* un alumno le explicó al maestro que un ángulo medía 45° porque se podía completar un cuadrado cuya diagonal sería uno de los lados de ese ángulo, cuando en realidad se tenían dos segmentos perpendiculares entre sí de 30 cm y de 26 cm respectivamente, y *b)* por qué tomando como catetos de un triángulo estos dos segmentos ninguno de los ángulos agudos podía medir 30°, como lo propuso al maestro otro alumno.

Se recomienda que en sesiones subsiguientes en las que se avance en el estudio de la trigonometría, se discuta con los alumnos cómo validan diversos resultados geométricos que se utilizaron en el desarrollo de las actividades del módulo de trigonometría, tales como: *a)* el teorema de Pitágoras, *b)* la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°), *c)* la altura de un triángulo equilátero es su bisectriz, *d)* un triángulo equilátero también es equiángulo, *e)* la diagonal de un cuadrado divide sus ángulos rectos en dos ángulos iguales (o que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales), entre otros.

Ampliación del tema

El círculo trigonométrico

La *trigonometría* se ocupa de la medición de los ángulos y los lados de triángulos. "Trigonometría" es una palabra que proviene del griego: la parte *trigon* significa "triángulo" —figura con tres ángulos— y *metron*, "una medida".

Se puede adoptar un enfoque basado en un círculo para estudiar las relaciones fundamentales entre las longitudes de los lados de los triángulos, y con ellas poder determinar las medidas de sus ángulos. Parte del desarrollo de este enfoque se explica brevemente a continuación.

Trácese una circunferencia con centro en un punto cualquiera O y radio $r = \overline{OT}$, como se muestra en la figura 1. Para simplificar los cálculos, considérese que el segmento $\overline{OT}$ corresponde a la unidad de medida de longitud; esto es, el radio de la circunferencia

$$r = \overline{OT} = 1.$$

Al círculo correspondiente a la circunferencia que se acaba de trazar, de radio $r = 1$, se le denomina *círculo trigonométrico*. Trácese un ángulo central TOB de cualquier medida, cuyo lado inicial sea $\overline{OT}$ y B el punto de intersección de su lado final $\overline{TB}$ con la circunferencia. Siempre se toma a $\overline{OT}$ como el lado inicial de los ángulos centrales considerados, horizontal y de izquierda a derecha.

Ahora bien, el arco de circunferencia correspondiente al $\angle TOB$ se puede recorrer de T a B, o de T a B'. En el primer caso, los ángulos centrales así trazados se consideran positivos; y en el segundo, negativos. Una ventaja de este enfoque basado en un círculo es que se puede estudiar ángulos de cualquier amplitud (no sólo de 0° a 90°), incluyendo amplitudes negativas.

Desde el punto B en la figura 1, bájese una perpendicular a la línea $\overline{OT}$. Sea A el pie de esta perpendicular sobre la línea $\overline{OT}$ (B' es el punto de intersección de la prolongación de la perpendicular $\overline{BA}$ con la circunferencia). Luego, siendo $\overline{BB}$' una cuerda de la circunferencia, perpendicular al radio $\overline{OT}$ de la misma, $\overline{AB}$ es la mitad de $\overline{BB}$'; esto es, $\overline{AB}$ es la *semicuerda* que subtiende al $\angle TOB = \angle\alpha$.

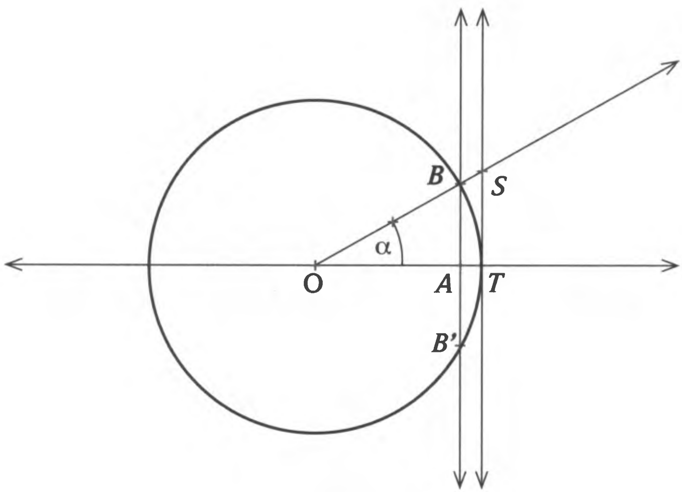


Figura 1

Ahora trácese la línea recta tangente a la circunferencia por el punto T; prolónguese el radio $\overline{OB}$, que se intersecará con esta *tangente* en el punto S. Así, $\overline{TS}$

es *el segmento de la tangente* que subtiende al $\angle\alpha = \angle TOB$. La línea recta $\overline{OB}$ es una secante a la circunferencia que pasa por el centro O de ésta, por lo que $\overline{OS}$ es *el segmento de la secante* comprendido entre O, que es a la vez el vértice del ángulo central TOB, y el punto S.

Con base en lo que hasta aquí se ha expuesto, a la longitud de cada uno de los tres segmentos notables en el círculo trigonométrico, $\overline{AB}$, $\overline{TS}$ y $\overline{OS}$, se les denomina —por razones obvias— de la siguiente manera (véase la figura 2):

$\overline{AB}$ es *la semicuerda* del ángulo α,

$\overline{TS}$ es *la tangente* del ángulo α, y

$\overline{OS}$ es *la secante* del ángulo α.

