Horizontes Educativos

Representaciones semióticas y didáctica de las matemáticas

Repercusiones para el aula

Horizontes Educativos

Representaciones semióticas y didáctica de las matemáticas

Repercusiones para el aula

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
y Armando Solares Rojas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Representaciones semióticas y didáctica de las matemáticas. *Repercusiones para el aula*
Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres y *Armando Solares Rojas*

Primera edición, agosto de 2018

Esta edición es propiedad de la Universidad Pedagógica Nacional, Carretera al Ajusco núm. 24, col. Héroes de Padierna, Tlalpan, CP 14200, Ciudad de México
www.upn.mx

Esta obra fue dictaminada por pares académicos.
ISBN 978-607-413-287-8

QA11.2
S2.7 Sandoval Cáceres, Ivonne Twiggy
Representaciones semióticas y didáctica de las matemáticas: repercusiones para el aula/ Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres, Armando Solares Rojas.
México: UPN, 2018
144p.—(Horizontes educativos)

ISBN 978-607-413-287-8
1. Matemáticas- Estudio y enseñanza
2. Semiótica 3. Signos y símbolos I. Solares Rojas, Armando II. T III. Ser.

Impreso y hecho en México.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las representaciones semióticas son un tema de debate dada su relevancia para la comprensión de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En este libro mostramos resultados de recientes investigaciones que tienen como finalidad reflexionar y replantear la actividad matemática en el salón de clases, entre éstas se encuentran nuestras investigaciones de doctorado (Sandoval, 2005; Solares, 2007). El propósito principal de esta obra consiste en que los resultados que se muestran tengan impacto, de manera gradual y con las debidas contextualizaciones, en las formas de cómo se enseña y aprende matemáticas en las aulas, sacando provecho del papel de las representaciones semióticas en la actividad matemática escolar.

Consideramos a las representaciones como portadoras de conocimientos matemáticos movilizados en las actividades, en las cuales son pertinentes. Las representaciones semióticas no son meros "ostensivos" que evocan prácticas, sino que determinan las formas de uso y validación de los objetos matemáticos en contextos específicos. A su vez, los diversos tipos de problemas y contextos dan sentido a las representaciones pertinentes de los objetos matemáticos involucrados. Por lo tanto, sostenemos que las representaciones, los objetos matemáticos y sus formas de uso están intrínsecamente relacionados.

Este libro propone una manera de sintetizar tales relaciones en propuestas didácticas específicas para el salón de clases, basadas en investigación. Es decir, nos interesa delinear puentes y diálogos entre los resultados de las investigaciones en representaciones semióticas y aprendizaje de las matemáticas con la realidad específica de nuestros salones de clases.

El libro está dividido en cinco capítulos. En el primero "Representaciones semióticas en didáctica de las matemáticas" presentamos nuestra perspectiva sobre el papel que juegan las representaciones semióticas en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Y lo abordamos desde dos áreas: geometría (Sandoval, 2005) y álgebra (Solares, 2007), pues consideramos que el contraste de las relaciones entre representación y aprendizaje en estas dos áreas proporciona elementos para resaltar, mediante distintos énfasis, las profundas relaciones entre representación semiótica, y construcción y uso de los objetos matemáticos. Aunque incluimos ejemplos y propuestas de contenidos matemáticos que se estudian en educación básica y media superior, gran parte de los ejemplos se ubican en el nivel de secundaria y en el tránsito al medio superior, debido a que en éstos los usos de las representaciones semióticas son muy diversos y la investigación ha producido gran variedad de propuestas didácticas, con y sin uso de tecnologías digitales.

El capítulo II exhibe resultados de una investigación (Sandoval, 2005) que aborda las implicaciones de las representaciones semióticas en el aprendizaje de la geometría, mediante el uso de un *software* dinámico que permite manipular representaciones de objetos geométricos de manera distinta y complementaria a las que se hacen con lápiz y papel. También se discute esta relación entre las representaciones y las diversas herramientas tecnológicas utilizadas.

De manera similar al capítulo anterior, el III muestra resultados de una investigación en el aprendizaje del álgebra (Solares, 2007). Mediante un análisis de los pormenores de la relación entre la representación algebraica de cantidades desconocidas de un problema, se estudian las distintas maneras de transformar estas representaciones y los significados (tanto aritméticos como algebraicos) que se requieren construir para transitar de la aritmética al álgebra y progresar en el tratamiento algebraico de las cantidades desconocidas.

En el capítulo IV se abordan las principales implicaciones derivadas de los estudios discutidos en los capítulos anteriores y de acuerdo también con nuestras experiencias en investigación y docencia. Nos interesa resaltar las implicaciones en el diseño curricular (programas de estudios, elaboración de libros de texto) y en la integración de tecnologías digitales a la actividad matemática del aula. Por lo que proponemos, a manera de esbozo, varios ejemplos. Cabe señalar que nuestra intención no es presentar una propuesta de enseñanza de un tema en particular, sino ejemplificar cómo usar las representaciones semióticas en la enseñanza de las matemáticas.

Este libro está dirigido a investigadores y formadores de profesores, desarrolladores de currículum, y también a profesores y estudiantes de posgrado que buscan profundizar, reflexionar y establecer nuevas formas de trabajo en los salones de clases, que recuperen prácticas exitosas ya existentes, y también incorporen las herramientas y los resultados que la investigación básica puede ofrecerles.

Esperamos que estas ideas sirvan para enriquecer las prácticas matemáticas de estudiantes, profesores y demás involucrados en los procesos educativos en nuestro país.

CAPÍTULO I
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Desde las primeras hachas de piedra hasta el alfabeto, las herramientas se han constituido en generadores de desarrollo acelerado en la evolución de la especie humana. En este nuevo entorno, la creación y uso de herramientas tuvo un papel preponderante, como respuesta a los retos planteados por los acontecimientos sucedidos a su alrededor (Moreno, 2002a). Cuando se pasó de la herramienta material a la idea que la había generado, inicia el curso de las herramientas materiales a las simbólicas. El problema al que se enfrentó después la especie humana era cómo conservar la idea, reproducirla y mejorarla.

La capacidad de simbolización y abstracción ilustra cómo la mediación instrumental va cambiando las relaciones de la especie con su entorno. El signo que se convierte en un instrumento de mediación permite explicar la realidad material (Moreno, 2001, 2002b).

El proceso evolutivo ha tenido un desarrollo artificial que venció, en gran medida, la presión de la selección natural. Dicha evolución refleja el cambio de entornos (del físico al sociocultural) y la transición de las tecnologías materiales a las simbólicas. La tecnología simbólica también ha evolucionado, así como las formas de representación de las ideas. De ahí surgen, de manera natural, los siguientes cuestionamientos: ¿la dificultad para aprender una idea depende de la tecnología de la representación utilizada?, ¿existe una relación entre la complejidad conceptual y la tecnología de la representación?

La humanidad dio un salto enorme cuando empezó a usar los sonidos, gestos y símbolos para referirse a los objetos, cosas y conceptos, con ello amplió la referencia simbólica. En otras palabras, estas referencias no son la "cosa" misma, sino que están en lugar de ella, la representan. Tales posibilidades de representación muestran la facultad de la memoria e ilustran cómo la mediación de las herramientas transforma las relaciones del hombre con su entorno. El poder de la cognición se origina de su capacidad de abstraer y representar. Si la representación es adecuada, entonces pueden emerger nuevas experiencias y reflexiones. En este sentido, lo importante es que se puede razonar tomando como punto de partida las marcas o símbolos. Entonces, la producción de representaciones es crucial para que los seres humanos asimilen lo que les es externo y puedan comunicar los resultados de esas asimilaciones a otros.

La noción de representación es algo complejo y ha generado múltiples estudios (Rico, 2000). Una acepción al respecto es la del National Council of Teachers of Mathematics ([NCTM], 2000, p. 71), la cual considera que:

> la representación es tanto el proceso como el producto (resultado), es decir, el acto de captar un concepto matemático o una relación de una forma determinada y a la forma en sí misma. […] Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas, para que los alumnos comuniquen sus enfoques, sus argumentos y conocimientos, para reconocer las conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelización. Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación.

En otras palabras, la representación no es una mera imagen para reflexionar, sino que toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones. Ejemplos de representaciones en matemáticas son las expresiones simbólicas, dibujos, enunciados, gráficos y otras notaciones usuales, propias de las matemáticas, en las que cada una tiene un contenido cuyo significado se puede establecer y evaluar. Estos contenidos son objeto de estudio en matemáticas (Rico, 2000). La representación es un acto creador que consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para visualizarlo de modo distinto. Es la aplicación de cada concepto lo que establece su campo semántico y posibilita una manera distinta de entenderlo, necesita un sistema de simbolización propio, así como un modelo de representación que lo diferencie de los demás (Rico, 2000).

Las representaciones permiten trabajar con objetos, eventos virtuales y conceptos, no obstante para poder comunicarlo es necesario utilizar representaciones semióticas (Moreno y Sacristán, 1996).

Algunos autores emplean otras acepciones denominadas mundo representado y representante. Es el caso de Bosch (2000) y Chevallard (1999),[1] quienes clasifican los objetos que componen las organizaciones matemáticas como *objetos ostensivos* y *objetos no ostensivos*. Los primeros se refieren a aquellos que se perciben mediante escrituras, grafismos, sonidos, gestos, entre otros. Los objetos no ostensivos (o conceptos matemáticos) son aquellos que existen porque se les atribuye una determinada existencia, pero no se pueden percibir, por ejemplo las ideas, conceptos y creencias, entre otros. Para el caso del concepto de función lineal no existe sin que haya toda una actividad de ostensivos. En particular, para que la escritura de $f(x)$ se asocie a una función (al no ostensivo "función") es necesario que el ostensivo $f(x)$ y su correspondiente representación oral "efe de equis" formen parte de las organizaciones matemáticas institucionalizadas (Bosch, 2000, pp. 5-6).

[1] Esta acepción se fundamenta en la teoría antropológica (Chevallard, 1999; Bosch, 2000).

En una situación de aprendizaje, las representaciones forman parte de los elementos que se van estructurando durante la interacción entre el sujeto y el concepto que se está formando. Dado que las representaciones cumplen una función esencial en la construcción de conceptos, esto es que las personas les asignan significados para la comprensión de las estructuras matemáticas, entonces son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático, de ahí el interés que tienen para la investigación en educación matemática (Hitt, 1998; Sandoval y Possani, 2016).

En el mundo material, los objetos son percibidos directamente por los sentidos, pero ¿qué sucede en matemáticas? A los "objetos" matemáticos sólo se puede acceder a través de alguna de sus representaciones, pues no hay acceso directo mediante la percepción o desde una experiencia directa. En realidad, las representaciones semióticas permiten depurar un campo nocional, una fenomenología y elaborar un concepto, nombrado *objeto matemático*. La importancia de los sistemas de representación radica en las acciones que se pueden hacer con ellos, lo cual significa realizar operaciones, descubrir propiedades, manipular ecuaciones para obtener la solución a un problema, etc. Esto es, la representación funciona como una herramienta mediadora de la acción que permite y facilita la exploración de las ideas representadas (Santillán, 2002).

Las tecnologías digitales han modificado lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales, amplían el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar (NCTM, 2000). Aprender a usar estas herramientas les permite considerar los casos en los que las representaciones y técnicas usadas en la tecnología digital difieren de las convencionales. Por ejemplo, el uso de diferente notación para exponentes: 2^4 se escribe en la tecnología de papel y lápiz, pero en la tecnología electrónica se debe escribir 2^4.[2] (Para mayores detalles, véase Sandoval, 2005.)

[2] En algunos casos, las notaciones que se usan en las tecnologías electrónicas pueden generar conflictos en los estudiantes, como lo señala Drijvers (2002). Este autor ha

Sistemas de representación y las dificultades para el aprendizaje de la geometría

En la enseñanza de la geometría (Sandoval, 2005 y 2009; Sandoval y Possani, 2016), las representaciones permiten acercar a la intuición nociones abstractas, que apoyan las explicaciones y facilitan la comprensión. Pero estas representaciones también pueden ser obstáculos para los alumnos al acceder a la generalización de propiedades. Así, las representaciones geométricas tienen una naturaleza dual que las hace, por una parte, un medio de tratamiento y expresión de los objetos geométricos y, por la otra, un obstáculo para acceder a la generalización de propiedades. Esta dualidad constituye uno de los problemas fundamentales en el aprendizaje de la geometría (Bishop, 1992; Mesquita, 1998).

Según Duval (1998), en geometría se conocen diferentes tipos de aprehensión: perceptual (lo que se observa de manera espontánea), operatoria (transformación de las figuras en otras), discursiva (asociación que se realiza entre lo que se visualiza y la declaración [enunciado] que determina el objeto representado) y secuencial (reproducción de una representación dada, que se necesita en las tareas de construcción o de descripción), que deben ser desarrolladas y diferenciadas en la enseñanza. Al respecto, Duval sugiere el desarrollo de actividades donde se requiera la aprehensión operatoria y discursiva. La aprehensión operatoria necesita entrenamiento, pues sin ella las representaciones geométricas no podrán cumplir su función de soporte cognitivo, y la discursiva es necesaria para comprender los enunciados de los problemas.

Lo que se espera de los alumnos es que "salgan" de la aprehensión perceptiva y de las medidas físicas para "entrar" a los mundos donde la aprehensión de las representaciones toma en cuenta úni-

realizado estudios relacionados con los obstáculos que pueden generar los cambios en notación al pasar de papel y lápiz a la tecnología electrónica, específicamente al usar calculadoras simbólicas *Computer Algebra Systems* (CAS, por sus siglas en inglés).

camente las características de la situación y no de la figura dada, esto es, las aprehensiones operatoria y discursiva (Dupuis, 1997). Una de las dificultades en el aprendizaje de la geometría está ligada, precisamente, con la aprehensión de la representación geométrica en el momento en que se resuelven problemas (Sandoval, 2005).

Cuando se trata de acceder a los objetos geométricos sus representaciones desempeñan un papel más decisivo que los enunciados de propiedades correspondientes. En toda actividad geométrica es indiscutible el papel que han tenido y siguen teniendo las figuras como apoyo a la intuición, ya que son fundamentales en la comprensión de enunciados, en los procesos de exploración y conjetura, en la resolución de problemas y en la búsqueda de demostraciones, pues dejan "ver" lo que oculta el enunciado (Gal y Linchevski, 2010).

Con frecuencia, los alumnos tienen dificultades para decodificar una representación geométrica, para descubrir las relaciones estructurales y, más aún, para describirlas coherentemente y utilizarlas en la resolución de un problema. En ocasiones, la representación puede generar obstáculos que impidan llegar a una solución. Esto se debe a que la representación no puede ser concebida, al mismo tiempo, como objeto perceptivo y estructural.

Una forma, seguramente, más efectiva de enseñar y aprender geometría consiste en presentar a los estudiantes los conceptos, relaciones entre objetos, propiedades, etc., materializados mediante artefactos que modelen el objeto geométrico, al tiempo que proporcionen una representación que invita y facilita la exploración de las características y propiedades de dicho objeto geométrico. Como lo señala Laborde (2005), la Geometría Dinámica (GD) "exterioriza la dualidad invariante/variable en forma tangible por medio del movimiento en el espacio del plano" (p. 22). Este tipo de artefacto tiene internamente su programación determinada por un sistema axiomático basado en la geometría euclidiana, este es el caso de Cabri y de Geogebra, entre otros.

Dificultades vinculadas a la interpretación de representaciones geométricas

En este apartado presentaremos algunas investigaciones que consideramos aún vigentes porque señalan dificultades ocasionadas por el uso e interpretación de representaciones geométricas. En cada estudio destacan aquellas conclusiones relevantes vinculadas con los procesos de visualización, construcción o razonamiento geométrico.

Mesquita y Padilla (1990) consideran al *punto de anclaje* como un elemento que puede constituir un obstáculo para algunos alumnos. El punto de anclaje es la subfigura –es una parte en la que se divide una figura; por ejemplo, la diagonal divide a un cuadrado en dos subfiguras, dos triángulos– favorecida por el tratamiento, es decir, por la operatividad que es incitada por la subfigura. Puede basarse en la representación geométrica en su conjunto, o bien en una u otra de las partes elementales. Entonces, si las formas de aprehensión se asocian de forma adecuada con el punto de anclaje, el problema puede solucionarse exitosamente, de lo contrario, la asociación puede constituir un obstáculo para algunos alumnos. A partir de observaciones a dos niños de ocho años y medio, Mesquita y Padilla (1990) concluyen que:

- los diferentes tipos de aprehensión son importantes en la resolución de problemas y, en particular, las dificultades se generan por el enfoque excesivo en la aprehensión perceptiva;
- la aprehensión condiciona las formas de razonamiento;
- el cambio de aprehensión es esencial, por lo que se requiere una educación de las formas de aprehensión y los puntos de anclaje sobre la representación geométrica (p. 34).

Los alumnos pueden presentar obstáculos potenciales para aprender geometría en tres áreas conceptuales como son: el espacio, la matematización del espacio y la geometría y la visualización (Bishop, 1992). El autor considera que los obstáculos para aprender geometría están relacionados con la confusión entre la *forma* como se representan las ideas espaciales y lo que está siendo representado, es decir, el *contenido*. Para los alumnos, la forma en la geometría es su contenido. En particular, Bishop afirma que:

> Nunca se puede dibujar 'el triángulo general' de la manera como se puede representar 'un número general' por 'x', digamos. Una vez que se ha dibujado el triángulo general, se puede convertir, en la mente del niño, en un triángulo específico (p. 32).

La raíz del problema tiene varios componentes: una noción restringida de lo que es importante, un enfoque demasiado estrecho de la representación, y una confusión de la forma y el contenido. Otro aspecto notable investigado por Bishop es que las visualizaciones son útiles, pero pueden generar algunos obstáculos, lo que se hace factible cuando el alumno ve una representación geométrica de una sola forma. Por tanto, el conflicto se deriva de una enseñanza basada en las posiciones prototípicas de algunos objetos geométricos (triángulos cuya base siempre es paralela al piso, por ejemplo). Así, la visualización y el uso dado a las representaciones geométricas es un asunto que depende de cada individuo. No obstante, en ocasiones el maestro inconscientemente puede causar esas dificultades a sus alumnos.

En cuanto a las formas de validación del conocimiento geométrico, Chazan (1993) realizó un estudio con alumnos para analizar la comprensión de las similitudes y diferencias entre la medición de ejemplos y la prueba deductiva. En la literatura revisada, el autor estableció dos conjuntos de creencias de los estudiantes, relacionados con la argumentación en matemáticas. La primera, *evidencia es prueba*: "Algunos alumnos sostienen que la medición, como la escritura de una prueba deductiva, puede permitirle a uno alcanzar conclusiones que son ciertas, que son aplicables a los conjuntos que tienen un número infinito de miembros" (p. 19). La segunda creencia, *la prueba deductiva es simplemente evidencia*, refiere que "algunos alumnos ven las pruebas deductivas en geometría como pruebas para un solo caso, el caso que se representa en el diagrama asociado" (p. 20).

Por su parte, Pluvinage (1998) analiza las diferentes variables de razonamiento matemático y su concordancia con la manera de "ver" la representación geométrica. Mediante un ejemplo de este autor, también usado por Sandoval (2001 y 2005), ilustra que el aprendizaje perceptivo, basado en el buen reconocimiento de formas, no siempre es exitoso. En particular, cuando la representación no está "bien hecha".

Refiriéndose a los resultados obtenidos por Pluvinage (1998), Hitt (1998) afirma que las imágenes visuales se utilizan para ejemplificar o contextualizar algún enunciado matemático, pero los profesores no enfatizan su uso en la resolución de problemas. Para Hitt, el fracaso de los alumnos participantes en el experimento se debió a que la percepción generó un tipo de razonamiento incorrecto. Por tanto, la representación geométrica también puede erosionar la comprensión. En consecuencia es necesario utilizar de manera coherente y simultánea, los diferentes registros de representación (figural y discursivo) o, de lo contrario, se puede promover un obstáculo cognitivo.

En esta misma dirección, Mesquita (1998) afirma que la representación geométrica, aunque no permite resolver el problema directamente, contribuye a definir su estructura y facilitar los tratamientos que se desarrollarán, aunque en casos determinados se requiera una forma específica de percepción. En una representación geométrica no se puede diferenciar entre la información planteada desde el inicio y la conclusión. Por lo tanto, es necesario coordinar el registro figurativo con el discursivo. Dicha representación puede ser un apoyo visual a la intuición, pero en algunas situaciones este apoyo provoca que los alumnos consideren a las relaciones geométricas como "evidentes", lo que genera desviaciones en el razonamiento geométrico. Uno de los principales problemas en el aprendizaje de la geometría, según la autora, está fuertemente conectado con la representación geométrica. Este tipo de representación si bien hace viable el aprendizaje de las relaciones entre los objetos geométricos también puede introducir algunos sesgos en el razonamiento, los cuales ocurren porque las relaciones pueden parecer "tan evidentes" que el estudiante considera innecesario el razonamiento geométrico.

Las dificultades que ocasionan las representaciones geométricas, de acuerdo con Mesquita, se deben a:

1. El *doble estatuto* de la representación geométrica. Una misma representación puede indicar tanto un objeto geométrico como el dibujo correspondiente. Aunque el interés sea un objeto geométrico siempre se representa mediante un dibujo y los alumnos tienden a identificar en él tanto las relaciones geométricas estructurales como las que le son propias.
2. Las representaciones prototípicas.
3. La función de la representación en un problema geométrico.
4. La naturaleza de la representación. Este criterio se refiere a los tipos de transformaciones permitidos por la representación misma.

Respecto al razonamiento de los estudiantes en cuanto a la solución de problemas, Sandoval (2001) concluye:

> El conocimiento que el estudiante moviliza depende, en cierto grado, de la coordinación de los registros discursivos y figurales. Es razonable, en consecuencia, afirmar que las dificultades que el estudiante experimenta, cuando intenta resolver un problema, están relacionadas con la falta de articulación entre los registros (p. 100).
>
> La representación geométrica es fundamental en la argumentación de los estudiantes. La aprehensión figural es la que moviliza cierto tipo de conocimiento. Se observa en la forma de argumentar de los estudiantes…
>
> La mayoría de los alumnos establecen relaciones perceptivas y, como resultado, llegan a razonamientos incorrectos (p. 102).

Maracci (2001) ha analizado el papel del dibujo en la formulación de una conjetura para solucionar problemas de construcción. Éste se centró en el momento específico de la conjetura en los problemas de construcción y, a partir de ello, concluye que: "Con ayuda de los dibujos, los estudiantes obtuvieron la conjetura correcta y la formularon de manera precisa… La conjetura se obtiene con referencia explícita a uno o más dibujos específicos" (p. 337).

Representaciones en ambientes digitales: ¿una vía complementaria a los de lápiz y papel?

Existe literatura considerable del tema de resolución de problemas geométricos en contextos dinámicos.[3] Los didactas y los sistemas educativos han encontrado que los ambientes de exploración, mediados por la Geometría Dinámica (GD), ofrecen oportunidades de desarrollo matemático que estaban ausentes en los medios más tradicionales, papel y lápiz. Sin duda, una de estas oportunidades tiene que ver con el problema crucial de las relaciones entre dibujo y objeto geométrico, que abordaremos en el siguiente capítulo.

En geometría, la noción de construcción tiene una trascendencia teórica fundamental. Las herramientas y sus reglas de uso corresponden a los axiomas y teoremas de un sistema teórico. Mariotti *et al.* (1997) plantean que la relación entre las construcciones y los teoremas es de difícil comprensión por parte de los estudiantes, por ello introducen un análisis histórico-epistemológico de los teoremas geométricos como *unidades de enunciados, demostración y teoría*, donde la forma condicional del enunciado desempeña un papel importante. Desde esta perspectiva, analizan la función de la exploración dinámica para acercarse al estudio de los teoremas. Los

[3] En este caso, referimos como contextos dinámicos las propuestas de *software* que permiten manipular los objetos matemáticos que allí se construyen. Por ejemplo, en el caso de la geometría dinámica destacan programas como Cabri, Geogebra y Sketchpad.

resultados que encuentran muestran que el significado de *construcción* tiene una evolución lenta en los estudiantes.

> El hecho de darse una argumentación pobre durante la producción de un enunciado, y que corresponde siempre a la carencia de argumentos durante la construcción de la demostración, parece confirmar la conexión cercana que existe entre la producción de la conjetura y la construcción de la demostración (Mariotti *et al.,* 1997, p. 189).

En sentido análogo al anterior, Gardiner y Hudson (1998) se proponen analizar cómo el uso de la GD puede contribuir al desarrollo de la comprensión de las ideas de construcción y demostración en los estudiantes. El estudio enfatiza la idea de la mediación instrumental, la interacción entre los conceptos espontáneos y los científicos, así como la noción de desarrollo. En sus observaciones concluyen que los ambientes de GD:

> promueven el desarrollo de las nociones de dibujar y construir[…] y permiten la interacción entre los conceptos espontáneos de los estudiantes y sus ideas en vías de desarrollo relacionadas con conceptos científicos que, para este caso, se asocian con las ideas de construcción y demostración (Gardiner y Hudson, 1998, p. 342).

Vinculado con el proceso de construcción, Arzarello, Micheletti, Olivero y Robutti (1998) presentan una actividad en la que usan ambientes digitales y no digitales. Los resultados ilustran la potencialidad de la herramienta del arrastre,[4] que permite la exploración y validación de una construcción para producir y corroborar conjeturas, que a la vez ayudan a su formulación de manera condicional, en las que los estudiantes construyen enunciados del tipo *Si…*

[4] El arrastre es una herramienta que mueve objetos geométricos construidos como puntos, segmentos, rectas, polígonos, entre otros, en la pantalla y permite reubicarlos, agrandar o achicar una figura, etcétera.

entonces… Esta clase de resultados muestra que la transición de la exploración a la conjetura y luego a la demostración en geometría, es un proceso sutil.

La búsqueda de actividades que fomenten una aproximación más accesible a las demostraciones ha sido centro de interés de diferentes investigadores. Furinghetti, Olivero y Paola (2001), por ejemplo, plantean que la solución de problemas abiertos permite una aproximación a la demostración, en tanto que fomentan la producción y validación de conjeturas. Además, señalan que el uso de la GD enfatiza los aspectos teóricos del dibujo y hace que los estudiantes sean conscientes de la teoría que hay detrás de éstos.

Para que se establezca una aproximación adecuada de los estudiantes a la demostración se considera que hay elementos esenciales, como el uso de herramientas de observación, problemas abiertos y trabajo colaborativo (Furinghetti *et al.*, 2001, p. 334).

Olivero y Robutti (2002) han analizado cómo la GD hace posible la construcción del significado matemático y cuál es el papel del profesor para ello. Algunas de sus conclusiones son:

> El conflicto entre un camino numérico-perceptivo de usar el *software* y uno más general y teórico puede ser resuelto gracias a la intervención del profesor[…] La tecnología funciona para los estudiantes cuando hay una evolución desde un uso perceptivo-numérico a uno teórico y general; esto es, si hay un cambio en términos de esquemas de uso. El papel del profesor es crucial en el desarrollo de un nuevo esquema de uso[…] Es importante que el profesor muestre "cómo ver que esto no es", es decir, ver que una demostración no depende de una representación gráfica particular que ha sido usada (pp. 14-15).

En esta misma línea para la construcción de conjeturas y demostraciones, Olivero (2003) señala:

> Los procesos de prueba desarrollados como un proceso de enfoque, en el cual Cabri trabaja como un ambiente en el que los alumnos pueden experimentar

> de manera dinámica y enfocar las propiedades y figuras a través de los procesos ascendentes y descendentes, desde el campo espacio-gráfico al teórico. Cabri también trabaja como un elemento del espacio de comunicación en el cual los estudiantes pueden tener al mismo tiempo sus contextos internos e interactuar a través de conjeturas y demostraciones (p. 241).

