

# MODELOS MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO: CONEXIONES ENTRE LA ARITMÉTICA, EL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA BÁSICAS



**Verónica Hoyos**

Proyecto de Investigación, 2000 (Universidad Pedagógica Nacional)



## **OBJETIVO GENERAL**

Continuar en la línea de investigación que fusiona las perspectivas didácticas de utilización de nuevas tecnologías para la simulación y de introducción de contextos históricos de recreación de la experiencia científica. Ambos enfoques se aplican a la elaboración y el montaje de escenarios de aprendizaje que utilizan artefactos o máquinas articuladas para el trazado y el dibujo en el salón de clase (Hoyos y Capponi 1998, 1999; Bartolini y Mariotti, 1998; Bartolini y Boero 1998), con el fin de que los estudiantes establezcan vínculos o conexiones entre dominios matemáticos distintos. En particular, interesa indagar acerca del establecimiento de estas conexiones por parte de los estudiantes de segundo y tercer años de secundaria y primero y segundo años del bachillerato.

## **ANTECEDENTES**

Resultados recientes de investigación constatan la potencia del uso de nuevas tecnologías en la enseñanza del álgebra y de la geometría, así como en promover la colaboración de los estudiantes de secundaria en trabajos de diseño. En sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones (Hoyos, 1999), o se promueve la creatividad y el ingenio en el diseño con el uso de las nuevas tecnologías (Loki, 1999). Así, estudiantes de secundaria y bachillerato, vía el desarrollo reciente de la informática, actúan y acceden al estudio de nociones, propiedades y procedimientos matemáticos como anteriormente sólo le era posible al matemático profesional. Micromundos e

informática han permitido logros que van desde un control en la ejecución de procedimientos algorítmicos de resolución, o una evaluación de los medios utilizados (Hoyos y Capponi, 1998, 1999), hasta una implementación "real" de propuestas de trabajo novedosas (Loki, 1999).

Por otro lado, perspectivas teóricas y prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas (Mariotti, Bartolini, Boero et al. 1997; Boero, 1998) argumentan a favor de la introducción en el salón de clases de contextos históricos de recreación de la experiencia científica, en particular aquellos que tienen que ver con la práctica de la geometría utilizando modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas. La historia de las ideas matemáticas proporciona contextos para la gestación y la asimilación de nociones y procedimientos que la otra modernización educativa de los años sesenta, tendió a descontextualizar (Hoyos 1997).

Así, en la fusión de las dos perspectivas tenemos como antecedente el estudio de las conexiones entre la geometría y el álgebra, una indagación sobre la explicitación de propiedades geométricas invariantes usando un lenguaje algebraico, llevada a cabo en Francia, durante el año escolar 97-98. En ese experimento de enseñanza se concibieron escenarios de recreación de experiencia matemática que permitieron a los estudiantes el establecimiento de vínculos entre los diferentes dominios de representación involucrados, a saber entre propiedades geométricas y su simbolización algebraica correspondiente, o bien entre procedimientos algebraicos y su representación gráfica o numérica asociada.

La perspectiva de investigación que ahí se adoptó fructificó desde un punto de vista teórico y de desarrollo educativo (cf. Hoyos, V. y Capponi, B., 1999). Por el lado del desarrollo, con el montaje y estructuración de escenarios de aprendizaje usando el micromundo Cabri-II; y por el lado teórico aportó porque reformuló el problema del establecimiento de vínculos entre representaciones gráficas y algebraicas como un problema de experiencia matemática que se basa en: (a) la construcción e interpretación de expresiones algebraicas, a través de un trazado dinámico de curvas -utilizando la simulación de una máquina articulada para trazar curvas como las ideadas por Descartes en *La Geometría* (Descartes, 1637); (b) la descripción de las propiedades geométricas invariantes de las curvas obtenidas; y (c) la representación gráfica de variables algebraicas con el micromundo Cabri II.

En resumen, la actividad de significación de las matemáticas que plantea la introducción de contextos y artefactos sugeridos por la historia de las nociones matemáticas, la posterior simulación del artefacto en Cabri-II, y el estudio de propiedades invariantes merced la geometría dinámica que proporciona el soporte del micromundo, se desarrolla bajo los siguientes supuestos didácticos:

- uso de artefactos u objetos físicos de grandes dimensiones que son manipulados directamente bajo la guía del maestro;
- se pretende insertar la actividad en un discurso general de tipo histórico;
- se favorece la aproximación a teorías, conceptos, y procedimientos matemáticos que reproducen aspectos ligados o vinculados con su origen;

- se pasa a la simulación en computadora de tales mecanismos, lo que beneficia a la percepción y al conocimiento matemático en desarrollo del estudiante por el soporte para la exploración que le proporciona el micromundo Cabri-II.

## **JUSTIFICACIÓN**

En México, la reforma educativa vigente (SEP, 1993) plantea el estudio de la Aritmética, el Álgebra la Geometría, la Probabilidad y el Procesamiento de la Información, a lo largo de todo el ciclo de educación media. En general, durante el estudio de las matemáticas en el ciclo de educación media de la secundaria y el bachillerato, el estudiante confronta temáticas usualmente desvinculadas entre sí, y sin un soporte experimental que le haga ver o le aproxime a percibir el inicio de nociones o procedimientos que a los mismos matemáticos de la época les llevó tiempo reconocer (Hoyos, 1997). Si bien actualmente la comunidad de matemáticos y de especialistas en educación matemática se ha preocupado por buscar y elaborar propuestas educativas novedosas para estos niveles educativos, esto se ha concretado hasta el momento en la elaboración de análisis y de textos adecuados al desarrollo de las propuestas educativas vigentes. El presente proyecto de investigación intenta aportar en esta búsqueda de medios que mejoren la calidad de la educación matemática básica mediante la experimentación educativa, estableciendo vínculos o conexiones entre los temas matemáticos de la Aritmética, Álgebra, Geometría y Procesamiento de la Información que son modelos o representaciones matemáticas del movimiento.

En realidad, la investigación que aquí se propone es una prolongación del estudio que actualmente se lleva a cabo en el nivel de bachillerato, en la cual el plan fue trabajar únicamente con el aspecto de la simulación y la representación gráfica con el micromundo Cabri-II. En el protocolo del proyecto de investigación que para ese efecto se presentó (Hoyos-Conacyt 1998, Ref.129994), se argumentó acerca del enfoque integrador del Álgebra y la Geometría de los programas de matemáticas para el bachillerato, y de la necesidad de indagar sobre los resultados cognitivos de una propuesta de experimentación educativa como la que entonces se propuso. Ahora, en el proyecto que aquí se presenta se plantea una extensión de ese estudio hacia el nivel escolar de secundaria, e incorporando el uso "real" de artefactos mecánicos de dibujo, así como también el uso de las nuevas tecnologías, medios cuya utilización está sostenida por teorías actuales de la cognición en matemáticas (Boero et al. 1997; Noss y Hoyles, 1996; Confrey, 1993).

## **HIPÓTESIS O PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

En este proyecto pretendemos conocer si el uso de máquinas o artefactos mecánicos y virtuales, promueve una experiencia matemática significativa. En particular, interesa indagar el establecimiento de conexiones por parte de los estudiantes de secundaria y bachillerato, entre los dominios de la geometría y la aritmética, y entre la geometría y el álgebra.

Para llevar a cabo esta indagación, se elaborarán e implementarán escenarios de aprendizaje que involucran el uso de artefactos mecánicos articulados para dibujar y/o trazar trayectorias, así como también se pasará al dominio de su simulación en el micromundo Cabri-II.

Así, a la manera de un pantógrafo, dibujos que son trazados o conducidos manualmente, son reproducidos por las articulaciones de las máquinas en un primer momento. En los escenarios de aprendizaje que se elaborarán para guiar el trabajo del estudiante, se les pedirá efectuar una serie de mediciones y comparaciones entre los dibujos obtenidos a fin de establecer relaciones aritméticas entre los trazos realizados. Posteriormente, el trabajo dirigido en el medio ambiente informático de aprendizaje propiciará la percepción y exploración de propiedades geométricas invariantes bajo los movimientos rígidos en el plano, como son las simetrías, giros y homotecias

En estas situaciones didácticas, un punto crucial lo constituye la enunciación matemática de las propiedades del trazado (Laborde, 1993), ya sea estableciendo relaciones aritméticas entre las medidas de los dibujos; ya sea por la expresión textual de las propiedades generales que se perciben en los trazos bajo el dinamismo del soporte material con el que se provee al estudiante; ya sea encontrando los términos algebraicos o ecuaciones que describen de manera general el trazo efectuado.

Cualquiera de las enunciaciones requeridas dependerá de la formación o nivel escolar del educando y de la comprensión de las propiedades del trazo efectuado. A todas estas expresiones de las propiedades de un trazado dinámico es a lo que en este proyecto de investigación nos estamos refiriendo como modelos matemáticos del movimiento. Si con la utilización de los artefactos articulados y/o la exploración en el micromundo informático, el estudiante logra obtener las enunciaciones matemáticas requeridas; o si establece un mecanismo de comparación o de control de sus ejecuciones para validar las manipulaciones que realiza (con el fin de obtener respuesta o solución a los problemas de trazado o a los problemas usuales de manipulación simbólica pertenecientes a cada uno de los dominios mencionados); estas serán para nosotros las evidencias del establecimiento de las conexiones entre los dominios matemáticos distintos que antes hemos mencionado (Aritmética, Álgebra y Geometría, fundamentalmente).