PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 6

ÁLGEBRA

Ecuaciones de primer grado

$$\frac{300-x}{6}$$

$$300-(x)(6)=243$$

$$x \div 6$$

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá

SEP
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
ILCE
BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 6

ÁLGEBRA

Ecuaciones de primer grado

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Álgebra

Módulo 6: Ecuaciones de primer grado

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-178-0 módulo 6

Impreso y hecho en México

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

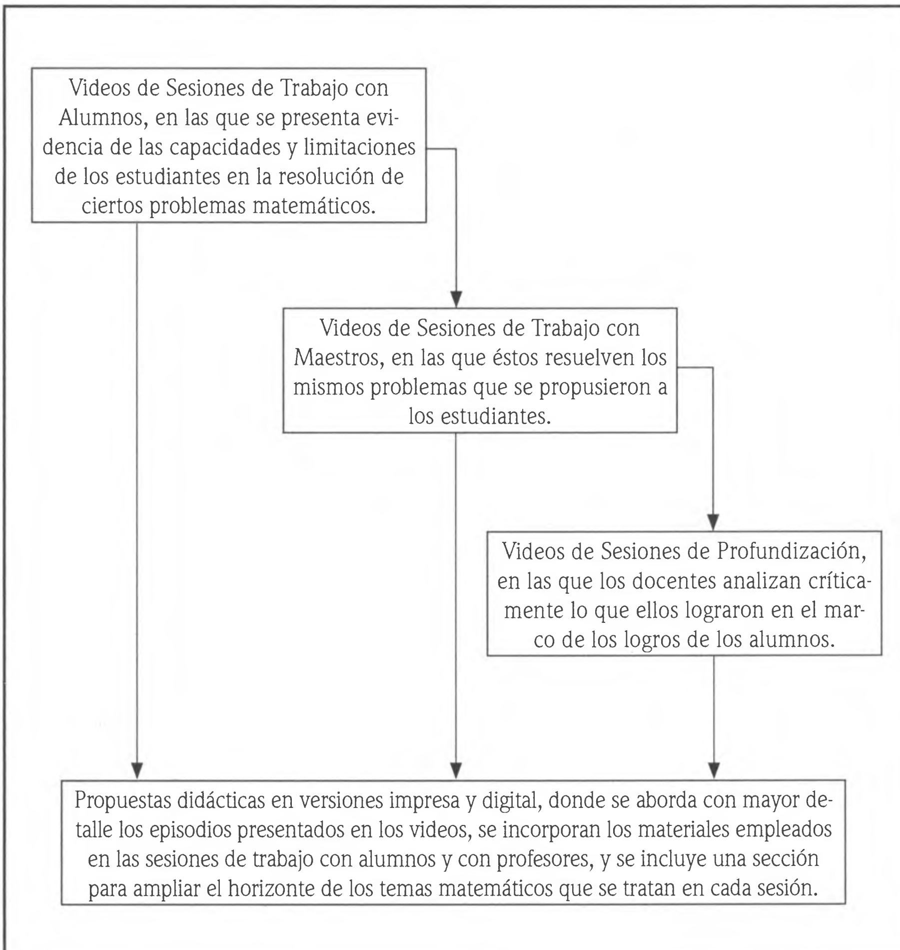
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

MATERIALES

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término "sesiones de trabajo", en lugar de "clase modelo", para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste "entrega" sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para "recibirlos". Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo.* Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización.* La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos
Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros
Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos
En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza
Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema
Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son “recipientes que esperan ser llenados”, y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*,1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education,* 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

El principal cambio que enfrentan los alumnos cuando pasan del estudio de la aritmética al del álgebra es la incorporación del uso de literales. De aquí en adelante deberán utilizar expresiones cuyos componentes centrales son letras, las cuales están combinadas con números y signos de operación que hasta el momento les son familiares. Un punto central en el álgebra es el uso que se dé a las literales; resulta crucial este aspecto para que los alumnos puedan construir, manipular y usar expresiones algebraicas en diversos contextos.

Los diferentes usos que tienen las literales son como: incógnita, número generalizado y variables en una relación funcional. Cada uno de estos usos puede orientar el trabajo algebraico hacia contenidos específicos. El uso de letras como incógnitas lleva al estudio de las ecuaciones; el uso como números generalizados, a la manipulación algebraica; y como variables, al estudio de funciones.

El interés en las sesiones de trabajo de este módulo está centrado en el uso de las letras como incógnitas, el cual implica el estudio de ecuaciones. Existen conocimientos matemáticos esenciales involucrados con el tema de ecuaciones, Kieran (1999, p. 350) considera primordiales los siguientes para alumnos que se inician en el estudio del álgebra:

a) Saber que las letras simbolizan números,
b) que el signo igual representa la equivalencia entre los dos miembros de una ecuación, y
c) que el miembro del lado derecho de una ecuación no necesariamente consiste de un simple término numérico.

Estos tres conocimientos, necesarios para el trabajo con ecuaciones algebraicas, permiten abordar con mejores perspectivas la resolución de ecuaciones.

Aunque el fin último de la enseñanza sea que los alumnos tengan el dominio de algunos métodos formales para resolver ecuaciones, no siempre la enseñanza de estos métodos puede resultar el mejor inicio. Kieran (1999, p. 350) menciona acerca de la resolución de ecuaciones:

> Al operar sobre una ecuación, como un objeto matemático, se involucra el proceso formal de llevar a cabo la misma operación en ambos lados de la ecuación.

Sin embargo, este proceso formal no es del dominio inmediato por parte de los alumnos, incluso, aun cuando el maestro muestre en el pizarrón en repetidas ocasiones sus diferentes pasos, esto no es garantía de que los alumnos se apropien de dicho método.

Existen diferentes estrategias para que los alumnos se inicien en la resolución de ecuaciones, desde métodos basados en los conocimientos aritméticos previos de los alumnos hasta secuencias didácticas que preparan el camino para el aprendizaje de los métodos formales.

Cedillo (1999b), por ejemplo, trabajó con alumnos, de 11-12 años que aún no se iniciaban en el estudio del álgebra, ecuaciones de las formas $x+b=c$, $bx=c$, y $b \div x=c$ (a, b y c, constantes) con apoyo de una calculadora y sin mayor información para los alumnos que la instrucción "encuentra los números que faltan". De los resultados obtenidos en este trabajo, Cedillo (1999b, p. 11) destaca los siguientes:

- Para ninguno de los alumnos representó alguna dificultad la abrupta inclusión de literales en el contenido de expresiones aritméticas.
- Todos los alumnos pudieron resolver correctamente las ecuaciones de las formas $x \pm a = b$, $ax = b$, y $x \div a = b$.
- Quince alumnos pudieron resolver las ecuaciones de la forma $a \div x = b$, 12 de ellos lo lograron mediante el procedimiento de ensayo y error, tres pudieron desarrollar métodos que muestran que fueron capaces de empezar a operar

con “lo aún desconocido”. Sus respuestas muestran una versión del proceso denominado operar con la incógnita (Filloy y Rojano, 1984, 1989).

En la experiencia de Cedillo, se observó que los alumnos desarrollaron a partir de sus conocimientos previos, sin la instrucción anterior de un método formal para resolver ecuaciones, estrategias no convencionales. Además, que los alumnos generaron un amplio sentido acerca del significado de las letras como símbolos que representan números, y de que el signo igual representa la equivalencia entre los dos miembros de una ecuación.

Kieran (1999, p. 350) enlista diferentes métodos empleados por alumnos para resolver ecuaciones, los cuales son los siguientes:

a) Uso de hechos numéricos,
b) uso de técnicas de conteo,
c) “encubrimiento” de números,
d) deshaciendo operaciones (o trabajando hacia atrás),
e) sustitución por ensayo y error,
f) transposición (esto es, cambia de lado-cambia de signo), y
g) llevando a cabo la misma operación en ambos lados de la ecuación.

Los métodos *f)* y *g)* se consideran métodos formales, mediante los cuales es posible operar sobre la ecuación como un objeto matemático, un ejemplo del método *g)* se ilustra a continuación.

$$\begin{gathered} 2x + 3 = 7 \\ 2x + 3 - 3 = 7 - 3 \\ 2x = 4 \\ 2x \div 2 = 4 \div 2 \\ x = 2 \end{gathered}$$

Los métodos *a)* y *b)* surgen por lo general de la experiencia aritmética que tienen alumnos que se inician en el estudio del álgebra, Kieran (1999, p. 350) describe estos métodos:

> Por ejemplo, para resolver $5 + n = 8$ se puede recordar el hecho numérico de que la adición de 5 más 3 es 8, entonces $n = 3$, en este caso el método se basa en el uso del conocimiento de un hecho numérico. Resolver la misma ecuación contando desde el 5 hasta el 8, de uno en uno, notando que tres números son contados en orden después del 5 para llegar al 8, es un ejemplo de resolución mediante un método que usa técnicas de conteo.