En los ambientes de GD, la organización secuencial de las acciones en la construcción de figuras introduce un orden que produce una jerarquía de dependencia entre los elementos de la construcción. Talmon y Yerushalmy (2004) realizaron una investigación sobre la conexión entre el comportamiento dinámico (¿qué sucede si arrastro cierto elemento?) y el orden secuencial de la construcción:

> Dentro de la geometría del lápiz y el papel (bosquejo estático), no es determinante el orden en que son dibujados los componentes de un objeto y la dependencia entre ellos pueden no tener sentido[…] El comportamiento dinámico como un representativo de dependencia dinámica es un fenómeno complejo, y asumimos que esta complejidad se amplifica por diferencias entre los programas. Los usuarios desarrollan diversos instrumentos para el arrastre y es posible identificar patrones comunes de instrumentación[…] El significado de una herramienta emergerá sólo cuando se use significativamente en actividades fáciles de construir, pero que muestren comportamientos dinámicos complejos[…] Las herramientas llegan a ser parte de la comunidad, sus hábitos, y sus canales de comunicación (pp. 109, 115-116).

Como se ha ilustrado en este apartado, hay dificultades debido a las características propias de las representaciones en geometría. También se ha mostrado algunos resultados en los que las herramientas digitales permitido generar espacios de exploración más significativos para los estudiantes en sus clases de geometría, pues la variación en las construcciones realizadas se usan como medios de verificación (Laborde, 2005). Por tanto, es importante establecer un puente que permita incluir los resultados de investigaciones en las actividades propias del salón de clase. Aspectos que son parte de nuestro objetivo como autores de este libro y que hemos incluido en capítulos posteriores.

Las representaciones y el aprendizaje del álgebra

A continuación se presentan las principales investigaciones que abordan los pormenores de la adquisición del sistema de representaciones del álgebra. Si bien estas investigaciones hacen énfasis en distintas maneras en que el lenguaje algebraico debe ser introducido en la escuela, todas ellas coinciden en la relación estrecha entre el tipo de representación algebraica que se usa y los significados a los que da lugar (Solares, 2007).

De acuerdo con Kaput (1987), el fracaso de los estudiantes en su desempeño en el álgebra escolar tradicional se debe a las dificultades producidas por el manejo de un sistema simbólico formal aislado de los "contextos estabilizadores". Esto es, desvinculado y sin retroalimentación sobre las acciones realizadas en el sistema de representaciones del álgebra.

Kaput señala que la investigación en didáctica del álgebra debe determinar los distintos *sistemas de representaciones* con los cuales comunicar y pensar el álgebra. Para ello, propone que la investigación se ocupe de:

- Proporcionar medios para describir los lenguajes que conforman el álgebra: gráficas, ecuaciones, lenguaje natural, diagramas, etc.
- Completar la descripción cognitiva de los fenómenos de aprendizaje y aplicación del álgebra con una orientación lingüística/representacional.
- Proporcionar medios de evaluación de las características de los nuevos y potenciales ambientes de aprendizaje y aplicación del álgebra.

Una vez identificados y descritos los distintos sistemas de representación del álgebra, su aprendizaje se puede estudiar como la construcción de los significados establecidos por transformaciones en y entre los distintos sistemas de representación involucrados: transformaciones dentro de un sistema particular; traducción entre distintos sistemas matemáticos de representación; y traducción entre representaciones matemáticas y representaciones no matemáticas. En consecuencia, a partir de cada representación particular se construyen significados del álgebra. De manera que los fenómenos a estudiarse en el aprendizaje del álgebra son los *actos de representación*.

Los Sistemas Matemáticos de Signos

Otra aproximación teórica al estudio de los significados que se construyen al considerar las representaciones del álgebra es la de los *Sistemas Matemáticos de Signos* (SMS) (Filloy, 1999). Esta aproximación coincide con la de Kaput en que los significados matemáticos otorgados al álgebra provienen de sus representaciones. Sin embargo, los SMS se interesan por estudiar la actuación de los sujetos que aprenden (Filloy, Rojano, Solares, 2002).

Para estudiar los distintos niveles desde los cuales se interpretan y producen mensajes en un proceso de enseñanza y aprendizaje, Filloy introduce la noción de SMS que comprende tanto el significado matemático formal, como el pragmático del conocimiento matemático (Filloy, 1999). Esta noción incorpora el estudio de los *sistemas de signos intermedios* producidos por el estudiante mientras va haciéndose más competente en el uso de algún conocimiento matemático. El estudio del desarrollo de los sistemas de signos intermedios da cuenta de los procesos de abstracción, mediante los cuales, por ejemplo, se abrevian las acciones realizadas en la resolución de ecuaciones (Filloy, Rojano y Solares, 2002).

LA GRAMÁTICA DEL LENGUAJE ALGEBRAICO

Arzarello (1991a; 1991b) caracterizó al pensamiento algebraico y los procesos y estrategias de los alumnos a partir del concepto de *polaridad doble* (procedimental *vs*. relacional). Para este autor la *polaridad doble* está constituida por un par de opuestos: de un lado se encuentra el sujeto, que resuelve un problema, para quien el código algebraico tiene carácter procedimental; y del otro, el código algebraico considerado de manera absoluta, ni procedimientos ni productos de acciones están involucrados, de hecho sólo el aspecto abstracto-relacional prevalece, pues su código privilegiado es el simbólico.

Por su parte, las aproximaciones de Kirshner (1987) y Drouhard (1992) proponen dos modelos gramaticales del lenguaje algebraico como resultado de un tratamiento *generativo-transformacional* (Chomsky, 1957). Dichos modelos describen las producciones y las lecturas de las expresiones algebraicas realizadas por un usuario (ideal) competente.

Una gramática del álgebra simbólica

La propuesta teórica de Kirshner (1987) consiste en una gramática elaborada a partir de la adaptación de los métodos de la *lingüística generativa transformacional* (Chomsky, 1957) al estudio del álgebra.

Esta gramática modela las expresiones y transformaciones algebraicas que produce y emplea un usuario competente, mediante las "formas profundas" y "transformaciones válidas" correspondientes. La *forma profunda* de una expresión modela su estructura algebraica; la *forma superficial* corresponde a su escritura en la notación algebraica usual. La gramática del álgebra simbólica propuesta por Kirshner está formada por:

- Un componente de expresiones algebraicas que genera las formas profundas de las expresiones.

- Un conjunto de reglas para traducir las formas profundas a sus correspondientes formas superficiales y viceversa.
- Un conjunto de transformaciones (válidas) de formas profundas en formas profundas.

Esta gramática permite generar las expresiones algebraicas básicas (polinomios), pero no las ecuaciones, pues no incluye al signo igual, y permite efectuar las transformaciones algebraicas correspondientes a las operaciones algebraicas básicas (suma, resta, multiplicación y división de polinomios), las factorizaciones, las simplificaciones, etcétera.

Las escrituras simbólicas del álgebra elemental

La empresa teórica de Drouhard (1992) consiste en clarificar qué son las expresiones algebraicas y cuáles son sus significados; a través de la modelación de la práctica de los expertos en cálculo algebraico formal elemental, el autor construyó un modelo de las expresiones algebraicas elementales basándose en dos hipótesis fundamentales:

- Las escrituras (expresiones) simbólicas del álgebra tienen una estructura.
- La *gramática generativa transformacional* de Chomsky (1957) es un formalismo adecuado para describir dicha estructura.

Este modelo genera los polinomios, las ecuaciones, las desigualdades y los sistemas de igualdades y de desigualdades. Aunque introduce criterios para clasificar las transformaciones aplicables a las escrituras generadas, transformaciones singulares y transformaciones generalizadas, no da una lista completa de ellas.

Respecto al significado de las expresiones algebraicas, Drouhard introdujo una noción de *significado* que comprende cuatro aspectos:

- *Denotación*: corresponde a la función algebraica definida por la expresión.
- *Sentido*: otorgado por el conjunto de las transformaciones aplicables a la expresión.
- *Interpretación*: corresponde a las distintas lecturas dadas a la expresión en los diversos contextos en los que puede aparecer (como la teoría de números, la geometría analítica, etcétera).
- *Comprensión*: es la parte de la significación sicológica (dependiente de cada individuo).

Las nociones de *Sinn* y *Bedeutung* (Frege, 1996) le permitieron a Drouhard reinterpretar las producciones sintácticas de los alumnos, consideradas por los conceptualistas como errores conceptuales (por ejemplo, el uso de la igualdad en el álgebra a diferencia de la aritmética). Según Drouhard, tener en cuenta la *denotación* es característico de los sujetos "autómatas formales", para quienes la validación de un resultado no se establece en términos del valor de verdad de la escritura obtenida (la *denotación*), sino en términos de las reglas y los procedimientos empleados (el *sentido*).

El modelo de Drouhard, al igual que el modelo gramatical de Kirshner, se restringe al análisis del lenguaje algebraico que emplea un usuario competente. Si bien, según Drouhard, "este modelo del experto debe permitir comprender mejor la práctica del algebrista competente (experto), y eventualmente (y con muchas precauciones para evitar extrapolaciones prematuras) la del aprendiz" (Drouhard, 1992, p. 24), falta explotar los productos del trabajo realizado en el estudio de los procesos de adquisición del lenguaje algebraico, pues los "códigos" que los aprendices usan en estos procesos no corresponden al nivel competente de lectura y producción de expresiones algebraicas. De hecho, los códigos son generados desde niveles en los cuales los sistemas de signos están en formación.

Las herramientas y su relación con la construcción del conocimiento matemático

Dentro de la teoría sociocultural, como ha señalado Sandoval (2005, 2009), Vygotsky plantea que el sujeto construye su propio conocimiento y está estrechamente ligado con el contexto social. Además, considera que el lenguaje juega un papel primordial en el desarrollo del pensamiento; por lo tanto, existe una relación entre la construcción del conocimiento y las herramientas. Para Vygotsky (1995) hay dos tipos de herramientas: las técnicas (artefactos) y las psicológicas (signos).

Las herramientas son mediadoras de la actividad humana en la construcción de conceptos. El autor introdujo la noción de mediación semiótica, al considerar que un sujeto aprende primero por el uso de herramientas técnicas, orientadas alrededor de una acción externa. Por ejemplo, el niño aprende a contar con un ábaco por manipulación directa de las esferas, pero puede producirse un proceso de internalización gracias a la ayuda de un profesor o de un adulto. Es así como la herramienta técnica (artefacto o herramienta) se convierte en psicológica (signo), en un medio interno de control para el sujeto. De este modo, el niño puede contar sin ábaco material, pero puede evocarlo para controlar el conteo (Laborde, 2004).

En suma, los signos son herramientas internalizadas y el proceso de producción de signos, cuando se transforma una herramienta técnica en una psicológica, se denomina internalización. La función de dichas herramientas es ayudar en el control del ambiente exterior para cambiarlo, mientras que los signos contribuyen a modificar las construcciones mentales del individuo.

Figura 1. Interpretación de herramientas y signos según Vygotsky (Sandoval, 2005)

En el proceso de internalización, las diferentes operaciones y acciones externas son reconstruidas y se interiorizan, dado que la reconstrucción se basa en la evolución de un proceso interpersonal a uno intrapersonal.

Estas ideas influyeron en Rabardel (1999, 2011), quien ha establecido una teoría respecto a los instrumentos en la educación. Según el autor, dichos instrumentos cumplen una función muy importante para el estudiante, porque su uso influye de manera profunda en la construcción del saber y los procesos de conceptualización. Por lo tanto, los instrumentos no son sólo auxiliares o neutros en la enseñanza, sino parte activa en la construcción del conocimiento.

> Los artefactos, herramientas y signos contribuyen a la formación de las funciones psíquicas y los conocimientos. Los instrumentos constituyen las formas que estructuran y mediatizan nuestros registros de las situaciones y los saberes, por ello ejercen una influencia considerable. La mediación instrumental es el concepto central para pensar y analizar las modalidades a través de las cuales los instrumentos influyen en la construcción del saber (Rabardel, 1999, p. 204).

Es importante especificar las nociones de artefacto[5] y de instrumento. Para Rabardel, el término artefacto designa a un dispositivo que puede ser material o un sistema simbólico, empleado como medio para la acción. Ejemplos de artefactos en un contexto material son: el ábaco, la escuadra, la calculadora, la computadora, el *software*, el compás, entre otros, y en un dominio simbólico son los siguientes: los mapas, las gráficas, las tablas de multiplicación, etcétera. El artefacto lo construye el sujeto u otros sujetos.

El instrumento es una entidad mixta que comprende, por una parte, el artefacto material o simbólico y, por otra, los esquemas de utilización, las representaciones que forman parte de las competencias del usuario y que son necesarias en la utilización del artefacto.

Los esquemas de utilización asociados son resultado de una construcción propia del sujeto, autónoma o producto de una apropiación de esquemas sociales de utilización. Estos son organizadores de la acción, del uso del artefacto y dependerán tanto del contexto como de la propia situación (Rabardel, 1999 y 2011). Así, disponer de herramientas con mucha potencia de cálculo permite explorar tareas matemáticas que de otra forma serían inaccesibles. Por lo tanto, el sujeto, dentro de la utilización y la apropiación del instrumento, debe tener en cuenta estas restricciones.

Por ejemplo, considere al artefacto compás y el uso común de éste, construir círculos. Para que el estudiante haga un círculo, efectuará las acciones necesarias: colocar la punta del compás en el centro del círculo a construir, aplicar la apertura del compás según la longitud del radio deseado, hacer girar la otra puntilla (lo que deja la huella) del compás, de manera que marque el círculo. Lo que requiere que el sujeto conozca la herramienta.

El artefacto relacionado con la acción es lo que Rabardel denomina instrumento. Si el compás se utiliza para trasladar una distancia, entonces es otro instrumento. Por lo tanto, un artefacto puede generar varios instrumentos.

[5] Es equivalente a la noción de herramienta de Vygotsky.

Como se señaló en Sandoval (2009), el impacto del instrumento sobre la conceptualización no se manifiesta de inmediato dados los sistemas técnicos complejos que pueden subyacer al propio artefacto. El paso del artefacto en instrumento resulta de un desarrollo progresivo de *génesis instrumental*.[6] El instrumento, para el usuario, evoluciona a lo largo del proceso de génesis. Entonces, el instrumento no es algo dado, no existe en sí mismo, sino que es elaborado por el sujeto en el proceso de *génesis instrumental*, el cual trae consigo tanto el artefacto como los esquemas de utilización socialmente construidos. El instrumento se convierte en tal, cuando el sujeto se ha apropiado de él (lo ha hecho suyo) y lo ha integrado a su actividad (Rabardel, 1999, p. 210).

A un mismo artefacto le pueden corresponder diferentes génesis instrumentales. De hecho, sus diseñadores lo conciben para que cumpla con un conjunto de funciones, pero los usuarios pueden desarrollar otras que surjan de la zona funcional preconcebida, a veces poco pertinentes (uso del mango de un martillo o de una moneda para dibujar un trazo) u otras que correspondan al abanico de posibilidades de acción del artefacto. Por ejemplo, el uso de Excel con fines didácticos es una función que no tenían contemplada los diseñadores de dicho *software*.

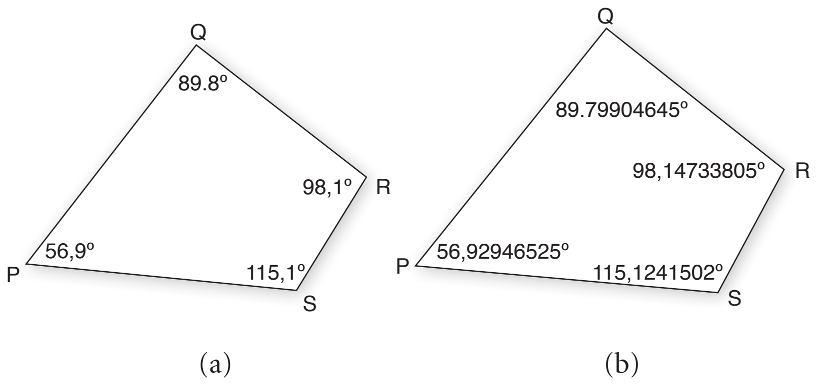
Es importante analizar lo que sucede cuando los artefactos son paquetes educativos (Cabri, CAS, Sketchpad, entre otros) que incluyen ciertos conocimientos matemáticos. Al respecto, Laborde (2004) señala que su práctica puede desviarse de los comportamientos de objetos teóricos matemáticos. Por lo tanto, los conocimientos matemáticos de los usuarios son cruciales para ejercer un

[6] La génesis instrumental es un proceso en el cual un artefacto se convierte en instrumento. Dicho proceso está constituido por dos fases: instrumentalización e instrumentación. En la primera el centro de atención es el artefacto, reconocimiento de sus potencialidades, restricciones y posibles usos. En la segunda, la instrumentación, la atención está centrada en el sujeto y su acción con dicho artefacto que conlleva emergencia y evolución de los esquemas de uso. Para mayor información consultar Rabardel (1999, 2011).

control del manejo del artefacto. Es por ello que la génesis instrumental debe también incluir sus elementos de control.

La distinción entre aquello que es extraído de una elección de concepto y de una necesidad de representación en la máquina, no siempre es simple. Algunos autores han realizado estudios al respecto y han encontrado dificultades. Cuando se simplifica la expresión $(x-2)/(x^2-2x)$, usando calculadoras simbólicas *Computer Algebra Systems*[7] (CAS, por sus siglas en inglés) por ejemplo, el resultado mostrado es 1/x, lo cual va en contra de las reglas que se establecen en clase, pues la simplicación es el resultado de implicaciones o equivalencias. Por otro lado, cuando se usa la medición dentro de la exploración, en muchos casos, sin importar el grado de precisión de la máquina, se pueden presentar resultados que se contraponen a un resultado matemático.

Figura 2. Un caso donde la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es diferente de 360°



En la figura anterior se presenta el caso de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero que puede no ser igual a 360° porque

[7] Los *Computer Algebra Systems* son programas de *software* que permiten el cálculo sobre expresiones matemáticas de una manera similar a los cálculos manuales tradicionales de matemáticas.

los números de la máquina son finitos. Cada vez la capacidad de cálculo se mejora.

Como se ha esbozado a lo largo de esta sección, el uso de tecnologías digitales conlleva una reestructuración cognitiva, puesto que requieren también del aprendizaje de una sintaxis, un proceso de instrumentalización (aprendizaje del funcionamiento de la propia herramienta). En particular, el caso de las CAS y de GD, que incorporan conocimiento matemático. Es posible que en la enseñanza se contribuya al proceso de internalización de las herramientas externas, ofrecidas por el ambiente en la construcción del significado del concepto matemático.

En algunos casos, el manejo de una sintaxis diferente a la del ambiente informático, como es el lápiz y papel, genera en el estudiante dificultades, que se deben principalmente a que los usuarios prefieren trasladar sus estrategias del papel y lápiz a estas tecnologías, con la finalidad de resolver los problemas. Un ejemplo de estas dificultades en el campo del álgebra ha sido estudiado por Driverjs (2002).

Las tecnologías digitales en la enseñanza se conciben como una solución para evitar los problemas materiales de los estudiantes, y de este modo permitirles examinar solamente sus problemas conceptuales. Pero la situación no es así de simple dado que las herramientas introducen problemas de manipulación y nuevas preguntas al ser usadas por los estudiantes en la resolución de tareas planteadas (Laborde, 2004). Como ya se mencionó, los procedimientos de resolución, dentro de un problema, dependen de las herramientas disponibles, por ejemplo, hacer cálculo con o sin calculadora, trazar un cuadrado en papel cuadriculado, sobre un papel en blanco con escuadra y regla graduada o en Cabri.

Ahora bien, solucionar una actividad matemática en un ambiente tecnológico requiere dos clases de conocimiento: el matemático y el instrumental. Sin embargo, los significados que construye un sujeto están contextualizados en la experiencia fenomenológica y su proceso de descontextualización; esto es, una evolución en los significados necesita de la construcción social en la clase, con la guía del profesor (Mariotti, 2001).

CAPÍTULO II
EL PAPEL DE LA REPRESENTACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

> *What is geometry?… -geometry is grasping space. And since it is about the education of children, it is grasping that space in which the child lives, breathes, and moves. The space that the child must learn to know, explore, conquer, in order to live, breathe and move better in it. Are we so accustomed to this space that we cannot imagine how important it is for us and for those we are educating?*
>
> FREUDENTHAL (1973, p. 403)[1]

Un problema nodal para la enseñanza de la geometría es la identificación, casi automática, de los dibujos, los objetos geométricos y las relaciones que guardan éstos con el razonamiento. Desde la enseñanza, se pretende hallar las vías para generar en el alumno la necesidad de justificar las afirmaciones sobre las propiedades de los objetos geométricos, representados en sus dibujos, y también

[1] ¿Qué es geometría? - geometría es apropiarse del espacio. Y dado que es sobre la educación de los niños lo que se está apropiando, es de ese espacio donde el niño vive, respira y se mueve. El espacio que el niño debería aprender es conocer, explorar y conquistar con el fin de vivir, respirar y moverse mejor en éste. Estamos tan acostumbrados a este espacio que no podemos imaginar lo importante que es para nosotros y para aquellos que estamos educando (Traducción de los autores.)

que los estudiantes descubran las relaciones geométricas entre los objetos bajo su estudio, elaboren una explicación para ellas y las comuniquen de manera oral y escrita. Sin embargo, son muchas las dificultades identificadas por investigadores y profesores que están vinculadas directamente con las representaciones. Estas dificultades surgen por la confusión entre el dibujo y el objeto geométrico, y por su impacto en la construcción de significados en el aprendizaje de la geometría. La necesidad de comprender y de plantear opciones para resolver parcialmente tales dificultades, en el proceso de aprendizaje de la geometría, es el objetivo de este capítulo.

Investigaciones en diferentes países han mostrado el potencial de la geometría dinámica (GD) como una alternativa que permite un acercamiento entre los alumnos, el dibujo, el objeto geométrico y los procesos propios del pensamiento geométrico (Laborde y Laborde, 1991; Olivero, 2003; Sandoval, 2005 y 2009; Laborde y Laborde, 2011; Mariotti, 2012a, 2012b; Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2013).

En este capítulo se presentan ejemplos vinculados con el uso de tecnologías digitales en el aprendizaje de la geometría euclidiana, para lo cual se retoman apartados de Sandoval (2005) como punto de partida para posteriores reflexiones y discusiones. Ejemplos de GD son Cabri Geometre (*www.cabrinet.com*) y Geogebra (*https://www.geogebra.org/*). Estas herramientas permiten que los estudiantes amplíen su campo de exploración y construcción de evidencias sobre las proposiciones de la geometría (Mariotti *et al.*, 1997; Arzarello, Micheletti, Olivero y Robutti, 1998; Furinghethi *et al.*, 2001; Olivero, 2003; Talmon y Yerushalmy, 2004; Sandoval, 2009).

Registros de representación en geometría

La representación de un objeto en geometría –sea en dos o tres dimensiones– puede realizarse de diferentes maneras. En especial se puede hablar de:

- *Representaciones materiales* en papel, cartón, plástico, madera, etcétera.
- *Representaciones figurales* con lápiz sobre una hoja de papel o en la pantalla de una computadora.
- *Representaciones discursivas,* descripciones con palabras, utilizando lenguaje natural y simbólico.

En este capítulo se empleará una teoría vinculada con las representaciones, en particular las *representaciones semióticas* (Duval, 1999a y 2006; Sandoval, 2005), las cuales son herramientas esenciales para realizar actividad matemática y comunicar ideas, pues las hacen visibles o accesibles a otros. En dicho marco, el aprendizaje de las matemáticas requiere diferentes actividades cognitivas, por ejemplo, representar, razonar, construir y visualizar. Para ello, el sujeto necesita usar distintos sistemas de representación de manera simultánea y enlazada (Duval, 2006; Hitt, 2003). Es decir, se requiere *coordinación interna* construida por cada sujeto entre los diferentes sistemas de representación (registros de representación), que pueden ser elegidos y usados. Sin esta coordinación dos representaciones distintas pueden significar dos objetos diferentes, sin relación, aunque sean el mismo. Por esta razón, Duval llama *registro de representación* sólo a aquellos sistemas semióticos que permitan transformaciones entre las representaciones.

Para el caso de geometría, en dicha teoría se identifican dos registros: el discursivo y el figural (Duval, 1999b, 2006). El primero puede estar tanto en lenguaje natural como en lenguaje simbólico y se utiliza para enunciar las definiciones, teoremas e hipótesis, entre otros. El registro figurativo permite designar las figuras y sus propiedades. Cada uno de ellos tiene funcionamientos internos con reglas más o menos explícitas. Sin embargo, los estudiantes deben aprender a movilizarse de un registro a otro, porque en algunas ocasiones se les solicitará que lo hagan de manera explícita y, en otras, deben hacerlo de forma implícita como requerimiento, para resolver alguna actividad.

En esta teoría hay dos tipos de transformaciones: *tratamientos* y c*onversiones*. El primer tipo consiste en modificaciones de representaciones dentro del mismo registro. Por ejemplo, cuando el alumno realiza la construcción de un cuadrado a partir de un cuadrilátero con todos los lados iguales y sus ángulos de 90° mediante herramientas tecnológicas. La actividad está centrada en trazar y establecer relaciones entre los objetos geométricos involucrados (relación de perpendicularidad y congruencia de segmentos) en un registro figural. Las conversiones son transformaciones que requieren transitar de un registro a otro, sin cambiar el objeto en cuestión. En dicha tarea de construcción, si la actividad es justificar cada paso el alumno deberá hacer uso del registro discursivo de teoremas y definiciones vinculadas con el problema en cuestión, esto es, desde el propio sistema axiomático de la geometría euclidiana.

La particularidad de la actividad cognitiva en geometría no está basada en la realización de tratamientos en los dos registros, sino que es algo mucho más exigente. "Es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se realicen simultáneamente y de manera interactiva". Por esta razón es "absolutamente necesaria la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en lengua natural" (Duval, 1999b, p. 147).

Una de las dificultades más frecuentes que enfrentan los estudiantes es resolver problemas geométricos y argumentar sus soluciones (Sandoval, 2001, 2005, 2009). Por lo tanto, es necesario que cada estudiante aprenda a usar e interpretar la representación como una base intuitiva de objetos abstractos, tomando en cuenta el contexto de la situación planteada.

Dibujo y objeto geométrico: problema didáctico en el aprendizaje de la geometría

La geometría trata objetos teóricos, y la manera de acceder a éstos conlleva procesos de abstracción y generalización de las propiedades ilustradas mediante todos los dibujos posibles. Es decir, las propiedades del objeto geométrico se pueden traducir gráficamente, mediante relaciones espaciales. La transición del dibujo al objeto geométrico es resultado de una interpretación hecha por el sujeto. Dicha interpretación se relaciona con la teoría, el contexto y los conocimientos que usa el sujeto (Laborde, 1996).

La aprehensión de las representaciones geométricas se constituye por la relación entre el alumno y el objeto geométrico que se representa. Por lo tanto, una representación puede ser simple para un alumno, pero compleja para otro. La manera de "ver" en geometría estará mediada por los conocimientos de cada estudiante y el contexto en el que se presente.

Habida cuenta de que una de las fuentes de inhibición del desarrollo del pensamiento geométrico es el tránsito entre un dibujo y el objeto geométrico, que dicho dibujo representa, esta distinción no se favorece, por lo general, en las prácticas educativas habituales (Moreno, 2002b). El problema consiste en atribuirle a lo perceptual propiedades que no pertenecen al objeto geométrico; por ejemplo, la posición de la representación. En un dibujo, el estudiante no siempre capta la generalidad del argumento del profesor quien no es consciente del *ruido* que ese dibujo, utilizado en el razonamiento, introduce a su argumento.

En el tránsito del dibujo al objeto geométrico puede suceder que:

1. Un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por su lector como algo que le remita a un objeto geométrico…
2. Las interpretaciones de un mismo dibujo… de un objeto geométrico son múltiples por dos razones: la primera consiste en que las interpretaciones dependen del lector y de sus conocimientos, así como del contexto; la segunda tiene que ver con la naturaleza misma del dibujo, que por sí solo no puede caracterizar un objeto geométrico (Laborde, 1996, p. 68).

