PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 4

ÁLGEBRA

Patrones numéricos y generalización

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá

SEP

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

ILCE

BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 4

ÁLGEBRA

Patrones numéricos y generalización

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Álgebra

Módulo 4: Patrones numéricos y generalización

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, c.p. 14200,
Tlalpan, ciudad de México, D.F.
www.upn.mx

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-176-4 módulo 4

Impreso y hecho en México

ÍNDICE

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

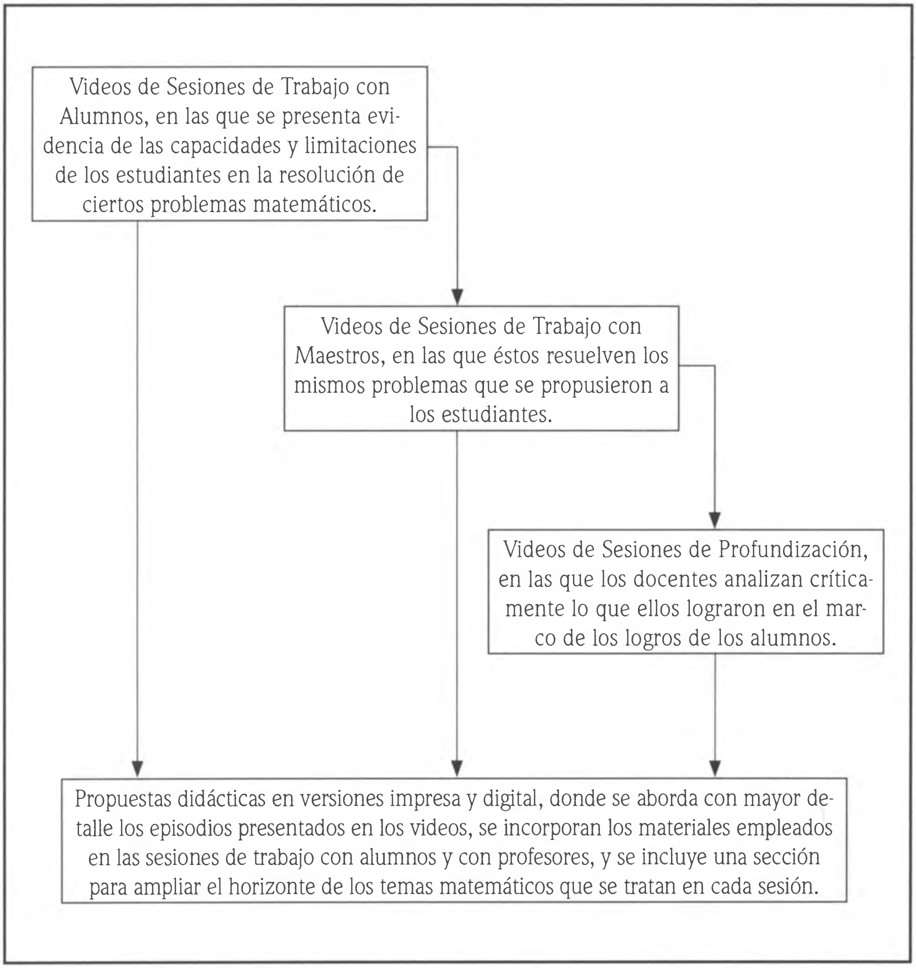
Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.



Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término "sesiones de trabajo", en lugar de "clase modelo", para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste "entrega" sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para "recibirlos". Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo.* Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización.* La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son "recipientes que esperan ser llenados", y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*,1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education*, 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

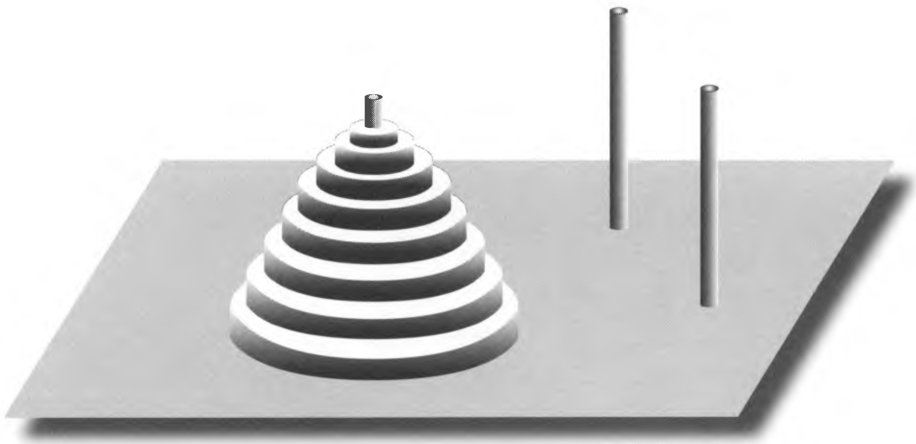
Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

Las Torres de Hanoi es un juego creado por el maestro Edouard Lucas en 1883. Originalmente llevaba el nombre de “Prof. Claus del Colegio de L-Son-Stian”, pero pronto se descubrió que no era más que un anagrama de “Prof. Lucas del Colegio de Saint Louis”.



El juego consiste de tres estaquillas fijas en un tablero y de ocho discos; cada disco tiene un agujero en el centro. Todos los discos son de diferente radio, inicialmente apilados en una de las estaquillas (como se muestra en la figura anterior). Los discos se colocan ordenados por su tamaño. La descripción original del juguete explicaba que era una versión simplificada de una mítica torre de Brahma, existente en el templo de la ciudad hindú de Benarés de Parville. En la revista *La Nature*, de 1884, se publicó la leyenda que ha trascendido por su ingenio y belleza:

> En el gran templo de Benarés, debajo del domo que marca el centro del mundo, descansa una bandeja de latón en la que se han fijado tres agujas de diamante, cada

una de un codo de alto y tan gruesa como el cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, en el momento de la creación, Dios colocó sesenta y cuatro discos de oro puro, el disco mayor reposando sobre la placa de latón, y los demás cada vez más pequeños, superpuestos hasta llegar al más alto. Esta es la Torre de Brahma. Día y noche continuamente, los sacerdotes transfieren los discos desde una aguja de diamantes a otra, de acuerdo con las fijas e inmutables leyes de Brahma, que requieren que el sacerdote en turno no mueva más de un disco cada vez y que coloque este disco en una aguja de tal modo que no haya un disco menor debajo de él. Cuando los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos desde la aguja en la cual los colocó Dios en el momento de la creación a una de las otras agujas, la torre, el templo, así como los brahmanes, se derrumbarán tornándose en polvo, y, con un trueno, el mundo desaparecerá.[1]

