PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 3

ARITMÉTICA

Mínimo común múltiplo

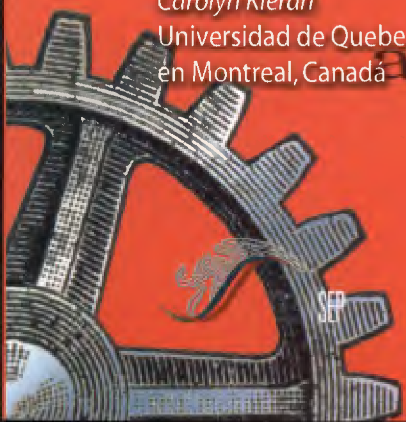
Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec
en Montreal, Canadá



SEP
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
ILCE
BID

PROYECTO: TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA
EN AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

Programa Interamericano de Capacitación de Maestros

Serie • Enseñanza de las matemáticas

MÓDULO 3

ARITMÉTICA

Mínimo común múltiplo

Propuesta didáctica

Tenoch E. Cedillo Ávalos, UPN
Valentín Cruz Oliva, ILCE
Enrique Vega Ramírez, UPN
Rodrigo Cambray Núñez, UPN

Consultores externos

Alejandro Díaz Barriga Casales
Instituto de Matemáticas, UNAM

Carolyn Kieran
Universidad de Quebec en Montreal, Canadá

Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe
Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
Serie: Enseñanza de las matemáticas
Sección: Aritmética

Módulo 3: Mínimo común múltiplo

Diseño de colección y de portada: Margarita Morales y Mayela Crisóstomo
Formación: Miguel Ángel Silva Aceves
Corrección de estilo: Armando Ruiz Contreras

Primera edición: 2006.

Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, c.p. 14200,
Tlalpan, ciudad de México, D.F.
www.upn.mx

ISBN 970-702-183-7 obra completa
ISBN 970-702-175-6 módulo 3

Impreso y hecho en México

Í N D I C E

PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

Tenoch Cedillo Ávalos

Objetivos

La serie Enseñanza de las Matemáticas se desarrolla en el marco del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe; esta serie tiene como propósito central fortalecer el conocimiento de las matemáticas escolares y las prácticas de enseñanza de los profesores que se desempeñan en el nivel de educación secundaria (7°-9° grados, 13-15 años de edad). En este propósito subyace la hipótesis de que un mejor desempeño de los docentes se reflejará en aprendizajes más sólidos y de mayor calidad en los alumnos.

Pretendemos que la discusión y análisis de los materiales que incluye esta serie, permitan a los maestros reflexionar sobre sus concepciones y prácticas de enseñanza, y que esta experiencia les proporcione elementos para responder preguntas como las que planteamos a continuación:

- ¿Cree que sus estudiantes no pueden resolver problemas a menos que usted les haya enseñando previamente cómo hacerlo?
- ¿Cree que si les pide a sus alumnos que resuelvan un problema ellos lo harán en formas muy similares?
- ¿Cree que puede emplear las soluciones que desarrollan sus estudiantes como fuentes para enriquecer sus estrategias de enseñanza? ¿Cómo?
- ¿Cree que es conveniente propiciar oportunidades para que sus alumnos resuelvan problemas usando sus propias estrategias? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente pedir a sus estudiantes que le informen cómo razonaron para resolver un problema dado? ¿Por qué?
- ¿Cree que es conveniente exigir a sus educandos que usen los procedimientos que les enseñó y que usted asuma la reproducción de esos procedimientos como sinónimo de comprensión?

También nos proponemos que la serie Enseñanza de las Matemáticas proporcione experiencias que permitan a los profesores desarrollar concepciones y prácticas de enseñanza como las que mencionamos enseguida.

Que el maestro:

- Genere un ambiente de trabajo que favorezca que sus estudiantes desarrollen habilidades matemáticas y destrezas operativas.
- Aproveche la evolución del pensamiento matemático de sus alumnos para planear el desarrollo del programa escolar.
- Genere oportunidades para que sus estudiantes resuelvan problemas sin necesidad de instrucciones explícitas.
- Utilice las formas en que sus estudiantes razonan para diseñar mejores estrategias de enseñanza.
- Desarrolle el curso en consonancia con lo que sus alumnos van aprendiendo.
- Sea capaz de proponer problemas distintos a cada equipo de trabajo, y en ocasiones a cada estudiante, de acuerdo con los intereses y capacidades de ellos.
- Evalúe el desempeño de sus estudiantes con base en las habilidades matemáticas que ellos desarrollen.
- Valore el potencial de la técnica de aprendizaje cooperativo como un recurso fructífero en la clase de matemáticas.

Materiales

Esta serie ofrece un conjunto de materiales dirigidos a profesores de matemáticas en servicio y a formadores de los futuros docentes de matemáticas, que se desempeñarán en el nivel de educación secundaria. La estrategia que proponemos para el logro del propósito antes mencionado, es brindar un programa de profesionalización docente que se basa en un análisis crítico de la práctica en el aula con la finalidad de enriquecerla. La investigación que hemos realizado en este campo, ratifica enfáticamente que la experiencia que los profesores adquieren mediante el análisis de las prácticas de enseñanza de otros se refleja de manera favorable en sus concepciones y conocimientos sobre la disciplina, el aprendizaje y la docencia (Cedillo, 2003).

Los materiales que presentamos se describen brevemente en el esquema que se muestra a continuación.

Videos de Sesiones de Trabajo con Alumnos, en las que se presenta evidencia de las capacidades y limitaciones de los estudiantes en la resolución de ciertos problemas matemáticos.

Videos de Sesiones de Trabajo con Maestros, en las que éstos resuelven los mismos problemas que se propusieron a los estudiantes.

Videos de Sesiones de Profundización, en las que los docentes analizan críticamente lo que ellos lograron en el marco de los logros de los alumnos.

Propuestas didácticas en versiones impresa y digital, donde se aborda con mayor detalle los episodios presentados en los videos, se incorporan los materiales empleados en las sesiones de trabajo con alumnos y con profesores, y se incluye una sección para ampliar el horizonte de los temas matemáticos que se tratan en cada sesión.

Sujetos que participan en las sesiones de trabajo

Además del decidido apoyo otorgado por las más altas autoridades de las instituciones que patrocinaron este proyecto, así como de la invaluable colaboración del equipo técnico de televisión, participaron estudiantes de secundaria, maestros en servicio, profesores que condujeron las sesiones de trabajo en el aula, y un docente que estuvo a cargo de la producción y la dirección académica de todas las actividades del programa.

Los grupos escolares que participaron en el proyecto, cursan el segundo grado de secundaria (8° grado, 13-14 años de edad) en dos escuelas públicas de la ciudad de México que se destacan por su organización, compromiso de sus profesores y el buen desempeño de sus estudiantes. Los jóvenes que se observan en los videos son alumnos promedio de esas instituciones, no fueron seleccionados por poseer cualidades especiales. El grado escolar de los educandos se eligió en consonancia con los conceptos y conocimientos matemáticos que se abordan en las actividades de aprendizaje que se les propusieron. La intervención de esos grupos escolares, en esta serie, se debe a la colaboración de las autoridades educativas y de los directivos de las escuelas secundarias públicas que nos permitieron trabajar con sus estudiantes. La participación de los alumnos se organizó de acuerdo con los horarios de clases de su respectivo plantel, por esta razón, a lo largo de los videos, se pueden observar diferentes grupos de educandos y de maestros.

Todos los docentes que colaboraron en esta serie prestan su servicio en escuelas secundarias públicas ubicadas en la ciudad de México. Es necesario mencionar que los profesores que conducen las sesiones de trabajo, no son los maestros que normalmente dirigen a los grupos que se observan en los videos. La razón de esto es que las sesiones de trabajo con alumnos incluyen temas y actividades que no necesariamente tienen previstas los maestros de los grupos escolares, en los momentos en que este proyecto lo requería, por lo que fue indispensable contar con docentes específicamente asignados al proyecto con la finalidad de que dispusieran del tiempo y los recursos para preparar y conducir las sesiones de trabajo en el aula.

El hecho de que los profesores que condujeron las sesiones no hayan sido los docentes regulares de los grupos, presenta ventajas y desventajas, por ejemplo, nos parece importante mencionar que nuestros maestros no conocían a los estudiantes, situación que, por supuesto, no ocurre entre éstos y su maestro habitual. No obstante, los logros de los alumnos que se pueden observar en los videos, sugieren que la planeación y puesta en práctica de las actividades de aprendizaje son factores que influyen sensiblemente en un rápido establecimiento de una buena relación alumno-profesor, independientemente del tiempo que hayan tenido para relacionarse entre sí.

El trabajo en el aula

En los videos, se presentan episodios tal como ocurrieron en el aula; los videos muestran un acercamiento a la enseñanza que tiene como propósito poner en práctica los preceptos del constructivismo social, empleando la técnica del aprendizaje cooperativo, así como un enfoque del aprendizaje basado en la resolución de problemas. Utilizamos deliberadamente el término "sesiones de trabajo", en lugar de "clase modelo", para distinguir el enfoque de enseñanza que aquí mostramos del esquema tradicional que rápidamente se identifica con la cátedra del profesor, en la que éste "entrega" sus conocimientos a unos alumnos que están atentamente escuchándole para "recibirlos". Estos conceptos se discuten más adelante con mayor amplitud.

En los videos de las sesiones de trabajo con los estudiantes y con los profesores, podrán observarse los aciertos, errores y momentos de incertidumbre que usualmente se suscitan en el proceso de resolución de problemas matemáticos no triviales, y en las vicisitudes propias de la conducción de una sesión de trabajo, cuyo éxito o fracaso depende esencialmente de la participación de cada uno de los integrantes del grupo con el que se está trabajando. En los videos, se observa un esfuerzo sostenido por parte del profesor que conduce la sesión para desempeñarse como un *promotor* del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, y no como un expositor que presenta una brillante cátedra a un auditorio atento y pasivo. Las sesiones de trabajo se centran en las participaciones de los alumnos, porque es a partir de sus respuestas que el profesor propiciará que se dé el siguiente paso en el avance de sus aprendizajes. Las intervenciones del maestro que conduce una sesión, se enfocan en la coordinación del trabajo del grupo, empleando todos los recursos que tiene a su alcance, en ese momento, para recuperar y enriquecer las participaciones de los estudiantes y, con base en esto, dar un horizonte más amplio al contenido matemático que se está explorando. En los videos podrá observarse que el maestro tenía preparado un guión para la clase; pero también se percibe que siempre estuvo atento a las respuestas de los alumnos para ir haciendo ajustes al guión de trabajo previsto y, de este modo, poder aprovechar de la mejor manera posible los aciertos y errores de los estudiantes, los cuales empleaba como puntos de partida en la búsqueda de una secuencia de enseñanza que estuviera en mejor consonancia con las distintas formas de razonamiento de sus alumnos.

Contenidos matemáticos

Para seleccionar los contenidos matemáticos de esta serie, se hizo una revisión de los programas de estudio para la escuela secundaria que se ofrecen en los países de América Latina y el Caribe, a partir de esta consulta se eligieron algunos temas de aritmética, álgebra y geometría, definiéndose, así, las ramas de las matemáticas escolares en que se ubicarían dichos contenidos. Posteriormente, se acudió a la literatura de investigación sobre aprendizaje de las matemáticas, con base en ésta fueron seleccionados los temas específicos dentro de cada rama de acuerdo con los siguientes criterios:

- La relevancia que les da la investigación por las dificultades que presentan para su enseñanza y aprendizaje.

