UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

...ECHA DE ...OLUCION	FIRMA Y No. DE CUENTA

11905
...4/H4.5
...io S.
...o.

ENSEÑANZA PRIMARIA ELEMENTAL.

EL NIÑO MATEMÁTICO.

SISTEMA COMPLETO DE CALCULO NUMERICO

escrito
en forma intuitiva para los niños mexicanos,

POR

JULIO S. HERNANDEZ,

AUTOR DE VARIAS OBRAS
CIENTÍFICAS Y PEDAGÓGICAS, PREMIADAS CON MEDALLAS DE ORO Y PLATA EN LAS
EXPOSICIONES UNIVERSALES DE PARÍS Y SAN LOUIS MISSOURI.

ARITMETICA ELEMENTAL.

MEXICO

LIBRERIA DE LA Vda. DE CH. BOURET.

CALLE DEL CINCO DE MAYO 14. — MEXICO.
—AVENIDA COLÓN NÚMERO 4 — GUADALAJARA.

1907.

Para obtener el mejor éxito posible de esta obra, consúltese la "**Metodología de la Aritmética**" del mismo Autor.

Al Sr. Prof. Don Adrian Castillo. Sincero testimonio de respeto
el Autor
[illegible]

Mayo 18/909

Depósito general de las Obras del Autor, en donde se harán los pedidos:

CUARTA CALLE DE IGNACIO HERNÁNDEZ NUM. 12.

México, D. F. Apartado postal 42 bis.

Imprenta de A. Carranza y Cia., Callejón de 57 No. 7.

A LOS MAESTROS.

El Autor de este libro ha querido, antes de lanzarlo á la publicidad, someter á una rigurosa crítica sus opiniones científicas y metodológicas; no solo discutiéndolas ampliamente en la prensa nacional y extranjera, sino sujetándolas además á la polémica más exijente entre personas idóneas de las muchas que forman las Corporaciones científicas y pedagógicas del país.

La Academia de Profesores de México, cerca de dos años consecutivos ha discutido algunas tesis fundamentales del Autor sobre las matemáticas y su metodología, cuyos ideales, por su importancia, han merecido los altos honores de la refutación.

En la discusión se ha venido aquilatando el mérito intrínseco de esos estudios y se han depurado notablemente de toda clase de prejuicios, de los errores de doctrina que pudieran contener, y hasta han venido á servir para despertar un gran interés por los estudios de la ciencia numérica, cuya benéfica influencia no solo se manifiesta en la satisfacción de las necesidades diarias de la vida, sino además como gran factor educacional en las más elevadas facultades de nuestro intelecto.

El Autor, renunciando á todo sentimiento pasional de amor propio mal entendido, ha recibido con beneplácito y con gratitud sincera todas las observaciones que se le han hecho, todos los juicios que acerca de sus obras se han vertido en el seno de la Academia ó fuera de ella; unas y otros los ha acogido con entusiasmo, para emprender con más brío nuevos estudios y publicar libros mejores, correspondiendo así seguramente al favor que, en todo caso, han querido dispensarle todos sus críticos. De este modo contribuirá con más eficacia al progreso intelectual del niño, al perfeccionamiento de la escuela y al engrandecimiento de la Patria.

A LOS NIÑOS.

Amiguitos míos: Al dedicaros este librito que he llamado "El Niño Matemático," no me ha guiado otro deseo que presentar ante vuestros ojos un mundo de hechos que todos los días y á tod hora encontraréis en vuestro camino, pero sin ningún orden, sin ningún enlace que os pueda dar una idea exacta, de que el conocimiento de su conjunto en forma completa es en extremo útil para todos los casos de la vida.