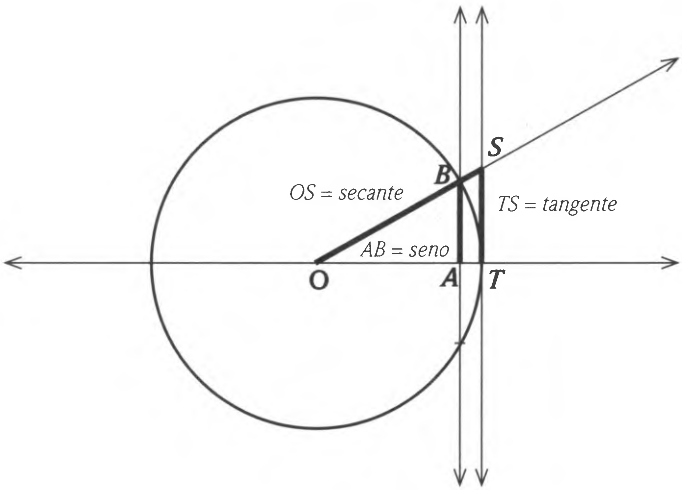


Figura 2

Ahora bien, a causa de una traducción errónea, en lugar del término semicuerda se usa el término *seno*. Esto es, se dice que *la semicuerda*

$$\overline{AB} \text{ es } \textit{el seno} \text{ del ángulo } \alpha.$$

Según una interpretación histórica, el matemático hindú Aryabhata (*ca.* 476-550) usó el término *jya*, que significa "cuerda", para referirse al valor de lo que ahora en el ámbito de las matemáticas llamamos *seno*. Cuando los árabes tradujeron a su idioma obras matemáticas de los hindúes, hicieron una transliteración con esta palabra y la tomaron como *jîba*, que realmente no significaba nada en árabe. Como el árabe se puede escribir usando solamente los símbolos de los sonidos consonantes, *jîba* se escribió como *jb*. Posteriormente, cuando otros leyeron esta palabra, la pronunciaron como *jaib*, que sí era una palabra árabe y quería decir "ensenada": parte del mar que entra en la tierra; el verbo "ensenar" significa esconder, poner en el seno algo, y así su participio, *ensenada* o *ensenado*, significa dispuesto a manera o en forma de seno. En castellano también se usa la palabra "bahía" para referirse a una "entrada de mar en la costa, de extensión considerable, que puede servir de abrigo a las embarcaciones". Por eso, cuando en Europa se tradujeron al latín obras matemáticas de los árabes, se utilizó la palabra latina que corresponde a "ensenada": *sinus*.

Se conocen al menos otras dos interpretaciones sobre el origen del término *seno* como se usa en matemáticas. Una es que la palabra *jayb* significaba "cuerda de un arco", pero que los traductores europeos la confundieron con el homónimo *jayb* que quiere decir "pliegue de una prenda de vestir", que sí corresponde al término latino *sinus*. Por otra parte, se asevera que la palabra árabe *jaib* quería decir "seno, pecho" y que se traduce al latín como *sinus*.

La palabra *tangente* proviene también del latín, *tangens,* de la que se deriva *tangent* y quiere decir "tocando", del verbo *tangere,* "tocar". Así, por ejemplo, la línea tangente a un círculo sólo lo toca, pero no lo cruza. A la línea recta que sí cruza o corta a un círculo —esto es, que lo divide en dos partes—, se le denomina secante; este término proviene igualmente del latín, *secans,* del que se deriva *secant* y quiere decir "cortando", del verbo *secare,* "cortar".

Por cuestiones de brevedad en la escritura, se usa la siguiente notación para referirse a la medida de cada uno de los segmentos notables $\overline{AB}$, $\overline{TS}$ y $\overline{OS}$, relacionados con el ángulo α:

$$\overline{AB} = sen\,\alpha,$$

$$\overline{TS} = tan\,\alpha$$

y

$$\overline{OS} = sec\,\alpha.$$

Se tiene entonces que bajo este enfoque del círculo trigonométrico, todo coincide con las definiciones de las razones trigonométricas de los lados de un triángulo rectángulo (que es otro enfoque): en el círculo trigonométrico de la figura 3, considérese el triángulo rectángulo *OAB,* cuyo ángulo recto es el $\angle OAB$. Con respecto al ángulo α de este triángulo rectángulo, que es el mismo que el ángulo central *TOB* en el círculo trigonométrico, se tiene que

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

y

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}};$$

pero siendo semejantes los triángulos *OAB* y *OTS,* se tiene que

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{TS}}{1} = \overline{TS}$$

y

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}};$$

y nuevamente, dado que los triángulos *OAB* y *OTS* son semejantes,

$$\sec \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \overline{OS}.$$

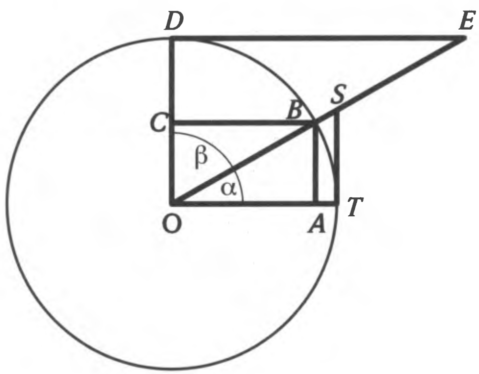


Figura 3

Con base en los trazos hechos en la figura 1, levántese una línea recta perpendicular a $\overline{OT}$ por el punto *O,* centro de la circunferencia. Sea *D* el punto de intersección de esta perpendicular con la circunferencia (véase la figura 4).