- La importancia que les da la investigación por su trascendencia como temas propedéuticos, sobre los que descansa la evolución del currículo escolar en su tránsito al currículo de matemáticas en los niveles de educación superior.

Finalmente, en el marco determinado por los alcances de este proyecto, se decidió abordar tres temas en aritmética y geometría, y cuatro en álgebra, quedando distribuidos como se muestra en el siguiente cuadro.

Aritmética	Álgebra	Geometría
Múltiplos y divisores	Patrones numéricos y generalización	Medición y semejanza de triángulos
Máximo común divisor	Juegos y regularidades algebraicas	Medición y razones trigonométricas
Mínimo común múltiplo	Ecuaciones de primer grado	Áreas y teorema de Pitágoras
	Lectura y construcción de gráficas cartesianas	

Organización y presentación de los contenidos

Videos

El desarrollo de cada tema constituye un *módulo* que está formado por dos videos y una *Propuesta didáctica* impresa. Cada tema se inicia con una *cápsula de video* que se preparó para presentar de forma amena y clara la información relevante del problema que se propone para que los alumnos lo resuelvan, y también se emplea para centrar la atención de los alumnos en el tema a tratar. Esa cápsula puede ser usada por los profesores que la consideren útil en su tarea docente. Algunas cápsulas incluyen recursos electrónicos de la geometría dinámica, o tablas con datos que pueden ser utilizadas en las clases que preparen los maestros que reciben estos materiales.

El primer video de cada módulo incluye las dos sesiones de trabajo que se emplearon con alumnos para desarrollar el tratamiento del tema correspondiente, cada sesión se tiene una duración máxima de 50 minutos. El tema se aborda a partir de la resolución de uno o más problemas matemáticos; estas sesiones de trabajo se realizan con la participación activa de un grupo de estudiantes. El núcleo en el estudio de un tema es la resolución de problemas que representan un reto para el intelecto de los alumnos, por esto, sus intervenciones nunca consisten en la repetición de conceptos u otros conocimientos que previamente se les habían enseñado, en vez de esto, las participaciones de los estudiantes ofrecen una reelaboración o una aplicación creativa de conceptos y conocimientos que los conducen a proponer ideas plausibles que eventualmente se concretan en la resolución de un problema. Dada la complejidad de los ejercicios que se propusieron, se decidió apoyar la actividad de los estudiantes utilizando la técnica de *aprendizaje cooperativo*. Esta técnica exige la colaboración conjunta y creativa de todos los miembros de un equipo de trabajo para realizar una tarea, en otras palabras, requiere que el trabajo en equipo, además de necesario, sea más productivo que el trabajo individual. Dada la importancia que tuvo en el proyecto el uso de la técnica de aprendizaje cooperativo, más adelante le dedicamos una sección para un análisis más amplio.

El segundo video del módulo incluye una secuencia que muestra la *Sesión de Trabajo con Maestros* y la *Sesión de Profundización*. La *Sesión de Trabajo con Maestros* permite observar las formas en que ellos abordaron problemas iguales o similares a los que se propusieron a los alumnos. Es importante señalar que cuando se pidió a los maestros que resolvieran esos problemas, aún no habían visto los videos de las sesiones de trabajo con los alumnos, esto se realiza en la *Sesión de Profundización.*

En las sesiones de profundización, se pide a los profesores que vean atentamente los videos de las sesiones con alumnos, y que registren individualmente sus observaciones de acuerdo a un guión que se les proporcionó; el guión permite que los docentes incluyan comentarios sobre aspectos no considerados en él. Una vez que han hecho esto, se pide a los maestros que discutan en equipos de trabajo las anotaciones que registraron de manera individual; después de esto, se organiza una mesa de discusión con todos los equipos reunidos, donde debaten acerca de sus observaciones y hacen propuestas respecto a las implicaciones que se derivan de su experiencia en estas sesiones de trabajo en torno a su práctica docente cotidiana. La *Sesión de Profundización* concluye con la sección *Reflexiones después de la práctica*, que presenta el coordinador académico de esta serie.

Propuestas didácticas

Se elaboró una *Propuesta didáctica* para cada uno de los módulos que comprende esta serie. Las propuestas didácticas se presentan en formato impreso y en formato digital. Estos materiales tienen como propósito exponer información adicional que permita analizar con mayor acuciosidad las sesiones de trabajo que se muestran en los videos. En cada propuesta se proporciona una descripción detallada sobre las actividades que se llevaron a cabo en las sesiones de trabajo con alumnos y con maestros. Asimismo, se incluyen cada uno de los materiales que se emplearon, al igual que un ensayo crítico de lo que ocurrió durante el tratamiento de cada tema, en términos de los logros de los estudiantes en el marco de lo que originalmente fue el guión de trabajo para cada sesión. Por lo anterior, **recomendamos enfáticamente que antes de observar los videos se lea la *Propuesta didáctica* correspondiente**.

Los asuntos que se abordan en cada *Propuesta didáctica* se describen brevemente a continuación.

Presentación y objetivos del tema

Además de los objetivos de cada sesión de trabajo con los alumnos, este apartado incluye un ensayo en el que se presentan los argumentos considerados para seleccionar el contenido matemático que se aborda, y una descripción del guión de trabajo que empleó el profesor para desarrollarlo.

Materiales de las sesiones de trabajo con los alumnos

Esta sección proporciona información detallada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los estudiantes.

Materiales de las sesiones de trabajo con los maestros

Este apartado ofrece información pormenorizada sobre cada una de las actividades que se propusieron a los profesores.

Lo que aprendieron los alumnos

En esta parte, el profesor que estuvo a cargo del desarrollo de la sesión de trabajo, presenta un ensayo sobre los logros de los estudiantes; el ensayo contiene un análisis entre lo esperado por el maestro y las respuestas no esperadas que ofrecieron los alumnos, y cómo éstas lo condujeron a modificar, sobre la marcha, el guión que había preestablecido para realizar su trabajo.

Recomendaciones para la enseñanza

Con base en el análisis de los logros de los estudiantes, y de las vicisitudes que tuvo que sortear, el profesor que estuvo a cargo de la conducción del trabajo presenta una serie de reflexiones que se expresan como recomendaciones para la enseñanza.

Ampliación del tema

Este apartado tiene como propósito profundizar en el tratamiento del contenido matemático que se abordó en la sesión de trabajo. Se incorporan nuevos elementos y recursos didácticos cuya finalidad es ampliar el conocimiento de los contenidos matemáticos que se trataron en las sesiones de trabajo con **alumnos y los correspondientes con maestros.**

El contexto internacional y principios que orientan este proyecto

Los resultados obtenidos por los estudiantes latinoamericanos en las evaluaciones internacionales que se han efectuado recientemente, han acentuado la atención que los ministerios de educación dedican a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Beaton *et al.*, 1996; OECD, 2000). El análisis de esas evaluaciones sugiere enfáticamente que para mejorar esos resultados deben instrumentarse nuevos programas orientados a la actualización, tanto de las formas de enseñanza como del conocimiento de la disciplina por parte de los maestros de matemáticas en servicio.

La investigación realizada en los últimos 30 años sobre el aprendizaje de las matemáticas, ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas estrategias de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992). Los resultados de esas investigaciones han ejercido una fuerte influencia en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, han surgido nuevas exigencias en el desempeño de los docentes, por ejemplo, en muchos países se incluyeron en los programas de estudio nuevas líneas temáticas, como preálgebra, precálculo, probabilidad y estadística.

La investigación sobre la enseñanza ha cambiado del paradigma proceso-producto –en el que el objeto de indagación son los comportamientos del profesor– a estudios abocados a sus concepciones y criterios para la toma de decisiones en el aula. Asimismo, las teorías que se enmarcan en el constructivismo social también han tenido impacto en los programas de formación de profesores y el currículo de la escuela básica. Brevemente expuesto, estas teorías conciben el conocimiento como un producto del trabajo intelectual de comunidades formadas por individuos creativos; estas corrientes de pensamiento se reflejan en cursos y materiales que intentan que el profesor deje su papel como transmisor de conceptos, hechos básicos y destrezas, para que se desempeñe como tutor del desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes (Cobb *et al.*, 1990).

Actualmente, se espera que los profesores hagan evidente en su práctica profesional que están convencidos de que sus estudiantes no son "recipientes que esperan ser llenados", y los entiendan como sujetos intelectualmente creativos, capaces de hacer preguntas no triviales, de resolver problemas y de construir teorías y conocimientos plausibles. Lo anterior exige que el maestro despoje al libro de texto, y a él mismo, de su papel como autoridad intelectual en la clase y la deposite en argumentos rigurosos producidos por él y los estudiantes (Thompson, 1992).

Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el profesor conozca el nivel de desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos, que construya materiales intelectualmente ricos, y propicie un ambiente de trabajo en el que el razonamiento de los educandos pueda ser, al mismo tiempo, apoyado y motivado.

A finales de los ochenta, se desarrollaron tres perspectivas distintas para estudiar los procesos de cambio en las prácticas de los profesores, cada una con fundamentos teóricos diferentes. La perspectiva piagetiana, que se sustenta en la teoría de que un cambio en las ideas de los docentes sobre la naturaleza del aprendizaje y de las matemáticas, requiere necesariamente un proceso de desequilibrio de las ideas previas y la reconstrucción de ideas más poderosas (Schifter, 1993; Schifter y Fosnot, 1993; Schifter y Simon, 1992). La corriente de las ciencias cognitivas propone que los cambios en el profesor se dan a través de que modifique el contenido y organización del conocimiento que posee, en consonancia con la evolución del razonamiento matemático de sus estudiantes (Carpenter *et al.*,1988; Fennema *et al.*, 1996; Peterson *et al.*, 1989). La postura del constructivismo social expone que lo que permite a los profesores resolver los conflictos entre sus creencias sobre el aprendizaje y los avances que se observan en sus estudiantes, es el proceso de negociación entre ellos y sus alumnos sobre las normas para validar la construcción de los conceptos e ideas matemáticos (Ball, 1988; McDiarmid y Wilson, 1991).

La serie Enseñanza de las Matemáticas del Proyecto de Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe, se propone compartir con los profesores de matemáticas en servicio y los formadores de futuros docentes, algunas estrategias plausibles que ejemplifican, mediante episodios de trabajo en el salón de clases, cómo llevar a la práctica en el aula los planteamientos del constructivismo social.

El modelo didáctico

En el periodo 2000-2003, se llevó a cabo en México un estudio con 800 maestros de matemáticas en servicio, en el que se evaluaron los efectos de la aplicación de un enfoque didáctico no convencional en sus prácticas de enseñanza y conocimiento matemático (Cedillo, 2003). Los resultados de ese estudio muestran vías promisorias para favorecer los aprendizajes de los estudiantes, aun con profesores cuya docencia está anclada en principios y concepciones tradicionales, y con un débil conocimiento de la disciplina que enseñan. Expuesto sucintamente, ese enfoque didáctico consiste en enseñar las matemáticas escolares de manera similar a como aprendemos el lenguaje materno, esto es, a través de su uso; el uso del lenguaje matemático en actividades adecuadamente diseñadas, permite que los estudiantes vayan asignando significados plausibles a ese sistema de signos.