¿Quién de vosotros, desde pequeño, no ha contado sus juguetes, los centavos que reciben de su papá, las canicas con que juegan y otras muchas chucherías que os sirven de entretenimiento? ¿A quién de vosotros no se le ha ocurrido observar que en el mercado, en las tiendas de abarrotes, en las dulcerías, en los cajones de ropa, se cambia dinero por mercancías tomando como base el precio de un sólo objeto de los muchos que se venden? ¿Qué, no habéis visto al carpintero medir los pisos, al albañil las paredes, al pintor los cielos, al sastre las telas, al agricultor los campos, para saber el material que deben emplear en sus obras y el dinero que deben cobrar por su trabajo?

Seguramente que sí; todo lo habeis observado, porque nada se escapa á vuestra curiosidad y á vuestro estudio. Medirlo todo, valorizarlo todo, comparar unas cosas con otras por su tamaño, su precio ó su importancia, es una ocupación que todo el mundo necesita desempeñar, y vosotros los niños, teneis también necesidad de hacer esas cosas que hoy mismo os son útiles; pero lo serán más, mucho más, cuando llegueis á ser grandes.

Pues bien, en este libro voy á daros muchas enseñanzas útiles: qué cosas hay que medir en el mundo, cómo se mide cada cosa, y sobre todo, lo que más quiero, es enseñaros á pensar bien, á reflexionar mucho, á que no necesiteis de nadie para resolver todas las dificultades que en asuntos de medida se os presentarán á toda hora. Tal es el objeto de "El Niño Matemático" que deseo sea vuestro mejor amigo, vuestro consejero fiel, y el que os guíe y os lleve de la mano sin ningún tropiezo, por el camino tortuoso y bastante largo que teneis que recorrer en vuestra vida.

Si consigo mi deseo, si realizo mi esperanza de haberos sido útil y benéfico, no ambicionaré otra recompensa que vivir por algún tiempo en vuestro recuerdo, y hacerme digno de vuestra consideración y de vuestro cariño.

Vuestro amigo

Julio S. Hernández.

EL NIÑO MATEMATICO.

CAPITULO I.

Fenómenos cuantitativos.

1. Primera serie de fenómenos cuantitativos:

(*a*) En una calle hay una gran hilera de árboles de una y otra acera, ¿cómo podremos saber cuántos árboles hay en la calle?

Contándolos uno por uno.

(*b*) En una clase hay muchos niños sentados en varias bancas, ¿cómo podremos saber cuántos niños hay?

Contándolos uno por uno.

(*c*) ¿Cómo podremos saber cuántos metros hay de distancia de una esquina á la otra de la calle en que vivimos?

Midiéndola, es decir, colocando sucesivamente el metro varias veces, desde donde comienza la calle hasta donde acaba.

(*d*) ¿Cómo podremos averiguar cuántos minutos dilatamos en caminar la distancia que hay desde la escuela hasta nuestra casa?

Observando la carátula del reloj y mirando el minutero caminar desde que salimos de nuestra casa hasta que llegamos á la escuela; mejor dicho, **contando** uno á uno los minutos que dilatemos en nuestro viaje.

(*e*) ¿Cómo podremos saber cuántos litros de agua hay en un barril lleno del mismo líquido?

Tomando el litro, llenándolo varias veces hasta agotar el agua, teniendo cuidado de ir **contando** cuántos litros llenos de agua están contenidos en el barril.

2. Segunda serie de fenómenos cuantitativos.

(*a*) En una obra de albañilería se han recibido varios carros con cierto grupo de costales de cal en cada uno; ¿cómo se podrá saber cuántos costales de cal se han recibido en dicha obra?

Contando los costales de cada carro y después **agregando** el grupo de costales del primer carro á los costales del segundo; el resultado **agregarlo** á los costales del tercer carro y así con los demás.

(*b*) Deseo comprar un libro, pero los centavos que tengo no son suficientes para pagar su importe; ¿qué tendré que hacer para comprar el libro?

Agregar á los centavos que tengo otros centavos más, hasta completar el importe del libro que deseo comprar.

(*c*) En una huerta hay varias hileras de árboles, y todas tienen los mismos árboles cada una; ?cómo podremos saber cuántos árboles hay en la huerta?