En la enseñanza de la geometría euclidiana, se parte de las representaciones de los objetos de estudio, discursiva y figural, para determinar sus propiedades y relaciones estructurales. Un problema al que hemos hecho referencia es la posibilidad de incurrir en errores, debido a la interpretación inapropiada de una representación figural. Como lo señalan Gal y Linchevski (2010), la percepción influye en la manera como se interprete inicialmente dicha representación; sin embargo, si los conocimientos geométricos del sujeto son sólidos, podrá ir más allá de la interpretación perceptiva. En otras palabras, el sujeto podrá establecer una coordinación simultánea entre el registro figural y el discursivo.

Estudios realizados por Pluvinage (1998), Mesquita (1998), Sandoval (2001, 2005 y 2009), entre otros, han confirmado que comúnmente se usan representaciones prototipo, como resultado de influencias perceptivas y culturales, donde la visualización lleva a un razonamiento, en ocasiones, erróneo. Es por ello que nos preguntamos ¿qué conlleva el paso del dibujo al objeto geométrico? Según Skemp (1993), uno de los procesos involucrados en el tránsito es la abstracción, mediante ella el sujeto se vuelve consciente de las similitudes, semejanzas, de sus experiencias. Un ejemplo es la recta. Cuando se dibuja sobre un papel con un lápiz o se traza en la pantalla de una computadora o de una calculadora, el sujeto elimina todos los atributos irrelevantes del objeto concreto como anchura y espesor, irregularidades del papel o los pequeños escalones que se ven en la pantalla cuando la recta es oblicua. A continuación dos ejemplos (García Bacca, 1992, p. 5; Campos, 1994, p. 29):

a) Para Euclides, en *Los elementos*, "Línea es la longitud sin anchura… Línea recta es aquella que yace por igual sobre los puntos de la misma".

b) En los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert considera que son los axiomas los que permiten obtener una descripción exacta y completa de la recta, y los dos axiomas, de incidencia, que se relacionan con la recta son:

1. Dos puntos diversos A, B determinan siempre una recta, a, y pondremos AB = a o bien BA = a

2. Dos puntos diversos cualesquiera de una recta determinan esa misma recta, esto es, si AB = a y AC = a y B≠C, será también BC = a

El proceso de idealización del mundo de la experiencia espacial al mundo matemático, en el ejemplo anterior, es el resultado de un proceso de perfeccionamiento. Como se expone en algunos textos, la idea de línea se enseñaba, según Proclo, al preguntarle al sujeto por la longitud de un camino; de la misma forma, la percepción sensible de una línea se relacionaba con la idea de mirar la división entre lo claro y lo oscuro sobre la tierra o sobre la luna (Campos, 1994, p. 33).

Entonces cuando se está aprendiendo sobre las figuras geométricas se necesita que la mente pase por alto muchas imperfecciones que el ojo percibe. Es decir, extraer las propiedades invariantes que caracterizan al objeto, que no están ligadas a las características físicas de la representación, *i.e.*, poder descontextualizar. Por ejemplo, identificar los elementos que determinan un triángulo rectángulo, las relaciones entre objetos como intersección, paralelismo, contención de uno en el otro, perpendicularidad, congruencia y otros.

Algunos factores que permiten a los estudiantes caracterizar una representación como genérica y satisfactoria, según Maracci son:

- Un gráfico debe representar de modo correcto la situación geométrica en consideración. La interpretación de los estudiantes de la situación dada y del dibujo producido, debe ser constante;
- Un dibujo debe ser reconocido como suficientemente genérico;
- Un dibujo debe poseer una buena Gestalt, es decir, debe satisfacer las leyes fundamentales que controlan los procesos básicos de la percepción (2001, p. 336).

Al interpretar la representación figural de triángulo como objeto, se visualiza de una manera determinada por las propiedades construidas en la mente del sujeto. Dicha visualización depende de la sensibilidad en la lectura del dibujo, desde la perspectiva de la teoría. En otras palabras, la visualización es el acto de interpretación que transmite el campo semántico al dibujo.

Los dibujos realizados a lápiz y en papel indican, a lo más, al objeto geométrico estableciendo una relación de índice, en la cual el dibujo es el significante. Sin embargo, ésta puede ser insuficiente, ya que en muchos casos el estudiante le atribuye características de esas marcas, del dibujo, al campo semántico. En el contexto de la GD, el dibujo electrónico se determina mediante la teoría inmersa en la programación del *software*, lo que quiere decir que se encuentran controladas por el universo matemático interno programado en el procesador central de la computadora. Por lo tanto, el estudiante no tiene conciencia del control *a priori*; lo empieza a percibir cuando aprecia que las acciones indicadas, sugeridas, por los datos perceptuales no son arbitrarias (como ocurre con los dibujos en papel), sino que existen restricciones (presencia de una estructura).

La toma de conciencia de las "interferencias" de la teoría (al "mover" los dibujos en la pantalla) y su tematización, habrá de conducir al descubrimiento de la estructura subyacente al dibujo. En consecuencia, la GD permite que el estudiante vaya "captando, gradualmente, que los hechos geométricos a los que hace mención en los teoremas (conjetura), son propiedades generales" (Maracci, p. 143) válidas no sólo para esa representación particular, sino para todas las posibles. En este mismo sentido, Colette señala:

> Una propiedad geométrica [teorema] es un invariante satisfecho por un objeto variable tan pronto como este objeto varíe en un conjunto de objetos que cumplan algunas condiciones comunes. La variabilidad de objetos geométricos es generalmente invisible porque la formulación de una propiedad geométrica se expresa como si se tratara de un único objeto estático, siendo implícitos los cuantificadores, especialmente en la escuela secundaria. Lo que puede causar problemas a los estudiantes que no perciben la generalidad de los teoremas o propiedades (2005, p. 22).

Del dibujo al objeto geométrico, de la conjetura a la argumentación

Como ilustramos en el apartado anterior, la GD ofrece un campo de exploración que no es factible en las representaciones con lápiz y papel. Ésta es diferente, es una *representación dinámica* en la cual las propiedades geométricas permanecen inalterables cuando los objetos se deforman, según el *arrastre* que hace posible moverla directamente y manipular las figuras construidas en la pantalla. En la construcción, el sujeto tuvo que seguir las reglas y propiedades geométricas.

En la investigación en la que sustentamos este capítulo se utilizó la GD Cabri. Dicho ambiente informático permite construir y manipular figuras en el contexto de la geometría euclidiana. Una característica importante es la "correspondencia entre la visualización de invariantes espaciales y su descripción geométrica" (Laborde, 1996, p. 79); asimismo, la explicación y justificación adquieren un estatus diferente: "el de explicar propiedades espaciales en contradicción con las esperadas por los alumnos" (p. 79).

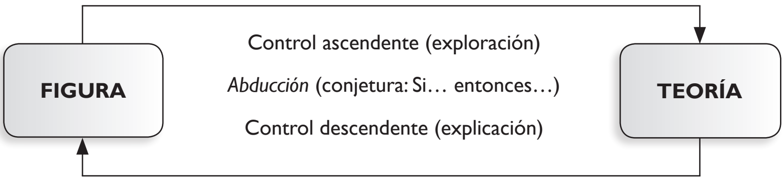
En este capítulo ilustraremos un contexto en el que se usa Cabri: las construcciones (véase Sandoval, 2005, para una discusión más puntual). Es decir, trazar figuras con los comandos disponibles del menú. Tales comandos son como acciones cristalizadas, que en Cabri reciben el nombre genérico de *macro-construcciones*. La actividad de construcción se integra con la función de *arrastre*. Una tarea de construcción se resuelve si la figura en la pantalla *pasa la prueba del arrastre*, ya que las relaciones geométricas entre las partes de la figura, sobre la pantalla, se preservan después del arrastre. De modo que los comandos primitivos y "las macros" obligan a los estudiantes a hacer explícitas las propiedades geométricas ocultas en el dibujo a mano alzada. Sin embargo, los alumnos deben alcanzar el *control conceptual* sobre lo que ven en la pantalla. Por lo que la función de arrastre que en un principio "comienza" como una herramienta de control,[2] esto es, de cambios de exploración a explicación, puede ser útil para revisar la construcción hecha y producir conjeturas (exploración), *control ascendente*; después se convierte en un signo externo de control teórico para elaborar las argumentaciones a su conjetura (explicación), *control descendente* (Mariotti *et al.,* 1997). El modelo planteado por los autores mencionados permite describir la transición de la conjetura a la prueba de manera más general (Olivero, 2003, pp. 40-41):

- *Control ascendente*: el sujeto analiza la figura ordenadamente para hacer conjeturas, enlaza sus observaciones de las representaciones figurales a la teoría y trata de encontrar los elementos teóricos relacionados con la situación.
- *Abducción*: el sujeto revisa su conocimiento teórico, ordenadamente, para encontrar la parte de la teoría que le permita comprender dicha situación en particular; es así como las exploraciones se transforman en conjeturas.
- *Control descendente*: cuando ya se ha establecido la conjetura y el sujeto busca su validación; recurre a la teoría de modo ordenado para justificar lo que previamente ha leído en la figura.

Por lo tanto, la abducción es muy importante en la transición, guía el proceso del control ascendente al descendente, puesto que es en ese momento en el que el sujeto produce una conjetura de la forma "Si … entonces…" (Figura 3).

[2] El control se refiere a la capacidad del estudiante para desplazarse dentro de una red conceptual sin perderse; una capacidad de discriminar.

Figura 3. Transición de la conjetura a la explicación



La atención de la actividad no sólo se centra en obtener el resultado o la construcción correcta, sino en dar una explicación, *cómo* se llegó a ese resultado o *por qué* se mantiene esa propiedad (Furinghetti *et al.,* 2001; Arzarello *et al.*, 1998; Olivero y Robutti, 2001a, 2001b, 2002; Sandoval, 2005; Sandoval y Moreno, 2012).

De lo perceptivo a lo teórico y viceversa

Pese a que en este apartado señalamos el potencial de la GD en sí misma, nuestro interés se centra en la estructura que puede construir el estudiante con la mediación de la herramienta (Hershkowitz y Kieran, 2001).

El desarrollo de actividades que conllevan tareas de construcción y problemas abiertos, exige a los alumnos habilidades de *visualización matemática*[3] para establecer las relaciones estructurales relevantes. Asimismo, es necesaria la coordinación simultánea de los tratamientos específicos hechos, tanto en el registro figural como en el discursivo.

En la GD, los representantes pueden ser en un inicio ejemplos prototipo del objeto geométrico en cuestión, pero una vez que se hace uso del arrastre, la nueva representación permite eliminar la

[3] Capacidad de los individuos para comprender un enunciado matemático, desde diversos puntos de vista, integrando diferentes representaciones de los objetos matemáticos en juego, que permite vislumbrar un posible camino de acción en la resolución del problema matemático en cuestión (Santillán, 2002).

ambigüedad. Al valerse del arrastre se hacen perceptibles no sólo las características ancladas, sino que se van explicitando las que definen al objeto geométrico. Es así como la ambigüedad y el poder de la GD genera en los estudiantes una necesidad de producción de varios representantes y los estimulan, a su vez, a establecer las relaciones entre ellos. De este modo, los educandos pueden extraer las características del objeto en cuestión y superar la ambigüedad dentro de un representante (Hershkowitz y Kieran, 2001).

En la interacción, el estudiante centra su atención en primera instancia en el arrastre, pues le permite la "captura" del objeto, mediante una coordinación visual y motriz. Después de descubrir las invariantes inicia otro proceso, el de encontrar la causa de dicha propiedad. Por lo tanto, es necesario entender la clase de manipulación que los estudiantes efectúan sobre los objetos informáticos, así como las herramientas utilizadas durante las actividades realizadas, para resolver las tareas propuestas.

A continuación describiremos las diferentes modalidades de arrastre y medición, el vínculo del paso de lo perceptivo a lo teórico, y el papel que juegan las representaciones en dicho proceso.

Transiciones de lo perceptivo a lo teórico: arrastre y medición

El uso del arrastre de los objetos en la pantalla de la computadora permite identificar, de manera implícita, el propósito de dicha acción. En particular, Arzarello *et al.* (1998) y Olivero (2003) proponen la siguiente clasificación, en la que queda patente la acción del estudiante en el tiempo:

- *Sin arrastre*: no hay movimiento en la pantalla.
- *Arrastre sin ruta, aleatorio*: movimiento de los puntos básicos de manera aleatoria. El arrastre no lleva ninguna dirección ni objetivo, sólo busca descubrir alguna propiedad o configuración interesante.

- *Prueba del arrastre*: movimiento de puntos libres y semilibres,[4] de manera ordenada, para percibir si la figura conserva algunas propiedades conjeturadas. El arrastre tiene como propósito poner a prueba la construcción, sus límites de validez y las interdependencias de los elementos de la construcción. Para que la figura en Cabri no se desordene al arrastrarla se pretenderá encontrar, en un conjunto de figuras, las condiciones sobre las cuales verificar una conjetura.
- *Arrastre dirigido*: movimiento de los puntos básicos de una figura, de manera ordenada, para darle una configuración particular.
- *Arrastre de trayecto oculto* (*lieu muet* o *lugar muerto*): movimiento de un punto básico para que la figura conserve la propiedad. El arrastre busca mantener "muerta" una posición específica de un determinado lugar geométrico, que conserve cierta regularidad; por ejemplo, un valor en cero, un ángulo fijo en un valor, optimizar una cantidad o la colinealidad de un conjunto de puntos, etc., para encontrar el lugar geométrico en el cual la conjetura se cumple.
- *Foto-arrastre*: modalidades en las que se sugiere una secuencia discreta de imágenes a través del tiempo. En dicha secuencia el sujeto busca el estado inicial y final de la figura, sin considerar los instantes intermedios. El objetivo es obtener una figura particular.
- *Film-arrastre*: son las modalidades en las que se sugiere una escena, donde el sujeto busca la variación de la figura mientras hace el arrastre, así como las relaciones entre los elementos de la figura. El objetivo es la variación de la figura en sí misma.

[4] Los puntos libres son construidos con el comando de "punto", mientras que los semilibres, sobre objetos, sólo pueden moverse sobre el objeto.

La dialéctica, entre las diferentes modalidades de arrastre, puede cambiar profundamente las relaciones entre los objetos geométricos de la situación. El arrastre dirigido “muestra” una nueva relación lógica entre los puntos y las figuras, que agrega a la dependencia funcional más común una dependencia del tipo variable-parámetro, donde algunos objetos elaborados dependen en su construcción de otros (Arzarello *et al.*, 1998).

Otra de las herramientas potenciales de la GD es la medida. Su uso sistemático, aunque fomenta la percepción, posibilita la transición hacia la teoría (Olivero y Robutti, 2001a). El anclaje en lo perceptivo puede darse, por ejemplo, cuando los estudiantes confían acríticamente en las medidas y las consideran absolutamente exactas, entonces permanecen en un nivel completamente perceptivo. Mientras que, si utilizan la información proporcionada por las medidas, para formular una conjetura en una forma condicional (*si... entonces*), y ven la figura como un caso genérico (naturaleza heurística), estarán en camino a la transición hacia el nivel teórico.

Las medidas se utilizan como herramienta heurística y tienen una connotación perceptiva cuando los estudiantes las emplean para construir ideas o conjeturas sobre características, invariantes y relaciones de una figura (estática o dinámica) y sus subconfiguraciones (son las partes de una configuración geométrica como una pieza de un rompecabezas). Al igual que en el arrastre, y dado el propósito implícito en los educandos, Olivero y Robutti (2001a) proponen la siguiente clasificación de las modalidades de medida, usadas en la *transición de lo perceptivo a lo teórico*:

- *Medidas como exploración aleatoria*: cuando los educandos no tienen una idea clara sobre la configuración, es decir, exploran la situación de forma aleatoria: toman medidas de algunos elementos de la configuración, de la misma manera como usan el *arrastre sin ruta*.
- *Medidas como exploración dirigida:* cuando los alumnos hacen una exploración dirigida de la configuración, las medidas

son utilizadas para poner en orden un conjunto de diversos casos, con la finalidad de explorarlos, de la misma forma que el *arrastre dirigido* o junto con él.

- *Medidas probatorias*: son utilizadas como un medio para revisar la validez de una percepción. Cuando algunas características de la figura son identificadas por los estudiantes, pero no están seguros de su percepción, utilizan la medida en la figura para validarla.

Ahora bien, cuando se usan las medidas como herramienta de control para verificar una predicción, validar conjeturas o encontrar relaciones lógicas, que pueden contribuir a la construcción de una argumentación válida, se puede decir que las medidas se están empleando en otro nivel: *transición de lo teórico a lo perceptivo*. Por lo tanto, existe una clasificación de las modalidades ejercidas por los estudiantes (Olivero y Robutti, 2001a) en la transición:

- La medición se utiliza después de formular una conjetura para revisarla, refutarla o validarla dentro del marco teórico de Cabri. Dicho uso es muy similar a la modalidad de la prueba de arrastre, por la cual los estudiantes controlan la exactitud de una construcción.

Después de la demostración, los alumnos regresan al *software* para entenderla y conseguir una mejor explicación. Los nuevos experimentos se realizan en el ambiente dinámico y las medidas se utilizan, normalmente, en la figura estática.

En síntesis, el paso de un nivel perceptivo, evidencia visual, a un nivel teórico significa alejarse de la tendencia a conclusiones basadas en la observación de un número particular de casos o de situaciones específicas. El paso al nivel teórico sucede cuando los estudiantes se preguntan *por qué* cierta conjetura es verdadera, después de estar convencidos de su certeza, mediante la exploración y la observación, para lo que se requiere encontrar razones dentro de un marco teórico. En la transición, el educando debe hacer una reinterpretación de lo que pasa en la pantalla, en términos de una teoría. En dicho proceso, los estudiantes construyen significados para los objetos matemáticos que están usando (representaciones figurales o discursivas), mediante una dialéctica entre los significados personales e institucionales (Furinghetti *et al.*, 2001).

UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA EN EL AULA: CONTEXTUALIZACIÓN

Para analizar las implicaciones de las representaciones semióticas en el establecimiento de significado de los objetos geométricos, así como en el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven un problema apoyados en Cabri, realizamos un seguimiento a partir del momento en que inician la lectura del enunciado y de todas las acciones realizadas durante el transcurso de la actividad (para más detalles de este estudio ver Sandoval, 2005). Esta estrategia permite darnos cuenta de: el uso de herramientas (tanto del contexto dinámico como del lápiz y papel, según sea el caso); el uso o la identificación de alguna propiedad dentro del campo perceptivo o teórico; la sistematización y validación de las soluciones; los vacíos de significación; las diferentes interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados, y los cambios en las acciones implementadas. De esta manera, logramos identificar la caracterización de los significados personales concluyentes sobre los objetos geométricos involucrados en las actividades propuestas y su proceso de elaboración.

Los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo de una actividad no se pueden observar directamente, sino a través de representaciones semióticas. Por lo tanto, es el diseño cuidadoso de las actividades y la exploración de las mismas lo que permite que dichos procesos se exterioricen.

Características de los estudiantes y las actividades utilizadas: algunas generalidades

En el estudio que se reporta a continuación, participó un grupo de 15 estudiantes, cuyas edades oscilan entre 16 y 18 años, con conocimientos elementales de geometría y sin experiencia alguna con la GD. Dichos conocimientos y habilidades básicas se confirmaron a través de un cuestionario y una entrevista semiestructurada que permitió clarificar sus respuestas y conocer algunos antecedentes académicos. Los criterios de selección de los participantes se basaron en las respuestas dadas en relación con la interpretación figural y con las formas de argumentación. Cabe señalar que hubo interés manifiesto por colaborar en la investigación y tener disponibilidad de tiempo, pues las sesiones se realizaron en horario extraclase. Además, la participación de los estudiantes no estuvo sujeta a calificación alguna.

La presentación de las actividades se planeó de manera que la exploración dinámica de los enunciados apoyara a los estudiantes en sus procesos de argumentación. Con dicha intención, las actividades incluyeron problemas que requirieron para su resolución tareas de construcción, descubrimiento de invariantes, establecimiento de conjeturas, descripción por escrito de las estrategias utilizadas para llegar a la conjetura, así como su explicación. Esta última fue dividida en dos partes: en un principio, libre, que podía basarse en el arrastre y la medición. En la segunda parte, se solicitó una explicación sin argumentos basados en medición o arrastre, actividades como éstas fomentan el paso de lo perceptivo a lo teórico, puesto que los contenidos involucrados en la solución de cada actividad se relacionaban con los abordados en los cursos previos de geometría.

Este tipo de problemas permitió a los alumnos realizar una exploración dinámica, producir conjeturas, utilizar diferentes estrategias de solución, validar las conjeturas, etc. La atención de la actividad no sólo se centró en obtener el resultado o la construcción correcta, sino en dar una explicación: *cómo se llegó a ese resultado* o *por qué* se mantiene esa propiedad.

El desarrollo se dividió en las siguientes etapas:

1. Los estudiantes realizan la lectura de la actividad y aclararon las dudas respecto al trabajo a desarrollar.
2. Exploración, individual o en equipos, y planteamiento de conjeturas.
3. Discusión entre los equipos de las primeras conjeturas.
4. Afinación de las conjeturas y organización de enunciados.
5. Establecimiento de los argumentos para validar el enunciado propuesto.
6. Discusión final de todo el grupo.

A continuación se ejemplificará lo realizado por los alumnos con un problema de construcción y una discusión sobre los resultados.

Construcciones de definiciones geométricas: resultados del problema de construcción de un cuadrado

La actividad planteada a los alumnos es la construcción de un cuadrado. Con sus producciones realizadas se identificará el papel de la representación geométrica y su relación con la conceptualización del objeto geométrico.

Como lo señalan Zazkis y Leikin (2008), las definiciones permiten aproximarnos a la comprensión que tienen los sujetos de los objetos matemáticos en cuestión. Para el caso del cuadrado hay una variedad de ejemplos de definiciones que involucran relaciones con otros conceptos: cuadriláteros, simetría, relación entre las diagonales, lugares geométricos, etcétera.

Construir un cuadrado (de manera libre o dadas algunas restricciones) y definirlo, exigía a los estudiantes establecer relaciones geométricas entre diferentes elementos. El problema lo pueden resolver de diversas formas, las cuales exponen en su trabajo e involucran el conocimiento de ciertas propiedades de los cuadriláteros.

Resultados usando lápiz y papel

Los resultados de la actividad realizada muestran la diversidad en sus respuestas (véase tabla 1). Dichas respuestas dadas por los estudiantes comienzan así: "Es una figura geométrica con...", y la caracterizan de la siguiente manera:

Tabla 1. Descripciones sobre un cuadrado

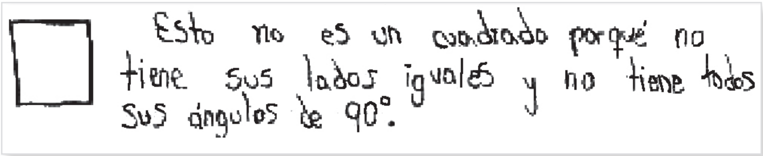
Cuatro lados iguales	Cuatro rectas paralelas y cuatro lados iguales	Cuatro lados iguales y cuatro ángulos de 90°	Polígono regular de cuatro lados
43%	7%	43%	7%

Lo anterior muestra que 50% de los estudiantes (se usarán seudónimos) consideran, de manera simultánea, las relaciones entre los ángulos y los segmentos. En algunos enunciados aluden a la relación de perpendicularidad entre los segmentos como: "No se inclinan sus líneas". Pero al contrastar las respuestas de los estudiantes con las construcciones se manifiesta que:

- Todos los dibujos son ejemplo de una representación prototipo.
- La regla graduada se utilizó para realizar el dibujo (11 estudiantes) y asegurar que la medida de sus lados fuera igual.
- Las justificaciones dadas a la construcción guardan, en su mayoría, correspondencia con lo escrito en la definición y son explicativas: "Porque tiene cuatro lados, cuya longitud es igual, esto hace que la figura no se vea chueca o deforme y así se forma un cuadrado"; "El cuadrado mide 4 cm de largo y sus lados son iguales y miden lo mismo". En otros casos, complementan su definición inicial. Por ejemplo, un estudiante define al cuadrado como: "Una figura de cuatro lados iguales y su área siempre va a ser a L x L", y en su explicación escribió: "porque tienen cuatro lados iguales y [...] todos sus ángulos son de 90°".

- Sólo Jorge utiliza la idea de contraejemplo de un cuadrado, basado en el dibujo.

Figura 4. Respuesta de Jorge



Por las respuestas obtenidas, se puede suponer que existe una relación entre la manera en que los estudiantes conciben al objeto geométrico, en la mayoría como dibujo, y su modo de definirlo. Para todos los estudiantes, la relación de igualdad de los lados del cuadrilátero es suficiente, mientras que la de perpendicularidad entre los segmentos no es necesaria. Sin embargo, la apariencia de sus dibujos ilustra dicha relación.

En la representación estática no es posible dar cuenta de cómo los estudiantes han establecido las relaciones entre los segmentos, aunque se podría suponer que, en la mayoría, han sido perceptivas. En consecuencia, cuando se hace este tipo de representación figural, no parece necesario explicitar las relaciones estructurales, puesto que es suficiente que el dibujo esté "bien hecho".

Los argumentos escritos por los estudiantes están ligados al contexto, y la aprehensión perceptiva es el motor de dichas argumentaciones. Como se evidencia en sus respuestas, la medición directa y la comprobación visual son la base de sus explicaciones.

Resultados con el uso de geometría dinámica de Cabri

El primer acercamiento en la construcción fue realizar un dibujo que cumpliera perceptivamente con la idea de un cuadrado prototipo. Las herramientas de la GD utilizadas fueron diversas. El equipo de René, Fernando y Enrique únicamente usó *puntos* y *segmentos*; el de Jorge, Gustavo y Fermín estableció relaciones de *paralelismo* y *perpendicularidad* entre rectas que contenían los lados; y el de Liliana y Gabriela ocuparon *rectas*, con la idea de las diagonales del cuadrado, y la *circunferencia*. El comando de *Polígono regular* fue utilizado por los equipos de Fanny y Alexis, y Camila y Gladis. Éste ofrece un hexágono primero y no muestra cómo trazar un cuadrado.

Una vez que su dibujo electrónico pasó la prueba perceptiva, esto es que conservara la apariencia visual, lo midieron para verificar que su construcción coincidiera con su definición de cuadrado. En la mayoría de los casos dichas medidas fueron diferentes entre sí, lo cual les creó conflicto, por ello tomaron decisiones como: borrar su dibujo electrónico y rehacerlo siguiendo la misma idea; borrar y explorar una nueva idea; o continuar con el mismo dibujo electrónico y usar el arrastre junto con la medición, para encontrar la configuración que, perceptivamente, cumpliera con la de un cuadrado.

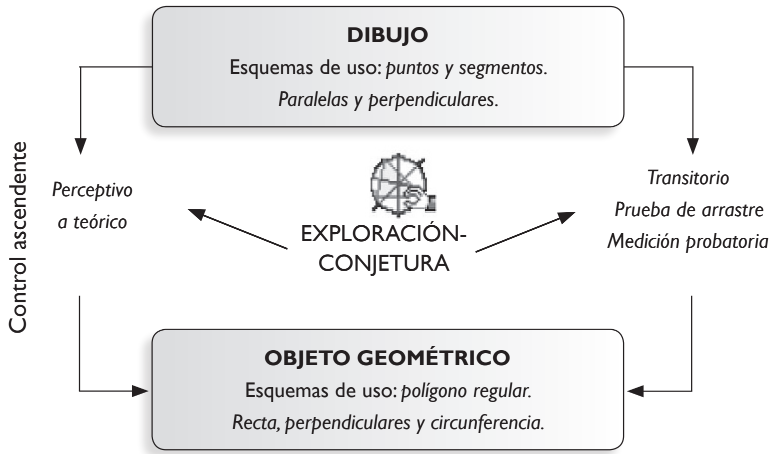
Cuando la configuración obtenida fue un cuadrado, aunque no pasara la prueba del arrastre, los alumnos utilizaron el comando de medición para verificar su conjetura; otros equipos lo validaron mediante el arrastre y la medición. Al inicio, algunos estudiantes no diferenciaban entre una representación en ambiente estático de otra realizada en ambiente dinámico, pero gradualmente fueron incorporando la tecnología como instrumento, lo que les permitió guiar las acciones para la construcción del cuadrado.