Los métodos *c)*, *d)* y *e)* pueden auxiliar a los alumnos en la futura empresa de apropiarse de los métodos formales para resolver ecuaciones. Para resolver la ecuación $4x + 3 = 6$, es posible comenzar a probar con diferentes valores para x que vayan aproximando el valor del lado izquierdo de la ecuación con el del lado derecho, por ejemplo: $4\ (1) + 3 = 7$; $4\ (.5) + 3 = 5$; $4\ (.7) + 3 = 5.8$; $4\ (.8) + 3 = 6.2$; $4\ (.75) + 3 = 6$, este método de sustitución por ensayo y error ayuda a que los alumnos gradualmente reconozcan que la literal involucrada en una ecuación representa un número que permite la equivalencia entre los lados derecho e izquierdo de la ecuación.

En el "método de encubrimiento" es posible considerar la concepción de ecuación generada en el trabajo de Kieran (1981, citado en Kieran, 1999), como "una identidad aritmética con un número oculto". En dicho trabajo los alumnos reconocieron que las letras simbolizan números, la equivalencia entre los lados de una ecuación y la posibilidad de que el lado derecho de una ecuación no sea sólo un número.

El trabajo a realizar en este módulo está enfocado en promover la generación de métodos para resolver ecuaciones a partir de los conocimientos aritméticos previos de los alumnos. En la primera sesión de trabajo, a partir de un problema que está en un contexto de la vida cotidiana (la telefonía celular), los alumnos deben construir expresiones algebraicas que representen las diversas situaciones que vayan surgiendo del análisis del problema. Así como derivar a partir de dichas expresiones métodos para la resolución de ecuaciones lineales. En la segunda sesión de trabajo los alumnos aplicarán los métodos encontrados, en la sesión anterior, para resolver ecuaciones de diversas formas: $x + b = c$, $ax + b = c$, $a(x + b) + c = d$ y $\frac{x-a}{b} + c = d$. La mayor parte de las ecuaciones utilizadas en la segunda sesión de trabajo fueron tomadas de Cedillo (1999b, p. 98 y 104).

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Objetivos

Que el alumno:

- Identifique las letras como representantes de números.
- Reconozca la equivalencia entre los lados derecho e izquierdo de una ecuación.
- Desarrolle métodos para resolver ecuaciones, a partir de sus conocimientos aritméticos.

Planeación de las actividades con los alumnos

Primera sesión: Actividades, tiempo, descripción y recursos

Inicio (2 min). El maestro saluda al grupo y explica la dinámica de la clase.

Cápsula de video (7 min). Proyección de un video que muestra diversas situaciones de la vida cotidiana que requieren del uso de las matemáticas (Video: telefonía celular).

Preguntas relacionadas con el uso de un teléfono celular (5 min). Los alumnos responden preguntas relacionadas con el uso de un teléfono celular *(Hoja de trabajo).*

Trabajo en equipo (7 min). Los alumnos escriben una expresión algebraica y completan una tabla relacionada con el uso de un teléfono celular (*Hoja de trabajo*).

Exposición del trabajo realizado (5 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Trabajo en equipo (7 min). Los alumnos responden preguntas de un nuevo problema relacionado con el uso de un teléfono celular *(Hoja de trabajo).*

Exposición del trabajo realizado (5 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Trabajo en equipo (7 min). Los alumnos inventan un problema a partir de una ecuación proporcionada por el maestro (pizarrón y marcadores).

Exposición del trabajo realizado (5 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Segunda sesión: Actividades, tiempo, descripción y recursos

Revisión de la sesión de trabajo anterior (5 min). El maestro comenta con los alumnos acerca de lo realizado en la clase anterior.

Resolución de ecuaciones (8 min). Los alumnos resuelven una serie de ecuaciones proporcionadas por el maestro *(Hoja de trabajo*, calculadora).

Exposición del trabajo realizado (7 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Resolución de ecuaciones (8 min). Los alumnos resuelven otra serie de ecuaciones dadas por el maestro (hoja de trabajo, calculadora).

Exposición del trabajo realizado (7 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Construcción de ecuaciones (8 min). Los alumnos inventan una ecuación a partir de una solución proporcionada por el maestro.

Exposición del trabajo realizado (7 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las soluciones (pizarrón y marcadores).

Primera sesión

Cápsula de video

Los alumnos observan un video en el que se muestran diversas situaciones en donde es posible usar matemáticas: en el cálculo de intereses, en la construcción de edificios y en la telefonía celular. La última, la de la telefonía celular, es utilizada para desarrollar la primera sesión de trabajo. El video muestra al final el siguiente enunciado:

> Una compañía telefónica ofrece teléfonos celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra $6.00 pesos por minuto (o fracción).

Preguntas relacionadas con el uso de un teléfono celular

En una hoja de trabajo se propone a los alumnos la siguiente situación relacionada con el mensaje mostrado al final del video:

Si te regalan un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de $200.00, que te da un crédito de $300.00:

1. ¿A lo más cuántos minutos puedes hablar con este crédito?
2. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si haces una llamada de 5 minutos?
3. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si hablas 17 minutos?
4. Si tu crédito está en $120.00, ¿a lo más cuántos minutos has usado de tu crédito de $300?

Trabajo en equipo

Una vez resueltas las preguntas anteriores los alumnos responden a los siguientes incisos de la *Hoja de trabajo:*

5. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si conoces el número de minutos que hablaste.
6. Reescribe la fórmula que construiste en el inciso anterior, considerando que el gasto por la llamada fue de:

   a) \$150.00
   b) \$240.00

7. Completa a siguiente tabla:

Minutos hablados	Crédito que queda de los 300 pesos (\$)
5	
10	
17	
	60.00
	30.00

8. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto crédito te queda de los \$300.00 si conoces el número de minutos que hablaste.
9. Reescribe la expresión algebraica que construiste en el inciso anterior, considerando que el crédito que te queda de \$300.00 es de:

   a) \$30.00
   b) \$252.00

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos exponen sus respuestas de los incisos anteriores y en conjunto con el maestro las confrontan.

Trabajo en equipo

El problema inicial de la clase se modifica quedando de la siguiente forma:

La compañía telefónica ha cambiado las condiciones del cobro de las llamadas, y ahora cobrará por el tiempo que dure la llamada, es decir, las fracciones de minuto las va a cobrar por lo que corresponda, manteniendo la tarifa de $6.00 por minuto.

Los alumnos trabajan en equipo para responder las siguientes preguntas:

10. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 5) para responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $45.00?
b) ¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $69.00?
c) ¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de $31.50?

11. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 8), para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan $243.00 de mi crédito de $300.00?
b) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan $165.00 de mi crédito de $300.00?
c) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan $7.50 de mi crédito de $300.00?

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos exponen sus respuestas en el pizarrón y las confrontan en forma conjunta con el maestro.

Trabajo en equipo

Los alumnos inventan por equipo un problema a partir de la siguiente ecuación proporcionada por el maestro:

$$4.5x + 30 = 156$$

Exposición del trabajo realizado

Los equipos de trabajo exponen a la clase el problema inventado.

Segunda sesión

Revisión de la sesión de trabajo anterior

El maestro comenta con los alumnos lo realizado en la sesión de trabajo anterior con respecto a la situación de la telefonía celular.

Resolución de ecuaciones

Los alumnos resuelven una *Hoja de trabajo* que incluye los siguientes incisos:

1. En las siguientes expresiones encuentra el número que falta.

a) $b + 1.03 = 24.7$ $b =$	*b)* $m - 1.67 = 30.25$ $m =$	*c)* $p - 12.22 = 4.05$ $p =$
d) $4.8 - r = 3.5$ $r =$	*e)* $\frac{5.2}{n} = 4$ $n =$	*f)* $5 \times \mathrm{b} - 1 = 29$ $b =$
g) $k - 1.5 = 6.2$ $k =$	*h)* $2 \times c = 1$ $c =$	*i)* $3 \times a + 1 = 121$ $a =$

2. ¿Hay alguna forma que les permita verificar que sus respuestas son correctas? Discutan esto con sus compañeros y anoten el método que les parezca más eficaz.

3. Una alumna dice que el número que falta en $4 \times d + 2 = 4$ es 0.5. ¿Están de acuerdo con ella? ¿Por qué?

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos muestran en el pizarrón cómo resolvieron algunas de las ecuaciones contenidas en la *Hoja de trabajo.*

Resolución de ecuaciones

Los alumnos resuelven los siguientes dos incisos:

4. Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones.

a) $4(x + 12) + 7 = 87$	*b)* $10 + 3(y - 8) = 31$
c) $34 - 2(a - 1) = 18$	*d)* $7(b + 3) - 5 = 51$
e) $22 + \frac{p+8}{3} = 28$	*f)* $\frac{q-3}{4} + 13 = 16$

5. Escribe cómo le explicarías en forma clara a un compañero el método para resolver ecuaciones como las que acabas de resolver.