Contando los árboles de una hilera y agregándola al grupo de árboles que resulte, el grupo de árboles de la hilera siguiente; al resultado agregarle el grupo de árboles de la otra hilera, y así sucesivamente hasta llegar á la última hilera de árboles.

(*d*) En una lechería hay varios botes llenos de leche; ¿cómo se podrá saber los litros de leche que contienen todos los botes juntos?

Midiendo los litros que hay en el primer bote se obtendrá un resultado; se medirá el segundo bote y se agregará el primer resultado al segundo; así se continuará midiendo y agregando resultados con los demás botes de leche.

3. Tercera serie de fenómenos cuantitativos.

(*a*) Un niño tenía varios centavos que le dió su papá, y desea regalar algunas monedas á un pobre; ¿qué cosa tendrá que hacer?

Si no sabe cuántos centavos le dió su papá, es conveniente que los cuente; en seguida separará algunas para dárselas al pobre, pero también es conveniente contarlos; finalmente, contará los centavos que le quedaron.

(*b*) A fin de que les toque partes iguales de un cestito de naranjas á todos los niños de una familia, se desea saber ¿qué tendrá que hacer la mamá de dichos niños para conseguir su objeto?

Lo más natural es ir repartiendo de una en una las naranjas del cestito á todos y cada uno de los niños; acabado el primer reparto se hará un segundo reparto, y así se continuará hasta concluir con todas las naranjas contenidas en el cesto.

(*c*) Un niño había reunido cerca de un peso de plata en monedas de cobre de á centavo, y desea cambiarlas por vigésimos de plata; ¿qué tendrá que hacer para saber las monedas de plata que le han de dar en cambio?

Como cada vigésimo de plata tiene un valor de cinco centavos de cobre, habrá que ir formando con todos los centavos que reunió el niño varios grupos iguales de á cinco centavos cada uno, hasta agotar todos los centavos; en seguida se contarán dichos grupos de centavos y lo que resulte en grupos será lo que reciba el niño en vigésimos de plata.

(*d*) Comisionaron á un niño para repartir entre varios amiguitos suyos un queso de forma circular; ¿qué tendría que hacer para que les tocara partes iguales?

Contó á los niños á quienes iba á repartirles el queso; en seguida midió varias partes iguales al rededor del queso, tantas cuantos eran los niños; tomó un cuchillo y partiendo del centro del queso á cada punto de la orilla, hizo varios cortes, resultando tantas partes iguales de queso cuantos eran los niños á quienes les hizo el reparto correspondiente.

4. Cuarta serie de fenómenos cuantitativos.

(*a*) Aquí tengo dos grupos iguales de manzanas; si agrego una manzana más al grupo de la izquierda ¿quedarán otra vez iguales?

Seguramente que no, porque el grupo de la derecha tiene una manzana menos que el grupo de la izquierda.

(*b*) Aquí están dos grupos iguales de canicas; si quito una canica al grupo de la izquierda ¿quedarán otra vez iguales?

Tampoco quedarán iguales, porque el grupo de la derecha tiene una canica más que el grupo de la izquierda.

(*c*) Si á los dos grupos iguales de manzanas les agrego otra manzana más á cada grupo ¿qué resultará?

Quedarán otra vez iguales, supuesto que á los dos se les agregó una manzana.

(*d*) Si á los dos grupos iguales de canicas les quito una canica á cada grupo ¿qué resultará?

Quedarán otra vez iguales, supuesto que á los dos se les quitó una canica.

5. Quinta serie de fenómenos cuantitativos.

(*a*) Aquí tengo una docena de naranjas, y querría formar grupos de dos, de tres, de cuatro y de seis naranjas; ¿cómo haré para saber cuántos grupos de los indicados se podrán formar con las doce naranjas?