Luego, el ángulo central BOD es el complemento del ángulo central α, considerado antes; esto es, como $\overline{OD}$ es perpendicular a $\overline{OT}$, denotando como $\angle\beta$ al $\angle BOD$, se tiene que

$$\angle TOD = \angle TOB + \angle BOD = \angle\alpha + \angle\beta = 1 \text{ ángulo recto} = 90^\circ.$$

Desde el punto B trácese una línea recta perpendicular a $\overline{OD}$. Sea C el pie de esta perpendicular sobre $\overline{OD}$. Luego, $\overline{CB}$ es la *semicuerda* que subtiende al $\angle BOD = \angle\beta$.

De manera análoga a como se hizo antes, por el punto D trácese la línea recta tangente a la circunferencia; la prolongación del radio $\overline{OB}$ se intersecará con esta línea tangente en el punto E. Así, $\overline{DE}$ es el segmento de la tangente que subtiende al $\angle\beta = \angle BOD$. Sabemos que la línea recta $\overline{OB}$ es una secante a la circunferencia que pasa por el centro O de ésta, por lo que $\overline{OE}$ es el segmento de la secante comprendido entre O, que es a la vez el vértice del ángulo central BOD, y el punto E.

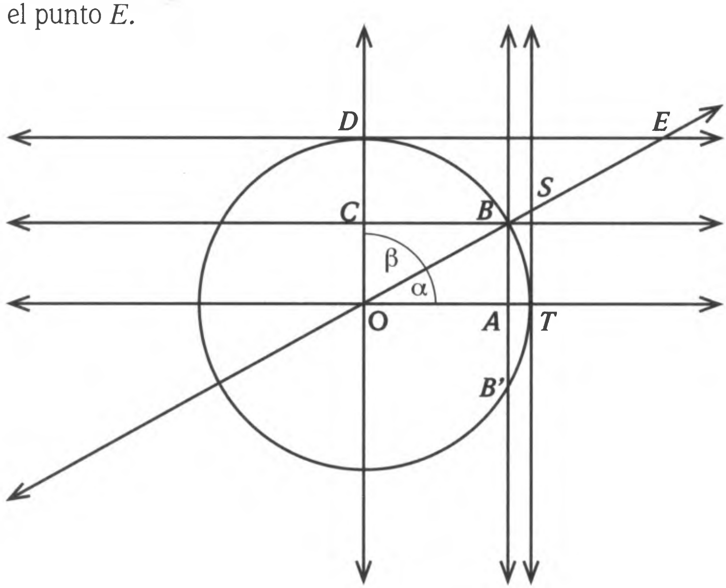


Figura 4

Así, con referencia al $\angle\beta = \angle BOD$ se tienen los segmentos notables $\overline{CB}$, $\overline{DE}$ y $\overline{OE}$; usando la notación antes descrita, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\overline{CB} = sen\,\beta,$$

$$\overline{DE} = tan\,\beta$$

y

$$\overline{OE} = sec\,\beta.$$

Siendo β, el complemento de α, se tiene entonces que

$\overline{CB}$ es *el seno del* co*mplemento de* α,

$\overline{DE}$ es *la tangente del* co*mplemento de* α

y

$\overline{OE}$ es *la secante del* co*mplemento de* α.

Por lo que se toma el sufijo *co-* del término *complemento* y se antepone a cada uno de los términos *seno, tangente* y *secante,* formándose así los nuevos términos *coseno, cotangente* y *cosecante.* Se dice, entonces, con mayor brevedad, que

$\overline{CB}$ es *el coseno de* α,

$\overline{DE}$ es *la cotangente de* α

y

$\overline{OE}$ es *la cosecante de* α.

Con el fin de abreviar aún más la escritura, se usa la siguiente notación para referirse a la medida de cada uno de los segmentos notables $\overline{CB}$, $\overline{DE}$ y $\overline{OE}$ con relación al $\angle\alpha$:

$$\overline{CB} = \cos\alpha,$$

$$\overline{DE} = \cot\alpha$$

y

$$\overline{OE} = \csc\alpha.$$

Como se tiene que el $\angle\alpha$ y el $\angle\beta$ son complementarios (esto es, $\alpha + \beta = 90°$), por definición

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta = \overline{CB},$$

$$\cot\alpha = \tan\beta = \overline{DE}$$

y

$$\csc\alpha = \sec\beta = \overline{OE}.$$

Nótese nuevamente que los resultados obtenidos a partir del círculo trigonométrico coinciden con las definiciones de las razones trigonométricas de los lados de un triángulo rectángulo: En la figura 3 se tiene que

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA};$$

pero como el cuadrilátero *OABC* es un rectángulo,

$$\cos\alpha = \overline{OA} = \overline{CB}$$

y

$$\cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}},$$

y siendo semejantes los triángulos *OAB* y *EDO,* se tiene que

$$\cot\alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{DE}}{1} = \overline{DE}$$

y

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}};$$

nuevamente, dado que los triángulos *OAB* y *EDO* son semejantes,

$$\csc\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OE}}{1} = \overline{OE}.$$