En el aula, lo anterior se traduce en que el profesor no parte de exponer reglas, definiciones y ejemplos, en lugar de esto, el maestro propone una actividad (problema) que le permite establecer una interacción con sus estudiantes a partir de las formas de razonamiento que ellos desarrollan. El progreso de los alumnos en la actividad depende de la comprensión que logre el profesor de sus formas no ortodoxas de comunicación. Esto implica que el docente debe aceptar que sus estudiantes aprenden cada uno a un paso distinto, y que debe saber escucharlos para aprender acerca de las formas en que ellos razonan. Esta forma de enseñanza exige que el profesor abandone la exposición al frente del grupo como estrategia de interlocución, porque esto parte del supuesto de que el maestro puede hacer avanzar a todos los estudiantes del grupo al mismo ritmo. Además, es necesario que el docente desarrolle habilidades que le permitan relacionar los avances no convencionales de sus alumnos con los temas matemáticos formalmente establecidos, lo cual requiere la capacidad de desarrollar el currículo a partir de los logros de los estudiantes.

El aprendizaje cooperativo puede describirse como una relación entre estudiantes que les requiere (Johnson y Johnson, 1989):

- Necesitarse unos a otros para realizar una tarea.
- Un ejercicio de responsabilidad individual, en el que cada uno tiene que contribuir y aprender.
- Desarrollar habilidades para relacionarse: comunicación, confianza en sí mismos y en los demás, asumir eventualmente el liderazgo, tomar decisiones y resolver conflictos.

La técnica de aprendizaje cooperativo favorece que los estudiantes no solamente aprendan los contenidos propios de una disciplina, sino que desarrollen habilidades para cultivar relaciones personales con sus compañeros que probablemente no desarrollarían en una clase tradicional. Entre otras cosas, esto puede ocurrir si el maestro toma en cuenta la relación entre el desempeño del grupo y el individual, la preparación de sus estudiantes y las dificultades comunes que éstos presentan.

Se han reportado resultados de investigación que señalan que el éxito del aprendizaje cooperativo depende en buena medida de que los estudiantes se propongan objetivos grupales claramente definidos, y que asuman responsabilidades individuales bien especificadas (Leinken y Zaslavsky, 1999). Lindauer y Petrie (1997), sugieren que el sistema de evaluación del profesor puede apoyar al logro de metas colectivas, si lo estructura de manera que los estudiantes sean evaluados individualmente por su trabajo, y que el trabajo individual se oriente a que colaboren con sus compañeros en favor del éxito del grupo. Por una parte, la formulación y el logro de objetivos grupales en el aprendizaje cooperativo, proporciona a los alumnos una razón para trabajar juntos (Johnson y Johnson, 1989). Por otra parte, el exigir que cada individuo tenga responsabilidades particulares, asegura que todos los estudiantes se beneficiarán de la experiencia, incrementando su comprensión, a la vez que permite al maestro asegurarse de que todos en el grupo aprendan los nuevos conceptos. De esta manera, el éxito que el grupo tenga en alcanzar sus objetivos depende del nivel de logro que alcance cada uno de sus miembros.

El establecimiento de objetivos grupales y un sistema de evaluación que recompense el éxito puede hacerse de varias maneras, por ejemplo, el profesor puede reforzar en sus estudiantes el valor de ayudarse unos a otros, si evalúa el nivel de logro del equipo con base en el aprendizaje de cada estudiante (Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Posamentier y Stepelman, 1999). Más específicamente, el maestro puede asignar un porcentaje extra a la calificación de un equipo de trabajo en el que todos sus miembros lograron cierto puntaje. Las acciones del docente que refuerzan los objetivos grupales y la responsabilidad individual, ayudan a que los alumnos se preocupen por el éxito de sus compañeros, a que desarrollen una mejor capacidad de escucha, y a que valoren métodos alternativos para resolver problemas.

Lo anterior implica que los estudiantes deben estar específicamente preparados para participar en un ambiente de aprendizaje cooperativo, y que los profesores establezcan condiciones que garanticen experiencias exitosas de aprendizaje. El aprendizaje cooperativo no se da por el simple hecho de que los estudiantes trabajan en equipos durante la clase, esta técnica de trabajo en el aula sólo es provechosa cuando los miembros de un grupo se ven a sí mismos como parte de un equipo que debe alcanzar un objetivo de manera conjunta, ante una tarea que individualmente es mucho más difícil de llevar a cabo que haciéndolo con la colaboración de otros (Posamentier y Stepelman, 1999). El aprendizaje cooperativo se basa en la premisa de que los alumnos que trabajan juntos son responsables no sólo de su aprendizaje, sino también del de sus compañeros (Lindauer y Petrie, 1997), para esto, los estudiantes deben aprender a escuchar a los demás y a valorar el hecho de que un problema puede ser abordado en más de una forma. En síntesis, podemos decir que el aprendizaje cooperativo es una buena estrategia de trabajo en el aula; pero ésta no tiene éxito sin preparación.

Slavin (1990) afirma que los profesores pueden enfrentar algunas dificultades al aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo, y sólo obtendrán resultados provechosos si aprenden a emplearlo correctamente en la clase. El aprendizaje cooperativo puede ir en detrimento del aprovechamiento de los estudiantes, los alumnos menos avanzados pueden copiar el trabajo de los más adelantados del grupo, y el resultado puede ser más bajo del que ese alumno podría haber obtenido en una clase tradicional. Otra posible dificultad es que los maestros deben estar preparados para ceder parte del control que, tradicionalmente, tienen sobre las actividades que se realizan en el aula. Si bien es necesario asegurarse de que los estudiantes están realmente trabajando en un ambiente de aprendizaje cooperativo, es difícil evitar que hagan más ruido. Algunos docentes podrían percibir el ruido como un indicio de pérdida de control.

El aprendizaje cooperativo en la clase de matemáticas

Hay investigaciones que muestran que los beneficios del aprendizaje cooperativo se reflejan en un mejor desempeño escolar, mejores habilidades para comunicarse e interacciones sociales y académicas exitosas (Slavin, 1991; Stevens, Slavin y Farnish, 1991; Whicker, Bol y Nunnery, 1997; Walmsley y Muñiz, 2003). Los efectos del aprendizaje cooperativo en el desempeño de los alumnos son muy impresionantes, los logros de los estudiantes que pueden observarse en los videos de esta serie ofrecen evidencias a este respecto. Esto se debe a diversas razones, en el trabajo cooperativo los alumnos ven cómo sus compañeros se encuentran en diferentes etapas de dominio de las tareas que enfrentan, y se ayudan unos a otros, por ejemplo, cuando los estudiantes interactúan en forma cooperativa hacen el intento por explicar sus estrategias a los demás, empleando las palabras de sus compañeros más débiles (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). En muchas ocasiones, los educandos que proporcionan la explicación pueden lograr así una comprensión más clara de la tarea que están abordando. Cuando se pide a los estudiantes que expliquen, detallen y defiendan sus posturas ante los demás, se esfuerzan en expresar más cuidadosamente sus ideas. Asimismo, los alumnos que escuchan las explicaciones de otros se esfuerzan en comprender otras formas de abordar una tarea determinada. El observar a los demás y practicar en este tipo de ambientes de trabajo, ayuda a los estudiantes a interiorizar los conceptos que están intentando comprender o dominar (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Probablemente, uno de los mayores beneficios del aprendizaje cooperativo es que incrementa la capacidad de los alumnos para comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas, y que este tipo de comunicación les ayuda a comprender mejor esta disciplina (Artzt, 1999). Johnson y Johnson (1989, p. 235) afirman que "si la instrucción en matemáticas procura ayudar a los estudiantes a pensar matemáticamente, a comprender las conexiones entre diversos procedimientos y hechos matemáticos, y a ser capaces de aplicar el conocimiento matemático formal de manera flexible y significativa, entonces, es indispensable emplear el aprendizaje cooperativo en las clases de matemáticas". De acuerdo con estos autores, el aprendizaje cooperativo hace que las matemáticas se aprendan de manera activa, en vez de pasiva. Otros autores sugieren que, mediante la técnica del aprendizaje cooperativo, los profesores promueven que sus estudiantes expliquen lo que entienden, porque eso los obliga a integrar y ampliar su conocimiento de manera diferente (Stevens, Slavin y Farnish, 1991).

Hay resultados de investigación que confirman la convicción de muchos maestros de que los alumnos aprenden mejor de sus compañeros cuando se les pide que expliquen cómo llegaron a las respuestas; los profesores que piden a los estudiantes que expliquen cómo resolver un problema frente al grupo, ayudan a que todos aprendan más y enfatizan las habilidades para expresarse acerca de conceptos matemáticos (NCTM, 2000). El aprendizaje cooperativo permite a los educandos dar y recibir explicaciones detalladas, esto les ayuda a aprender más que a los estudiantes que simplemente reciben las respuestas correctas (Stevens, Slavin y Farnish, 1991). Es importante ejercitar la capacidad de comunicar ideas matemáticas para apoyar el desarrollo que el alumno tenga en esa disciplina. Leiken y Zaslavsky (1999) reportan que el uso del aprendizaje cooperativo motiva a los estudiantes a participar activamente en el aprendizaje de las matemáticas, y a comunicarse entre ellos sobre cuestiones de esta disciplina.

Otro beneficio del aprendizaje cooperativo es que permite a los alumnos trabajar con otros en el logro de un objetivo común y desarrollar habilidades para usar las matemáticas en interacciones sociales. De acuerdo con Whicker *et al.* (1997), algunos de los resultados a corto plazo incluyen un incremento en el aprendizaje, en la retención y en el pensamiento crítico. Comparado con un sistema competitivo e individualista, las experiencias del aprendizaje cooperativo promueven una alta autoestima en los estudiantes (Johnson, Johnson y Holubec, 1984; Johnson y Johnson, 1989). El aprendizaje cooperativo puede reforzar el sentimiento de autoaceptación del alumno, en tanto que la competitividad puede afectar de manera negativa dicha aceptación, y las actitudes individualistas tienden a estar relacionadas con un rechazo básico de sí mismo (Johnson, Johnson y Holubec, 1984). Los alumnos, generalmente, disfrutan la experiencia de trabajar en forma cooperativa, y les importa que sus compañeros los tengan en buen concepto. La necesidad de ser aceptados también los ayuda a lograr ser exitosos escolarmente, esta percepción de éxito incrementa su autoestima.

Los resultados a largo plazo del aprendizaje cooperativo incluyen la habilidad para ser contratados para trabajar y tener éxito en su carrera (Johnson y Johnson, 1989). Muchos empleadores valoran a un empleado con habilidades para comunicarse, con responsabilidad, iniciativa, interacción interpersonal y poder de decisión. Todas estas cualidades pueden ser desarrolladas al tener experiencias de aprendizaje cooperativo. El aprendizaje cooperativo no sólo ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas, sino que coadyuva en su preparación para la vida después de graduarse.

A manera de síntesis podemos sugerir que el aprendizaje cooperativo puede ser exitoso si:

- Se emplea para abordar actividades que exijan la colaboración del grupo.
- Los profesores cuentan con algún tipo de sistema de recompensas grupales que contemple la responsabilidad individual.
- Los maestros logran crear una actitud en sus alumnos que les conduzca a escuchar atentamente las ideas de los demás.