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos muestran en el pizarrón cómo resolvieron algunas de las ecuaciones contenidas en la *Hoja de trabajo.*

Construcción de ecuaciones

El maestro propone a los alumnos construir ecuaciones, como las que hasta el momento han resuelto, cuya solución sea 20.

Exposición del trabajo realizado

Los alumnos escriben en el pizarrón y explican algunas de las ecuaciones construidas, cuya solución es 20.

Respuestas esperadas

Primera sesión de trabajo

La situación que se presentó al inicio de esta sesión de trabajo está relacionada con un teléfono celular que tiene de crédito \$300.00 y cobra \$6.00 por minuto (o fracción).

Los alumnos determinaron los minutos que pueden hablar con \$300.00, el costo de una llamada de 5 minutos y una de 17 minutos, y los minutos utilizados si el crédito que queda es de \$120.00, mediante operaciones aritméticas.

La fórmula que un alumno escribió para determinar el costo de una llamada fue $6x$, de la cual comentó que es "para sacar los pesos", en donde x representa la duración de la llamada y 6 es el precio por minuto.

Los alumnos también determinaron la duración de una llamada a partir de su costo, por ejemplo: si el costo de una llamada es de \$150.00, entonces, se efectúa la operación: $150 \div 6 = 25$, por lo tanto, 25 fue el número de minutos que se ocuparon en llamadas telefónicas. Para una llamada de \$240, se efectúa $240 \div 6 = 40$, entonces la duración de la llamada fue de 40 minutos. La fórmula escrita para efectuar estos cálculos fue $a \div 6$, en donde a representa el costo de la llamada.

La siguiente tabla fue completada por los alumnos.

Minutos hablados	Crédito que queda de los 300 pesos (\$)
5	**270**
10	**240**
17	**198**
40	60.00
45	30.00

La columna de la derecha se llenó mediante la siguiente fórmula:

$$(300) - (a \times 6), \text{ con } a = \text{minutos.}$$

Los cálculos realizados para los dos primeros renglones fueron los siguientes:

$$300 - (5)\,(6) = 300 - 30 = 270$$
$$300 - (10)\,(6) = 240$$

Para completar la columna izquierda de la tabla un alumno mencionó: "Como son aquí \$300 (refiriéndose al crédito inicial) se le resta el crédito que te queda y luego lo que salga se divide entre los pesos que cuesta el minuto".

Por ejemplo, cuando quedaba un crédito de \$30.00, los cálculos realizados fueron los siguientes: $300 - 30 = 270$ y $270 \div 6 = 45$, por lo tanto, los minutos hablados fueron cuarenta y cinco.

La siguiente fórmula escrita por un alumno representa las operaciones del párrafo anterior:

$$\frac{300 - x}{6},$$

en la que x son los pesos que han cobrado por las llamadas realizadas.

Un alumno señaló que tenía otra fórmula, la cual consistía en determinar primero los minutos disponibles con el crédito original, en este caso \$300 equivalen a 50 minutos; en seguida, el crédito que queda se dividía entre el costo por minuto, en este caso $60 \div 6 = 10$, por lo tanto, quedan 10 minutos; y por último, se efectuaba la operación $50 - (60 \div 6) = 50 - 10 = 40$, por lo tanto, 40 minutos son los que se habían utilizado.

El inciso 9*d* de la *Hoja de trabajo*, fue resuelto por los alumnos de la misma forma de como completaron el lado izquierdo de la tabla: $300 - 252 = 48$ y $48 \div 6 = 8$, por lo tanto, cuando quedaban \$252.00 de crédito, se han usado 8 minutos.

Los incisos 10) y 11) de la Hoja de trabajo fueron resueltos a través de los procedimientos utilizados en los incisos anteriores. La variante del problema en estos últimos incisos consistió en que el cobro era por el tiempo que dura la llamada, es decir, considerando las fracciones de minuto.

Por ejemplo, para una llamada de \$45.00, la duración fue de 7 minutos y medio, lo cual equivale a 7 minutos 30 segundos. Cuando queda un crédito de \$243.00, los minutos hablados se calcularon con las siguientes operaciones: $300 - 243 = 257$ y $57 \div 6 = 9.5$, entonces, se habían utilizado 9 minutos 30 segundos.

La última actividad de la sesión de trabajo consistió en inventar un problema a partir de la ecuación $4.5x + 30 = 156$. Los problemas escritos fueron los siguientes:

Problema 1. Una compañía cobra 4.5 por minuto, si te suman \$30 y tu tarjeta era de 156 pesos, ¿cuántos minutos gastaste?

La solución escrita en el pizarrón consistió de las siguientes operaciones:

$$156 - 30 = 126$$
$$126 \div 4.5 = 28$$

28 son los minutos que hablaste.

La comprobación fue:

$$28 \times 4.5 = 126$$
$$126 + 30 = 156$$

Problema 2. Si en total me cobraron \$156 por una llamada en la que pagué \$4.50 por minuto y aparte me cobraron \$30 de IVA, ¿cuántos minutos hablé?

La ecuación y la solución escritas en el pizarrón fueron:

$$4.5x + 30 = 156$$
$$x = ?$$
$$156 - 30 = 126$$
$$126 \div 4.5 = 28$$

Problema 3. Una compañía cobra \$4.50 por minuto, y por mensaje \$1.00. Si mandé 30 mensajes e hice una llamada y gasté \$156.00, ¿cuánto gasté en la llamada?

Problema 4. Tengo 28 alumnos y cada uno me da 4.5 galletas y después otro niño más llega con 30 galletas.

Con respecto al cuarto problema, un alumno comentó:

> La x sería en donde está el 156.

Este comentario lo realizó porque al escuchar el problema inventado por sus compañeros observó que dicho problema correspondía a la ecuación $(4.5)(28) + 30 = x$ en vez de la ecuación $4.5x + 30 = 156$.

Segunda sesión de trabajo

Al inicio de esta sesión los alumnos comentaron acerca de lo realizado el día anterior. Al recordar la ecuación $4.5x + 30 = 156$, con la cual los alumnos inventaron sus problemas, se generó el siguiente intercambio de preguntas y respuestas:

Maestro: ¿Qué es lo que hacen con una expresión como ésta?
Alumno: Intentar despejar la incógnita.
Maestro: ¿Qué es eso de incógnita?
Alumno: Que no sabemos qué número es pero con operaciones con los mismos números que tenemos ahí lo sacamos.

Este último comentario describe de manera genérica la forma en que los alumnos resolvieron de manera implícita diversas ecuaciones desde la primera sesión de trabajo. Después de esto, los alumnos resolvieron diversas ecuaciones que les fueron proporcionadas en hojas de trabajo; a continuación se presenta la forma en que lo hicieron con algunas de las ecuaciones.

- $\mathbf{b + 1.03 = 24.7}$
  $24.70 - 1.03 = 23.67$
  23.67 es "lo que suma b"

- $\mathbf{\dfrac{5.2}{n} = 4}$
  $n = 1.3$
  $5.2 \div 4 = 1.3$

- $\mathbf{3 \times a + 1 = 121}$
  $121 - 1 = 120$
  $120 \div 3 = 40$
  $a = 40$

- $\mathbf{4\,(x + 12) + 7 = 87}$

Primera forma de resolver la ecuación:

$$x = 8$$
$$87 - 7 = 80$$

"4 por qué número te da 80", es decir, qué número multiplicado por 4 da como producto 80.

$$20 \times 4 = 80$$
$$8 + 12 = 20$$

Segunda forma de resolver la ecuación:

Primero se hace la operación $87 - 7 = 80$, enseguida la división $80 \div 4 = 20$, y entonces $20 - 12$ para que salga el resultado, 8.

- $\mathbf{10 + 3\,(y - 8) = 31}$

  $y = 15$

  $31 - 10 = 21$

  $21 \div 3 = 7$

  $7 + 8 = 15$

Para hacer la comprobación, primero se resolvió la operación de los paréntesis $15 - 8 = 7$, en seguida la multiplicación $3 \times 7 = 21$, y al último la suma $21 + 10 = 31$.

El alumno que mostró su solución, comentó que él tuvo dificultades al intentar resolver esta ecuación las primeras veces, él pensaba que primero se debía efectuar la suma $10 + 3 = 13$, en seguida la multiplicación $13 \times (y - 8)$, y entonces se debía dividir $\frac{31}{13}$ para conocer qué número multiplicado por 13 daba como resultado 31. Su error se debió a que no respetaba el orden de las operaciones.

- $\mathbf{34 - 2(a - 1) = 18}$

El alumno que pasó a mostrar cómo resolvió esta ecuación, comentó: “Ya que pasó él entendí mi error, dónde estaba e hice lo siguiente”, se refería a la explicación que dio su compañero, en el inciso anterior, acerca de su confusión en el orden de las operaciones.

$$a = 9$$
$$34 - 18 = 16$$
$$16 \div 2 = 8$$
$$8 + 1 = 9$$

Otro alumno señaló que la solución $a = 9$ no era correcta porque al hacer la comprobación no se cumplía la igualdad, como se muestra a continuación:

Operando de izquierda a derecha en la ecuación: $34 - 2(a - 1) = 18$, se tiene $34 - 2 = 32$.