En los registros discursivos, las estrategias argumentativas escritas, dadas por los estudiantes para asegurar que su dibujo electrónico era un cuadrado, fueron descriptivas al igual que explicativas, basadas en los resultados de la medición. En su mayoría, los equipos usaron los datos numéricos, tanto de la longitud de los cuatro lados como de los ángulos. Esta es una manera en la que el estudiante recurre a la teoría interna de la máquina como mecanismo de control.

En la actividad se les pedía definir el objeto geométrico *cuadrado*. Todos los alumnos mencionaron dos características: cuatro lados iguales y todos sus ángulos de 90°. Al contrastar esta definición con la que proporcionaron en el cuestionario inicial en papel y a lápiz, se evidencia una evolución en algunos. Los enunciados son estáticos, como lo ilustran los siguientes ejemplos: "Es aquel polígono regular que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos interiores de 90°" (Alexis y Fanny); "Figura geométrica que posee cuatro lados iguales y cuatro ángulos cada uno de estos de 90°. Es un polígono regular de lados iguales" (René, Fernando y Enrique). Como lo demuestran los enunciados anteriores, la mayoría de los estudiantes incluyó en su definición *polígono regular* quizás porque uno de los comandos utilizados en su construcción fue el que lleva este nombre. Por lo tanto, hay aportaciones de la GD a su lenguaje, lo que ejemplifica cómo el razonamiento del estudiante se impregna de la herramienta. La hipótesis se fundamenta en que los alumnos incorporan estas palabras, pero anexan una característica implícita en las mismas. Es decir, cuando se menciona que es un polígono regular, queda implícita la igualdad tanto de lados como de ángulos. Lo anterior se debe, quizás, a la falta de actividades que les posibiliten explorar más tales herramientas, con la finalidad de generar sentido a expresiones como éstas.

En general, la evolución que se percibe en los enunciados escritos por los estudiantes, se debe a que la GD les obliga a explicitar las relaciones geométricas entre los objetos, para que la construcción pase la prueba del arrastre. Como se percibe en el desarrollo de la actividad, el nivel de evidencia de un dibujo en Cabri (electrónico) es mayor que uno a lápiz y en papel, lo que lo acerca al objeto geométrico. En otras palabras, una representación figural realizada en Cabri (dibujo electrónico), a diferencia de una elaborada en papel (dibujo), brinda a los estudiantes mayores posibilidades de manipulación y, como resultado, les permite que surja la estructura geométrica que el sujeto ha establecido entre los objetos involucrados en la construcción. La figura 5 ilustra dicho proceso.

Figura 5. Proceso global en la construcción del cuadrado

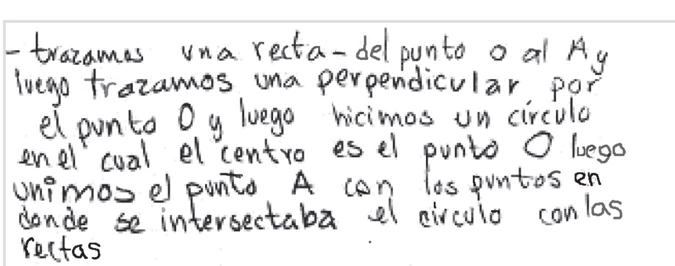


Estrategias argumentativas:
Descripciones / Explicaciones empíricas (dinámicas y estáticas)

En el último apartado de la actividad se restringía la construcción. Los estudiantes debían crear un cuadrado, dados dos puntos: un vértice y el centro del cuadrado. La mayoría de los equipos hicieron una construcción y no un dibujo, aunque no todos los resultados fueron exitosos.

En las descripciones escritas (véase la figura 6) se exhibe la distinción entre lo dado (condición) y lo que deben obtener (resultado). Sólo dos equipos lograron establecer dichas diferencias.

Figura 6. Descripción de los pasos seguidos para construir un cuadrado dado dos puntos: un vértice y el centro. Respuesta de Liliana


- trazamos una recta - del punto o al A y luego trazamos una perpendicular por el punto O y luego hicimos un círculo en el cual el centro es el punto O luego unimos el punto A con los puntos en donde se intersectaba el circulo con las rectas

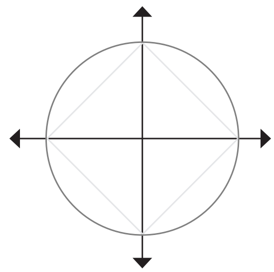
Los alumnos utilizaron diferentes herramientas para construir un cuadrado. Herramientas que dan cuenta de las propiedades geométricas que definen al cuadrado y que van más allá de las características más perceptuales. Por ejemplo, el uso de la perpendicularidad entre lados e igualdad de diagonales, y el uso del polígono regular. A continuación se presenta la discusión respecto a los conocimientos involucrados para cada caso.

• *La perpendicularidad e igualdad de las diagonales*

En la primera construcción de cuadrado, Jorge y Gustavo utilizaron las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas. La construcción no pasó la prueba del arrastre, ni la de medición, por lo tanto fue descartada. El fracaso se debió a que la relación de igualdad entre los lados fue perceptiva, y la medición fue usada como un medio para revisar la validez de su percepción. La segunda idea explorada fue la utilización del comando de *Polígono regular*, el cual les permitió realizar una construcción correcta. Sin embargo, se les sugirió hacerlo de manera diferente, con el propósito de que afloraran sus ideas sobre construcción. El equipo de Jorge y Gustavo asumió el reto y exploró otras formas.

> Jorge: Primero hicimos una circunferencia. Luego pasamos por este punto [se refiere al centro] una recta. Luego hicimos una perpendicular. Luego las intersecciones entre la circunferencia y las rectas les pusimos un punto. Luego unimos los puntos y nos quedó un cuadrado (ver figura 7).

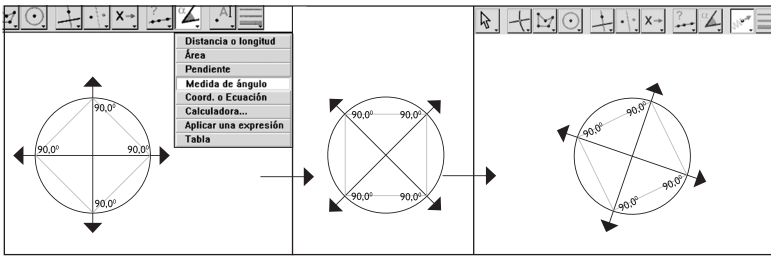
Figura 7. Construcción de Jorge y Gustavo



Entrevistadora: ¿Sí es un cuadrado?

Gustavo: Sí, porque todos los ángulos son de 90. Mídelos [Le dice a Jorge].

Figura 8. Construcción de Jorge y Gustavo



En un principio, lo importante para ellos fue la igualdad entre los ángulos. Validación que realizaron a través de la medición (en modalidad probatoria) y la prueba del arrastre. La medida de los lados, en un inicio, no fue incluida; es posible que consideraran como "suficiente" lo perceptivo, pero fue utilizada cuando definieron "cuadrado". En el diálogo anterior, se empiezan a vislumbrar elementos del paso de dibujar a construir. Esto es, establecer la relación de perpendicularidad entre las rectas y declarar las intersecciones entre la circunferencia y cada una de ellas. Es decir, usan una propiedad de las diagonales del cuadrado para construirlo que, por ende, lo definen.

• *Construcciones y conocimientos sobre el cuadrado*

A lo largo de la actividad surgen diferentes ideas de cómo construir un cuadrado. En cada una de ellas, se identifican diversas herramientas conceptuales y de la propia GD. A continuación se describe cada idea explorada.

La primera idea consistió en construir un cuadrado, dado uno de sus lados. Esta idea fue posible al establecer las relaciones perceptivas de igualdad, perpendicularidad y paralelismo entre los segmentos, siguiendo el esquema de la representación prototípica. Sin embargo, el resultado que mostró la pantalla no coincidió con su imagen mental de cuadrado, a pesar de usar el arrastre para buscar una configuración adecuada (arrastre transitorio), y por lo tanto fue borrada. Esta primera idea pudo ser resultado ante la costumbre de hacerlo a lápiz y en papel. Lo anterior enfrentó a los estudiantes con una primera dificultad: el requisito de la apariencia.

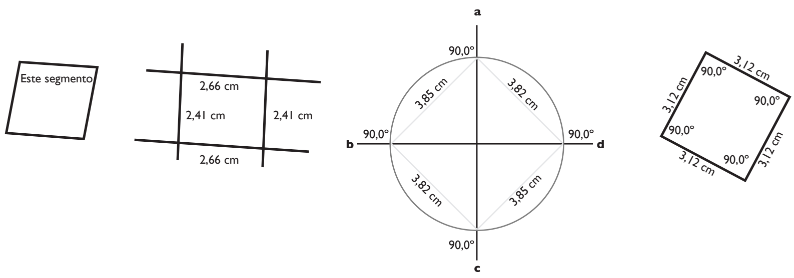
Una segunda idea que consistía en ocupar rectas paralelas fue propuesta por Enrique, para ello utilizaron relaciones perceptivas y estructurales. La construcción parte de una recta horizontal, y posteriormente construyeron una segunda recta mediante el comando de *recta paralela*. El uso de la herramienta en la construcción muestra los primeros pasos de la transición de dibujar a construir; sin embargo, parecía que los estudiantes pretendieron hacer un dibujo electrónico (usar la GD) de la misma forma como se dibuja a lápiz y en papel. El resultado de la construcción fue un rectángulo; por lo que los estudiantes usaron la medida de un segmento (un lado) y el arrastre para buscar la configuración de un cuadrado. Una vez que obtuvieron dicha configuración, el equipo hizo uso de la herramienta de medición para calcular la longitud de los demás lados y verificar su estimación (modalidad medición probatoria). Dado que los resultados fueron desiguales, el equipo decidió utilizar el arrastre para que las medidas coincidieran. No obstante, Enrique no lo consideró suficiente, y solicitó a sus compañeros hacer la prueba del arrastre. Una vez ejecutada la acción sobre todos los puntos independientes, los resultados fueron desiguales. La contradicción entre lo que se percibe de una representación y los resultados de la medición y el arrastre, fue otra dificultad a la que se enfrentó el equipo.

Una tercera idea que trabajó el equipo se puede describir de la siguiente forma: dada una circunferencia y dos diámetros perpendiculares, construir un cuadrado. Sin embargo, las relaciones establecidas hasta este momento han sido perceptivas; por lo tanto, se considera que los alumnos estaban anclados en un nivel perceptivo. Al igual que en la segunda construcción (rectas paralelas) tuvieron dificultades para establecer la relación de perpendicularidad. Cuando el equipo decidió hacer la prueba del arrastre sobre las rectas, se notó la no dependencia entre los dos objetos. Esto evidenció la contradicción entre las medidas y sus apreciaciones perceptivas. En esta ocasión el arrastre fue utilizado para volver a la configuración inicial, donde las medidas eran iguales, lo que es un ejemplo de *foto-arrastre*. A pesar de que los alumnos lograron obtener una configuración concreta de un cuadrado, no fue satisfactoria para ellos. Actitud generada, quizás, por el uso de la herramienta del arrastre. Así que tomaron la decisión de borrarla e intentaron nuevamente.

Al rehacer la construcción, los alumnos establecieron la relación entre la circunferencia y las rectas, los cuatro puntos de intersección. Aunque la construcción no pasó la prueba del arrastre, se podría afirmar que los estudiantes estaban pasando de un nivel perceptivo a otro teórico: declarar una relación estructural, puntos de intersección. En este proceso de construcción podemos afirmar que consideraron la estrategia de reversibilidad de una construcción; es decir, regresar a la posición en la que coinciden los resultados de la medición y de la percepción.

Finalmente, después de algunas exploraciones, René descubrió el comando de *Polígono regular* y logró construir el cuadrado. La construcción pasó el primer nivel de verificación, el perceptivo, y se observó un cambio en su actitud de desánimo. La siguiente prueba, la de medición, fue hecha sobre la representación estática, tanto para los lados como para los ángulos. Cada vez que aparecía una medida, el equipo manifestaba su satisfacción. Resolver este problema requirió que evocaran diferentes condiciones, necesarias, que lo definieran. Las construcciones no exitosas fueron motor de búsqueda y toma de decisiones del equipo. La figura 9 presenta la secuencia de las diferentes construcciones realizadas por el equipo.

Figura 9. Secuencia de las construcciones realizadas (Sandoval y Moreno, 2012



Como se evidencia, en la descripción anterior, los estudiantes experimentaron dificultades al no establecer relaciones estructurales. Una vez terminada la actividad, se consideró pertinente la presentación de esta idea de construcción de cuadrado en la plenaria, para su discusión, pues no fue el único equipo que estableció relaciones perceptivas.

Respecto al trabajo realizado por René, Fernando y Enrique se puede decir que:

- El arrastre fue usado en dos sentidos. Primero para comprobar que su construcción no se desordenara, prueba del arrastre, y segundo de manera dirigida hacia una configuración específica que representa un cuadrado particular: *modalidad de arrastre transitorio*.
- La medición se aplicó de manera análoga al arrastre para: revisar la validez de una percepción, medidas probatorias, y acomodar la construcción a una configuración específica: *modalidad de medición transitoria*.
- El trabajo en equipo se manifestó en el intercambio de ideas, el manejo de la computadora y la discusión de los resultados. No se presentaron conflictos entre los estudiantes, pese a la tensión experimentada durante los últimos minutos de la actividad.

El tipo de representación generada por la GD es diferente a la realizada con papel y lápiz: aquélla es ejecutable, pues a través del arrastre la representación es procesada y conserva sus propiedades geométricas. En este caso se confirmó el establecimiento de relaciones, en su mayoría perceptivas; por lo tanto, los resultados de la medición y el arrastre fueron contradictorios con su percepción, lo cual generó un conflicto cognitivo que no lograron superar. Los estudiantes no obtuvieron un control conceptual en sus dos primeras ideas exploradas, ni lograron interpretar la representación construida en términos de la razón geométrica que la justificara; es decir, no se dio un proceso de visualización. Por lo tanto, en este caso, la función de Cabri dada por los educandos durante la mayor parte de la actividad fue para determinar algunas invariantes del objeto geométrico cuadrado, pero no lograron establecer distinciones estructurales, ni argumentativas entre una representación hecha en un ambiente informático y la realizada con papel y lápiz.

• *Ejemplo de una construcción colectiva*

Alexis, uno de los estudiantes, colocó los dos puntos y de inmediato construyó una circunferencia con centro en O y radio A. La relación de la circunferencia con el punto A fue sólo perceptiva, lo mismo que la recta que pasa tanto por O como por A. Enrique le sugirió trazar una perpendicular a la recta OA, que pasara por O. Esta propiedad entre las diagonales de un cuadrado fue aplicada de manera natural por varios de los equipos, en diferentes momentos de la actividad, aunque no la habían explicitado en la justificación de las construcciones. Dicha relación de perpendicularidad se estableció de forma estructural. Alexis terminó su construcción uniendo los puntos de intersección (de las rectas con la circunferencia, los cuales no habían sido especificados previamente) con segmentos. Pero para validarla comenzó el proceso de medición de cada uno de los lados. Conforme aparecían los resultados desiguales en la pantalla, se notaba desconcierto en los alumnos.

Fernando: Hay un error de una centésima.

Gladis: Lo que pasa es que las rectas no las colocó sobre los puntos.

Entrevistadora: ¿Cuáles rectas?

Gladis: Con el lapicito tenía que marcar hacia el punto y lo soltó nada más [se refiere al proceso que realizó Alexis al establecer las relaciones entre la recta y el punto A].

Todos impulsaron a Gladis para que presentara su solución ante el inconveniente que presentaba la construcción de Alexis. Mientras tanto, Alexis, que desplazaba la recta OA, se percató de que, en efecto, no había relación entre estos dos objetos. Es importante señalar que en Cabri deben explicitarse las relaciones estructurales, esto es, establecer las dependencias funcionales entre los elementos involucrados.

Gladis: Es que la recta no está sobre el punto [se refiere a que la recta que contiene a O no incluye al punto A].

Jorge: Quita ese punto [se refiere al punto A].

Enrique: No, ese punto no.

Gladis: Es dado [se refiere a que el punto A es un dato y no se puede quitar, como lo sugiere Jorge].

Así que se intervino para cuestionar la sugerencia de Jorge: "¿Pueden quitar ese punto?" A lo que Enrique y Gladis, en unísono, dijeron "no".

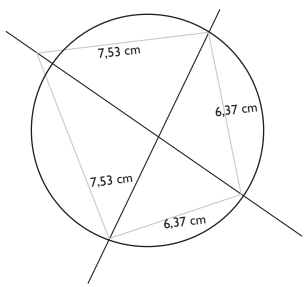
Entrevistadora: ¿Por qué no se puede quitar?

Fanny: Porque son puntos que ya te dan.

Fue notorio que algunos estudiantes ya diferenciaban entre lo dado (hipótesis, condiciones) y lo que tenían que hacer: construir un cuadrado. Alexis siguió con la construcción, garantizando que la recta contiene a los puntos O y A. Construyó la recta perpendicular a OA que pasara por O, a diferencia de la construcción anterior.

Nuevamente, midió y con el segundo resultado comprobó una vez más que eran diferentes. El error era muy pequeño. Los cambios de las medidas fueron perceptibles. Alexis movió el punto A y la construcción no se mantuvo, como se ilustra en la figura 10.

Figura 10. Imagen del video de la prueba del arrastre



El arrastre cambió de modalidad, ahora era dirigido. Algunos compañeros sugieren a Gladis, Fernando y Jorge que alguno de ellos le ayude a Alexis. Fernando, voluntariamente, pasó e hizo la construcción y de nuevo estableció geométricamente todas las relaciones entre los diferentes objetos. Dado que las rectas no tienen la apariencia de horizontal ni vertical, no generó conflicto. Para corroborar que los lados eran iguales, Fernando usó la medición seguida del arrastre. Con su intervención se dio por solucionado el problema.

Algunos comentarios a manera de cierre

En el desarrollo de esta actividad, la mayoría de los estudiantes se enfrentó al conflicto entre la percepción, las medidas y el arrastre en el establecimiento de algunas relaciones, unos equipos rehicieron su construcción cuando no pasaba las pruebas del arrastre y medición, pero otros optaron por explorar nuevas opciones.

El arrastre (en la mayoría de los casos, junto con la medición) fue utilizado como una forma de comprobar si una construcción estaba bien hecha. Las dos herramientas de la GD permitieron a los estudiantes confrontar su percepción con la teoría interna de la computadora. A diferencia de sus respuestas en el cuestionario a lápiz y en papel y el tiempo invertido en dicha construcción, los alumnos enfrentaron dificultades para hacer la representación de un cuadrado en un ambiente de GD. El trazo de un cuadrado con Cabri es diferente, ya que exige explicitar relaciones entre los objetos involucrados; es decir, pasar de un nivel perceptivo a uno geométrico para que la construcción supere la prueba del arrastre.

Durante el desarrollo de la actividad de construcción, se aprecia un cambio en el objeto de observación: el cuadrado ya no como un dibujo, sino como el resultado de las relaciones entre objetos geométricos. El cambio conlleva la coordinación simultánea entre el registro figural y el discursivo. La imagen formada por los estudiantes del cuadrado, cuando se construye usando Cabri, es diferente y más cercana del objeto geométrico. Por lo tanto, el nivel de evidencia del dibujo electrónico fue mayor que el realizado en papel, y el establecimiento de relaciones se modificó de perceptivo a geométrico, para lograr la correspondencia con el universo interno del programa. Sin embargo, el paso de lo perceptivo a lo teórico no se dio en su totalidad, aunque sí se logró cierta evolución en los procedimientos de construcción, desde lo perceptivo a un nivel geométrico.

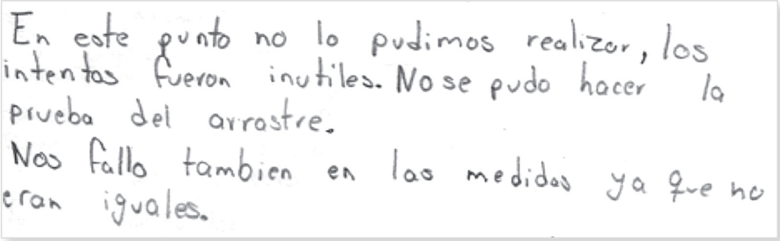
Conclusiones respecto a las actividades

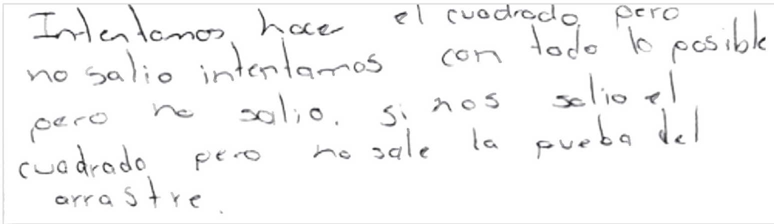
1. El dibujo electrónico fue más evidente para los estudiantes que uno en papel y a lápiz. El dibujo electrónico es un espejo del universo interno que yace en el procesador de la computadora, que permite manipular el dibujo preservando sus relaciones estructurales y, por ende, está más cerca del objeto geométrico. Aunque el estudiante no tiene conciencia del control *a priori* (el caso de René, Enrique y Fernando, actividad 1), lo empieza a sentir cuando ve que las accio-

nes indicadas, sugeridas, por los datos perceptuales no son arbitrarias, como ocurre con los dibujos en papel, sino que existen restricciones ante la presencia de una estructura.

2. Las representaciones ejecutables ayudan a los estudiantes a: producir conjeturas, enlistar el procedimiento seguido en una construcción y describir tal procedimiento tanto en forma verbal como escrita. Pero, a diferencia de lo que afirma Maracci (2001), los alumnos interpretan las representaciones, teniendo en cuenta tanto aspectos figurales como conceptuales. Es decir, no siempre se logra el proceso de visualización. Sin embargo, dadas las características del dibujo electrónico y del mecanismo de control, que obedece a la teoría interna de la computadora, parece posible la existencia de un puente entre la evidencia geométrica de Cabri y la argumentación geométrica.
3. Se considera que las actividades de construcción ayudan al estudiante a otorgar sentido a las definiciones, como la del cuadrado, que posteriormente podrán utilizar en la solución de problemas. Por ejemplo, los alumnos vincularon su dibujo electrónico con la teoría, mediante las herramientas de medición, arrastre, construcciones auxiliares y verificación de propiedades. Con el desarrollo de dicha actividad se ilustró que el dibujo electrónico es más cercano al objeto geométrico que un dibujo a lápiz y en papel.

Figura 11. Dificultades experimentadas por los estudiantes por no establecer relaciones estructurales


En este punto no lo pudimos realizar, los
intentos fueron inutiles. No se pudo hacer la
prueba del arrastre.
Nos fallo tambien en las medidas ya que no
eran iguales.

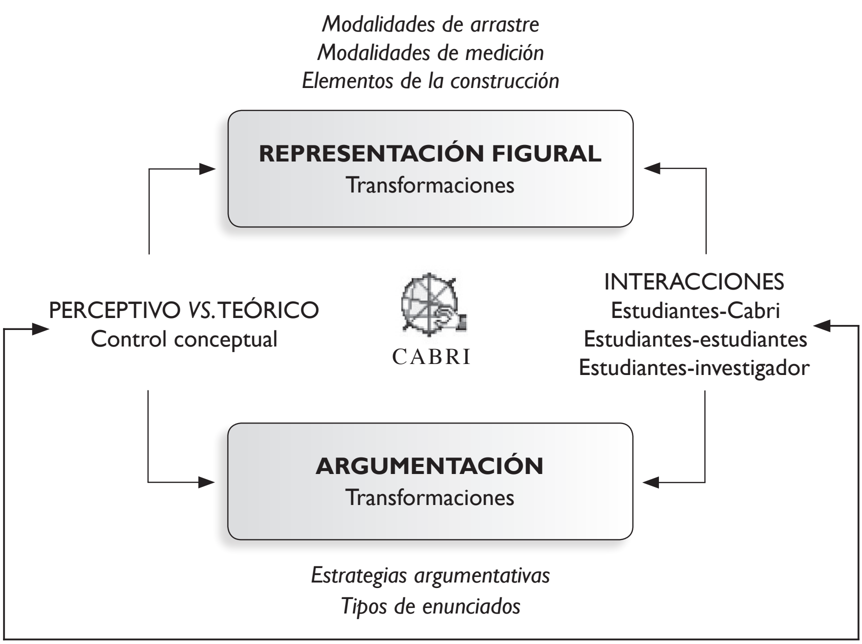

Intentamos hacer el cuadrado pero
no salio intentamos con todo lo posible
pero no salio. si nos salio el
cuadrado pero no sale la prueba del
arrastre.

4. Una conjetura que surge de las tareas de construcción permite al estudiante movilizar su conocimiento. El tipo de herramientas que utiliza en una construcción muestran el nivel de articulación conceptual (construir un cuadrado, involucrando relaciones de igualdad, paralelismo, perpendicularidad o simetría), y refleja las diferencias en el manejo del conocimiento geométrico.
5. El papel del arrastre en una construcción generó modalidades de arrastre y medición diferentes a las concebidas en tareas de solución de problemas abiertos. Por ejemplo, en una labor de construcción, la prueba del arrastre es la verificación empírica, por excelencia, junto a la medición; mientras que el arrastre azaroso parece no suscitarse en este tipo de tareas. Sin embargo, surge una nueva modalidad denominada *transitoria,* caracterizada por acomodar la representación a una configuración que cumple con lo que se busca, esto es, un ejemplo particular, el cual constituye para los alumnos, la solución al problema de construcción. También se presentan las modalidades de *film-arrastre* y *foto-arrastre*. En la última actividad, foto-arrastre fue una herramienta predominante en los equipos analizados. Los alumnos realizaron su exploración con GD de manera análoga a como lo harían a lápiz y en papel.
6. Las intervenciones del docente son esenciales para hacer posible la construcción de una correspondencia entre el conocimiento matemático y el conocimiento construido a partir de las interacciones con el ambiente de computadora. El cono-

cimiento (significado) construido por el alumno al usar una herramienta puede variar al planteado por el maestro. Por lo tanto, la intervención del profesor permite guiar discusiones sobre los significados desarrollados por los estudiantes con respecto a los culturalmente compartidos dentro de la comunidad matemática.

La figura 12 presenta un resumen de los procesos realizados por los estudiantes durante la fase experimental.

Figura 12. Relaciones que aparecieron durante la fase experimental



CAPÍTULO III

EL PAPEL DE LAS REPRESENTACIONES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

[...] totum huius loci artificium consistet in eo, quod ignota pro cog- nitis supponendo possimus facilem & directam quærendi viam nobis proponere, etiam in difficultatibus quantumcumque intricatis.[1]

Descartes (1701, pp. 61-62)

En la transición del conocimiento aritmético al algebraico tienen lugar cambios profundos en prácticas y nociones del pensamiento aritmético. Como se ha mostrado en Solares (2007), en esta transición resultan de fundamental importancia los cambios en la concepción de operaciones realizadas sobre *números*, para dar cabida a la concepción de objetos "distintos" a los números: las *incógnitas*, las *variables*, los *números generalizados*. Las operaciones realizadas sobre estos nuevos objetos deben ser construidas y dotadas de significados. Si bien es necesario modificar las nociones aritméticas en

[1] "el artificio entero de esta exposición consistirá en que, suponiendo lo desconocido como conocido, podamos preparar un camino de investigación fácil y directo, incluso en las dificultades más intrincadas que se quiera" (Descartes, 1984, p. 161).

aras de la adquisición de las competencias algebraicas, se requiere además de este conocimiento previo.