Comentarios finales

En la serie Enseñanza de las Matemáticas asumimos la premisa de que en la práctica profesional los sujetos tienen experiencias que producen cambios en sus conocimientos y creencias. Este principio es una combinación de lo planteado por el constructivismo social y las ciencias cognitivas. Por una parte, asumimos que la práctica profesional incluye la interacción creativa entre profesores, y de éstos con los estudiantes; por otra parte, implica que los individuos vamos modificando nuestras concepciones y acciones a partir del conocimiento que adquirimos sobre las formas de razonamiento de otros sujetos. La evidencia obtenida de la investigación sugiere que lo que esencialmente promueve cambios en los profesores son ciertos episodios que se dan en el aula, que les permiten atestiguar lo que sus estudiantes pueden lograr sin que "ellos se los hayan enseñado" (Cedillo y Kieran, 2003).

Indudablemente, serán los profesores que hagan uso de los materiales que se proporcionan en esta serie, los que emitan un mejor juicio sobre el alcance y pertinencia de los propósitos que nos hemos planteado, y sobre las estrategias de trabajo que en este proyecto hemos empleado.

BIBLIOGRAFÍA

Artzt, A. "Cooperative Learning in Mathematics Teacher Education", en: *Mathematics Teacher* (92),11-17, 1999.

Ball, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* East Lansing, Michigan State University, 1988.

Beaton, A. E., *et al. Mathematics Achievement in the Middle School Years. Third International Mathematics and Science Study.* International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Center for the Study of Testing, Evaluation and Educational Policy, Boston College, Chesnut Hill, MA, EUA, 1996.

Carpenter, T. P., E. Fennema, P. Peterson y D. Carey. "Teacher's pedagogical content knowledge of students' problem-solving in elementary arithmetic", en: *Journal for Research in Mathematics Education* (19), 385-401, 1988.

Cedillo, T. "El álgebra como lenguaje en uso: Una alternativa plausible como factor de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas", en: *Perfiles Educativos*, vol. XXV, núm. 101, pp 123-160, México, 2003.

Cedillo, T. y C. Kieran. "Initiating Students into algebra with Symbol-Manipulating Calculators", en: J. T. Fey, A. Cuoco, C. Kieran y R. M. Zbiek (eds.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education,* cap. 13, 219-239, National Council of Teachers of Mathematics, Reston VA, 2003.

Cobb, P., T. Wood, E. Yackel. "Classroom as learning environments for teachers and researchers", en: R. Davis, C. Maher y N. Noddings (eds.), "Constructivist views on the teaching and learning of mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (4), 125-146, 1990.

Fennema, E., T. P. Carpenter, M. L. Franke, L. Levi, V. R. Jacobs y S. B. Empson. *A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education,* 1996.

Johnson, D. W., R. T. Johnson y E. J. Holubec. *Circles of Learning: Cooperation in the Classroom.* Edina, Minn., Interaction Book Co., 1984.

Johnson, David W. y Roger T. Johnson. "Cooperative Learning in Mathematics Education", en: *New Directions for Elementary School Mathematics.* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Paul R. Trafton (ed.), pp. 234-45. Reston, VA, NCTM, 1989.

Kilpatrick, J. "A History of Research in Mathematics Education", en: Grouws, D. A., (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Library Reference, Simon & Schuster Macmillan, Part I, 3-38. Nueva York, EUA, 1992.

Leinken, Roza y Orit Zaslavsky. "Cooperative Learning in Mathematics", en: *Mathematics Teacher* (92), 240-46, 1999.

Lindauer, P. y P. Garth. "A Review of Cooperative Learning: An Alternative to Everyday Instructional Strategies", en: *Journal of Instructional Psychology* (24), 183-88, 1997.

McDiarmid, G. W. y S. M. Wilson. "An exploration of the subject matter knowledge of alternative route teachers: Can we assume they know their subject?" *Journal of Teacher Education,* 42(2), 93-103,1991.

Miles, M. y A. Huberman. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* Londres, SAGE Publications, 1984.

National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA, Author,1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA, Author, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM, 2000.

OECD. *The PISA 2000. Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.* Programme for International Student Assessment, Paris, Francia, 2000.

Peterson, P., T. Carpenter y E. Fennema. "Teacher's knowledge of students' knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses", en: *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 558-569, 1989.

Posamentier, A. S. y J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics.* Upper Saddle River, N J, Prentice-Hall, 1999.

Schifter, D. "Mathematics process as mathematics content: A course for teachers", en: *Journal of Mathematical Behavior* (12) 271-283, 1993.

Schifter, D. y C. T. Fosnot. *Reinventing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* Nueva York, Teachers College Press, 1993.

Schifter, D. y M. A. Simon. "Assessing teacher's development of a constructivist view of mathematics learning", en: *Teaching and Teacher Education,* 8(2), 187-197, 1992.

Slavin, R. E. "Here to Stay-or Gone Tomorrow?, en: *Educational Leadership* (47), 250, 1990.

Stevens, R., R. Slavin y A. Farnish. "The Effects of Cooperative Learning and Direct Instruction in Reading Comprehension Strategies on Main Idea Identification", en: *Educational Leadership* (83), 8-15, 1991.

Thompson, A. "Teacher's believes and conceptions: A Synthesis of the Research", en: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* D. A. Grows (ed.), National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, 1992.

Walmsley, A. y J. Muñiz. "Cooperative Learning and Its Effects in a High School Geometry Classroom", en: *Mathematics Teacher,* vol. 96, núm. 2, pp. 112-119, NCTM, EUA, 2003.

Whicker, K., L. Bol y J. A. Nunnery, "Cooperative Learning in the Secondary Mathematics Classroom", en: *Journal of Educational Research* (91), 42-48, 1997.

INTRODUCCIÓN

La matemática es la reina de las ciencias y la teoría de números es la reina de las matemáticas.[1]
Gauss

Sin duda, las matemáticas a lo largo de su desarrollo histórico han estado ligadas a las necesidades prácticas de la humanidad.

> "En el caso de la aritmética la respuesta también la proporciona la historia. Vimos cómo los pueblos aprendieron a contar y llegaron al concepto de número, y cómo las necesidades de la vida, planteando problemas más difíciles, requirieron la introducción de símbolos numéricos. En una palabra, las fuerzas que condujeron al desarrollo de la aritmética fueron las necesidades prácticas de la vida social. Estas necesidades prácticas y el pensamiento abstracto que surgió de ellas ejercieron unos sobre otros una constante interacción. Los conceptos abstractos constituyen en sí una valiosa herramienta para la vida práctica y fueron constantemente mejorados debido a sus muchas aplicaciones. Al hacer abstracción de lo esencial se desvela lo esencial y garantiza el éxito en aquellos casos en que el papel importante corresponde precisamente a esas propiedades y relaciones elegidas y preservadas por la abstracción, y que son, en el caso de la aritmética, las relaciones cuantitativas.
>
> Además, la reflexión abstracta a menudo va más lejos que las necesidades inmediatas de un problema práctico".[2]

> "Los conceptos y conclusiones de la aritmética, que generalizan una enorme cantidad de experiencias, reflejan en forma abstracta aquellas relaciones del mundo real que

[1] Courant, R. y H. Robbins. *¿Qué es la matemática?* Madrid, Ed. Aguilar, 1979, p 28.
[2] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros. *La matemática: su contenido método y significado.* España, Ed. Alianza Universidad, 1980, p 37.

se encuentran constantemente y en todas partes. Es posible contar los objetos de una habitación, las estrellas, la gente, los átomos, etc. La aritmética considera algunas de sus propiedades generales, haciendo abstracción de todo lo particular y concreto, y es precisamente porque se consideran únicamente estas propiedades generales por lo que sus conclusiones son aplicables a tantos casos. La posibilidad de un amplio rango de aplicaciones está garantizada por la gran abstracción de la aritmética, aunque es importante hacer notar que esta abstracción no es vacía, sino que se deriva de una gran experiencia práctica. Lo mismo es cierto para toda la matemática y para cualquier concepto abstracto o teoría. Las posibilidades de aplicación de una teoría dependen en gran medida del material original que ella generaliza".[3]

"Las abstracciones de la matemática se distinguen por tres rasgos. En primer lugar, tratan fundamentalmente de las relaciones cuantitativas y formas espaciales, abstrayéndolas de todas las demás propiedades de los objetos. En segundo lugar, aparecen en una sucesión de grados de abstracción creciente, llegando mucho más lejos en esta dirección que la abstracción en las demás ciencias... Finalmente, y esto es obvio, la matemática como tal se mueve casi por completo en el campo de los conceptos abstractos y sus interrelaciones".[4]

"En el siglo III a. C., los griegos habían reconocido claramente dos ideas importantes: primera, que la sucesión de números era susceptible de ser prolongada indefinidamente; y segunda, que no sólo era posible operar con números cualesquiera dados, sino también referirse a los números en general y formular y probar teoremas sobre ellos. Esta idea representa la generalización de una cantidad inmensa de experiencias anteriores con números concretos, de las cuales entresacaron las reglas y métodos para razonamientos *generales* sobre los números. Se había operado una transición a un nivel más alto de abstracción: de números concretos (entes individuales, aunque abstractos) a números en general, es decir a cualquier número posible".[5]

---

[3] *Idem.* p. 36.
[4] *Idem.* p. 18.
[5] *Idem.* p. 33.

"Los teoremas generales sobre cualquier propiedad de un número arbitrario contienen ya en forma implícita infinidad de asertos sobre las propiedades de cualquier número y son por tanto cualitativamente más ricos que cualesquiera asertos particulares que pudieran verificarse para números específicos. Por esta razón los teoremas generales deben ser probados por razonamientos generales derivados de la regla fundamental de formación de la sucesión de los números. Aquí percibimos una profunda particularidad de la matemática: la matemática tiene como objeto no sólo relaciones cuantitativas dadas, sino todas las posibles relaciones cuantitativas, y entre ellas el infinito".[6]

"La mayor parte de la teoría de números, como en general de la matemática, no se refieren a un objeto particular –el número 5 o el número 32–, sino a una clase completa, de objetos que tienen alguna propiedad común, por ejemplo:
La clase de todos los números pares:

2, 4, 6, 8...

o la clase de enteros divisibles por 3:

3, 6, 9, 12...

o bien la clase de los cuadrados de los números enteros:

1, 4, 9, 16...

y así sucesivamente".[7]

En *Los elementos de Euclides*, escritos en el siglo III a. de C., ya encontramos teoremas generales sobre los números, en particular aquel que afirma que existen números primos infinitamente grandes. El tema se incluye en los programas de matemáticas de la escuela secundaria. Una de las actividades principales es el cálculo del *mínimo común múltiplo*. De los propósitos relacionados con el tema se pueden destacar los siguientes:

---

[6] *Idem.*
[7] Courant, R. y H. Robbins, *¿Qué es la matemática?* Madrid, Ed. Aguilar, 1979, p 28.

- Enriquecer el significado de los números y sus operaciones a través de la solución de problemas muy variados.
- Familiarizarse con los diversos medios de expresión matemática: la escritura simbólica, las tablas y las gráficas, y utilizarlos en la resolución de problemas.
- Iniciarse gradualmente en el razonamiento deductivo, en situaciones escogidas por el profesor.