Ahora bien, en el ΔOTS que es rectángulo se tiene, por el teorema de Pitágoras, que

$$\overline{OT}^2 + \overline{TS}^2 = \overline{OS}^2$$

o

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha.$$

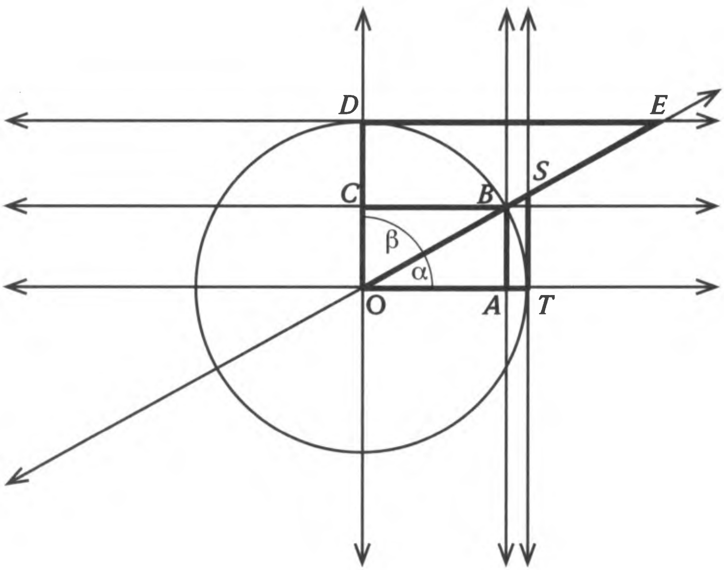


Figura 5

Análogamente, en el ΔOAB se tiene que

$$\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$$

o

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Asimismo, en el ΔODE se tiene que

$$\overline{OD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{OE}^2$$

o

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$

Así que mediante el teorema de Pitágoras se han demostrado los siguientes teoremas sobre cómo se relacionan los segmentos notables referentes a un ángulo central α en un círculo trigonométrico (véase la figura 5, en la página anterior):

Teorema 1. El cuadrado de la secante $\overline{OS}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ es igual al cuadrado de la tangente $\overline{TS}$ del mismo ángulo más 1:

$$\sec^2 \alpha = \tan^2 \alpha + 1.$$

Teorema 2. El cuadrado del seno $\overline{AB}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ más el cuadrado del coseno $\overline{OA}$ del mismo ángulo es igual a 1:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Teorema 3. El cuadrado de la cosecante $\overline{OE}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ es igual al cuadrado de la cotangente $\overline{DE}$ del mismo ángulo más 1:

$$\csc^2 \alpha = \cot^2 \alpha + 1.$$

A partir de que los triángulos OTS y OAB son semejantes se tiene que

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$$

y

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}.$$

O lo que es lo mismo, mediante las sustituciones correspondientes:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

y

$$\frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Así, mediante la proporcionalidad de lados correspondientes de triángulos semejantes, se han demostrado los teoremas que se enuncian a continuación. Es conveniente hacer notar que las igualdades contenidas en esos teoremas *no* se han dado como definiciones.

Teorema 4. La tangente $\overline{TS}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ es igual a la razón del seno $\overline{AB}$ al coseno $\overline{OA}$ del mismo ángulo:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Teorema 5. La secante $\overline{OS}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ es igual a la razón de 1 al coseno $\overline{OA}$ del mismo ángulo:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Con base en la semejaza de triángulos, se pueden demostrar los siguientes teoremas:

Teorema 6. La cotangente $\overline{DE}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ es igual a la razón del coseno $\overline{OA}$ al seno $\overline{AB}$ del mismo ángulo:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Teorema 7. La cosecante $\overline{OE}$ de un ángulo central $\alpha = \angle TOB$ es igual a la razón de 1 al seno $\overline{AB}$ del mismo ángulo:

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

La "fórmula de Herón"

Utilizaremos resultados de trigonometría para obtener la "fórmula de Herón" (este resultado se deduce en el módulo 8, **Medición y semejanza de triángulos**, así como en el módulo 10, **Áreas y Teorema de Pitágoras**). Como se supone que están dadas las longitudes a, b y c de los lados de un ΔABC, como el que se muestra en la figura 6 o el de la figura 7, se conoce la medida b de su base. Se puede determinar la longitud h de la altura de cualquiera de estos triángulos de la siguiente manera.

Sea α la medida del ángulo agudo BAC del triángulo de la figura 6. Así, se tiene que en el triángulo rectángulo BDA

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{c},$$

de lo cual se obtiene que $h = c \operatorname{sen} \alpha$. En el mismo triángulo rectángulo BDA también se tiene que

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{c},$$

de lo cual se obtiene que $\overline{AD} = c\cos\alpha$.