Se encontró que $a = 9$, entonces $(a - 1) = (9 - 1) = 8$.

Entonces se debe multiplicar 32×8, lo cual no da como resultado el valor del segundo miembro de la ecuación, el 18.

Es evidente que el alumno en su comentario no está considerando el orden de las operaciones.

Sin embargo, ante esta observación, se dio la siguiente explicación:

> "El 2 está junto al paréntesis, ahí significa que se multiplica, entonces como primero se deben resolver las multiplicaciones y después las sumas y las restas, entonces se debe multiplicar primero el 2 por el resultado del paréntesis".

Con estas consideraciones fue posible comprobar la igualdad, lo cual se muestra en seguida.

Como $a = 9$, entonces $(a - 1) = (9 - 1) = 8$, entonces $2 \times 8 = 16$ y $34 - 16 = 18$, en esta ocasión la equivalencia entre los miembros de la ecuación sí se cumple.

- **$7(b + 3) - 5 = 51$**

Primera forma de solución:

$$b = 5$$

El alumno sabía que la multiplicación de 7×8 es 56 y que $56 - 5 = 51$; entonces, $(b + 3)$ debe ser igual a 8 y $b = 5$.

Segunda forma de solución:

En esta otra forma de solución los alumnos acudieron a las operaciones inversas.

$$51 + 5 = 56$$

$$\frac{56}{7} = 8$$

$$8 - 3 = 5$$

- $\mathbf{22 + \dfrac{p+8}{3} = 28}$

  $p = 10$

El alumno al mostrar su solución explicó que “para que te dé 28 teniendo 22 requiere de sumársele 6… ¿Qué número dividido por 3 da 6?, este número es 18, y luego $10 + 8 = 18$, por lo tanto, $p = 10$”. Para validar su respuesta mostró que $\frac{18}{3} = 6$ y $22 + 6 = 28$

- $\mathbf{\dfrac{q-3}{4} = 16}$

Primera forma de solución:

$$q = 15$$

El alumno comentó: “primero hice $16 - 13 = 3$… Si necesito que con esta operación (se refiere a $\frac{q-3}{4}$) me dé 3, necesito encontrar un número que restándole 3 y dividiéndolo entre 4 me dé 3… El número es 15, porque $15 - 3 = 12$ y $12 \div 4 = 3$”.

Segunda forma de solución:

Esta solución fue mediante las operaciones inversas:

$$16 - 13 = 3,\ 3 \times 4 = 12,\ \text{y } 12 + 3 = 15,\ \text{entonces, } q = 15.$$

Después de revisar las ecuaciones de las hojas de trabajo, el maestro propuso al grupo resolver la ecuación

$$\frac{5(x+3)}{7} + 12 = 17,$$

la solución dada por uno de los alumnos se describe a continuación:

> "$x = 4$… Las dos primeras operaciones fueron: $17 - 12 = 5$ y $5 \times 7 = 35$ … $3 + 4 = 7$, y con el resultado puedo comprobarlo porque $7 \times 5 = 35$".

La última actividad de esta sesión de trabajo consistió en inventar ecuaciones cuya solución era 20. Algunas de estas ecuaciones y las operaciones escritas por los alumnos, para resolverlas o hacer la comprobación, se ilustran a continuación.

- $\mathbf{5(x \times 2) - 3 = 197}$
  $x = 20$
  $197 + 3 = 200$
  $200 \div 5 = 40$
  $40 \div 2 = 20$

- $\mathbf{2(54 - x) + 3 - 10 = 61}$
  $x = 20$
  $61 + 10 = 71$
  $71 - 3 = 68$
  $68 \div 2 = 34$
  $54 - 34 = 20$

- $\mathbf{\dfrac{8\,((x + 7) \div 3)}{3} - 23 = 1}$

El alumno que escribió esta ecuación modificó en varias ocasiones el número que se estaba restando, y que al final quedó en 23, para cumplir con la equivalencia de ambos miembros de la ecuación.

- $\left(\frac{5(x \div 5)}{4}\right)1.2 = 6$

Este alumno hizo los siguientes comentarios cuando escribía las operaciones:

> "$6 \div 1.2 = 5$ ... $5 \times 4 = 20$, para que nos salga lo de arriba (refiriéndose a que $5(x \div 5)$ debía ser 20)... $20 \div 5 = 4$; para que nos salga lo del paréntesis (en este caso $x \div 5$ debía ser igual a 4) ... $4 \times 5 = 20$; para que nos salga lo de arriba... en este otro caso x debe ser igual a 20".

Respuestas no esperadas

La idea de realizar este módulo sin acudir a los métodos formales para resolver ecuaciones, se basó en la convicción de que los alumnos pueden generar sus propios métodos a partir de sus conocimientos previos de aritmética. Sin embargo, hubo respuestas que rebasaron parte de las expectativas previstas por la forma en que los alumnos fueron capaces de visualizar una ecuación en partes y como un todo.

Por ejemplo, al resolver ecuaciones como $22 + \frac{p+8}{3} = 28$, los alumnos podían leer de inicio la ecuación de manera global $22 + 6 = 28$ y entonces procedían a centrar su atención en partes cada vez más locales, como $\frac{p+8}{3} = 6$, pasando entonces a una nueva lectura $\frac{18}{3} = 6$, y concluir con $p + 8 = 18$. Obtenido así la solución de la ecuación, $p = 10$. De esta manera, transitaban de una expresión compleja a una cada vez más sencilla, que les permitía obtener la solución de manera casi directa.

Dificultades

La principal dificultad que enfrentaron los alumnos fue durante la segunda sesión de trabajo al tener que resolver las siguientes ecuaciones:

$$10 + 3(y - 8) = 31$$
$$34 - 2(a - 1) = 18$$

El problema radicó en la forma de efectuar las operaciones. Al inicio intentaron resolverlas de izquierda a derecha, aunque respetaron la prioridad de los paréntesis. Por ejemplo, transformaban la ecuación $10 + 3(y - 8) = 31$ para obtener $13(y - 8) = 31$ (sumaban incorrectamente $10 + 3$). Entonces, dividían $31 \div 13$, con lo cual hallaban un número al que le sumaban 8, y así, podían determinar el valor de x. En esta situación el maestro intervino en los distintos equipos de trabajo para ayudarles a reconsiderar la forma en que estaban operando. El problema fue superado gradualmente por los alumnos, por ejemplo, un alumno en su momento comentó lo siguiente: "el 2 está junto al paréntesis… ahí significa que se multiplica; entonces, como primero se deben resolver las multiplicaciones y después las sumas y las restas, se debe multiplicar primero el 2 por el resultado del paréntesis". Esta mención hace referencia a la forma de operar en la ecuación $34 - 2(a - 1) = 18$.

Planeación de las actividades con los maestros

Actividades, tiempo, descripción y recursos

Resolución de ecuaciones (15 min). Los maestros resuelven el primer inciso de la *Hoja de trabajo* que contiene diversas ecuaciones (*Hoja de trabajo*).
Exposición del trabajo realizado (10 min). Después de un tiempo se exponen y confrontan las diferentes soluciones (pizarrón y marcadores).
Lectura e interpretación de una expresión algebraica (10 min). Los maestros leen e interpretan la expresión algebraica del segundo inciso de la hoja de trabajo (pizarrón y marcadores).
Exposición del trabajo realizado (10 min). Los maestros exponen la lectura e interpretación de la expresión algebraica (*Hoja de trabajo*).

Descripción de las actividades

Resolución de ecuaciones

Los maestros resuelven el primer inciso de una hoja de trabajo que contiene diversas ecuaciones, las cuales son las siguientes:

1. Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones. El reto consiste en hacer tantas como te sea posible en 15 minutos.

a) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=0$	*b)* $\dfrac{1}{(x-2)^2}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$	*c)* $\dfrac{8}{(x-2)^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
d) $\sqrt{x^2-6x+9}=2$	*e)* $x^2-6x+9=-1$	*f)* $(x-3)^2=-1$
g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-2}=4$	*h)* $\dfrac{1}{x^2+2}=\dfrac{1}{11}$	*i)* $\dfrac{4}{\sqrt{x+9}}=\dfrac{4}{5}$
j) $3\sqrt{x-1}=6$	*k)* $x^6-6=58$	*l)* $4\sqrt[3]{x-3}=12$
m) $5\sqrt[3]{1+x}=1$		

Exposición del trabajo realizado

A todo el grupo de trabajo los maestros exponen los diferentes métodos utilizados para resolver las ecuaciones propuestas en la *Hoja de trabajo.*

Lectura e interpretación de una expresión algebraica

El segundo inciso de la *Hoja de trabajo* contiene una expresión algebraica que los maestros deben leer e interpretar de tal forma que obtengan la mayor información posible de dicha expresión, la cual es la siguiente:

2. ¿Qué información puedes obtener de la siguiente expresión simplemente observándola?

$$\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}A+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}B+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}C+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}D$$

Exposición del trabajo realizado

Una vez que los maestros realizan el segundo inciso de la *Hoja de trabajo*, exponen sus observaciones y las confrontan con el grupo de trabajo.