Se decidió incluir este juego en el módulo de patrones numéricos y generalización por la riqueza de las actividades que se pueden desprender de él. El juego en sí es un reto interesante que se puede plantear en distintos niveles educativos. Las regularidades contenidas en él propician la aplicación del razonamiento inductivo y la exploración vía casos particulares; las relaciones numéricas que se pueden construir al representar el juego, permiten identificar patrones numéricos e invitan a generar expresiones algebraicas que los describan. Algo muy importante es que esas expresiones tienen un referente directo en el juego. La generalización es un reto constante cada vez que se observan las regularidades contenidas en el juego. Estas son algunas de las características que se pueden aprovechar como electas para motivar la curiosidad intelectual de los alumnos con la finalidad de promover el desarrollo de su pensamiento matemático.

[1] Mataix, Mariano. *Historias de matemáticos y algunos problemas*. Barcelona-México, Marcombo, Boixarea Editores, 1986.

PATRONES NUMÉRICOS Y GENERALIZACIÓN

Planteamiento de los problemas

Problemas planteados en la primera sesión

1. Se inicia con tres discos. El reto es transferir los tres discos colocados en una estaquilla a cualquiera de las otras dos que inicialmente están vacías, moviendo un disco cada vez sin colocar un disco encima de otro de menor tamaño. Se pide a los alumnos que vayan registrando los movimientos que hacen con la finalidad de que respondan las preguntas siguientes:

   a) ¿Cuál es el número mínimo de movimientos para pasar los tres discos de una estaquilla a otra?
   b) Si les ponemos nombre a las estaquillas, digamos A, B y C, estando los discos en la estaquilla A y se quieren pasar a B o C en el número mínimo de movimientos, ¿hacia qué estaquilla se debe hacer el primer movimiento?
   c) ¿Cuántos movimientos hace cada disco si se pasa de una torre a otra?

2. Se plantean las mismas preguntas, pero empleando ahora cuatro discos.

Problemas planteados en la segunda sesión

1. Se propone el juego usando cinco discos y se pide a los alumnos que contesten las mismas preguntas que se les hicieron en la sesión anterior. Además, se les pregunta lo siguiente:

¿Es necesario realizar el juego con los cinco discos, o de las relaciones numéricas encontradas en los casos anteriores se pueden inferir las respuestas para este caso?

2. Se propone el juego usando 10 discos y se hacen las mismas preguntas que en los casos anteriores.
3. Se plantean los mismos problemas usando 20 discos.
4. Se propone el mismo problema considerando que ahora se trata de n discos. Se induce a los alumnos a formular una generalización haciéndoles la siguiente pregunta:

¿Se puede obtener una regla general cuando se trabaja con n *discos?*

Objetivos

Que el alumno:

- Desarrolle habilidades que le permitan resolver problemas matemáticos.
- Establezca criterios que le permitan validar las soluciones a los problemas.
- Sea capaz de recuperar sus conocimientos matemáticos previos para encontrar regularidades contenidas en el juego.
- Reconozca regularidades y patrones numéricos relacionados con el juego.
- Aprenda a identificar regularidades numéricas a partir de casos particulares.
- Aprenda a expresar generalizaciones usando la simbología matemática.
- Exprese en forma verbal y escrita, mediante el lenguaje algebraico, las regularidades y patrones identificados.
- Asigne un significado a las expresiones algebraicas acorde al contexto del que surgen.

Planeación de las actividades con los alumnos

Primera sesión

Proyección de video (2 min). A través de un video se describe el origen del juego.

Comentarios sobre el juego descrito en el video (2 min). El maestro pregunta a los alumnos sobre el contenido del video, poniendo énfasis en las reglas del juego.

Los alumnos ejecutan el juego (2 min). Cada uno de los alumnos juega con su material didáctico, buscando trasladar los discos de una torre a otra (Torres de Hanoi).

Exposición del proceso diseñado por algunos alumnos (5 min). El maestro pide a algunos de los alumnos que pasen al frente y usen la computadora para describir el proceso que han diseñado para describir el juego (computadora y programa que simula el juego de las Torres de Hanoi).

Primeros hallazgos (1 min). El maestro al frente del grupo organiza los resultados relacionados con las dos primeras preguntas: el número de movimientos que se requieren para pasar los discos de una torre a otra y en dónde empezar tirando, si de antemano se quieren colocar los discos en una torre determinada (pizarrón).

Trabajo en el grupo (1 min). El maestro pide a los alumnos que trabajen, poniendo en práctica los resultados previamente establecidos (Torres de Hanoi).

Organización del trabajo en equipos (2 min). El maestro pide a los equipos que contesten la pregunta relacionada con el número de movimientos que hace cada disco (Torres de Hanoi y hojas).

Exposición de los resultados (3 min). El maestro pide a alguno de los alumnos que escriba en el pizarrón los resultados de su equipo (pizarrón).

Trabajo en equipo (10 min). Responder las mismas preguntas planteadas anteriormente, pero ahora con cuatro discos (Torres de Hanoi y hojas).

Exposición de los resultados (3 min). El maestro pide a alguno de los alumnos que use la computadora y describa los resultados obtenidos en su equipo (computadora, programa de las Torres de Hanoi y pizarrón).

Conclusiones (6 min). El maestro, frente al grupo, usa el pizarrón para presentar los resultados obtenidos por los equipos en el caso de 4 discos (pizarrón).

Resumen (2 min). El maestro, frente al grupo, organiza la síntesis del trabajo desarrollado en la clase y anuncia los problemas que se tratarán en la siguiente sesión.

Segunda sesión

Recuperación de la clase anterior (8 min). El maestro pide a alguno de los alumnos que pase al frente y en la computadora describa las actividades de la clase anterior; simultáneamente, escribe en el pizarrón los resultados correspondientes a las actividades (computadora, programa de las Torres de Hanoi y pizarrón).