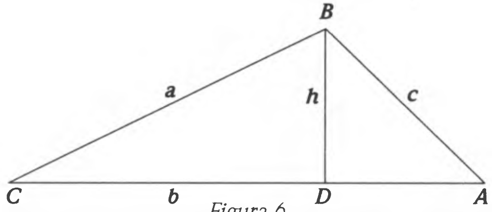


Figura 6

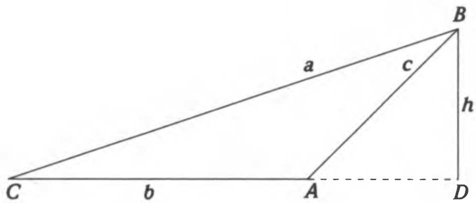


Figura 7

Si α fuese la medida del ángulo obtuso BAC del triángulo de la figura 7, se tendría que

$$180^\circ = \angle DAB + \angle\alpha;$$

esto es,

$$\angle DAB = 180^\circ - \angle\alpha.$$

Así,

$$\text{sen}\,(\angle DAB) = \text{sen}\,(180^\circ - \angle\alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

y análogamente,

$$\cos\,(\angle DAB) = \cos\,(180^\circ - \angle\alpha) = -\cos\,\alpha$$

(ambos resultados se “muestran” a partir del círculo trigonométrico).

Por lo anterior, en la figura 7 se tiene que

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\angle BAC) = \text{sen}\,(\angle DAB) = \frac{h}{c}$$

y

$$\cos\,\alpha = \cos\,(\angle BAC) = -\cos\,(\angle DAB) = -\frac{\overline{AD}}{c},$$

de lo cual se obtiene respectivamente que

$$h = c\ \text{sen}\ \alpha$$

y

$$\overline{AD} = -c\ cos\ \alpha.$$

Luego, hemos visto que para el caso del ángulo obtuso se tiene que

$$\overline{AD} = -c\ cos\ \alpha$$

y para el caso del ángulo agudo,

$$\overline{AD} = c\ cos\ \alpha;$$

asimismo, en ambos casos se tiene que

$$h = c \; sen \; \alpha. \qquad (1)$$

Ahora bien, en la ampliación del tema del módulo 10, **Áreas y Teorema de Pitágoras**, se obtiene la igualdad

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b\,(\,\overline{AD}\,)$$

en la que el signo + corresponde al caso del ángulo obtuso y el signo – al caso del ángulo agudo.

Así, sustituyendo el valor de $\overline{AD}$ en términos de cos α, se obtiene la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\,cos\,\alpha, \qquad (2)$$

la cual se cumple para cualquier tipo de ángulo α: agudo, obtuso e incluso recto. A la fórmula (2) se le conoce como *ley de cosenos.*

Ahora, elevando al cuadrado ambos miembros de la fórmula para calcular el área de un triángulo en términos de su base y su altura,

$$\acute{a}rea\;(\Delta ABC) = \frac{b \times h}{2},$$

se tiene que

$$[\acute{a}rea\;(\Delta ABC)]^2 = \frac{b^2 \times h^2}{4}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad (1) se obtiene que

$$h^2 = c^2\,sen^2\,\alpha. \qquad (3)$$

A partir de la identidad

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

se tiene que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha. \tag{4}$$

Así, sustituyendo (4) en (3),

$$h^2 = c^2 (1 - \cos^2 \alpha).$$

Pero a partir de la igualdad (2),

$$\cos^2 \alpha = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}$$

Así,

$$h^2 = c^2 \left(1 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2c^2}\right). \tag{5}$$

Veamos qué se obtiene al sustituir (5) en la fórmula

$$[\textit{área}\ (\Delta ABC)]^2 = \frac{b^2 \times h^2}{4}.$$

$$[\textit{área}\ (\Delta ABC)]^2 = \frac{b^2 \times c^2 \left(1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right)}{4} = \frac{b^2}{4} c^2 \left(1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right)$$

$$= \frac{b^2}{4} \left(c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right).$$

A partir de aquí, lo que sigue coincide con el desarrollo presentado en la ampliación del tema en el módulo 10, "Áreas y el teorema de Pitágoras", donde se llegó finalmente a que

$$[\textit{área}\ (\Delta ABC)]2 = \left(\frac{(b+c)+a}{2}\right)\left(\frac{(b+c)-a}{2}\right)\left(\frac{a-(b-c)}{2}\right)\left(\frac{a+(b-c)}{2}\right).$$

Y según se vio en esa misma parte,

$$\frac{(b+c)+a}{2} = s,$$

$$\frac{(b+c)-a}{2} = s-a,$$

$$\frac{a-(b-c)}{2} = s-b$$

y

$$\frac{a+(b-c)}{2} = s-c.$$

Luego,

$$[\textit{área}\ (\Delta ABC)]^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\textit{área}\ (\Delta ABC) = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)},$$

que es "la fórmula de Herón".

BIBLIOGRAFÍA

Bishop, A. J. Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización, en: R. Cambray, E. A. Sánchez y G. Zubieta B. (comps.), *Antología de educación matemática,* Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, 1992, pp. 29-42. [Inédito: Didactical implications from research on visualization; versión en castellano de R. Cambray N.]

Cambray-Núñez, R. Un fulcro aportado por Euclides para mover el mundo de la geometría, *XI Encuentro de Maestros de Matemáticas, Memorias de las Conferencias Plenarias,* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México, 2003, pp. 59-75.

Cambray-Núñez, R. "El libro I de los *Elementos* de Euclides en las novelas de loros", *Miscelánea Matemática 38,* 2003 (diciembre), pp. 43-63. [Revista publicada por la Sociedad Matemática Mexicana]

Courant, R. y H. Robbins. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales,* México. Fondo de Cultura Económica, 2002. [Versión en castellano de la 2a ed. en inglés (1996); Prefacio y Avances recientes: Ian Stewart.]