Lo que hicieron los maestros

Respuestas esperadas

Para resolver las ecuaciones del primer inciso varios maestros acudieron a los procedimientos algebraicos convencionales para encontrar el número que faltaba en cada ecuación. Sin embargo, hubo maestros que comenzaron a visualizar las expresiones y sin necesidad de efectuar mayores cálculos determinaban el valor de la incógnita. Por ejemplo: en la ecuación $\frac{1}{(x-2)^2}=\left(\frac{1}{4}\right)^3$ vieron que $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, entonces $(x-2^2)$ debía ser igual a 64, por lo tanto x puede ser igual a 10 o –8. De esta forma comenzaron a revisarse la solución de otras de las ecuaciones.

En el caso del segundo inciso fueron diversos los comentarios que se hicieron. Un maestro sugirió la posibilidad de factorizar cada término de la expresión, por ejemplo, el término $\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}A$ factorizarlo como $\frac{x}{a}A$ y así para los demás términos, lo cual se observó que no era posible. Otro maestro comentó que si que x tuviera el valor de a, la expresión $\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$ daría 1. Entonces, si $x = a$ toda la expresión sería A; si $x = b$ toda la expresión es B; si $x = c$ toda la expresión es C; y si $x = d$ toda la expresión es D.

Los maestros también mencionaron que se trataba de una expresión algebraica de tercer grado. En un último comentario, un maestro consideró que si en el denominador estuviera $(a - a)$, $(b - b)$, $(c - c)$ o $(d - d)$ se tendría una división entre cero.

Respuestas no esperadas

En el primer inciso de la *Hoja de trabajo*, en la que los maestros debían hallar la solución de varias ecuaciones en un corto tiempo, se esperaba que visualizaran las expresiones e identificaran de "un golpe" las soluciones, sin embargo, muchos de ellos optaron por efectuar las transformaciones algebraicas convencionales. Lo cual hizo que invirtieran más tiempo del esperado para resolver las ecuaciones.

Dificultades

Es muy probable que la principal dificultad que tuvieron los maestros con las actividades propuestas fueron sus propios conocimientos, es decir, todos aquellos métodos algebraicos que les permiten la manipulación algebraica y que conocen bastante bien, pero que no les permitieron de inicio analizar las ecuaciones propuestas para encontrar mediante consideraciones sencillas las soluciones respectivas. Es pertinente mencionar que hubo maestros que al leer en las instrucciones: "El reto consiste en hacer tantas como te sea posible en 15 minutos", comenzaron a buscar una estrategia que les permitiera hallar la solución de todas las ecuaciones en el tiempo estipulado.

Lo que aprendieron los alumnos

Durante las dos sesiones, los alumnos resolvieron diversas ecuaciones, tanto las construidas por ellos mismos, como las propuestas por el maestro. Los métodos empleados fueron generados a partir de sus conocimientos aritméticos, en ningún momento se les mostró algún método que debieran emplear.

Los métodos utilizados por los alumnos coinciden con los citados en el primer apartado de este documento (Kieran, 1999):

- Uso de hechos numéricos.
- "Deshacer operaciones".

El primero de los métodos se puede observar cuando uno de los alumnos muestra al grupo cómo resolvió la ecuación $22 + \frac{p+8}{3} = 28$. El alumno comentó que "requiere sumársele 6 a 22 para que te dé 28"; esta afirmación parte del hecho numérico de que $22 + 6 = 28$, por lo tanto, $\frac{p+8}{3} = 6$. Después preguntó, "¿qué número dividido por 3 da 6?", este número es 18, así que el nuevo hecho numérico fue $18 \div 3 = 6$, por lo tanto, $p + 8 = 18$. Al final escribió $10 + 8 = 18$, por lo tanto, $p = 10$.

El método para resolver la ecuación estuvo basado en el reconocimiento de hechos numéricos, sin embargo, es importante resaltar que esta aplicación sucesiva de hechos numéricos se debió en gran parte a que los alumnos eran capaces de visualizar en forma global la ecuación, así como sus distintas partes.

El segundo método (deshaciendo operaciones) fue empleado por un alumno al resolver la ecuación $\frac{q-3}{4} + 13 = 16$. En el primer miembro de la ecuación aparecen tres operaciones, una sustracción, una división y una adición, las cuales se efectúan en el orden en que las hemos mencionado (primero la sustracción, después la división y al final la adición). El alumno "deshizo" estas operaciones mediante las operaciones inversas y en el orden inverso. Primero cambió la adición por una sustracción: $16 - 13 = 3$. En seguida cambió la división por una multiplicación: $3 \times 4 = 12$. Al final, en vez de la sustracción efectuó una adición: $12 + 3 = 15$. Obteniendo así la solución de la ecuación: $q = 15$. En algunos momentos los alumnos combinaban estos dos métodos al resolver una ecuación.

A lo largo de las dos sesiones, los alumnos parecieron no tener ningún problema para reconocer que las letras simbolizan números y que el signo igual utilizado en las diversas expresiones establece la equivalencia entre los miembros derecho e izquierdo de las ecuaciones resueltas. También es importante señalar que siempre que encontraron la solución de una ecuación, tenían forma de explicar qué era ese número que habían hallado, aun después de haber realizado una serie de operaciones. La jerarquía de operaciones fue otro de los conocimientos que estuvieron en juego durante la resolución de ecuaciones, lo cual les permitió avanzar en su resolución.

Recomendaciones para la enseñanza

Durante las dos sesiones de trabajo, el maestro utilizó la palabra fórmula para referirse a las ecuaciones, la principal razón de esto fue porque se consideró que el concepto de fórmula puede resultar más familiar a alumnos que se están iniciando en el estudio de las ecuaciones. Sin embargo, siempre estuvieron presentes los contenidos esenciales para iniciar el trabajo en este tema; como la noción de incógnita y de equivalencia entre los dos miembros de una ecuación. Es conveniente que una vez que los alumnos se han familiarizado con las ecuaciones y sus componentes, comience a introducirse el uso de los términos formales, como ecuación, primer y segundo miembro de una ecuación, incógnita y solución de la ecuación, entre otros.

Otro aspecto importante fue la escritura de cálculos y expresiones matemáticas; algunos alumnos concatenaron operaciones utilizando el signo igual en expresiones como la siguiente: $7 \times 3 = 21 + 10 = 31$, es evidente que los tres valores separados por los signos igual no son equivalentes, sin embargo, los alumnos hicieron caso omiso de esta situación. Es recomendable hacer ver estos errores a los alumnos en un momento posterior; esto no fue abordado explícitamente en las sesiones de trabajo para dar fluidez a las sesiones, aunque esta situación no representó un obstáculo para el trabajo desarrollado, recomendamos enfáticamente que se atienda en un momento oportuno más adelante.

También es importante considerar las dificultades de los alumnos para abordar nuevos temas, por ejemplo, cuando abordaron ecuaciones que contenían paréntesis, como: $10 + 3(y - 8) = 31$, hubo quienes operaban de izquierda a derecha sin importar el orden de las operaciones. Esta dificultad con la jerarquía de las operaciones fue superada con la orientación del maestro y las explicaciones dadas por los mismos alumnos al grupo; sin embargo, conviene que el maestro incluya otras actividades que involucren el uso de paréntesis y cálculos en los que intervenga la jerarquía de operaciones.

Una situación primordial en el trabajo realizado en estas sesiones es que los alumnos formulen argumentos para validar sus respuestas; es recomendable que el maestro esté alerta para solicitar a los alumnos que validen las respuestas que ofrecen. Las preguntas que planteaba el maestro hicieron posible que durante las sesiones en el aula fuera común ver a los alumnos trabajar en los dos sentidos cuando resolvían una ecuación: una vez que resolvían una ecuación, hacían los cálculos pertinentes para comprobar que el valor obtenido hacía cierta la equivalencia entre los dos miembros de la ecuación.

Por último, conviene resaltar que en las sesiones de trabajo los alumnos son quienes ofrecen la mayor parte del contenido de la clase y se puede apreciar una gran seguridad en los alumnos en el uso de sus propios métodos. Este hecho no implica que los alumnos vayan a poder decir y descubrirlo todo, será muy importante que el maestro aproveche las respuestas que ofrecen los alumnos y que gradualmente introduzca las reglas convencionales para resolver ecuaciones que representan un mayor nivel de dificultad, por ejemplo, ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$.

Ampliación del tema

Ecuaciones y su solución

Las ecuaciones son expresiones algebraicas que consisten de un miembro izquierdo y uno derecho conectados mediante un signo de igualdad; los diferentes procedimientos que pueden efectuarse en ambos lados de las ecuaciones tienen como propósito resolverlas. Resolver una ecuación significa encontrar valores de la(s) variable(s) para los cuales ambos lados de la ecuación son iguales.