Comenzaré por formar los grupos de dos naranjas y veré que son seis; luego formaré grupos de tres naranjas y me resultan cuatro; en seguida formaré grupos de cuatro naranjas y me resultan tres; por último formaré grupos de seis naranjas y me resultan dos.

(*b*) ¿Con cuántos grupos de dos, de tres, de cuatro y de seis canicas podré formar una docena de canicas?

Sabiendo que una docena de canicas se forma de doce canicas, iré formando primero grupos de dos canicas hasta completar doce; después formaré grupos de tres hasta completar doce; grupos de cuatro hasta completar doce, y por último grupos de seis hasta completar la docena de canicas.

(*c*) Tengo aquí cien centavos de cobre; ¿cuántos grupos de dos, de cinco, de diez, de veinte y de cincuenta centavos podré formar con los cien centavos?

Primero iré formando los grupos de dos centavos y me resultan cincuenta grupos; luego los grupos de cinco centavos y me resultan veinte grupos; en seguida los de diez centavos y me resultan diez grupos; los de veinte centavos me resultan cinco grupos, y finalmente los de cincuenta centavos me resultan dos grupos.

(*d*) ¿Cuántas monedas de un centavo, de dos centavos, de cinco centavos ó vigésimos, de diez centavos ó décimos, de veinte centavos ó quintos, de cincuenta centavos ó tostones, hay en un peso de plata?

Si cambio un peso por monedas pequeñas menores que el peso, me darán dos tostones, ó cinco quintos, ó diez décimos, ó veinte vigésimos, ó cincuenta monedas de á dos centavos, ó cien centavos de cobre.

6. Sexta y última serie de fenómenos cuantitativos.

(*a*) Sabiendo que un litro de leche vale diez y seis centavos, se desea saber ¿qué pasará con el precio total si se duplican, triplican, cuadruplican, etc., los litros de leche?

Si por cada litro de leche me dan diez y seis centavos, es claro que por dos litros me darán el doble de centavos, por tres litros el triple de centavos, por cuatro litros el cuádruplo de centavos y así sucesivamente: á **más** litros **más** centavos.

(*b*) Por el contrario, sabiendo que tres litros de leche valen cuarenta y ocho centavos, la mitad de la leche ó la tercera parte ¿cuánto costarán respectivamente?

Es claro que si los tres litros de leche valen cuarenta y ocho centavos, la mitad de la leche valdrá la mitad del valor ó sea la mitad de los cuarenta y ocho centavos, y la tercera parte de la leche costará también la tercera parte del valor total; y en general se puede decir que **menos** litros de leche costarán **menos** centavos.

(*c*) Se encomendó á tres obreros para abrir un foso de poca profundidad y anchura, pero de doce metros de largo; si se hubiese duplicado, triplicado ó cuadruplicado á los obreros, ¿les correspondería más ó menos trabajo?

Si para los tres obreros eran los doce metros de foso, es claro que duplicándolos les correspondería la mitad de la faena; triplicándolos, la tercera parte de la faena; y cuadruplicándolos, la cuarta parte de la faena; es decir, **más** obreros, **menos** trabajo.

(*d*) Si el trabajo de doce metros de foso se les hubiera encomendado á seis obreros y sólo lo hubieran desempeñado la mitad, la tercera ó la sexta parte de dichos obreros ¿cómo se habría repartido el trabajo?

Es claro que si á la mitad de los obreros se les hubiera encomendado todo el trabajo, les habría tocado el doble de la faena; á la tercera parte de los obreros, el triple de la faena; y á la sexta parte de los obreros, el séxtuplo de la faena; es decir, mientras **menos** obreros **más** trabajo.

7. Resumen de los fenómenos cuantitativos.

I. Contar de uno en uno varios objetos.

II. Aumentar varios grupos de objetos iguales ó desiguales.

III. Disminuir varios grupos de objetos iguales ó desiguales.

IV. Comparar grupos iguales ó desiguales de objetos.

V. Componer y descomponer un grupo de objetos en grupos iguales ó desiguales.

VI. Relacionar una cosa con varias cosas distintas que valgan lo mismo que de aquella, y observar si el aumento de unas produce la disminución de la otra ó al contrario.