Uno de los temas más relevantes en el estudio de estos cambios es la iniciación al estudio de la simbología y manipulación algebraica, es decir, el de los primeros pasos en el aprendizaje de la sintaxis algebraica. Investigaciones como las de Kieran (1981), Kieran y Sfard (1999) y Solares y Kieran (2013) muestran que una re-conceptualización de la *igualdad*, de operador a signo de equivalencia, es indispensable para entrar al mundo del álgebra.

Otra de las grandes rupturas entre la aritmética y el álgebra fue identificada por Filloy y Rojano (1984 y 1989) en el momento en que por primera vez se tiene que *operar la incógnita* al resolver ecuaciones lineales que contienen "x" en ambos lados de la igualdad. Estos y otros estudios (Herscovicks y Linchevsky 1991; Vlasiss, 2002; Gallardo, 2002, entre otros) reportan que muchas de las dificultades que los alumnos encuentran en el proceso de adquisición del lenguaje del álgebra se originan por el arraigo a las fuentes de significado, provenientes de la aritmética o del lenguaje coloquial, al interpretar los símbolos literales y los signos de operación.

En este capítulo presentamos los resultados de análisis que proporcionan líneas de trabajo para caracterizar la relación entre la representación algebraica y los procesos de aprendizaje del álgebra. Retomamos los resultados presentados en la tesis doctoral *Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita* (Solares, 2007), en la que se estudian las nociones y prácticas matemáticas requeridas para manejar dos "formas" de representación de la *incógnita*: en ecuaciones lineales de una incógnita de la forma $\mathrm{a}x + b = \mathrm{c}x + \mathrm{d}$ (primer nivel de representación algebraica de la incógnita), y en sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas de la forma

$y = \mathrm{a}x + b$,
$y = \mathrm{c}x + d$ (segundo nivel de representación algebraica:
una incógnita en términos de otra).

La operación de la incógnita. Un corte didáctico

El estudio *Operación de la incógnita* llevado a cabo por Filloy y Rojano (1984) aborda el cambio de las nociones de las operaciones y de los objetos, en el tránsito de la aritmética al álgebra, cuando se introducen por primera vez la representación y la operación algebraicas de lo desconocido para la solución de ecuaciones lineales de una incógnita y los problemas verbales correspondientes. Estos autores localizan un *corte didáctico* en la línea de evolución del pensamiento que corresponde, con las distancias que median entre un ámbito y otro, a cambios importantes en la historia del surgimiento del álgebra simbólica, concernientes a la concepción y operación de objetos como las incógnitas (Filloy y Rojano, 1989).

El siguiente diagrama 1, tomado de Solares (2007), ilustra la localización del corte en términos de la enseñanza. El lado izquierdo corresponde a las ecuaciones que no requieren *operar la incógnita* para ser resueltas; del lado derecho se ubican las ecuaciones que sí requieren *operar la incógnita* para su solución. Los autores señalan que el *corte didáctico* se ubica justamente entre estos dos tipos de ecuaciones, en el momento en que los estudiantes ya han sido enseñados a resolver *ecuaciones aritméticas* (lado izquierdo) y aún no han sido enseñados a resolver las *ecuaciones no-aritméticas* (lado derecho). Los resultados de Filloy y Rojano indican que en este momento los conocimientos de los estudiantes no son suficientes para desarrollar procedimientos eficaces para la solución de las ecuaciones no-aritméticas, aun cuando sean altamente competentes para la solución de las aritméticas. Además, reportan distintos fenómenos cognitivos que evidencian las dificultades en los procedimientos y en las representaciones involucradas al pasar del pensamiento aritmético al algebraico. Más adelante discutiremos uno de estos fenómenos.

Diagrama 1

Los niños ya han aprendido a resolver *ecuaciones aritméticas*	Los niños no han recibido instrucción alguna para resolver las primeras *ecuaciones no-aritméticas*
Algunos ejemplos del tipo de ecuaciones son:	Algunos ejemplos del tipo de ecuaciones son:
$Ax \pm B = C$	$Ax \pm B = Cx$
$Ax\,(Bx \pm C) = D$	$Ax \pm B = Cx \pm D$
$\frac{x}{A} = B\,\frac{x}{A} = \frac{B}{C}$	
Para resolverlas, es suficiente con invertir las operaciones (aplicadas a los datos del problema).	Para resolverlas no basta con invertir las operaciones (aplicadas a los datos del problema).
No es necesario operar lo representado	Es necesario operar lo representado

Una de las principales evidencias de la existencia de este corte didáctico es el fenómeno de aprendizaje del álgebra conocido como *polisemia de la x* (Filloy y Rojano, 1989; Herscovicks y Linchevsky 1991; Vlasiss, 2002; Rojano, 2010). La polisemia de la x consiste en la lectura espontánea que los adolescentes tienden a hacer de las ecuaciones del tipo $x + x/4 = 6 + x/4$, al decir que: "esta x (el primer término del lado izquierdo) vale 6 y estas dos (las equis que aparecen en los términos $x/4$) pueden tener cualquier valor, pero el mismo valor (ambas)". Con la finalidad de analizar estas respuestas, Filloy y Rojano utilizaron términos de la semiótica para referirse al primer paso de la igualación ("esta x vale 6"), que proviene de una lectura hecha en el campo semántico al que pertenecen las igualdades restringidas o ecuaciones. En tal caso, la x es una incógnita. Mientras que el segundo paso de la igualación ("estas dos pueden tener cualquier valor") proviene de una lectura realizada en el campo semántico de las igualdades tautológicas o equivalencias algebraicas y, en ese caso, la x es un número general. De ahí la expresión *polisemia de la x*, en virtud de que se trata de asignar al mismo símbolo, en la misma oración algebraica, significados provenientes de distintos campos semánticos del lenguaje algebraico.

La *polisemia de la x* muestra la necesidad de una reconceptualización profunda de la igualdad en matemáticas, más allá de su significado aritmético, que permitiera entender y operar con lo desconocido en el terreno del álgebra. Los intentos por resolver las lecturas polisémicas de los estudiantes, recurriendo a problemas de enunciado cuyas ecuaciones correspondientes del tipo $x + 5 = x + x$, no rindieron frutos.

En el contexto del problema, los estudiantes aceptaban que todas las ocurrencias de la x tenían el mismo valor, el mismo referente (la edad de una persona, el precio de un producto). Pero, una vez replanteada la ecuación en el nivel sintáctico, a la pregunta ¿cuánto vale la x?, la respuesta volvía a ser *polisémica*. La persistencia de la centración en determinados tipos de lectura de las expresiones algebraicas nos permite hablar de *estratos de lenguaje intermedio* entre la aritmética y el álgebra, así como de *tendencias cognitivas* en momentos de transición hacia el pensamiento algebraico (Rojano, 2004, 2006).

La operación de la incógnita en términos de otra. Un segundo corte didáctico

En el estudio *Operación de la incógnita* (Filloy y Rojano, 1989) quedó pendiente uno de los problemas de investigación: el progreso en la representación y operatividad algebraica cuando la incógnita aparece representada por una expresión que involucra una segunda incógnita. Uno de los primeros momentos en que esto se presenta en el currículo es cuando se estudian los métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, una vez que los alumnos han remontado los primeros obstáculos de la transición hacia el álgebra simbólica. Aunque el trabajo con dos incógnitas en la educación secundaria ha sido menos investigado que los primeros accesos a la sintaxis algebraica, se ha profundizado en el tema del manejo de dos variables con una perspectiva tecnológica con el uso de programas computacionales y calculadoras graficadoras, como con el uso de CAS (Drjvers, 2003), y de hojas electrónicas de cálculo (Sutherland y Rojano, 1993; Rojano, 1996). En el proyecto *VisualMath Curriculum* (Yerushalmy y Shternberg, 2001) se realiza un acercamiento funcional al estudio del álgebra, a través del uso intensivo del *software* especializado con múltiples representaciones de las funciones. En este programa, las letras representan cantidades que varían, y la resolución de ecuaciones se concibe como un caso particular de la igualación de dos funciones. Así, para resolver las ecuaciones con una incógnita, como $2x + 3 = 4x + 1$, lo que se hace es comparar gráficamente las funciones:

$$f(x) = 2x + 3$$
$$f(x) = 4x + 1$$

Lo anterior corresponde a la resolución del siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (Yerushalmy y Chazan, 2002):

$$y = 2x + 3$$
$$y = 4x + 1$$

En el ejemplo anterior, la incógnita y se representa, además de con una letra y con una expresión que involucra a la otra incógnita la x; lo que obliga a los alumnos a operar lo desconocido, al enfrentarse con los dos tipos de representación.

El interés del estudio que se reporta a continuación está en el progreso de las competencias sintácticas desarrolladas para la operación de una incógnita para el dominio de los métodos clásicos de resolución (lápiz y papel) de este tipo de sistemas, los cuales involucran dos incógnitas; pero enfatizando el hecho de que ahora la operatividad tiene lugar en representaciones de “segundo nivel” de tales incógnitas. Con estas consideraciones en mente, nos preguntamos: ¿Qué requerimientos conlleva esta extensión de la operatividad con una incógnita a la operatividad con dos? ¿Será necesario, por ejemplo, ampliar nociones como la igualdad o la incógnita misma?, así como lo mostraron los estudios de operación con una incógnita. La respuesta a estas dos preguntas es afirmativa y este capítulo está dedicado a exponer el sustento teórico y empírico correspondiente (para una discusión más amplia véase Solares, 2007).

SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SIGNOS: UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA

Para estudiar el significado pragmático del conocimiento matemático es necesaria una herramienta de análisis que permita abordar los textos que producen los alumnos cuando están enfrentando problemas nuevos (Solares, 2007). La noción de *Sistema Matemático de Signos* (SMS) fue introducida (Filloy y Kieran, 1989; Filloy, 1990, 1999; Filloy y Hoyos, 1993; Kieran, 1998; Filloy, Rojano y Puig, 2007) como herramienta de análisis, tanto de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares, como de los textos matemáticos históricos "tomados como monumentos, petrificaciones de la acción humana o procesos de cognición propios de una *episteme*" (Puig en Filloy, 1999, p. 64). Esta herramienta permite estudiar los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido, como señala Puig:

> Lo que hay que calificar de *matemático* (en el proceso de producción de un texto) no es sólo un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos; es decir, no hay que hablar de sistemas de signos matemáticos, sino de *Sistemas matemáticos de signos* (pp. 64 y 65).

La noción de SMS nos permite analizar los *sistemas de signos intermedios* que generan los estudiantes en la resolución de nuevos problemas, con sus correspondientes *códigos personales*, para descubrir las dificultades que se producen cuando usan los diferentes SMS de que disponen, sus conocimientos previos, para resolver un problema en el cual necesitan "construir" un SMS nuevo, en el cual sus conocimientos previos no son suficientes.

Para el estudio de los fenómenos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático específico, Filloy (1999) propone la construcción de *Modelos teóricos locales* que expliciten, tanto los supuestos sobre la naturaleza del fenómeno estudiado, como el método para estudiarlo: "Para poder observar experimentalmente este tipo de fenómenos debemos contar con un marco teórico que permita interpretar tales hechos y proponer nuevas observaciones que desentrañen las relaciones entre los diversos componentes que entran en juego" (p. 3). En todo proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático hay cuatro elementos esenciales: el sujeto que enseña, el sujeto que aprende o los sujetos que aprenden, el conocimiento matemático puesto en juego, y la comunicación que establecen los involucrados. Por lo tanto, es necesario que todo modelo teórico local explicite la manera en que entendemos cada uno de estos elementos; es decir, debemos definir el *modelo:*

- *De enseñanza* usado.
- *De procesos cognitivos* con el cual se interpreta el comportamiento del sujeto que aprende.
- Que describe en el nivel *formal* al conocimiento matemático en cuestión.
- *De comunicación* con el cual se interpreta el intercambio de mensajes que realizan los sujetos.

La propuesta de los modelos teóricos locales se caracteriza por concentrarse en el significado dado por el *uso*. Se sabe que cuando los niños se enfrentan a problemas nuevos, para los cuales el conocimiento del que disponen no es suficiente, generan *estrategias y códigos personales* en un intento de encontrar la solución a partir del conocimiento a su alcance, generando nuevas maneras de representar las nuevas acciones que realizan (Filloy y Rojano, 1989; Filloy, Rojano y Solares, 2002; Solares, 2002). En estos procesos de generación de estrategias y códigos se originan, a su vez, *significados intermedios* del conocimiento matemático puesto en juego. Además, como señala Filloy, "en esta etapa se presentan también obstrucciones que dichas grafías personales imponen cuando aumenta la complejidad de la situación, generando lo que después se consideran errores naturales de sintaxis" (1999, p. 42). Esta perspectiva teórica nos permite observar los fenómenos en torno a la extensión de la sintaxis aprendida para solucionar ecuaciones lineales con una incógnita a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y los nuevos significados que se construyen en este proceso de extensión.

Significado en matemáticas

De acuerdo con Filloy (1999), en la generación de los SMS hay al menos cuatro fuentes de significado que se originan por:

- *Transformaciones* dentro de un SMS del que dispone el aprendiz, sin referencia con otro SMS del que también cuente.
- *Traducciones* a través de distintos SMS disponibles.
- *Traducciones* entre SMS disponibles y SMS.
- *Consolidación*, *simplificación*, *generalización* y *rectificación* de acciones, procedimientos y conceptos de los *sistemas de signos intermedios* creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje.

Las tres primeras fuentes de significado:

> representan medios de tratar con expresiones primitivas y maneras de combinarlas. La cuarta fuente de significado representa procesos de *abstracción* y

> *generalización*, por la cual signos compuestos (de SMS intermedios) pueden ser nombrados y manipulados como unidades, y, después usados en procesos de significación para solucionar las nuevas situaciones de resolución de problemas propuestas al aprendiz (Filloy, 1999, p. 75).

Los significados intermedios construidos para resolver los nuevos problemas y sus sistemas de signos intermedios correspondientes, constituyen estratos del sistema matemático de signos nuevos.

La semántica de las escrituras algebraicas

En la investigación presentada por Solares (2007), el análisis de los significados asociados a la solución de los sistemas de ecuaciones mediante *igualación* y *sustitución algebraicas* se aborda mediante el estudio del significado en los distintos estratos del *Sistema Algebraico de Signos* (Sals). En este apartado se retoma dicho análisis para discutir la descripción de los significados de las expresiones y transformaciones dadas por su uso en el estrato competente del Sals.

En la descripción de la semántica del estrato competente del Sals retomamos los resultados del estudio *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* realizado por J. P. Drouhard (1994). El autor introduce una noción de *significado* que comprende cuatro aspectos:

- *Denotación:* corresponde a la *función algebraica* definida por la expresión.
- *Sentido:* dado por el *conjunto de las transformaciones* aplicables a la expresión.
- *Interpretación:* corresponde a las diversas lecturas dadas a la expresión en los distintos *contextos* en los que puede aparecer (como la teoría de números, la geometría analítica, etc.).
- *Connotación*: la *significación psicológica* que depende de cada individuo.

En particular, es de especial interés la distinción entre *sentido* y *denotación* de una expresión algebraica, construida a partir de la aplicación de los conceptos *Sinn* y *Bedeutung*[2] desarrollados por Frege (1996).

El diseño metodológico: dos rutas didácticas para los métodos de igualación y sustitución

El momento adecuado para la observación de los problemas de la adquisición de la sustitución y la igualación algebraicas es aquel en que las dificultades que enfrentan los estudiantes (de 13 a 14 años) al resolver problemas lineales con dos incógnitas, generan la necesidad de extender la sintaxis y los significados de los símbolos algebraicos (para una descripción más detallada véase Solares, 2007). Ya que sus conocimientos sobre la manipulación y la representación de una incógnita (en ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$) deben ser extendidos, afinados y, bajo una relación dialéctica (Filloy, 1999), los significados de los símbolos algebraicos deben ser reelaborados. En el programa de estudios de matemáticas este momento ocurre después de que los estudiantes han sido instruidos en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, pero cuando aún no han recibido enseñanza sobre la resolución de sistemas de ecuaciones.

La población

Para el estudio de la *Operación de la incógnita en términos de otra* (Solares, 2007) se trabajó con un grupo de 21 estudiantes de

[2] Frege traza una distinción entre lo que él llama el Sinn (sentido) y Bedeutung (referencia) de una expresión. Según Frege, el sentido y la referencia son dos aspectos distintos del significado. Para él, tanto las expresiones de objeto como las de concepto tienen una referencia (un objeto al que se refiere) y un sentido (una forma de hablar de ese objeto).

segundo grado de secundaria del Centro Escolar Hermanos Revueltas, a quienes se les enseñó matemáticas dentro de un sistema de *enseñanza controlada*. En éste la población recibió instrucción en matemáticas con materiales que les permitieron realizar trabajo en clase e individual a su propio ritmo.

Gracias a la *enseñanza controlada* fue posible conocer los antecedentes escolares de los estudiantes y observar la evolución de su aprendizaje. Este sistema de enseñanza permitió aplicar cuestionarios diagnósticos, detener la enseñanza en clase en el momento adecuado para la observación y realizar *entrevistas clínicas con intervención*.

Al inicio del curso de matemáticas se aplicaron cuatro cuestionarios diagnósticos, los cuales abordaron aspectos de pre-álgebra y la solución de las primeras ecuaciones lineales de una incógnita. Al final del segundo grado se aplicaron tres cuestionarios más sobre ecuaciones lineales de una incógnita y los primeros sistemas de ecuaciones.

Los cuestionarios diagnósticos

Durante el periodo en que se desarrolló la enseñanza controlada en primer y segundo grados, se diseñó una serie de cuestionarios diagnósticos para identificar los conocimientos de los sujetos de acuerdo con los cuatro ejes: sintáctico, semántico, de lectoescritura y de cálculo numérico, que permitieron determinar el estrato del Sals con el que abordaban la solución de los primeros sistemas de ecuaciones (Solares, 2007). Estos ejes tienen las siguientes características:

- *Sintáctico,* da cuenta de las transformaciones sintácticas que los estudiantes usan para encontrar el valor de lo desconocido en una ecuación de una incógnita.
- *Semántico,* permite describir las estrategias de solución de los problemas verbales propuestos.

- *Lecto-escritura,* agrupa las competencias vinculadas a los procesos de lectura y escritura (descodificación y codificación) de los textos propuestos a los sujetos y de los textos que producen. Estos procesos se presentaron en las traducciones de problemas verbales a términos "algebraicos" para su solución, y en las tareas de construcción de un problema correspondiente a una ecuación (Filloy y Rojano, 1991).
- *Eje de cálculo numérico,* corresponde a las competencias de cálculo aritmético que utilizaron en la solución y verificación de ecuaciones lineales.

Los cuestionarios correspondientes a los *ejes sintáctico* y *semántico* fueron aplicados en dos momentos: antes de la introducción al álgebra escolar y después de la enseñanza de la operación algebraica de una incógnita.

A partir de los resultados de los cuestionarios de diagnóstico, se seleccionó a los estudiantes que utilizaban de forma sistemática la *Trasposición algebraica de términos* o la *Cancelación algebraica de términos,* correspondientes respectivamente con los llamados métodos *viético* y *euleriano*[3] de solución de ecuaciones. Además, se eligieron algunos alumnos que no habían consolidado su conocimiento de la sintaxis algebraica relativa a una incógnita, pero sí contaban con altas competencias de cálculo numérico y usaban sistemáticamente el tanteo (llamado también *aproximaciones numéricas sucesivas*) en la solución de ecuaciones. Todos los sujetos seleccionados recurrieron a métodos aritméticos para la solución de los problemas con dos o más cantidades desconocidas; es decir,

[3] El método viético para resolver ecuaciones lineales de una incógnita consiste en encontrar el valor de la incógnita mediante su despeje por trasposición de términos; es decir, si un término de la ecuación tiene cierta operación, pasa o se traspone en el otro miembro con la operación inversa. El método euleriano consiste en encontrar el valor de la incógnita despejándola mediante la aplicación de las mismas operaciones de términos en ambos miembros de la ecuación; estas operaciones deben mantener la igualdad entre los miembros de la ecuación.

hicieron tanteos o aproximaciones numéricas sucesivas. Es necesario recordar que, en el momento de la observación, no se habían enseñado aún los métodos de solución de sistemas de ecuaciones.

La entrevista

El diseño de entrevista permite observar los fenómenos relacionados con la representación y manipulación de lo "desconocido en términos de lo desconocido", en el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas. Se parte de la sintaxis previamente aprendida para solucionar una ecuación de una incógnita y se presentan problemas que requieren "extender" tal sintaxis para la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

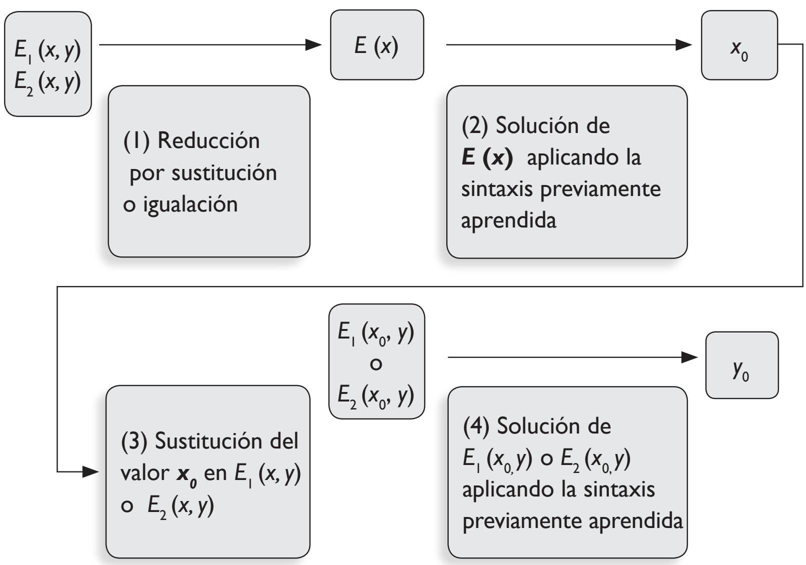
La ruta seguida en la entrevista considera las siguientes fases, las cuales involucran nuevas transformaciones para solucionar sistemas de ecuaciones con dos incógnitas (Solares, 2007):

- (0) Preparación.
- (1) Aplicación de las transformaciones de *igualación* o *sustitución* algebraicas.
- (2) Solución de la ecuación lineal de una incógnita resultante.
- (3) Sustitución numérica del valor encontrado en (2) en alguna de las ecuaciones originales del sistema.
- (4) Solución de la ecuación resultante de la sustitución numérica en (3).

Los valores de las incógnitas se encuentran en las fases (2) y (4); es decir, en ellas está la solución del sistema. La figura 13 muestra la aplicación sucesiva de estas cinco fases.

El guion de la entrevista inicia con problemas verbales de dos cantidades desconocidas y tareas sintácticas puras (los primeros sistemas de ecuaciones). Los ítems comienzan con sistemas de ecuaciones en los cuales una de ellas es de una incógnita, ya sea aritmética de un paso, de dos, o no aritmética. Luego, se introducen sistemas de ecuaciones donde las dos ecuaciones son de dos incógnitas. En esta entrevista, los sistemas se pueden reducir por *igualación algebraica* o por *sustitución algebraica*.

Figura 13. Fases de las rutas didácticas para la introducción de los métodos de igualación y sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones (Solares, 2007)



Las intervenciones del entrevistador consisten, en el caso de la *igualación*, en hacer notar la igualdad de los valores numéricos de las expresiones obtenidas y proponer el uso de la *transitividad* de las expresiones algebraicas correspondientes, de la siguiente manera: dado un sistema del tipo $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, $y = \mathrm{c}x + \mathrm{d}$, como el valor de esta y tiene que ser igual que el de esta y, entonces $\mathrm{a}x + \mathrm{b}$ tendría que ser igual a $\mathrm{c}x + \mathrm{d}$.

En el caso de la *sustitución* las intervenciones del entrevistador consisten en hacer notar la pertinencia de su uso, ya sea por la *economía de las transformaciones sintácticas a efectuarse* o por su pertinencia debido a la *equivalencia algebraica de expresiones*, de la siguiente manera: dado un sistema del tipo $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, $\mathrm{c}x + \mathrm{d}y = \mathrm{e}$, si esta y tiene que ser igual a esta y, entonces en lugar de y en la segunda ecuación puedo poner $\mathrm{a}x + \mathrm{b}$.

Los ítems que introducen la igualación y la sustitución están diseñados para generar la necesidad de extender la sintaxis y los significados de los símbolos algebraicos a través de la proposición de sistemas que puedan ser "directamente" resueltos por igualación o por sustitución. Éstos poco a poco se van haciendo más complejos, por lo que se debe reflexionar en torno a: los dominios numéricos de los coeficientes y de las soluciones, las transformaciones que se pueden aplicar, los objetos a los que se aplican, la igualdad de expresiones algebraica, etcétera.

A continuación presentamos algunos ítems de las rutas didácticas seguidas para la introducción de los métodos de igualación y de sustitución algebraicas para la solución de sistemas de ecuaciones (tabla 2).

Tabla 2. Problemas correspondientes a las rutas didácticas para la introducción de los métodos de igualación y sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones (Solares, 2007)

Rutas didácticas del estudio	
Para introducir el método de igualación	Para introducir el método de sustitución
1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que una de ellas es una ecuación lineal de una incógnita. 1.a. Sistemas que se resuelven mediante *igualación numérica directa*, como: $y = 6, 7x - 8 = y$ 1.b. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de un paso*, como: $y + 17 = 128;\ y + 10 = x$ 1.c. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de dos pasos*, como: $2x - 7 = 9; x = 32 - 4y$ 1.d. Sistemas que se resuelven mediante *despeje algebraico*, como: $3x - 2 = y; 7y + 15 = 4y - 45$	1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que una de las ecuaciones es una ecuación lineal de una incógnita 1.a. Sistemas que se resuelven mediante *sustitución numérica directa*, como: $y = 6, 7x - 8 = y$ 1.b. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de un paso*, como: $y + 17 = 128; y + 10 = x$ 1.c. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de dos pasos*, como: $x = 17 - y; 4\ (x - 8) = 72$ 1.d. Sistemas que se resuelven mediante *despeje algebraico*, como: $3x - 2 = y; 7y + 15 = 4y - 45$
2. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que en ambas ecuaciones aparecen las dos incógnitas. 2.a. Sistemas que se resuelven mediante *igualación algebraica*, como: $y = 2x, 5x + 3 = y$ 2.b. Sistemas que requieren un despeje para poder realizar, después, la *igualación algebraica*, como: $x = y + 1, x + y = 11$ 2.c. Sistemas que requieren varios despejes para poder realizar, después, la *igualación algebraica*, como: $3x + 8y = 84, 8x + 3y = 59$	2. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que en ambas ecuaciones aparecen las dos incógnitas. 2.a. Sistemas que se resuelven mediante *sustitución algebraica*, como: $x + 1 = 4y, x = 2y + 7$ 2.b. Sistemas que requieren un despeje para poder realizar, después, la *sustitución algebraica*, como: $3x + y = 14; x + y = 10$

Para ambas rutas, se propone trabajar primero con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que una de las ecuaciones es una "asignación de valor" para una de las incógnitas o una ecuación lineal de una incógnita. Además, se considera resolver distintas variantes de estos tipos de sistemas, comenzando por los más simples e ir haciendo más compleja la estructura de las ecuaciones y sus dominios numéricos de solución.

Las rutas continúan el trabajo con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que en ambas ecuaciones aparecen las dos incógnitas. Nuevamente, se considera resolver distintas variantes de estos tipos de sistemas, de los más simples a los más complejos por la estructura de las ecuaciones y los dominios numéricos de solución.

Principales resultados del estudio operación de una incógnita en términos de otra

Los resultados dan cuenta de la constitución de un nuevo nivel en la simbolización algebraica de lo desconocido, un nivel asociado a la representación de una incógnita dada en términos de otra incógnita. Este nuevo nivel se caracteriza a partir de la necesidad de la reelaboración de nociones algebraicas esenciales en el lenguaje algebraico: *incógnita* e *igualdad* (Solares, 2007).