El análisis de diversas situaciones da origen a ecuaciones, cuya solución permite resolver un determinado problema. Por ejemplo, las ofertas de salario de dos empresas que se dedican a la venta de enciclopedias, son las siguientes:

> Empresa A: Ofrece a sus vendedores un sueldo mensual base de \$1 800.00 más una comisión de \$150.00 por cada enciclopedia vendida.
>
> Empresa B: Ofrece un sueldo mensual base de \$2 300.00 más una comisión de \$100.00 por cada enciclopedia vendida.

Respecto de esta información, se pueden hacer preguntas cuya respuesta conlleve la construcción de ecuaciones, por ejemplo:

a) ¿Cuántas enciclopedias requiere vender un vendedor de la empresa A para obtener un salario mensual de \$4 800.00?

b) ¿Cuántas requiere vender un vendedor de la empresa B para obtener un salario mensual de \$4 800.00?

c) ¿En cuál caso un vendedor de la empresa A y otro de la empresa B venden la misma cantidad de enciclopedias y además obtienen el mismo salario en un mes?

Los incisos *a)* y *b)* dan origen, respectivamente, a las siguientes ecuaciones:

$$150w + 1\,800 = 4\,800,$$
$$100x + 2\,300 = 1\,800,$$

donde w y x son el número de enciclopedias vendidas.

Para el tercer inciso se escribe la siguiente ecuación:

$$150w + 1\,800 = 100w + 2\,300,$$

en donde w es la cantidad de enciclopedias vendidas por los vendedores de ambas empresas y la igualdad implica el mismo salario mensual.

La ecuación $150w + 1\,800 = 100w + 2\,300$ puede ser resuelta mediante diversos métodos: numérico, algebraico y gráfico.

El método numérico consiste en evaluar los dos lados de la ecuación con los mismos valores hasta que se encuentre uno que produzca el mismo resultado para ambos lados de la ecuación. En la tabla 1 se observan varias evaluaciones, la solución de la ecuación es $w = 10$, como se puede ver en el renglón resaltado, en el que tanto $150w + 1\,800$ como $100w + 2\,300$ tienen el mismo resultado. Esta solución nos permite determinar el caso en el que los vendedores de ambas empresas no sólo venden la misma cantidad de enciclopedias al mes (10), sino también obtienen el mismo salario mensual ($3 300.00), lo cual permite dar respuesta a la pregunta del inciso *c)*.

Tabla 1

w	$150w + 1\,800$	$100w + 2\,300$
2	2 100	2 500
4	2 400	2 700
6	2 700	2 900
8	3 000	3 100
10	3 300	3 300
12	3 600	3 500
14	3 900	3 700
16	4 200	3 900
18	4 500	4 100

El método algebraico para resolver la misma ecuación se ilustra a continuación:

$$150w + 1800 = 100w + 2300$$
$$150w + 1800 - 1800 = 100w + 2300 - 1800$$
$$150w - 100w = 100w + 500 - 100w$$

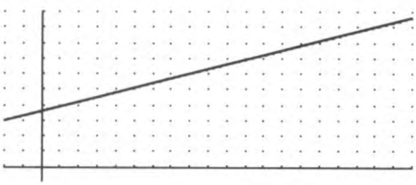
$$50w = 500$$

$$\frac{50w}{50} = \frac{500}{50}$$

$$w = 10$$

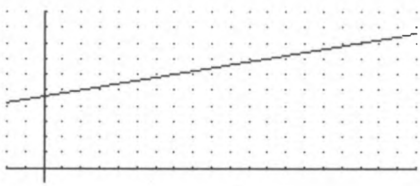
Después de una serie de pasos la solución de la ecuación se obtiene, la cual coincide con la obtenida mediante el método numérico.

En el método gráfico se construye la gráfica de la función que se ubica en cada lado de la ecuación y se observa el punto de intersección entre ellas, las figuras 1 y 2 muestran cada gráfica (la escala en ambas gráficas es, en *x:* 1, en *y:* 500).



$y = 150x + 1\,800$

Figura 1



$y = 100x + 2\,300$

Figura 2

En la figura 3 se observa la intersección de las gráficas, (10, 3 300), en donde el valor de la abscisa representa la solución de la ecuación, y el de la ordenada es el resultado que se obtiene de evaluar cada lado de la ecuación con el valor de la abscisa, en este caso 3 300.

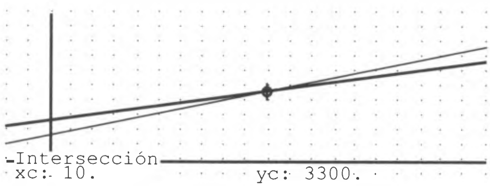


Figura 3

Como segundo ejemplo veamos la solución de la ecuación $x^2 - 3 = -2x$. Mediante la evaluación numérica se puede construir la tabla 2. En esta ocasión hay dos renglones resaltados que contienen soluciones de la ecuación, las cuales son $x = -3$ y $x = 1$. En la primera solución los dos lados de la ecuación son iguales a 6 y en la segunda, a -2.

Tabla 2

x	$x^2 - 3$	$-2x$
-4	13	8
-3	6	6
-2	1	4
-1	-2	2
0	-3	0
1	-2	-2
2	1	-4
3	6	-6
4	13	-8

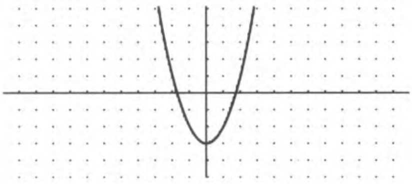
Con el método algebraico se puede realizar el siguiente procedimiento, con el que se obtienen las mismas soluciones que mediante la evaluación numérica.

$$x^2 - 3 = 2x$$
$$x^2 - 3 + 2x = -2x + 2x$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x + 3)\,(x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0$$
$$x_1 = -3$$

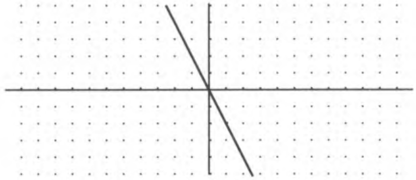
$$x - 1 = 0$$
$$x_2 = 1$$

Veamos ahora una solución gráfica. Las figuras 4 y 5 muestran las gráficas de cada lado de la ecuación.



$y = x^2 - 3$

Figura 4



$y = -2x$

Figura 5

En las figuras 6 y 7 se observan las intersecciones de las dos gráficas, $(-3, 6)$ y $(1, -2)$; las abscisas representan las soluciones de la ecuación y las ordenadas el valor numérico de cada lado de la ecuación.

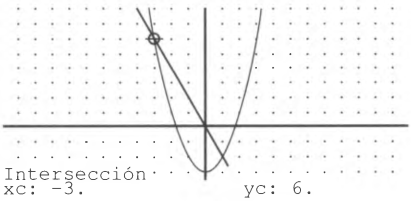


Figura 6

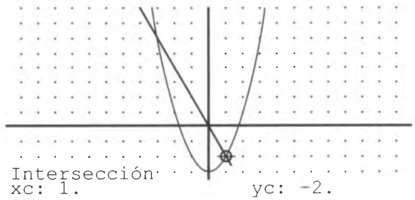


Figura 7

En el tercer ejemplo resolvamos la ecuación $\frac{x+3}{x+4} = 1$. Es posible anticipar aún sin desarrollar alguno de los métodos mencionados hasta el momento que dicha ecuación no tiene soluciones. Para que un cociente sea igual a la unidad se requiere que las dos cantidades sean iguales, lo cual no sucede en este caso. Si además transformamos la ecuación en $x + 3 = x + 4$, tenemos que la igualdad no se cumple. De esta forma, una ecuación puede tener alguna o ninguna solución, en cualquiera de los casos la ecuación estaría resuelta.

No siempre resulta conveniente considerar sólo un cierto repertorio de procedimientos para resolver ecuaciones, es útil también desarrollar un sentido matemático que nos ayude a visualizar, en este caso, la ecuación que tenemos ante nosotros para poner en práctica otras habilidades y conocimientos matemáticos, como se mostró en el tercero de los ejemplos.

Consideremos como cuarto ejemplo la ecuación $2x^2 + 3 = 1$. Si el propósito es que los alumnos practiquen sus habilidades para transformar ecuaciones y de este modo resolverlas, se considera justificado que pongan en práctica un método algebraico para resolver ecuaciones como ésta; sin embargo, también puede promoverse la visualización, lectura e interpretación de ecuaciones. Por ejemplo, una primera interpretación puede consistir en considerar que el lado izquierdo de la ecuación $2x^2 + 3 = 1$ siempre será mayor que el derecho, aun cuando el valor de x sea cero o un número negativo (ya que el cuadrado de cualquier número real siempre es positivo), lo cual hace inviable la igualdad y entonces la ecuación no tiene solución alguna.