Daus, P. H. "Why and how we should correct the mistakes of Euclid", *Mathematics Teacher 53,* 1960, pp. 576-581.

Euclides. *Elementos* (vol. 1: libros I-IV). Madrid, Gredos, 1991. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños, int. de Luis Vega.]

Euclides. *Elementos* (vol. 2: libros V-IX). Madrid, Gredos, 1994. [Trad. al castellano y notas de María Luisa Puertas Castaños.]

Freudenthal, H. "Problemas mayores de la educación matemática", en: R. Cambray, E. A. Sánchez y G. Zubieta B. (comps.), *Antología de educación matemática,* Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, 1992, pp. 7-27.

Gemmignani, M. C. "On the geometry of Euclid", *The Mathematics Teacher 60,* 1967, pp. 160-164.

Hofmann, J. E. *Historia de la matemática: Desde el comienzo hasta la Revolución francesa.* México, Limusa, 2002.

Katz, V. J. *A History of mathematics: An Introduction.* Nueva York, Addison-Wesley, 1998.

Meder, A. E., Jr. "What is wrong with Euclid?" *Mathematics Teacher 51,* 1958, pp. 578-584.

Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's Elements / Proclus.* Princeton University Press, Princeton, 1992/1970. [Int., notas y trad. al inglés de Glenn R. Morrow; prefacio de Ian Mueller a la ed. de 1992.]

Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española,* 22a ed., 2 tomos, Madrid, Espasa Calpe, 2001.

Rey Pastor, J. y J. Babini, *Historia de la matemática,* vol. 1, Barcelona, Gedisa, 2000. [Prefacio de J. Vernet.]

Rozan, J. E. *Aritmética y nociones de geometría. Cuarto libro,* México, Progreso, 1947.

Schubring, G. "Sobre la metodología de análisis de libros de texto históricos: Lacroix como autor de libros de texto", *Mathesis 8,* 3, 1992, pp. 273-298. [On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author, *For the Learning of Mathematics 7* (1987), 3, pp. 41-51; versión en castellano de R. Cambray N.]

Schwartzman, Steven. *The words of mathematics. An etymological dictionary of mathematical terms used in English.* The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1994.

Serra, Michael. *Discovering geometry. An inductive approach.* Key Curriculum Press, Berkeley, CA, 1997.

Singh, Simon. *El enigma de Fermat: La historia de un teorema que intrigó durante más de trescientos años a los mejores cerebros del mundo.* Barcelona, Planeta, 2003.

Whitehead, A. N. *An introduction to mathematics.* México, Instituto Politécnico Nacional, 1999/1911.

APÉNDICE A

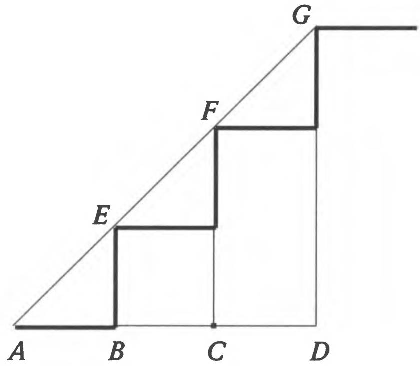
HOJAS DE TRABAJO PARA LAS ACTIVIDADES CON LOS ALUMNOS

Primera sesión

Hoja de trabajo 1

En la siguiente figura se representan varios escalones en los que $\overline{AB}$ tiene una unidad de longitud y $\overline{BE}$ mide también una unidad de longitud. Es decir, que la huella y el peralte miden lo mismo.

- ¿Qué tipo de triángulo es el *ABE*?
- ¿Por qué?



Dividan la longitud del lado $\overline{BE}$ del triángulo *ABE* entre la longitud de su lado $\overline{AB}$ y anoten el resultado.

Consideren ahora dos escalones y dividan la longitud del lado $\overline{CF}$ del triángulo *ACF* entre la longitud de su lado $\overline{AC}$ y anoten el resultado.

Análogamente, consideren ahora tres escalones y dividan la longitud del lado $\overline{DG}$ del triángulo ADG entre la longitud de su lado $\overline{AD}$ y anoten el resultado.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}} = \underline{\qquad\qquad}$$

- ¿Qué observan al comparar los tres cocientes anteriores?
- ¿Por qué?

Hoja de trabajo 2

Ahora calculen la longitud del lado $\overline{AE}$ del triángulo ABE y anoten el resultado.

Calculen la longitud del lado $\overline{AF}$ del triángulo ACF y anoten el resultado.

También calculen la longitud del lado $\overline{AG}$ del triángulo ADG y anoten el resultado.

$\overline{AE} = \underline{\qquad\qquad}$

$\overline{AF} = \underline{\qquad\qquad}$

$\overline{AG} = \underline{\qquad\qquad}$

Dividan la longitud del lado $\overline{BE}$ del triángulo ABE entre la longitud del lado $\overline{AE}$ y anoten el resultado.

Consideren ahora dos escalones y dividan la longitud del lado $\overline{CF}$ del triángulo ACF entre la longitud del lado $\overline{AF}$ y anoten el resultado.

Análogamente, consideren ahora tres escalones y dividan la longitud del lado $\overline{DG}$ del triángulo ADG entre la longitud del lado $\overline{AG}$ y anoten el resultado.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AG}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- ¿Qué observan al comparar los tres cocientes anteriores?
- ¿Por qué?