Análisis del juego (2 min). Después de escribir en el pizarrón los resultados de los casos anteriores, el maestro pregunta a los alumnos si pueden contestar las mismas preguntas para el caso en que se tengan 5 discos; tienen la opción de usar los resultados del pizarrón o realizar el juego (Torres de Hanoi y pizarrón).

Validación de conjeturas (11 min). El maestro pide a alguno de los alumnos que pase al frente y en la computadora describa el juego para el caso de 5 discos; de manera simultánea, pide a los alumnos que contesten las preguntas que les va formulando (computadora, programa de las Torres de Hanoi y pizarrón).

De lo particular a lo general (7 min). El maestro pide a los alumnos que retomen la experiencia de los casos anteriores y respondan las mismas preguntas para los casos de 6, 7 y 10 discos respectivamente (Torres de Hanoi, pizarrón).

De la regla recursiva a la regla analítica (4 min). El maestro plantea el problema para el caso de 20 discos; pide a los alumnos que discutan, en los equipos, cómo van a proceder para responder a las preguntas, equivalentes a las anteriores (Torres de Hanoi, hojas).

Exposición de los resultados (6 min). El maestro pide a alguno de los alumnos que pase al pizarrón a escribir los resultados encontrados en el equipo (pizarrón).

Generalización (6 min). Con el uso de la computadora los alumnos resuelven el problema planteado en el video para el caso de 64 discos (computadora y pizarrón).

Conclusiones (3 min). El maestro organiza la presentación de las conclusiones. Plantea a los alumnos que contesten a las preguntas relacionadas con el caso general, es decir, cuando en la torre hay n discos (pizarrón).

Descripción de las actividades

Primera sesión

Cápsula de video

En ella se muestra el origen del juego; además de la descripción de la leyenda, se plantean las reglas del juego y los problemas que los alumnos han de resolver.

El maestro pregunta a los alumnos si las reglas del juego han quedado claras y si creen poder ejecutarlo.

Los alumnos abordan el juego usando 3 discos. El maestro les pide que, tomando en cuenta las reglas establecidas, individualmente realicen la actividad hasta lograr el dominio del juego.

Al término de la actividad anterior, el maestro pide a algunos de los alumnos que pasen al frente y usen la computadora para describir la estrategia que generaron para realizar el juego. Para el caso de 3 discos, la mayoría de los alumnos rápidamente pudo ejecutar el juego y logró pasar los discos de una torre a otra.

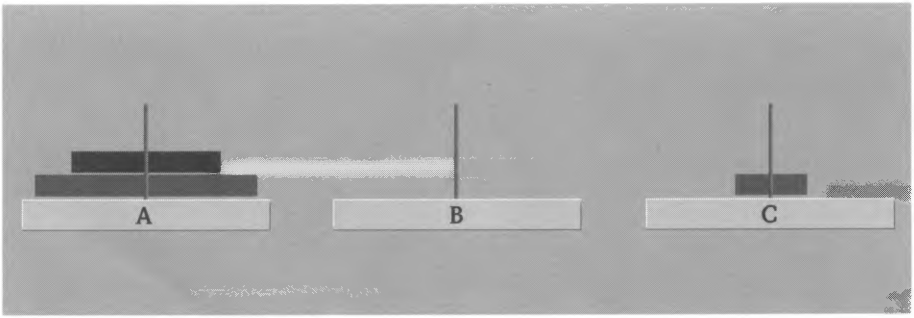
Con el juego dominado por los alumnos, el maestro solicita que contesten las preguntas descritas anteriormente:

- ¿Cuál es el número mínimo de movimientos que se requieren para pasar 3 discos de una torre a otra?
- Si les ponemos A, B y C a las estaquillas y los discos están en A, ¿hacia qué estaquilla se debe hacer el primer movimiento?
- ¿Cuántos movimientos hace cada uno de los discos al pasarlos de una torre a otra?

El maestro organiza al grupo en equipos de trabajo y pide que respondan a las preguntas planteadas anteriormente. Después de un tiempo adecuado, solicita a alguno de los alumnos que exponga en el pizarrón lo que su equipo encontró.

Con respecto a la primera pregunta, la mayoría de los equipos contestaron que el número mínimo de movimientos para trasladar los discos de una torre a otra es 7; sólo uno de los equipos lo hizo en más movimientos.

Con respecto a la segunda pregunta, los alumnos encontraron que el primer movimiento se realiza hacia la torre donde se quieren trasladar los discos.



La descripción que hicieron para el número de movimientos de cada uno de los discos fue la siguiente:

- Cuatro movimientos para el disco pequeño.
- Dos movimientos para el disco mediano.
- Un movimiento para el disco grande.

El maestro pide a los alumnos que trabajen en equipos para resolver el juego de las Torres de Hanoi con 4 discos y contesten las mismas preguntas del caso anterior. Además, les sugiere que traten de usar los resultados previamente establecidos.

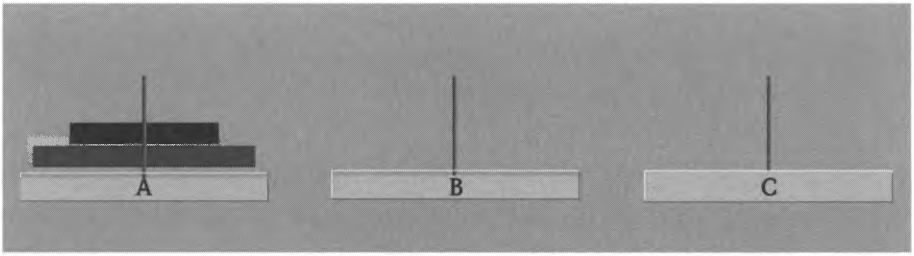
Con cada uno de los equipos, el maestro intercambia opiniones sobre el trabajo que realizan. Cuando la mayoría de los alumnos han contestado a las preguntas, el maestro solicita que alguno de ellos pase al frente y se auxilie de la computadora para presentar los resultados obtenidos en su equipo; simultáneamente el maestro organiza la información en el pizarrón.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- El número mínimo de movimientos es 15.
- El primer movimiento se realiza hacia la torre donde no se quiere que queden los discos.
- Si numeramos los discos del mayor al menor, el número de movimientos de cada disco se muestra en la tabla que se presenta a continuación.