A continuación, se presentan las evidencias de la constitución de este nivel de representación algebraica y los aspectos de las nociones de incógnita e igualdad que es necesario reelaborar.

Las evidencias de la existencia de un nuevo corte didáctico

Como se muestra en la investigación de Solares (2007), los estudiantes entrevistados enfrentaron las dificultades planteadas en los problemas de dos incógnitas recurriendo a distintos estratos del Sals, representando y operando "lo desconocido" de distintas maneras, no necesariamente algebraicas.

No obstante la variedad de estratos, encontramos que al resolver sistemas formados por una ecuación lineal de una incógnita y otra de dos incógnitas (que llamamos *sistemas (1, 2)*), los estudiantes generaron espontáneamente un *sentido intermedio*, la *estrategia (1, 2)* que consiste en:

1) solucionar la ecuación de una incógnita;
2) sustituir en la ecuación de dos incógnitas el valor encontrado en el paso anterior, y
3) solucionar la ecuación de una incógnita obtenida mediante la sustitución anterior.

En contraste, al resolver los sistemas de ecuaciones lineales en los que las dos incógnitas aparecen en ambas ecuaciones (que llamamos *sistemas (2,2)*), los estudiantes abordaron la solución sin extender la sintaxis algebraica que previamente sabían, sino que recurrieron a *estratos más concretos* que el algebraico para representar y operar lo desconocido.

Encontramos también *tendencias cognitivas* (Filloy, Rojano y Puig, 2008) que evidencian la existencia del corte. Las maneras "más concretas" de operar lo desconocido en la solución de los sistemas S (2, 2) corresponden al análisis de las relaciones entre las cantidades desconocidas y las conocidas con recursos provenientes de la aritmética y del lenguaje natural. Este regreso a estratos más concretos del Sals, estratos aritméticos y del lenguaje natural, caracteriza los acercamientos espontáneos de los estudiantes entrevistados. Otra tendencia cognitiva presente de manera reiterada durante distintos momentos de la entrevista es la restricción al estrato numérico de los enteros positivos para hacer la interpretación de las soluciones de los sistemas S (2, 2), fenómeno conocido como *centración* (Filloy, Rojano y Puig, 2008). Esta centración en los enteros positivos obstruyó la solución de los sistemas presentados.

Los ítems de la entrevista se diseñaron de modo que se pusieran de manifiesto las limitaciones de las estrategias numéricas. La *igualación* y la *sustitución* se introdujeron, mediante la intervención del entrevistador, como maneras "más económicas" de encontrar la solución o formas "que sí permiten" encontrarla. Si bien la intervención lo permitió, al mismo tiempo generó conflictos con los conocimientos anteriores. Pues los estudiantes entrevistados tuvieron que reformular los conceptos y las relaciones en torno a la representación y la operación de la incógnita.

La aparición de las tendencias cognitivas descritas más arriba, la generación de sentidos intermedios y la necesidad de reformulación de los conocimientos algebraicos son evidencia de la existencia del nuevo *corte didáctico*.

La caracterización del segundo corte

El aumento progresivo en la complejidad de los dominios numéricos y de las estructuras sintácticas de las ecuaciones puso de manifiesto las limitaciones de las estrategias numéricas, aritméticas, con las que los sujetos abordaban la solución de los sistemas propuestos. Estas limitaciones generaron conflictos en la manera de entender la igualdad y la representación algebraica de lo desconocido: ¿dos expresiones algebraicas con estructuras distintas pueden ser iguales entre sí? ¿Cómo dos cadenas distintas de operaciones pueden ser iguales a la misma incógnita?

A continuación, siguiendo con los resultados de Solares (2007), presentamos los aspectos de las nociones de incógnita y de igualdad que requieren ser reformulados al enfrentar este segundo corte didáctico.

La representación de la incógnita

Los estudiantes requieren la constitución de un nuevo nivel de representación en el Sals. Para remontar estas dificultades es necesario transitar del *estrato del Sals que permite representar y operar una incógnita* al *estrato del Sals que permite representar y operar una incógnita dada en términos de otra incógnita*. Este tránsito necesita la reelaboración de nociones algebraicas básicas: *incógnita* e *igualdad*, reelaboración que se produce al incorporar al Sals las nuevas maneras de representar y operar lo que es desconocido en la solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Representación algebraica y dominios numéricos de referencia

La variación de los dominios numéricos de las soluciones de los sistemas (números naturales, decimales, fracciones, positivos, negativos) resultó ser generadora de conflictos en la interpretación y en la operación de dos expresiones distintas de una misma incógnita. El hecho de que los sujetos se ubicaran en estratos del Sals, donde los números (coeficientes y números desconocidos) y las propiedades de las operaciones en las ecuaciones (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) tienen como referentes los números positivos, generó una contradicción en la interpretación de dos expresiones dadas para la misma incógnita: las expresiones no podían ser iguales. Por ejemplo, en la solución del sistema [$y = 2x; 5x + 3 = y$], los estudiantes afirmaban que la expresión $2x$ "siempre iba a ser mayor" que la expresión $5x + 3$, porque "multiplicar por 5 es más que multiplicar por 2, y todavía [además] le estás sumando [3]".

Representación algebraica y sentido de la representación

Para algunos de los sujetos entrevistados, dos expresiones con estructuras algebraicas distintas, como $2x$ (estructura multiplicativa) y $5x + 3$ (estructura aditiva) no podían ser iguales. Algunas de las interpretaciones de los estudiantes señalaban que las expresiones podrían ser iguales "porque son signo equis, es como si fuera un cinco, dos veces equis y… cinco veces equis", pero "ya con el signo más ya no… porque más tres ya es otra operación… da otro número". Otros fueron más allá en sus interpretaciones, y señalaron que algunas expresiones *son lo mismo* y otras *valen lo mismo*. En la solución de sistemas como [$x = 5y, x = 54 – y$], afirman que las "dos equis son iguales, valen lo mismo"; pero $5y$ y $54 – y$ no son lo mismo: "cinco ye no es lo mismo que cincuenta y cuatro menos ye".

Las interpretaciones de la igualdad de expresiones con estructuras algebraicas distintas se generan por la presencia de dos distintas formas de igualdad, dos relaciones de equivalencia. Por una parte, está la igualdad construida a partir del reconocimiento de que en un mismo texto algebraico la representación de una incógnita mediante una letra siempre representa el mismo valor numérico (desconocido): "estas dos equis son iguales, valen lo mismo". La igualdad en este caso es la *identidad*. Por otra, está la igualdad que va a permitir establecer una nueva ecuación derivada de las ecuaciones originales del sistema, la *ecuación reducida*. Pero para algunos de los alumnos esta igualdad no está clara: "cinco ye no es lo mismo que cincuenta y cuatro menos ye". Es una igualdad entre distintas "expresiones" de la misma incógnita, expresiones que incluyen a su vez otra incógnita.

Para retomar las dificultades del segundo corte didáctico es necesario adquirir los conocimientos necesarios para manejar estas dos formas de igualdad.

Los nuevos usos del signo "="

En la constitución de este nuevo nivel de representación algebraica, advertimos nuevos usos del signo "=", que requieren la solución de algunas dificultades que enfrentaron los sujetos. Las características de estos nuevos usos del signo igual pueden ser descritas mediante las propiedades que tiene una *relación de equivalencia*[4] en general, como se muestra a continuación.

Reflexividad de la igualdad[5]

En la *igualación* de expresiones algebraicas provenientes de sistemas del tipo $y = Ax + B; y = Cx + D$, se necesita aplicar la propiedad de reflexividad.

En el caso de los sistemas de ecuaciones y considerando el conjunto de las expresiones algebraicas que forman a las ecuaciones de dos incógnitas, tenemos que la reflexividad de la nueva igualdad

[4] En matemáticas, una relación es de *equivalencia* si tiene tres propiedades: *reflexividad*, *simetría* y *transitividad*.

[5] Una relación r es *reflexiva* si para cualquier A, sucede que ArA

se identifica con la *identidad* de la representación de la incógnita. En un mismo texto (sistema de ecuaciones), la letra y representa siempre el mismo valor, la misma incógnita. De modo que $y = y$.

Simetría de la igualdad[6]

A lo largo de la entrevista, la *simetría* de la igualdad fue usada para igualar las expresiones algebraicas que formaban las ecuaciones del sistema. Sin embargo, surgió una "interpretación" no simétrica de la igualdad entre expresiones algebraicas.

El error de *no-simetría* de la igualdad consiste en cambiar los signos cuando las expresiones cambian de lugar, de "izquierda a derecha" del signo igual. Por ejemplo, mediante la *igualación* de las ecuaciones del sistema [$y = Ax + B; y = Cx + D$], se obtiene la ecuación $Ax + B = Cx + D$. El error de *no-simetría* consistiría en cambiar los signos en la expresión $Ax + B$, pues pasaron del lado derecho al izquierdo del signo igual. Este error es una manifestación de los conflictos al que se enfrentan los sujetos en este momento de tránsito. Tienen que manejar distintos tipos de "igualdades" y operar las incógnitas respetando las igualdades que restringen sus valores. Este error se origina al aplicar una regla para operar una incógnita en una ecuación: la *transposición algebraica*, en lugar de efectuar una transformación de dos ecuaciones: la *igualación*.

Transitividad de la igualdad[7]

La combinación de la transitividad y la reflexivilidad de la nueva igualdad permitirán la *igualación* de las expresiones algebraicas. Esta propiedad equivale a la transformación algebraica de igualación, que se introduce en la entrevista.

[6] Una relación r es *simétrica* si cuando se da que ArB entonces también se da BrA para cualesquiera A y B.

[7] Una relación r es transitiva si siempre que ArB y BrC, entonces ArC, para cualesquiera A, B y C.

Transformaciones nuevas y viejas

Las nuevas transformaciones algebraicas que se introducen son la *igualación* y la *sustitución*. Su adquisición para la resolución de sistemas va de la mano con la adquisición de los significados asociados a las nuevas representaciones de la incógnita y usos de la igualdad.

Se tiene que extender la aplicación de las transformaciones algebraicas anteriormente adquiridas, como las de operación de polinomios y las que permiten manipular algebraicamente a una incógnita, a expresiones con dos incógnitas. Si bien la extensión de estas transformaciones se llevó a cabo sin poner en conflicto la representación de la incógnita, es necesario señalar que en los momentos de transición esta extensión requirió ser "probada". Por ejemplo, después de haber aplicado la *igualación algebraica* varias veces en la solución de sistemas sencillos, Ana resolvió el sistema [$4x - 3 = y; 6x = y - 7$] mediante estrategias "más concretas". El entrevistador le sugirió igualar las expresiones y trasponer el término "– 7" para dejar "sola" a la incógnita y, pero Ana se negó diciendo que no se podía "porque cambia el valor de la ye", "sería mayor el resultado… porque si aquí está restando [señala -7 en $6x = y - 7$] y lo pasas, ya no tienes nada que restar. Así que va a ser más grande el número de la ye". Ana requirió reconstruir la sintaxis algebraica necesaria para operar una incógnita, pues para ella la transformación de *transposición algebraica* de términos ya no conservaba necesariamente el valor de la incógnita. Fenómenos semejantes se presentaron cuando el término a transponer era literal, la incógnita con algún coeficiente.

Los métodos de reducción y la traza de la incógnita

Durante la introducción del *método de sustitución* para la solución del sistema [$4x - 3 = y; 6x = y - 7$], Salvador interpretó las expresiones algebraicas como "cadenas de operaciones" que permiten encontrar el valor de la incógnita, buscando valores entre los números positivos. El entrevistador intervino al introducir la transformación de *sustitución*. Salvador obtuvo la ecuación $6x = (4x - 3) - 7$.

Pero para él esta nueva "expresión" no se podía *romper*, no se podía trasponer a la incógnita. Como él mismo dijo: "este cuatro equis no lo puedo pasar… porque incluye esta operación [señala *(4x – 3) – 7*]". Para Salvador esta ecuación, reducida, de una incógnita seguía siendo una "ecuación" de dos incógnitas o, mejor dicho, una cadena de operaciones sobre una incógnita que se refiere al valor de las dos incógnitas. Pero la incógnita sustituida seguía siendo *referida* en esta nueva expresión. A esto le llamamos *conservación de la traza* de la incógnita, que está fuertemente ligada a las interpretaciones y estrategias de solución numéricas. Las expresiones algebraicas representan, mediante cadenas de operaciones, los valores de las incógnitas buscadas. De manera que no resulta adecuado "perder" estas incógnitas.

El estudio *Operación de una incógnita en términos de otra* permitió determinar las transformaciones y los significados asociados a las dos maneras de manipular algebraicamente a la incógnita: los métodos de igualación y sustitución. Sin embargo, queda pendiente la investigación sobre la articulación de los diferentes ámbitos del álgebra: las ecuaciones, las funciones y la generalización, así como abordar el estudio de la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y sus "nuevas" formas de representación, desde una perspectiva semiótica (Solares, 2007).

CAPÍTULO IV

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS DEL USO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Los resultados presentados en los capítulos anteriores dan cuenta de que las representaciones semióticas de las matemáticas definen, estructuran y potencian los procesos de aprendizaje individuales y colectivos que tienen lugar en el salón de clases.

Respecto al álgebra y la geometría, las implicaciones didácticas de los resultados derivados de estas investigaciones nos permiten reconocer la relación entre las representaciones y el aprendizaje en los procesos de enseñanza de las matemáticas.

Proponemos dos elementos organizadores de los procesos de enseñanza donde estas implicaciones encuentran un terreno fértil: el trabajo curricular (programas de estudio, libros de texto, materiales didácticos, etc.) y el uso de tecnologías digitales para la integración de representaciones matemáticas dinámicas al trabajo en el aula. Cerraremos este capítulo con algunas reflexiones que involucran la formación y desarrollo profesional de los docentes.

A continuación presentamos las implicaciones didácticas que, en relación con estos aspectos, tienen las investigaciones discutidas en los capítulos II (Sandoval, 2005) y III (Solares, 2007).

Implicaciones curriculares de las representaciones semióticas. Algunos ejemplos

El vínculo entre la investigación sobre los procesos de aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de propuestas curriculares es relativamente reciente. Es notoria la escasez de literatura en este campo (Kaiser y Sriraman, 2014). Sólo a partir de las dos últimas décadas los investigadores en educación matemática han prestado mayor atención al currículo. Los estudios y revisiones en torno a esta relación señalan que es fundamental una base sólida de investigación para guiar el diseño y realizar los cambios necesarios de los programas de estudio, en general, en cualquier país (Li y Lappan, 2014). Sin embargo, en México, como en otros países, las reformas curriculares se han llevado a cabo a partir de motivaciones diversas, pero no necesariamente sobre la base de una evaluación o análisis previo de la calidad del diseño y de su implementación.

Los autores consideramos que los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra y la geometría presentadas en este libro, aportan aspectos fundamentales que pueden contribuir en los cambios curriculares que se lleven a cabo en México. En especial, creemos que las relaciones entre las distintas formas de representación y manipulación de los objetos algebraicos y geométricos deben ser enfatizadas, complementadas y explícitas en los programas de estudios de educación básica, tanto para profesores como para desarrolladores de programas de estudio y formadores de profesores.

Formas de representación y los cambios curriculares en álgebra

Respecto al álgebra, una de las principales implicaciones de estas investigaciones se relaciona directamente con el desarrollo de propuestas curriculares y secuencias didácticas, en particular con el debate conocido como “la guerra de las matemáticas”, en el cual se contrapone el acercamiento por medio de los contenidos tradicionales a los lineamientos de la reforma iniciada en Estados Unidos en los años noventa, que proponen dar prioridad a la enseñanza de conceptos y a la resolución de problemas, por encima de las destrezas algorítmicas y de manipulación simbólica (Walle, van de 2007).

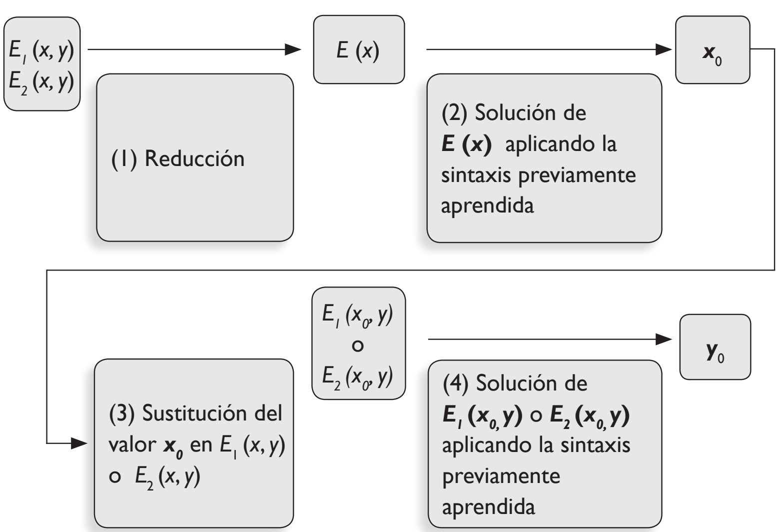
A partir de los resultados presentados sostenemos que este debate, las aproximaciones extremas "enseñanza de conceptos" y "enseñanza de algoritmos", más que contradictorias, son inherentemente complementarias. En la enseñanza y el aprendizaje del álgebra cobra especial relevancia la relación intrínseca entre aquellos objetos (o conceptos) matemáticos representados y las formas de representarlos y manipularlos, es decir, la semántica y la sintaxis de las representaciones algebraicas. No se puede construir una independientemente de la otra, no se pueden privilegiar ni separar en sus procesos de enseñanza ni en los de su aprendizaje.

Respecto a pormenores específicos de la adquisición de las representaciones algebraicas, es importante destacar las siguientes. Sin importar el nivel de sus competencias algebraicas previas, los estudiantes recurrieron espontáneamente a estrategias aritméticas (*más concretas* que las algebraicas) para afrontar las nuevas dificultades. Esto implica que es importante reconocer, fortalecer y dar espacios más amplios a las exploraciones aritméticas de las resoluciones de ecuaciones, tanto lineales como cuadráticas, de una o más incógnitas. Pero al mismo tiempo, es necesario avanzar en la reformulación de los conceptos y las relaciones en torno a la representación y la operación de la incógnita. En particular, se requiere la reelaboración de las nociones de *incógnita* e *igualdad*.

La introducción de los métodos algebraicos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y sus problemas correspondientes, genera la necesidad de reformular los significados asociados a las nuevas representaciones de la incógnita y usos de la igualdad. Sin embargo, esta adquisición no es automática ni trivial. Recomendamos que las innovaciones curriculares y de secuencias didácticas tomen en cuenta las dificultades que se presentan al momento de la introducción de los métodos de solución y que, de ser necesario, se reduzca la cantidad de métodos que se estudia en educación secundaria, a diferencia de lo que tradicionalmente se hace. Sobre todo sugerimos establecer puentes entre las interpretaciones, los procedimientos aritméticos y las nuevas transformaciones algebraicas que se introducen.

En particular, una ruta para la introducción de los métodos de igualación y sustitución que sugieren los resultados de las investigaciones se presenta en la figura 14. Estos métodos permiten *reducir* un sistema de ecuaciones a la solución de una sola ecuación de una incógnita, pero para aplicarlos es necesario remontar las dificultades descritas en la investigación discutida en el capítulo III (Solares, 2007).

Figura 14. Una ruta didáctica para la introducción de los métodos de igualación y sustitución en la solución de sistemas de ecuaciones de dos incógnitas (Solares, 2007)



Esta ruta didáctica permite generar una secuencia de sistemas de ecuaciones para la introducción de cada método. La secuencia comienza con sistemas donde las dos incógnitas están despejadas en términos de la otra, y continúa con ítems donde es necesario aplicar una transformación para despejar una de las incógnitas (esta transformación puede ser una trasposición de una constante o de una incógnita). En la segunda parte de cada ruta, se presentan sistemas de ecuaciones para los cuales resulta eficiente realizar, ya sea una igualación (tabla 3) o una sustitución algebraica (tabla 4).

Tabla 3. Sistemas de ecuaciones correspondiente a una posible ruta didáctica para la introducción del método de igualación (Solares, 2007)

Una ruta didáctica para introducir el método de igualación	
1. La ruta propone trabajar primero co;n sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que una de las ecuaciones es una "asignación de valor" para una de las incógnitas o una ecuación lineal de una incógnita. Para ello, se considera resolver distintas variantes de estos tipos de sistemas, comenzando por los más simples e ir haciendo más compleja la estructura de las ecuaciones y sus dominios numéricos de solución. La secuencia de sistemas que se propone es la siguiente: 1.a. Sistemas que se resuelven mediante *igualación numérica directa*, como: $y = 6$, $7x - 8 = y$ 1.b. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de un paso*, como: $y + 17 = 128$; $y + 10 = x$ 1.c. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de dos pasos*, como: $2x - 7 = 9$; $x = 32 - 4y$ 1.d. Sistemas que se resuelven mediante *despeje algebraico*, como: $3x - 2 = y$; $7y + 15 = 4y - 45$	2. La ruta propone continuar el trabajo con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que en ambas ecuaciones aparecen las dos **incógnitas**. Nuevamente, se considera resolver distintas variantes de estos tipos de sistemas, de los más simples a los más complejos por la estructura de las ecuaciones y los dominios numéricos de solución. La secuencia de sistemas que se propone es la siguiente: 2.a. Sistemas que se resuelven mediante *igualación algebraica*, como: $y = 2x$, $5x + 3 = y$ 2.b. Sistemas que requieren un despeje para poder realizar, después, la *igualación algebraica,* como: $x = y + 1$, $x + y = 11$ 2.c. Sistemas que requieren varios despejes para poder realizar, después, la *igualación algebraica*, como: $3x + 8y = 84$, $8x + 3y = 59$

Tabla 4. Sistemas de ecuaciones correspondiente a una posible ruta didáctica para la introducción del método de sustitución (Solares, 2007)

Una ruta didáctica para introducir el método de sustitución	
1. La ruta propone trabajar primero con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que una de las ecuaciones es una "asignación de valor" para una de las incógnitas o una ecuación lineal de una incógnita. Para ello, se considera resolver distintas variantes de estos tipos de sistemas, comenzando por los más simples e ir haciendo más compleja la estructura de las ecuaciones y sus dominios numéricos de solución. La secuencia de sistemas que se propone es la siguiente: 1.a. Sistemas que se resuelven mediante *sustitución numérica directa*, como: $y = 6, 7x - 8 = y$ 1.b. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de un paso*, como: $y + 17 = 128; y + 10 = x$ 1.c. Sistemas que incluyen una *ecuación aritmética de dos pasos*, como: $x = 17 - y; 4(x - 8) = 72$ 1.d. Sistemas que se resuelven mediante *despeje algebraico*, como: $3x - 2 = y; 7y + 15 = 4y - 45$	2. La ruta propone continuar el trabajo con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en los que en ambas ecuaciones aparecen las dos incógnitas. Nuevamente, se considera resolver distintas variantes de estos tipos de sistemas, de los más simples a los más complejos por la estructura de las ecuaciones y los dominios numéricos de solución. La secuencia de sistemas que se propone es la siguiente: 2.a. Sistemas que se resuelven mediante *sustitución algebraica*, como: $x + 1 = 4y, x = 2y + 7$ 2.b. Sistemas que requieren un despeje para poder realizar, después, la *sustitución algebraica*, como: $3x + y = 14; x + y = 10$

De acuerdo con los resultados de las investigaciones en didáctica del álgebra, los sistemas de estas rutas permiten a los estudiantes enfrentar gradualmente las dificultades que surgen en la adquisición de los conocimientos y las habilidades matemáticas necesarias para aprender a solucionar sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas. El propósito de tener dosificaciones detalladas de las complejidades de los sistemas de ecuaciones es que el aprendizaje del lenguaje algebraico se dé de manera gradual, sólida y significativa.

Formas de representación y los cambios curriculares en geometría

La enseñanza tradicional de la geometría euclidiana sigue privilegiando, en gran parte, el nivel perceptivo, enfocándose casi exclusivamente al reconocimiento y construcción de figuras, al cálculo de áreas y volúmenes para ejercitar las fórmulas. Por ello, los estudiantes no alcanzan a captar lo que significa la demostración como una forma de razonamiento (Vincent y McCrae, 2001); aún más, la enseñanza del razonamiento deductivo ha enfatizado el aprendizaje memorístico de definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones, al inhibir en los estudiantes las capacidades de explorar, conjeturar, generalizar, sistematizar y argumentar. En particular, presentan una inclinación natural para observar y describir una figura y extraer sus propiedades y relaciones. Sin embargo, es importante que cuando los estudiantes resuelvan las tareas propuestas logren discriminar entre las relaciones perceptivas y las estructurales. De aquí se desprende la necesidad de diseñar actividades que permitan a los alumnos desarrollar habilidades tales como analizar propiedades de figuras geométricas y, a su vez, dar argumentos válidos acerca de las relaciones geométricas observadas. Asimismo, sería importante desarrollar, dentro del pensamiento geométrico,[1] habilidades para construir y manipular representaciones mentales con el propósito de distinguir entre dibujo y objeto geométrico, que permitan identificar características y relaciones, de acuerdo con el problema planteado. Es decir, lograr que el alumno pueda comprender una propiedad geométrica, independientemente de la representación utilizada para ilustrarla. Consideramos que los tres grandes

[1] El Ministerio de Educación Nacional de Colombia considera al pensamiento geométrico como aquel que es mediado y dinamizado por los objetos de la geometría. En otras palabras, es el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones de los objetos geométricos, las relaciones entre ellos y sus transformaciones (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

aspectos propios de la actividad en geometría deben incluirse en los diseños curriculares: el sentido espacial y la visualización, la construcción y representación de conceptos geométricos, y el razonamiento geométrico y el establecimiento de la verdad en geometría. Por lo tanto, a continuación presentamos sugerencias específicas para su consideración en los desarrollos curriculares.

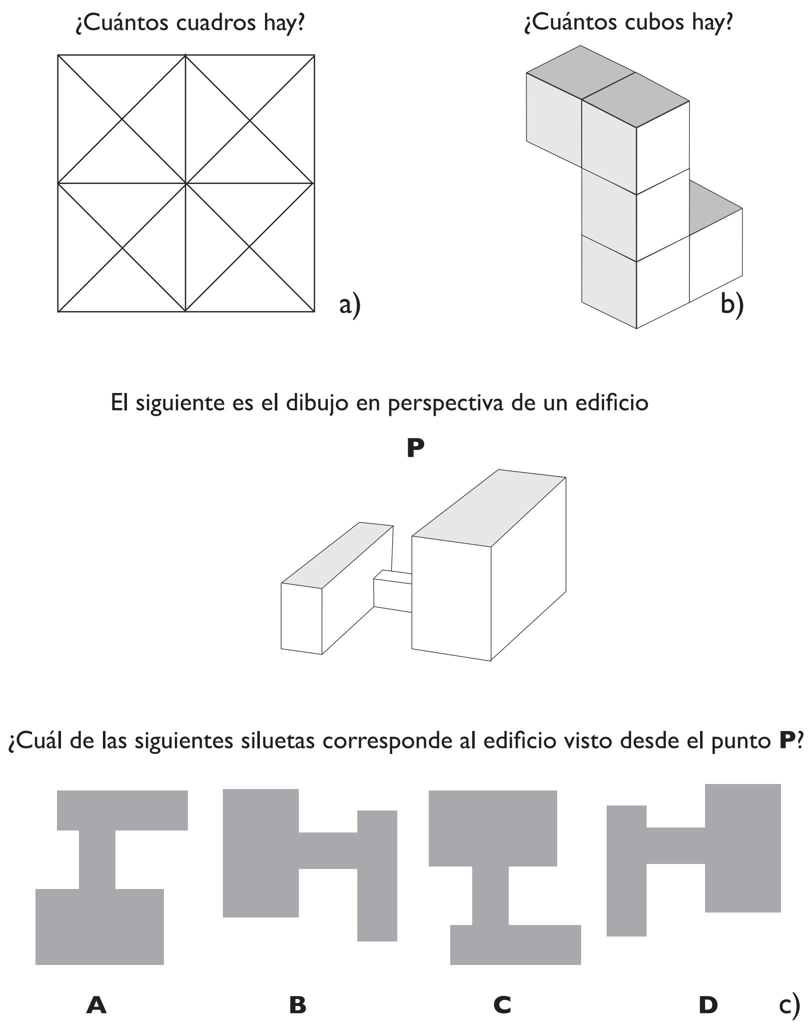
Sentido espacial y la visualización

Diversas investigaciones, realizadas desde hace 30 años, han señalado la importancia que tiene el desarrollo del sentido espacial y la visualización en niños y jóvenes (Bishop, 1992; Presmeg, 1986; Duval, 1998 y 2006; Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1998; Battista, 2007, entre otras). Estas investigaciones consideran necesario que durante la educación obligatoria los estudiantes logren:

- Comprender e interpretar representaciones geométricas para extraer la información que contienen.
- Transformar información dada en un registro discursivo en una figura.
- Transformar figuras dadas en otras.