Un número importante de autores de materiales dirigidos a maestros de enseñanza secundaria sostienen que la enseñanza ha dedicado mucho tiempo al estudio de los criterios de divisibilidad y a los procedimientos para obtener el *mínimo común múltiplo* y el *máximo común divisor*, pero presta poca atención al desarrollo de las nociones para comprender estos procedimientos.

Entre las recomendaciones que se hacen a los maestros cuando diseñan actividades para la clase, se destaca que el maestro no debe olvidar que la teoría elemental de los números es rica en situaciones y problemas que se planean con facilidad y que los alumnos pueden explorar activamente, al mismo tiempo que desarrollan nociones que les servirán para comprender otras partes de las matemáticas y apreciar la belleza de esta disciplina.

De lo anterior, se deriva que es conveniente proponer problemas y actividades que permitan al alumno explorar libremente, tomar en cuenta sus aportes, respetar sus ideas y acercamientos, y no imponer los procedimientos convencionales o los razonamientos del maestro.

El problema que hemos elegido para abordar el concepto de *mínimo común múltiplo* es el "problema de los engranes". La relación que encontramos entre los dientes de cada uno de los engranes al girar está directamente vinculada con el concepto de *mínimo común múltiplo.* El problema está relacionado con la vida cotidiana. Consideramos que el material que se les proporciona a los alumnos para abordar el problema les permite encontrar diversas relaciones numéricas de manera sencilla, y las expresiones matemáticas que se requieren se desprenden directamente de las relaciones encontradas al manipular el material. Los alumnos de este nivel tienen los conocimientos previos necesarios para abordarlo y el grado de dificultad para solucionarlo es un reto accesible a ellos.

Las diversas situaciones a las que se enfrentan los alumnos al abordar el problema propicia su capacidad inventiva, inductiva y deductiva mediante la observación y el estudio de las características que se presentan al resolver el problema.

Pretendemos que la resolución de este problema proporcione una experiencia a los alumnos que les permita recrear su conocimiento sobre conceptos básicos de divisibilidad y conocer algunas de sus aplicaciones como herramientas para analizar información y formular respuestas a preguntas matemáticas. Creemos que trabajar en la solución de esos problemas propiciará en los alumnos una actitud creativa, apoyada en la visualización y el uso de materiales manipulables, que motivará el aprendizaje de sofisticadas relaciones numéricas y apoyará el desarrollo de su pensamiento matemático. Asimismo, nos proponemos favorecer que los alumnos desarrollen habilidades en el estudio de las relaciones numéricas que se presentan al resolver un problema y que empleen su propia simbología, lo cual, mediante procesos de enseñanza posteriores, les permitirá llegar gradualmente al nivel de formalización que exige la estructura de las matemáticas.

Las nociones de divisibilidad son importantes en muchas ramas de las matemáticas, por ejemplo, los criterios de divisibilidad, los criterios para determinar si las ecuaciones diofantinas tienen o no solución, la comprensión del algoritmo de Euclides, las aplicaciones de proposiciones tales como "si a divide a $b \times c$ y el $mcd\,(a, b) = 1$ entonces a divide a c", la relación entre el mínimo común múltiplo y las soluciones enteras de las ecuaciones homogéneas $ax + by = 0$, y el tema de congruencias son algunos de los ámbitos en donde estos conceptos son fundamentales.

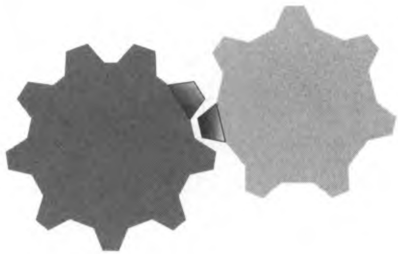
Proponer a los alumnos problemas matemáticos que estén relacionados con su vida cotidiana y propiciar que ellos los resuelvan, es una estrategia central en esta propuesta de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Planteamiento de los problemas

Primera sesión

Problema 1. Con dos engranes, uno de 7 dientes y otro de 9, como se muestra en el siguiente dibujo, ¿después de cuántas vueltas vuelven a coincidir los dos engranes en el mismo punto en que comenzaron?



Problema 2. Mismo enunciado que el anterior, pero ahora un engrane de 6 dientes y otro de 9 dientes.

Problema 3. Mismo problema que el anterior, pero ahora con engranes de 12 y 15 dientes.

Problema 4. Mismo problema que el anterior, pero ahora con engranes de a y b dientes.

Segunda sesión

Problema 1. Usar el procedimiento general para encontrar la solución en los casos en que los engranes tienen: 6-9, 7-9 y 2-4 dientes, respectivamente.

Problema 2. En el mercado compré manzanas y duraznos; cada manzana me costó $5.00 y cada durazno $8.00. Si pagué lo mismo por las manzanas que por los duraznos, ¿cuántas manzanas y cuantos duraznos compré?

Problema 3. Mismo enunciado que el anterior, pero ahora la manzana cuesta $6.00 y el durazno $8.00.

Problema 4. Conseguí un trabajo bajo las siguientes condiciones: trabajo 3 días seguidos y descanso el cuarto día; si empiezo a trabajar el primer domingo de enero, ¿cuántos domingos descansaré en todo el año?

Objetivos

- Que los alumnos desarrollen habilidades que le permitan resolver problemas matemáticos.
- Que los alumnos descubran la relación del *mínimo común múltiplo* con la solución de los problemas planteados.
- Que los alumnos sean capaces de recuperar sus conocimientos matemáticos previos para resolver determinado problema matemático.
- Que los alumnos descubran la relación que hay entre las fracciones y la solución de los problemas planteados.
- Que los alumnos sean capaces de plantear simbólicamente situaciones problemáticas.
- Que los alumnos encuentren en las ecuaciones, con soluciones enteras, una manera de representar los problemas.
- Que los alumnos aprendan a relacionar la solución de los problemas con los conceptos matemáticos.
- Fomentar en los alumnos el uso de vocabulario básico para una adecuada expresión matemática.

Primera sesión

Proyección de video (5 min). A través de un video, se presenta un problema relacionado con la actividad humana, cuyas soluciones están vinculadas con diversos contenidos matemáticos (Cápsula de video).

Verificación de la comprensión del problema planteado en el video y distribución del material (2 min). Si giramos dos engranes, uno de 7 dientes y otro de 9 dientes, ¿después de cuántas vueltas vuelven a coincidir en el mismo punto en que comenzaron? (Cápsula de video, engranes de unicel.)

Organización de los alumnos en equipos de trabajo (8 min). Cada equipo trabajará en la solución del problema planteado (Engranes de unicel, cuaderno).

Exposición de las soluciones propuestas por los equipos (3 min). Se discutirán las diferentes soluciones al problema planteado (Engranes, pizarrón).

Validación de las soluciones propuestas (4 min). Verificar el número de vueltas directamente con los engranes (Engranes y pizarrón).

Modificación al problema anterior (1 min). Mismo problema que el anterior, excepto que ahora los engranes son de 6 y 9 dientes, respectivamente (Engranes de unicel).

Trabajo en equipo (3 min). Cada equipo trabajará en la solución del problema planteado (Engranes y cuaderno).

Exposición de las soluciones al problema planteado (6 min). El maestro organiza la discusión de todo el grupo, y propicia que expongan en el pizarrón las soluciones (Engranes y pizarrón).

Planteamiento del problema (1 min). Mismo problema que el anterior, pero ahora con engranes de 12 y 15 dientes, respectivamente.

Sesión de preguntas y respuestas relacionadas con el problema (4 min). El maestro conduce la discusión de los alumnos sobre las propuestas de solución al problema planteado (Pizarrón).

Planteamiento del problema, para el caso general (1 min). Mismo problema que el anterior, pero ahora con engranes de a y b número de dientes, respectivamente.

Análisis y conclusión sobre los problemas resueltos en el salón (5 min). El maestro conduce la discusión de los alumnos sobre las propuestas de solución al problema planteado (Pizarrón).

Tarea (1 min). Descubrir la relación del máximo común divisor con el método de resolución del problema general (Pizarrón).

Segunda sesión

Presentación (1 min). Descripción y organización de las actividades que se desarrollarán en la clase.

Revisión de la tarea (4 min). Discusión sobre el problema planteado en la tarea. Descubrir la relación del máximo común divisor en el método de resolución del problema general (Pizarrón).

Trabajo en equipo (6 min). Con la conclusión que resulte de la tarea, hacer lo mismo para el caso en que los engranes tienen: 6-9, 7-9 y 2-4 dientes, respectivamente.

Exposición de los alumnos (5 min). Los alumnos expondrán sus soluciones y opiniones con respecto a los problemas planteados (Pizarrón).

Conclusiones (3 min). El maestro, al frente del grupo, organizará a partir de las opiniones de los alumnos las conclusiones. Una de las conclusiones establece la igualdad entre el producto de dos números enteros positivos y el producto del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

Planteamiento de un problema (2 min). El maestro pide a los alumnos que tomen dos números enteros positivos y verifiquen la conclusión anterior (Cuaderno).

Comentarios sobre el problema anterior (1 min). El maestro pregunta a los alumnos si verificaron el resultado anterior para el par de números que eligieron.

Análisis y conclusión de los distintos problemas resueltos (15 min). El maestro, al frente del grupo, organiza las conclusiones relacionadas con el método general para encontrar la solución del problema de los engranes (Pizarrón).

Planteamiento de un problema (2 min). El maestro plantea a los alumnos el problema siguiente y deja poco tiempo para que encuentren la solución: Si en el mercado compre manzanas y duraznos, y cada manzana me costó $5.00 y cada durazno $8.00, y pagué lo mismo por las manzanas que por los duraznos, ¿cuántas manzanas y cuantos duraznos compre?

Revisión de la solución al problema planteado (2 min). El maestro pide a los alumnos que pasen al frente a exponer la solución al problema.

Planteamiento de un problema (2 min). El maestro plantea una variante del problema anterior: ahora la manzana cuesta $6.00 y el durazno $8.00, y pide que lo resuelvan rápidamente.

Revisión de la solución al problema anterior (1 min). El maestro pide a los alumnos que le digan la solución del problema planteado.

Planteamiento de un problema (1 min). El maestro pide a los alumnos que resuelvan en su casa el siguiente problema: Conseguí un trabajo bajo las siguientes condiciones: trabajo 3 días seguidos y descanso el cuarto día; si empiezo a trabajar el primer domingo de enero, ¿cuántos domingos descansaré en todo el año?

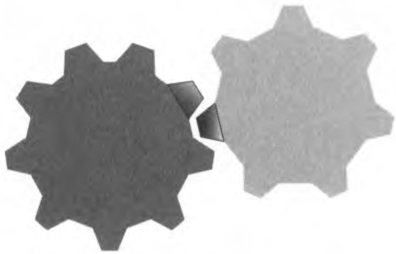
Descripción de las actividades

P

Cápsula de video

A través de un video se presenta un problema relacionado con la actividad humana, cuyas estrategias de solución están vinculadas con diversos contenidos matemáticos.

El problema es el siguiente: Con dos engranes, uno de 7 dientes y otro de 9, como se muestra en el siguiente dibujo, ¿después de cuántas vueltas vuelven a coincidir los dos engranes en el mismo punto en que comenzaron?



El maestro pregunta si hay alguna duda sobre el problema planteado en el video.