Disco	**3 discos Número de movimientos de cada uno**	**4 discos Número de movimientos de cada uno**
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4		8

El maestro solicita que mentalmente encuentren las respuestas a las mismas preguntas para el caso de 1 y 2 discos y registren los resultados en las tablas. Las tablas quedan de la siguiente manera:



Número de discos	Número total de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15

Número de movimientos de cada uno de los discos

No. de discos	1 disco. Número de movimientos	2 discos. Número de movimientos de cada uno	3 discos. Número de movimientos de cada uno	4 discos. Número de movimientos de cada uno
1	1	1	1	1
2		2	2	2
3			4	4
4				8

El maestro plantea al grupo los problemas relacionados con las siguientes actividades y sugiere que las preguntas sean abordadas retomando las conclusiones derivadas de los casos trabajados hasta ese momento.

Para el caso de 5 discos, *¿cuántos movimientos se realizan en total para cambiar los discos de una torre a otra?*

Los alumnos conjeturan que es el doble del anterior más 1. Es decir, si para 4 discos se requieren 15 movimientos, para 5 se necesitan dos veces 15, es decir 30, más 1, resultando 31 movimientos.

¿Cuántos movimientos realiza cada uno de los discos?

Los alumnos encuentran que cada disco realiza el doble del anterior.

Es decir, para el caso de 4 discos, el disco 4 requiere 8 movimientos; al agregar 1 disco, el quinto disco requerirá el doble de 8, es decir, 16 movimientos.

Además, conjeturan que si el juego se realiza con un número impar de discos, el primer movimiento debe realizarse hacia la torre donde se desean cambiar los discos (con el número mínimo de movimientos). Si el número de discos es par, el primer movimiento debe hacerse hacia la torre donde no se desea que queden los discos (con el número mínimo de movimientos).

La clase concluye con las siguientes preguntas formuladas por el maestro:

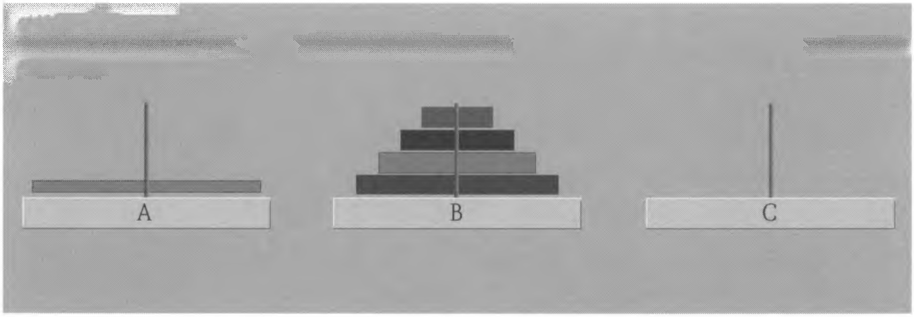
Si el juego se realiza con 10 discos, ¿se puede encontrar una expresión algebraica que nos permita determinar el total de movimientos sin tener que recurrir a los casos anteriores?
¿Se puede encontrar una expresión algebraica que nos permita determinar el número de movimientos que realiza cada uno de los discos sin recurrir a los casos anteriores?

Y también estas mismas preguntas, para el caso de 64 discos, así como para el caso general, cuando se tienen n discos.

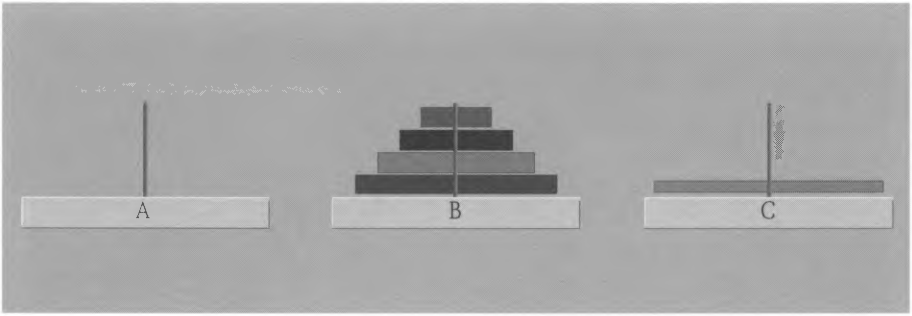
Segunda sesión

El maestro pide a alguno de los alumnos que pase al frente y use la computadora para describir las actividades de la clase anterior; simultáneamente, él escribe en el pizarrón los resultados que presentan.

Se recuerda los que hicieron para los casos de 1, 2, 3 y 4 discos. Para el caso de 5 discos, el alumno que pasó al frente a resumir la clase anterior descubre al ejecutar el juego y después de haber cambiado 4 discos que se necesitan 15 movimientos, como se muestra en la figura de la página siguiente.



Al pasar a la torre C el disco grande que se encuentra en la torre A, es un movimiento más. La situación de los discos queda como se muestra en la figura siguiente.



Ahora se trata de pasar 4 discos de la torre C a la torre B y eso ya se sabe: se logra con 15 movimientos. De esa manera se obtiene la relación del juego con los números que aparecen en la tabla, es decir, se requiere el doble de movimientos que en el caso anterior más 1.

Transición de lo particular a lo general

El maestro pide a los alumnos que retomen la experiencia de los casos anteriores y respondan las mismas preguntas para los casos de 6, 7 y 10 discos respectivamente.

Algunos de los equipos resolvieron los casos usando la regla anterior; las tablas que construyeron quedaron de la siguiente manera (en la segunda, se muestra el número de movimientos de cada disco).

Número de discos	Número total de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1 023

Número de discos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	2	2	2	2	2	2	2	2
3			4	4	4	4	4	4	4	4
4				8	8	8	8	8	8	8
5					16	16	16	16	16	16
6						32	32	32	32	32
7							64	64	64	64
8								128	128	128
9									256	256
10										512

Transición de la regla recursiva a la regla analítica

El maestro plantea el problema para el caso de 20 discos. Pide a los alumnos que discutan en los equipos cómo van a proceder para responder a las preguntas anteriores. Agrega que una posibilidad es elaborar la tabla hasta 20 discos; eso lo pueden hacer. Otra alternativa es encontrar alguna expresión algebraica que relacione el número de discos con el número total de movimientos y también con el número de movimientos de cada disco.

Exposición de los resultados

El maestro pide a alguno de los alumnos que pase al pizarrón a escribir los resultados encontrados en el equipo.