Algunas actividades que pueden potencializar el desarrollo del sentido espacial y la visualización son aquellas que favorecen la identificación de subconfiguraciones en una configuración dada. Los siguientes ejemplos muestran actividades en las que los estudiantes requieren identificar una figura y reconocer las relaciones espaciales (figuras 15a, 15b y 15c), así como la conservación de la percepción (figura 15a).

Figura 15. Ejemplo de actividades para la identificación de subconfiguraciones en una configuración dada

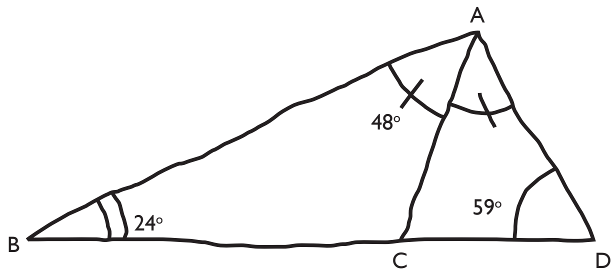


Fuente: SEP, 1993 p. 263.

Reflexionar respecto a las figuras "mal hechas o a mano alzada" permite a los estudiantes hacer conversiones entre las representaciones dadas en el registro discursivo y el figural. Un ejemplo de estas actividades es Chapiron, Mante, Mulet-Marquis y Pérotin (1998, p. 168):

La siguiente figura ha sido dibujada a mano alzada, el segmento (AC) es la bisectriz del ángulo BAD. Los puntos B, C y D ¿están alineados? Justifique.

Figura 16. Ejemplo de representación geométrica realizada a "mano alzada"



Construcción y representación de conceptos geométricos

Una de las dificultades de la representación geométrica es que no siempre es claro para los estudiantes si ilustra un caso específico o uno general. De manera que es importante incluir actividades que permitan o fomenten que los alumnos identifiquen estas diferencias. Ejemplos de dichas actividades son:

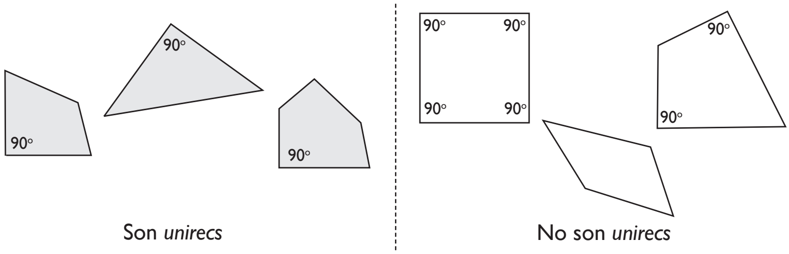
1. Marcar un punto A. Marcar todos los puntos que están a 3 cm de A. Marcar todos los puntos que están a menos de 3 cm de A. En cada caso, ¿a qué figura geométrica se está aludiendo?
2. Dados dos segmentos **a** y **b**, […] construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a **a** y otro a **b**. ¿Se pueden construir dos distintos? ¿Por qué? (ME, 2007, pp. 16, 34).

Otras actividades importantes están vinculadas a la construcción de definiciones. En los libros de texto, generalmente, aparecen las definiciones de los objetos geométricos a estudiar y después se analizan algunas de sus características. Nuestra propuesta es que los alumnos también participen en la construcción de definiciones; esto es, mediante la identificación de las características necesarias y suficientes que determinan un conjunto de figuras. Para ello, sugerimos que se planteen actividades con los nombres de objetos geométricos "poco conocidos o inventados para la clase", para que no estén vinculados con los que comúnmente se estudian en la educación básica, esto es, polígonos.

Por ejemplo:

En la siguiente actividad, los alumnos deberán determinar cuál es una característica necesaria para ser un *unirec*. Para ello, se dan ejemplos de los que son y no son *unirec*, como se muestra en las imágenes (Samper, 2008, p. 13). Por lo tanto, la discusión se centrará entonces en qué características son las que se consideran necesarias y por qué.

Figura 17. Ejemplos y contraejemplos para determinar las propiedades de una figura



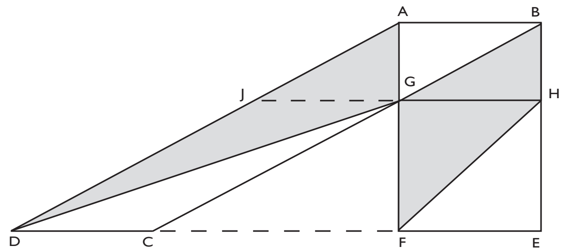
Razonamiento geométrico y el establecimiento de la verdad en geometría

Hay diferentes posturas vinculadas a la enseñanza de la demostración en la educación básica. En el currículo de diferentes países se plantea como uno de los objetivos a lograr en este nivel. Todos ellos parten de que la actividad vinculada con la demostración permite la comprensión matemática. Pero, los resultados en la enseñanza han mostrado poca efectividad.

Por ejemplo, en el Reino Unido se plantea que los alumnos logren el desarrollo de etapas tempranas del razonamiento empírico y de explicación de sus conjeturas. En Estados Unidos, NCTM propone que los alumnos deberían formular e investigar conjeturas matemáticas; desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones. En Latinoamérica hemos tomado dos ejemplos. En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) plantea que los alumnos deberían percatarse del cómo y del porqué de los procesos que se siguen, para llegar a las conclusiones; formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos. En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP) plantea iniciar a los estudiantes gradualmente al razonamiento deductivo. Para lograr estos objetivos curriculares es importante involucrar a los estudiantes no con la demostración rigurosa y deducciones formales, sino como lo proponen Davis y Hersh (1988, p. 248), con la experiencia matemática. Esto es, primero con el descubrimiento matemático, y luego el refinamiento de una presentación axiomática.

El acercamiento a las actividades argumentativas puede ser desde el contexto geométrico o desde situaciones más cotidianas. A continuación tres ejemplos.

1. En la siguiente figura, ABCD es un paralelogramo y ABEF es un rectángulo. Los puntos D, C, E y F están alineados. G es la intersección de BC con AF. GH es paralela a AB. Compare el área del triángulo AGD con el área del trapecio GFHB, ¿cuál es su conclusión? Arguméntelo (ME, 2007, p. 71).



2. Esta actividad trata de un problema que vincula el estudio de propiedades entre rectas paralelas.

Figura 18. Actividad propuesta para el estudio de ángulos entre paralelas (Trigueros, Lozano, Schulmaister, Sandoval, Jinich y Cortés, 2012, p. 30)

En la estructura de un burro de planchar podemos encontrar ángulos.

Sigan las indicaciones de su profesor para organizar los equipos de trabajo. Cada equipo construirá una mesa o un burro de planchar pequeño, por ejemplo con palillos o popotes para las patas y un cartón para la base, si no los consiguen, pueden utilizar material de reuso. Para realizar la actividad les sugerimos lo siguiente:

- Observen la posición y el tipo de ángulos que se forman entre la base y las patas de diferentes mesas o burros de planchar.
- Encuentren la relación entre los dos apoyos (o patas) de la mesa y el lugar donde se ubica el tornillo que las une.
- A lo largo de la secuencia, en la sección "¿Cómo vamos?", encontrarán más información para llevar a cabo el proyecto.
- Al final, presentarán el modelo de mesa que elaboraron al grupo y entregarán un reporte con la descripción de sus características y cómo se construye.

Algunas preguntas de apoyo para el proceso de resolución (p. 33):

- ¿A qué distancia se debe colocar el tornillo para sujetar las patas? ¿Qué relación hay entre el largo de las patas?
- ¿Cómo debe ser la parte superior de la mesa en comparación con el piso?
- ¿Hay alguna relación entre los ángulos que se forman? ¿Cuál es?
- ¿Qué aplicaciones relacionadas con este tema encuentran a su alrededor?

Una vez que tengan la mesa construida deben argumentar geométricamente por qué la parte superior siempre queda paralela al piso.

3. Una actividad para ejemplificar es un problema del contexto cotidiano de los estudiantes que involucra conocimientos geométricos. En este caso, el papel de las representaciones materiales y semióticas son indispensables para comprender el problema y resolverlo.

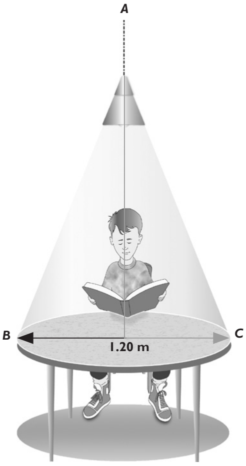
Figura 19. Actividad propuesta para el estudio del cono (Trigueros, Lozano, Schulmaister, Sandoval, Jinich y Cortés, 2014, p. 238)

La luz del cono
Lee la situación y responde.

En el techo hay una lámpara con forma de cono que ilumina la mesa circular.
Ésta tiene un diámetro de 1.20 m y la lámpara forma un ángulo de 60°.

- ¿A qué altura sobre la mesa debe colocarse la lámpara para que la ilumine por completo?__________________________

____



Ahora, hagan en grupo esta actividad
Con la supervisión del profesor, construyan un cono con cartulina, de manera que sirva de pantalla para un foco que ilumine la superficie del escritorio, como se muestra en la figura. En cartoncillo, tracen un círculo de 1.20 m de diámetro y pónganlo sobre el escritorio para simular la mesa de la imagen. Deberán construir un mecanismo con armellas clavadas en el techo y un lazo, para subir o bajar la lámpara y medir su altura sobre la mesa.

Modifiquen la altura de la lámpara y midan el diámetro del círculo iluminado que se forme; repitan el procedimiento hasta llegar a la respuesta. En una tabla indiquen los resultados de sus diferentes intentos.

- Observen el dibujo. Si el ángulo *A* mide 60° y los lados *AB* y *AC* son iguales, ¿qué tipo de triángulo es el triángulo *ABC*? ______

____

____

- Tracen la altura del cono ¿Cuánto mide el radio de la mesa?

____

____

Implicaciones para el uso de tecnologías digitales en el aula y el desarrollo de actividades

Las tecnologías digitales están cambiando los contextos de aprendizaje, de comunicación e interacción entre los sujetos, por lo que es necesario seguir avanzando en el uso de estas herramientas en las escuelas de educación básica (Rojano, 2014). En la actualidad, existen diversas aplicaciones educativas y programas especializados diseñados con fines didácticos, como logo, *software* de GD, calculadoras graficadoras y recursos digitales de la Web en portales educativos. Esta diversidad de herramientas también pueden usarse con diferentes finalidades en las actividades docentes.

En las últimas décadas, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas los investigadores dan cuenta de que ciertos desarrollos tecnológicos posibilitan otras formas de representación dinámicas complementarias a las generadas en ambientes de lápiz y papel (representaciones estáticas); apoyan procesos de construcción y verificación de conjeturas, de comprobación de una estimación y, por ende, enriquecen las estrategias para resolver problemas matemáticos. Sin embargo, su aportación para favorecer el aprendizaje de las matemáticas dependerá de un actor clave, el profesor, ya que su mediación en el aula y el diseño cuidadoso de las tareas y la selección de estas herramientas tecnológicas pueden o no hacerlo posible.

Las herramientas tecnológicas pueden ser utilizadas de acuerdo con distintos enfoques sobre las matemáticas y su enseñanza. Nos interesa destacar aquí las diversas maneras de usarlas, esto es que sean afines a los enfoques actuales para la enseñanza de las matemáticas.

El objetivo principal del empleo de la tecnología en el aula no se reduce a practicar algoritmos, interesa que éstos ayuden al alumno a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante el ejercicio de la reflexión. De este modo, la matemática se convierte en mucho más que una simple mecanización de procedimientos. El uso de calculadoras, computadoras, tabletas y algunas aplicaciones tienen gran potencial educativo, siempre y cuando respondan a una finalidad pedagógica y curricular; por ejemplo, para la búsqueda y clasificación de datos, tablas, gráficas, construcción, exploración y animación de figuras geométricas o para realizar experimentos matemáticos.

Los ejemplos de actividades que los autores hemos diseñado y seleccionado son producto de las investigaciones en las que hemos colaborado, o aquellas que reconocemos con un gran potencial por las representaciones semióticas que proveen. En particular, aquellas que consideramos favorecen las experiencias aritméticas, geométricas y algebraicas, de modelación y simulación. Aunque recurrimos a diversas tecnologías, gran parte de nuestros ejemplos utilizan Geometría Dinámica y CAS debido a que la investigación ha producido y puesto a prueba gran cantidad de propuestas didácticas con el uso de estas herramientas.

Esperamos que los lectores puedan adaptarlas y complementarlas con otros materiales que conciban como adecuados o conozcan, que les permitan construir actividades que enriquezcan las experiencias matemáticas de los estudiantes y mejoren su capacidad de expresar y argumentar sus ideas.

Ejemplos de actividades para enseñar geometría con diferentes herramientas tecnológicas

Los resultados de las investigaciones del uso de la GD y otros recursos digitales han mostrado las potencialidades de su uso debido al tipo de representaciones a las que se tienen acceso. Se pueden identificar sitios en la web que plantean actividades para favorecer la exploración, conjetura, validación y argumentación de hechos geométricos.

En este apartado presentaremos dos ejemplos de actividades, las primeras son con recursos digitales disponibles en la web; y las segundas son propuestas con programas de GD.

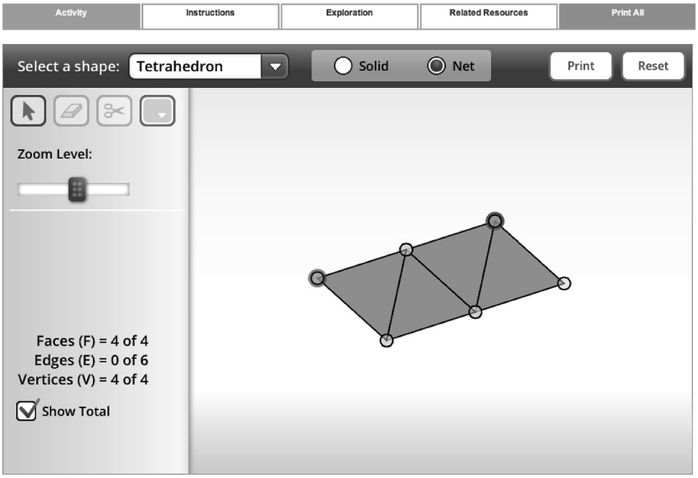
Portales educativos: dos ejemplos

El aprendizaje e identificación de propiedades de objetos tridimensionales es complejo a partir de las representaciones de lápiz y papel. Pero el aporte de las tecnologías al respecto permite el acceso a representaciones dinámicas complementarias con las del lápiz y papel.

A continuación se presentan ejemplos de algunos sitios web que posibilitan la conceptualización y análisis de características de diferentes sólidos geométricos.

En la siguiente imagen se muestra un recurso digital para trabajar con objetos geométricos como es el caso del tetraedro. En este caso, el usuario deberá identificar las caras, las aristas y todos vértices.

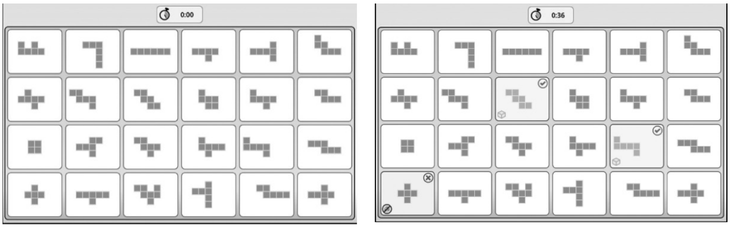
Figura 20. Actividades dinámicas para explorar sólidos geométricos



Fuente: *http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521*

Generalmente, cuando se trabaja con el cubo, se utiliza un desarrollo plano conocido como "el avioncito". La siguiente actividad permite imaginar y conjeturar sobre los desarrollos planos que pueden conformar un cubo. El recurso didáctico da una animación como retroalimentación que muestra el armado del cubo o su imposibilidad, con el desarrollo seleccionado por el usuario. Las respuestas correctas e incorrectas quedan registradas en la plantilla. Al realizar la actividad los estudiantes requieren analizar la cantidad de caras necesarias y suficientes para formar el cubo, además, cuestionarse la organización de las caras en el desarrollo plano.

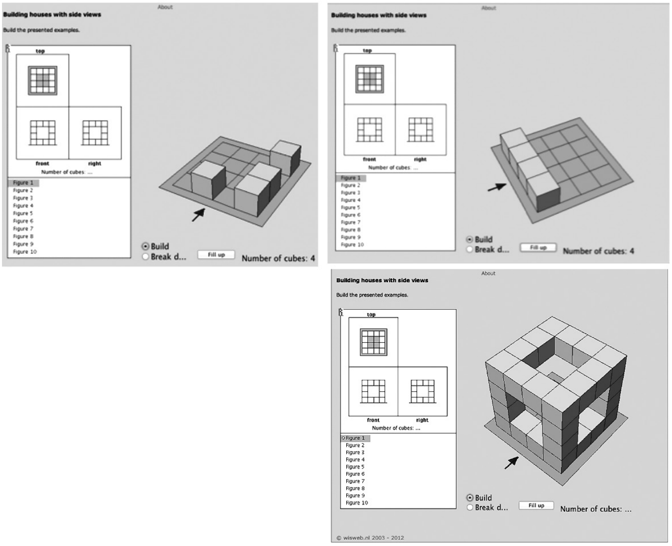
Figura 21. Actividad interactiva con desarrollos planos para formar cubos



Fuente: *https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3544*

Otro portal con actividades interesantes que apoyan el desarrollo del sentido espacial y la visualización es el creado por el Instituto Freudenthal. La siguiente actividad invita al usuario a reconstruir un objeto tridimensional a partir de tres vistas: frente, arriba y derecha, en el que puede rotar la cuadrícula que está construyendo. En este caso, el usuario es el responsable de reconocer cuando su construcción está bien realizada.

Figura 22. Construcción de casas a partir de diferentes vistas



Fuente: *http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html*

Ejemplos de actividades usando GD

Las siguientes son actividades para la exploración, conjetura y prueba. Los alumnos utilizan la GD para realizar las construcciones, explorar y, a partir de sus observaciones y análisis, encontrar invariantes. Para realizar estas construcciones, los alumnos deben identificar los datos dados y analizar cómo pueden representarlos geométricamente. Las dos primeras construcciones que se presentan a continuación son adaptaciones para GD del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 1998, pp. 34 y 37) y la tercera se retoma de Sandoval (2005).

Dados dos ángulos A y B, construir si es posible un triángulo que tenga un ángulo igual a A y otro ángulo igual a B.

¿Es posible construir dos distintos? ¿Por qué?

¿Será cierto que dados dos ángulos, siempre se puede construir un triángulo? Arguméntalo.

Dados dos segmentos **a** y **b**, construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a **a** y la altura correspondiente a dicho lado igual al segmento **b**. ¿Cuántos triángulos distintos pueden construir? ¿Por qué?
A es el centro de un círculo y *AB* es un radio. Construye la mediatriz del radio *AB*. (La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que lo divide en dos partes iguales.) En uno de los puntos donde la mediatriz corta al círculo coloca un punto *C*. Une los puntos *A, B* y *C*. ¿Qué figura se obtiene al unir los puntos *A*, *B* y *C*? ¿Es siempre la misma figura? Sí ______ No ______ ¿Existe(n) alguna(s) razón(es) que explique(n) este resultado? Sí ______ No ______ Escriban un enunciado para la propiedad descubierta anteriormente. Elaboren una explicación que apoye su observación.

Retomando lo descrito en Sandoval (2005), al hacer una construcción en ambientes de lápiz y papel, el estudiante no necesariamente toma conciencia de las propiedades que implica hacerlo, ya que la apariencia es la que controla, en mayor medida, al razonamiento. A menos, por supuesto, que logre visualizar, es decir, vincular el dibujo con la teoría. En un *software* de GD, el dibujo electrónico es un reflejo especular del objeto geométrico controlado por el universo interno. Por lo tanto, el razonamiento originado a partir del proceso de visualización, permite que los educandos establezcan criterios de validación basados en argumentos geométricos, con un nivel mayor de formalización y acercándose al objeto geométrico.

En un inicio, la argumentación está estrechamente ligada con la manera en que el estudiante recurre a la teoría interna de la GD; sin embargo, cuando él logra formalizar en GD la evidencia geométrica que éste le muestra, parece posible el desarrollo de un nivel de razonamiento geométrico. Este último puede iniciarse con argumentos descriptivos, que se van transformando y articulando con criterios explicativos. La transformación que se realiza en la interpretación para la representación figural (dibujo *versus* objeto geométrico) es coextensiva con el cambio en las estrategias argumentativas. Lo que significa que se pasa de meras descripciones a conjeturas, y de ahí a las explicaciones o argumentaciones geométricas que apoyen sus descubrimientos. El proceso no es inmediato, sino gradual y requiere discusión colectiva y guía del maestro.

La GD permite la construcción de dibujos electrónicos (familia de figuras) con diferentes funciones a la hora de resolver problemas. Este proceso le brinda al educando un espacio para explorar, usando diferentes herramientas, y conjeturar sobre propiedades, condiciones necesarias y suficientes, etc., relacionadas con una familia de figuras, como parte de la solución de un problema. Además, esta interacción le permite realizar acciones concretas sobre el modelo que ilustra una situación e internalizar en este contexto visual-dinámico dichas acciones para ser comunicadas.

Cuando se usa lápiz y papel, los alumnos crean relaciones perceptivas y pueden ser interpretadas o no como geométricas. En cambio, en el ambiente informático, las relaciones se pueden establecer de manera perceptiva pero, para que permanezcan, deben declararse y explicitarse en el proceso de construcción. Por lo tanto, el paso del dibujo al objeto geométrico es más natural y cuando el educando declara una intersección entre dos objetos, tal intersección abandona el nivel perceptivo y se instala en un nivel estructural.

Algunas potencialidades del uso de tecnologías digitales en geometría

La GD enriquece la representación figural porque brinda mayor nivel de evidencia y por consiguiente ayuda en la transición del dibujo al objeto geométrico (Sandoval, 2005 y 2009). Pues cuando el alumno usa el arrastre[2] ejecuta la representación semiótica, el enunciado o la conjetura adquiere un dominio de validez en una familia de figuras y no en una sola representación. Otra de las potencialidades al usar la GD consiste en qué actividades de construcción como, por ejemplo, la del cuadrado, pueden ayudar al estudiante a dar sentido a las definiciones, a entender su función dentro de un esquema axiomático y de las condiciones necesarias y suficientes al elaborar un enunciado. Para fundamentar esta conjetura, se considera pertinente incorporar otras actividades de construcción, para la toma de datos definitiva, que conlleven la comunicación de enunciados, tanto de manera oral como escrita. En suma, se puede decir que Cabri, como ejemplo de GD, es un medio que:

- Proporciona a los estudiantes un entorno para que realicen construcciones basadas en las definiciones y exploren e interpreten diferentes tipos de representación: la numérica a través de la medición, la figural mediante los trazos, la verbal por medio de los comentarios, etiquetas, etcétera. En este aspecto, les brinda la oportunidad para analizar y discutir, en términos conceptuales, el significado de la situación geométrica en cuestión.
- Induce al educando en las tareas de construcción a realizar un análisis de la estructura geométrica bajo estudio y una coordinación de las relaciones entre las representaciones figural y discursiva.
- La riqueza, desde un punto de vista cognitivo, que se obtiene al usar Cabri, no solamente depende de la herramienta, sino también del contexto de comunicación entre los estudiantes y el profesor.

[2] Herramienta que permite mover, en la pantalla, objetos geométricos construidos como puntos, segmentos, rectas, polígonos, entre otros, para reubicarlos, agrandar o achicar una figura, etcétera..

Por otro lado, la GD sirve como laboratorio matemático, ya que:

- Las herramientas disponibles en este ambiente posibilitan descubrir, validar y confirmar conjeturas y relaciones entre los objetos.
- Permite tener un dibujo que se puede modificar y, por ende, hace visible la "invarianza" de una propiedad mediante el arrastre.
- El sujeto interviene de manera activa en las construcciones, por lo tanto se puede generar la sensación de estar manipulando directamente los objetos en la pantalla.

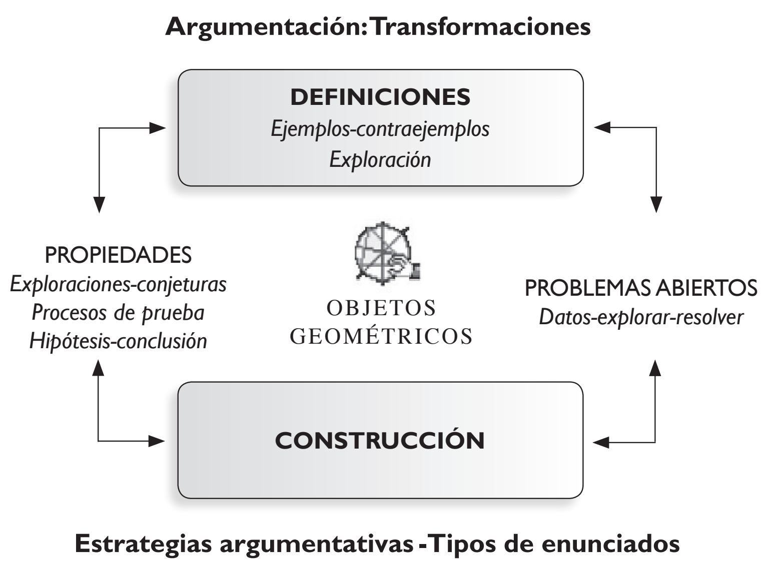
Implementar actividades usando GD, posibilita el desarrollo de ciertas habilidades en los estudiantes. Por ejemplo:

- Formular y verificar sus conjeturas con base en observaciones y exploraciones.
- Articular relaciones y construir generalizaciones, mediante la sistematización.
- Gracias a la mediación de la GD, se puede desarrollar la exploración sistemática. Las propiedades que se exploran son de una familia de figuras, pues una sola representación es insuficiente.
- El uso de contraejemplos para refutar conjeturas.
- Identificar las dependencias funcionales entre los objetos construidos.
- Induce estrategias que le son propias como el arrastre, la animación, la verificación de propiedades y el uso de macros.

Por lo tanto, es fundamental que el maestro, durante el proceso de familiarización con las aplicaciones educativas, enfatice la importancia de conocer los comandos y los requerimientos para su uso. En el caso de la GD, comprender el comportamiento dinámico de las relaciones en estos nuevos ambientes, entiéndase: las jerarquías de dependencia entre los elementos de una construcción o al momento de utilizar cierta herramienta, es esencial. Al respecto, Talmon y Yerushalmy (2004) reportan sus resultados sobre la importancia de establecer las relaciones de dependencia y la jerarquía de las mismas, así como las semejanzas y diferencias cuando se usan distintas interfaces de GD. Por ejemplo, si se traza primero un segmento y a éste luego se le considera radio de una circunferencia, los objetos independientes (libres) son distintos, que si se construyera primero una circunferencia y luego se trazara un radio.