Cierta experiencia con las representaciones gráfica y algebraica de las familias de la función constante y la cuadrática, puede favorecer el desarrollo de representaciones visuales de una ecuación. El lado izquierdo de la ecuación se representa con una parábola que abre hacia arriba y con su vértice en (0, 3), el cual además es el valor mínimo de la función. Y el lado derecho de la ecuación es la función constante cuya gráfica es la línea horizontal $y = 1$. Por lo tanto, las gráficas no tienen ningún punto en común y por esto la ecuación no tiene solución alguna. La figura 8 muestra las gráficas de los dos miembros de la ecuación en donde se observa que ambas gráficas no se cruzan.

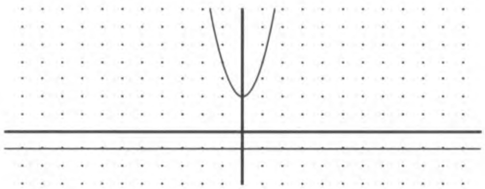


Figura 8

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se llama cuadrática. Existen diversos métodos para resolverlas, la elección de un método puede depender de los componentes de la ecuación. Si se divide a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por a $(a \neq 0)$, resulta la expresión $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, la cual se puede expresar como $x^2 + px + q = 0$. Veamos cómo puede resolverse esta ecuación, lo cual proporciona un método para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Si $p = 0$

En este caso la ecuación queda como $x^2 + q = 0$ y entonces existen tres posibilidades. Cuando q = 0 hay sólo una solución, $x = 0$. Si $q > 0$ entonces no se tiene solución alguna debido a que no hay un número positivo que sumado con x^2 dé cero. Si $q < 0$ se tienen las soluciones $x = \sqrt{-q}$ y $x = -\sqrt{-q}$.

La ecuación $x^2 + px + q = 0$

Para resolver ecuaciones completas de la forma $x^2 + px + q = 0$ se puede usar el procedimiento que se ilustra a continuación.

Por ejemplo, tomemos $p = 4$ y $q = -6$. Tenemos entonces la ecuación $x^2 + 4x - 6 = 0$.

$$(x^2 + 4x + 4) - 10 = 0$$
$$(x + 2)^2 - 10 = 0$$
$$(x + 2)^2 = 10$$
$$x + 2 = \sqrt{10} \quad \text{o} \quad x + 2 = -\sqrt{10}$$
$$x = -2 + \sqrt{10} \quad \text{o} \quad x = -2 - \sqrt{10}$$

Con la ecuación $x^2 + 2x + 5 = 0$:

$$(x^2 + 2x + 1) + 4 = 0$$
$$(x + 1)^2 + 4 = 0$$

En este caso la ecuación no tiene solución debido a que la suma de $(x + 1)^2$ y 4 nunca será cero.

El método utilizado se basa en completar la ecuación original para llevarla a la forma $a^2+2ab+b^2$ (cuadrado perfecto). En forma general se tiene lo siguiente:

$$x^2 + px + q = 0$$
$$\left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

A partir de este resultado tenemos tres casos:

- Si $\frac{p^2}{4} - q > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

- Si $\frac{p^2}{4} - q = 0$ entonces hay sólo una solución:

$$x = -\frac{p}{2}$$

- Si $\frac{p^2}{4} - q < 0$ entonces no hay solución.

Teorema de Vieta

Teorema. Si una ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ tiene dos soluciones diferentes m y n entonces

$$m + n = -p, \text{ y}$$
$$mn = q.$$

Corolario. Si una ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ tiene dos soluciones distintas m y n entonces

$$x^2 + px + q = (x - m)(x - n) \text{ o } (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn,$$

ya que dos polinomios son iguales si tienen respectivamente los mismos coeficientes.

El converso del teorema de Vieta nos permite construir ecuaciones cuadráticas dadas las soluciones.

Teorema. Si m y n son cualesquier números, $p = -(m + n)$ y $q = mn$, entonces la ecuación $x^2 + px + q = 0$ tiene soluciones m y n.

Por ejemplo, si tenemos las soluciones $3-\sqrt{5}$ y $3+\sqrt{5}$ podemos construir una ecuación con coeficientes enteros. Para ello calculamos

$$p = -((3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})) = -6 \text{ y } q = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})\, 9 - 5 = 4,$$

y la ecuación queda como $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Incluso podríamos extender el teorema de Vieta para una ecuación cúbica de la forma $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ si consideramos las soluciones m, n y k.

Para ello, asumamos la igualdad $x^3 + px^2 + qx + r = (x - m)(x - n)(x - k)$ y desarrollemos el lado derecho:

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + r &= (x-m)(x-n)(x-k) \\ &= (x^2 - (m+n)x + mn)(x-k) \\ &= x^3 - (m+n)x^2 + mnx - kx^2 + (m+n)kx - kmn \\ &= x^3 - (m+n+k)x^2 + (mn+mk+nk)x - kmn \end{aligned}$$

De dicho desarrollo tenemos las siguientes igualdades:

$$m+n+k=-p$$
$$mn+mk+nk=q$$
$$kmn=-r$$

Corolario. Si una ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ tiene tres soluciones distintas, m, n y k, entonces

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-m)(x-n)(x-k)$$

o

$$(x-m)(x-n)(x-k) = x^3 - (m+n+k)\,x^2 + (mn+mk+nk)x - kmn$$

Se puede entonces construir la ecuación cúbica cuyas soluciones son -2, -1 y 4. Para ello, escribimos $(x+2)(x+1)(x-4)=0$ y determinamos los valores de p, q y r.

$$p = -(m+n+k) = -(-2-1+4) = -1$$
$$q = mn + mk + nk = (-2)(-1) + (-2)(4) + (-1)(4) = 2 - 8 - 4 = -10$$
$$r = -mnk = -(-2)(-1)(4) = -8$$

Por lo tanto, la ecuación queda como $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$. Una representación gráfica de la solución se muestra en la figura 9: los cruces de la gráfica con el eje de las abscisas son las soluciones de la ecuación cúbica.

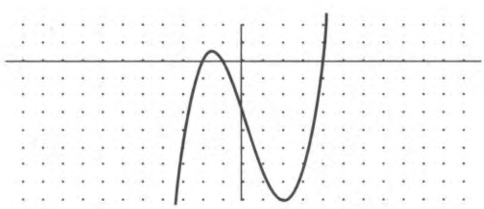


Figura 9

Fórmula general

Como vimos antes, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ fue dividida por a y se obtuvo $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, la cual se reescribió como $x^2 + px + q = 0$, por lo que $p = \frac{b}{a}$ y $q = \frac{c}{a}$. Se obtuvo la solución $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, por lo tanto, si sustituimos a p y q, tendremos una fórmula general para determinar las soluciones de toda ecuación cuadrática. Las siguientes transformaciones concluyen con dicha fórmula.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = -\frac{\frac{b}{a}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{4} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textit{Fórmula general}$$

De esta manera, se obtiene una fórmula que depende de los valores *a, b* y *c* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. El radicando $b^2 - 4ac$ (llamado discriminante) determina el número de posibles soluciones de la ecuación. Si $b^2 - 4ac > 0$ hay dos soluciones, si $b^2 - 4ac = 0$ sólo hay una solución y si $b^2 - 4ac < 0$ entonces no hay soluciones reales.

Ecuaciones bicuadrátricas

Se llama bicuadráticas a ecuaciones de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Por ejemplo, la ecuación $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ es de este tipo. A continuación se muestra un método para su solución.

Si consideramos $y = x^2$ podemos reescribir la ecuación $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ como $y^2 - 3y + 2 = 0$ y entonces resolverla como una cuadrática:

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$y_1 = 2$$
$$y_2 = 1$$

Una vez que se ha resuelto se tiene que $y = x^2$, por lo tanto, $x^2 = 2$ o $x^2 = 1$, por lo que la ecuación tiene cuatro soluciones:

$$x = 1, x = -1, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 10: los cruces de la gráfica con el eje horizontal son las soluciones.

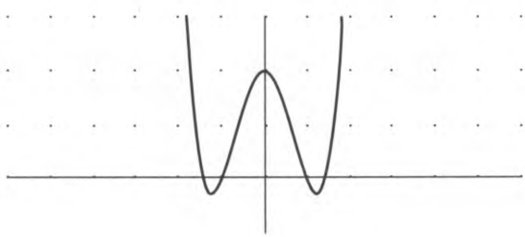


Figura 10

Una ecuación bicuadrática con dos soluciones es $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$. Si consideramos $y = x^2$ podemos reescribirla como $y^2 - 4y + 4 = 0$ y entonces resolverla como una cuadrática:

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$y_{1,2} = 2$$

Una vez que se ha resuelto se tiene que $y = x^2$, por lo tanto, $x^2 = 2$, por lo que la ecuación tiene dos soluciones:

$$x = \sqrt{2}$$
$$x = -\sqrt{2}$$

La solución gráfica de la ecuación se muestra en la figura 11.