Un alumno pasó al frente y explicó que para 20 discos el número de movimientos es $2^{19} \times 2 - 1$ y lo ejemplificó como se muestra a continuación usando los casos conocidos de 4 y 7 discos

$$2^3 \times 2 - 1 = 8 \times 2 - 1 = 16 - 1 = 15.$$

$$2^6 \times 2 - 1 = 64 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

Otro alumno pasó al frente y aclaró que la expresión $2^{19} \times 2 - 1$ se puede escribir como $2^{20} - 1$ y que el total de movimientos es 1 048 575.

Respecto al número de movimientos de cada disco para el caso de tener 20 discos, obtuvieron la expresión

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{19}.$$

Como la suma del número de movimientos de cada disco es igual al total de movimientos, encontraron que

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{19} = 2^{20} - 1.$$

Paso a la generalización

Con el uso de la computadora, los alumnos resolvieron el caso de 64 discos, obteniendo 18 446 744 073 709 551 615 movimientos. Agregaron que si para cada movimiento se requiriera un segundo, puede dividirse ese número entre 60 para obtener cuántas horas se necesitarían para terminar el juego.

Conclusiones

El maestro pidió a los alumnos que contestaran las preguntas relacionadas con el caso general, es decir si en la torre hay n discos.

Los alumnos concluyeron que $2^n - 1$ es el número total de movimientos y construyeron la tabla que se muestra a continuación para registrar el número de movimientos de cada uno de los discos.

Disco	1	2	3	...	n
Número de movimientos	2^0	2^1	2^2	...	2^{n-1}

"Al sumar los movimientos de cada uno de los discos obtenemos el total:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1\text{''.}$$

Lo que hicieron los alumnos

Respuestas esperadas

- Que los alumnos entendieran el juego, primero en los casos en donde el número de discos era pequeño (3 o 4 discos), y con base en la experiencia adquirida en estos casos, pudieran hacerlo para un número mayor de discos.
- Que los alumnos descubrieran el número de movimientos que se requieren para trasladar los discos de una torre a otra. Esto lo lograron de dos maneras; primera, recurriendo al caso anterior; es decir, si conocían el número de movimientos para n discos entonces para $n + 1$ discos determinaría que sería el doble del anterior más 1; segunda, construyendo una relación funcional, lo cual no estaba considerado que ellos pudieran hacerlo por sí mismos (véase la sección de respuestas no esperadas).

- Que los alumnos descubrieran el número de movimientos que realiza cada uno de los discos al trasladarlos de una torre a otra.

Número del disco	Número de movimientos de cada disco
1	1
2	2
3	4
• • •	
n	*Doble del anterior*

Respuestas no esperadas

Al elaborar la lista del total de movimientos que hacen los discos, no se tenía la certeza de que los alumnos pudieran relacionar el total de movimientos con potencias de 2 sin la ayuda del maestro.

Que encontraran la expresión general $2^n - 1$ para indicar el número de movimientos que se requieren para trasladar n discos de una torre a otra.

Número de discos	Número Total de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1 023

Al ejecutar el juego con 5 discos, cuando ya habían pasado 4 discos de una torre a otra, recordaron que para 4 discos se requieren 15 movimientos más 1 del disco grande. De nuevo estaban ante la situación de mover 4 discos de una torre a otra, lo cual ya sabían que se lograba con 15 movimientos. A partir de esto concluyeron que para 5 discos se requiere del doble de movimientos que con 4, más 1.

Para el caso general, que pudieran relacionar la suma de los movimientos que hace cada uno de los discos con el total de movimientos, es decir, que esa relación se expresara como

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Dificultades

Cuando los alumnos contestan a las preguntas relacionadas con 20 discos, establecen que la expresión general para el total de movimientos es

$$2^{20} - 1,$$

y que el número de movimientos de cada uno de los discos es una potencia de 2, hasta 19.

Entonces escriben la relación entre el número de movimientos y el total de éstos con la expresión

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{19} = 2^{20} - 1.$$

Si los alumnos logran escribir esta relación, para el caso de 20 discos, el maestro les solicita que la escriban para n discos. La respuesta de los alumnos no es inmediata y se percibe un desconcierto. El maestro decidió decirles a los alumnos que observaran la expresión anterior, y si el exponente más grande del lado izquierdo de la igualdad era 19 y el del lado derecho 20, entonces qué pasaría con los exponentes para el caso de n discos. Inmediatamente contestaron que $n - 1$ y n, y entonces escribieron la relación general

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Planeación de la sesión con los maestros

Organización de las actividades (4 min). El coordinador da la bienvenida a los maestros, y describe las actividades a realizar en la sesión.

Proyección de video *(2 min).* A través de un video se describe el origen del juego (cápsula de video).

Trabajo individual (3 min). El coordinador pide a los maestros que trabajen individualmente usando el material manipulable y que realicen el juego con 4 discos (Torres de Hanoi).

Modificación de las condiciones del juego (3 min). El coordinador pide a los maestros que contesten las mismas preguntas del caso anterior con 3 discos (Torres de Hanoi).

Primeros hallazgos (4 min). El coordinador al frente del grupo organiza los resultados relacionados con las preguntas para el caso de 3 y 4 discos: el número de movimientos que se requieren para pasar los discos de una torre a otra, en dónde empezar tirando, si de antemano se quieren colocar los discos en una torre determinada y cuántos movimientos debe realizarse con cada uno de los discos (pizarrón).

Exposición de los resultados (3 min). El coordinador solicita que alguno de los maestros exponga en el pizarrón los hallazgos relacionados con el número mínimo de movimientos que se requieren para pasar los discos de una torre a otra (pizarrón).

Exposición de los resultados (3 min). El coordinador pide a algún maestro que exponga en el pizarrón los hallazgos relacionados con el número de movimientos que realiza cada uno de los discos (pizarrón).

Generalización de los resultados (5 min). El coordinador pide a alguno de los maestros que exponga en el pizarrón los resultados relacionados con el caso general, tanto para el número de movimientos que realiza cada uno de los discos como para el total de movimientos (pizarrón).

Conclusiones (4 min). El coordinador presenta los resultados obtenidos en la sesión (pizarrón).