Las exploraciones que se pueden realizar en ambientes dinámicos facilitan a los estudiantes la manipulación de las representaciones figurales de los objetos geométricos, mediante herramientas como el arrastre, la medición, la verificación de propiedades, construcciones auxiliares, entre otras. Como resultado de dicha interacción, se descubren propiedades, se producen conjeturas y se pueden generar estrategias argumentativas que justifiquen la conjetura. El tipo de argumentos utilizados no son del todo deductivos, aunque los educandos pueden lograr un control conceptual de lo que observan en sus pantallas.

Figura 23. Potencialidades de la GD



Para finalizar, el esquema anterior ilustra, de alguna manera, las potencialidades que hemos encontrado en la GD, y que se estima pueden considerarse dentro de la enseñanza de la geometría. Esto es, manejar la herramienta para que, a través de la exploración, los alumnos conceptualicen y formulen sus propias definiciones de objetos geométricos, que lleven a cabo no solamente actividades que inicien con pantallas en blanco, sino que también se diseñen archivos para que los exploren. Otra herramienta que consideramos prometedora es la de Comentarios, una opción que permite introducir textos con extensión variable. Con ella, se les puede pedir a los educandos que justifiquen sus soluciones, así no tendrían que hacer una exploración en un medio dinámico y escribir la justificación en uno estático.

Ejemplos de actividades para enseñar álgebra con CAS

La investigación ha propuesto distintas situaciones para la enseñanza del álgebra usando CAS y lápiz y papel. Estas situaciones permiten contrastar y complementar los significados y las técnicas que se utilizan en el trabajo de sintaxis algebraica con lápiz y papel y las técnicas propias del uso de CAS, así como construir nuevos significados de las nociones y los objetos algebraicos.[3] Por ejemplo, usando lápiz y papel para establecer la equivalencia de dos expresiones algebraicas, como $x^2 - 1$ y $(x + 1)\ (x - 1)$, se puede proceder a realizar manipulaciones sintácticas o a construir una tabla de valores.

Mediante manipulaciones sintácticas, al desarrollar la expresión $(x + 1)\ (x - 1)$ se tiene:

$$\begin{aligned} (x+1)\,(x-1) &= x(x-1) + 1(x-1) && \text{por la propiedad distributiva} \\ &= x(x-1) + x - 1 && \text{por definición de neutro multiplicativo} \end{aligned}$$

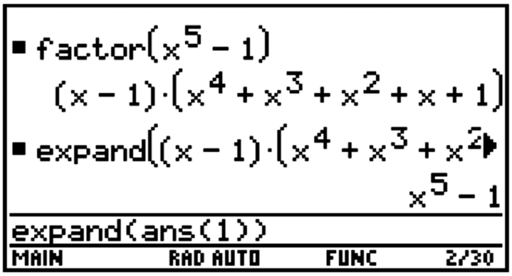
[3] Para más información sobre las actividades referidas, consultar el sitio del proyecto *Algebra in Partnership with Technology in Education*, bajo la dirección de la Dra. Carolyn Kieran. *http://www.math.uqam.ca/~APTE/indexA.html*

$= x{\cdot}x - x{\cdot}1 + x - 1$	por la propiedad distributiva
$= x^2 - x + x - 1$	por definición de exponente 2 y por definición de neutro multiplicativo
$= x^2 - 1$	por definición de inverso aditivo

Mientras que al construir la tabla de evaluación, se tendría que para un número finito de valores ambas expresiones dan los mismos resultados:

x	$x^2 - 1$	$(x + 1)(x - 1)$
-2	$(-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(-2 + 1)(-2 - 1) = (-1)(-3) = 3$
-1	$(-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(-1 + 1)(-1 - 1) = (0)(-2) = 0$
0	$(0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$	$(0 + 1)(0 - 1) = (1)(-1) = -1$
1	$(1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(1 + 1)(1 - 1) = (2)(0) = 0$
2	$(2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(2 + 1)(2 - 1) = (3)(1) = 3$

Sin embargo, para probar que dos expresiones algebraicas son equivalentes usando CAS, se dispone de técnicas que, si bien son similares, tienen distintos alcances y proveen de resultados presentados en diversas formas que se pueden obtener por técnicas simples a lápiz y en papel. Por ejemplo, para probar que las expresiones $x^5 - 1$ y $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ son equivalentes, se pueden usar los comandos "Factor" o "Expand". Para usarlos se escribe el comando en la calculadora, seguidos de las expresiones a operar: "Factor $(x^5 - 1)$" o "Expand $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$", y se da "Enter", como se muestra a continuación.



Las técnicas propias de lápiz y de papel y las de CAS son distintas, su aplicación y contrastación permiten generar la necesidad de explicar los variados resultados que se pueden obtener para un problema, usando lápiz y papel o el CAS.

La siguiente tabla compara las diversas técnicas que permiten resolver tareas de equivalencia de expresiones algebraicas, usando CAS y lápiz y papel.

Técnica	Sintaxis en CAS*	Usando lápiz y papel
Sustitución de valores numéricos	Uso del operador " ê", seguido de evaluación automática.	Sustitución, seguida de evaluación a lápiz y en papel
Obtención de la forma canónica factorizada	Comando "Factor" (generalmente proporciona la factorización completa)	Factorización a lápiz y en papel (generalmente incompleta)
Obtención de la forma canónica desarrollada	Comando "Expand"	Expansión a lápiz y en papel (muy sensible a errores)
Obtención de la forma canónica desarrollada	Simplificación automática obtenida al dar "Enter"	Expansión a lápiz y en papel (muy sensible a errores)
Uso del test de igualdad	Introducción de una ecuación formada por las dos expresiones algebraicas, seguida de "Enter"	Manipulación a lápiz y en papel (limitada)
Resolución de la ecuación formada por las dos expresiones algebraicas	Comando "Solve"	Manipulación a lápiz y en papel (limitada)

* Usando la TI-92 PLUS.

Las siguientes actividades abordan tareas de factorización de polinomios de la forma $x^n - 1$ (llamados *polinomios ciclotómicos*), mediante técnicas desarrolladas usando lápiz y papel y CAS. Estas actividades permiten plantear preguntas, hacer conjeturas y exploraciones para explicar las diferencias entre los resultados obtenidos con las diversas técnicas.[4]

[4] Las actividades están tomadas del sitio del proyecto Algebra in Partnership with Technology in Education, de la Dra. Carolyn Kieran. *http://www.math.uqam.ca/~APTE/indexA.html*

1. (a) Antes de usar la calculadora, trata de recordar la factorización de cada una de las expresiones algebraicas listadas en la columna izquierda de la siguiente tabla:

Factorización usando lápiz y papel	Verificación usando FACTOR (muestra el resultado exhibido en la pantalla de la CAS)
a^2-b^2 =	
a^3-b^3 =	
x^2-1 =	
a^3-1 =	

1. (b) Efectúa las operaciones indicadas (usando lápiz y papel)
(x-1) (x+1)=

(x-1) (x^2+x+1)=

2. (a) Sin hacer manipulación algebraica alguna, anticipa el resultado del siguiente producto:
(x-1) (x^3+x^2+x+1)=

2. (b) Verifica los resultados precedentes anticipados, usando papel y lápiz, y después la calculadora.

2. (c) ¿Qué tienen de común las siguientes tres expresiones?
Y ¿en qué difieren?
(x-1) (x+1), (x-1) (x^2+x+1), y (x-1) (x^3+x^2+x+1).

2. (d) ¿Cómo explicas el hecho de que los productos precedentes son todos ellos un binomio, si se llevó a cabo la multiplicación de: dos binomios, un binomio por un trinomio y un binomio por un tetranomio?

Para factorizar polinomios de la forma $x^n - 1$, los estudiantes pueden construir la técnica de *factorización telescópica*, usando lápiz y papel. Por ejemplo, el polinomio $x^4 - 1$ la técnica de *factorización telescópica* permite obtener la factorización $(x - 1)\ (x^3 + x^2 + x + 1)$. En cambio, al usar el CAS para factorizar este polinomio se obtiene un resultado distinto: $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. Ambos resultados y factorizaciones son correctos. Se pueden verificar efectuando las multiplicaciones con la calculadora o en papel y a lápiz (Hitt y Kieran, 2009).

La riqueza principal de esta actividad radica en explicar la validez de estas dos posibles factorizaciones para una misma expresión, pues conduce a los estudiantes a reelaborar su técnica y sus conocimientos sobre factorización y equivalencia algebraica.

Es importante señalar el rol que juega la tecnología en este tipo de tareas. Por una parte, proporciona un medio seguro para hacer cálculos y verificar resultados. Pero, por otra parte, tiene un papel más cercano a la producción del conocimiento algebraico: permite explorar las técnicas, sus límites de aplicación, sus variantes, elaborar conjeturas y ponerlas a prueba.

Reflexiones sobre la formación de profesores: a manera de cierre

Los resultados que presentamos en este capítulo abordan implicaciones curriculares y de uso de tecnologías para la enseñanza del álgebra y la geometría. Sin embargo, las innovaciones y desarrollos sugeridos están, sin lugar a dudas, condenados al fracaso si no se considera la formación, los conocimientos y las prácticas de enseñanza de los profesores de matemáticas, en cualquier nivel educativo.

A continuación abordamos algunos aspectos de las representaciones semióticas matemáticas de gran envergadura para el trabajo docente en el aula. Sugerimos en especial aspectos que pueden ser incorporados a los cursos de formación inicial y continua de los profesores de matemáticas, así como en los programas de desarrollo profesional docente.

Aspectos de las representaciones algebraicas

Dada la trascendencia y las dificultades que se dan en la transición de la aritmética al álgebra, resulta de primordial importancia comunicar a los profesores de secundaria aspectos centrales del desarrollo del pensamiento algebraico, como la construcción de los significados de las representaciones algebraicas y las relaciones entre sintaxis y semántica. Es imperante que en los cursos de formación inicial y continua de profesores se incluyan estos aspectos entre sus temas de estudio. Por ejemplo, resulta crucial para la adquisición del lenguaje algebraico dar atención a la reformulación y extensión de los usos algebraicos del signo "=" y de la representación de la incógnita.

Proporcionar a los profesores herramientas y conocimientos didácticos para gestionar y articular los significados aritméticos y algebraicos puede ayudar a la construcción de los conocimientos necesarios para sus actividades de enseñanza. Es sabido también que los tratamientos mecanicistas de los conocimientos algebraicos, centrados en la aplicación de algoritmos, generan poca comprensión y nulo desarrollo de habilidades para el uso del lenguaje algebraico en la solución de problemas. Sin embargo, no basta obtener una representación algebraica de un problema, es necesario operar con ella, regresar al contexto, transitar entre sus distintas representaciones (gráfica, tabla, expresión algebraica, lenguaje natural).

Es importante comunicar y ofrecer a los profesores actividades que promuevan el desarrollo de técnicas que permitan transformar expresiones algebraicas, encontrar expresiones equivalentes, pasar de una forma de representación a otra (de la gráfica a la tabla, de la tabla a la expresión algebraica, etc.). Todas éstas son fuentes importantes de significado matemático.

Finalmente, consideramos de vital importancia incorporar a los programas de formación docente situaciones didácticas para profesores en las que se trabaje con estos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico y de su gestión en clase.

Aspectos centrales del pensamiento geométrico

El desarrollo del pensamiento geométrico es transversal a toda la educación básica (preescolar, primaria, secundaria y media superior). Sus aplicaciones van más allá del entorno escolar y del propio contexto de las matemáticas. Ingenieros, arquitectos, geólogos, médicos, diseñadores, artesanos, físicos, biólogos, profesionistas o no, establecemos relaciones con el espacio en el que nos movemos; los puntos de referencia y el sentido espacial, no sólo permiten la ubicación en un mapa, sino entender y establecer relaciones entre los objetos que allí se encuentren. Interpretamos y construimos representaciones de objetos tridimensionales en representaciones planas y viceversa; identificamos y aplicamos transformaciones geométricas en muchos de los objetos que nos rodean. Entonces, ¿cuál es el papel de la escuela en el desarrollo del pensamiento geométrico? Es una pregunta compleja, con muchas posibles respuestas, seguramente, con puntos de coincidencia y contraste entre investigadores, profesores y diseñadores de currículo y de materiales educativos.

En el currículo mexicano, y a nivel internacional, se establece el conocimiento y construcción de sistemas de referencia; el estudio de objetos geométricos en dos y tres dimensiones; el análisis de propiedades y relaciones entre dichos objetos y las diferentes formas de argumentación matemática para la resolución de problemas geométricos. La comprensión de estos objetos, sus definiciones, relaciones y las representaciones que las cristalizan, involucran la construcción de significados y sentidos. En geometría se requiere la transición del dibujo al objeto geométrico. En este proceso, por lo menos, hay dos aspectos centrales que emergen y que consideramos indispensables abordar en la enseñanza de la geometría, como ya lo hemos mencionado en este libro: la visualización y razonamiento geométrico.

Para el desarrollo de visualización, los alumnos deberán aprender a ver a través de las representaciones, ya sean geométricas o discursivas.

En el caso de las geométricas, identificar la figura como un todo, así como reconocer subconfiguraciones[5] necesarias para la resolución del problema propuesto. Actividades que involucren manipulación con materiales concretos y digitales, construcciones con

[5] Son las transformaciones, trazos auxiliares o partes de una misma figura.

diferentes herramientas que pueden propiciar el descubrimiento de conceptos, relaciones, así como el establecimiento de propiedades entre los objetos geométricos.

En el caso de las discursivas es propiciar en los alumnos actividades de reconstrucción de objetos geométricos a partir de descripciones, así como representar geométricamente relaciones a partir de un enunciado en lenguaje natural. Actividades que promuevan la visualización deberían estar presentes a lo largo del currículo.

Para el desarrollo del razonamiento geométrico, se requiere el diseño de actividades donde los alumnos puedan familiarizarse con otras que les permitan hacer inducciones, analogías y deducciones para, a partir de ello, plantear y discutir conjeturas así como respuestas al por qué se cumple o no dicha conjetura.

Reconocemos que en la tarea de enseñanza de la geometría son muchos los retos para el docente. Hay una gran variedad de orientaciones, materiales, así como actividades propuestas para el desarrollo del pensamiento geométrico. Seleccionar, reconstruir y reinventar las más adecuadas, es tarea del profesor y conlleva toma de decisiones importantes. Organizarlos de manera que sean significativos para los estudiantes a partir del propio contexto, de las necesidades de los estudiantes, así como de los contenidos geométricos planteados en el currículo. Dicha tarea requiere conocimiento y comprensión de los contenidos geométricos a enseñar y de los procesos que están presentes en el desarrollo del pensamiento geométrico. Esto permitirá a los docentes reconocer por qué para un niño un cuadrado es aquella figura que es paralela a uno de los lados de la hoja y si se rota 45 grados ya es un rombo. Esto sólo es posible, si en la propia formación de los profesores (inicial y continua), así como en experiencias de desarrollo profesional, vivencian actividades en las cuales estén desarrollando sus propios procesos de visualización y razonamiento, reconociendo en las actividades propuestas qué proceso se está promoviendo y cómo se articulan entre ellos. Identificar el papel de una representación geométrica en un problema o en una actividad, requiere de estos conocimientos y experiencias. Reconocer cuando una actividad posibilita el aprendizaje de la geometría, qué representación es más adecuada y para qué, requiere de habilidades que el profesor debería haber desarrollado en sus procesos formativos, estas habilidades son propias de la profesión docente.

La formación docente entonces debería ofrecer la posibilidad de consolidar conocimientos, tanto del contenido matemático, como didáctico requerido para el nivel educativo en el que se está formando el profesor; pero de igual manera brindar las herramientas necesarias que le permitan transformar estos conocimientos a su contexto, extenderlos y profundizarlos. Por tanto, invitamos a los encargados de diseñar e implementar programas de formación docente y desarrollo profesional que atendamos a las necesidades reales de los profesores, de los estudiantes y de la educación actual, considerando estos programas como procesos dinámicos y cíclicos.

Las ideas que hemos vertido a lo largo de estas páginas dejan inquietudes para continuar la discusión e investigación tanto teórica como en las aulas. Seguir indagando para construir mejores propuestas de enseñanza sin lugar a dudas involucra a las representaciones semióticas y su papel en el aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS

Arzarello, F. (1991a). Procedural and relational aspects of algebraic thinking. En *Proceedings of the fifteenth conference for the Psychology of Mathematics Education*. Italia.

Arzarello, F. (1991b). Pre-algebraic problem solving. *Seminar on Problem Solving*. Viana do Castello, Portugal.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F. y Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition form conjectures to proofs in geometry. *PME XXII Stellenbosch* (2), 32-39.

Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En Lester, Jr. (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte NC: NCTM.

Bishop, A. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización. *Antología en Educación Matemática*. México: Cinvestav-IPN, pp. 29-41.

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación en la actividad matemática. IV Simposio SEIEM. Huelva, España.

Cabrilog Innovative Maths Tools. Recuperado de *http://www.cabri.com/* el 13 de junio de 2016.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, Colombia: Unibiblos, Universidad Nacional de Colombia.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. y Pérotin, C. (1998). *Mathématiques.* 4a. ed. Nouveau programme Cycle central. París, Francia: Hatier. Colección Triangle.

Chazan, D. (1993). High School geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24* (4), 359-387.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chomsky, N. (1957). *Syntactic Structures*. The Hague-París: Mouton.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York, USA: MacMillan, pp. 444-447.

Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona, España: Labor/Ministerio de Educación y Cultura.

Département de Matémathiques, Université du Québec à Montréal. Recuperado de *http://www.math.uqam.ca/~APTE/indexA.html* el 13 de junio de 2016.

Descartes, R. (1701). *Opuscula posthuma physica et mathematica*. Amsterdam, Holanda: Typographia P. & Blaev J.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Navarro, J. (intro., trad. y notas) Madrid: Alianza Editorial.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *ZDM 34*(5), 221-229.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht, Holanda: CD-ß Press.

Drouhard, J. (1992). *Les Ecritures Symboliques de l'Algèbre Elémentaire*, Tesis doctoral. Universidad Denis Diderot, París 7.

Dupuis, C. (1997). Uso de la computadora para modificar la aprehensión de figuras geométricas. *Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática*. Hermosillo, pp. 323-336.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht/Boston, pp. 37-52.

Duval, R. (1999a). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999b). Figuras geométricas y discurso matemático. *Semiosis y Noesis. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (trad. Myriam Vega). Cali, Colombia: Univalle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131.

Euclides, & Hilbert, D. (1992). *Precedidos de Los fundamentos de la Geometría, por D. Hilbert.* Tomos I-II. García Bacca, J. (Ed.). México: UNAM.

Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A Working Perspective. En G. Booker, O. Coob y T. de Mendicutti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education*. México: PME.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E. y Hoyos, V. (1993). A theory of the production of mathematical sign systems -the case of algebraic representations of basic geometrical variation notions. En R. Joanne y J. Barbara (Eds.), *Proceedings of the XV-Conference for the Psychology of Mathematics Education-North American Chapter*, vol. 1. California, Estados Unidos: Pacific Grove.

Filloy, E. y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*(3), 229-240.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'educazione matemática*, *5*(3). Caligari, Italia.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), junio. Quebec.

Filloy, E., Rojano T. y Puig, L. (2007). *Educational Algebra. A Theoretical an Empirical Approach*. Berlín/Nueva York: Heidelberg/Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2002). Cognitive tendencies and the interaction between semantics and algebraic syntax in the production of syntactic errors. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1. Norwich, Reino Unido: Universidad de East Anglia.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems dealing with Unknown Quantities and two different levels of representing unknowns, *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(1).

Frege, G. (1996). Sentido y significado. En *Escritos filosóficos* (trad. Mosterín, J.). Barcelona, España: Crítica.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Freudenthal Institute's, Utrecht University. Recuperado de *http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html* el 13 de junio de 2016.

Furinghetti, F., Olivero, F. y Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(3), 319-335.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2).

Gallardo, A. (2002). The extension of the matural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49.

Gardiner, J. y Hudson, B. (1998). The evolution of pupils' ideas of construction and proof using hand-held dynamic geometry-technology. *PME XXII Stellenbosch* (2), 337-344.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos geométricos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA, 3*(3).

Herscovics, R. y Linchevsky, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. En R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1. Virginia, Estados Unidos: Division of Curriculum/Instruction, VPI/SU.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática, 10*(2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (2003) Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2).

Hitt, F., y Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (14), 121-152.

International Geogebra Institute. Recuperado de *https://www.geogebra.org/* el 13 de junio 2016.

Kaput, J. (1987). A representational framework. En J. C. Bergeron, N. Herscovicsy, C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the eleventh conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montreal, Canadá: PME.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 1.

Kieran, C. (1998). Models in Mathematics Education Research: a broader view of research results. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity.* Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic.

Kieran, C., y Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(1).

Kirshner, D. (1987). *The grammar of symbolic elementary algebra*. Tesis doctoral. Universidad de la Columbia Británica, Vancouver, Canadá.

Laborde, C. (1996). Cabri-Geómetra o una nueva relación con la geometría. *Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid, España*: Ministerio de Educación y Ciencia, pp. 67-85.

Laborde, C. (2004). Instrument et processus d'instrumentation. *M2-EIAHD UE* 3. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, pp. 1-8.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics,* pp. 22-35.

Laborde, C., y Laborde, J. M. (1991). Problem solving in geometry: From microworlds to intelligent computer environments. En J. P. Ponte *et al*. (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies*. NATO AS1 Series F (89), 177-192.

Laborde, C. y Laborde, J-M (2011). Interactivity in dynamic mathematics enviroments: what does that mean? *Proceedings of the Sixteenth Asian Technology Conference in Mathematics, ATCM. Mathematics and Technology.* Bolu, Turquía: LLC.

Li, Y. y Lappan, G. (Eds.) (2014). *Mathematics curriculum in school education*. Dordrecht, Holanda: Springer.

Maracci, M. (2001). The Formulation of a Conjecture: The role of drawings. *PME25* (3), 335-342.

Mariotti, M., Bartolini, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition. *PME21* (1). Lathi, Finlandia.

Mariotti, M. (2001). Introduction to Proof: The mediation of a Dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics,* 44. Holanda: Kluwer Academic Publishers, pp. 25-53.

Mariotti, M. (2012a). Proof and proving as an educational task. In *Proceedings of the 7th ERME Conference,* 9-13 de febrero, 2011, Fe Rzeszów.

Mariotti, M. (2012b). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education* (14), 163-185.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior 17*(2), 183-195.

Mesquita, A. y Padilla, V. (1990). Point d'ancrage en geometrie. *L'ouvert* (58), 30-35.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Magisterio/VA-MEN.

Ministerio de Educación (2007). *Matemática. Geometría. Aportes para la enseñanza. Nivel Medio*. Buenos Aires, Argentina: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Moreno, L. (2001). Cognición, mediación y tecnología. *Revista Avance y Perspectiva*, vol. 20, 65-68. México: Cinvestav-IPN.

Moreno, L. (2002a). Cognición y herramientas de mediación. Documento de trabajo del Seminario de Doctorado Investigación III.

Moreno, L. (2002b). Ideas geométricas del currículum presentadas mediante el Cabri Géomètre. *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: MEN, pp. 141-150.

Moreno, L. y Sacristán, A. (1996). Representaciones y aprendizaje. *Investigaciones en Matemática Educativa.* México: Editorial Iberoamérica, pp. 277-289.

Moreno, L. y Lupiáñez, J. L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las Matemáticas. *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada, España: Editorial Universidad de Granada, pp. 291-300.

National Council of Teachers of Mathematic (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado de *http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521; https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3544* el 13 de junio de 2016.

Olivero, F. (2003). *The proving process within a dynamic geometry environment.* Tesis de posdoctorado, Universidad de Bristol.

Olivero, F. y Robutti, O. (2001a). Measures in Cabri as a bridge between Perception and Theory. *PME XXV* (4), 9-16.

Olivero, F. y Robutti, O. (2001b). An exploratory study of students' measurement activity in a dynamic geometry environment, *CERME 2.*

Olivero, F. y Robutti, O. (2002). How much does Cabri do the work for the students? *PME 26*(4), 9-16.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, O. (2013). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. Investigaciones en educación geométrica*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, pp. 127-148.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del conocimiento. *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Editorial Iberoamérica, pp. 1-16.

Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3).

Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, 18-21 de agosto, IUFM de Caen, pp. 203-213.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos.* (Trad. M. Acosta). Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *IV Simposio SEIEM*. Huelva, 1-13. Recuperado de *http://www.ugr.es/~seiem/Actas/Huelva/LRico.htm* el 12 de septiembre de 2010.

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. En N. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra*. Dordrecht, Boston, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. (2004). Local theoretical models in algebra learning: a meeting point in mathematics education. En D. McDougall y J. Ross (eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1. Toronto, Canadá: Ontario Institute for Studies in Education-Universidad de Toronto.

Rojano, T. (2006). Adquisición del lenguaje algebraico: el programa de investigación. En E. Filloy (comp.). *Matemática Educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. México: Santillana.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Revista de Didáctica de las Matemáticas* 75.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, *25 años*. México: Santillana, pp. 11-30.

Sandoval, I. (2001). *Visualización y razonamiento geométrico.* Tesis de maestría en Ciencias, especialidad Matemática Educativa del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Sandoval, I. (2005). *Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico*. Tesis de doctorado en Ciencias, especialidad Matemática Educativa del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5-27.

Sandoval, I. y Moreno, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: Retos para la Educación. *Horizontes Pedagógicos, 14*(1).

Sandoval, I. y Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in R^3. Learning Challenges. *Educational Studies of Mathematics, 92*(1), 109-127.

Santillán, M. (2002). *Mediación instrumental con calculadora*. Tesis de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Samper, C. (2008). *Geometría. Enseñanza secundaria 2*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. 2a. ed. Madrid, España: Morata.

Solares, A. (2002). *La sustitución algebraica. Extensión de significados y transformaciones*. Memoria para el examen pre-doctoral. Cinvestav-IPN.

Solares, A. (2007). *Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita*. Tesis doctoral. Cinvestav-IPN.

Solares, A. y Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions. *Educational Studies in Mathematics,* 84.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*(4).

Talmon, V. y Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent-Child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics. 57*(1), 91-119.

Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, M., Sandoval, I., Jinich, E. y Cortés, M. (2012). *Matemáticas 2.* México: Santillana. Serie Horizontes.

Trigueros, M., Lozano, M., Schulmaister, M., Sandoval, I., Jinich, E. y Cortés, M. (2014). *Matemáticas 3.* México: Santillana. Serie Horizontes.

Trouche, L. (2003). Managing the Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE): Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations. *CAME 2003 - The Third CAME Symposium Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment.*

Vincent, J. y McCrae, B. (2001). Mechanical linkages and the need for proof in secondary school geometry. *PME25* (4).

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. M. Rotger (Ed.). Buenos Aires: Ediciones Fausto.

Walle, van de J. (2007). *Reform* vs *The Basics: Understanding the conflict and dealing with it.* Virginia, Estados Unidos: Universidad de Commonwealth.

Yerushalmy, M. y Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics*. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia, Estados Unidos: NCTM.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, (69), 131-148.

Subdirectora de Fomento Editorial *Griselda Mayela Crisóstomo Alcántara*
Formación *Margarita Morales Sánchez*
Diseño de portada *Jesica Coronado Zarco*
Edición y corrección de estilo *Mariana Molina Jaimes*

Esta primera edición de *Representaciones semióticas y didáctica de las matemáticas. Repercusiones para el aula*. estuvo a cargo de la Subdirección de Fomento Editorial, de la Dirección de Difusión y Extensión Universitaria, de la Universidad Pedagógica Nacional y se terminó de imprimir el 28 de agosto de 2018, en los talleres gráficos de Formas e imágenes, S. A. de C. V., con domicilio en av. Universidad 1953, edificio 2, local E, col. Copilco el bajo, delegación Coyoacán, cp 04340, Ciudad de México. El tiraje fue de 300 ejemplares.