Hoja de trabajo 3

Dividan la longitud del lado $\overline{AB}$ del triángulo ABE entre la longitud del lado $\overline{AE}$ y anoten el resultado.

Consideren ahora dos escalones y dividan la longitud del lado $\overline{AC}$ del triángulo ACF entre la longitud del lado $\overline{AF}$ y anoten el resultado.

Análogamente, consideren ahora tres escalones y dividan la longitud del lado $\overline{AD}$ del triángulo ADG entre la longitud del lado $\overline{AG}$ y anoten el resultado.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

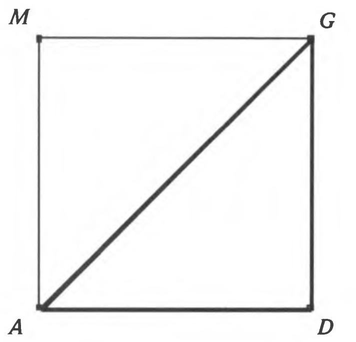
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

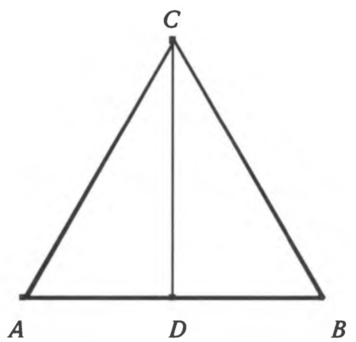
- ¿Qué observan al comparar los tres cocientes anteriores?
- ¿Por qué?

Hoja de trabajo 4

Completen la siguiente tabla basándose en los triángulos que aparecen debajo de ella.

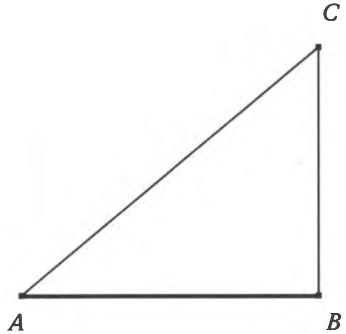
Ángulo (Grados)	$\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$
30°			
45°			
60°			





Hoja de trabajo 5

En el triángulo *ABC* de la siguiente figura el ángulo *CAB* mide 40°. Midan las longitudes de los lados de este triángulo y calculen con estas medidas el *seno*, el *coseno* y la *tangente* de 40 grados.



Completen la siguiente tabla con los datos obtenidos.

40º	Datos obtenidos	Promedio
$\dfrac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$		
$\dfrac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$		
$\dfrac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$		

Hoja de trabajo 6

Para concluir la sesión de trabajo de hoy, ahora completen la siguiente tabla usando los métodos aprendidos en las actividades anteriores. (Conforme vayan terminando, se podrán retirar.)

Ángulo (Grados)	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**
5°			
10°			
15°			
20°			
25°			
30°			
35°			
40°			
45°			
50°			
55°			
60°			
65°			
70°			
75°			
80°			
85°			

Segunda sesión

Hoja de trabajo 7

Ángulo (Grados)	$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$	$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$	$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$
30°	0.500	0.866	0.577
45°	0.707	0.707	1.000
60°	0.866	0.500	1.732

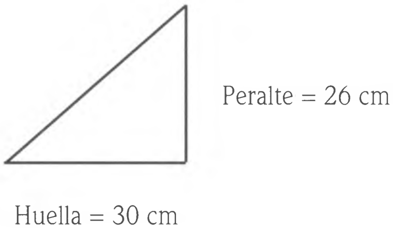
Hoja de trabajo 8

Tabla de valores trigonométricos

Ángulo (Grados)	$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$	$\frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$	$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$
5°	0.087	0.996	0.087
10°	0.174	0.985	0.176
15°	0.259	0.966	0.268
20°	0.342	0.940	0.364
25°	0.423	0.906	0.466
30°	0.500	0.866	0.577
35°	0.574	0.819	0.700
40°	0.643	0.766	0.839
45°	0.707	0.707	1.000
50°	0.766	0.643	1.192
55°	0.819	0.574	1.428
60°	0.866	0.500	1.732
65°	0.906	0.423	2.145
70°	0.940	0.342	2.747
75°	0.966	0.259	3.732
80°	0.985	0.174	5.671
85°	0.996	0.087	11.430

Hoja de trabajo 9

La pirámide "El Castillo", en Chichén Itzá, es cuadrangular. Fue construida con 91 escalones en cada uno de sus cuatro lados, con un nivel adicional formado con la plataforma en su parte superior. Cada uno de los escalones tiene una huella de 30 cm y un peralte de 26 cm, como se muestra en el siguiente diagrama.



En la pirámide real, ¿cuál es la longitud de la parte correspondiente a la línea blanca marcada en la fotografía que se muestra a continuación?

- ¿A qué altura de la pirámide está la base de la plataforma superior?
- ¿Qué ángulo forma la parte de la pirámide marcada con línea blanca en la figura y el suelo? Es decir, ¿qué inclinación tiene la escalinata de la pirámide?