Descripción de las actividades

Se dio la bienvenida a los maestros y se describieron las actividades a realizar en la sesión. En una *cápsula de video* se presentaron la leyenda sobre las Torres de Hanoi, las reglas del juego y los problemas que los maestros han de resolver.

Se pidió a los maestros que trabajaran individualmente usando el material manipulable con 4 discos y que contestaran las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el número mínimo de movimientos que se requieren para trasladar los discos de una torre a otra?
- Si se quiere cambiar los discos a una de las torres vacías, ¿hacia dónde se debe hacer el primer movimiento?
- ¿Cuántos movimientos realiza cada uno de los discos al pasarlos de una torre a otra?

Los maestros ofrecieron respuestas distintas, no todas correctas, a preguntas iguales. Entonces, se les pidió que realizaran el juego usando 3 discos y que contestaran las preguntas que se les plantearon para los casos de 3 y 4 discos.

Primeros hallazgos

Los maestros encontraron el número de movimientos para pasar los discos de una torre a otra; mostraron sus resultados mediante una tabla como la siguiente.

Número de discos	3	4
Número de movimientos	7	15

En cuanto al número de movimientos que realiza cada uno de los discos, se tiene la tabla siguiente.

Número de disco	1	2	3	4
No. de movimientos	1			
	1	2		
	1	2	4	
	1	2	4	8

Con respecto al primer movimiento formularon las siguientes conjeturas:

- Si el número de discos es impar, el primer movimiento se realiza hacia la torre donde se desean colocar los discos.
- Si el número de discos es par, el primer movimiento se realiza hacia la torre donde no se desea colocar los discos.

Uno de los maestros solicitó pasar al pizarrón a exponer sus resultados, los cuales se muestran a continuación.

Número de discos	Número de movimientos	Diferencia
1	1	
2	3	2
3	7	4
4	15	8

En todos los casos encontró que las diferencias son potencias de 2 y aseveró que esto se cumple para el caso general, cuando se tienen n discos. Y si en todos los casos se resta 1, se tiene el número total de movimientos, es decir, $2^n - 1$.

Otro maestro pasó al pizarrón a exponer lo que hizo para encontrar el número de movimientos que realiza cada uno de los discos.

Para 3 discos determinó lo siguiente.

Disco	Número de movimientos
Verde	4
Amarillo	2
Rojo	1

Señaló que la suma es $4 + 2 + 1 = 7$.

Para 4 discos, encontró lo siguiente.

Disco	Número de movimientos
Verde	8
Amarillo	4
Rojo	2
Azul	1

Pidió que se notara que la suma es $8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

Para 5 discos repitió el procedimiento, mostrando que la suma es

$$16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31.$$

Disco	Número de movimientos
1	16
2	8
3	4
4	2
5	1

Destacó que el total de movimientos es el doble del caso anterior más 1, es decir, $2m + 1$, donde m es el número de movimientos en el caso anterior.

Otro maestro planteó la siguiente pregunta: "En el caso de ocho discos, si les asignamos letras a cada uno de los discos, es decir $a, b, c, d, \ldots$ ¿cuántos movimientos realiza el disco d?" El interés del maestro era expresar algebraicamente la relación entre el número de movimientos de cada uno de los discos con el número de discos que se utilicen. El maestro concluyó que para el caso de 8 discos el número de movimientos de cada uno es $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^7$, y para n discos, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$.

Se les preguntó cuál es el resultado de esa suma. Los maestros contestaron $2^n - 1$ y concluyeron que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Lo que hicieron los maestros

Respuestas esperadas

- Que los maestros ejecutaran el juego y contestaran a las preguntas formuladas al inicio de la sesión.
- Que encontraran la expresión algebraica que describe el número mínimo de movimientos que se requieren para trasladar los discos de una torre a otra, $(2^n - 1)$.
- Que encontraran la expresión algebraica que describe el número de movimientos que realiza cada uno de los discos, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$.
- Que relacionaran ambas expresiones: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- Que conjeturaran sobre el primer movimiento:
  Si el número de discos es impar, el primer movimiento se realiza hacia la torre donde se desean colocar los discos.
  Si el número de discos es par, el primer movimiento se realiza hacia la torre donde no se desea colocar los discos.

Respuestas no esperadas

- Que para algunos maestros fuera necesario experimentar el juego empezando con 3 discos para poder ejecutarlo con 4.
- Que trataran de encontrar la expresión algebraica que relaciona el número de discos con el número de movimientos que realiza cada uno de ellos.

Dificultades

No se logró descubrir qué existe entre el número de movimientos cuando se tienen $n - 1$ y n discos. La relación se determinó a partir del listado de la tabla correspondiente al número de movimientos.

Número de discos	Número de movimientos	Doble del anterior +1
1	1	
2	3	2 (1) + 1
3	7	3 (2) + 1
4	15	7 (2) + 1

Uno de los maestros que pasaron al pizarrón trató de encontrar esa relación mediante una expresión algebraica. Lo intentó analizando el juego con 8 discos. Los maestros encontraron que son 16 movimientos, pero no lograron representar esa relación algebraicamente.

Lo que aprendieron los alumnos

- Descubrieron las regularidades contenidas en el juego.
- A identificar regularidades numéricas a partir de casos particulares.
- Descubrieron que la solución del juego con n discos se puede usar para contar el número de movimientos cuando se juega con $n + 1$ discos.
- Encontraron la expresión algebraica que relaciona el número asignado a cada uno de los discos con el número de movimientos que realiza.
- Tuvieron un acercamiento al razonamiento inductivo y deductivo.
- Que las respuestas a las preguntas planteadas por el maestro se relacionan con expresiones algebraicas.
- Construyeron argumentos para validar las soluciones a los problemas.

- Asignaron significados plausibles a las expresiones algebraicas acorde al contexto del que surgen.
- Recuperaron sus conocimientos matemáticos previos para encontrar regularidades contenidas en el juego: identificaron que los números que aparecen en las tablas tenían que ver con las potencias de 2.
- A expresar generalizaciones usando el código algebraico.
- Cómo expresar en forma verbal y mediante el lenguaje algebraico las regularidades y los patrones identificados .
- Que aprender matemáticas tiene que ver con encontrar propiedades tanto del juego como de los números.