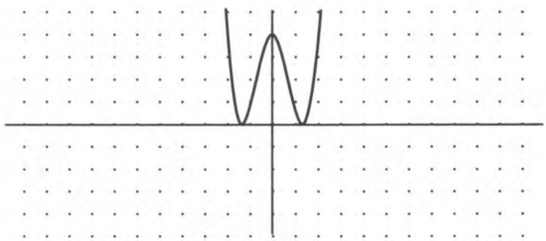


Figura 11

Una ecuación bicuadrática con tres soluciones es $x^4 - 9x^2 = 0$, veamos su solución. Si consideramos $y = x^2$ podemos reescribirla como $y^2 - 9y = 0$ y resolverla como una cuadrática:

$$y=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4(1)(0)}}{2(1)}=\frac{9\pm 9}{2}$$

$$y_1=9$$
$$y_2=0$$

Una vez que se ha resuelto se tiene que $y = x^2$, por lo tanto $x^2 = 9$ o $x^2 = 0$; por lo que la ecuación tiene tres soluciones:

$$x = 3,\ x = -3,\ x = 0$$

La solución gráfica de la ecuación se muestra en la figura 12.

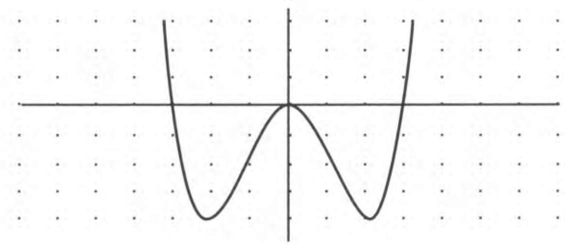


Figura 12

La ecuación bicuadrática $x^4 + 0.5\,x^2 = 0$ tiene sólo una solución. Al considerar $y = x^2$ la ecuación se escribe como $y^2 + 0.5y = 0$ y entonces se resuelve la ecuación cuadrática:

$$y=\frac{-(0.5)\pm\sqrt{(0.5)^2-4(1)(0)}}{2(1)}=\frac{-0.5\pm 0.5}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{-1}{2}$$

Una vez resuelta se tiene que $y = x^2$, por lo tanto, $x^2 = 0$; por lo que la ecuación tiene una única solución:

$$x = 0$$

En la figura 13 se observa la gráfica de la ecuación.

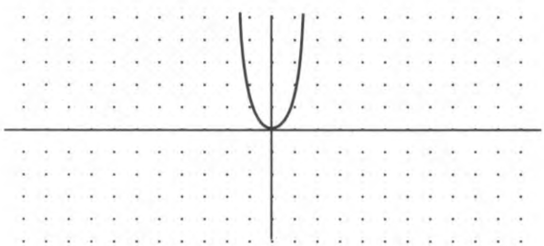


Figura 13

La ecuación $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ se puede reescribir como $y^2 + 2y^2 + 1 = 0$ si se toma $y = x^2$, se resuelve la ecuación cuadrática:

$$y = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$y_{1,2} = -1$$

Se sabe que $y = x^2$, por lo tanto, $x^2 = -1$, por lo que la ecuación no tiene solución. La gráfica de la ecuación se muestra en la figura 14.

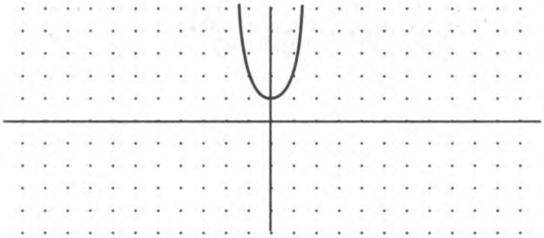


Figura 14

BIBLIOGRAFÍA

Cedillo, T. *Toward an Álgebra Acquisition Support System: A Study Based on Using Graphic Calculators in the Classroom.* Mathematical Thinking and Learning, 3(4), 221-259. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2001.

Cedillo, T. *La calculadora en el salón de clase: Sentido numérico e iniciación al álgebra,* 2a ed. México, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 4, 1999b.

Cedillo, T. *La calculadora en el salón de clase: Nube de puntos.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, vol. 4, 1999c.

Friel, S., Rachlin S. y D. Doyle. *Navigating Through Algebra in Grades 6-8.* National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia, 2001.

Gelfand, I. y A. Shen. *Algebra.* Birkhäuser. EUA, 2002.

Kieran, C. *The Learning and Teaching of School Algebra en Algebraic Thinking, Grades K-12.* Editado por Moses B. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia, 1999.

Kieran, C. *The transition from arithmetic to algebra: a model for conceptualizing school algebra and the role of computer technology in supporting the development of algebraic thinking.* Matemática Educativa. Aspectos de Investigación Actual (pp. 121-142), Fondo de Cultura Económica, 2003.

Posamentier, A. y J. Stepelman. *Teaching Secondary School Mathematics.* 2a. ed. Charles E. Merrill Publishing Company A Bell & Howell Company. Columbus, Ohio, 1986.

Zazkis, R y P. Liljedahl. *Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation.* Educational Studies in Mathematics: 49 (pp. 379-402), Kluwer Academic Publishers, 2002.

APÉNDICE

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA

Hoja de trabajo de la primera clase

Una compañia telefónica ofrece teléfonos celulares que operan con tarjetas de diferentes precios, y cobra $6.00 por minuto (o fracción).

Si te regalan un teléfono celular de dicha compañía con una tarjeta de $200.00, que te da un crédito de $300.00:

1. ¿A lo más cuántos minutos puedes hablar con este crédito?
2. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si haces una llamada de 5 minutos?
3. ¿Cuánto gastas de tu crédito de $300 si hablas 17 minutos?
4. Si tu crédito está en $120.00, ¿a lo más, cuántos minutos has usado de tu crédito de $300?
5. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto gastaste de tu crédito en una llamada si conoces el número de minutos que hablaste.
6. Rescribe la fórmula que construiste en el inciso anterior, considerando que el gasto por la llamada fue de:

   a) $150.00
   b) $240.00

7. Completa la siguiente tabla:

Minutos hablados	Crédito que queda de los 300 pesos ($)
5	
10	
17	
	60.00
	30.00

8. Construye una fórmula que te permita determinar cuánto crédito te queda de los \$300.00 si conoces el número de minutos que hablaste.
9. Rescribe la expresión algebraica que construiste en el inciso anterior, considerando que el crédito que te queda de \$300.00 es de:

   a) \$30.00
   b) \$252.00

La compañía telefónica ha cambiado las condiciones del cobro de las llamadas, y ahora cobrará por el tiempo que dure la llamada, es decir, las fracciones de minuto las va a cobrar por lo que corresponda, manteniendo la tarifa de \$6.00 por minuto.

10. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 5) para responder las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de \$45.00?
   b) ¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de \$69.00?
   c) ¿Cuánto tiempo hablaste si el gasto de la llamada fue de \$31.50?

11. Usa la fórmula que escribiste en el inciso 8), para contestar las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan \$243.00 de mi crédito de \$300.00?
   b) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan \$165.00 de mi crédito de \$300.00?
   c) ¿Cuántos minutos hablé si me quedan \$7.50 de mi crédito de \$300.00?

12. Inventa un problema con cada una de las siguientes fórmulas:

   a) $4.5x + 30 = 156$
   b) $900 - 5x = 717.50$

Hoja de trabajo de la segunda clase

1. En las siguientes expresiones encuentra el número que falta.

a) $b + 1.03 = 24.7$ $b =$	*b)* $m - 1.67 = 30.25$ $m =$	*c)* $p - 12.22 = 4.05$ $p =$
d) $4.8 - r = 3.5$ $r =$	*e)* $\frac{5.2}{n} = 4$ $n =$	*f)* $5 \times b - 1 = 29$ $b =$
g) $k + 1.5 = 6.2$ $k =$	*h)* $2 \times c = 11$ $c =$	i) $3 \times a + 1 = 121$ a =

2. ¿Hay alguna forma que les permita verificar que sus respuestas son correctas? Discutan esto con sus compañeros y anoten el método que les parezca más eficaz. ____

____

____

3. Una alumna dice que el número que falta en $4 \times d + 2 = 4$ es 0.5. ¿Están de acuerdo con ella? ¿Por qué? ______________________________

____

____

4. Encuentra el número que falta en cada una de las siguientes expresiones.

a) $4(x + 12) + 7 = 87$	*b)* $10 + 3(y - 8) = 31$
c) $34 - 2(a - 1) = 18$	*d)* $7(b + 3) - 5 = 51$
e) $22 + \frac{p+8}{3} = 28$	*f)* $\frac{q-3}{4} + 13 = 16$

5. Escribe cómo le explicarías en forma clara a un compañero el método para resolver ecuaciones como las que acabas de resolver.

El módulo 6: *Ecuaciones de primer grado*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Álgebra
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacan 1031. CP. 03100, Col. del Valle.