Se organiza al grupo en equipos y se les deja trabajar de 8 a 10 minutos.

Cada equipo cuenta con un juego de engranes de unicel que pueden utilizar para auxiliarse en la búsqueda de la solución del problema, si lo considera conveniente.

El maestro visita a cada uno de los equipos para observar su trabajo e intercambiará puntos de vista sobre el diseño de sus técnicas de conteo.

Exposición de las soluciones propuestas por los equipos

Después de que los equipos han trabajado para resolver el problema, se le pide a alguno de ellos que pase al frente para exponer sus resultados; si el equipo considera conveniente, puede hacer uso de los engranes para explicar la forma en que contaron las vueltas de cada uno de los engranes.

Si algún equipo obtuvo un procedimiento distinto, pasará al frente a explicar sus resultados

Solución al problema

Si nos fijamos en el número de dientes que tiene cada uno de los engranes y los numeramos, al girar los dos engranes y registrar el "encuentro" de los dientes, obtenemos el siguiente listado, donde cada una de las columnas de la tabla representa las vueltas del engrane de 7 dientes.

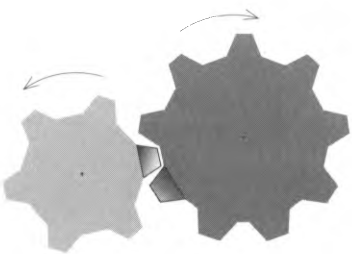
1ª vuelta	**2ª vuelta**	**3ª vuelta**	**4ª vuelta**	**5ª vuelta**	**6ª vuelta**	**7ª vuelta**	**8ª vuelta**	**9ª vuelta**
(1, 1)	(1, 8)	(1, 6)	(1, 4)	(1, 2)	(1, **9**)	(1, 7)	(1, 5)	(1, 3)
(2, 2)	(2, **9**)	(2, 7)	(2, 5)	(2, 3)	(2, 1)	(2, 8)	(2, 6)	(2, 4)
(3, 3)	(3, 1)	(3, 8)	(3, 6)	(3, 4)	(3, 2)	(3, **9**)	(3, 7)	(3, 5)
(4, 4)	(4, 2)	(4, **9**)	(4, 7)	(4, 5)	(4, 3)	(4, 1)	(4, 8)	(4, 6)
(5, 5)	(5, 3)	(5, 1)	(5, 8)	(5, 6)	(5, 4)	(5, 2)	(5, **9**)	(5, 7)
(6, 6)	(6, 4)	(6, 2)	(6, **9**)	(6, 7)	(6, 5)	(6, 3)	(6, 1)	(6, 8)
(**7**, 7)	(**7**, 5)	(**7**, 3)	(**7**, 1)	(**7**, 8)	(**7**, 6)	(**7**, 4)	(**7**, 2)	(**7**, **9**)
								(1, 1)

Según los datos de la tabla, el engrane de 7 dientes da 9 vueltas mientras que el de 9 dientes da 7 vueltas.

Variante del problema

El maestro pide a los alumnos que resuelvan el problema siguiente.

Si ahora tomamos dos engranes, uno de **6** dientes y otro de **9**, ¿después de cuántas vueltas vuelven a quedar en la posición inicial?



Si los alumnos consideran necesario usar los engranes, lo pueden hacer. Para esta actividad, el maestro les proporciona un nuevo engrane de 6 dientes.

Cada equipo trabaja en la solución al problema.

El maestro organiza la discusión de todo el grupo, y propicia que expongan en el pizarrón las soluciones.

Como en el caso anterior, si construimos la tabla, obtenemos los siguientes datos.

Número de vueltas del engrane de 6 dientes

1ª vuelta	2ª vuelta	3ª vuelta
(1, 1)	(1, 7)	(1, 4)
(2, 2)	(2, 8)	(2, 5)
(3, 3)	(3, **9**)	(3, 6)
(4, 4)	(4, 1)	(4, 7)
(5, 5)	(5, 2)	(5, 8)
(**6**, 6)	(**6**, 3)	(**6**, **9**)
		(1, 1)

Encontramos que el engrane de **6** dientes dará **3 vueltas,** mientras que el de **9** solamente **2 vueltas.** En este caso no sucede que el número de vueltas que dé uno de los engranes coincida con el número de dientes del otro engrane.

La siguiente actividad consiste en resolver el problema, sin engranes, de los engranes de 12 y 15 dientes, respectivamente.

Se pretende que los alumnos resuelvan el problema recuperando el trabajo de los dos casos anteriores, pero ahora sin el material de apoyo (sin los engranes).

El maestro conduce la discusión de los alumnos sobre las propuestas de solución al problema planteado.

Si contamos el número de dientes en cada una de las vueltas, obtenemos los siguientes números.

Engrane	No. de dientes conforme dan vuelta los engranes
7	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, **63**, 70,...
9	9, 18, 27, 36, 45, 54, **63**, 72, 81,...

Si dividimos $\frac{63}{7}$, obtenemos el número de vueltas que da el engrane de 7 dientes; y si dividimos $\frac{63}{9}$, obtenemos el número de vueltas que da el engrane de 9 dientes.

El número **63** es el *mínimo común múltiplo* de **7** y **9.**

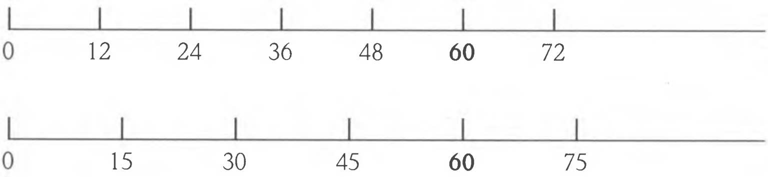
Para el caso en que los engranes son de 6 y 9 dientes, tenemos la relación siguiente.

Engrane	No. de dientes conforme dan vuelta los engranes
6	6, 12, **18**, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60,…
9	9, **18**, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81,…

Si dividimos $\frac{18}{6}$, obtenemos el número de vueltas que da el engrane de 6 dientes; y si dividimos $\frac{18}{9}$, obtenemos el número de vueltas que da el engrane de 9 dientes.

El número **18** es el *mínimo común múltiplo* de **6** y **9**.

Consideremos ahora un engrane de **12** dientes y otro de **15** dientes. En el siguiente dibujo se representa el número de dientes que van pasando por el punto de partida en cada vuelta.



Así que el engrane de **12** dientes da **5** vueltas, mientras que el engrane de **15** dientes da **4** vueltas.

Si consideramos el número de dientes de cada engrane y, conforme dan vueltas, contamos el número de encuentros de los dientes, en el caso anterior se tiene que después de 60 encuentros los engranes vuelven a su posición inicial.

La siguiente actividad consiste en resolver el problema para el caso general.

Mismo problema que los anteriores, pero ahora con engranes de a y b número de dientes, respectivamente.

Conjeturamos que para cualesquiera 2 engranes, uno con a y otro con b dientes, el número de vueltas de cada uno será como se indica a continuación.

El engrane de a dientes dará

$$\frac{mcm(a, b)}{a} \text{ vueltas,}$$

y el engrane de b dientes dará

$$\frac{mcm(a, b)}{b} \text{ vueltas,}$$

en donde $mcm\ (a, b)$ es el *mínimo común múltiplo* de a y b.

Elementos que se desprenden del trabajo realizado

Para el caso en que los engranes son de 7 y 9 dientes, respectivamente, encontramos que

$$7 \times 9 = 63,$$

$$\frac{63}{9} = 7$$

y

$$\frac{63}{7} = 9.$$

Para el caso de los engranes de 12 y 15, respectivamente, tenemos que

$$12 \times 15 = 180,$$

pero el engrane de 12 dientes da 5 vueltas, y el de 15 dientes da 4 vueltas, siendo que

$$\frac{180}{12} \text{ no es } 5$$

y

$$\frac{180}{15} \text{ no es } 4.$$

Sabemos que

$$\frac{60}{12} = 5$$

y

$$\frac{60}{15} = 4.$$

Entonces, hay que dividir 180 entre 3 para obtener 60, *mínimo común múltiplo* de 12 y 15, y luego hacer la división entre 12 y 15 para obtener el número de vueltas de cada uno de los engranes.

Tarea

Descubrir la relación del *máximo común divisor* con el método de solución del problema general.

¿Qué relación hay del número 3, por el que dividimos el número 180, con el 12 y el 15, que son el número de dientes que tienen cada uno de los engranes, respectivamente?

Segunda sesión

Revisión de la tarea

El maestro pregunta a los alumnos si recuerdan en qué consistió la tarea.

En el caso particular de los engranes de 12 y 15 dientes, respectivamente, encontramos que

$$12 \times 15 = 180,$$

siendo 60 el mínimo común múltiplo de 12 y 15; si dividimos 180 entre 3 obtenemos 60, y resulta que 3 es el máximo común divisor de 12 y 15.

Entonces, el procedimiento general consiste en multiplicar los números asociados a los dientes de los engranes, y dividir el producto entre el máximo común divisor, con lo que obtenemos el *mínimo común múltiplo.*

La solución al problema consiste en lo siguiente.

El engrane de a dientes dará

$$\frac{mcm(a,\ b)}{a} \text{ vueltas}$$

y el engrane de b dientes dará

$$\frac{mcm(a,\ b)}{b} \text{ vueltas.}$$

Por otra parte,

$$\frac{a \times b}{mcd(a,b)} = mcm(a,b),$$

en donde $mcd\ (a,\ b)$ es el *máximo común divisor* de a y b. Y podemos escribir la expresión anterior como

$$a \times b = mcm(a,b) \times mcd(a,b).$$

El maestro pide a los alumnos que verifiquen la igualdad anterior para cualquier par de números enteros positivos que ellos determinen.

El maestro al frente del grupo organiza las conclusiones relacionadas con el método general para encontrar la solución del problema de los engranes.

En el caso particular de los engranes de 12 y 15 dientes, respectivamente, se trata de encontrar los múltiplos de cada uno de los números.

Número de dientes de cada uno de los engrane	**Múltiplos**
12	12(1), 12(2), 12(3), 12(4), 12(5), 12(6),...
15	15(1), 15(2), 15(3), 15(4), 15(5),...

Los múltiplos coinciden cuando

$$12(5) = 15(4).$$

De esta expresión obtenemos que

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Observaciones:

1. El número **4** representa las vueltas que tiene que dar el engrane de 15 dientes para llegar a la posición inicial.
   El número **5** representa las vueltas que tiene que dar el engrane de 12 dientes para llegar a la posición inicial.
2. En la fracción $\frac{12}{15}$, dividimos tanto el numerador como el denominador por 3, que es el *mcd* (12, 15), y obtenemos la fracción equivalente $\frac{4}{5}$, en forma irreducible.

Para los otros casos que hemos trabajado, se tiene lo siguiente.

Cuando el número de dientes de los engranes son 6 y 9, tenemos que $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, en donde, en la primera fracción, dividimos tanto el numerador como el denominador por 3, que es el *mcd* (6, 9), y obtenemos la fracción $\frac{2}{3}$ en forma irreducible; el 2 representa el número de vueltas que da el engrane de 9 dientes, y el 3 el número de vueltas que da el engrane de 6 dientes, para llegar al punto de partida.