Recomendaciones para la enseñanza

El trabajo realizado por los alumnos y los maestros con las Torres de Hanoi, así como las incidencias que tuvo que enfrentar el maestro que dirigió las sesiones de trabajo, nos sugieren las siguientes recomendaciones:

- Proponer a los alumnos actividades lúdicas que, además de representar un reto atractivo, se relacionen con los contenidos matemáticos que se pretenden abordar.
- Por las características del juego, proponer a los alumnos que lo jueguen primero con 3 discos y, posteriormente, aumentar el número de discos.
- Permitir que los alumnos aborden individualmente el juego y que, posteriormente, en equipo intenten contestar las preguntas formuladas por el maestro.
- Permitir que los alumnos resuelvan por sí mismos los problemas que se les plantean, respetando al máximo sus procedimientos y formas de razonamiento.
- Ajustar el desarrollo de la clase conforme a los resultados que los alumnos van obteniendo.

- En caso de que los alumnos no descubran las expresiones algebraicas, proponer actividades alternativas que les apoyen a que lo logren.
- Propiciar que los alumnos generen las expresiones algebraicas. Si no conocen la simbología convencional, permitirles que construyan la que mejor exprese sus ideas.
- Aunque los alumnos utilicen expresiones no convencionales o inventen su simbología, trabajar con ellos hasta encontrar la relación con el lenguaje y la simbología convencional y, en todos los casos, encontrar la relación de los conocimientos nuevos con los contenidos ya establecidos.

La igualdad $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ trasciende los contenidos del nivel secundaria; sin embargo, los alumnos fueron capaces de generarla. Es importante destacar que esto fue posible gracias a que ellos habían asignado un significado claro a cada uno de los sumandos en términos de que representan el número de movimientos que hace cada uno de los discos, y que el término a la derecha de la igualdad representa el total de movimientos. Probablemente por eso pareció natural que lograran concluir que la suma de los movimientos de cada uno de los discos es igual al total de movimientos.

Ampliación del tema

En esta sección abundaremos en el tratamiento de algunos resultados relacionados con las Torres de Hanoi. En algunos de ellos se hará una descripción más rigurosa de las relaciones numéricas involucradas en ese juego, y en otros se vinculará el uso de las expresiones algebraicas con otros contenidos matemáticos.

El método de recursividad

Iniciaremos presentando este método mediante el ejemplo que se describe a continuación. Consideremos el juego de las Torres de Hanoi con 5 discos. Como vimos antes, movemos los primeros 4 discos de una torre a otra empleando 15 movimientos, y el más grande se pasa en un movimiento de la torre en la que está a la torre que está libre; entonces, para los 4 discos restantes se necesitan otros 15 pasos para colocarlos encima del disco más grande, por lo que en total empleamos 31 movimientos para pasar los 5 discos de una torre a otra.

Podemos observar esta regularidad al contar el número de pasos para cambiar los discos de una torre a otra; su utilidad se basa en aprovechar que conocemos el número de movimientos que se requieren para mover de una torre a otra 4 discos cuando tenemos 5 discos; esto está relacionado con el *método de recursividad.*

Para generar la regla en que se basa este método, podemos construir una tabla como la siguiente.

Número de discos	Movimientos	Movimientos del disco 1	Movimientos del disco 2	Movimientos del disco 3	Movimientos del disco 4	Movimientos del disco 5
3	7	4	2	1		
4	$15 = 2(7) + 1$	$2(4) = 8$	$2(2) = 4$	$2(1) = 2$	1	
5	$31 = 2(15) + 1$	$2(8) = 16$	$2(4) = 8$	$2(2) = 4$	$2(1) = 2$	1

Si completamos la tabla considerando el juego desde un solo disco, obtenemos lo siguiente.

Número de discos	Movimientos (total)	Movimientos del disco 1	Movimientos del disco 2	Movimientos del disco 3	Movimientos del disco 4	Movimientos del disco 5
1	1	1				
2	3	2	1			
3	7	4	2	1		
4	15	8	4	2	1	
5	31	16	4	4	2	1

Podemos representar esto en la siguiente forma.

Discos	**Número de movimientos**
1	$2^0 = 1 = 2^1 - 1$
2	$2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1$
3	$2(2(1) + 1) + 1 = 2(2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1 = 7 = 2^3 - 1$
4	$2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 15 = 2^4 - 1$
5	$2(2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 31 = 2^5 - 1$
...	
n	$2(2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots + 2 + 1) + 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1$

En el último renglón se expresa el número de movimientos con base en el número de movimientos registrado en el renglón anterior ($n - 1$ discos). De esta manera podemos conocer el número de movimientos que se requieren para pasar n discos de una torre a otra, el único problema que tenemos es que para conocer ese número necesitamos conocer el número de movimientos cuando el número de discos es uno menos.

En todos los casos observamos que los sumandos en cada una de las expresiones están relacionados con el número de movimientos que realiza cada una de las fichas; por ejemplo, para el caso de 5 fichas el total de pasos es

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31.$$

Nótese que el valor 16 coincide con el número de movimientos del disco 1; 8 con el número de movimientos del disco 2, etcétera.

En síntesis, el método de recursividad consiste en generar una regla que permita conocer un término de una sucesión a partir de que se conozca el término que le precede.

El método analítico

El problema que queremos resolver ahora consiste en encontrar una regla que nos permita calcular el número de movimientos para cualquier número de discos, sin que se requiera que conozcamos el número de movimientos con un disco menos, es decir, sin recurrir al caso anterior.

Ilustraremos este método mediante el ejemplo que se desarrolla a continuación. Si analizamos la última tabla de la sección anterior encontramos que podemos expresar de otra manera los valores que se registran en ella. La segunda columna de la tabla presenta los valores correspondientes al número de movimientos que se requiere para mover un número determinado de discos de una torre a otra: 1, 3, 7, 15, 31, ... Si sumamos 1 a cada uno de esos valores, obtenemos la sucesión 2, 4, 8, 16, 32, ... Observemos que los términos de esta última sucesión corresponden a potencias del número 2.

1	1 + 1	2^1
2	3 + 1	2^2
3	7 + 1	2^3
4	15 + 1	2^4
5	31 + 1	2^5
...	...	
n		2^n

Como a todos los valores de la tabla les aumentamos 1, ahora a esas potencias de 2 les podemos restar 1 para obtener los valores originales.

Número de discos	Movimientos
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$
...	
n	

Entonces podemos presentar la tabla de la siguiente manera.