Hoja de trabajo 10

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Determinen las medidas de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo rectángulo ABC que se muestra en la siguiente figura, así como la medida del ángulo ACB, si

$$\overline{AB} = 2$$

y

$$\angle CAB = 55°.$$

Respuestas:

$\overline{AC}$ = ____________

$\overline{BC}$ = ____________

$\angle ACB$ = ____________

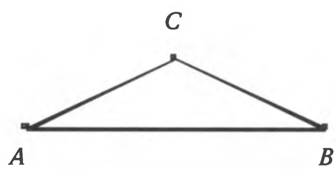
Hoja de trabajo 11

En el triángulo *ABC* que aparece en la siguiente figura se tiene que

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 3.31 \text{ cm}$$

y

$$\angle CAB = 25°.$$



Determinen la medida del lado $\overline{AB}$ y las medidas del $\angle ABC$ y el $\angle ACB$.
Respuestas:

$\overline{AB}$ = ______________

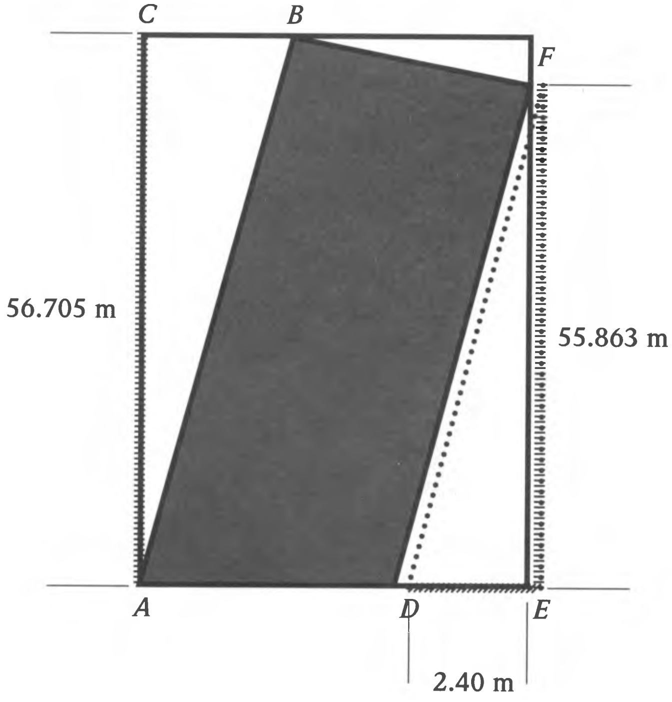
$\angle ABC$ = ______________

$\angle ACB$ = ______________

Hoja de trabajo 12

De acuerdo con los datos que aparecen en el siguiente esquema de la Torre de Pisa:

- Determinen la longitud $\overline{DF}$ y la longitud $\overline{AB}$.
- ¿Cuánto mide el ángulo *EDF*?


C
B
F
56.705 m
55.863 m
A
D
E
2.40 m

APÉNDICE B

Hojas de trabajo para las actividades con los maestros

Hoja de trabajo 1

Completen la siguiente tabla.

Ángulo A (En grados) / Razón Trigonométrica	30°	45°	60°
sen A			
tan A			
sec A			
cos A			
ctg A			
csc A			

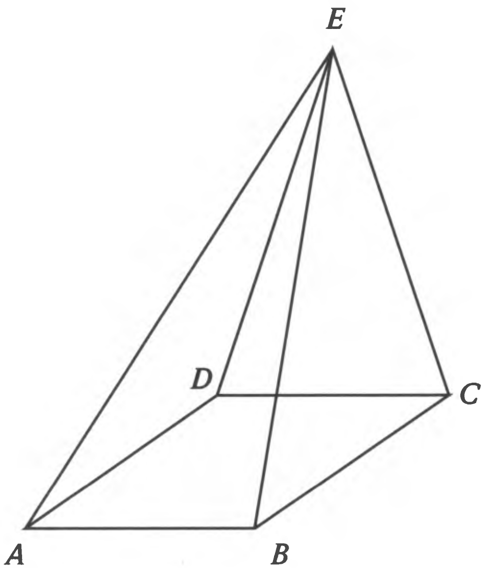
Hoja de trabajo 2

En la pirámide cuadrangular que se muestra en la siguiente figura, calculen la medida del ángulo que forma una cara lateral con la base (ángulo diedro). El área de la base de la pirámide es de

$$900\ m^2$$

y la longitud de cada una de sus aristas es de

$$40 \text{ m}.$$



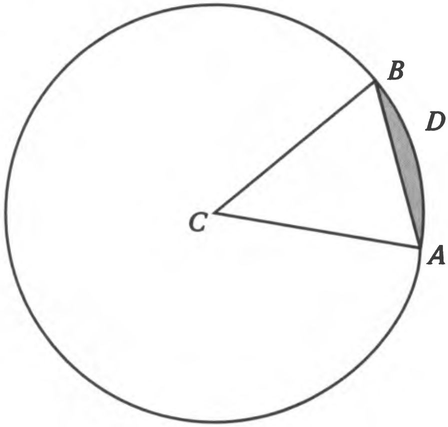
Hoja de trabajo 3

En la siguiente figura, calculen el área de la región sombreada del círculo con centro en C (la región comprendida entre la cuerda AB y el arco de circunferencia ADB), siendo el radio

$$CB = 2 \text{ cm}$$

y el

$$\angle ACB = 50^{\circ}.$$


B
D
C
A

El módulo 9: *Medición y razones trigonométricas*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Geometría
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres