

OSCO Y MURILLO
MANUEL



EL NINO
MEXICANO

LT

LB1579

LT
LB1589
M6
H3.5



CURSO DE INSTRUCCIÓN PRIMARIA

NOCIONES

DE

GEOMETRIA INTUITIVA

OBRAS DE JULIO S. HERNÁNDEZ

1. **Lecciones de cosas.** Obrita destinada á los alumnos de 4º año. Contiene : nociones de los cuerpos, su clasificación en simples y compuestos, extracción y aplicación de los metales y metaloides, idea general de la naturaleza física del hombre, clasificación de sus funciones, estudio de sus principales sistemas de órganos, etc..... « 10
2. **Aritmética.** Obrita destinada á los alumnos de 4º año. Contiene un estudio completo por el método de reducción á la unidad, con cuestionarios, ejercicios y problemas sobre el sistema antiguo de pesas y medidas, fracciones comunes, sistema moderno de pesas y medidas, fracciones, decimales, sistema comparado, problemas diversos de reglas de tres..... « 10
3. **Geometría y moral.** Contenidas en un solo cuaderno y están destinadas á los alumnos de 4º año. La geometría trata por un método fácil y sencillo la manera de medir toda clase de superficies y volúmenes en los cuerpos geométricos, con innumerables problemas prácticos. La moral trata de los deberes para con la humanidad considerados bajo dos puntos de vista ; deberes de caridad y deberes de justicia. Las dos materias en un solo cuaderno. « 10
4. **Cuarto año escolar.** Este libro comprende todas las materias anteriores..... « 30
5. **Instrucción cívica.** Comprende idea del gobierno en la familia, en el pueblo, en la municipalidad, y en el distrito, cantón, partido ó prefectura ; organización política y administrativa del Estado ; organización política y administrativa de la República ; los derechos del hombre reconocidos en nuestra Constitución : derechos y obligaciones del ciudadano mexicano..... « 10
6. **Guía metodológica para el nuevo método inductivo, analítico sintético de lectura y escritura simultáneas.** Esta obra contiene un juicio crítico del libro de lectura escrito por Don Carlos A. Carrillo y el procedimiento que debe emplear el maestro para su fácil aplicación en la enseñanza..... « 25
7. **Nociones de geometría intuitiva.** Obra escrita según los principios modernos de la ciencia pedagógica y arreglada al programa de las escuelas primarias de la República. Contiene dos partes : 1ª Nomenclatura geométrica. 2ª Longimetría, Planimetría y Estereometría..... « 25

En preparación :

Curso elemental de Pedagogía teórica, ó sean breves nociones sobre la « Filosofía de la Educación ».

CURSO DE INSTRUCCIÓN PRIMARIA

NOCIONES

DE

GEOMETRÍA INTUITIVA

ESCRITAS SEGÚN LOS MODERNOS PRINCIPIOS
DE LA CIENCIA PEDAGÓGICA Y ARREGLADAS AL PROGRAMA
DE LAS ESCUELAS PRIMARIAS DE LA REPÚBLICA

POR

Julio S. HERNÁNDEZ

PROFESOR NORMALISTA,
EX-DIRECTOR FUNDADOR DE LA "ESCUELA MODELO" DE LA CIUDAD DE PUEBLA,
SUB-DIRECTOR EN LA ESCUELA NORMAL DE MÉXICO,
AUTOR DE VARIAS OBRAS ELEMENTALES, ETC., ETC.

CON 200 GRABADOS



LIBRERÍA DE LA V^{da} DE CH. BOURET

PARÍS
23, Rue Visconti, 23

MÉXICO
14, Cinco de Mayo, 14

1895

LT
LB1589
M6
H3.5

125778

Esta obra es propiedad del autor con arreglo á la ley, y nadie podrá
reimprimirla, ni traducirla sin su permiso correspondiente.
Esta edición es propiedad del Editor.



PRÓLOGO.

El pequeño libro de « Geometría intuitiva » que hoy ofrecemos á la niñez mexicana, viene á llenar sin duda una necesidad hace tiempo sentida, si se piensa que los autores que nos han precedido, al ocuparse de esta materia en la Escuela primaria, no han querido ceder su preferencia al método analítico sobre el sintético, que es á nuestro humilde juicio el que más se adapta al desarrollo intelectual del niño en los primeros años de su infancia. Nosotros que aceptamos esta opinión con una convicción profunda, porque teóricamente nos satisface, y porque además la hemos comprobado suficientemente con la práctica; creemos que nuestra obrita, siguiendo ese camino en su exposición, deberá llenar esa exigencia pedagógica en las Escuelas, sin menoscabar las exigencias didácticas de tan utilísima como interesante ciencia, cuyos innumerables servicios son necesarios tanto al hombre de gabinete en sus investigaciones científicas, como al obrero y al campesino en sus faenas cotidianas.

Los autores especiales que sobre esta materia hemos consultado, son á no dudarlo modelos de corrección en la parte expositiva de sus ideas, y se encuentran entre ellos hábiles educadores como Th. Villette, Félix Heinent, Jules Dalsème, L. Saint Loup, etc.; otros que han incluido en sus obras de Aritmética las más esenciales

lecciones de Geometría, como G. Bovier Lapierre, P. Leyssenne, J. Chaumeil, G. Moreau; las obras publicadas bajo la dirección de notables profesores como M. E. Combette, M. G. Ducoudray, etc., son todos libros excelentes que revelan los grandes progresos de la Instrucción pública en Europa.

Mas por desgracia, en todos estos preciosos trabajos, no hemos podido encontrar ninguna aplicación de los principios pedagógicos demostrados por Wysse, Tyn-dall y Herbert Spencer respecto de la enseñanza de la Geometría, que consisten según su última conclusión en mostrar al niño bajo una forma concreta, los cuerpos geométricos para observar en ellos todos los elementos de esta ciencia como son: el volumen, la superficie, la línea y el punto; en vez de seguir la marcha contraria, de comenzar con las ideas abstractas del punto, la línea, la superficie y el volumen que hasta ahora se ha seguido, y que ha costado inmenso trabajo desterrar siquiera sea en parte de muchas de nuestras Escuelas.

Dar el primer paso en esta nueva senda anunciada por los pedagogos modernos, es evidentemente un tanto temerario, por los obstáculos y dificultades que presenta; mas luchando contra las preocupaciones reinantes, y aspirando siempre en nuestro noble afán de realizar en el país algunos de los ideales que nos han señalado sabios eminentes, damos á luz el primer ensayo de una « Geometría intuitiva », el cual después de una prolongada y concienzuda meditación hemos dividido en dos partes principales:

Primera. « **Nomenclatura geométrica** », que contiene por decirlo así el alfabeto de la Geometría, ó sean todos los elementos de que consta, partiendo de lo concreto á lo abstracto y de lo conocido á lo desconocido, es decir:

volúmenes, superficies, líneas, puntos. Esta parte ha sido desarrollada siguiendo el método analítico y está destinada á los alumnos del 1º, 2º y 3º año.

Segunda. « **Longimetría Planimetría, Estereometría,** » conteniendo respectivamente cada subdivisión un capítulo de construcción de líneas, superficies y volúmenes y otra de sus propiedades, medición y aplicaciones. En esta parte se ha seguido el método sintético y está destinada á los alumnos del 4º, 5º y 6º año.

Cada uno de los capítulos de la obra consta de un sumario, el texto, ejercicios y observaciones al Profesor, y un cuestionario al fin.

Antes de terminar juzgamos un deber imprescindible, tributar un público testimonio de gratitud al Sr. Ingeniero de minas Don Manuel María Contreras, distinguido Profesor de Matemáticas de la Escuela Normal de esta ciudad; tanto por los buenos servicios que aprovechamos al consultar su interesante obra de Geometría, como por sus sabias y acertadas indicaciones que personalmente nos hizo al examinar la parte técnica de nuestro libro.

Concluimos este preámbulo deseando que nuestro humilde trabajo preste los servicios que sinceramente ambicionamos.

J. S. HERNÁNDEZ.

México, 1894.

GEOMETRÍA INTUITIVA.

PRIMERA PARTE. NOMENCLATURA GEOMÉTRICA.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

Sumario : — 1. Cuerpo. — 2. Espacio. — 3. Volumen. — 4. Cuerpos sólidos : de forma irregular y de forma geométrica. — 5. Caras de los cuerpos.

1. Se llama **cuerpo**, todo ser ú objeto material que ocupa un lugar en la extensión indefinida del espacio,



Fig. 1.

por ejemplo : los minerales, los vegetales, los animales, los hombres, los seres artificiales (fig. 1).

2. El **espacio** es muy grande, no tiene principio ni fin, está todo ocupado ya unas veces por cuerpos sólidos como todos los indicados anteriormente, otras por líquidos como el agua, y otras por gases como el aire; pero hasta ahora no conocemos ningún lugar que esté completamente vacío.

3. Se llama **volumen** la parte de espacio que ocupa un cuerpo. Sólo los cuerpos sólidos tienen un volumen más ó menos fijo; los líquidos cambian de volumen según la vasija que los contiene, y los gases cuando están libres se extienden indefinidamente.

4. Los cuerpos **sólidos** según la forma de su volumen son de dos clases:

1°. Cuerpos sólidos de **forma irregular**, ó que no obedecen á ninguna regla fija para engendrar su volu-



Fig. 2.

men, y por consiguiente es irregular en todas sus partes. (fig. 2).

2°. Cuerpos sólidos de **forma geométrica**, ó que obedecen á una regla fija para engendrar su volumen, y por consiguiente es regular en todas sus partes (fig. 3).

5. Tanto en los cuerpos de forma irregular, como en los de forma geométrica se observan en su exterior tres

clases de caras diferentes que reciben el nombre de superficies.

1º. Cuerpos terminados con superficies planas que existen con abundancia en los minerales, cuando están en forma de cristales.

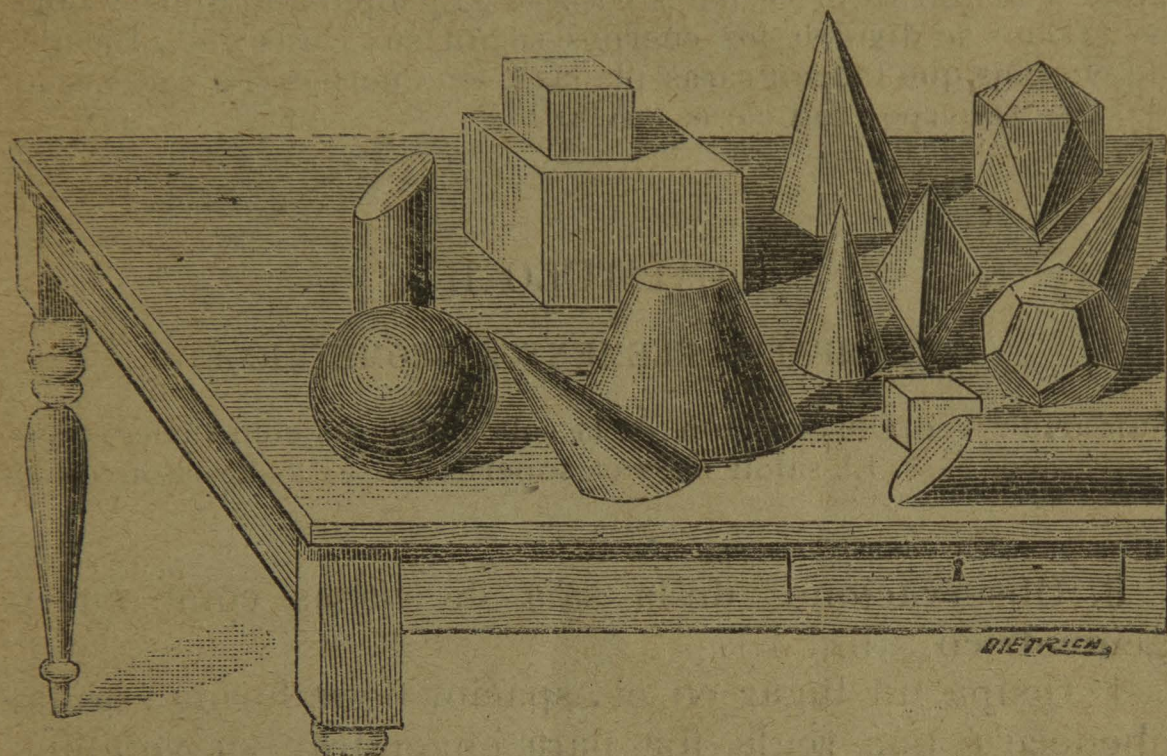


Fig. 3.

2º. Cuerpos terminados con superficies redondas, que se encuentran en las plantas, en los animales y en el hombre.

3º. Cuerpos terminados con superficies mixtas, ó sean formados de planas y redondas, los cuales se encuentran especialmente en los seres artificiales.

Ejercicios y observaciones. — 1. Enumeración de objetos y seres : minerales, vegetales, animales, hombres, objetos artificiales. — 2. Idea del espacio, lugar que ocupan los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos. — 3. Idea del volumen en los sólidos, en los líquidos y en los gases. — 4. División de los cuerpos sólidos, por su forma y volumen en cuerpos de forma irregular y de forma geométrica. — 5. Observación de las caras en unos y otros, división natural que resulta.

CUESTIONARIO. — ¿ Qué es cuerpo ? — ¿ Enumere Vd. algunos cuerpos ? — ¿ Minerales ? — ¿ Plantas ? — ¿ Animales ? — ¿ Algunos

objetos artificiales? — ¿Dé Vd. una idea del espacio? — ¿Todo está ocupado? — ¿Cuántos estados presentan los cuerpos? — ¿Cite Vd. algunos cuerpos sólidos? — ¿Líquidos? — ¿Gaseosos? — ¿Qué se entiende por volumen? — ¿Cómo es el volumen en los sólidos, en los líquidos y en los gases? — ¿Cómo se dividen los sólidos según su forma? — ¿Qué diferencia hay entre los cuerpos de forma irregular y los de forma geométrica? — ¿Ejemplos de unos y otros? — ¿Cómo se dividen los cuerpos según sus caras? — ¿Ejemplos de cuerpos que tengan caras planas? — ¿Cuerpos con caras redondas? — ¿Cuerpos con caras mixtas?

CAPÍTULO II.

PRINCIPALES ELEMENTOS GEOMÉTRICOS.

Sumario : — 6. Observación de la sala de clases como cuerpo geométrico. — 7. El salón en sus superficies. — 8. El salón en sus líneas.

6. Observaciones de la sala de clases como cuerpo geométrico : (fig. 4.)

1ª Ocupa un lugar en el espacio, tiene forma regular, obedece á una regla fija para engendrar su volumen; luego es un cuerpo geométrico.

2ª Tiene tres dimensiones, **longitud ó largo, latitud ó ancho y altura**, que según los casos se le llama también á esta última, **grueso, espesor ó profundidad**.

3ª Tiene cuatro paredes, un piso y un techo que nos dan idea de lo que son **superficies planas**. El contorno de cada superficie se le llama **perímetro**; en el presente caso es un **perímetro cuadrilátero**, porque tiene cuatro lados.

4ª Cada superficie acaba por cada lado en una orilla, filo, ó juntura que se llama **línea**. En el presente caso hay doce líneas que son todas líneas rectas.

5ª Cada línea acaba en una punta que recibe el nombre de **punto**, habiendo en el presente caso ocho puntos.

7. Observaciones de la sala de clases en sus superficies.

1ª Cada superficie del salón tiene sólo dos dimensiones : **longitud ó largo y latitud ó ancho**.

2ª Dos superficies unidas por una línea forman lo que

se llama un ángulo **diedro** ó de dos caras; también se notan tres superficies unidas por tres líneas y un punto que forman un ángulo **triedro** ó de tres caras. Si fueren más de tres superficies y un punto se les llama **ángulos poliedros**.

3ª Las paredes de enfrente ó bien el techo con el piso

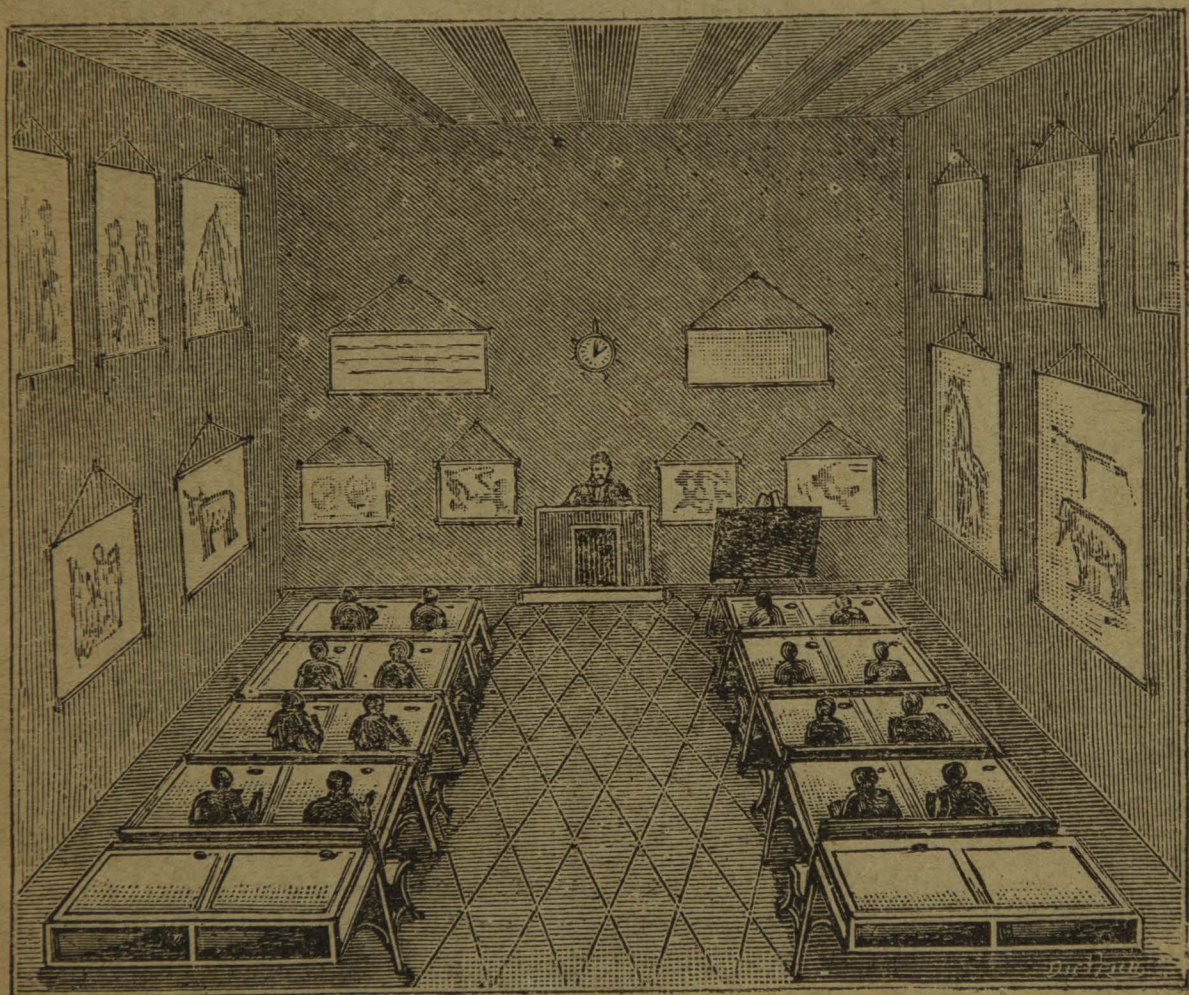


Fig. 4.

guardan respectivamente entre sí una misma distancia y se llaman superficies **paralelas**.

4ª Dos superficies unidas entre sí por una línea de manera que una se apoye sobre la otra y sin inclinarse á ningún lado, son dos superficies **perpendiculares**.

5ª Las paredes laterales ó sean las cabeceras y costados están trazados siguiendo la dirección de un hilo á plomo, son superficies **verticales**. El techo y el piso están contruídos á nivel ó siguiendo la posición del agua tranquila son superficies **horizontales**.

8. Observaciones de la sala de clases en sus líneas.

1^a Cada línea no tiene más que una dimensión, es la longitud ó largo.

2^a Dos líneas que se juntan en un punto ó vértice forman un ángulo lineal.

3^a Dos líneas opuestas en cada superficie que guardan entre sí una misma distancia, son dos líneas paralelas.

4^a Una línea recta que descansa sobre otra sin inclinarse á ningún lado, es una línea perpendicular.

5^a Las líneas de las paredes que tienen la dirección de un hilo á plomo son líneas **verticales**; las trazadas á nivel ó siguiendo la dirección de una línea perpendicular á la vertical son líneas **horizontales**.

Ejercicios y observaciones. — 6. Observación de la sala de clases considerada como cuerpo geométrico para dar idea de sus tres dimensiones, de superficie, de línea y de punto. — 7. Observaciones de superficies: sus dimensiones, ángulos diedros, triédros, poliedros, superficies paralelas, perpendiculares, verticales y horizontales. — 8. Observación de líneas, su única dimensión, ángulos lineales, líneas paralelas perpendiculares, verticales y horizontales.

CUESTIONARIO. — ¿Por qué la sala de clases es un cuerpo geométrico? — ¿Señale Vd. sus tres dimensiones? — ¿Ponga Vd ejemplos en que la altura se considere como profundidad? — ¿Cuántas caras tiene el salón y qué clases de superficies son? — ¿Á qué llama Vd. perímetro? — ¿Qué clase de perímetro tienen las paredes? — ¿Á qué se llama arista? — ¿Señale Vd. y cuente todas las aristas que hay en el salón? — ¿Qué clase de aristas son? — ¿Á qué se llama punto y cuántos puntos hay en el salón? — ¿Cuáles son las dimensiones de una superficie? — ¿Á qué se llama ángulo diedro, triédro ó poliedro? — ¿Señale Vd. todos los ángulos diedros y triédros del salón? — ¿Hay algún ángulo poliedro? — ¿Explique Vd. lo que son superficies paralelas y señale Vd. algunas? — ¿Haga Vd. lo mismo con las superficies perpendiculares? — ¿Otro tanto con las superficies verticales y horizontales? — ¿Qué dimensiones tiene una línea? — ¿Cómo es un ángulo lineal? — ¿Señale Vd. algunos? — ¿Señale Vd. algunas líneas paralelas? — ¿Líneas perpendiculares? — ¿Verticales y horizontales?

CAPÍTULO III.

OBSERVACIÓN DE TRES CUERPOS GEOMÉTRICOS.

Sumario : — 9. Observación del cubo. — 10. Observación de la esfera.
— 11. Observación del cilindro. — 12. Diferencias entre los tres
cuerpos. — 13. Sus semejanzas. — 14. Definiciones. — 15. La
Geometría y su división.

9. El cuerpo que tenemos á la vista es un **cubo** en el cual observamos lo siguiente :
(fig. 5.)

1° Como cuerpo geométrico tiene tres dimensiones iguales, seis superficies planas, doce aristas ó líneas rectas y ocho puntos.

2° En sus superficies : tiene dos dimensiones iguales, ángulos diedros y triedros, superficies paralelas, perpendiculares, verticales y horizontales.

3° En sus líneas : una sola dimensión, ángulos lineales, líneas paralelas, perpendiculares, verticales y horizontales.

10. Este cuerpo es una **esfera** y notamos en ella lo siguiente : (fig. 6).

1° Como cuerpo geométrico : sus tres dimensiones son iguales, tiene una superficie totalmente redonda, ninguna línea, ni punto fijos.

2° En sus superficies : como se considera una sola, no se notan ángulos ni posiciones superficiales de ninguna clase.

3° En sus líneas : sólo puede verse un contorno que es una línea curva cerrada llamada **circunferencia**; pero no se notan ángulos ni posiciones lineales de ninguna clase.

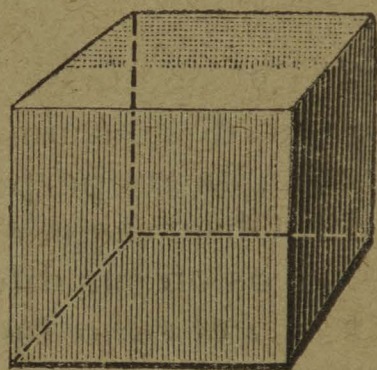


Fig. 5.



Fig. 6.

11. Este cuerpo se llama **cilindro** y las observaciones que podemos hacer son las siguientes (fig. 7).

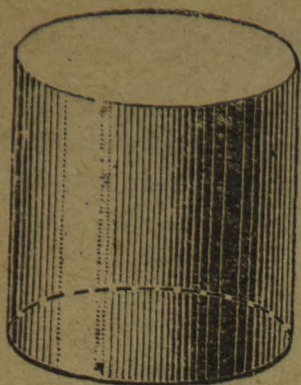


Fig. 7.

1° Como cuerpo geométrico : tiene tres dimensiones, una superficie redonda y dos planas **circulares**, dos líneas curvas cerradas ó circunferencias.

2° En sus superficies : combinaciones de superficies planas y curvas, dos superficies circulares paralelas, una superficie curva perpendicular á las planas, otra vertical y dos horizontales circulares.

3° En sus líneas : combinaciones de líneas rectas y curvas, dos circunferencias paralelas, horizontales, verticales, líneas perpendiculares.

12. Observaciones de los tres anteriores cuerpos geométricos en sus diferencias :

1ª En el cubo todas las seis superficies son planas.

2ª En la esfera sólo hay una superficie totalmente redonda.

3ª En el cilindro hay una superficie redonda y dos superficies planas.

13. Observaciones de los mismos cuerpos por sus semejanzas :

1ª Los tres son cuerpos geométricos.

2ª En los tres hay superficies.

3ª En los tres hay líneas.

14. Definiciones importantes :

1° Se llama **cuerpo geométrico** todo objeto material cuyo volumen al engendrarse obedece á una regla fija bien determinada; puede tener caras planas, redondas ó mixtas. La parte de espacio que ocupa un cuerpo se llama su **volumen**.

2° La **superficie** es el límite que separa á un cuerpo del resto del espacio, en los cuerpos geométricos es la cara exterior que presentan, la cual puede ser plana ó curva.

3° La **línea** en los cuerpos geométricos es el límite

ó fin de una superficie y puede ser recta ó curva.

4° El **punto** en los cuerpos geométricos es el límite ó fin de una línea.

15. La **Geometría** tiene por objeto estudiar las propiedades de los cuerpos de formas regulares, con el fin de medir sus **volúmenes**, sus **superficies** ó sus **líneas**.

La Geometría se divide en tres partes :

1° **Longimetría** que tiene por objeto el estudio de las propiedades y medición de las líneas.

2° **Planimetría** que tiene por objeto el estudio de las propiedades y medición de las **superficies**.

3° **Estereometría** que tiene por objeto el estudio de las propiedades y medición de los **volúmenes**.

Ejercicios y observaciones. — 9. Observación del cubo como cuerpo geométrico en sus superficies, líneas, puntos; objetos cúbicos. — 10. Los mismos ejercicios con la esfera; objetos naturales y artificiales de forma esférica. — 11. Los mismos ejercicios con el cilindro; formas cilíndricas. — 12. Hágase que los alumnos precisen las diferencias de los tres cuerpos citados. — 13. Que descubran por sí mismos sus semejanzas. — 14. Procure el Profesor que como resultado final, los alumnos definan las ideas geométricas : cuerpo, superficie, línea, punto. — 15. Haga el mismo esfuerzo para obtener de ellos la definición de Geometría y su división.

CUESTIONARIO. — ¿Cómo se llama este cuerpo? (mostrando el cubo.) — ¿Señale Vd. sus dimensiones? — ¿Enumere Vd. sus superficies, sus aristas y sus puntos? — ¿Observe Vd. las superficies y señale las dimensiones de una? — ¿Sus ángulos diedros y triedros? — ¿Las superficies paralelas y perpendiculares? — ¿Verticales y horizontales? — ¿Señale Vd. una línea y sus dimensiones? — ¿Sus ángulos lineales? — ¿Sus líneas paralelas y perpendiculares? — ¿Verticales y horizontales? — ¿Cómo se llama este cuerpo? (mostrando una esfera) — ¿Qué observa Vd. en ella como cuerpo geométrico? — ¿Qué nota Vd. en sus superficies? — ¿Qué me dice Vd. de sus líneas? — ¿Cómo se llama este otro cuerpo? (mostrando un cilindro). — ¿Qué observa Vd. en él como cuerpo geométrico? — ¿En sus superficies? — ¿En sus líneas? — ¿Qué diferencias existen entre los tres cuerpos? — ¿Qué semejanzas? — ¿Cite algunos objetos cúbicos, esféricos y cilíndricos? — ¿Qué es un cuerpo geométrico? — ¿Qué es volumen? — ¿Qué es superficie? — ¿Qué es línea? — ¿Qué es punto? — ¿Cuál es el objeto de

la Geometría? — ¿Cómo se divide la Geometría? — ¿Qué es Longimetría? — ¿Qué es Planimetría? — ¿Qué es Estereometría?

CAPÍTULO IV.

NOMENCLATURA DE VOLÚMENES.

Sumario : — 16. Clasificación de los cuerpos geométricos. — 17. Poliedros regulares. — 18. Poliedros irregulares. — 19. Cuerpos redondos. — 20. Cuerpos mixtos.

16. Los cuerpos geométricos se dividen en tres grupos principales :

1º **Poliedros** ó que tienen todas sus superficies planas. Hay dos clases de poliedros: **regulares** ó que tienen sus superficies iguales, é **irregulares** ó que las tienen desiguales.

2º **Cuerpos redondos** ó que tienen todas sus superficies redondas.

3º **Cuerpos mixtos** ó que tienen á la vez superficies planas y redondas.

17. Los **poliedros regulares** que se conocen son los siguientes :

1º El **tetraedro** formado con cuatro superficies triangulares, es decir, cerradas por tres lados iguales cada una (fig. 8).

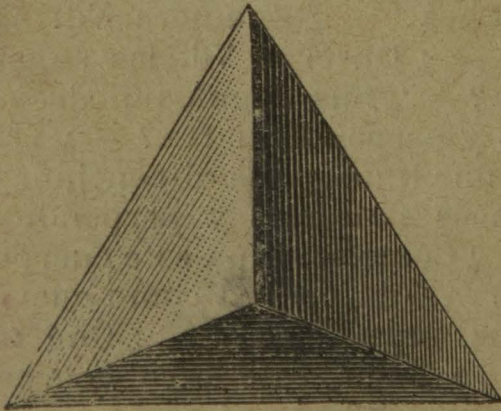


Fig. 8.

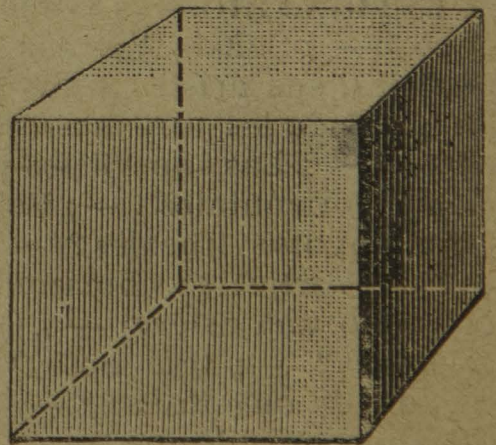


Fig. 9.

2º El **hexaedro** ó **cubo** formado con seis caras cuadradas, es decir cerradas por cuatro lados iguales cada una (fig. 9).

3º El **octaedro** formado por ocho caras triangulares ó de tres lados iguales cada una (fig. 10).

4º El **dodecaedro** formado por doce caras pentagonales ó cerradas por cinco lados iguales cada una (fig. 11).

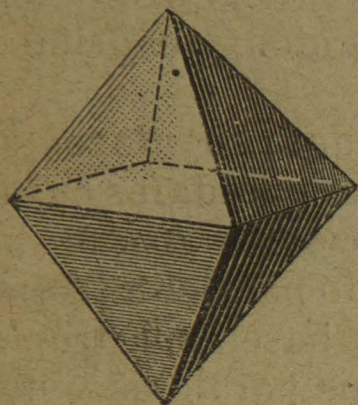


Fig. 10.

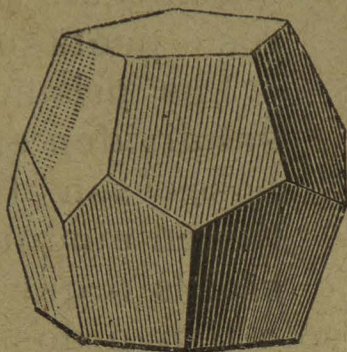


Fig. 11.

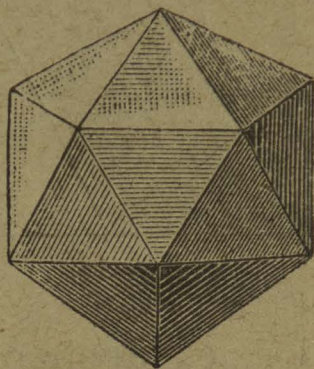


Fig. 12.

5º El **icosaedro** formado por veinte caras triangulares ó de tres lados iguales cada una (fig. 12).

18. Los **poliedros irregulares** que se conocen son los siguientes :

1º Los **prismas** que tienen dos clases de caras diferentes : las **bases**, ó sean la cara superior y la cara inferior, son siempre iguales entre sí y paralelas, pueden estar cerradas por tres, cuatro, cinco ó más lados ; las **caras laterales** tienen siempre cuatro lados de dos en dos

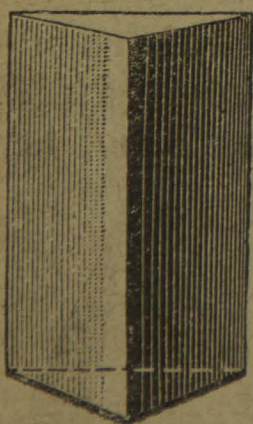


Fig. 13.

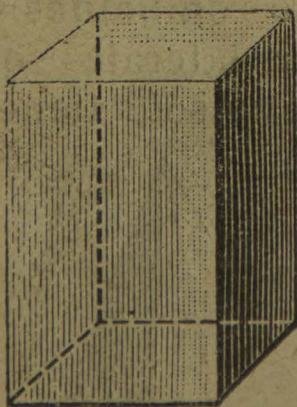


Fig. 14

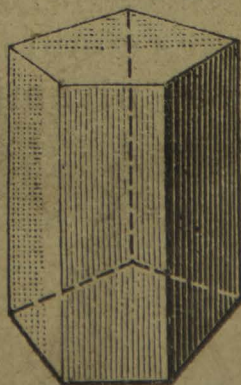


Fig. 15.

paralelos y que reciben el nombre de **paralelógramos** (fig. 13, 14 y 15).

La **altura** en un prisma es la distancia vertical que une las dos bases.

Los prismas pueden ser **rectos** ó **oblicuos**. En el prisma

recto las caras laterales son perpendiculares a las bases. En el prisma oblicuo no lo son (fig. 16).

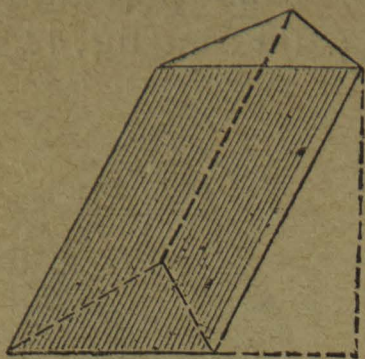


Fig. 16.

Los prismas pueden ser además: **triangulares**, **cuadrangulares**, **pentagonales**, etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros ó pentágonos.

Los prismas **cuadrangulares** se subdividen en **trapezoidales** cuyas bases son trapezoides ó que no tienen ningún lado paralelo; **trapezoidales** ó que sus bases son trapezoides, es decir que sólo tienen dos lados paralelos y dos no; y **paralelepípedos** ó que sus bases son paralelógramos, es decir con cuatro lados paralelos.

Los **paralelepípedos** pueden ser: **rectángulo** si las bases son rectangulares (fig. 17), **rombal** ó **romboidal** si

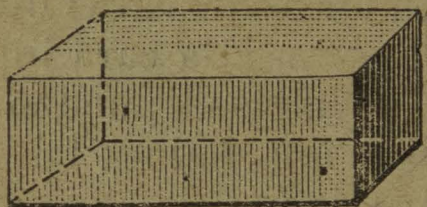


Fig. 17.

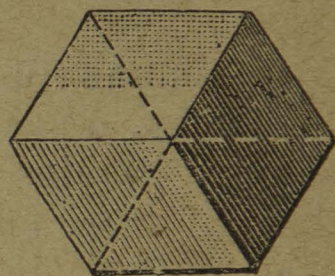


Fig. 18.

sus bases son **rombos** ó **romboides** y **romboedro** si tanto las bases como las caras laterales son rombos (fig. 18).

2º Las **pirámides**, que sólo tienen una base, la cual

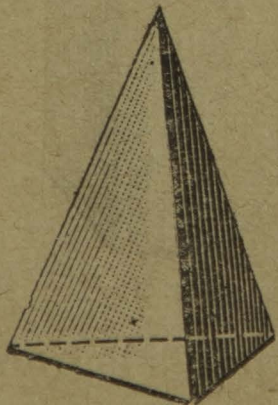


Fig. 19.

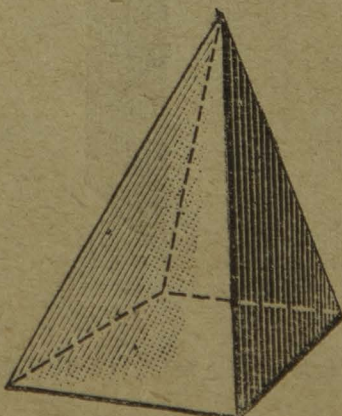


Fig. 20.

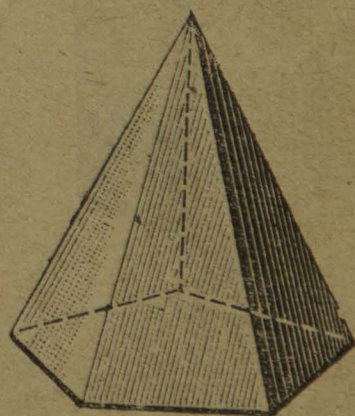


Fig. 21.

puede ser de tres, cuatro, cinco ó más lados; las caras laterales son siempre triangulares ó cerradas por tres

lados y terminan todas juntas en un solo punto llamado **cúspide** (fig. 19, 20, 21).

La **altura** en una pirámide es la distancia vertical de la cúspide á la base.

La pirámide puede ser : **recta** ú **oblicua**. En la pirámide recta la altura es siempre una línea vertical que une la cúspide con el centro de la base; en la oblicua no se efectúa dicha condición (fig. 22).

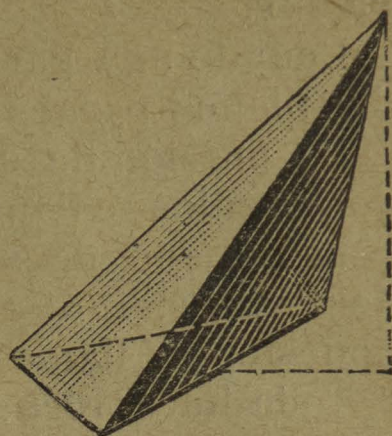


Fig. 22.

Las pirámides pueden ser además : **triangulares**, **cuadrangulares**, **pentagonales**, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero ó un pentágono, etc.

La pirámide **truncada** resulta de cortar por medio de un plano una sección en la parte superior paralela á la base (fig. 23).

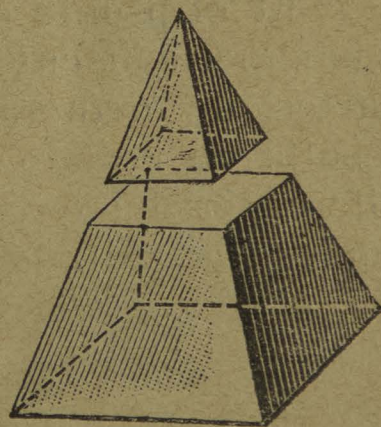


Fig. 23.

19. Los **cuerpos redondos** son los siguientes :

1º La **esfera** que está terminada por una superficie igualmente redonda en todas sus partes, de manera que cada uno de sus puntos se encuentra á igual

distancia de un punto interior llamado **centro** (fig. 24).

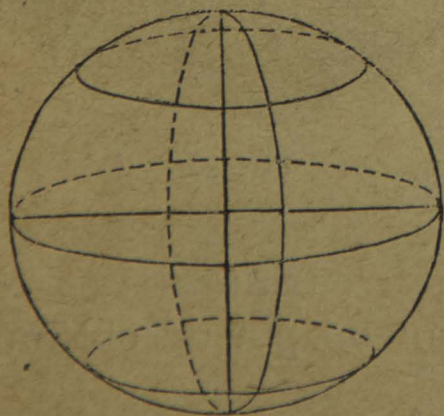


Fig. 24.



Fig. 25.

Si se corta la esfera en dos mitades iguales, se llaman **hemisferios** (fig. 25) y la cara plana se llama **circulo máximo**.

Cuando se corta la esfera en dos partes desiguales, cada una de ellas recibe el nombre de **casquete esférico**, y la parte plana que presentan se llama un **círculo menor**.

Cuando una parte de la esfera está comprendida entre dos planos paralelos se llama **segmento esférico**.

La porción de superficie esférica comprendida entre dos círculos se llama **zona**.

La porción de superficie esférica comprendida entre dos semi-circunferencias que se cortan en dos puntos opuestos se llama **huso esférico**.

Toda línea recta que parte del centro de la esfera y termina en cualquier punto de su superficie se llama **radio**. El doble radio se llama **diámetro ó eje**, y á los extremos de esta línea se les llama **polos**.

2º El **elipsoide** es un cuerpo redondo terminado por una superficie cuya curvatura no es igual en todas sus partes, de manera que cortado en ciertas direcciones resulta un círculo y en otras resulta una elipse, que se diferencia del círculo en que sus diámetros son desiguales (fig. 26).



Fig. 26.



Fig. 27.

3º El **ovoide** es un cuerpo redondo cuya forma es semejante á la de un huevo de ave, ancho por un extremo y angosto por otro (fig. 27).

20. Los cuerpos mixtos son los siguientes :

1º El **cilindro** que tiene dos bases planas paralelas y circulares, cuya cara lateral es completamente redonda y abarca todo el contorno de las dos bases (fig. 28).

La **altura** de un cilindro es la distancia vertical de las dos bases.

El cilindro puede ser : **recto** ú **oblicuo**. Es recto cuando

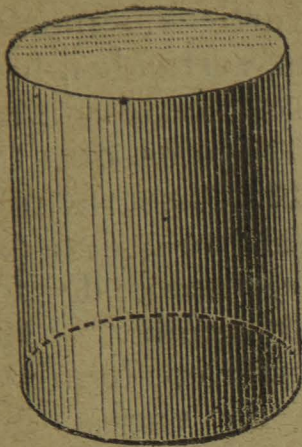


Fig. 28.

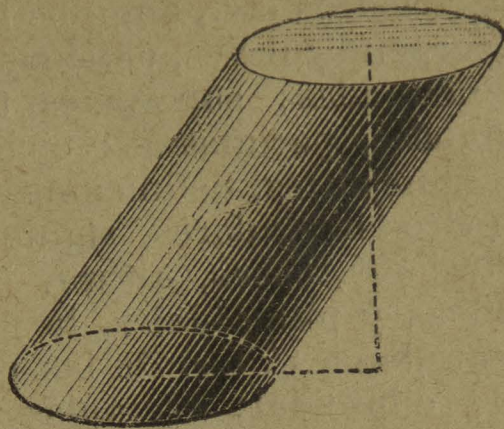


Fig. 29.

su altura une los dos centros de las bases y oblicuo en el caso contrario (fig. 29).

2º El **cono** tiene una sola base plana y circular, la cara lateral sigue el contorno de la base y termina en un punto que se llama **cúspide** (fig. 30).

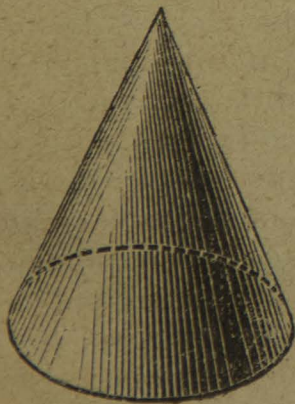


Fig. 30.

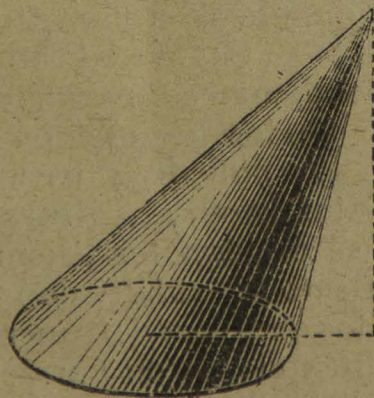


Fig. 31.

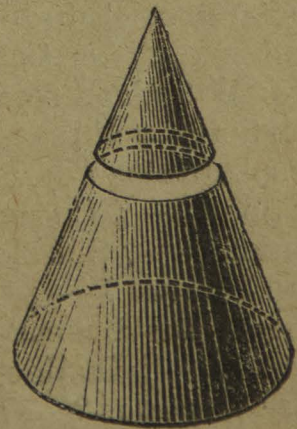


Fig. 32.

La **altura** del cono es la distancia vertical de la cúspide á la base.

El cono puede ser : **recto** ú **oblicuo**. Es recto si la altura une la cúspide con el centro de la base, y oblicuo en el caso contrario (fig. 31).

Si se corta el cono en su parte superior por medio de un plano paralelo á la base, resulta un cono **truncado** (fig. 32).

Ejercicios y observaciones. — 16. La clasificación de los cuerpos geométricos se hará en la caja de sólidos por observación. — 17. Examínense cada uno de los poliedros regulares en cuanto á sus superficies y sus aristas ó líneas, ángulos diedros, triedros etc., ángulos lineales, vértices, superficies y líneas perpendiculares, oblicuas, paralelas, verticales, horizontales, inclinadas; superficies triangulares, cuadrangulares, pentagonales, perímetros; ejemplos de objetos que tengan formas semejantes, definiciones, etc. — 18. Observaciones en los poliedros irregulares, siguiendo el mismo orden que en los anteriores, bases, altura, cúspide; ejemplos de formas prismáticas y piramidales, la pirámide truncada. — 19. Los cuerpos redondos: uso de las palabras esférico, hemisférico, ovoidal, elipsoidal; ejemplos diversos de varios objetos. — 20. Observación de los cuerpos mixtos en el mismo orden que los anteriores ejemplos de formas cilíndricas y cónicas, el cono truncado. Dibujo de todos los cuerpos geométricos.

CUESTIONARIO. — ¿Cómo se dividen los cuerpos geométricos? — ¿Qué son poliedros? — ¿En qué se distinguen los poliedros regulares de los irregulares? — ¿Qué son cuerpos redondos? — ¿Qué son cuerpos mixtos? — ¿Cuántos y cuáles son los poliedros regulares que se conocen? — ¿Qué es el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro, el icosaedro? — Cuántas caras, aristas, ángulos diedros, triedros ó poliedros y vértices hay en cada uno de los poliedros regulares? — ¿Señale Vd. en los mismos cuerpos: superficies y líneas, perpendiculares, paralelas, oblicuas, verticales y horizontales? — ¿Cómo son los perímetros en cada cara de estos cuerpos? — ¿Cuáles son los poliedros irregulares? — ¿Qué son prismas? — ¿Señale Vd. las bases, la altura y las caras laterales de un prisma? — ¿Cómo se dividen los prismas según su posición y según sus bases? — ¿Cómo se subdividen los prismas cuadrangulares? — ¿Cuáles son los prismas: trapezoidales, trapeciales y paralelepípedos? — ¿Cuántas clases de paralelepípedos se conocen? — ¿Qué son paralelepípedos, rombales, rectangulares, romboidales? — ¿Qué es un romboedro? — ¿Qué son las pirámides? — ¿Señale Vd. las caras laterales, la base, la altura y la cúspide de una pirámide? — ¿Cómo se dividen las pirámides según su posición y la forma de sus bases? — ¿Cuáles son los cuerpos redondos que se conocen? — ¿Qué es la esfera? — ¿Á qué se llama: hemisferio, casquete esférico, segmento esférico? — ¿Á qué se llama: círculo máximo, círculo menor, zona, huso esférico? — ¿Qué es radio, diámetro, eje y polos en la esfera? — ¿Qué es elipsoide? — ¿Qué es ovoide? — ¿Cuáles son los cuerpos mixtos? — ¿Qué es un cilindro? — ¿Qué es un cono? — ¿Explique Vd. lo que sepa de las bases, altura, caras laterales etc., del cilindro y del cono?

CAPÍTULO V.

NOMENCLATURA DE SUPERFICIES.

Sumario. — 21. Clasificación de superficies. — 22. Superficies planas rectilíneas de perímetro regular. — 23. Superficies planas rectilíneas de perímetro irregular. — 24. Superficies planas curvilíneas. — 25. Superficies planas mixtilíneas. — 26. Superficies curvas. — 27. Superficies mixtas.

21. Las superficies en los cuerpos geométricos son de tres clases :

1ª Superficies planas ó que puede hacerse coincidir en toda su extensión el borde de una regla en todas direcciones.

Las superficies planas pueden ser de tres clases : **rectilíneas**, ó limitadas por líneas rectas, **curvilíneas** ó limitadas por líneas curvas y **mixtilíneas** ó limitadas por rectas y curvas.

Las **superficies planas rectilíneas** son de dos clases : de **perímetro regular** ó que su contorno está formado de lados iguales y todos á igual distancia del centro ; de **perímetro irregular**, cuyo contorno está formado de lados desiguales y por consiguiente también á desigual distancia del centro.

2ª Superficies curvas ó que únicamente puede hacerse coincidir en ellas el borde de una regla más que en un solo punto.

3ª Superficies mixtas ó que están formadas de partes planas y curvas á la vez.

22. Las superficies planas rectilíneas de perímetro regular son las siguientes :

1ª Superficie triangular ó de tres lados iguales se encuentra en el tetraedro, el octaedro y el icosaedro, también en las bases de los prismas y pirámides triangulares (fig. 33).

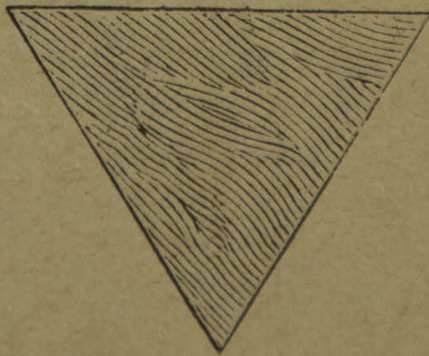


Fig. 33.

2ª Superficie **cuadrangular** ó de cuatro lados iguales, se encuentra en el hexaedro ó cubo y también en las bases de los prismas y pirámides cuadrangulares (fig. 34).

3ª Superficie **pentagonal** ó de cinco lados iguales, se encuentra en el dodecaedro y también en las bases de los prismas y pirámides pentagonales (fig. 35).



Fig. 34.

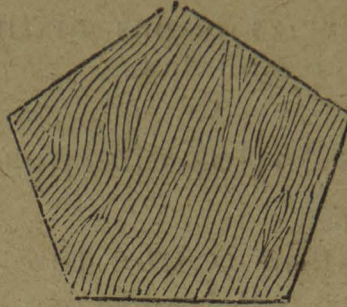


Fig. 35.

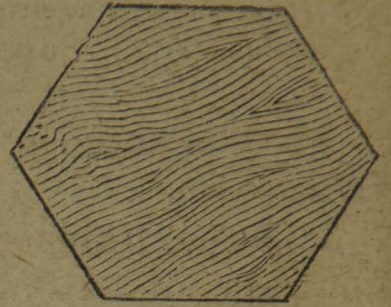


Fig. 36.

4ª Superficies : **hexagonal, heptagonal, octagonal, eneagonal, etc.**, ó de seis, siete, ocho, nueve, etc., lados iguales, se encuentran en las bases de los prismas y de las pirámides (fig. 36).

23. Las superficies planas rectilíneas de perímetro irregular son las siguientes :

1ª Triángulos : el **isósceles** formado por dos lados iguales y uno desigual, se encuentra en las caras laterales de las pirámides (fig. 37); el **escaleno** formado por tres

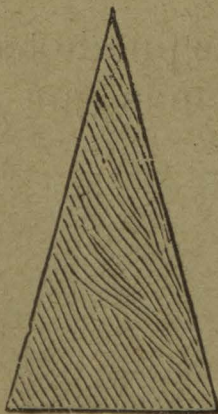


Fig. 37.



Fig. 38.



Fig. 39.

lados desiguales, se encuentra en las pirámides oblicuas (fig. 38).

2ª Cuadriláteros : el **paralelógramo rectángulo** formado de cuatro lados paralelos y perpendiculares, dos

mayores y dos menores; se encuentra en las caras laterales de los prismas (fig. 39); el **rombo**, de cuatro lados iguales paralelos y oblicuos, de ángulos desiguales, se encuentra en los paralelepípedos rombales y romboidales y también en el romboedro (fig. 40); el **romboide**



Fig. 40.



Fig. 41.

semejante al rombo con dos lados mayores y dos menores (fig. 41); el **trapezio** que sólo tiene dos lados opuestos paralelos y dos no, se encuentra en las caras laterales en las pirámides truncadas y en las bases de los prismas trapeziales (fig. 42); el **trapezoide** de cuatro



Fig. 42.



Fig. 43.

lados, pero que ninguno es paralelo, se encuentra en las bases de los prismas trapezoidales (fig. 43).

3ª Polígonos: todas las superficies cerradas por cinco ó más lados desiguales, se encuentran en los poliedros de caras irregulares (fig. 44).

24. Las superficies planas curvilíneas son las siguientes:

1ª El **círculo** que es una superficie plana limitada por una línea curva cerrada, que recibe el nombre de **circunferencia**, cuyos puntos están todos á igual distancia de otro interior llamado centro (fig. 45).



Fig. 44.

El círculo se encuentra en la mayor parte de las secciones esféricas, en las bases del cilindro y del cono y en algunas secciones del elipsoide.



Fig. 45.



Fig. 46.

2ª La **elipse** es una superficie plana alargada y simétrica, limitada por una línea curva cuyos puntos están á desigual distancia del centro.

La elipse resulta de una sección del elipsoide tomada en su parte más larga ó bien de secciones oblicuas del cilindro ó del cono (fig. 46).

3ª El **óvalo** que es una superficie plana alargada y limitada por una línea curva cerrada, ancha por un extremo y angosta por otro.

El óvalo resulta de una sección longitudinal del ovoide (fig. 47).

25. Las **superficies planas mixtilíneas** son las siguientes :



Fig. 47.

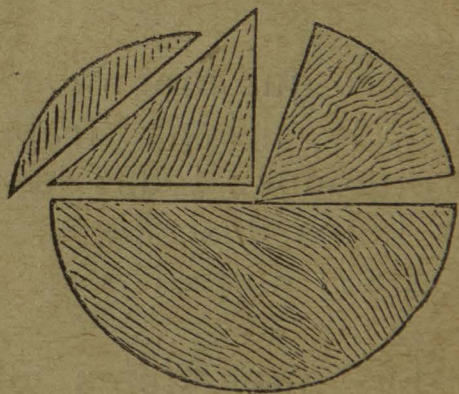


Fig. 48.

1ª El **cuadrante de círculo**, el **semi-círculo**, el **sector** formado por dos radios y un arco, el **segmento** formado por una cuerda y un arco, la **semi-elipse** ó cualquiera fracción de las superficies planas curvilíneas cerrada por una ó más líneas rectas (fig. 48).

2ª La parte plana de las siguientes secciones conicas : la **parábola** que resulta de un corte paralelo á la generatriz del cono (fig. 49); la **hipérbola** que consiste en un corte paralelo al eje ó sea á la línea perpendicular que cae de la cúspide al centro de la base del cono (fig. 50).



F.g. 49.

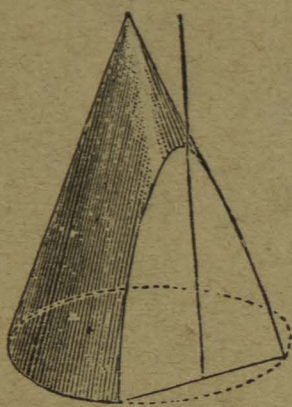


Fig. 50.



Fig. 51.

3ª Hay otra multitud de superficies planas mixtilíneas, regulares ó irregulares cerradas por tres ó más líneas rectas y curvas combinadas (fig. 51).

26. Las **superficies curvas** son de dos clases :

1ª Superficies curvas **cóncavas** ó sea la pared interior de todos los cuerpos redondos (fig. 52).

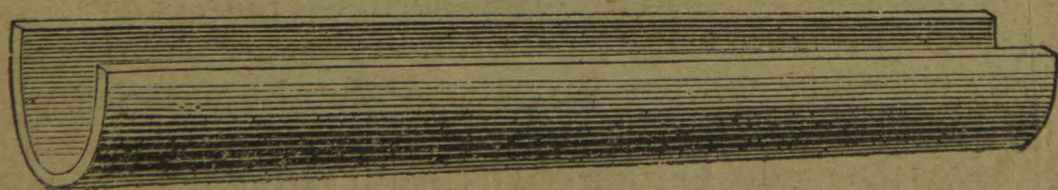


Fig. 52.

2ª Superficies curvas **convexas** ó sea la pared exterior de los mismos.

27. Las **superficies mixtas** son combinaciones de superficies planas y curvas; se encuentran en el cilindro, en el cono y en la mayor parte de las secciones de los cuerpos redondos.

Como aplicación de las superficies mixtas se observan las siguientes combinaciones en los lentes

(fig. 53) : 1. Bicóncavo. — 2. Biconvexo. — 3. Cóncavo-convexo (menisco convergente). — 4. Cóncavo-convexo

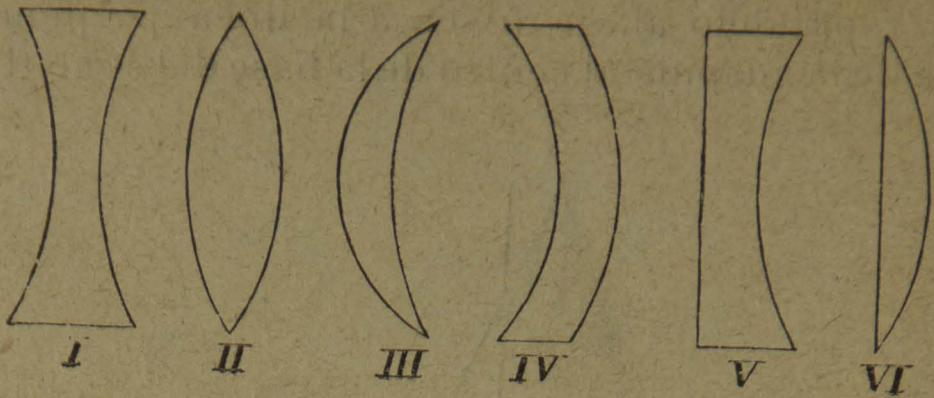


Fig. 53.

(menisco divergente). — 5. Plano-cóncavo. — 6. Plano-convexo.

Ejercicios y observaciones. — 21. Hágase la clasificación de superficies en planas, curvas y mixtas en la caja de sólidos y además en la caja especial de superficies. — 22. Clasificación de las superficies planas según su perímetro en rectilíneas, curvilíneas y mixtilíneas. Superficies planas de perímetro regular : triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etc., ángulos, líneas, etc. — 23. Examen de las superficies planas de perímetro irregular : triángulos, cuadriláteros, polígonos. — 24. Observación de las superficies planas curvilíneas en las secciones de los cuerpos redondos y mixtos; uso de los adjetivos circular, elíptico y oval. — 25. Superficies planas mixtilíneas observadas en las secciones de los mismos cuerpos geométricos; uso de los adjetivos semi-circular, parabólico, hiperbólico. — 26. Ejemplos de superficies cóncavas y convexas. — 27. Observaciones de superficies mixtas en las secciones de los cuerpos redondos y mixtos, combinaciones de las superficies en los lentes.

CUESTIONARIO. — ¿De cuántas clases pueden ser las superficies en los cuerpos geométricos? — ¿En qué se conocen las superficies planas, las curvas y las mixtas? — ¿Cómo se clasifican las superficies planas según su perímetro? — ¿Cómo se subdividen las superficies planas rectilíneas? — ¿Cuáles son las superficies planas rectilíneas de perímetro regular? — ¿La superficie triangular de perímetro regular en qué cuerpos geométricos se encuentra? — ¿La cuadrangular en cuáles otros? — ¿La pentagonal? — ¿La hexa-

gonal, heptagonal, etc.? — ¿ Cuáles son las superficies planas rectilíneas de perímetro irregular? — ¿ Á qué se llaman triángulos isósceles y escalenos y en qué cuerpos se encuentran? — ¿ Respecto de los cuadriláteros á qué se llama paralelógramos : rectángulo, rombo y romboide y en qué cuerpos geométricos se encuentran? — ¿ Qué es un trapecio y un trapezoide y en qué cuerpos se encuentran? — ¿ Entre las superficies de perímetro irregular á cuáles se llama polígonos? — ¿ Cuáles son las superficies planas curvilíneas? — ¿ Qué es círculo y en qué cuerpos geométricos se encuentra? — ¿ Cómo se llama el perímetro del círculo? — ¿ Qué es elipse y en qué cuerpos se encuentra? — ¿ Que es el óvalo y en que cuerpo se encuentra? — ¿ Cuáles son las superficies planas mixtilíneas? — ¿ Ponga Vd. ejemplos de superficies planas mixtilíneas en secciones circulares y elípticas? — ¿ Á qué se llama parábola é hipérbola? — ¿ Qué otra clase de superficies mixtilíneas se conocen? — ¿ Cuáles son las superficies curvas? — ¿ En qué se distingue una superficie curva cóncava de otra convexa? — ¿ En qué consisten las superficies mixtas y en qué cuerpos geométricos se encuentran? — ¿ Qué combinaciones se conocen en los lentes de superficies planas y curvas?

CAPÍTULO VI.

NOMENCLATURA DE LÍNEAS.

Sumario. — 28. Clasificación de líneas. — 29. Líneas rectas aisladas. — 30. Líneas rectas combinadas. — 31. Ángulos. — 32. Triángulos. — 33. Cuadriláteros. — 34. Polígonos. — 35. Líneas curvas abiertas. — 36. Líneas curvas cerradas. — 37. Líneas mixtas.

28. Las líneas en los cuerpos geométricos son de tres clases.

1^a Líneas rectas ó que tienen todos sus puntos en una misma dirección. Las líneas rectas pueden ser : **aisladas ó combinadas.**

2^a Líneas **curvas** ó que todos sus puntos cambian constantemente de dirección. Las líneas curvas pueden ser ; **abiertas ó cerradas.**

3^a Líneas **mixtas** ó que están formadas de rectas y curvas.

29. Las líneas rectas aisladas tienen tres posiciones diferentes :

1ª Línea recta **vertical** cuya posición es semejante á la de un hilo á plomo (fig. 54).

2ª Línea recta **horizontal** cuya posición es semejante á la de una perpendicular á la vertical (fig. 55).



Fig. 54.



Fig. 55.

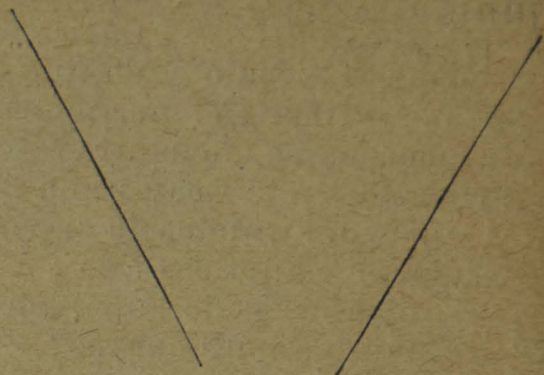


Fig. 56.

3ª Línea recta **inclinada** cuya posición es distinta de la de la vertical y horizontal (fig. 56).

30. Las líneas rectas combinadas pueden ser **perpendiculares, oblicuas, paralelas, convergentes, divergentes y quebradas.**

1ª Líneas rectas **perpendiculares** son dos rectas de las cuales una cae sobre la otra sin inclinarse á ningún lado (fig. 57).

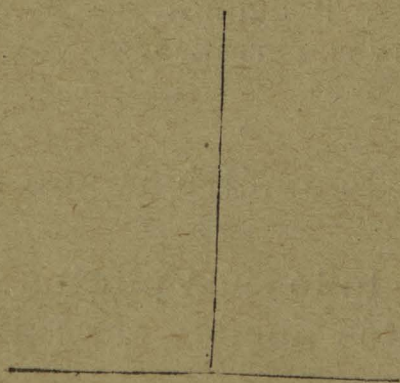


Fig. 57.



Fig. 58.

Hay perpendiculares á la horizontal, á la vertical y á la inclinada.

2ª Líneas rectas **oblicuas** son dos rectas de las cuales una cae sobre la otra inclinándose más á un lado que á otro (fig. 58).

Hay oblicuas á la horizontal, á la vertical y á la inclinada.

3ª Líneas rectas **paralelas** son dos ó más rectas que guardan entre sí y en todos sus puntos una misma distancia, y por más que se prolonguen nunca llegan á juntarse (fig. 59).

Hay paralelas verticales, horizontales é inclinadas.

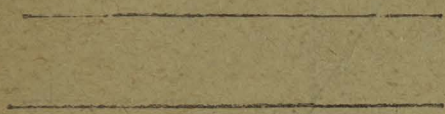


Fig. 59.

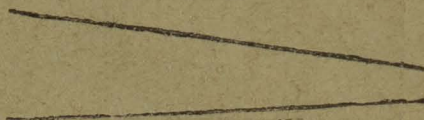


Fig. 60.

4ª Líneas rectas **convergentes** y **divergentes** son dos rectas que no guardan entre sí una misma distancia; son **convergentes** por la parte que se unirían y **divergentes** por la parte que se separan (fig. 60).

5ª La línea **quebrada** está formada de varias rectas consecutivas unidas por sus extremos, pero que siguen todas distintas direcciones (fig. 61).

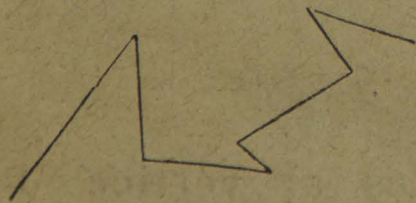


Fig. 61.



Fig. 62.

31. Se llama **ángulo** la abertura que resulta de dos líneas rectas que concurren en un punto llamado **vértice**.

Hay tres clases de ángulos : **ángulo recto** cuya abertura está formada por dos líneas rectas perpendiculares entre sí (fig. 62); **ángulo agudo** cuya abertura es menos

que la del recto (fig. 63); ángulo **obtuso** cuya abertura es mayor que la del recto (fig. 64).

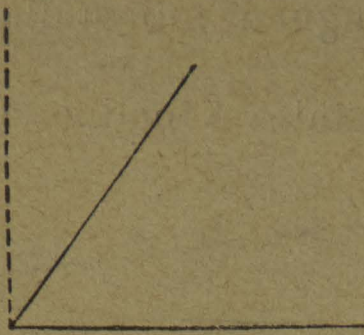


Fig. 63.

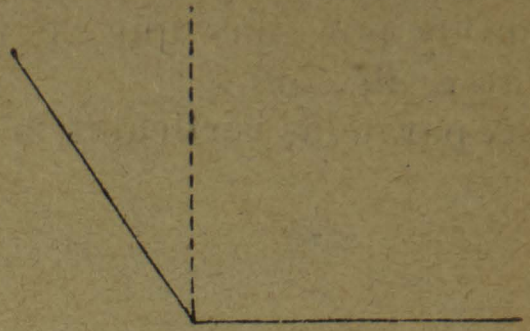


Fig. 64.

Se llama **bisectriz** en un ángulo la recta que partiendo del vértice lo divide en dos partes iguales.

Se llaman **ángulos adyacentes** los ángulos trazados sobre una línea recta con la condición de que todos partan de un vértice común (fig. 65).

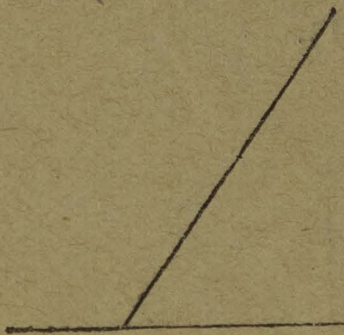


Fig. 65.



Fig. 66.

Se llaman **ángulos opuestos al vértice** dos ángulos que tienen un vértice común, y los lados de un ángulo son la prolongación de los lados del otro (fig. 66).

32. Se llama **triángulo** una figura cerrada por tres líneas rectas. Cualquiera de sus líneas se llama **base**, y **altura** es la línea recta perpendicular trazada á una base y bajada del vértice opuesto (fig. 67).

Los triángulos se dividen de dos maneras :

1^a Con relación á sus lados son : **equiláteros** si tienen

sus tres lados iguales (fig 67); **isósceles** si tienen dos lados iguales y uno desigual (fig. 68), y **escalenos** si tienen sus tres lados desiguales (fig. 69).

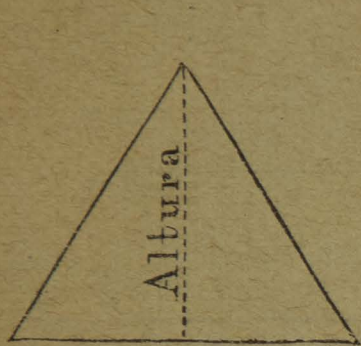


Fig. 67.



Fig. 68.



Fig. 69.

2ª Con relación á sus ángulos se divide en: **rectángulo** que está formado por un ángulo recto y dos agudos; los dos lados del ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** (fig. 70); **triángulo acutángulo** formado por tres ángulos

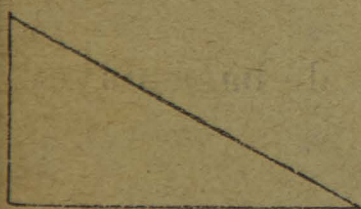


Fig. 70.



Fig. 71.

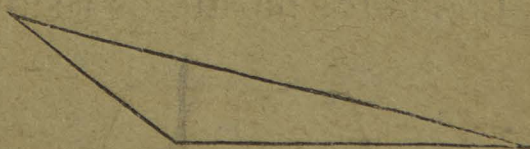


Fig. 72.

agudos (fig 71), y **triángulo obtusángulo** formado por un ángulo obtuso y dos agudos (fig. 72).

33. El **cuadrilátero** es una figura cerrada por cuatro líneas rectas. Hay tres clases de cuadriláteros: **paralelógramos**, **trapezios** y **trapezoides**.

1ª El **paralelógramo** es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son siempre de dos en dos paralelos.

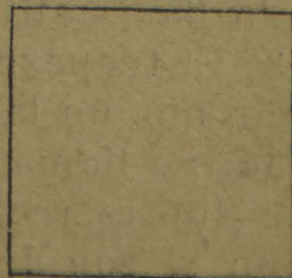


Fig. 73.

Los **paralelógramos** que se conocen son: el **cuadrado** que está formado por cuatro líneas rectas iguales y cuatro ángulos rectos (fig. 73); el **rectángulo** por dos líneas rectas mayores,

dos menores y cuatro ángulos rectos (fig. 74); el rombo por cuatro líneas rectas iguales, dos ángulos agudos y dos obtusos (fig. 75); el romboide por dos líneas mayo-

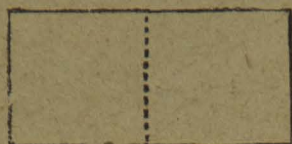


Fig. 74.

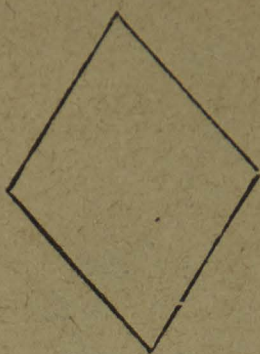


Fig. 75.

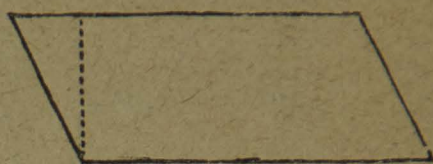


Fig. 76.

res, dos menores, dos ángulos agudos y dos ángulos obtusos (fig. 76).

Cualquiera de los lados de un paralelógramo puede servirle de **base**; pero la **altura** es la perpendicular que une las dos bases paralelas.

2ª El **trapezio** es un cuadrilátero que sólo tiene dos lados paralelos opuestos (fig. 77).

Los lados paralelos reciben los nombres de **base mayor**

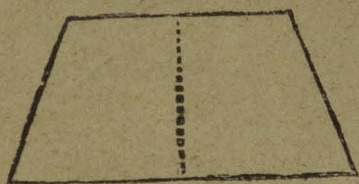


Fig. 77.

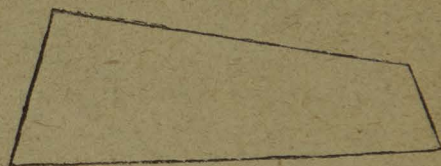


Fig. 78.

y **base menor**, y la perpendicular que une esas dos bases se le llama **altura**.

3ª El **trapezoide** es un cuadrilátero irregular que no tiene ningún lado paralelo (fig. 78).

34. Se llama **polígono** una figura cerrada por cinco ó más líneas rectas. Estos polígonos se llaman: **pentágono** si son de cinco, **hexágono** de seis, **heptágono** de siete, **octágono** de ocho, **eneágono** de nueve, **decágono** de diez, y de once en adelante se designan por el número de sus lados.

Los polígonos se dividen en regulares é irregulares,

según que sus lados y ángulos sean iguales ó desiguales (figs. 79 y 80).

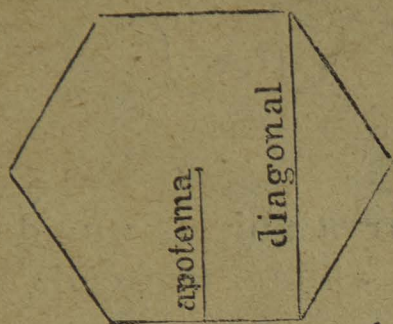


Fig. 79.

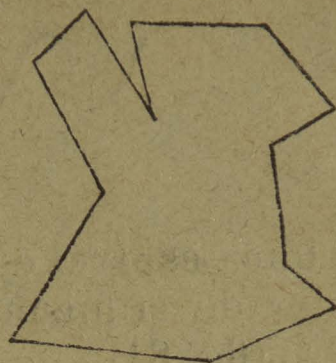


Fig. 80.

Se llama **perímetro** el contorno de un polígono ó sea la suma total de todos sus lados.

Se llama **apotema** en un polígono regular, la perpendicular trazada del centro á la mitad de uno de sus lados.

Se llama **diagonal** en un polígono, una línea recta que une dos de sus vértices no contiguos.

Los polígonos pueden ser además **inscritos** y **circunscritos**. Un polígono es **inscrito** cuando está trazado en el interior de una circunferencia y la toca con todos sus vértices; (fig. 81) es **circunscrito** cuando está trazado

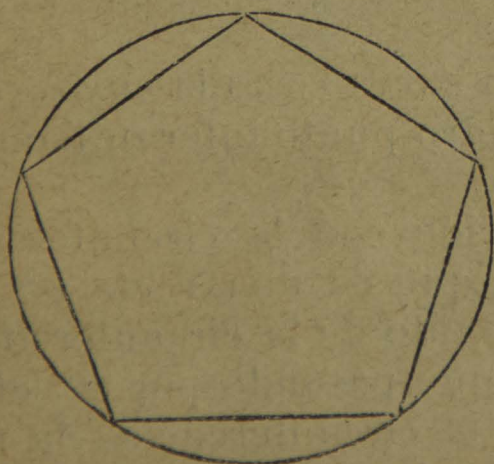


Fig. 81.

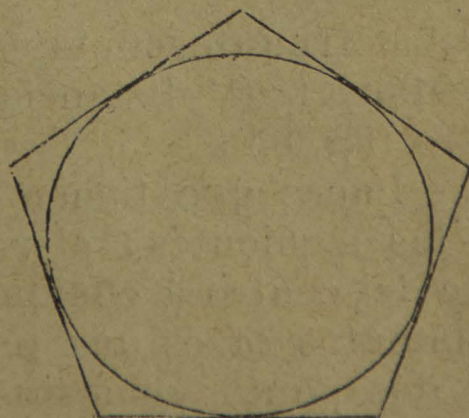


Fig. 82.

al exterior de ella y todos y cada uno de sus lados le son tangentes ó la tocan en un solo punto (fig. 82).

35. Las líneas curvas **abiertas** son las siguientes :

1ª La línea **ondulada**, es una curva que imita la forma de un hilo en movimiento (fig. 83).



Fig. 83.

2ª La línea **espiral** es una curva abierta que da vueltas al rededor de sí misma, pero alejándose cada vez más del centro (fig. 84).

36. Las líneas **curvas cerradas** son las siguientes :

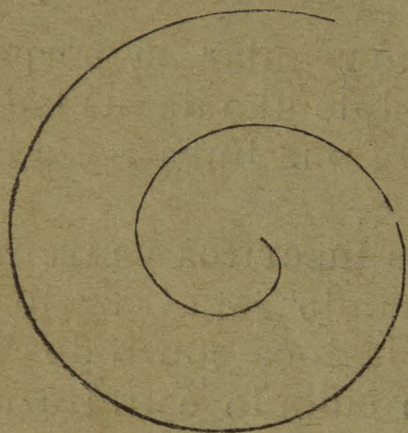


Fig. 84.

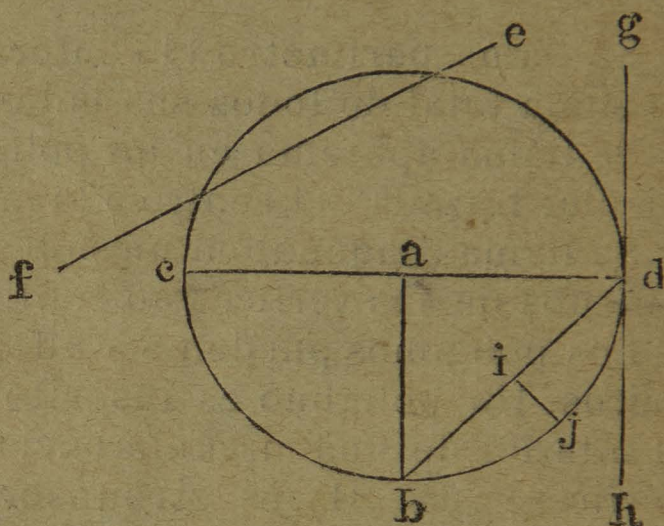


Fig. 85.

1ª La **circunferencia** es una curva cerrada cuyos puntos están á igual distancia de otro punto interior llamado centro (fig. 85).

Las líneas que tienen relación con la circunferencia son las siguientes: el **radio** que es una recta ab que parte del centro á cualquier punto de la circunferencia; el **diámetro** cd es una recta que pasando por el centro toca dos puntos opuestos de la circunferencia; la **tangente** gh ó sea la recta de magnitud indefinida que toca exteriormente un solo punto de la circunferencia y es perpendicular al radio que corresponde á dicho punto; la **secante** ef también de magnitud indefinida, es una recta que corta á la circunferencia en dos puntos; **arco** bjd que es una fracción cualquiera de la circunferencia;

cuerda bd que es la recta que une las extremidades de un arco; **flecha** ó **ságita** ij que es una recta perpendicular á la mitad de una cuerda y comprendida entre ella y su arco.

Se llaman **circunferencias concéntricas** dos ó más circunferencias trazadas desde un mismo centro y con diferentes radios (fig. 86).



Fig. 86.

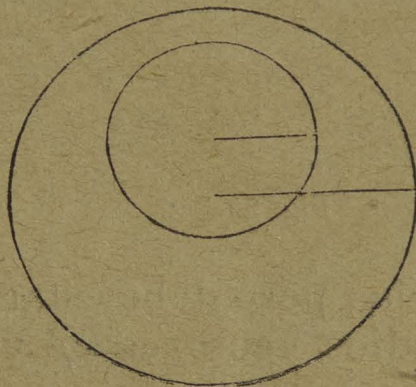


Fig. 87.

Se llaman **circunferencias excéntricas** dos ó más circunferencias trazadas con distintos radios y centros (fig. 87).

Se llaman **circunferencias secantes** dos circunferencias que se cortan en dos puntos (fig. 88).

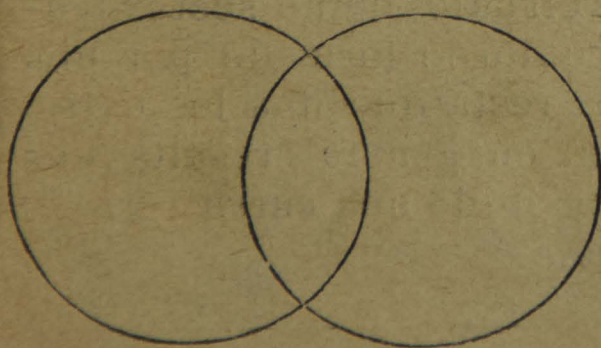


Fig. 88.



Fig. 89.

Se llaman **circunferencias tangentes** dos circunferencias que se tocan en un solo punto (fig. 89).

2ª El **óvalo** que es una curva cerrada por cuatro arcos de circunferencia, dos iguales y dos desiguales y la su-

perficie que encierra es muy parecida á la que presentaría el corte longitudinal de un huevo de ave (fig. 90).

3^a La elipse que es una curva cerrada y más ó menos



Fig. 90.

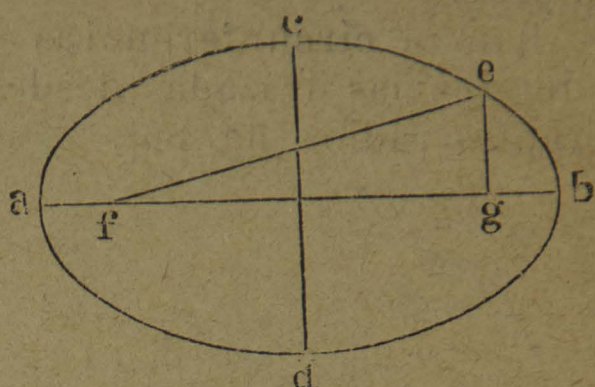


Fig. 91.

alargada ; pero debe estar trazada de manera que dos de sus radios vectores ef y eg sea igual al eje mayor ab (fig. 91).

La línea cd perpendicular á ab y que la divide en dos partes iguales se llama **eje menor**.

Los puntos f y g equidistantes del centro se llaman **focos**.

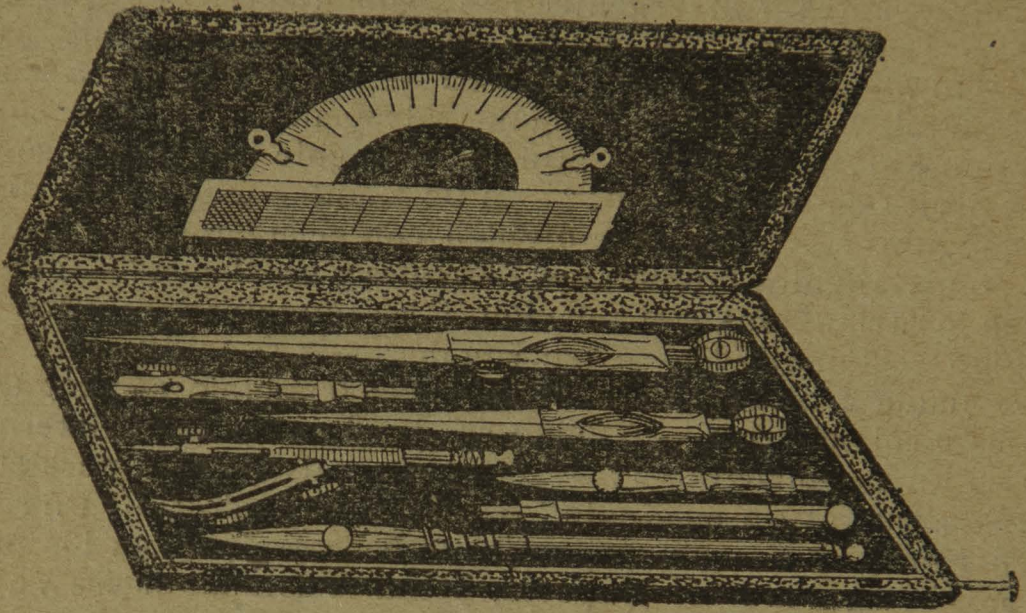
La recta fg comprendida entre los focos se llama **distancia focal**.

37. Las líneas mixtas resultan de la combinación de rectas con curvas como son: el contorno de un **semi-círculo** ó de un **cuadrante de círculo**, de un **sector** ó de un **segmento de círculo**, el contorno formado por una **parábola** ó una **hipérbola** y la recta que una los extremos de dichas curvas, ó bien en general resulta una línea mixta por cualquiera sección de una curva cerrada por medio de una ó más rectas.

Ejercicios y observaciones. — 28. Clasificación de líneas en los cuerpos geométricos y en la caja de líneas. — 29. Distinguir bien las tres posiciones de la línea recta : vertical, horizontal é inclinada. — 30. Trazos de rectas combinadas en todas las posiciones diferentes : perpendiculares, oblicuas, paralelas, etc. — 31. Los ángulos, distinguirlos y trazarlos. — 32. Trazar las tres alturas en todos los triángulos. — 33. Di-

bujar y distinguir todos los cuadriláteros. — 34. Hágase lo mismo con los polígonos. — 35. Ejemplos de líneas curvas abiertas. — 36. Ejercicios con las curvas cerradas y las líneas con las cuales se relacionan. — 37. Ejemplos diversos de líneas mixtas.

CUESTIONARIO. — ¿De cuántas clases son las líneas en los cuerpos geométricos? — ¿Qué son líneas rectas y de cuántos modos pueden ser? — ¿Qué son líneas curvas y cómo se dividen? — ¿Qué son líneas mixtas? — ¿Cuántas posiciones tiene una línea recta aislada? — ¿Qué es línea vertical? — ¿Horizontal? — ¿Inclinada? — ¿De cuántas maneras pueden ser las líneas rectas combinadas? — ¿Qué son líneas perpendiculares? — ¿Oblicuas? — ¿Paralelas? — ¿Convergentes y divergentes? — ¿Quebradas? — ¿Qué es ángulo? — ¿Qué clase de ángulos se conocen? — ¿Qué es ángulo recto? — ¿Agudo? — ¿Obtuso? — ¿A qué se llama bisectriz en un ángulo? — ¿Qué son ángulos adyacentes? — ¿Qué son ángulos opuestos al vértice? — ¿Qué es triángulo? — ¿A qué se llama base y altura en un triángulo? — ¿De cuántas maneras se dividen los triángulos? — ¿Cómo se dividen con relación á sus lados? — ¿Qué son triángulos equiláteros, isósceles y escalenos? — ¿Cómo se dividen los triángulos con relación á sus ángulos? — ¿Qué es un triángulo rectángulo? — ¿Acutángulo? — ¿Obtusángulo? — ¿A qué se llama catetos é hipotenusa en un triángulo rectángulo? — ¿Qué es cuadrilátero? — ¿Cómo se dividen los cuadriláteros? — ¿Qué es un paralelógramo? — ¿Cómo se dividen los paralelógramos? — ¿Qué es un cuadrado? — ¿Un rectángulo? — ¿Un rombo? — ¿Un romboide? — ¿A qué se llama base y altura en los paralelógramos? — ¿Qué es un trapecio, y cuáles son sus bases y altura? — ¿Qué es un trapezoide? — ¿A qué se llama polígono? — ¿Cómo se nombran los polígonos según el número de lados de que se forman? — ¿Cómo se dividen los polígonos? — ¿Qué son polígonos regulares e irregulares? — ¿Qué es apotema? — ¿Qué es diagonal? — ¿Qué son polígonos inscritos y circunscritos? — ¿Cuáles son las líneas curvas abiertas? — ¿Qué es línea ondulada? — ¿Qué es línea espiral? — ¿Cuáles son las líneas curvas cerradas? — ¿Qué es la circunferencia? — ¿Cuáles son las líneas que se relacionan con la circunferencia? — ¿Qué es radio? — ¿Diámetro? — ¿Tangente? — ¿Secante? — ¿Arco? — ¿Cuerda? — ¿Flecha ó ságita? — ¿Qué son circunferencias: concéntricas, excéntricas, secantes, tangentes? — ¿Qué es la elipse? — ¿Qué es el óvalo? — ¿Explique Vd. en una elipse lo que son: radios vectores, eje mayor y menor, focos, distancia focal? — ¿Ponga Vd. algunos ejemplos de líneas mixtas?



SEGUNDA PARTE.

LONGIMETRÍA. — PLANIMETRÍA. ESTEREOMETRÍA.

1.^a DIVISIÓN. LONGIMETRÍA.

CAPÍTULO VII.

CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS.

Sumario. — 38. Trazo de líneas rectas en general. — 39. Líneas verticales y horizontales. — 40. Construcción de perpendiculares. — 41. Líneas paralelas. — 42. Ángulos. — 43. La circunferencia. — 44. La espiral.

38. Para trazar líneas rectas se emplean los siguientes procedimientos :

1.^o Longitudes pequeñas. Para trazar una línea recta en el papel ó en el pizarrón basta colocar dos puntos á cierta distancia y colocar debajo una regla de manera



Fig. 92.

que coincida perfectamente con ellos, en seguida se hace pasar por su borde el lápiz ó el gis y se tendrá la recta que se desea (fig. 92).

2.^o Longitudes medianas. Para trazar una recta en un patio, pavimento, viga, pared, etc., se colocan en los extremos dos clavos de los cuales se ata fuertemente restirada una cuerda frotada con gis ó humedecida con tinta negra, roja ó blanca según fuere necesario, en se-

guida se levanta del centro, y al dejarla caer quedará marcada la huella de la recta que se desea (fig. 93).

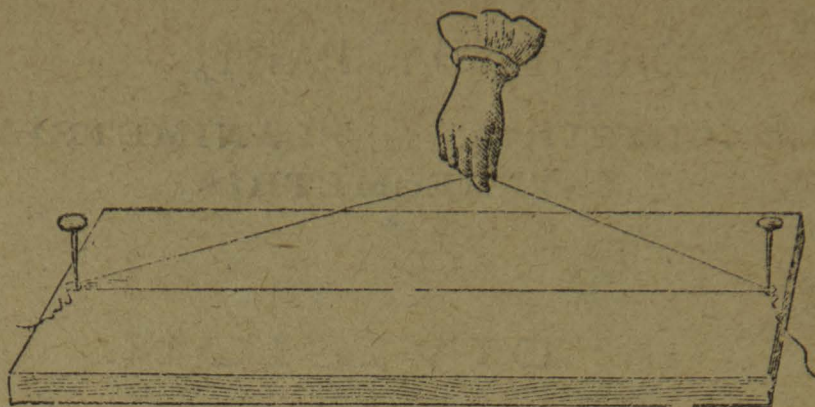


Fig. 93.

3º Grandes longitudes. Para las grandes longitudes en el campo ó en el terreno se colocan á ciertas distancias jalones ó estacas de manera que al dirigir la visual se confundan unos con otros los cuadrillos blancos ó de color que están puestos en el extremo superior de cada

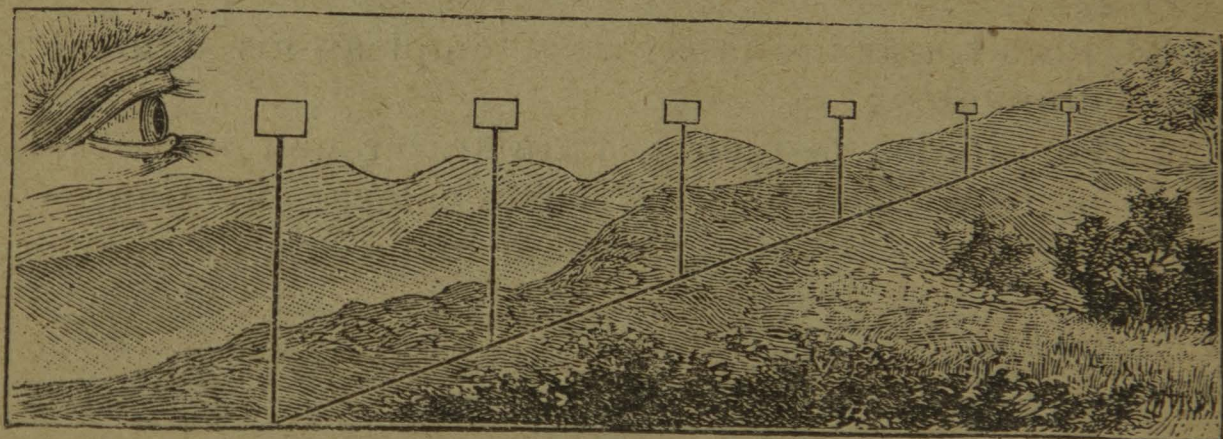


Fig. 94.

jalón. La dirección que marquen las estacas será la línea recta que se desea (fig. 94).

39. Para el trazo de la línea vertical, se usa del hilo á plomo que está formado de un cordón ó hilo en cuya extremidad inferior se suspende una bala ú otro objeto pesado cualquiera; en seguida se aplica á la pared ó muro que se desea reconocer, y si coincide ó se confunde

en toda su extensión con el hilo á plomo, esa pared tendrá exactamente la posición vertical (fig. 95).

Para el trazo de la línea horizontal se usan varios instrumentos, pero los principales son: **el nivel de albañil**, **el nivel de burbuja de aire** y **el nivel de agua**.

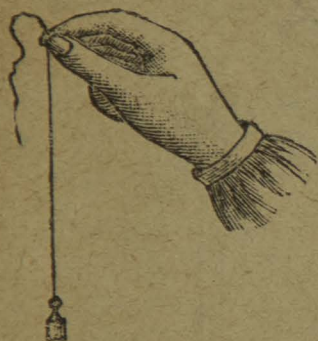


Fig. 95.

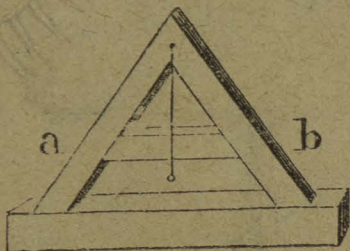


Fig. 96.

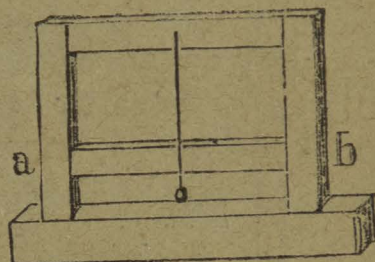


Fig. 97.

El **nivel de albañil** está formado de un hilo á plomo suspendido en un marco de madera, de forma triangular ó cuadrangular. Cuando la plomada pasa por la mitad de la barra *ab*, el lugar sobre que descansa será enteramente horizontal (figs. 96 y 97).

El **nivel de burbuja de aire** es un instrumento compuesto de un tubo de vidrio lleno de agua colocado dentro de otro de metal, pero abierto en el centro de tal modo que pueda verse el primero y distinguirse en él

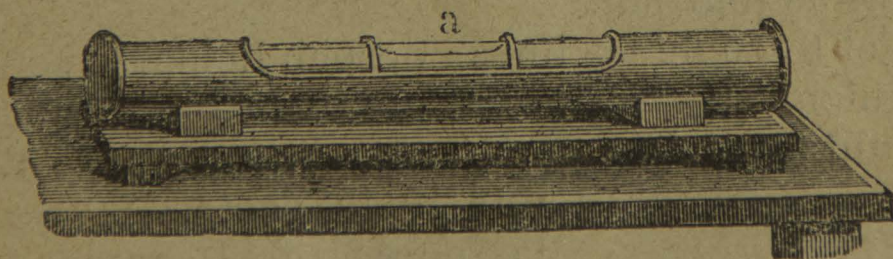


Fig. 98.

una burbuja de aire *a*. Para reconocer si una superficie es horizontal, se coloca este nivel sobre ella y se notará en caso de serlo, que la burbuja se coloca precisamente en el centro del tubo (fig. 98).

El **nivel de agua**, que consiste en un tubo metálico *cd* de un metro de longitud y cuyas dos extremidades forman dos ángulos rectos sobre los cuales descansan dos

tubos de vidrio A y B. Para servirse de este instrumento se coloca sobre un **tripie**, se llena de agua de color de manera que llegue hasta los tubos, y al quedar inmóvil señalará su nivel la línea horizontal. Si se quiere prolongar esta línea á mayor distancia, se colocarán **miras** ó

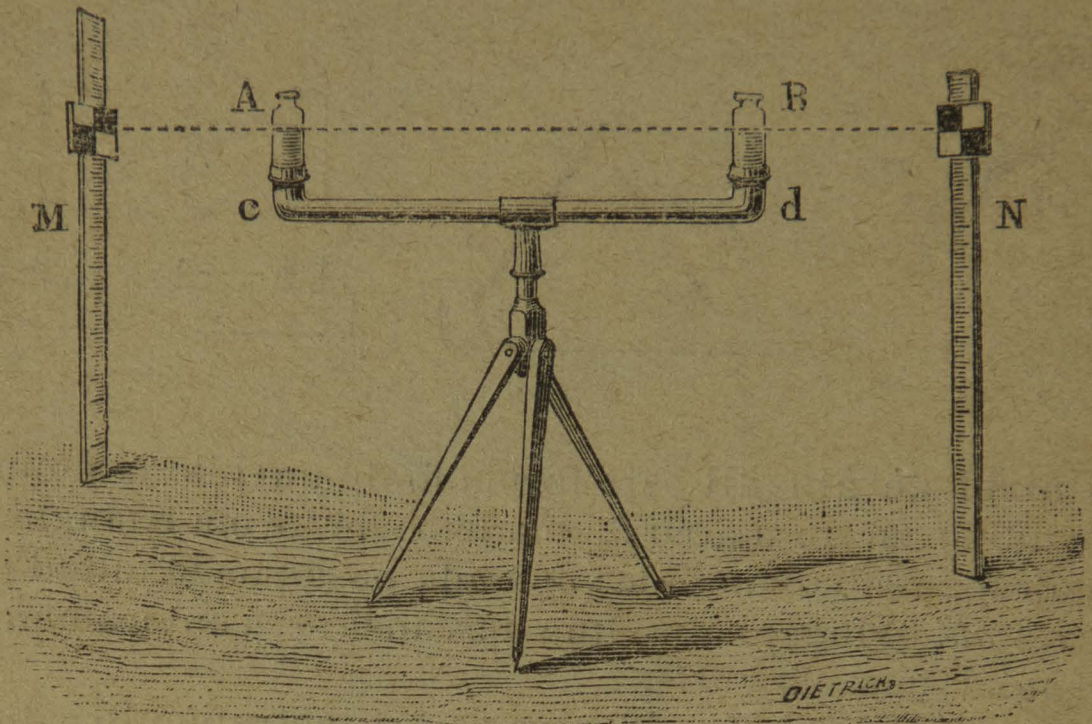


Fig. 99.

reglas con divisiones M y N y aún se podrán buscar diferencias de nivel y de altura, restando las longitudes de las dos miras (fig. 99).

40. En el trazo de las líneas perpendiculares se dan los casos siguientes :

1º Levantar una perpendicular en un punto E sobre

una línea recta AB. Se coloca la punta del compás en el punto E y con una abertura arbitraria, se toman dos distancias iguales en los puntos *m* y *n*, en seguida se hace centro en dichos puntos y con otra abertura mayor que la mitad de la línea *mn* se trazan los dos arcos que se cortan en el punto C, cuyo punto indica la

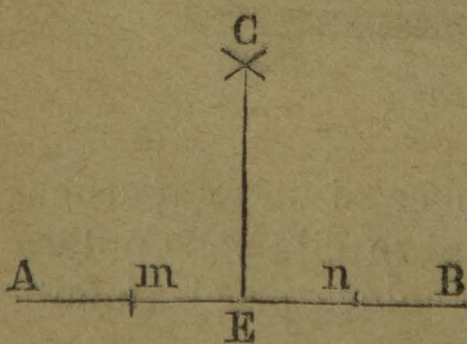


Fig. 100.

dirección de la perpendicular pedida (fig. 100).

2° Bajar una perpendicular desde un punto B fuera de la recta CD. Desde el punto B se traza un arco que corta á la recta en los puntos a y m, después se hace centro en dichos puntos y se trazan los arcos que se cortan en el punto H, el cual sirve de apoyo para bajar la perpendicular que se pide (fig. 101).

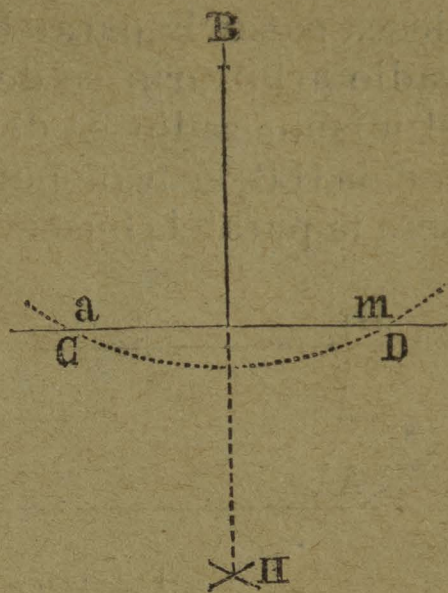


Fig. 101.

3° Levantar una perpendicular en el extremo A de una recta. Desde un punto cualquiera C arriba de la recta y con un radio AC se traza una circunferencia que corta á la recta en el punto D desde el cual se traza una nueva recta que pasa por el centro y corta á la circunferencia en el punto E que nos indicará la dirección de la línea AE, que es la perpendicular pedida (fig. 102).

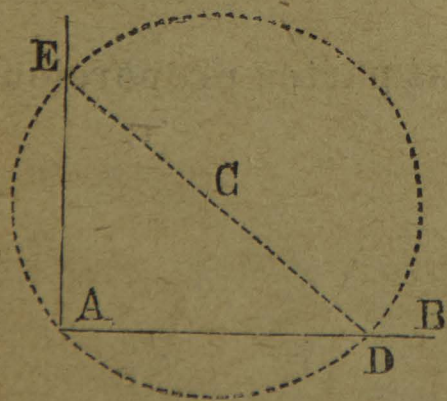


Fig. 102.

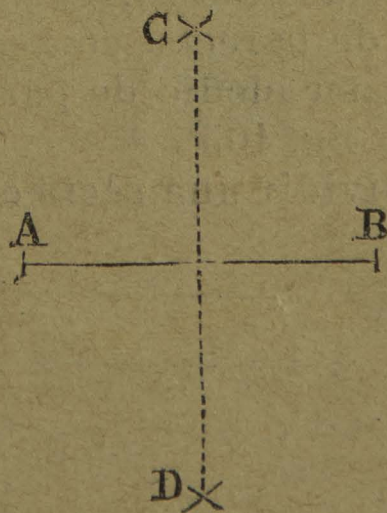


Fig. 103.

4° Dividir una recta en dos partes iguales. Para dividir una recta en dos partes iguales se consideran respectivamente como centros los extremos A y B desde los cuales se trazan los arcos que se cortan en los puntos C y D, y unidos estos por una línea dividirá la recta en dos mitades exactas (fig. 103).

41. Trazo de líneas paralelas y sus aplicaciones :

1° **Trazar una recta paralela á otra desde un punto dado.** Sea $A B$ la recta dada y O el punto por el cual se desea pasar la paralela. Del punto O como centro con un radio arbitrario se describe un arco $C D$; del punto C con el mismo radio se describe el arco $O B$, se toma la distancia $O B$, se transporta de C á D , se traza la recta $O D$ y será la paralela buscada (fig. 104).

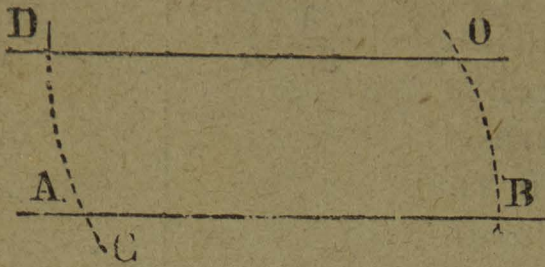


Fig. 104.

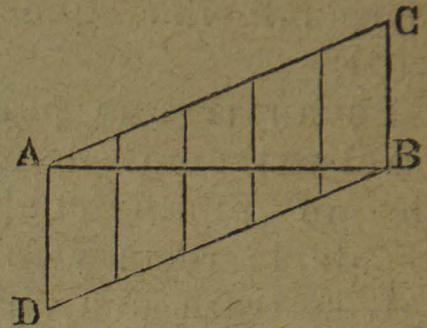


Fig. 105.

2° **Dividir una recta en varias partes iguales.** Trácese una recta indefinida $A C$ y otra paralela también indefinida $B D$. ; sobre ambas rectas y partiendo de los extremos A y B se toman con una medida arbitraria varias distancias iguales, según las divisiones que se quieran hacer de la recta, en seguida se unen los puntos de una y otra por medio de paralelas y se habrá resuelto el problema (fig. 105).

3° **Dividir una recta en varias partes proporcionales.**

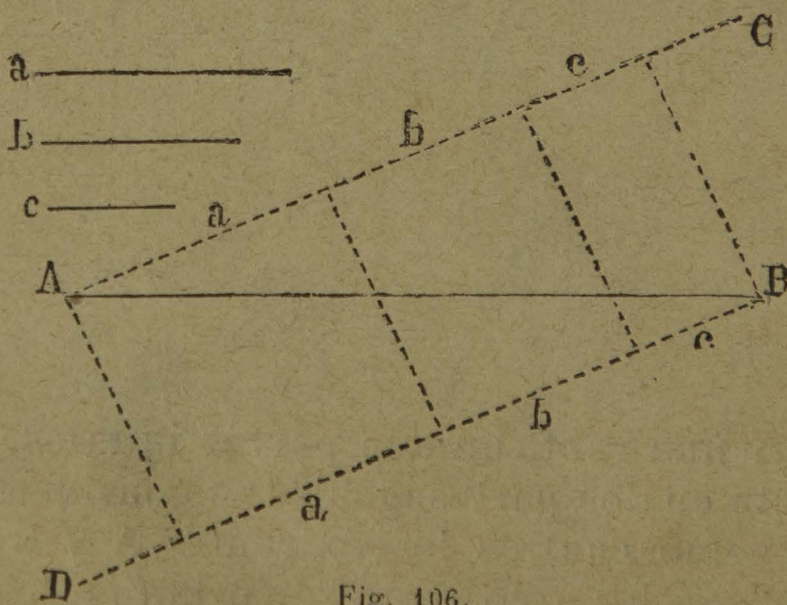


Fig. 106.

Se resuelve de la misma manera que el anterior transportando en las rectas indefinidas las líneas a, b, c , y uniendo

después los puntos correspondientes con rectas paralelas se tendrá la línea A B dividida proporcionalmente (fig. 106).

42. En la construcción de ángulos se presentan los siguientes casos :

1° **Trazar un ángulo igual á otro.** Se traza con un mismo radio desde el punto A el arco mn y desde el punto B de la recta B D con la misma medida el arco indefinido pr y tomando la distancia pg igual á mn el ángulo en B será el que se pide (fig. 107).

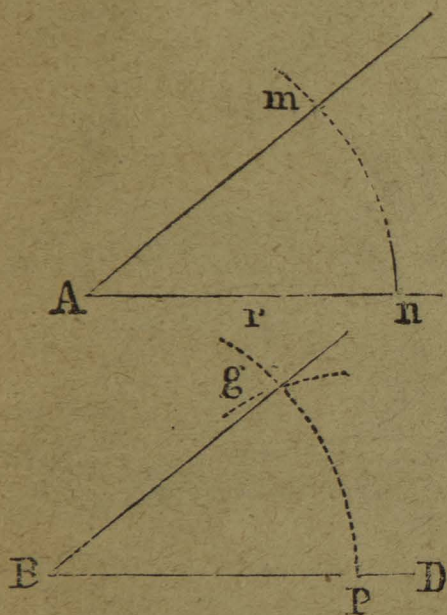


Fig. 107.

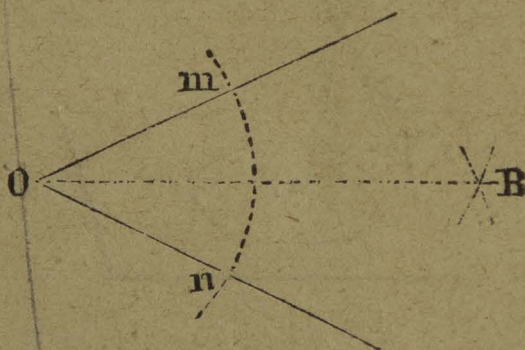


Fig. 108.

2° **Dividir un ángulo en dos mitades.** Se traza desde el punto O con un radio cualquiera el arco mn y desde los puntos m y n se trazan unos arcos cuya intersección en B dará la dirección de la bisectriz OB que divide el ángulo en dos mitades (fig. 108).

3° **Trazar un ángulo igual á la suma de otros dos.** Se traza la recta indefinida OC y con el mismo radio que se han trazado los arcos A y B se traza el arco indefinido mn , en seguida partiendo del punto m se transportan en este último

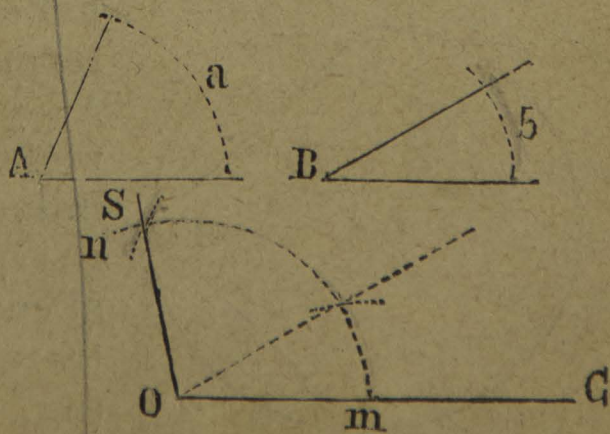


Fig. 109.

los primeros arcos formando una abertura que llegue hasta el punto S por el cual se hace pasar la recta OS y quedará resuelto el problema (fig. 109).

43. Los problemas gráficos que se relacionan con la circunferencia son los siguientes:

1° **Trazar una circunferencia con el compás ó con un cordón.** Por medio del compás basta apoyar la punta de él en el punto C llamado centro, en seguida se describe la curva con la abertura que se desee (fig. 110).

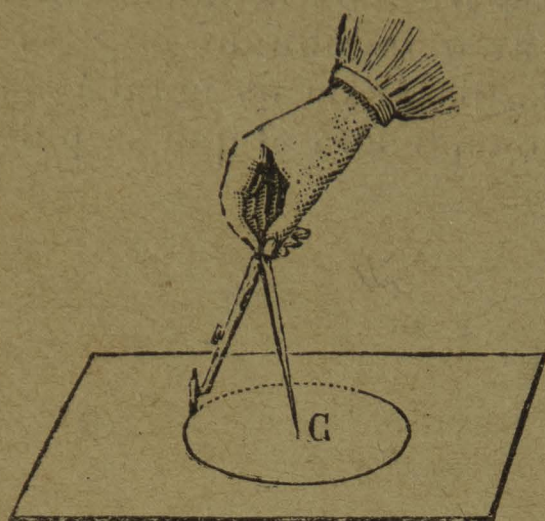


Fig. 110.

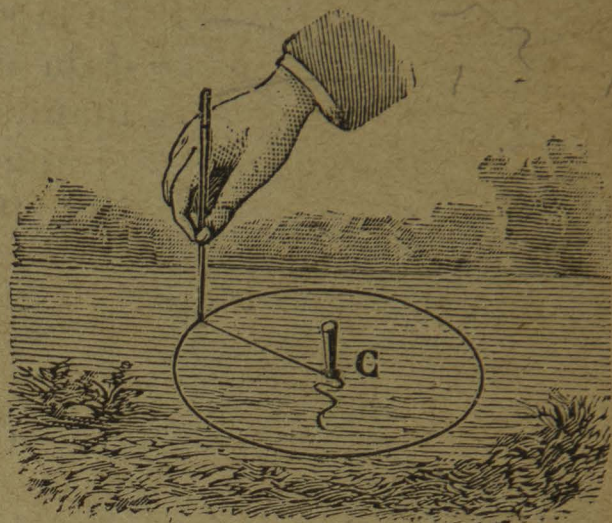


Fig. 111.

En el terreno basta colocar en el centro C una estaca ó clavo en el cual se ata un cordón del tamaño que se quiera y con un fuerte punzón en el otro extremo, se describirá la circunferencia pedida (fig. 111).

2° **Dados tres puntos que no estén en línea recta hacer pasar por ellos una circunferencia.** Sean los puntos dados AB y C, se unen por medio de las rectas AB y BC; se levantan en la mitad de ellas dos perpendiculares que se cortan en el punto O, el cual será el centro de donde se trazará la circunferencia pedida (fig. 112).

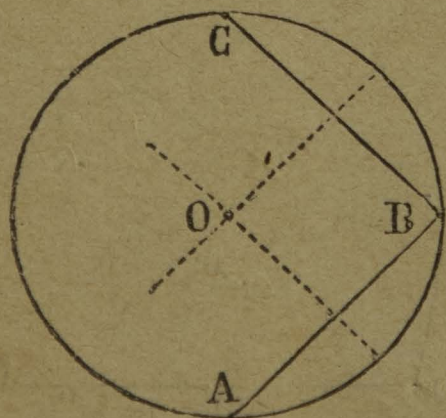


Fig. 112.

Si se tratara de buscar el centro de un arco ó de una circunferencia, se empleará el mismo procedimiento.

3° **Trazar tangentes á una circunferencia.** Tres casos principales pueden darse: 1° Por un punto dado sobre

desde el punto O' , en seguida se prolonga el radio $O B$ hasta B' y se traza la paralela $B'C$ que será la tangente pedida (fig. 115).

4° Rectificar una circunferencia ó sea encontrar una

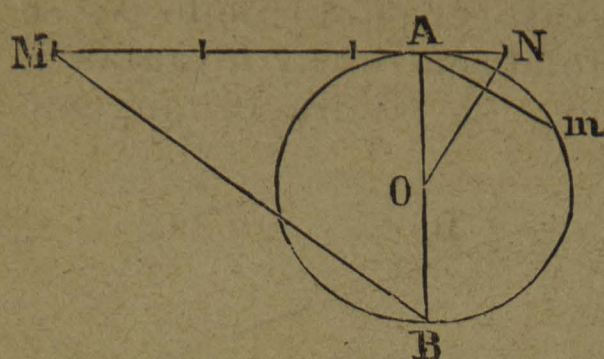


Fig. 116.

recta equivalente á su longitud. Se traza el diámetro AB , la tangente MAN ; la recta ON , de modo que el arco $A m$ sea igual á 30 grados ó sea la mitad del arco, cuya cuerda es el radio, se traza desde N sobre la tangente tres veces el radio y

uniendo el extremo M con B tendremos la recta MB equivalente á la semicircunferencia desarrollada en línea recta (fig. 116).

44. Trazo de la espiral. En el trazo de la línea espiral se procede de la manera siguiente: Se traza la recta indefinida $A B$, se hace centro en c con un radio arbitrario cb , se describe la semicircunferencia inferior bm , se hace

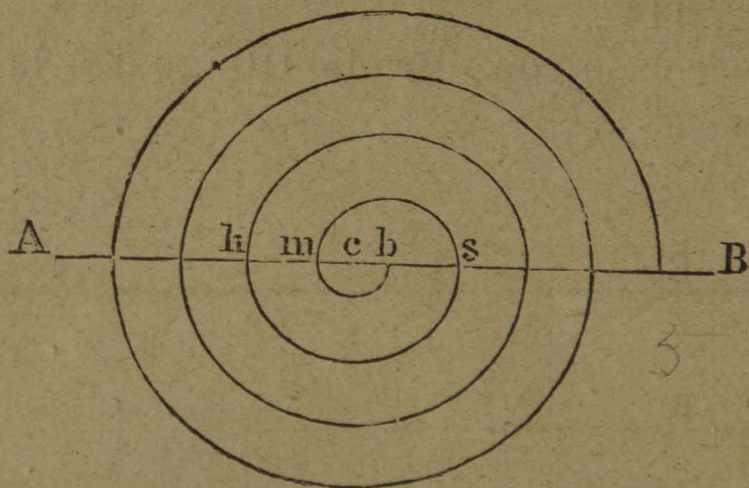


Fig. 117.

después centro en b y con un radio bm se describe la semicircunferencia superior ms , se vuelve á hacer centro en c y con el radio cs se describe la semicircunferencia inferior sh y se continúa alternativamente del mismo modo (fig. 117).

Ejercicios y observaciones. — 38. Ejercicios sobre líneas rectas pequeñas, medianas ó grandes : prolongarlas, trazar una recta igual á otra, sumar dos ó más rectas, duplicarlas triplicarlas, etc., buscar la diferencia entre dos rectas. — 39. Descripción y uso práctico de la plomada y los niveles. — 40. Modo práctico de usar la regla, la escuadra y el compás, háganse ejercicios de perpendiculares en la vertical, la horizontal y la inclinada. — 41. Háganse ejercicios diversos de paralelas en todas posiciones, practíquense divisiones de rectas en partes iguales ó proporcionales con el compás ó con la escuadra. — 42. Modo de trazar los ángulos conocidos, ejercicios de sumas y diferencias. — 43. Háganse varios ejercicios sobre circunferencias concéntricas, excéntricas, tangentes y secantes y las rectas que con ellas se relacionan. — 44. Ejercicios sobre la espiral.

CUESTIONARIO. — ¿Cómo se trazan las longitudes pequeñas? — ¿Las longitudes medianas? — ¿Las grandes longitudes? — ¿Cómo se determina la línea vertical? — ¿Qué instrumentos se usan para el trazo de la línea horizontal? — ¿En qué consiste el nivel de albañil y cómo se usa? — ¿El nivel de burbuja de aire? — ¿El nivel de agua? — ¿Qué casos principales se presentan en el trazo de las líneas perpendiculares? — ¿Cómo se trazan las perpendiculares en cada uno de esos casos? — ¿Qué casos se presentan en la construcción de las líneas paralelas? — ¿Cómo se trazan? — ¿Cómo se divide una recta en dos ó más partes iguales? — ¿Cómo se divide en partes proporcionales? — ¿Qué casos se presentan en la construcción de ángulos? — ¿Cómo se resuelven? — ¿Qué problemas gráficos se relacionan con la circunferencia? — ¿De cuántos modos se puede trazar una circunferencia? — ¿Cómo se traza una circunferencia que pase por tres puntos dados? — ¿Cómo se resuelven los problemas de las tangentes? — ¿Cómo se rectifica una circunferencia? — ¿Cómo se traza la línea espiral?

CAPÍTULO VIII.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LAS LÍNEAS.

Sumario. — 45. Principales propiedades de la línea recta. — 46. Medición de líneas rectas. — 47. — Propiedades principales de los ángulos. — 48. Medición de ángulos. — 49. Propiedades principales de la circunferencia y líneas que se relacionan con ella. — 50. Modo de medir la longitud de la circunferencia. — 51. Al-

gunas aplicaciones de la Longimetría. — 52. Problemas y ejemplos concretos.

45. Las principales propiedades de la línea recta son las siguientes : 1^a Es la más corta que puede trazarse entre dos puntos dados. 2^a Sólo puede trazarse una sola recta entre dos puntos. 3^a Su dirección está marcada siempre con dos puntos. 4^a Sólo puede prolongarse en la misma dirección.



Fig. 118.

46. En la medición de las líneas rectas se usa : para las pequeñas el decímetro ó doble decímetro (fig. 118) ; para

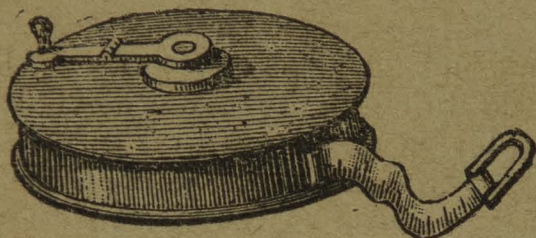


Fig. 119.

las medianas, el metro lineal; para las grandes el decámetro de cinta (fig. 119), ó la cadena métrica de fierro. El hectómetro, el kilómetro y el miriámetro, sólo se usan en los cálculos y especial-

mente para distancias geográficas.

Para medir una recta por medio del decímetro ó doble decímetro, basta colocar dicha medida debajo de la recta, leyendo en seguida sobre la primera, las unidades de medida que tenga la segunda.

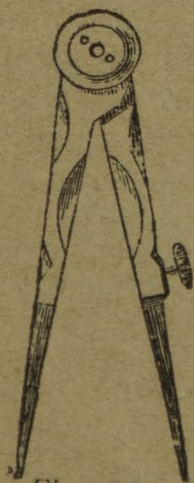


Fig. 120.

Por medio del compás se puede también medir una línea recta, tomando una medida fija en el doble decímetro y transportarla después varias veces en la recta que se trata de medir (fig. 120).

Respecto del decámetro de cinta, su uso es extremadamente sencillo y no necesita explicación.

47. Las principales propiedades de los ángulos son las siguientes : 1^a Dos ángulos adyacentes trazados en una

recta suman dos ángulos rectos. 2ª Los cuatro ángulos opuestos al vértice son siempre iguales entre sí y suman cuatro ángulos rectos. 3ª Los ángulos comparados entre sí de dos en dos pueden ser **iguales** si tienen la misma abertura, **complementarios** si su suma ó diferencia es igual á un recto, **suplementarios** si su suma ó diferencia es igual á dos rectos. 4ª En dos líneas paralelas cortadas por una oblicua, resultan ocho ángulos, unos internos y otros

externos, que, comparados entre sí, resultan las combinaciones siguientes : cuatro **alternos externos** colocados exteriormente á distinto lado de la oblicua é iguales de dos en dos: $BCD = EHF, ACB = GHF$; cuatro **alternos internos** colocados interiormente también á distinto lado de la oblicua é iguales entre sí de dos en dos : $DCH = EHC, ACH = CHG$; se llaman por último

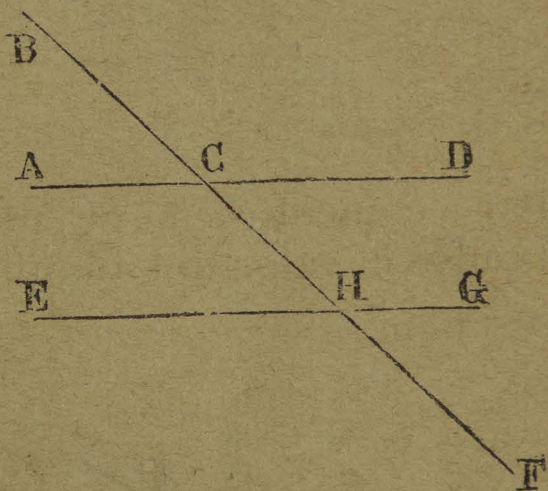


Fig. 121.

ángulos **correspondientes** los que están colocados á un mismo lado de la oblicua, uno interno, otro externo é iguales de dos en dos ; $ACB = EHC, BCD = CHG, GHF = DCH, EHF = ACH$ (fig. 121).

48. Medir un ángulo es averiguar la mayor ó menor abertura comprendida entre sus dos lados, ó bien determinar la medida del arco interceptado entre ellos y trazado desde su vértice con un radio cualquiera.

Para apreciar el valor de un arco de circunferencia, se ha convenido en dividir ésta en 360 partes iguales que se llaman **grados**, cada grado se divide en 60 partes iguales que se llaman **minutos**, cada minuto se divide en 60 partes iguales que se llaman **segundos**. Los grados, minutos, y segundos se escriben así : $360^\circ 60' 60''$.

Los ángulos se miden por medio de un instrumento llamado **transportador**, que consiste en un semi-círculo de metal ó de alguna sustancia transparente, en el cual se anotan los grados y medios grados hasta 180, que es la

suma de los ángulos que contiene una semi-circunferencia. Para medir un ángulo basta colocar el centro del transportador en el vértice del ángulo A, su diámetro s

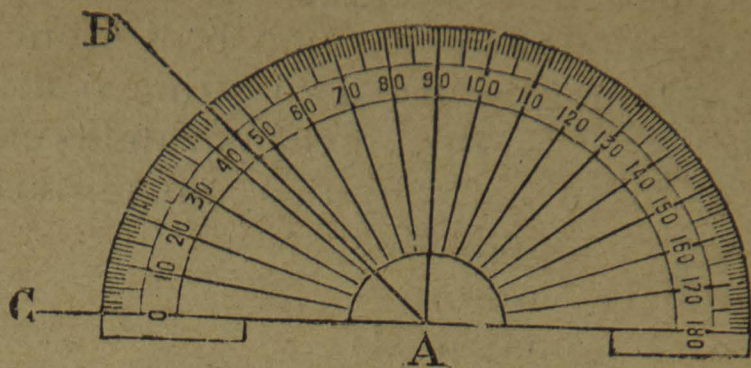


Fig. 122.

hace coincidir con el lado AC y el lado AB señalará en grados el valor del ángulo que se mide (fig 122).

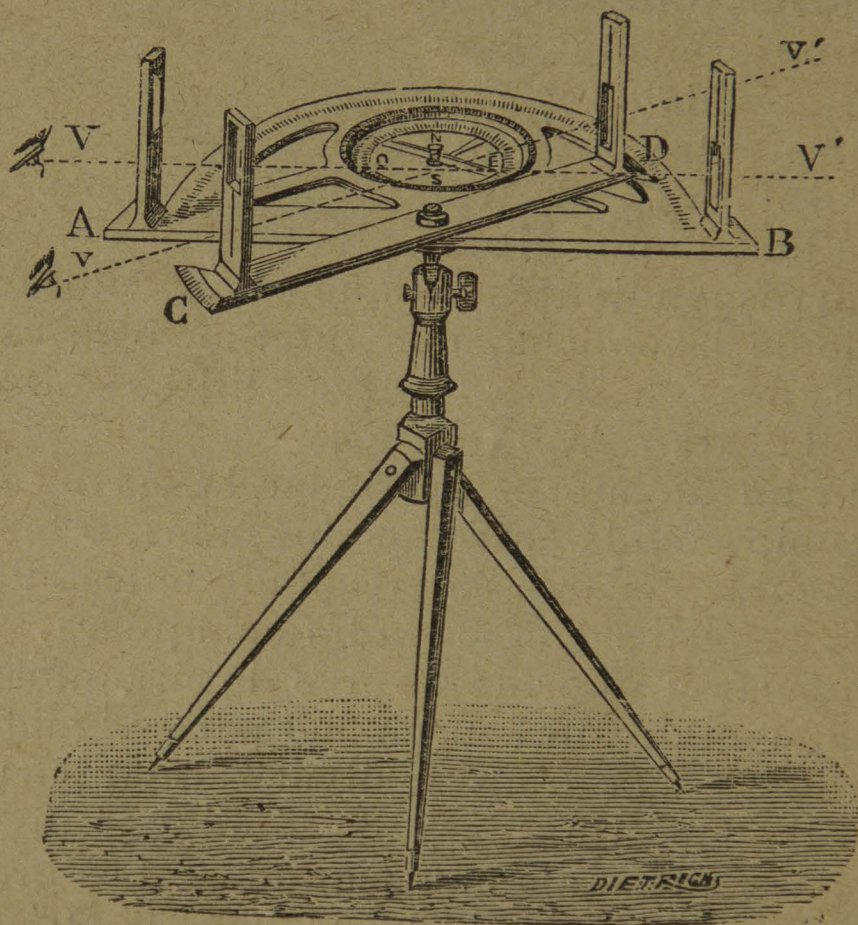


Fig. 123.

El ángulo recto vale 90° grados, el agudo menos de 90, y el obtuso más de 90. Todos los ángulos que se trazan sobre una recta con un vértice común suman 180° grados;

erodos los ángulos que se trazan al rededor de un punto dan 360 grados.

Para medir un ángulo en el terreno se usa del **grafómetro**, que es un semi-círculo de metal, en cuyo contorno limbo están marcados los grados y medios grados. Tiene dos **alidadas** ó reglas metálicas; la una fija AB que sigue la dirección del diámetro y la otra CD movable alrededor del centro y adaptada al mismo plano del limbo. Cada alidada tiene en sus extremos dos **pinulas** á través de las cuales se dirigen los rayos visuales. Este instrumento está puesto sobre un pie de manera que permita al operador dar al limbo cualquiera posición: vertical, horizontal ó inclinada (fig. 123). Para medir un ángulo en el terreno por medio del grafómetro se coloca su centro en el vértice del ángulo, procurando que la alidada fija siga la dirección de un lado del ángulo y colocando en seguida la alidada movable en la dirección del otro, el limbo marcará la medida del ángulo propuesto.

Los ángulos en relación con la circunferencia toman diferentes nombres y tienen además un modo especial de medirse, á saber: El ángulo en el centro ABC se forma por dos radios y tiene por medida el arco que interceptan sus lados (fig. 124); el ángulo **inscrito** MDO se forma

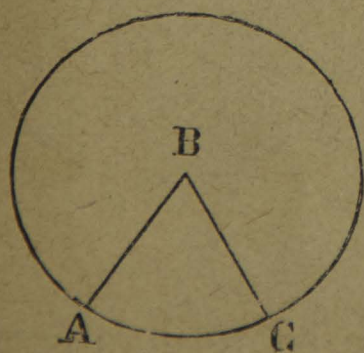


Fig. 124.

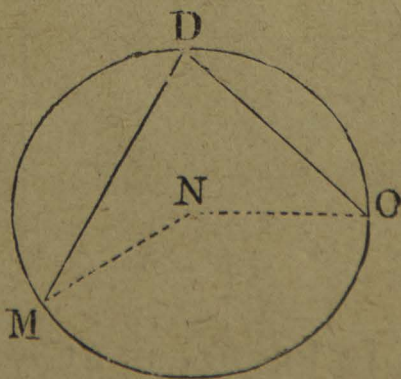


Fig. 125.

por dos cuerdas y tiene por medida la mitad del arco que interceptan sus lados (fig. 125); el ángulo AHF formado por dos secantes tiene por medida la mitad de la diferencia de los dos arcos que abrazan sus lados (fig. 126); el ángulo DEF formado por tangente y cuerda

tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende (fig. 127); el ángulo GHI formado por dos tangentes tiene por medida el arco LK que resulta de los radi

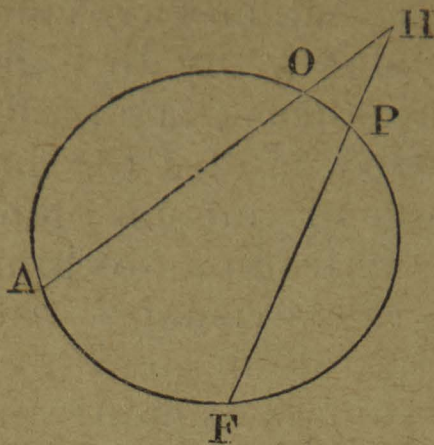


Fig. 126.

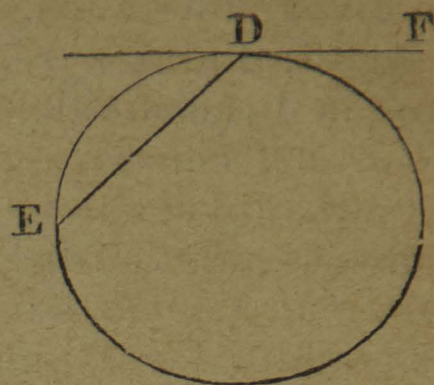


Fig. 127.

prolongados correspondientes á cada tangente (fig. 128); el ángulo excéntrico ABC tiene por medida la mitad de

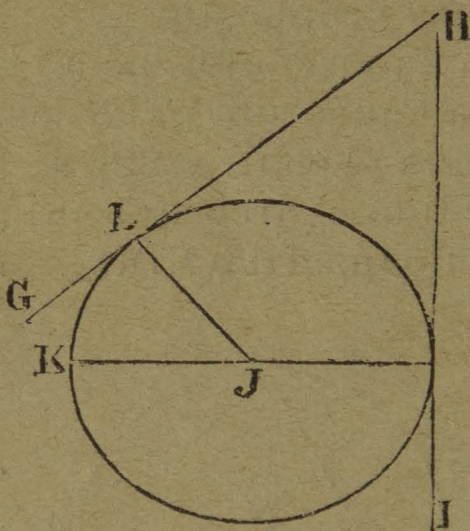


Fig. 128.

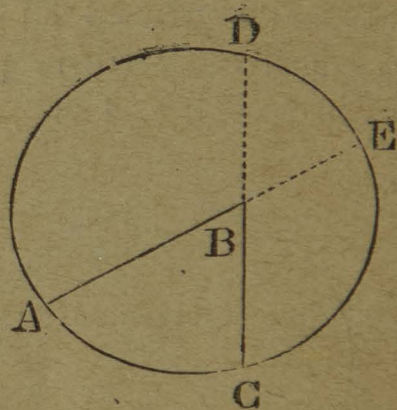


Fig. 129.

la suma de los arcos AC y DE que se forman por la prolongación de sus lados (fig. 129).

49. Las principales propiedades de la circunferencia y de las líneas que se relacionan con ella son las siguientes: 1ª Todos los radios y los diámetros de una misma circunferencia son iguales entre sí; 2ª Todo diámetro mide dos radios y por consiguiente un radio es la mitad de un diámetro. 3ª El diámetro divide á la circunferencia en dos

partes iguales. 4ª Toda cuerda corresponde á dos arcos desiguales; 5ª el diámetro es la mayor de todas las cuerdas; 6ª Todas las cuerdas iguales de una misma circunferencia están equidistantes del centro. 7ª Toda recta perpendicular á la mitad de una cuerda pasará por el centro de la circunferencia y dividirá al arco en dos partes iguales; 8ª Los arcos comprendidos entre paralelas en una circunferencia son iguales.

50. Para medir la longitud de una circunferencia se ha observado que extendiéndola en línea recta, mide aproximadamente tres diámetros y mil cuatrocientos diez y seis diez milésimos de diámetro, ó sea 3^d,1416; de manera que una circunferencia de un metro de diámetro, medirá 3^m,1416, otra de dos metros medirá el doble de esa cantidad, de tres metros el triple, etc., de donde resulta que la longitud de una circunferencia se determinará multiplicando su diámetro por 3,1416 cuya cantidad se representa con la letra π (pi) de este modo:

$$C = D \times \pi.$$

Conocida la longitud de la circunferencia se puede averiguar el valor del diámetro, dividiendo dicha cantidad por 3,1416 cuyo cociente nos dará la longitud del diámetro. La fórmula quedará así:

$$D = \frac{C}{\pi}.$$

El valor del radio será la mitad de este cociente.

51. Algunas aplicaciones de la Longimetría.

1ª Ejercicios con todas las medidas de longitud.

2ª Medir por medio del decímetro, doble decímetro, el metro ó el decámetro rectas de diversos tamaños.

3ª Sumar y restar rectas de diversos tamaños, prolongarlas según determinada medida.

4ª Tomar de una recta la mitad, tercera, cuarta parte, etc., ó bien duplicarla, triplicarla, cuadruplicarla, etc.

5ª Mídanse con el transportador y el grafómetro ángulos de diferentes tamaños.

6^a Háganse construcciones de sumas y diferencias de ángulos de valores iguales ó diferentes.

7^a Determinar el valor de cada ángulo en el centro cuando la circunferencia se divida en tres, cuatro, cinco ó más partes iguales.

8^a Determinar el valor de varios ángulos formados por líneas rectas que se relacionen con la circunferencia.

9^a Conocida la longitud del radio ó del diámetro, determinar la de la circunferencia ó de un arco cualquiera.

10^a Conocida la longitud de la circunferencia ó de un arco determinar el valor del diámetro.

52. Problemas y ejemplos concretos para resolver:

1^o La distancia de México á Tula es de 80 kilómetros. Se desea saber cuántas vueltas dará la rueda mayor de un carruaje en esa distancia, teniendo 1^m,50 de diámetro.

2^o La longitud del meridiano terrestre es de 40.000.000 de metros, cuál será la longitud de un grado, de un minuto, de un segundo?

3^o Siendo el metro la diez millonésima parte del cuadrante del Meridiano terrestre, se desea saber qué distancia habrá en metros de cualquier punto del meridiano al centro de la tierra?

4^o Caminando 20 leguas por hora un ferrocarril, se desea saber cuánto tiempo dilataría en dar la vuelta á la Tierra si se hubiere construído sobre el Ecuador?

5^o Averiguar cuántas leguas de veinticinco al grado recorre por hora la Tierra en su movimiento de rotación al rededor de su eje?

6^o Sabiendo que el movimiento aparente del sol es de 15 grados por hora; que cada grado de la Tierra es de 25 leguas, se desea saber: I. Qué distancia habría de México á dos poblaciones situadas, una á 18°,20' al Oriente y la otra á 30°50' al Poniente y en el mismo paralelo. II. Siendo en México las diez de la mañana, qué hora será en dichas poblaciones?

7^o Suponiendo que la altura de la estrella polar sobre el horizonte de México sea de 19°,26', ó sea la latitud de dicha ciudad, se desea saber á qué distancia se encuentra ésta última, del polo y del Ecuador?

8° Supongamos : I. Que la Tierra describe al rededor el Sol en un año una circunferencia perfecta. II. Que la distancia de la Tierra al Sol sea de 37.000.000 de leguas. III. Que la duración exacta del año solar sea de $365 \frac{1}{4}$ días; se pregunta : 1° Cuál es en kilómetros la longitud de la circunferencia descrita por la Tierra en un año? 2° La longitud de un grado de esta circunferencia? 3° El camino recorrido por la Tierra en un día? 4° En una hora, en un minuto, en un segundo?

Ejercicios y observaciones. — 45. Procure el Profesor demostrar intuitivamente las propiedades contenidas en este párrafo. — 46. Ejercicios prácticos sobre medición de líneas y explicación de las medidas lineales. — 47. Demostración intuitiva de las propiedades de los ángulos. — 48. Mídense ángulos con el transportador y si hubiere grafómetro úndanse en el terreno. — 49. Ejercicios demostrativos de las propiedades de la circunferencia sin recurrir á combinaciones algebraicas. — 50. Hágase práctico el procedimiento que en este párrafo se indica. — 51. Busque el profesor innumerables ejemplos prácticos sobre las aplicaciones de la Longimetría. — 52. El Profesor debe aquí limitarse á ayudar á los alumnos en la resolución de los problemas.

CUESTIONARIO. — ¿Cuáles son las principales propiedades de la línea recta? — ¿Qué medidas se usan para la medición de longitudes? — ¿Cómo se mide una línea recta? — ¿Cuántos ángulos rectos suman los ángulos trazados sobre una recta ó al rededor de un punto? — ¿Á qué se llaman ángulos iguales, complementarios y suplementarios? — ¿Qué clases de ángulos se forman en dos líneas paralelas cortadas por una oblicua? — ¿Cuáles son los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes? — ¿Qué cosa es medir un ángulo? — ¿Cómo se divide toda circunferencia? — ¿Qué son los grados, minutos y segundos y cómo se escriben? — ¿Á qué se llama transportador y para qué sirve? — ¿Qué cosa es el grafómetro, para qué sirve y cómo se usa? — ¿Qué clase de ángulos se pueden formar con las rectas que se relacionan con la circunferencia? — ¿Cómo se miden todos estos ángulos? — ¿Cuáles son las principales propiedades de la circunferencia y de las rectas que con ella se relacionan? — ¿Cómo se mide la longitud de una circunferencia? — ¿Cuál es la fórmula que se usa? — ¿Cómo se obtiene la longitud del diámetro y del radio?

2^a DIVISIÓN.

PLANIMETRÍA.

CAPÍTULO IX.

CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario. — 53. Construcción de triángulos. — 54. Construcción de cuadriláteros. — 55. Trazo de polígonos irregulares : iguales, semejantes y equivalentes. — 56. Construcción de polígonos regulares. — 57. Construcción de polígonos regulares inscritos. — 58. Construcción de polígonos estrellados. — 59. Trazo de superficies de perímetro redondo : óvalo, huevo y elipse.

53. En la construcción de los triángulos se presentan los siguientes casos :

1^o Dada la recta AB construir un triángulo equilátero. Con un radio igual á dicha recta y haciendo centro en sus extremos, se trazan los arcos que se cortan en el punto D, el cual se une por medio de rectas con los puntos A y B y se tendrá la construcción que se pide (fig. 130).

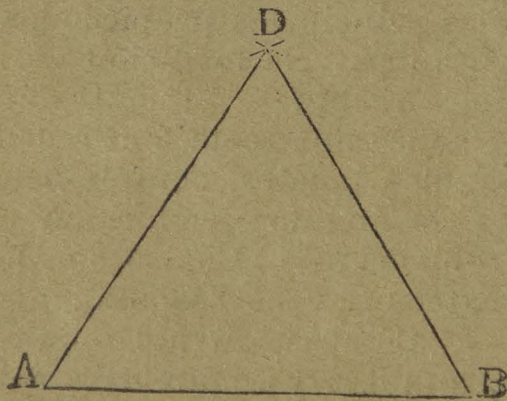


Fig. 130.

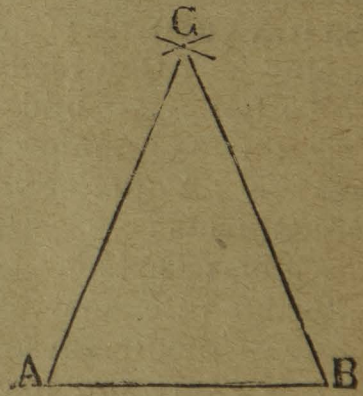


Fig. 131.

2^o Trazar un triángulo isósceles conociendo el lado menor y uno de los iguales. Siendo AB el lado menor, se hace centro respectivamente en cada uno de sus extremos y con una medida igual al lado AC de los lados iguales se trazan los arcos que se cortan en el punto C que es el tercer vértice del triángulo pedido (fig. 131).

3° Construir un triángulo isósceles dada la base a y el ángulo opuesto á ella b . Se traza una recta indefinida AB , se toma de ella $BC = a$; en el punto C se traza la recta CE de manera que tenga con la otra la abertura del ángulo b , se divide el ángulo ECB en dos mitades con la bisectriz CD , en el extremo B se traza otro ángulo igual á DCB y la prolongación de ambos lados cerrará el triángulo que se desea (fig. 132).

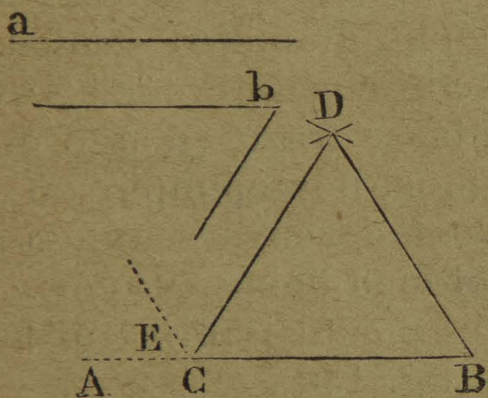


Fig. 132.

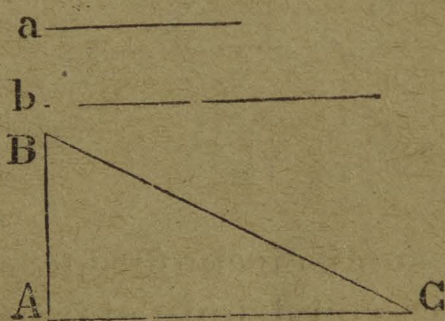


Fig. 133.

4° Construir un triángulo rectángulo conociendo los dos catetos a y b . Se forma un ángulo recto BAC con los dos catetos dados, en seguida se traza la hipotenusa y quedará resuelto el problema (fig. 133).

5° Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa a y un cateto b . Se traza un ángulo recto CAB , el lado AB se hace igual al cateto dado, y desde el punto B como centro tomando como radio la hipotenusa se corta el otro cateto en el punto C y quedará construido el triángulo (fig. 134).

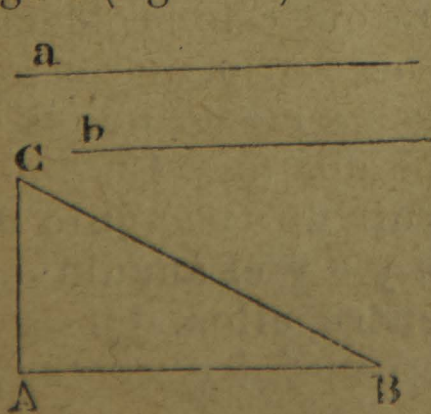


Fig. 134.

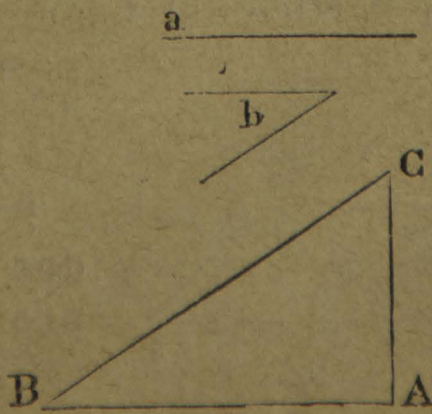


Fig. 135.

6° Dado un cateto a y un ángulo agudo b en un extremo construir el triángulo rectángulo correspondiente.

Se traza una recta AB igual al cateto dado, se levanta en cualquiera de sus extremos una perpendicular y en el otro un ángulo igual al dado, se prolongan en seguida ambas líneas hasta que se corten en el punto C y quedará resuelto el problema (fig. 135).

7° Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa a y un ángulo agudo b . Se traza la recta AB igual á la hipotenusa a y sobre ella como diámetro se describe una semi-circunferencia ACB , en seguida se traza en uno de sus extremos, por ejemplo en A , el ángulo dado cuya segunda línea se prolonga hasta que corte en D

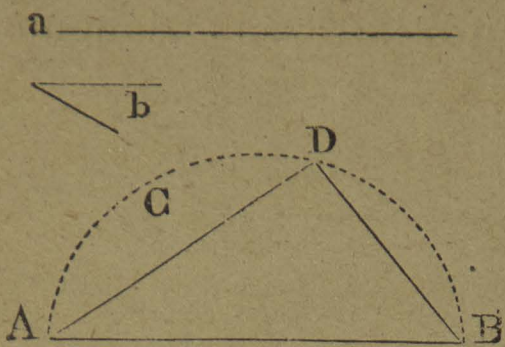


Fig. 136.

á la semi-circunferencia, se une este punto con B y se tendrá construido el triángulo (fig. 136).

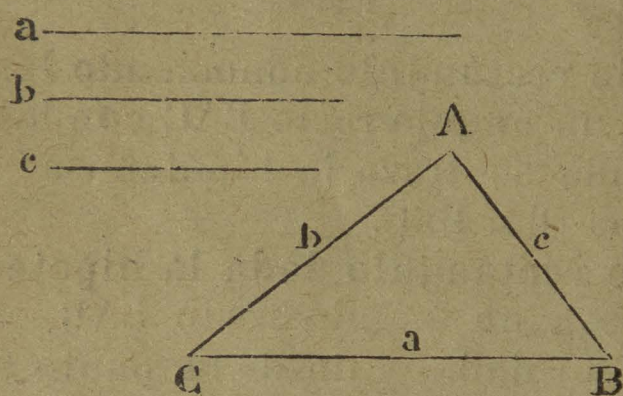


Fig. 137.

8° Dadas las rectas a , b y c construir un triángulo. Se traza la recta $CB = a$ y haciendo centro en C con un radio igual á b , se traza un arco de círculo en la parte superior, después se hace centro en B y con un radio igual á c se traza otro arco

para cortar al primero, el punto de intersección será el tercer vértice del triángulo. Para que este problema sea posible es necesario que el mayor de los lados sea menor que la suma de los otros dos (fig. 137).

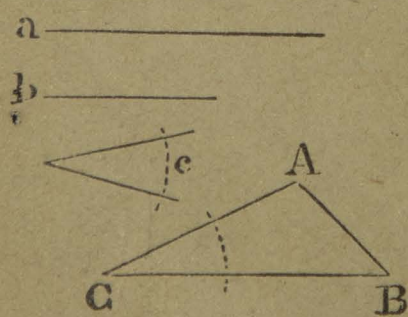


Fig. 138.

9° Construir un triángulo dados dos lados a y b y el ángulo c comprendido entre ellos. En la recta $CB = a$ se construye el ángulo C igual al dado, y sobre el lado AC indefinido se tomará la parte $AC = b$; reuniendo el punto A con B se tendrá el triángulo construido (fig. 138).

10° Construir un triángulo conociendo dos de sus lados a y b y el ángulo A opuesto á uno de ellos. Se traza un ángulo igual al dado A , se toma sobre uno de sus lados una distancia igual al lado b propuesto y desde el extremo B como centro y con un radio igual al lado a opuesto, se traza el arco de círculo que intercepta el tercer lado del triángulo que será el vértice buscado (fig. 139).

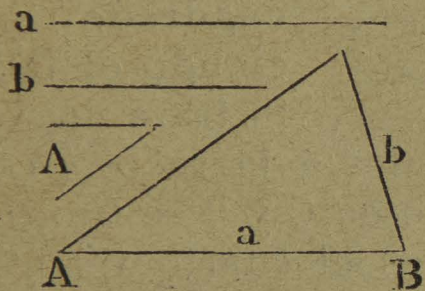


Fig. 139.

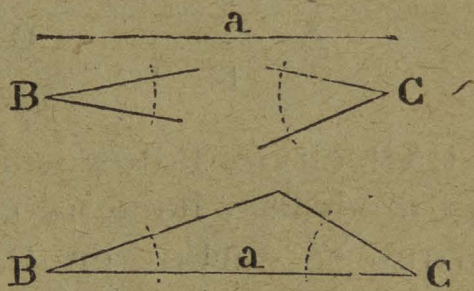


Fig. 140.

11° Construir un triángulo conociendo un lado a y los dos ángulos de sus extremos. De los extremos de la línea dada a como vértice se construyen los ángulos dados C y B , se prolongan los otros dos lados hasta que se cortan en el punto A que se busca (fig. 140).

12° Construir un triángulo conociendo un lado a , un ángulo b en el extremo y otro c opuesto á dicho lado. Se traza la recta $AB = a$ y por el punto B la recta BC para formar el ángulo B ; por el mismo punto se traza la recta BD para formar con BC un ángulo $CBD = c$, finalmente del punto A se traza una recta AC paralela á BD con la cual quedará construido el triángulo deseado (fig. 141).

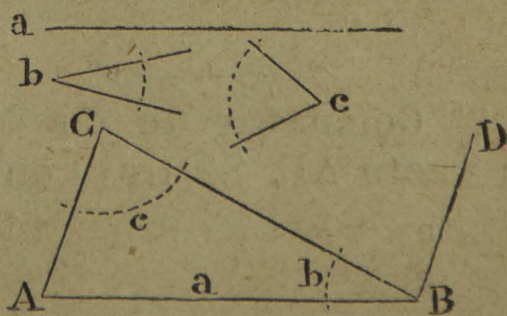


Fig. 141.

13° Construir un triángulo del cual se conoce la altura a , la base b y uno de los otros dos lados c . Se traza una recta indefinida AB y en un punto cualquiera de ella C se levanta una perpendicular $CD = a$; desde el punto D como centro y con una abertura de compás igual á c se corta la recta AB en el punto A y desde este punto

en la misma recta con la distancia $AE = b$ se encontrará el otro vértice del triángulo pedido (fig. 142).

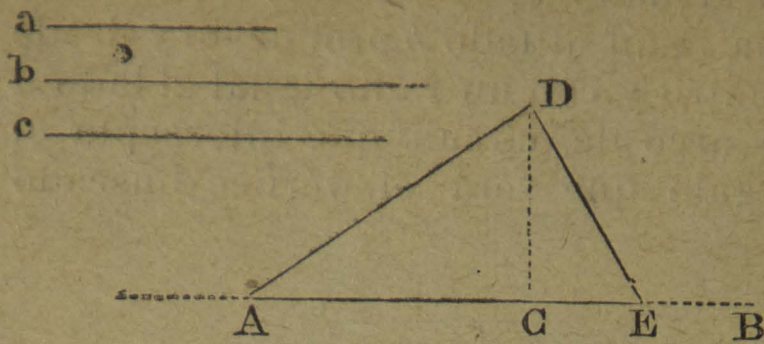


Fig. 142.

54. En la construcción de los cuadriláteros se presentan los casos siguientes:

1° Construir un cuadrado conociendo el lado a . Se traza un ángulo

recto CAB cuyos lados sean iguales á la recta a con la misma medida y haciendo centro en C y B se trazan dos arcos que se cortan en D que es el cuarto vértice del cuadrado (fig. 143).

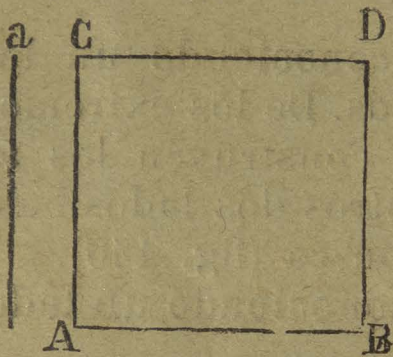


Fig. 143.

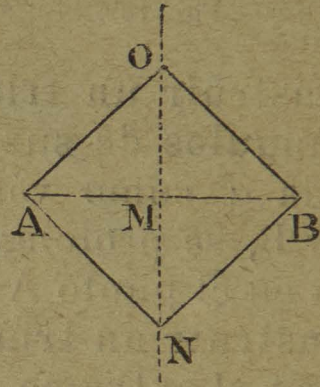


Fig. 144.

2° Construir un cuadrado que tenga por diagonal la recta AB. Se traza en la mitad de dicha diagonal una perpendicular indefinida ON;

en seguida desde el punto M la distancia $AM = MB$ se transporta á los puntos O y N y se tendrá los cuatro vértices del cuadrado (fig. 144).

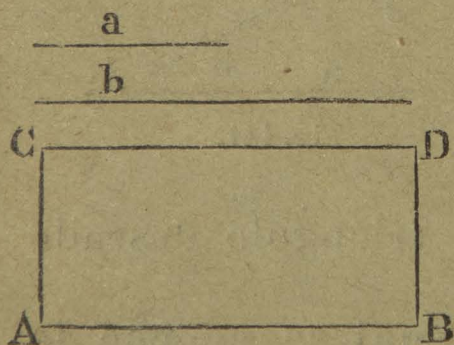


Fig. 145.

3° Construir un paralelogramo rectángulo conociendo su altura a y su base b . Se

traza un ángulo recto CAB con las dos rectas dadas, se trazan dos arcos que se cortan en D partiendo del punto B con la distancia a y del punto C con la distancia b y quedarán determinados todos sus vértices (fig. 145).

4º Conociendo la diagonal a y un lado b construir un paralelogramo rectángulo. Se traza un triángulo rectángulo CAB de manera que su cateto AB sea igual al lado b y su hipotenusa BC igual á la diagonal a ; en seguida se trazan las paralelas correspondientes á los lados AC y AB y quedará resuelto el problema (fig. 146).

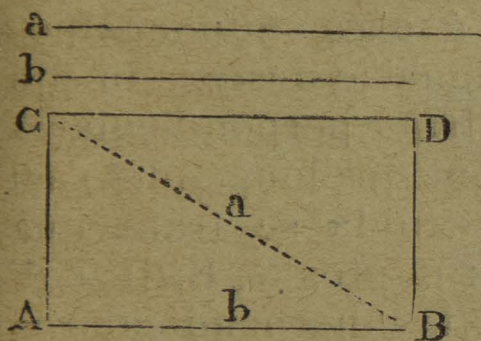


Fig. 146.

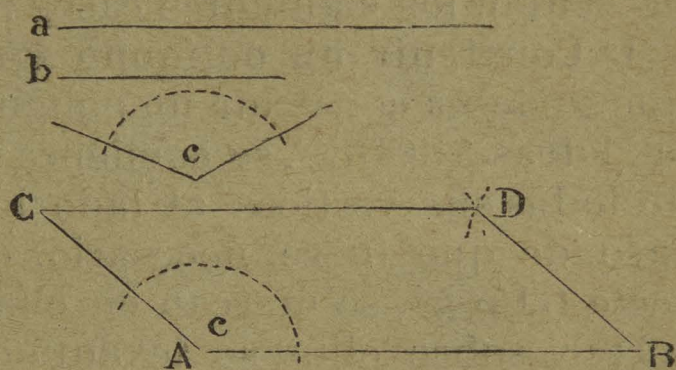


Fig. 147.

5º Construir un romboide conociendo los lados a y b y el ángulo c que forman. Se traza un ángulo CAB igual al dado de manera que sus lados AC y AB sean respectivamente iguales á las rectas b y a , en seguida se determina el punto D y quedará resuelto el problema (fig. 147).

El rombo se construye de la misma manera.

6º Construir un paralelogramo conociendo sus dos diagonales a y b y el ángulo c que forman. Se trazan dos rectas que se corten entre sí y que formen un ángulo igual á c , en seguida se dividen en dos partes iguales las dos diagonales y se transportan respectivamente sus mitades desde el punto O á los puntos A, B, C y D que son los vértices que se buscan (fig. 148).

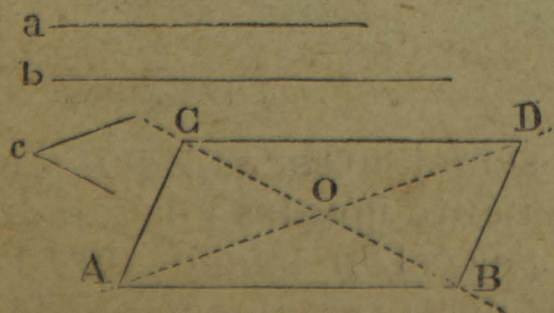


Fig. 148.

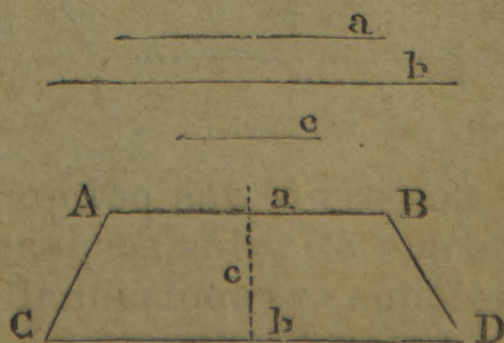


Fig. 149.

7º Construir un trapecio, conociendo sus dos bases a y b y su altura c . Se traza la recta CD igual á la base

mayor b , en su punto medio se levanta una perpendicular igual á la altura c , en el extremo superior de esta se traza otra perpendicular indefinida y paralela á CD sobre la cual se transporta la base menor $AB = a$ y se construirá el trapecio (fig. 149).

55. En la construcción de los polígonos irregulares se presentan los siguientes casos :

1º **Construir un polígono igual á otro.** Supongamos que se desea construir un polígono igual al designado con las letras $ABCDEF$, se comienza por bajar perpendiculares de todos sus vértices al lado inferior prolongándolo en caso de que fuere necesario, en seguida se traza una recta $GJ = gj$, se marcan en ella los puntos G, E, H, I, F y J ; y sobre ellos se levantan tantas perpendiculares cuantas hay en la primera figura, y con las mismas dimensiones hasta obtener los puntos A, B, C y D que después se unen con rectas hasta construir el polígono que se desea (fig. 150).

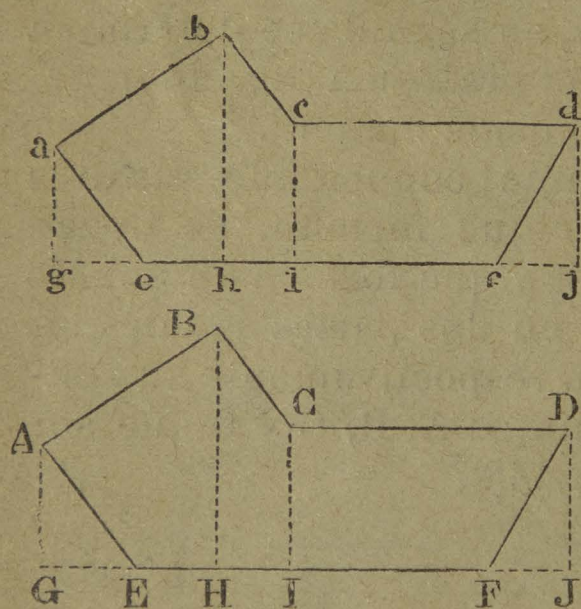


Fig. 150.

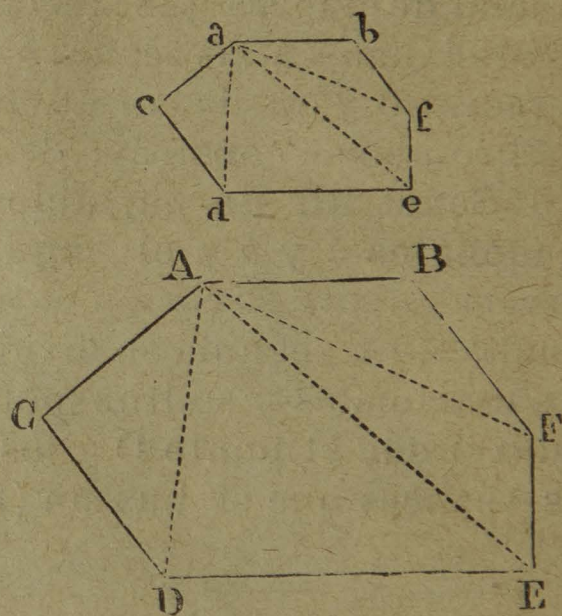


Fig. 151.

2º **Construir dos polígonos semejantes, es decir con todos sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.** Sea el polígono $ABCDEF$ cuyos lados dividiremos en dos partes iguales para construir otro semejante cuyos lados sean la mitad de los lados del primero. Se traza la recta ab igual á la mitad de AB , en sus extremos a y b se trazan los ángulos res-

pectivamente iguales á A y B, se traza la recta *ac* igual á la mitad de AC y *bf* igual á la mitad de BF y se continúa de la misma manera hasta terminar el polígono (fig. 151).

3º Construir un polígono equivalente á otro de un lado menos, es decir que tenga la misma superficie aunque sea de forma diferente. Supongamos el polígono ABCDE, por el punto A se traza la diagonal AC y por el punto B se traza una paralela á dicha diagonal hasta que

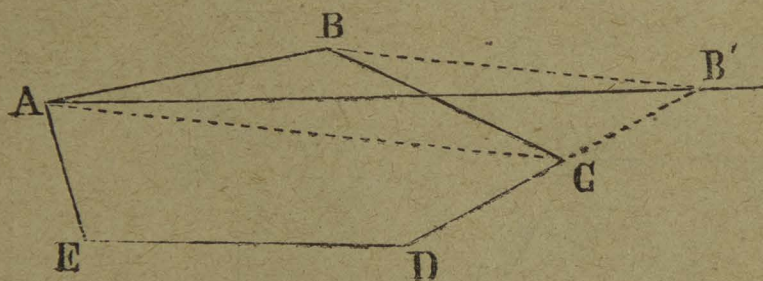


Fig. 152.

encuentre en B' la prolongación del lado DC, se traza la recta AB' y el polígono ABCDE quedará transformado en AB'DE. Con este procedimiento se puede disminuir de lados un polígono hasta convertirlo en un triángulo y sin que por ello disminuya su extensión (fig. 152).

56. En la construcción de los polígonos regulares se presentan los casos siguientes:

1º Construir un pentágono cuyo lado sea igual á la recta AB. Haciendo centro en los puntos A y B y con una abertura igual á dicha recta se trazan dos circunferencias; sus puntos de intersección C y D se unen por medio de una recta indefinida en su parte superior;

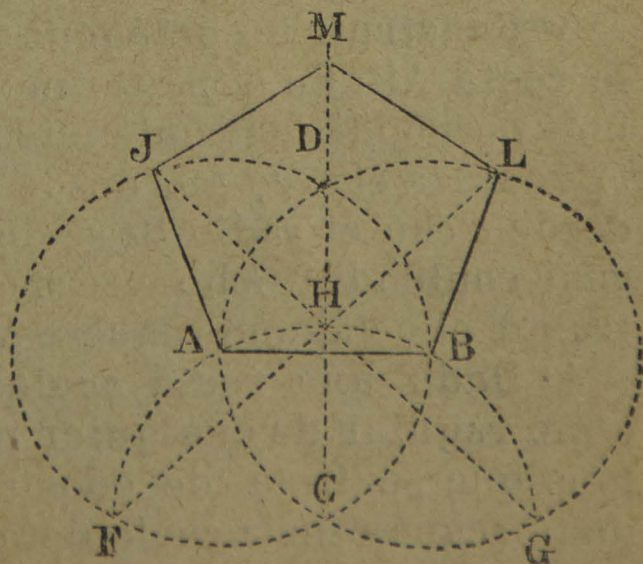


Fig. 153.

del punto C como centro se traza un arco FHG; de los puntos de dicho arco F y G se trazan dos rectas que pasan por el punto H hasta tocar las circunferencias en los puntos J y L; estos puntos

se unen con A y B y se tendrá tres lados del pentágono ; con la misma medida se obtiene el vértice M que es el último que se busca (fig. 153).

2° Dada la recta AB como lado, construir un hexágono. Con una medida AB igual á la recta dada se trazan dos arcos BC y AD; en el punto E y con el mismo radio se traza otro arco en la parte superior del cual se obtienen las intersecciones F y G, con la misma medida se trazan los puntos H y J y se tendrá el hexágono pedido (fig. 154).

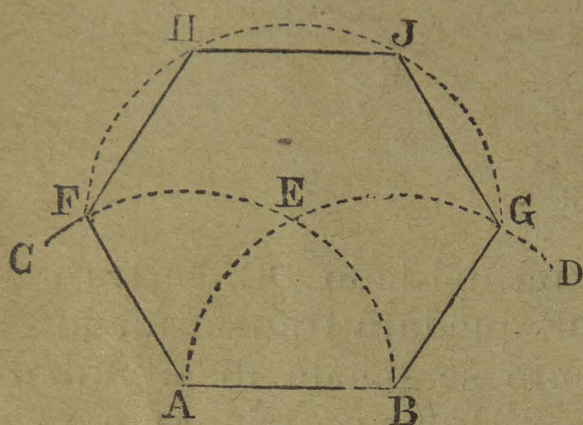


Fig. 154.

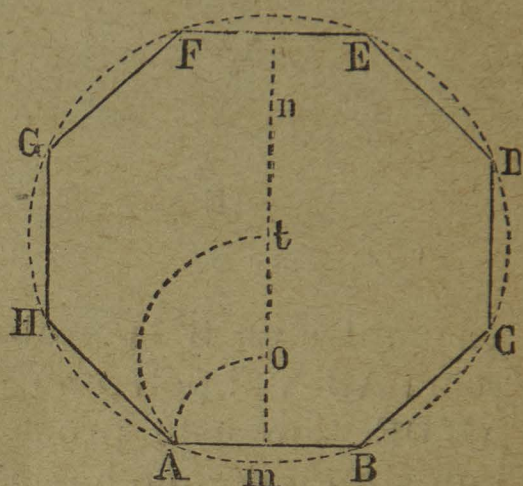


Fig. 155.

3° Construir un octágono regular que tenga por lado la recta AB. En el punto medio de la recta AB se levanta una perpendicular indefinida mn ; con el radio mB desde m se traza el arco Ao , desde o con el radio oB el arco At ; desde t con el radio Bt se describe una circunferencia la cual contendrá ocho veces el lado AB y quedará construido el octágono regular ABCD EFGH (fig. 155).

4° Dada una recta cualquiera N construir un polígono regular de cualquier número de lados. Supongamos que se trata de construir un heptágono; se traza una circunferencia cualquiera cuyo diámetro AB se divide en siete partes iguales; de los extremos A y B con una abertura de compás igual al diámetro se describen dos arcos que se corten en el punto C; de este punto al penúltimo de la división del diámetro D se traza la recta CE y la cuerda BE colocada en esta circunferencia la dividirá en siete partes iguales. Para que el polígono que se desea

construir sus lados tengan las dimensiones de la recta N se procede como sigue: la cuerda BE se divide en dos mitades por medio de la perpendicular OM ; desde el punto M y con una medida igual á la mitad de la recta N

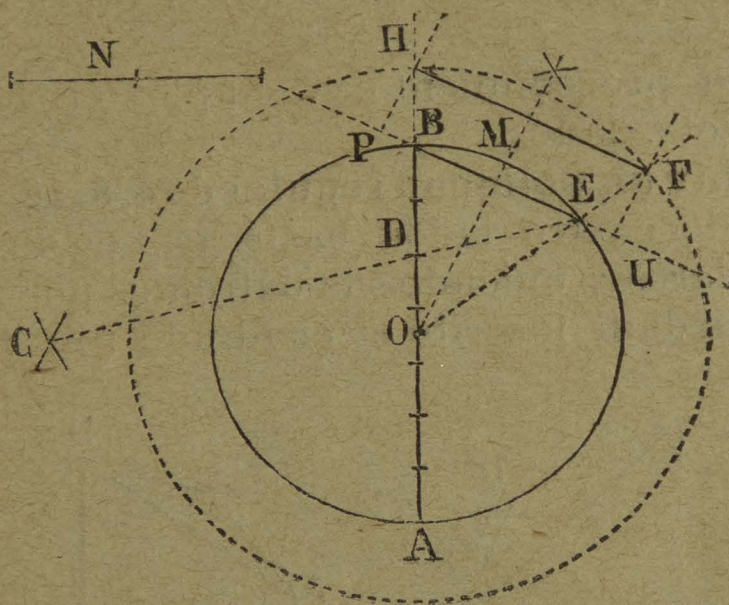


Fig. 156.

se trazan dos arcos que determinan con la prolongación de la cuerda BE los puntos P y U ; desde estos puntos se trazan dos perpendiculares PH y UF las cuales se cortan por medio de la prolongación del radio OB hasta H y del radio OE hasta F ; desde el centro O se describe una circunferencia con cualquiera de dichos radios prolongados y la cuerda $HF = N$ será el lado del heptágono que se desea (fig. 156).

57. En la construcción de los polígonos regulares inscritos se dan los casos siguientes:

1º Inscribir un polígono regular de 3, 6, 12, etc., lados.

Para el triángulo se traza un diámetro AB y del extremo B con la medida del radio se determinan los puntos C y D y la recta CD será el lado del triángulo (fig. 157).

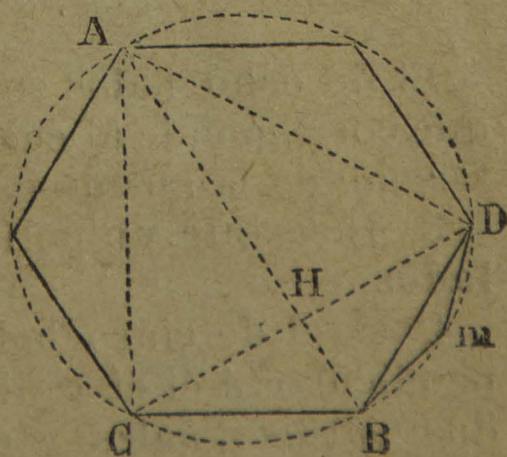


Fig. 157.

Para el polígono de seis lados basta trazar en la circunferencia seis veces la medida del radio ó sea la cuerda BD que es el lado del hexágono.

Para el de doce lados se divide el arco del hexágono en dos mitades y una de ellas mD será el lado que se desea.

El mismo procedimiento se emplea en los polígonos de 24, 48, etc. lados.

2° Inscribir un polígono regular de 4, 8, 16, etc., lados.

Para el de cuatro lados basta trazar dos diámetros perpendiculares y uniendo sus extremos por rectas iguales á AB , quedará inscrito el cuadrado (fig. 158).

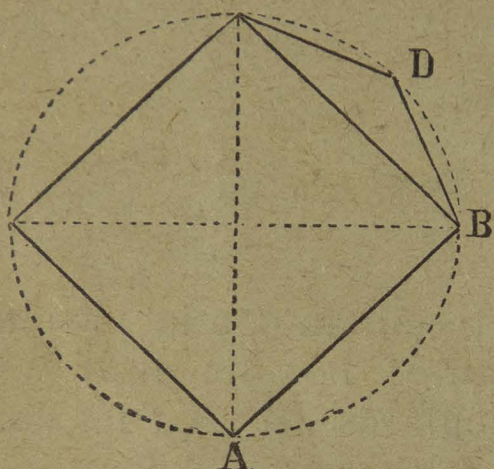


Fig. 158.

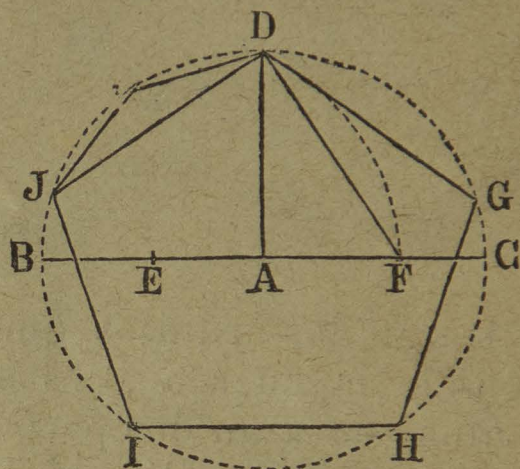


Fig. 159.

El de ocho lados se forma con la mitad BD del arco que corresponde al cuadrado. Los de 16, 32, etc., lados se forman de la misma manera.

3° Inscribir un polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados.

Para el de cinco lados se traza el diámetro BC y perpendicular á él el radio AD ; se divide el radio AB en dos partes iguales y desde el punto E como centro se describe el arco DF y la recta DF , que une sus extremos será el lado del pentágono (fig. 159).

Los de 10 lados, 20, 40, etc., se forman tomando la mitad del arco del polígono de 5, 10, etc.

4° Inscribir un polígono regular de un número cualquiera de lados.

Este problema se puede resolver siguiendo el procedimiento indicado en el párrafo 4º del número 56.

Para el de 7 lados puede construirse también tomando la mitad de la cuerda que corresponde al triángulo. Para el de 9, tomando la tercera parte del arco que corresponde á la misma figura, etc. Así pueden construirse muchos polígonos derivándolos de los ya conocidos.

58. Los polígonos regulares estrellados se forman uniendo por medio de cuerdas sus vértices de dos en dos

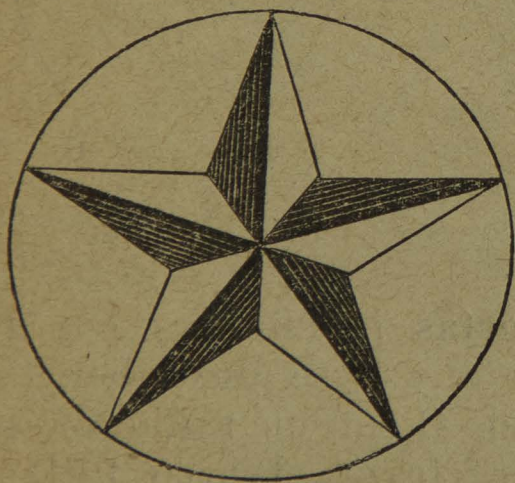


Fig. 160.

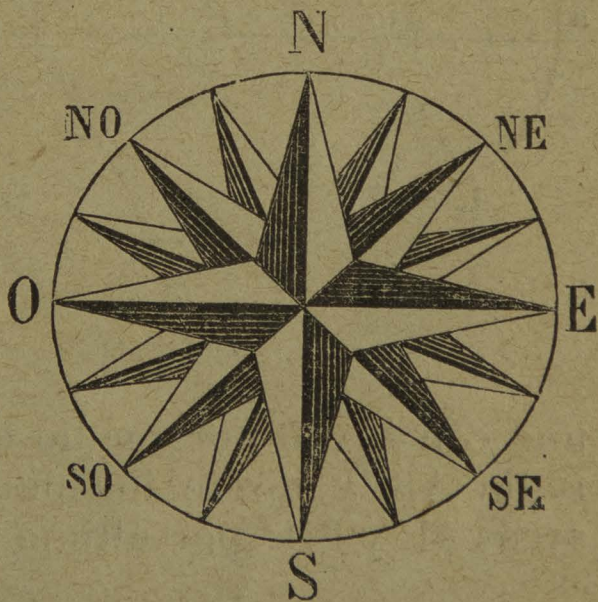


Fig. 161.

ó de tres en tres en los polígonos inscritos (figs. 160 y 161).

59. Trazo de las superficies de perímetro redondo : óvalo, huevo y elipse.

1º **Construcción del óvalo.** Se traza la recta indefinida ab , se miden en ella cuatro distancias iguales as , st , tx y xb ; con una de estas medidas como radio se describen tres circunferencias cuyos centros son s , t y x ; se trazan las rectas gh , gn , cd y df que pasan por cada centro y los puntos de intersección de las circunferencias; estas rectas se cortan en g , y en d que sirven de nuevos centros desde los cuales con un radio igual á una de ellas, por ejemplo cd , se trazan los arcos cf y hn y quedará construido el óvalo (fig. 162).

2º **Construcción del huevo.** Se traza la recta AB y desde el punto medio O se describe una semi-circunferencia AMB, se traza después una perpendicular MP sobre la cual se toma la distancia OC igual á OB, el punto C se

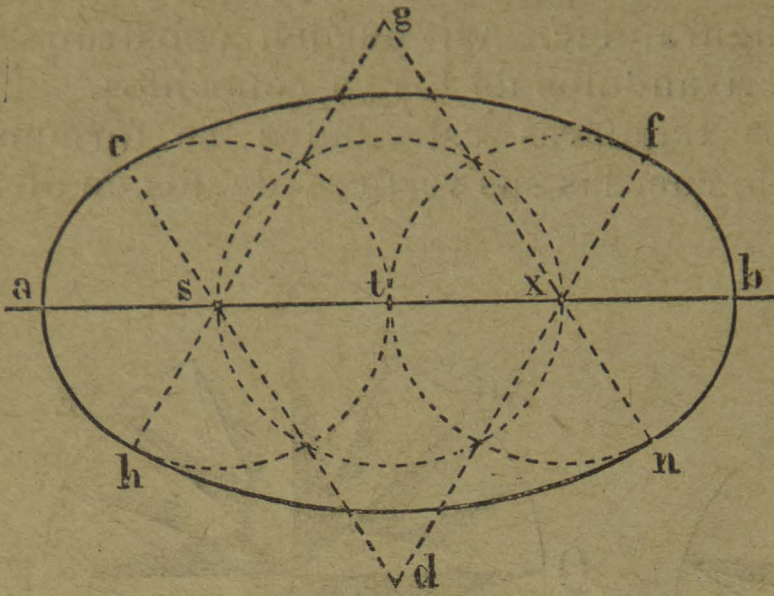


Fig. 162.

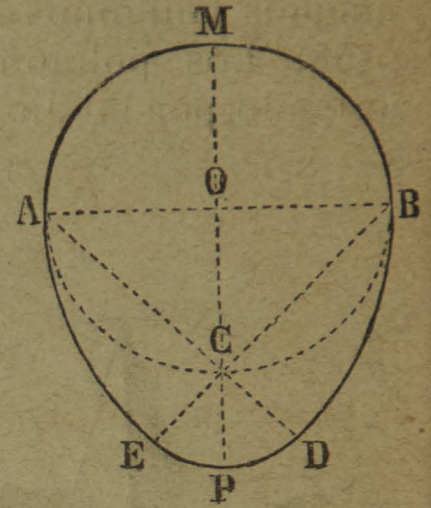


Fig. 163.

une con A y B por medio de rectas indefinidas; con un radio AB y desde los puntos A y B se describen los arcos AE y BD; por último desde C con un radio CE se traza el arco EPD y quedará formado el huevo (fig. 163).

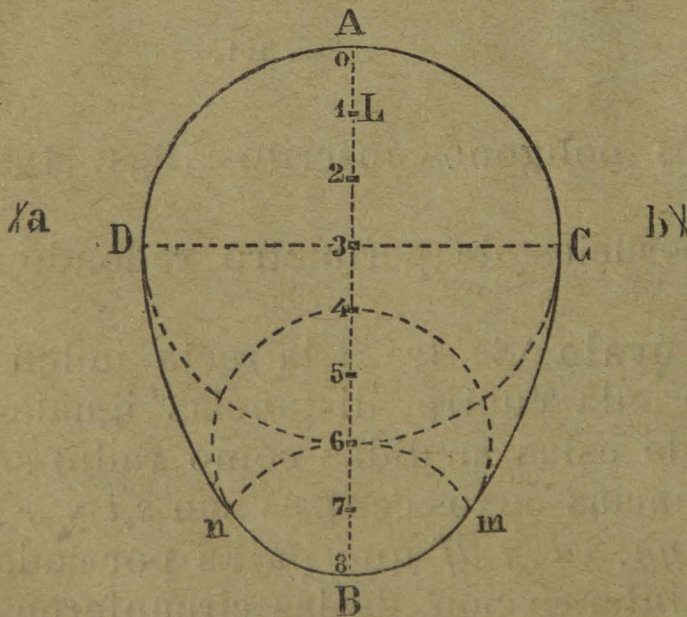


Fig. 164.

Otro procedimiento. Sobre la recta indefinida AB se trazan ocho distancias iguales; en el punto 3 como centro con un radio 3A se traza una circunferencia; desde el punto 6 con un radio 6B se traza una segunda circunferencia menor que la primera; con un ra-

dio 6B desde el punto B se traza un arco que determina los puntos *m* y *n*; se traza un diámetro DC perpendicular á la recta AB, con un radio *ab* desde los puntos *n* y D se

trazan los arcos que se cortan en el punto b ; con el mismo radio desde los puntos m y C se trazan otros arcos que se cortan en a ; con el mismo radio y tomando como centro a y b se trazan los arcos Cm y Dn y quedará terminado el huevo (fig. 164).

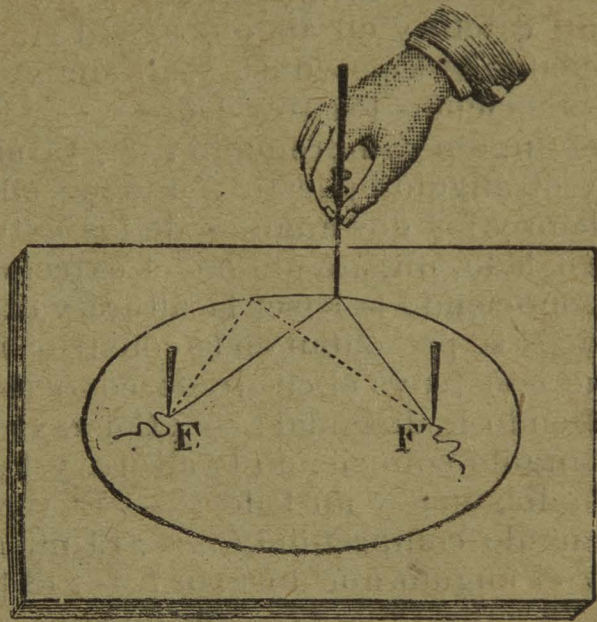


Fig. 165.

3º Trazo de la elipse.

El procedimiento más sencillo para trazar una elipse es el siguiente: se fijan en los focos F y F' dos clavitos ó alfileres en los cuales se ata un hilo ó cordón cuya longitud sea igual al eje mayor; en seguida por medio de un

lápiz se atiranta dicho hilo y se describe la curva que deberá ser una elipse puesto que la suma de dos de sus radios vectores será siempre gual al eje mayor (fig. 165).

Ejercicios y observaciones. — 53. Procure el Profesor en la construcción de cada triángulo, hacer que los alumnos expliquen el fundamento del procedimiento que emplean. — 54. Se hace la misma recomendación respecto de los cuadriláteros. — 55. Pónganse variados ejemplos de figuras iguales, semejantes y equivalentes; ejercicios de aumento y disminución de figuras, explicación de la escala. — 56. Trácese polígonos regulares de diferente número de lados y búsquese prácticamente la relación del lado del polígono con el apotema en cifras numéricas. — 57. Explíquense los procedimientos seguidos en la construcción de los polígonos inscritos. — 58. Háganse polígonos estrellados desde el pentágono en adelante. — 59. Las construcciones del óvalo, el huevo y la elipse; si fuere posible, practíquense también en el terreno.

CUESTIONARIO. — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los triángulos? — ¿Cómo se construye un triángulo equilátero conociendo un lado? — ¿Cómo se traza el isósceles

conociendo el lado menor y uno de los iguales? — ¿Cómo se traza el isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto á ella? — ¿Trazo del triángulo rectángulo conociendo los catetos? — ¿El mismo, conociendo la hipotenusa y un cateto? — ¿El mismo conociendo un cateto y un ángulo agudo en un extremo? — ¿El mismo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo? — ¿Trazar un triángulo conociendo los tres lados? — ¿El mismo conociendo dos lados y el ángulo comprendido? — ¿El mismo conociendo dos de sus lados y el ángulo opuesto á uno de ellos? — ¿El mismo conociendo un lado y los dos ángulos de los extremos? — ¿El mismo conociendo un lado, un ángulo en el extremo y otro opuesto? — ¿El mismo conociendo la base, la altura y otro lado? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los cuadriláteros? — ¿Cómo se construye el cuadrado conociendo un lado? — ¿El mismo conociendo la diagonal? — ¿Cómo se construye un paralelogramo rectángulo conociendo la altura y la base? — ¿El mismo conociendo la diagonal y un lado? — ¿El romboide conociendo dos lados y el ángulo comprendido? — ¿El mismo conociendo sus dos diagonales y el ángulo que forman? — ¿El trapecio conociendo las dos bases y la altura? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos irregulares? — ¿Qué son polígonos iguales y cómo se construyen? — ¿Qué son polígonos semejantes y cómo se construyen? — ¿Qué son polígonos equivalentes y cómo se construyen? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos regulares? — ¿Cómo se construye el pentágono regular conociendo un lado? — ¿El hexágono conociendo un lado? — ¿El octágono conociendo un lado? — ¿Un polígono regular de cualquier número de lados, conociendo uno? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de los polígonos inscritos? — ¿Cómo se inscribe el polígono regular de 3, 6, 12, 24, etc., lados? — ¿El polígono regular de 4, 8, 16, 32, etc., lados? — ¿El polígono regular de 5, 10, 20, etc., lados? — ¿El polígono de cualquier número de lados? — ¿Cómo se puede inscribir por otro medio el de 7, 14, etc., lados? — ¿Ó bien el de 9, 18, etc., lados? — ¿Cómo se trazan los polígonos regulares estrellados? — ¿Qué problemas gráficos se presentan en la construcción de superficies de perímetro redondo? — ¿Cómo se construye el óvalo? — ¿Construya Vd. el huevo por los dos procedimientos explicados? — ¿Cómo se construye la elipse?

CAPÍTULO X.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE SUPERFICIES.

Sumario. — 60. Principales propiedades de los triángulos. — 61. Propiedades de los cuadriláteros. — 62. Propiedades de los polí-

gonos. — 63. Propiedades del círculo y la elipse. — 64. Superficie de los paralelogramos. — 65. Superficie del triángulo. — 66. Superficie del trapecio. — 67. Superficie de los polígonos irregulares. — 68. Superficie de los polígonos regulares. — 69. Superficie del círculo y la elipse. — 70. Principales aplicaciones de la Planimetría. — 71. Problemas y ejemplos concretos.

60. Las principales propiedades de los triángulos son las siguientes: 1.^a Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos. — 2.^a La suma de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. — 3.^a Al mayor lado se halla opuesto el mayor ángulo y viceversa. — 4.^a Á lados iguales se hallan opuestos ángulos iguales. — 5.^a La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sean 180 grados. — 6.^a Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero vale 60 grados. — 7.^a Un triángulo no puede tener á la vez dos ángulos obtusos, ni dos ángulos rectos, ni uno recto y otro obtuso. — 8.^a Las tres alturas de un triángulo correspondientes á sus tres bases respectivas, se cortan en un punto interior ó exterior. — 9.^a Las tres biseñrices de un triángulo se cortan en un punto interior. — 10.^a Todo triángulo puede considerarse como la mitad de un paralelogramo. — 11.^a En todo triángulo isósceles los dos ángulos del lado menor son iguales entre sí. — 12.^a En un triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos es igual á un ángulo recto. — 13.^a Dos triángulos que tienen una misma base y una misma altura son equivalentes. — 14.^a Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales. — 15.^a Dos triángulos son iguales cuando tienen igual un ángulo y los lados que lo forman son iguales cada uno al suyo. — 16.^a Dos triángulos pueden tener sus tres ángulos iguales sin ser iguales.

61. Las principales propiedades de los cuadriláteros son las siguientes: 1.^a Todo cuadrilátero tiene cuatro lados y cuatro ángulos. — 2.^a La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale cuatro ángulos rectos. — 3.^a Todo paralelogramo puede descomponerse en dos triángulos iguales. — 4.^a En todo paralelogramo los la-

dos y ángulos opuestos son iguales. — 5.^a Las diagonales de un paralelogramo se cortan en partes mutuamente iguales. — 6.^a La mayor diagonal de un paralelogramo es la opuesta al mayor ángulo y viceversa. — 7.^a Las diagonales del cuadrado y del rombo se cortan siempre en ángulo recto. — 8.^a Dos paralelogramos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido, son iguales. — 9.^a Toda recta paralela á las dos bases de un trapecio, divide los otros dos lados en partes proporcionales. — 10.^a La recta que une los medios de los dos lados no paralelos de un trapecio es igual á la semisuma de las bases, etc.

62. Las principales propiedades de los polígonos son las siguientes : 1.^a Todo polígono tiene tantos ángulos como lados tiene. — 2.^a Todo polígono puede descomponerse en tantos triángulos como lados tiene, siempre que todas las diagonales partan del centro á todos los vértices. — 3.^a Todo polígono se divide en tantos triángulos como lados tiene menos dos, siempre que sean formados por diagonales que parten de un solo vértice á los demás. — 4.^a En los polígonos regulares los apotemas son siempre iguales, lo mismo pasa con los radios ó rectas que parten de los vértices al centro. — 5.^a La suma de todos los ángulos del centro en un polígono regular vale cuatro ángulos rectos. — 6.^a El valor de un ángulo del centro en un polígono regular es igual al cociente que resulta de dividir el valor de cuatro ángulos rectos por el número de lados del polígono. — 7.^a La suma de todos los ángulos interiores de un polígono, vale tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene menos dos. — 8.^a El valor de un ángulo interior de un polígono regular se obtiene dividiendo el valor de todos los ángulos juntos, por el número de ángulos ó lados que tenga el polígono, etc.

63. Las principales propiedades del círculo y la elipse son las siguientes : 1.^a Todo círculo puede considerarse como un polígono de infinitos lados, en el cual su perímetro es la circunferencia y su apotema es el radio.

— 2.^a La relación que existe entre la circunferencia y el diámetro es siempre constante en todos los círculos. — 3.^a En toda elipse la suma de dos de sus radios vectores es igual al eje mayor. — 4.^a El círculo es una elipse cuyos dos focos están en el centro y por consiguiente todos sus radios vectores son iguales entre sí, etc.

64. Superficie de los paralelógramos.

La superficie de todo paralelógramo se mide multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

$$S = B \times A.$$

Examinemos la razón de esta fórmula.

En el paralelógramo **cuadrado** coloquemos la unidad de medida de superficie sobre la base, y observaremos que cabe en ella tres veces por ejemplo; si esta faja la repetimos hasta cubrir toda la superficie del cuadrado, notaremos que cabe en ella otras tantas veces como unidades tiene la altura ó sea $S = 3 \times 3 = 9$ metros cuadrados ó cualquiera otra medida superficial que se haya elegido (fig. 166).

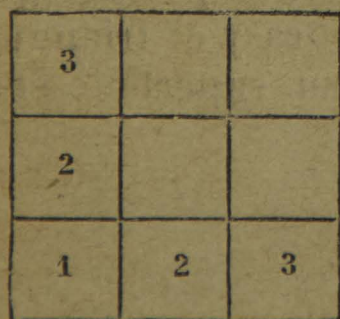


Fig. 166.



Fig. 167.

En el paralelógramo **rectángulo** se observa lo mismo que en el cuadrado, colocando en la base cuatro medidas superficiales por ejemplo; tendremos que repetir esta faja tres veces que mide la altura ó sea $S = 4 \times 3 = 12$ metros cuadrados de superficie (fig. 167).

En el paralelógramo **rombo** se medirá la superficie de un cuadrado prolongando su base inferior y bajando dos perpendiculares de su base superior; pues aun

cuando en el lado derecho se agrega un triángulo, se quita otro igual en el lado izquierdo, con lo cual queda compensada la superficie (fig. 168).

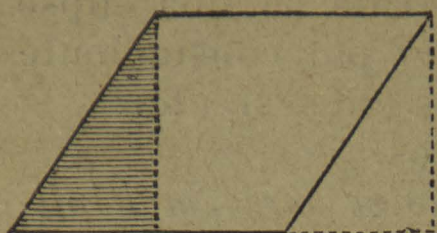


Fig. 168.

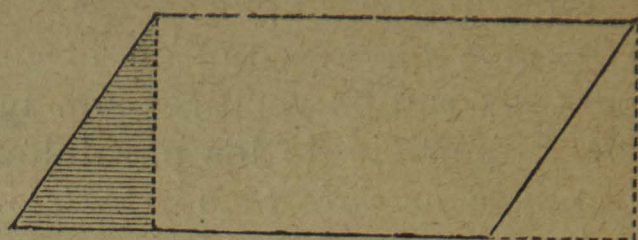


Fig. 169.

En el paralelogramo **romboide** pasa lo mismo que en el rombo según se observa en la figura correspondiente (fig. 169).

65. Superficies de los triángulos.

La superficie de un triángulo se obtiene multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura y dividiendo el producto por dos.

$$S = \frac{B \times A}{2}.$$

En efecto, todo triángulo es la mitad de un paralelogramo; es así que la superficie de todo paralelogramo es el producto de la base por la altura y el triángulo la mitad de un paralelogramo, luego su superficie será la

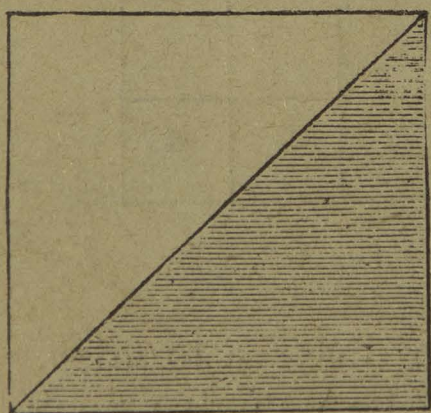


Fig. 170.



Fig. 171.

mitad del producto de la base por la altura (figs. 170 y 171).

El triángulo rectángulo tiene tres propiedades importantes :

1.^a El cuadrado de cada uno de los lados del ángulo recto es igual al producto de la hipotenusa por el segmento adyacente (fig. 172).

$$(AB)^2 = AC \times AD$$

$$(BC)^2 = AC \times DC$$

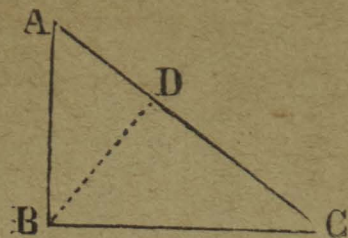


Fig. 172.

y por consiguiente :

$$AB = \sqrt{AC \times AD}$$

$$BC = \sqrt{AC \times DC}.$$

2.^a El cuadrado de la perpendicular bajada del ángulo recto es igual al producto de los dos segmentos de la hipotenusa.

$$(BD)^2 = AD \times DC$$

y por consiguiente

$$BD = \sqrt{AD \times DC}.$$

3.^a El cuadrado de la hipotenusa en un triángulo rec-

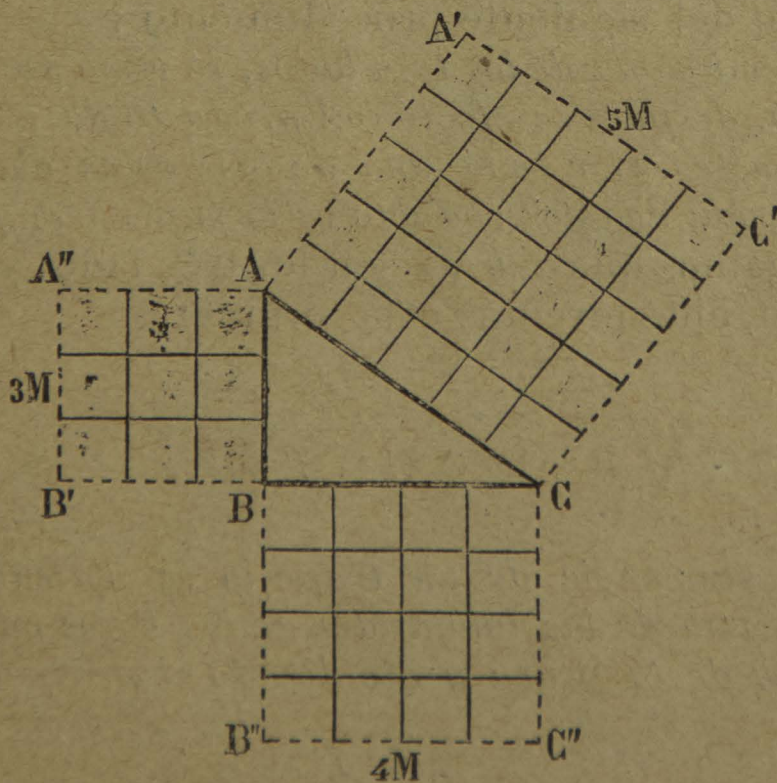


Fig. 173.

tángulo, es igual á la suma de los cuadrados de los catetos (fig. 173).

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

y por consiguiente

$$AC = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$$

$$AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$$

$$BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2}.$$

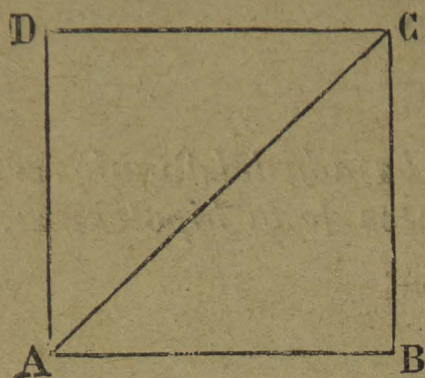


Fig. 174.

Según esta última propiedad, puede fácilmente medirse la diagonal de un cuadrado cuyos dos lados son iguales (fig. 174).

Representemos los lados AB y BC con la letra a y como $AB = BC = a$ resulta :

$$AC = \sqrt{2 \times a^2}.$$

También se puede medir la superficie de un triángulo conociendo las dimensiones de sus tres lados y sin conocer la altura, por medio del siguiente procedimiento :

De la semi-suma de los tres lados, se resta sucesivamente cada lado, después se efectúa el producto de ella que es el semi-perímetro, por cada una de las restas obtenidas ; la raíz cuadrada de este producto es la superficie pedida.

Supongamos que a , b y c son los tres lados y p el semi-perímetro, obtendremos esta fórmula.

$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}.$$

66. *La superficie de un trapecio se obtiene multiplicando la suma de las longitudes de las bases paralelas por la longitud de la altura y dividiendo el producto por dos*

$$S = \frac{(B + b) \times A}{2}.$$

Porque todo trapecio puede transformarse en un triángulo equivalente cuya base sea la suma de las dos

bases del trapecio, y su altura la misma del trapecio, y como la superficie del triángulo es igual al producto de

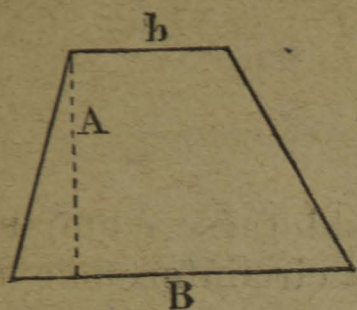


Fig. 175.

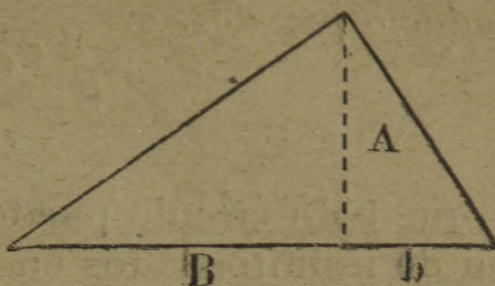


Fig. 176.

la base por la altura dividido por dos, se comprenderá fácilmente la razón de la fórmula anterior (Fig. 175-176).

67. La superficie de un polígono irregular se mide dividiéndolo en triángulos y calculando la superficie de todos y cada uno de ellos. La suma total será la superficie pedida (fig. 177).

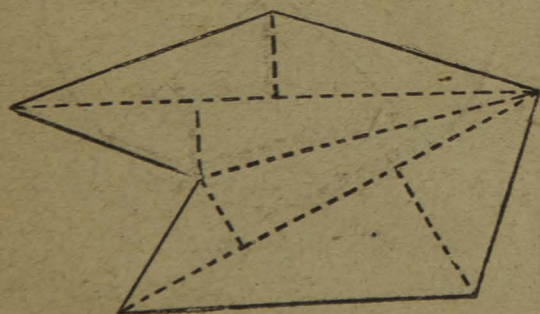


Fig. 177.

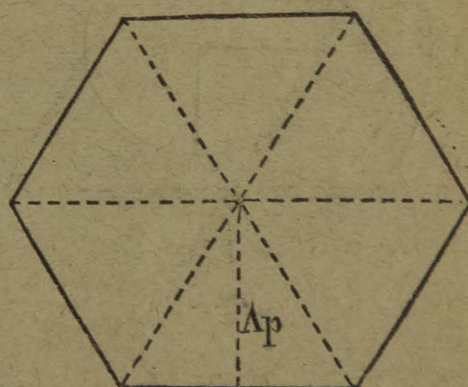


Fig. 178.

68. Superficie de los polígonos regulares.

La superficie de un polígono regular se mide multiplicando el perímetro por el apotema y dividiendo el producto por dos

$$S = \frac{P \times Ap}{2}$$

Porque todo polígono regular se descompone en varios triángulos iguales y el conjunto puede considerarse como un solo triángulo cuya base es el perímetro y su altura el apotema, de donde resulta la fórmula precedente (fig. 178).

69. Superficie del círculo y la elipse.

La superficie de un círculo se obtiene multiplicando la longitud de la circunferencia por el radio y dividiendo el producto por dos.

$$S = \frac{C \times R}{2}.$$

Porque todo círculo puede considerarse como un polígono de infinitos lados en que la circunferencia representa al perímetro y el radio al apotema, lo cual demuestra claramente la fórmula.

La superficie de una corona circular se obtiene buscando la diferencia de las superficies de los dos círculos (fig. 179).

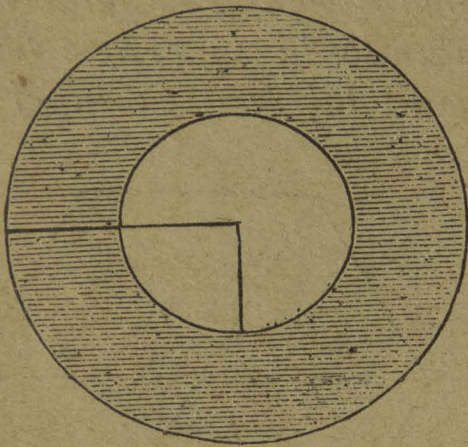


Fig. 179.

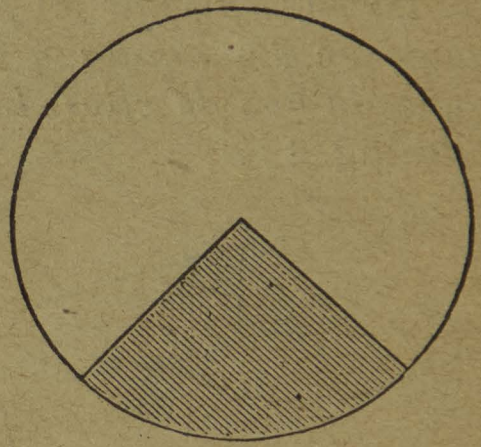


Fig. 180.

La superficie de un sector de círculo se obtiene multiplicando la longitud del arco de círculo por el radio y dividiendo el producto por dos (fig. 180).

La superficie de la elipse se obtiene multiplicando el producto de los dos semi-ejes por la cantidad 3,1416.

Supongamos que a y b representan los ejes tendremos :

$$S = \frac{a \times b}{2} \times \pi.$$

70. Algunas aplicaciones de la Planimetría.

1.^a Háganse ejercicios de las medidas de superficie, precisando las relaciones que existen entre la hectárea, el área, la centiárea, el decímetro, centímetro y milímetro cuadrados.

2.^a Ejercicios sobre elevación al cuadrado y extracción de la raíz cuadrada.

3.^a Comprobación de las propiedades de los triángulos, los cuadriláteros, los polígonos, el círculo y la elipse.

4.^a Tomar datos por medio de la escala, de bases, alturas, apotemas, radios etc., en las figuras geométricas con el objeto de medir sus superficies.

5.^a Ejercicios diversos sobre la aplicación de las fórmulas para la determinación de superficies por medio de ejemplos concretos.

6.^a Determinar el número de ladrillos, lozas, viguetas, azulejos etc., que entran en toda clase de superficies planas : pavimentos, techos, paredes etc.

71. Problemas y ejemplos concretos para resolver :

1.º Cuántas losas de 8 decímetros de largo y 5 de ancho se necesitarán para enlosar un patio cuadrado que mide 25 metros de cada lado.

2.º Averiguar á cuántos ladrillos triangulares de 20 centímetros de base por 15 de altura equivale una superficie triangular que mide 15 metros de base y 10 de altura.

3.º Cuántos vidrios de medio metro cuadrado se necesitarán para un tejado compuesto de cuatro superficies : dos trapecios y dos triángulos ; siendo cada base mayor de los primeros 12 metros, cada base menor 10 metros, la altura 6 metros ; y la base de los segundos de 8 metros, ignorándose la altura.

4.º Cuántas fanegas de sembradura de maíz de un doceavo de caballería, podrán sembrarse en un terreno de forma pentagonal, que mide por el Norte 2,500 metros ; por el Este 1,025, por el Sur 3,500 y por el Oeste 2,000. El ángulo comprendido entre Norte y Oeste es de 100 grados, entre Oeste y Sur 80 grados y entre Sur y Este 150 grados.

5.º Cuántos metros de tela de 8 decímetros de ancho se necesitarán para formar un toldo octagonal de forma regular midiendo cada lado 5 metros

6.º Calcular la superficie de una corona circular ; cuyo

círculo menor mide 12 metros de diámetro siendo la anchura de la corona de 4 metros, é investigar después á cuántos azulejos pentagonales de un decímetro por lado equivale su superficie.

Ejercicios y observaciones. — **60.** Compruébense ó demuéstrense por medios intuitivos ó gráficos según la mayor ó menor dificultad que presenten todas las propiedades de los triángulos. — **61.** Hágase lo mismo con los cuadriláteros. — **62.** Practíquense varios ejercicios con las propiedades de los polígonos. — **63.** Recordación general de las propiedades de la circunferencia y explicación de las del círculo y la elipse. — **64.** Demostración intuitiva de la superficie del paralelogramo y ejemplos diversos. — **65.** Lo mismo con el triángulo, trazos de alturas, división de paralelogramos en triángulos, dado el triángulo formar el paralelogramo, ejemplos diversos sobre la aplicación de las propiedades del triángulo rectángulo, aplicación de la fórmula del triángulo en función de sus tres lados. — **66.** El trapecio, ejemplos concretos y explicación de la fórmula. — **67.** Mídanse varios polígonos irregulares y transfórmense en otros equivalentes. — **68.** Mídanse polígonos regulares averiguando el valor del apotema. — **69.** Ejemplos diversos sobre superficies circulares y elípticas. **70.** Háganse aplicaciones concretas de todos estos ejercicios. — **71.** Resolución de estos problemas con el auxilio del profesor.

CUESTIONARIO. — ¿Cuáles son las principales propiedades de los triángulos? — ¿Respecto de sus lados? — ¿De sus ángulos? — ¿De sus alturas? — ¿De sus bisectrices? — ¿Enumere Vd. algunas propiedades especiales del isósceles y el rectángulo ó de algún otro? — ¿Qué propiedades tienen comparados entre sí respecto de su igualdad, semejanza ó equivalencia? — ¿Cuáles son las principales propiedades de los cuadriláteros? — ¿Respecto de sus lados? — ¿Respecto de sus ángulos? — ¿Qué propiedades especiales corresponden á los paralelogramos? — ¿Á los trapecios? — ¿Cuáles son las principales propiedades de los polígonos? — ¿Trazando diagonales de un vértice á los demás, ó bien, del centro á todos los vértices, cuántos triángulos se forman de un polígono? — ¿Cuál es el valor de un ángulo en los polígonos regulares ya sea del centro ó de un vértice? — ¿Cuál es la suma de todos los ángulos de un polígono en uno y otro caso? — ¿Cuáles son las principales propiedades del círculo y la elipse? — ¿Cómo se mide la superficie de los paralelogramos? — ¿Qué particularidad se nota en las superficies del rombo y el romboide? — ¿Cómo se determina

la superficie en un triángulo? — ¿Cuáles son las tres propiedades importantes que tienen los triángulos rectángulos? — ¿Cómo se mide la superficie de un triángulo conociendo sus tres lados? — ¿Cómo se obtiene la superficie de un trapecio? — ¿Cómo se mide la superficie de los polígonos irregulares? — ¿Cómo se mide la superficie en los polígonos regulares? — ¿Cómo se mide la superficie de un círculo? — ¿De una corona circular ó de un sector? — ¿De una elipse?

3^a DIVISIÓN.

ESTEREOMETRÍA.

CAPÍTULO XI.

CONSTRUCCIÓN DE VOLÚMENES.

Sumario. — 72. Construcción de los poliedros regulares. — 73. Construcción de los poliedros irregulares. — 74. Construcción de los cuerpos redondos. — 75. Construcción de los cuerpos mixtos.

72. Para construir los poliedros regulares se procede de la manera siguiente :

1.º El **tetraedro** se forma con un triángulo equilátero ABC, se dividen sus tres lados en dos partes iguales y con los puntos *a*, *b* y *c* se construye el triángulo interior *abc*, en seguida se da un doblez en las líneas *ab*, *ac* y *bc*, hasta reunir en un solo punto los vértices A, B y C y quedará construido el tetraedro (fig. 181).

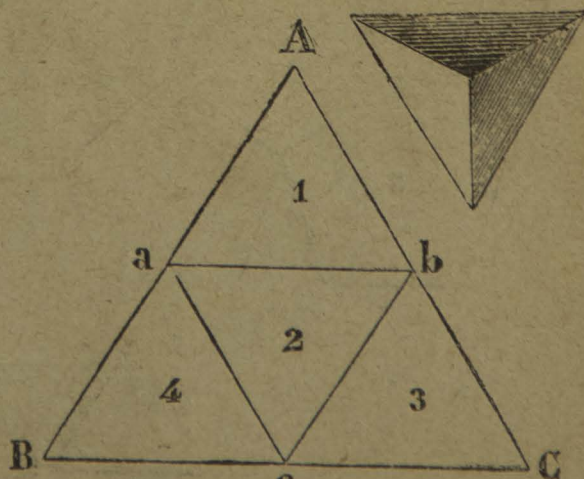


Fig. 181.

2.º El **cubo ó hexaedro** se forma con seis cuadrados colocados en cruz, cuatro de arriba á abajo, uno á la derecha y otro á la izquierda del segundo superior. Para construirlo se doblan los cuadrados 1, 5 y 6 sobre el número 2, en seguida el 3 y el 4 sobre el mismo hasta cerrar el cubo (fig. 182).

3.º El octaedro se forma con ocho triángulos equiláteros colocados según representa la figura: tres en la parte superior, dos en medio y tres en la parte inferior (fig. 183).

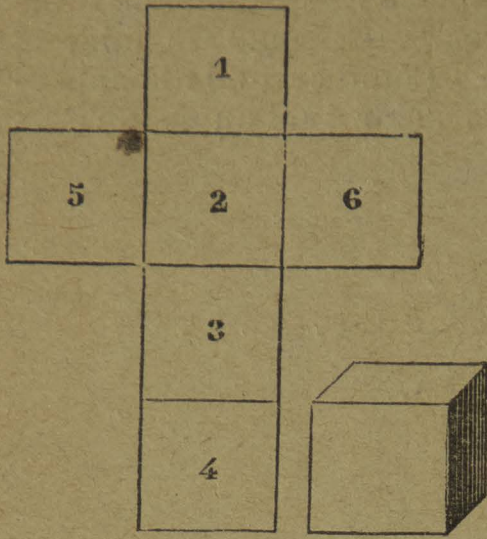


Fig. 182.

4.º El dodecaedro se forma

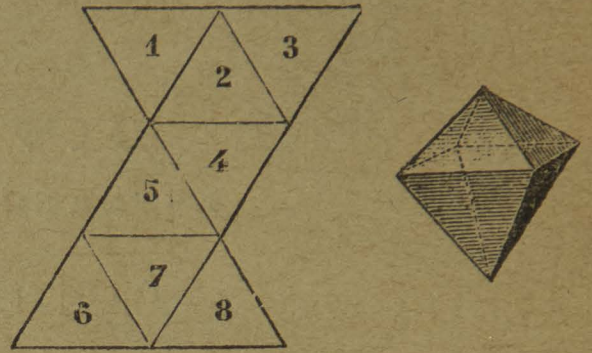


Fig. 183.

con doce pentágonos regulares colocados de manera que

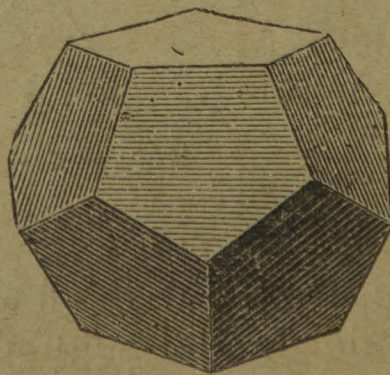
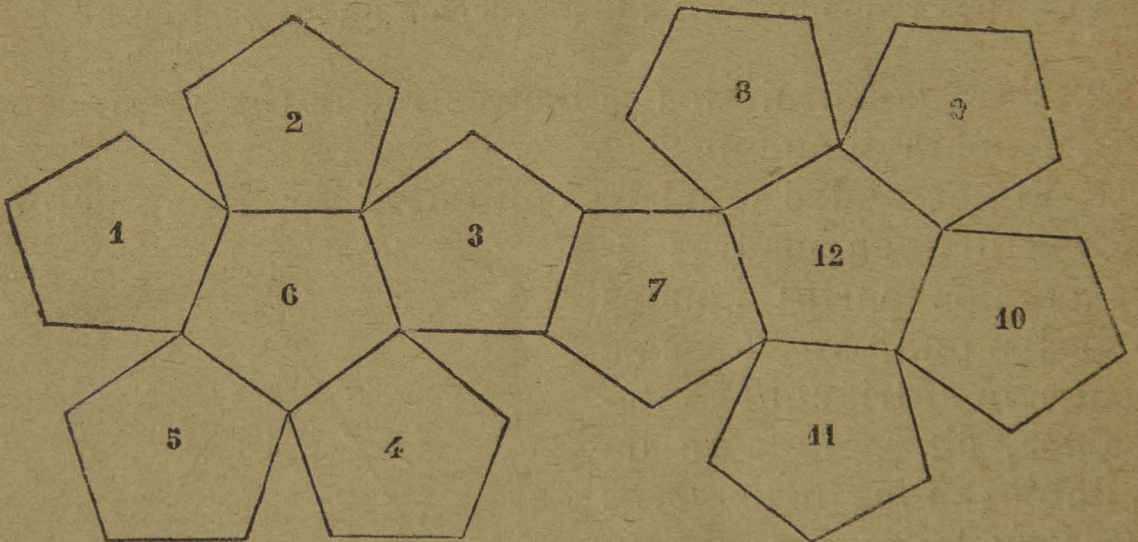


Fig. 184.

representen dos estrellas, de seis pentágonos cada una y unidas entre sí según lo indica la figura (fig. 184).

5.º El icosaedro se forma por veinte triángulos equi-
láteros colocados en tres hileras; cinco en la parte supe-

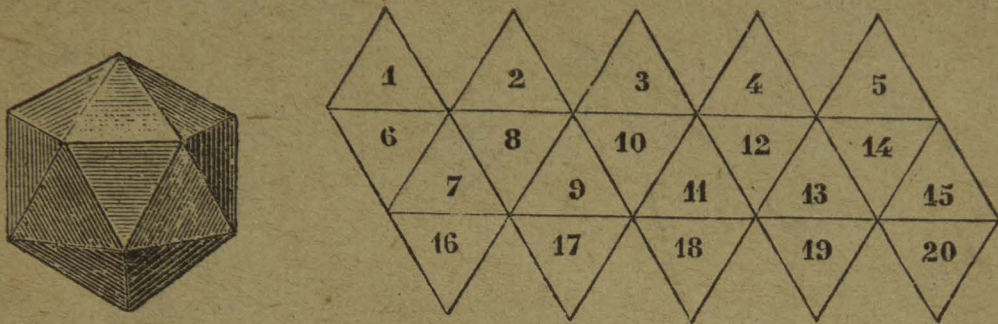


Fig. 183.

rior, diez en el centro y cinco en la inferior (fig. 185).

73. La construcción en los poliedros irregulares se
verifica de la manera siguiente:

1.ª Los prismas tienen por caras laterales paraleló-

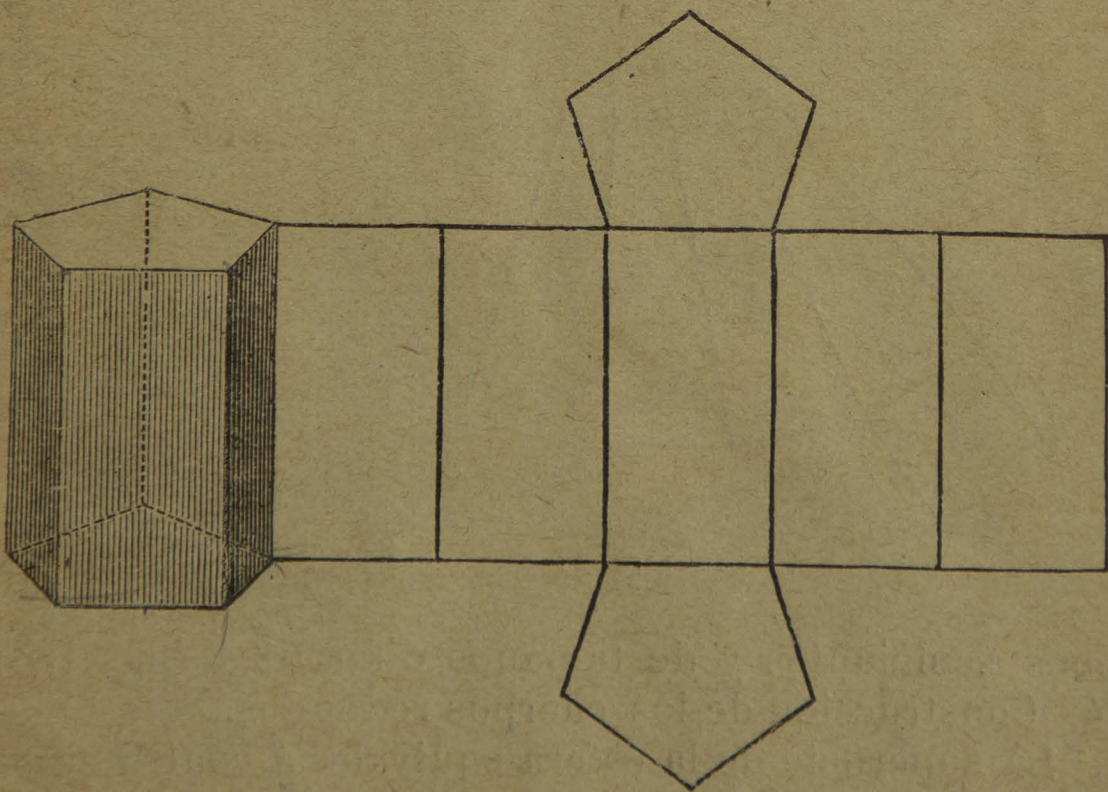


Fig. 186.

gramos y por bases triángulos, cuadriláteros ó polígono-
nos. (fig. 186).

El prisma puede engendrarse por el movimiento verti-
cal y paralelo de un polígono cualquiera sobre si
mismo.

2.º La **pirámide** tiene por caras laterales triángulos y por base un triángulo, un cuadrilátero. ó un polígono cualquiera (fig. 187).

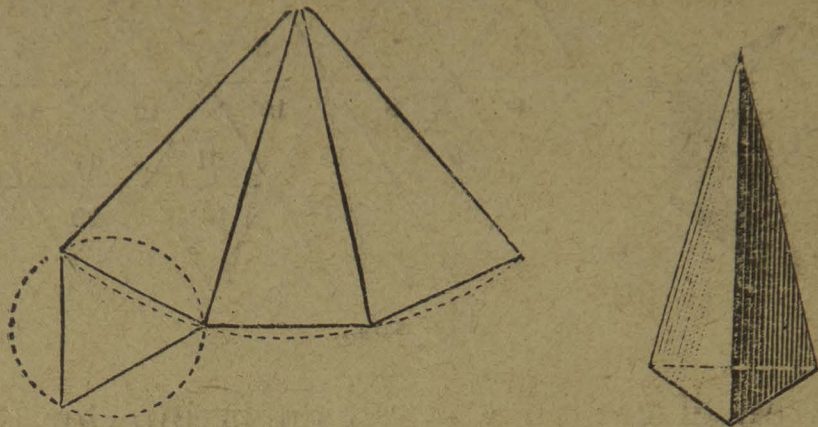


Fig. 187.

La **pirámide truncada** tiene por caras laterales trapecios, y por bases dos triángulos, cuadriláteros ó polígonos semejantes y de tamaños diferentes (fig. 188).

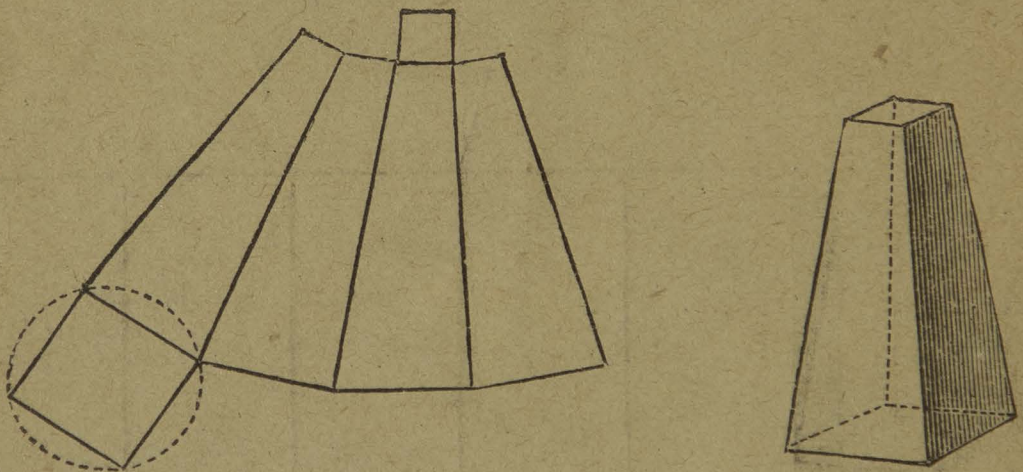


Fig. 188.

lígonos semejantes y de tamaños diferentes (fig. 188).

74. Construcción de los cuerpos redondos.

1.º La superficie de la esfera equivale á cuatro círculos máximos ó que tienen por diámetro el mismo de la esfera.

Haciendo girar un semicírculo al rededor de su diámetro, su movimiento engendra una esfera.

2.º El ovoide resulta del movimiento giratorio de un semi-óvalo al rededor de su diámetro mayor.

3.º El elipsoide puede engendrarse por el movimiento

giratorio de una semi-elipse alrededor de cualquiera de sus ejes.

75. Construcción de los cuerpos mixtos.

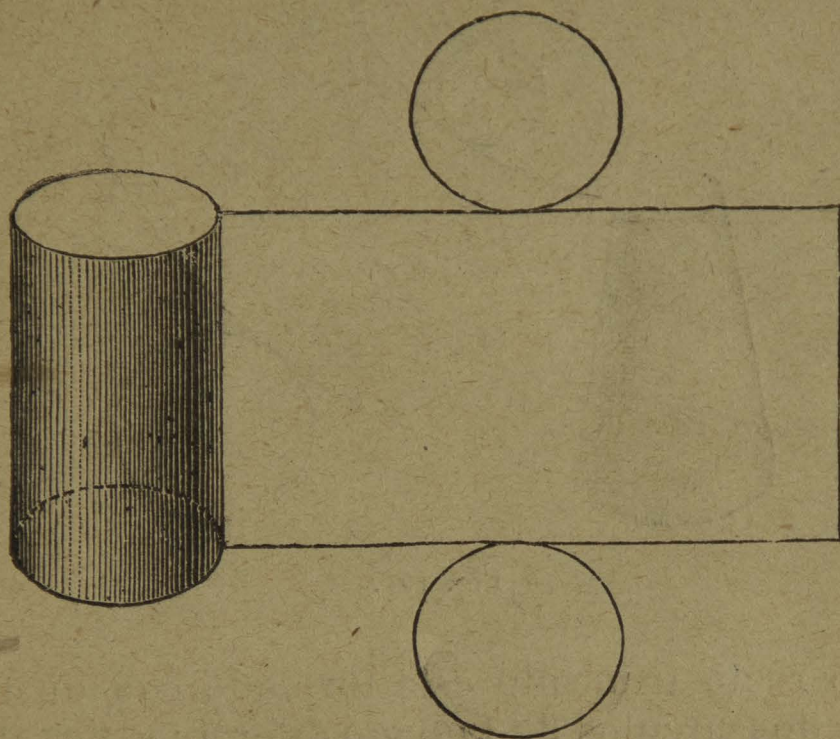


Fig. 189.

1.º El cilindro se forma con un paralelógramo rectángulo y dos círculos (fig. 189).

El cilindro recto puede engendrarse por la revolución de un paralelógramo rectángulo al rededor de uno de sus lados. Puede también engendrarse por el movimiento vertical y paralelo de una circunferencia sobre sí misma.

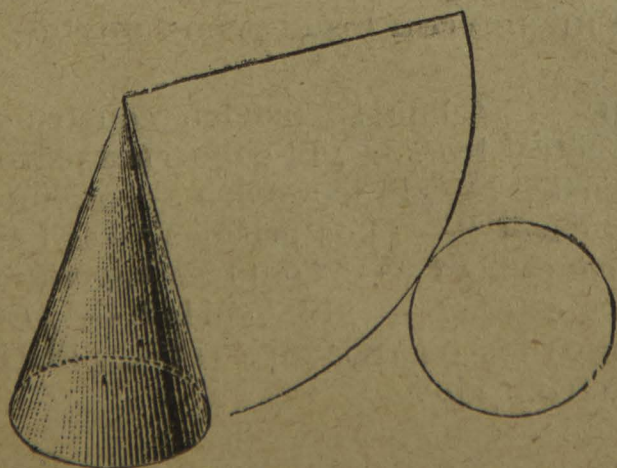


Fig. 190.

El cono está formado con un sector de círculo y un círculo (fig. 190).

El cono recto puede engendrarse por la revolución de un triángulo rectángulo al rededor de uno de sus catetos.

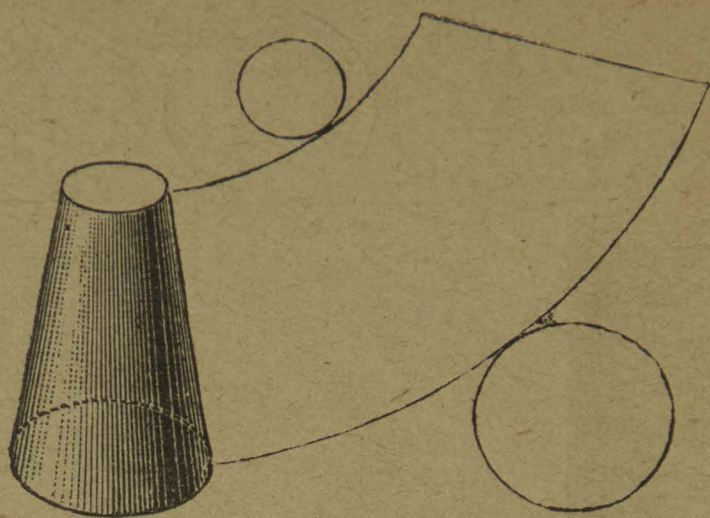


Fig. 191.

El cono recto truncado está formado con un trapecio *circular* y dos círculos de tamaño diferente (fig. 191).

Ejercicios y observaciones. — 72. Constrúyanse los poliedros regulares con cartones en los cuales se haya previamente dibujado la superficie desenvuelta según lo indican las figuras. — 73. La misma recomendación respecto de los prismas y pirámides. — 74. Respecto de los cuerpos redondos procúrese engendrarlos por medio del movimiento giratorio. — 75. Hágase lo mismo con los cuerpos mixtos.

CUESTIONARIO. — ¿Cómo se pueden construir los poliedros regulares? — ¿El tetraedro? — ¿El cubo ó hexaedro? — ¿El octaedro? — ¿El dodecaedro? — ¿El icosaedro? — ¿Cómo se construyen los poliedros irregulares? — ¿Los prismas? — ¿Las pirámides? — ¿Las pirámides truncadas? — ¿Cómo se engendran los cuerpos redondos? — ¿La esfera? — ¿El ovoide? — ¿El elipsoide? — ¿Cómo se construyen los cuerpos mixtos? — ¿El cilindro? — ¿El cono? — ¿El cono truncado?

CAPÍTULO XII.

PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LOS VOLÚMENES.

Sumario. — 76. Propiedades generales de los volúmenes. — 77. Superficie y volumen del prisma. — 78. Superficie y volumen del cilindro. — 79. Superficie y volumen de la pirámide. — 80. Superficie y volumen del cono. — 81. Superficie y volumen de la pirámide truncada. — 82. Superficie y volumen del cono truncado. — 83. Superficie y volumen de la esfera. — 84. Superficie y volumen de los poliedros regulares. — 85. Volumen de los cuerpos de forma irregular. — 86. Algunas aplicaciones de la Estereometría. — 87. Problemas y ejemplos concretos.

76. Algunas propiedades generales de los volúmenes:

- 1.^a Las superficies consideradas aisladamente ó combinadas entre sí, tienen las mismas posiciones y combinaciones de las líneas.
- 2.^a Un ángulo diedro tiene siempre por intersección una línea ó arista.
- 3.^a Todo ángulo diedro tiene por medida la abertura de un ángulo lineal formado por dos perpendiculares que partan de la arista común en un mismo punto.
- 4.^a Un ángulo poliedro se compone de tantos ángulos diedros como caras tiene.
- 5.^a Un ángulo triedro regular tiene por intersección un punto y sólo puede formarse con tres triángulos equiláteros, tres cuadrados, tres pentágonos regulares; pero nunca con polígonos regulares de mayor número de lados.
- 6.^a Un ángulo poliedro regular tiene también por intersección un punto y sólo puede formarse por cuatro ó cinco triángulos equiláteros; pero nunca por mayor número de triángulos, ni mucho menos por polígonos regulares de mayor número de lados.
- 7.^a La suma de los ángulos planos que concurren en el vértice de un ángulo triedro ó poliedro es siempre menor que cuatro ángulos rectos.
- 8.^a Las únicas combinaciones de polígonos regulares que suman 360 grados son de seis triángulos, de cuatro cuadrados y de tres hexágonos.
- 9.^a El número de vértices ó ángulos poliedros de un poliedro regular se obtiene multiplicando el número de ángulos de cada cara por el número de caras que tiene el cuerpo y se

divide el producto por el número de caras que concurren á cada vértice. 10.^a El número total de aristas de un poliedro regular se obtiene multiplicando el número de lados de una cara por el número de caras de que está formado y el producto se divide por dos, etc.