Núm. de discos	Número de movimientos	Número de movimientos del disco 1	Número de movimientos del disco 2	Número de movimientos del disco 3	Número de movimientos del disco 4	Número de movimientos del disco 5
1	$1=2^1-1$	$2^0=1$				
2	$3=2(2^1-1)+1$ $=2^2-2+1$ $=2^2-1$	$2=2^1$	$1=2^0$			
3	$7=2(2^2-1)+1$ $=2^3-2+1$ $=2^3-1$	$4=2^2$	$2=2^1$	$1=2^0$		
4	$15=2(2^3-1)+1$ $=2^4-2+1$ $=2^4-1$	$8=2^3$	$4=2^2$	$2=2^1$	$1=2^0$	
5	$31=2(2^4-1)+1$ $=2^5-2+1$ $=2^5-1$	$16=2^4$	$8=2^3$	$4=2^2$	$2=2^1$	$1=2^0$
...						
n	2^n-1	2^{n-1}	2^{n-2}	2^{n-3}	2^{n-4}	2^{n-5}

Para n discos obtenemos la relación

$$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1\text{, o}$$
$$1+2+4+8+16+\ldots+2^{n-1}=2^n-1.$$

Eso representa la suma de los movimientos de cada uno de los discos y el total de movimientos. En resumen, en el caso de las Torres de Hanoi, el método analítico consistió en encontrar una función que relacione al número de discos con los que se lleva a acabo el juego con el número mínimo de movimientos que se requieren para pasar esos discos a otra torre; en este caso la función es

$$f(n) = 2^n - 1,$$

donde n representa el número de discos, por lo que el dominio y el codominio de esa función son los números naturales. Esto, puesto en la notación usual, se expresa así:

$$f{:}N \to N$$
$$f(n) = 2^n - 1.$$

La suma de las n primeras potencias de 2

En esta sección proporcionaremos más argumentos para justificar que $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Si llamamos S a la suma de las primeras n potencias de 2, tenemos que

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}.$$

Multiplicando por 2 ambos miembros de la igualdad, obtenemos que

$$2S = 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}), \text{ o}$$
$$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n.$$

Ahora realizaremos las operaciones correspondientes para obtener: $2S - S = S$.

$$S = 2(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1})$$
$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n - 2^0 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \ldots - 2^{n-1}.$$

En esta expresión los términos que no se anulan son 2^n y 2^0.

Luego,

$$S = 2^n - 2^0 = 2^n - 1,$$

de donde concluimos que

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Discusión

En todo momento partimos de que el número de pasos en los diferentes casos se comporta como la segunda columna de la tabla anterior, lo cual se estableció desde que encontramos la regularidad más importante del juego, es decir, aquella que nos permite obtener el número de movimientos para cualquier cantidad de discos conociendo el número de pasos con un disco menos. A este respecto, esta cuestión se planteó en la sesión con los maestros de la siguiente manera:

> *¿Cuál es la relación que hay entre el número de discos y el número de movimientos de cada uno de los discos?*

Para el caso de 8 discos, numerados del menor al mayor en términos de su radio, la relación es la siguiente.

Número del disco	Número de movimientos	
1	2^{8-1}	2^7
2	2^{8-2}	2^6
3	2^{8-3}	2^5
4	2^{8-4}	2^4
5	2^{8-5}	2^3
6	2^{8-6}	2^2
7	2^{8-7}	2^1
8	2^{8-8}	2^0

De acuerdo con lo anterior, si se tienen n discos, el disco r se mueve 2^{n-r} veces, donde r es un número entre 1 y n.

Con respecto a la leyenda que dio lugar al juego de las Torres de Hanoi, encontramos que el número de movimientos necesarios para transferir 64 discos de una torre a otra es $2^{64} - 1$. Entonces, el número de transferencias necesarias es 18 446 744 073 709 551 615.

Esto podría interpretarse como sigue: trabajando continuamente sin cometer errores y a una velocidad de un movimiento por segundo, se necesitarían aproximadamente 5.85×10^{11} años para pasar los 64 discos de una torre a otra.[2]

A propósito, el número mencionado no es primo. Pero si aumentamos el número de discos a 89, 107 o 127, el número de movimientos necesarios para transferirlos sí es primo. En cada caso, son ejemplos de los llamados números primos Mersenne: son primos que tienen la forma $2^n - 1$. El propio Lucas fue el primer hombre que verificó que $2^{127} - 1$ era primo. Este monstruoso número de 39 dígitos era el primo más grande hasta 1952, cuando se utilizó una gran computadora electrónica para encontrar cinco números primos Mersenne mayores que ése. A la fecha se conocen treinta números Mersenne. El mayor, $2^{216091} - 1$, fue descubierto en 1985, tiene 65 050 dígitos.[3]

[2] *Idem.*

[3] Gardner, Martin. *Juegos Matemáticos* (obra publicada inicialmente con el título *Diversiones matemáticas*). México, Selector, 1989.

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D., A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros. *La matemática: su contenido, método y significado.* Madrid, España, Alianza Universidad, 1980.

Bortolussi, Jesús, Elisa Bonilla, Rocío Nava, Teresa Rojano y Ricardo Quintero. *Libro para el Maestro.* México, SEP, 1995.

Cárdenas, Humberto, Emilio Lluis, Francisco Raggi y Francisco Tomás. *Álgebra Superior.* México, Editorial Trillas, 1974.

Courant, Richard y Herbert Robbins. *¿Qué es la matemática?* España, Aguilar, 1955.

Danesi, Marcel. *The Liar Paradox and the Towers of Hanoi, The ten greatest math puzzles of all time.* Inc. EUA, John Wiley & Sons, 2004.

Gardner, Martin. *Juegos matemáticos.* México, Selector, 1989.

Mataix, Mariano, *Historias de matemáticos y algunos problemas.* Barcelona-México, Marcombo, Boixarea Editores, 1986.

Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Editorial Trillas, 1965.

Sierra Modesto, M. Teresa González, Andrés García, Mario González. *Divisibilidad 7.* España, Editorial Síntesis, 1989.

Trafton Paul, Albert Schulte. *New Directions for Elementary School Mathematics.* EUA, National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

El módulo 4: *Patrones numéricos y generalización*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Álgebra
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacán 1031. CP. 03100, Col. del Valle.