Para el problema inicial, con los engranes de 7 y 9 dientes, respectivamente, tenemos la fracción $\frac{7}{9}$, que ya está en forma irreducible, el *mcd* $(7, 9) = 1$ y el número de vueltas que da el engrane de 7 dientes es 9, mientras que el engrane de 9 dientes da 7 vueltas para llegar a la posición inicial.

Concluimos que para determinar el número de vueltas que da cada uno de los engranes basta con simplificar la fracción, hasta llevarla a su forma irreducible. Si a y b son los dientes de cada uno de los engranes, en la fracción $\frac{a}{b}$ tanto al número a como a b los dividimos entre el $mcd\ (a, b)$ y obtenemos una fracción equivalente, en forma irreducible, en donde el numerador representa el número de vueltas que va a dar el engrane b, mientras que el denominador representa el número de vueltas que da el engrane a para llegar al punto de partida.

De la tabla anterior podemos obtener también la siguiente generalización.

Se trata de tomar los múltiplos de 12, es decir, los números de la forma $12(y)$, donde y varía en los números naturales, y los múltiplos de 15, es decir, $15(x)$, donde x también varía en los números naturales.

Para encontrar la solución, se trata de que $12(y) = 15(x)$, expresión que se puede escribir como

$$12(y) - 15(x) = 0.$$

Cuando los engranes son de a y b dientes, respectivamente, podemos escribir la expresión anterior como

$$a(y) - b(x) = 0.$$

El maestro plantea los problemas siguientes, esperando que los alumnos recuperen los procedimientos y resultados que surgieron al resolver los problemas de engranes.

1. En el mercado compré manzanas y duraznos; si cada manzana me costó \$5.00 y cada durazno \$8.00, y pagué la misma cantidad por las manzanas que por los duraznos, ¿cuántas manzanas y cuántos duraznos compré?
2. Una variante del problema anterior. Ahora la manzana cuesta \$6.00 y el durazno \$8.00. ¿Cuántas manzanas y cuántos duraznos compré?

Problema para resolver en casa

Conseguí un trabajo, bajo las condiciones siguientes: Trabajo 3 días seguidos y descanso el cuarto día; si empiezo a trabajar el primer domingo de enero, ¿cuántos domingos descansaré en todo el año?

Respuestas esperadas

- Que los alumnos encontraran la respuesta auxiliándose de los engranes de unicel, contando el número de vueltas que dio cada uno de ellos.
- Que se fijaran en el número de dientes de cada uno de los engranes y asociaran este número a cada una de las vueltas.

Respuestas no esperadas

- Que los alumnos desde el primer problema relacionaran la respuesta con el mínimo común múltiplo.
- Que no se auxiliaran de los engranes para resolver el segundo problema, el de los engranes de 6 y 9 dientes, respectivamente.

Dificultades

Los alumnos en los primeros tres problemas encontraron la solución: había que encontrar el *mínimo común múltiplo* de a y b, números asociados a los dientes en cada uno de los engranes, y para determinar el número de vueltas de cada uno de los engranes había que realizar las operaciones siguientes:

El engrane de a dientes dará

$$\frac{mcm(a, b)}{a} \text{ vueltas}$$

y el engrane de b dientes dará

$$\frac{mcm(a, b)}{b} \text{ vueltas.}$$

Las dificultades se presentaron cuando el maestro observa que en las expresiones construidas por los alumnos se podían relacionar con propiedades matemáticas ya establecidas, por ejemplo, la igualdad

$$a \times b = mcm(a,b) \times mcd(a,b),$$

o la ecuación entera

$$a(y) - b(x) = 0,$$

y la búsqueda de la expresión más simple para la solución del problema, como el trabajo de simplificar fracciones.

Si los alumnos ya habían resuelto los problemas, y diseñaron el método general para encontrar la solución para cualquier par de engranes, su motivación para realizar el análisis posterior y arribar a las expresiones anteriores no resultó sencillo.

Planeación de la sesión con los maestros

Proyección de animación (3 min). A través de una animación, elaborada en la computadora, se presenta un problema relacionado con la actividad humana, cuyas soluciones están vinculadas con diversos contenidos matemáticos (Animación).

Verificación de la comprensión del problema planteado en la animación y distribución del material (2 min). Si giramos dos engranes, uno de 7 dientes y otro de 9 dientes, ¿después de cuántas vueltas vuelven a coincidir en el mismo punto en que comenzaron? (Animación, engranes de unicel).

Organización de los alumnos en equipos de trabajo (8 min). Cada equipo trabajará en la solución del problema planteado (Engranes de unicel, cuaderno).

Exposición de las soluciones propuestas por los equipos (4 min). Se discutirán las diferentes soluciones al problema planteado (Engranes, pizarrón).

Validación de las soluciones propuestas (2 min). Verificar el número de vueltas directamente con los engranes (Engranes, pizarrón).

Proyección de animación, modificación al problema anterior (1 min). Mismo problema que el anterior, excepto que ahora los engranes son de 6 y 9 dientes respectivamente (Animación).

Trabajo en equipo (5 min). Cada equipo trabajará en la solución del problema planteado (Engranes, cuaderno).

Exposición de las soluciones al problema planteado (6 min). El cordinador organiza la discusión de todo el grupo, y propicia que expongan en el pizarrón las soluciones (Pizarrón, engranes).

Planteamiento del problema (1 min). Mismo problema que el anterior, pero ahora con engranes de 12 y 15 dientes, respectivamente. Los maestros tienen un minuto para resolver el problema.

Sesión de preguntas y respuestas relacionadas con el problema (3 min). El coordinador conduce la discusión de los maestros sobre las propuestas de solución al problema planteado (Pizarrón).

Planteamiento del problema para el caso general (2 min). Mismo problema que el anterior, pero ahora con engranes de a y b número de dientes, respectivamente.

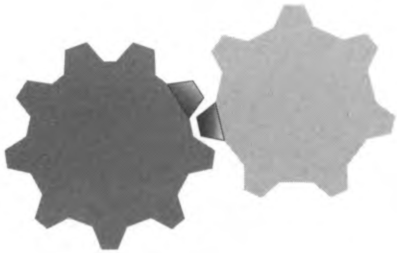
Análisis y conclusión sobre los problemas resueltos en el salón (8 min). El maestro conduce la discusión de los alumnos sobre las propuestas de solución al problema planteado (Pizarrón).

Descripción de las actividades

Animación en computadora

A través de una animación, se presenta un problema relacionado con la actividad humana, cuyas estrategias de solución están vinculadas con diversos contenidos matemáticos. El problema es el siguiente:

Con dos engranes, uno de 7 dientes y otro de 9, como se muestra en el siguiente dibujo, ¿después de cuántas vueltas vuelven a coincidir los dos engranes en el mismo punto en que comenzaron?



El coordinador pregunta si hay alguna duda sobre el problema planteado en el video.

Se organiza al grupo en equipos y se les deja trabajar durante ocho minutos.

Cada equipo puede utilizar los engranes, si lo considera conveniente, para auxiliarse en la búsqueda de la solución del problema.

El coordinador visitará a cada uno de los equipos para observar su trabajo o intercambiar puntos de vista sobre sus propuestas de solución.

Exposición de las soluciones propuestas por los equipos

El coordinador pedirá a alguno de los equipos que pase al frente para realizar el conteo de las vueltas que darán los engranes para volver a la posición inicial.

Con los engranes de 7 y 9 dientes, los maestros encontraron dos soluciones. Una de ellas, expresada por la mayoría, es que el engrane de 7 dientes da 9 vueltas y el de 9 da 7 vueltas. La otra respuesta expresa que el engrane de 7 dientes da 8 vueltas y el de 9 da 7 vueltas. Esta última solución la proponen después de haber obtenido el promedio de los números de dientes de los dos engranes.

El criterio de validación se realizó por medio del conteo del número de vueltas que da cada uno de los engranes.

En uno de los equipos realizaron el conteo de la siguiente manera: cuando el engrane de 7 dientes daba una vuelta, al de 9 le faltaban dos dientes para completar la vuelta, en la segunda vuelta al de 9 dientes le faltaron 4, y así sucesivamente en cada una de las vueltas, habiendo llegado a la conclusión de 7 y 9.

Para el caso de los engranes de 6 y 9 dientes, respectivamente, fue necesario darle varias vueltas a los engranes que se proyectaron en la animación para que los maestros encontraran la respuesta.

Todos los equipos encontraron que el engrane de 6 dientes da 3 vueltas, y el de 9 da 2 vueltas.

Uno de los equipos encontró que la solución tiene que ver con el *mínimo común múltiplo.*

Otro equipo encontró que el número de vueltas tenía que ver con los números que se obtienen al simplificar la fracción $\frac{6}{9}$.

En el caso de 7 y 9, como los números son primos relativos, multiplicamos $7 \times 9 = 63$, y $\frac{63}{9} = 7$, siendo el número de vueltas que da el engrane de 9 dientes, y $\frac{63}{7} = 9$ el número de vueltas que da el engrane de 7 dientes.

En el caso de 6 y 9, el *mínimo común múltiplo* de 6 y 9 es 18; por lo que $\frac{18}{6} = 3$ es el número de vueltas que da el engrane de 6 dientes y $\frac{18}{9} = 2$ es el número de vueltas que da el engrane de 9 dientes.

Misma respuesta para el caso de engranes de 12 y 15 dientes respectivamente.

Con el procedimiento de simplificar la fracción $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, el engrane de 12 dientes da 5 vueltas y el de 15 da 4 vueltas.

Si ahora consideramos los encuentros que hay entre los dientes de cada uno de los engranes, ¿después de cuántos encuentros los engranes vuelven a su posición inicial?

Los maestros encontraron que, en el caso de 7 y 9, los engranes vuelven a la posición inicial después de 63 encuentros, y si se continúan girando los engranes, vuelven a la posición inicial en todos los múltiplos de 63, que es el *mínimo común múltiplo* de 7 y 9.

Para el caso de 12 y 15, el producto de ambos números es 180, y el *mínimo común múltiplo* de 12 y 15 es 60; así, $60 \times 3 = 180$, 3 siendo el *máximo común divisor* de 12 y 15, por lo que se conjeturó que

$$a \times b = mcm(a, b) \times mcd(a, b).$$

Por otra parte, en el caso de los engranes de 7 y 9 dientes, el problema inicial se pudo plantear de la siguiente manera.

El 7 multiplicado por algún número debe ser igual a 9 multiplicado por otro número, es decir, $7(n) = 9(m)$, o

$$7(n) - 9(m) = 0;$$

una solución de esta ecuación es $n = 9$ y $m = 7$.

En el caso de 6 y 9, tenemos que:

$$6(n) = 9(m), \text{ o}$$
$$6(n) - 9(m) = 0;$$

siendo una solución $n = 9$ y $m = 6$.

El número de vueltas que da cada uno de los engranes cuando $n = 3$ y $m = 2$ es otra solución de la ecuación anterior.

Si dividimos la ecuación anterior por 3, obtenemos la ecuación

$$2(n) - 3(m) = 0,$$

y en este caso 2 y 3 son primos relativos.

En general,

si $ax - by = 0$ y a y b son primos relativos entonces la solución es:

$$x = bt,$$
$$y = at,$$

donde t es un número natural.

Respuestas esperadas

- Que los maestros encontraran la relación del *mínimo común múltiplo* con la solución del problema.
- Que contaran el número de vueltas considerando el número de dientes de los engranes.
- Que identificaran la relación $a \times b = mcm(a,b) \times mcd(a,b)$.