77. Superficie y volumen del prisma.

La superficie lateral de un prisma recto se mide multiplicando el perímetro de la base por la altura.

$$SL = P \times A.$$

Porque la superficie lateral de todo prisma se desenvuelve en un paralelógramo rectángulo, cuya base es el perímetro y su altura la misma del prisma.

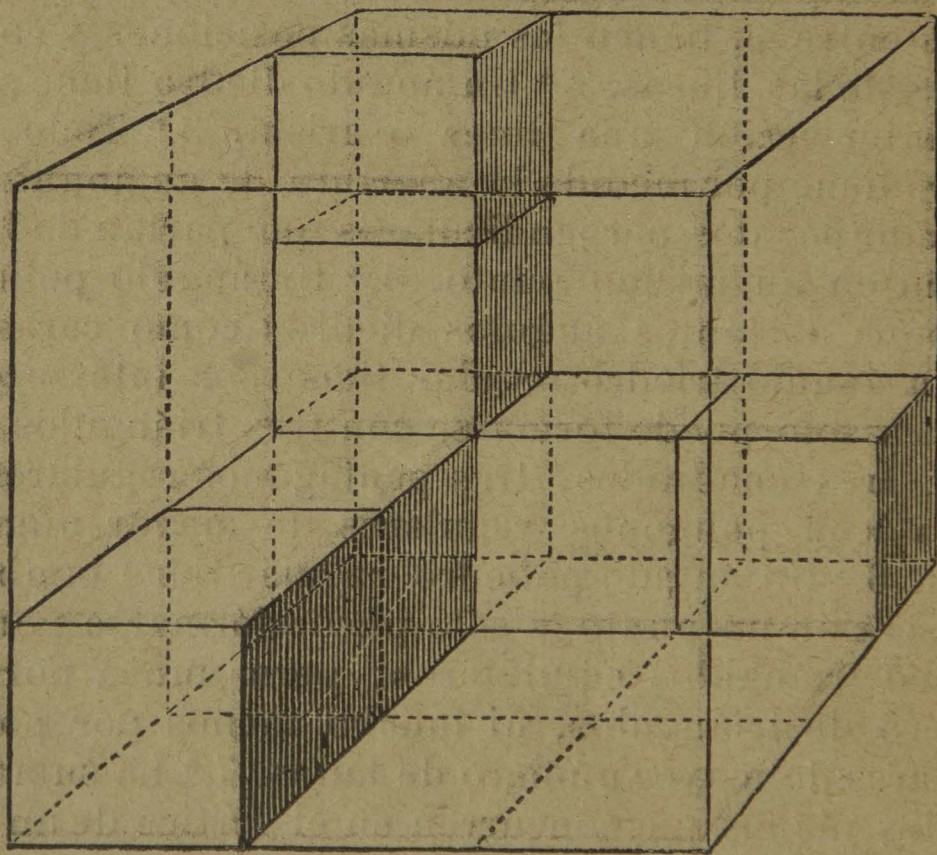


Fig. 192.

La superficie total de un prisma recto es igual á la superficie lateral más las dos bases

$$ST = P \times A + 2B.$$

El volumen de un prisma cualquiera es igual al pro-

ducto de la superficie de la base por la longitud de la altura.

$$V = B \times A.$$

En efecto, si construimos una caja cúbica de cartón cuyas dimensiones sean iguales á tres decímetros por ejemplo, notaremos que en la superficie de la base caben exactamente nueve decímetros cúbicos y esta capa repetida tres veces llenará toda la capacidad del cubo ó sean $9 \times 3 = 27$ decímetros cúbicos que es una comprobación de la fórmula anterior (fig. 192).

Igual razonamiento puede hacerse respecto de cualquier paralelepípedo ó cualquier prisma cuyas bases tengan mayor número de lados.

78. Superficie y volumen del cilindro.

La superficie lateral de un cilindro recto se obtiene multiplicando la circunferencia de la base por la altura.

En efecto, el cilindro puede considerarse como un prisma de infinitas caras, siendo sus bases dos círculos paralelos y sus perímetros circunferencias; por consiguiente su superficie lateral es también la de un paralelogramo rectángulo cuya base es la circunferencia y la altura la misma del cilindro.

La fórmula quedará de la manera siguiente:

$$SL = C \times A.$$

La superficie total de un cilindro recto es igual á la lateral más las dos bases

$$ST = C \times A + 2 \times \left(\frac{C \times R}{2} \right).$$

Supuesto que cada base es un círculo.

El volumen de un cilindro recto es igual al producto de la superficie de la base por la altura.

Pero como la base es un círculo, la fórmula quedará así.

$$V = \left(\frac{C \times R}{2} \right) \times A.$$

79. Superficie y volumen de la pirámide.

La superficie lateral de una pirámide recta se obtiene multiplicando el perímetro de la base por el apotema, ó sea la altura que corresponde á uno de los triángulos laterales y dividiendo el producto por dos.

$$SL = \frac{P \times Ap}{2}$$

Porque la superficie lateral de toda pirámide recta es la suma de todos los triángulos en que se descompone, con los cuales resulta un solo triángulo que tiene por base el perímetro y por altura el apotema.

La superficie total de una pirámide recta es igual á la superficie lateral más la de la base.

$$ST = \frac{P \times Ap}{2} + B.$$

El volumen de una pirámide es igual al producto de la superficie de la base por la altura dividido por tres

$$V = \frac{B \times A}{3}$$

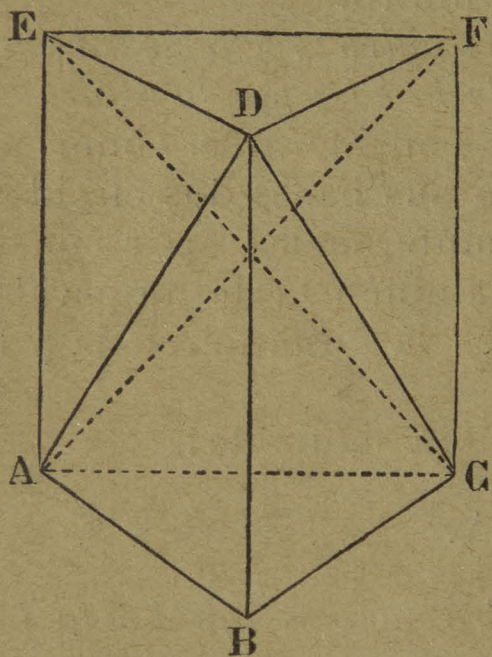


Fig. 193.

Porque toda pirámide puede considerarse como la tercera parte de un prisma de la misma base y altura, ó bien un prisma puede descomponerse en tres pirámides equivalentes (fig. 193).

80. Superficie y volumen del cono.

La superficie lateral de un cono recto se obtiene multiplicando el perímetro de la base por el apotema ó generatriz, ó sea la recta trazada de la cúspide á cualquier punto de la circunferencia.

Es exactamente el mismo procedimiento que para la pirámide, puesto que el cono puede considerarse como

una pirámide de infinitas caras, cuya base es un círculo y su perímetro una circunferencia. La fórmula quedará modificada de este modo:

$$SL = \frac{C \times Ap}{2}.$$

La superficie total de un cono recto es igual á la lateral más la de la base.

$$ST = \left(\frac{C \times Ap}{2} \right) + \left(\frac{C \times R}{2} \right).$$

El volumen de un cono es igual al producto de la base por la altura y dividido por tres.

$$V = \frac{\frac{C \times R}{2} \times A}{3}.$$

Los fundamentos de esta fórmula son los mismos que se dieron respecto del volumen de la pirámide.

81. Superficie y volumen de la pirámide truncada.

La superficie lateral de una pirámide truncada recta es igual á la suma de los perímetros de las bases por la altura de una cara lateral y dividido el producto por dos

$$SL = \frac{(P + p) \times Ap}{2}.$$

La superficie lateral de una pirámide truncada se descompone en varios trapecios y su conjunto puede formar un solo trapecio que tiene por bases los perímetros y por altura la que corresponde á una cara lateral.

La superficie total de una pirámide truncada recta es igual á la lateral más las dos bases.

$$ST = \frac{(P + p) \times Ap}{2} + B + b.$$

El volumen de una pirámide truncada es igual á la suma de los volúmenes de las tres pirámides en que se descompone.

$$V = \left(\frac{B \times A}{3} \right) + \left(\frac{b \times A}{3} \right) + \left(\frac{(\sqrt{B \times b}) \times A}{3} \right).$$

En efecto, toda pirámide truncada equivale á tres pi-

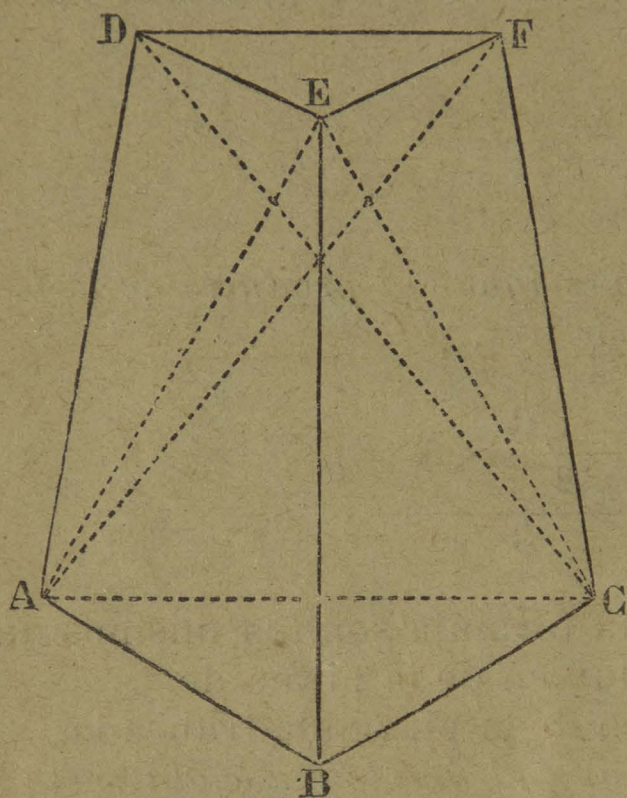


Fig. 194.

rámides de la misma altura y de bases diferentes: la primera EABC tiene la base mayor, la segunda EADF tiene una base menor y la tercera EAFC tiene una base que es media proporcional entre las dos anteriores, ó sea la raíz cuadrada del producto de la base mayor por la menor (fig. 194).

82. Superficie y volumen del cono truncado.

La superficie lateral de un cono truncado recto se obtiene de la

misma manera que la de la pirámide truncada teniendo en cuenta que las bases son círculos y los perímetros circunferencias.

$$SL = \frac{(C + c) \times Ap}{2}.$$

La razón de esta fórmula es evidente, supuesto que la superficie lateral de un cono truncado es exactamente la forma de un trapecio circular.

La superficie total de un cono truncado es igual á la lateral más las dos bases.

$$ST = \left(\frac{(C + c) \times Ap}{2} \right) + \left(\frac{C \times R}{2} \right) + \left(\frac{c \times r}{2} \right).$$

El volumen de un cono truncado se resuelve por la misma fórmula de la pirámide truncada, teniendo en cuenta la forma circular de las bases.

$$V = \left(\frac{\frac{C \times R}{2} \times A}{3} \right) + \left(\frac{\frac{c \times r}{2} \times A}{3} \right) + \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{C \times R}{2} \right) \times \left(\frac{c \times r}{2} \right)} \times A}{3} \right).$$

83. Superficie y volumen de la esfera.

La superficie de la esfera es igual al cuádruplo de la superficie de un círculo máximo del mismo diámetro que ella.

$$S = 4 \times \left(\frac{C \times R}{2} \right)$$

Porque la superficie de toda esfera equivale exactamente á cuatro círculos máximos que es lo que indica la fórmula anterior.

El volumen de la esfera es igual á la tercera parte del producto de la superficie total por el radio.

$$V = \frac{4 \times \left(\frac{C \times R}{2} \right) \times R}{3}.$$

Porque toda esfera puede considerarse como un cono, cuya base es la superficie total de la esfera y su altura el radio de la misma.

84. Superficie y volumen de los poliedros regulares.

La superficie total de todo poliedro regular es igual al producto de la superficie de una cara por el número de caras que tenga el poliedro.

$$ST = B \times N.$$

Llamemos B la superficie de la cara y N el número de caras y se tendrá la fórmula anterior.

El volumen de un poliedro regular se obtiene multiplicando la superficie total por el radio inscrito y dividiendo el producto por tres.

$$V = \frac{(B \times N) \times A}{3}.$$

En efecto, todo poliedro regular puede considerarse como una pirámide cuya base es su superficie total ó sea la suma de todas las superficies de sus caras, y su altura el radio inscrito ó sea una perpendicular del centro del poliedro al centro, de una cara, cuya recta la designamos con la letra A en la fórmula precedente.

85. Volumen de los cuerpos de forma irregular.

Hay dos procedimientos para determinar el volumen

de los cuerpos de forma irregular y son los siguientes :

1° En un vaso cilíndrico de vidrio y graduado con determinadas dimensiones, se vierte un poco de agua hasta GH, por ejemplo; en seguida se sumerge en ella el cuerpo de forma irregular, el nivel del agua subirá naturalmente, supongamos hasta JK, claro es que el volumen de agua GHJK,

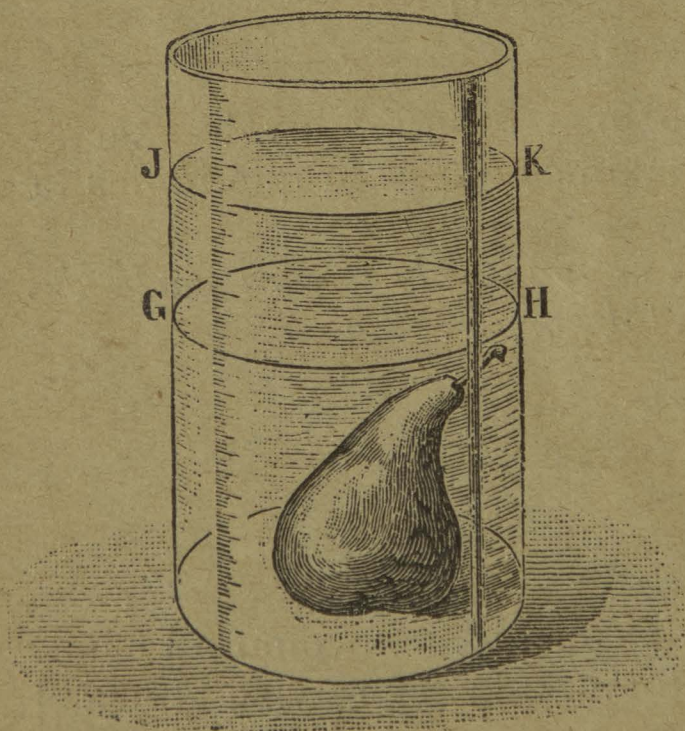


Fig. 195.

será el volumen del cuerpo que deseábamos medir (fig. 195).

2° El segundo procedimiento para medir el volumen de los cuerpos de forma irregular se obtiene por medio, de su densidad ó peso específico.

Se llama **densidad** de un cuerpo un número que expresa cuántas veces este cuerpo es más ó menos pesado que el agua en igualdad de volumen. Así por ejemplo, un centímetro cúbico de fierro pesa 7^g,8^{dg}. Y un centímetro cúbico de agua pesa solo un gramo, de donde resulta que el mismo volumen tiene peso diferente, y por consiguiente el peso específico ó densidad del fierro será 7,8.

Ahora bien, como la densidad sólo viene á representar el peso de un cuerpo en la unidad de volumen de agua que se haya elegido, claro es que repitiendo dicha cantidad tantas veces como unidades tenga el volumen, el producto nos dará el peso total de todo el cuerpo. Así, tendremos que el peso de un cuerpo es el producto de su volumen por su densidad ó

$$P = V \times D.$$

Por ejemplo, sabemos que 1 centímetro cúbico de fierro pesa 7 gramos 8 decigramos, un trozo de 4 centímetros cúbicos que es el volumen total pesará 4 veces dicha cantidad ó sea el volumen por la densidad en esta forma.

$$P = 4 \times 7,8 = 31^{\text{gr}}, 2.$$

De la fórmula anterior se deduce que :

El volumen de un cuerpo de forma irregular se obtiene dividiendo el peso de dicho cuerpo por su densidad.

$$V = \frac{P}{D}$$

Ejemplo : un trozo de fierro pesa 31 gramos 2 decigramos, ¿cuál será su volumen ?

Sabiendo que la densidad del fierro es 7,8 tendremos :

$$V = \frac{31,2}{7,8} = 4^{\text{cm}}$$

Para obtener el volumen en centímetros cúbicos, es

preciso que el peso se dé en gramos, porque 1 gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrado.

Densidades de algunos cuerpos sólidos y líquidos tomado del curso de Física de Langlebert.

CUERPOS SÓLIDOS.

Platino.....	22,069	Zinc.....	6,861
Oro.....	19,258	Diamante.....	3,516
Plomo.....	11,352	Mármol blanco.....	2,837
Plata.....	10,474	Cristal de roca.....	2,653
Cobre.....	8,788	Azufre.....	2,033
Hierro.....	7,788	Madera de pino.....	0,657
Estaño.....	7,291	Corchó.....	0,240

CUERPOS LÍQUIDOS.

Mercurio.....	13,596	Aceite de oliva.....	0,915
Ácido sulfúrico.....	1,841	Éter acético.....	0,890
Cloroformo.....	1,480	Esencia de limón.....	0,880
Ácido clorhídrico.....	1,240	Esencia de trementina.....	0,870
Ácido azótico.....	1,217	Aceite de nafta.....	0,887
Agua de mar.....	1,026	Alcohol absoluto.....	0,792
Agua á 4°.....	1,000	Éter sulfúrico.....	0,715

86. Algunas aplicaciones de la Estereometría.

1ª Ejercicios con las medidas de volumen, partiendo del metro cúbico al decímetro, al centímetro, al milímetro y al contrario.

2ª Ejercicios con las medidas de capacidad mayores y menores que el litro.

3ª Ejercicios con las medidas de peso mayores y menores que el gramo.

4ª Ejercicios de comparación de las medidas de volumen con las de capacidad y las de peso.

5ª Elevación al cubo y extracción de la raíz cúbica.

6ª Comprobación de las principales propiedades de los volúmenes.

7ª Ejemplos concretos sobre las fórmulas en la determinación de superficies laterales, totales y volúmenes de los cuerpos.

8ª Problemas para medir la capacidad de estanques, fuentes, pozos, bodegas, habitaciones, paredes, etc., etc.

9ª Problemas para medir el volumen de los cuerpos de forma irregular haciendo uso de la tabla de densidades conocida y procurar investigar otras nuevas en virtud del principio de Arquímedes.

87. Problemas y ejemplos concretos para resolver :

1º ¿Cuántos rollos de papel tapiz de diez varas de largo por 20 pulgadas de ancho se necesitarán para empapelar un salón de 12 metros de largo, 6 de ancho y 8 de alto teniendo 9 puertas de 3 metros de altura, 2 de ancho con un semicírculo de 50 centímetros de radio y colocándose el papel á una vara de altura sobre el suelo?

2º Teniendo una caja cúbica 4 metros por lado ¿cuántas tablas de 8 decímetros de largo y 2 de ancho se necesitarán para su construcción?

3º ¿Cuál será el volumen de una pared circular que mide 3 metros de altura y 1 metro de espesor, en el concepto que el terreno que se pretende cercar tiene 50 metros de radio?

4º ¿Cuántas hojas de lata de 5 decímetros de largo, por 4 de ancho se necesitarán para hacer un bote cilíndrico de 1 metro de altura y 40 centímetros de diámetro?

5º Un kiosko cuya base es un decágono regular, tiene un techo cónico de 5 metros de la circunferencia á la cúspide y siete metros de diámetro, ¿á cuántas hojas de zinc de 2 varas de largo y 3 cuartas de ancho equivale su superficie?

6º ¿Á cuántos azulejos de un decímetro cuadrado equivaldrá la superficie interior y lateral de una paila de mampostería, cuya forma es un cono truncado, midiendo su radio mayor 3 metros y 1 metro 25 centímetros el menor?

7º ¿Cuántas cargas de maíz podrá contener una bodega que mide 15 metros de largo, 8 de ancho y 7 de altura? El cuartillo de maíz mide 150 pulgadas cúbicas.

8º Una fuente tiene 5 metros de radio y 2 de profundidad ¿cuántos barriles de agua cabrán en ella y cuánto importarán á centavo el barril? Un cuartillo para líquidos mide 36 pulgadas cúbicas.

9° Cuántas toneladas pesará un trozo de jabón contenido en una gran paila que tiene la forma de una pirámide cuadrangular truncada de 5 metros de altura, midiendo el lado de la base mayor 4 metros y 2 el lado de la base menor, en el concepto de que un cuartillo de jabón fundido pesa 14 onzas.

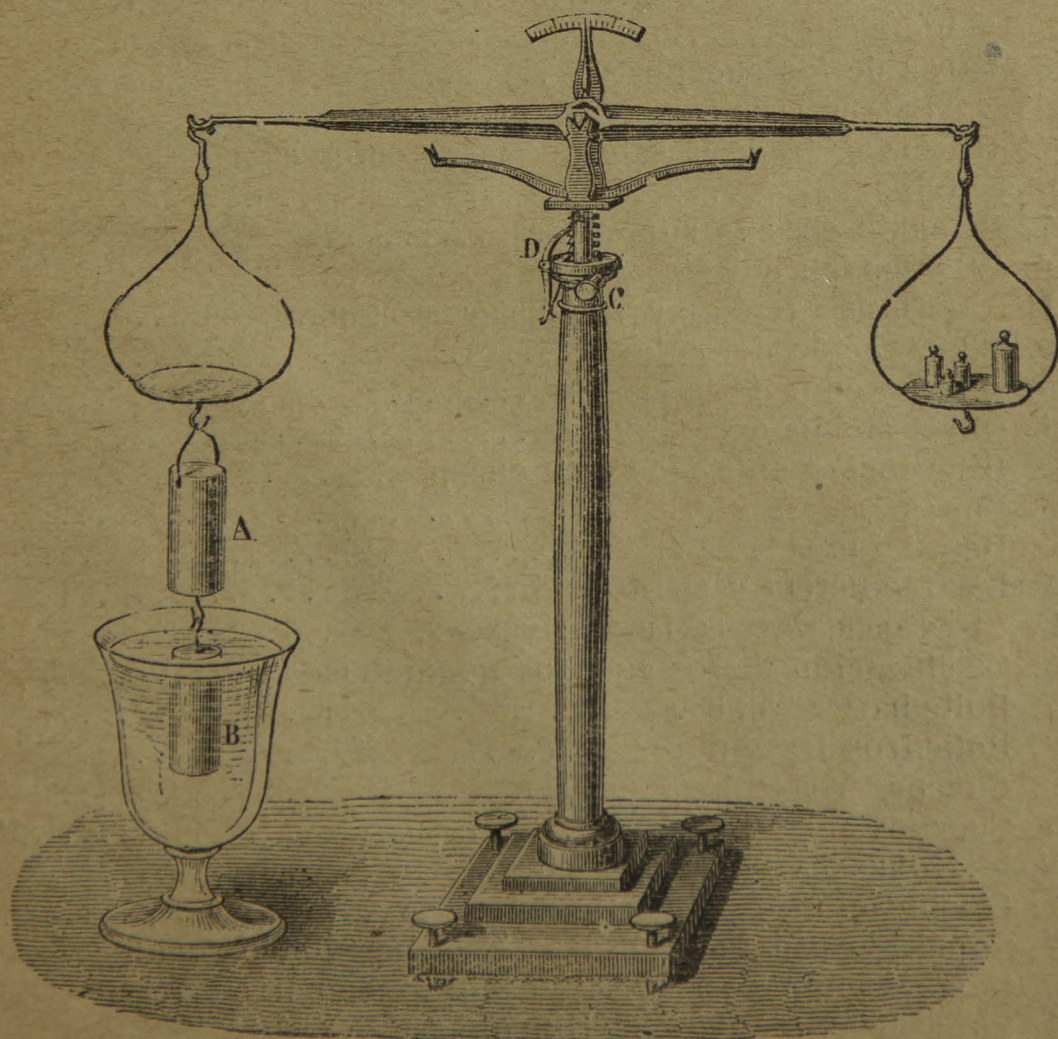
10° Un botellón esférico de 1 metro de diámetro está lleno de vino ¿cuántas botellas de cuartillo y medio podrá contener?

11° Averiguar la superficie de la Tierra, su volumen y su peso, suponiendo que fuera una esfera hueca llena de agua á la temperatura de cuatro grados del termómetro centígrado (1).

Ejercicios y observaciones. — 76. Comprobación de las propiedades de los volúmenes enunciados en este número. — 77. Hágase intuitivamente la demostración de las fórmulas relativas al prisma rectangular. — 78. Considerado el cilindro como un prisma de infinitas caras, su estudio debe seguir después del poliedro anterior. — 79. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la pirámide. — 80. El cono considerado como una pirámide de infinitas caras. — 81. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la pirámide truncada. — 82. Hágase lo mismo con el cono truncado. — 83. Explicación y aplicaciones de las fórmulas de la esfera. — 84. Los poliedros regulares pueden considerarse como un conjunto de pirámides para determinar su volumen. — 85. Explicación del principio de Arquímedes, métodos que se emplean para buscar la densidad de los cuerpos. — 86. Insistir mucho sobre todas las aplicaciones de la Estereometría con diversos ejercicios y ejemplos. — 87. Procure el profesor que todos los problemas al resolverlos se razonen suficientemente.

(1). Advertimos aquí una vez por todas, que intencionalmente no hemos querido aceptar en todas las fórmulas contenidas en esta obra, ninguna regla algebraica, porque creemos que los alumnos pueden confundirse, y deseando evitar confusiones, las hemos transformado sin alterar el fondo en otras equivalentes; compensando la falta de rigor científico, con la mayor facilidad en provecho de los niños de tierna edad, para quienes escribimos.

CUESTIONARIO. — ¿Cuáles son las propiedades generales de los volúmenes? — ¿Cuáles son las propiedades especiales de los ángulos diedros? — ¿Los ángulos triedros? — ¿Los ángulos poliedros? — ¿Qué clase de superficies regulares pueden formar un ángulo triedro? — ¿Qué clase de superficies regulares y cuántas pueden formar un ángulo poliedro? — ¿Cuál es el límite ó el valor que deben tener todos los ángulos planos que concurren en el vértice de un ángulo triedro ó poliedro? — ¿Qué combinaciones de superficies regulares iguales que concurren en un punto pueden sumar 360 grados exactos? — ¿Cómo se averigua el número total de caras, aristas ó puntos que tiene un poliedro regular? — ¿Cómo se obtiene la superficie lateral y total de un prisma? — ¿Su volumen? — ¿La superficie lateral y total del cilindro y su volumen? — ¿Superficies y volúmenes de la pirámide? — ¿Del cono? — ¿De la pirámide truncada? — ¿Del cono truncado? — ¿De la esfera? — ¿Superficie y volumen de los poliedros regulares? — ¿Qué procedimientos se conocen para obtener el volumen de los cuerpos de forma irregular? — ¿En qué consiste el procedimiento del vaso graduado? — ¿El procedimiento del peso específico ó sea de la densidad de los cuerpos?



ÍNDICE.

PRÓLOGO.....	5
--------------	---

PRIMERA PARTE.

Nomenclatura geométrica.

CAP. I. — NOCIONES PRELIMINARES.....	9
1. Cuerpo.....	9
2. Espacio.....	10
3. Volumen.....	10
4. Cuerpos sólidos : de forma irregular y de forma geométrica.....	10
5. Caras de los cuerpos.....	10
CAP. II. — PRINCIPALES ELEMENTOS GEOMÉTRICOS.....	12
6. Observación de la sala de clases como cuerpo geométrico.....	12
7. El salón en sus superficies.....	12
8. El salón en sus líneas.....	13
CAP. III. — OBSERVACIÓN DE TRES CUERPOS GEOMÉTRICOS.....	15
9. Observación del cubo.....	15
10. Observación de la esfera.....	15
11. Observación del cilindro.....	16
12. Diferencias entre los tres cuerpos.....	16
13. Sus semejanzas.....	16
14. Definiciones.....	16
15. La Geometría y su división.....	17
CAP. IV. — NOMENCLATURA DE VOLÚMENES.....	18
16. Clasificación de los cuerpos geométricos.....	18
17. Poliedros regulares.....	18
18. Poliedros irregulares.....	19
19. Cuerpos redondos.....	21
20. Cuerpos mixtos.....	22
CAP. V. — NOMENCLATURA DE SUPERFICIES.....	25
21. Clasificación de superficies.....	25
22. Superficies planas rectilíneas de perímetro regular...	25
23. Superficies planas rectilíneas de perímetro irregular.	26
24. Superficies planas curvilíneas.....	27
25. Superficies planas mixtilíneas.....	28

26. Superficies curvas.....	29
27. Superficies mixtas.....	29
CAP. VI. — NOMENCLATURA DE LÍNEAS.....	31
28. Clasificación de líneas.....	31
29. Líneas rectas aisladas.....	31
30. Líneas rectas combinadas.....	32
31. Ángulos.....	33
32. Triángulos.....	34
33. Cuadriláteros.....	35
34. Polígonos.....	36
35. Líneas curvas abiertas.....	37
36. Líneas curvas cerradas.....	38
37. Líneas mixtas.....	40

SEGUNDA PARTE.

Longimetría. — Planimetría. — Estereometría.

1ª DIVISIÓN. — Longimetría.

CAP. VII. — CONSTRUCCIÓN DE LÍNEAS.....	43
38. Trazo de líneas rectas en general.....	43
39. Líneas verticales y horizontales.....	44
40. Construcción de perpendiculares.....	46
41. Líneas paralelas.....	48
42. Ángulos.....	49
43. La circunferencia.....	50
44. La espiral.....	52
CAP. VIII. — PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE LÍNEAS.....	53
45. Principales propiedades de la línea recta.....	54
46. Medición de líneas rectas.....	54
47. Propiedades principales de los ángulos.....	54
48. Medición de los ángulos.....	55
49. Propiedades principales de la circunferencia y líneas que se relacionan con ella.....	58
50. Modo de medir la longitud de la circunferencia.....	59
51. Algunas aplicaciones de la Longimetría.....	59
52. Problemas y ejemplos concretos.....	60

2ª DIVISIÓN. — Planimetría.

CAP. IX. — CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES.....	62
53. Construcción de triángulos.....	62
54. Construcción de cuadriláteros.....	66
55. Trazo de polígonos irregulares : iguales, equivalentes y semejantes.....	68
56. Construcción de polígonos regulares.....	69
57. Construcción de polígonos regulares inscritos.....	71
58. Construcción de polígonos estrellados.....	73

59. Trazo de superficies de perímetro redondo; óvalo, huevo y elipse.....	7
CAP. X. — PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE SUPERFICIES.....	7
60. Principales propiedades de los triángulos.....	7
61. Propiedades de los cuadriláteros.....	7
62. Propiedades de los polígonos.....	7
63. Propiedades del círculo y la elipse.....	7
64. Superficie de los paralelógramos.....	7
65. Superficie del triángulo.....	8
66. Superficie del trapecio.....	8
67. Superficie de los polígonos irregulares.....	8
68. Superficie de los polígonos regulares.....	8
69. Superficie del círculo y la elipse.....	8
70. Principales aplicaciones de la Planimetría.....	8
71. Problemas y ejemplos concretos.....	8

3ª DIVISIÓN. --- *Estereometría.*

CAP. XI. — CONSTRUCCIÓN DE VOLÚMENES.....	8
72. Construcción de los poliedros regulares.....	8
73. Construcción de los poliedros irregulares.....	8
74. Construcción de los cuerpos redondos.....	8
75. Construcción de los cuerpos mixtos.....	8
CAP. XII. — PROPIEDADES Y MEDICIÓN DE VOLÚMENES.....	8
76. Propiedades generales de los volúmenes.....	8
77. Superficie y volumen del prisma.....	8
78. Superficie y volumen del cilindro.....	8
79. Superficie y volumen de la pirámide.....	8
80. Superficie y volumen del cono.....	8
81. Superficie y volumen de la pirámide truncada.....	8
82. Superficie y volumen del cono truncado.....	8
83. Superficie y volumen de la esfera.....	8
84. Superficie y volumen de los poliedros regulares.....	8
85. Volumen de los cuerpos de forma irregular.....	1
86. Algunas aplicaciones de la Estereometría.....	1
87. Problemas y ejemplos concretos.....	1

LB1589 M6 H3.5



125778

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
AREA DE SERVICIOS DE BIBLIOTECA
Y APOYO ACADÉMICO

FECHA DE DEVOLUCION

*El lector se obliga a devolver este material antes del
vencimiento del préstamo señalado por el último sello*