Respuestas no esperadas

- Que los maestros, al igual que los alumnos, encontraran en el primer problema respuestas distintas.
- Que a algunos de los maestros, para contar el número de vueltas, se les ocurriera sacar el promedio de 7 y 9, y concluir que el número de vueltas de uno de los engranes era 8.
- Que algunos de los maestros encontraran que el número de vueltas tenía que ver con la simplificación de la fracción que se forma con los números asociados a los dientes de los engranes. Por ejemplo, en el caso de 6 y 9, obtenían $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, e identificaran que el engrane de 6 dientes daba 3 vueltas, mientras que el de 9, solamente 2 vueltas, y para verificar que su respuesta era correcta pedían engranes con otros números de dientes. Se les planteó el de 12 y 15, y comprobaron que el procedimiento sí les permitía obtener el número de vueltas que cada uno de los engranes realizaba hasta llegar a la posición inicial; escribían:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Lo importante en este proceso es que los maestros no sabían por qué la fracción irreducible les daba el resultado correcto, al menos en los casos que podían experimentar directamente con los engranes.

Para el caso en que los engranes eran de 6 y 9 dientes, respectivamente, los maestros tuvieron la necesidad de contar el número de vueltas apoyándose en la animación. Se esperaba que con el primer problema resuelto, ya no basaran su solución en el conteo directo de los engranes.

Dificultades

Cuando los maestros plantean que el número de vueltas tiene que ver con el promedio de 7 y 9, es difícil entender, como docente, el porqué de esa propuesta, y el argumento para descartarla se basó en el conteo de las vueltas de los engranes, quedando la duda de por qué les parece factible esa solución.

En el problema inicial, al relacionar los maestros los dientes de los engranes concluyen que cuando el engrane de 9 dientes da una vuelta el de 7 se pasa por 2 dientes; en la segunda vuelta del engrane de 7 dientes, el de 9 se pasa por 4, y así sucesivamente. Esta propuesta ya no fue analizada y no se le dio seguimiento.

Lo que aprendieron los alumnos

- El *mínimo común múltiplo* de los números de dientes de los dos engranes está directamente relacionado con una forma de resolver el problema.
- Que el producto de dos números enteros positivos es igual al producto del *mínimo común múltiplo* y el *máximo común divisor* de dichos números.
- Que la ecuación $a(y)-b(x)=0$ con soluciones enteras, es una manera de representar matemáticamente los distintos problemas relacionados con los engranes.
- Que la solución a los problemas de los engranes se relaciona con conceptos y propiedades de la matemática formal.

Recomendaciones para la enseñanza

El trabajo desarrollado con los alumnos y los maestros, las distintas respuestas que se formularon a los problemas que se les plantearon y las dificultades del maestro para dirigir la clase conforme a las propuestas de los alumnos son aspectos importantes que merecen una reflexión. En ese sentido sugerimos las siguientes recomendaciones.

- En muchos casos es conveniente plantear a los alumnos problemas factibles relacionados con la actividad humana que les permitan vincular la solución con definiciones y conceptos de la matemática formal.
- En muchos problemas, se debe pedir a los alumnos que inventen su simbología o que usen expresiones libres que les permitan manifestar sus ideas más claramente. Y si no conocen la simbología, dejar que construyan la que mejor exprese sus ideas.
- Es importante que aunque los alumnos utilicen sus expresiones libres o inventen su simbología, se trabaje con ellos hasta encontrar la relación con el lenguaje y la simbología convencional, y en todos los casos encontrar la relación de los conocimientos nuevos con los contenidos ya establecidos.
- Desarrollar la clase con base en las propuestas de los alumnos. En algunos casos las ideas de los alumnos no son claras, lo que implica que el maestro debe utilizar alguna estrategia para aclarar, ya sea con una pregunta o modificando el problema.
- Implementar, siempre que sea posible, que los resultados que se planteen al resolver un problema se relacionen con la matemática formal

Ampliación del tema

En esta sección abundaremos en el tratamiento de algunos resultados básicos relacionados con las propiedades del *mínimo común múltiplo*, planteándolos de manera más rigurosa.

Conjetura

Para cualquier par de engranes con a y b número de dientes, el número de vueltas que da cada uno hasta llegar a la posición inicial es, para el engrane con a,

$$\frac{mcm(a, b)}{a},$$

donde $mcm(a,b)$ es el *mínimo común múltiplo* de a y b, y las vueltas del engrane de b número de dientes es

$$\frac{mcm(a, b)}{b}.$$

Una de las propiedades que se desprendió de los elementos que se construyeron para obtener la solución al problema es la siguiente.

El producto de dos números enteros positivos es igual al producto del *máximo común divisor* y el *mínimo común múltiplo*:

$$a \times b = mcm(a,b) \times mcd(a,b).$$

Para justificar esta igualdad, procedemos de la siguente manera.

Denotamos al ***mínimo común múltiplo*** de a y b como $[a,b]$.

Sea $m = [a,b]$. Entonces, como $a \times b$ es múltiplo común, m divide a $a \times b$.

Sea d tal que $m \times d = a \times b$.

1) Justifiquemos primero que d es un divisor común de a y b.

Ya que m es múltiplo común, tenemos que

$$m = a \times r = b \times s,$$

de donde

$$m \times d = a \times r \times d = b \times s \times d = a \times b.$$

Por lo tanto, como $a \neq 0$ y $b \neq 0$, obtenemos que

$$r \times d = b \text{ y } s \times d = a,$$

lo cual prueba (1).

2) Veremos ahora que d es divisible entre cualquier divisor común de a y b.
Sea d' tal que divide a a y a b.
Entonces,

$$a = d' \times a' \text{ y } b = d' \times b'.$$

Tenemos que el entero m', definido como sigue,

$$m' = a' \times b' \times d' = a \times b' = b \times a',$$

es un múltiplo común de a y b.

Por lo tanto $m' = m \times t$. Luego,

$$m \times t \times d' = m' \times d' = a' \times d' \times b' \times d' = m \times d,$$

y como $m \neq 0$, $t \times d' = d$; es decir, d' divide a d.

Las condiciones (1) y (2) implican que d = *máximo común divisor* de a y b.

Por lo tanto,

$$a \times b = mcm(a, b) \times mcd(a, b).$$

En la demostración anterior se usa el siguiente resultado.

Si a, b y $d > 0$ son enteros, entonces,

i) d = *máximo común divisor* de a y b

si y sólo si

ii) d divide a a, d divide a b. Si c es otro número que divide a a y divide a b, entonces

$$c \text{ divide a } d.$$

Sea d' = *máximo común divisor* de a y b, y d un entero que satisface la condición (ii).

Como d es divisor común y *máximo común divisor* de a y b, tenemos que $d \leq d'$. Además, como d' divide a a y d' divide a b, por (ii) d' divide a d, y como $d > 0$, $d' \leq d$; las dos desigualdades muestran que $d = d'$.

En el problema inicial, cuando tomamos los engranes de 7 y 9 dientes, respectivamente, como el *máximo común divisor* es 1, el producto $7 \times 9 = 63$ es el *mínimo común múltiplo*.

En general, si el *máximo común divisor* de a y b es 1 entonces el *mínimo común múltiplo* de a y b es el producto de a y b.

En la igualdad $a \times b = mcm(a,b) \times mcd(a,b)$, si $mcd(a,b) = 1$ entonces $a \times b = mcm(a,b)$.

También en el problema de los engranes se encontró que después de que los engranes quedan en la posición inicial, si se continua con el giro se vuelven a encontrar en todos los múltiplos comunes de los números asociados a los dientes de cada uno.

Este hecho lo podemos relacionar con el siguiente resultado.

Asumamos que a y b representan números enteros distintos de cero. El *mínimo común múltiplo*, $m = [a,b]$, divide a cualquier múltiplo común de a y b.

Para justificar el resultado anterior procedemos de la siguiente manera.

Sea m' un múltiplo común de a y b.

Por el algoritmo de la división, tenemos que,

$$m' = mq + r,\ 0 \leq r < m.$$

Como a divide a m' y a divide a m, a divide a r.

Análogamente, b divide a r.

Por lo tanto, r es un múltiplo común no negativo de a y b, y si r fuera distinto de cero, se tendría que $m \leq r$, lo cual es falso.

Por lo tanto $r = 0$.

Es decir, m divide a cualquier múltiplo común.

Definición 1

Se dice que dos enteros a y b son primos entre sí (o primos relativos) si su *máximo común divisor* es 1.

La forma general que se adoptó para representar matemáticamente el problema de los engranes fue la ecuación homogénea

$$a(y) - b(x) = 0,$$

con soluciones enteras.

La proposición siguiente nos permite determinar todas las soluciones enteras.

Las soluciones enteras de la ecuación

$$ay + bx = 0, \text{ con } a \text{ y } b \text{ primos relativos y } a,\ b \neq 0$$

son $x = -a \times t$ y $y = b \times t$, con t entero arbitrario.

Justificación

Evidentemente $x = a \times t$ y $y = -b \times t$ es solución, sea cual fuere el entero t.

Queda solamente probar que toda solución es de esta forma.

En efecto, si (x, y) es una solución de la ecuación $ay + bx = 0$, tenemos que

$$a \times y = -b \times x,$$

de donde,

$$a \text{ divide a } b \times x.$$

Como el *mcd* $(a, b) = 1$, a divide a x; por lo que $x = a \times t$ para determinado entero t.

Por consiguiente $a \times y = -b \times a \times t$, de donde $y = -b \times t$.

En la demostración anterior estamos utilizando el resultado siguiente.

Si a divide a $b \times c$ y *mcd* $(a, b) = 1$ entonces a divide a c.

Observación

Si a divide a $b \times c$ y *mcd* $(a, b) \neq 1$, no necesariamente a divide a alguno de los factores; por ejemplo, 6 divide a 8×9 y sin embargo 6 no divide a 8 y 6 no divide a 9.

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D., A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros. *La matemática: su contenido, método y significado.* Madrid, España, Alianza Universidad, 1980.

Bortolussi, Jesús, Elisa Bonilla, Rocío Nava, Teresa Rojano y Ricardo Quintero. *Libro para el Maestro.* México, SEP, 1995.

Cárdenas, Humberto, Emilio Lluis, Francisco Raggi y Francisco Tomás. *Álgebra Superior.* México, Editorial Trillas, 1974.

Courant, Richard y Herbert Robbins. *¿Qué es la matemática?* España, Aguilar, 1955.

Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Editorial Trillas, 1965.

Sierra Modesto, M. Teresa González, Andrés García, Mario González. *Divisibilidad 7.* España, Editorial Síntesis, 1989.

Trafton Paul, Albert Schulte. *New Directions for Elementary School Mathematics.* EUA, National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

El módulo 3: *Mínimo común múltiplo*
de la serie: Enseñanza de las matemáticas, sección: Aritmética
del Programa Interamericano de Capacitación de Maestros
del proyecto: Tecnología y Educación a Distancia
en América Latina y el Caribe,
cuya edición estuvo a cargo de Fomento Editorial
de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria
de la Universidad Pedagógica Nacional,
se terminó de imprimir en marzo de 2006 en los talleres
Compuformas PAF S.A. de C.V. Av. Coyoacan 1031. CP. 03100, Col. del Valle.