Ejercicios —1. ¿Cómo podremos saber cuántas cosas hay en una calle?—¿Cómo sabremos cuántos metros hay de distancia entre México y Tacubaya? — ¿Cómo sabremos cuántos minutos dilata un niño para caminar de su casa á la escuela?—¿Cómo sabremos cuántos litros de agua caben en un barril?

2. ¿Cómo sabremos cuántos centavos juntará un niño en una semana si diariamente recibe dinero de su papá?—¿Cómo sabremos cuántos ojos tienen todos los niños juntos de una clase?—¿Y cuántos dedos de las manos?—¿Cómo sabremos cuántos litros de agua hay en tres botes de tamaños diferentes?

3. ¿Qué tendré que hacer para saber los niños que hay de más ó de menos en dos clases, de las cuales una es grande y otra chica?—De las canicas que tengo, deseo regalar á un amigo algunas, ¿qué tendré que hacer?—Hay aquí dos botes llenos de leche y desiguales en tamaño, ¿cómo sabré cuál tiene más leche y cuál menos y cuánto?—Deseo repartir una docena de dulces entre tres niños, ¿cómo haré el reparto en porciones iguales?

4. ¿Qué es ancho y angosto, una calle ó un callejón?—Entre un hombre y una torre ¿quién es alto y quién es bajo?—Entre un alfiler y un pizarrín ¿cuál es grueso y cuál es delgado?—Entre un caballo y un gato ¿cuál es grande y cuál es pequeño?—Entre la edad del padre y la del hijo ¿cuál es mayor y cuál es menor?—Entre un anciano y un niño ¿quién tiene más años y quién tiene menos?—Entre un ferrocarril y un carro con mulas ¿cuál camina con rapidez y cuál con lentitud?—Aquí tengo dos alambres desiguales,

¿cómo podré formar con ellos dos pedazos iguales al menor? —Aquí tengo dos pedazos de azúcar que tienen el mismo peso, ¿cómo podré hacer uno mayor y otro menor?

5. Aquí tengo una docena de canicas, ¿cuántos grupos de dos, de tres, de cuatro y de seis podré formar?—¿Con cuántas monedas de dos centavos podré formar un décimo? —¿Con cuántas monedas de cinco centavos ó vigésimos podré formar un tostón?—Tengo un peso de plata, ¿cuántos quintos de á veinte me darán si lo cambio?—¿Cuántos espacios de cinco minutos hay en la carátula de un reloj?

6. Si yo subo una escalera, mientras más escalones suba ¿me faltarán más ó me faltarán menos escalones para acabar de subirla?—Si mando construir una pared, mientras haya más albañiles ó menos albañiles, ¿se acabará pronto la construcción ó dilatará más días?—Si solo tengo un paquete de dulces para un grupo de niños, si aumento los niños ó los disminuyo ¿les tocará más ó les tocará menos dulces?—¿Quién gana más dinero, el que trabaja mucho ó el que trabaja poco?—¿Cuándo se pagan más centavos, por un litro de leche ó por varios litros de leche?

CAPITULO II.

Noción de la cantidad.

8. Dirijamos una mirada observadora al mundo que nos rodea.

En nuestro hogar donde vivimos hay un grupo de **personas** que forman nuestra familia, un conjunto de **dependencias** que forman nuestra habitación, un conjunto de **muebles** que forman nuestro menaje é infinidad de **objetos** diversos de todas clases, que aprovechamos para satisfacer todas y cada una de nuestras muchas necesidades.

9. En la Escuela, en donde nos educamos, hay un conjunto de **niños** que nos acompañan en nuestros estudios, un conjunto de objetos que se emplean en la enseñanza: las **mesas**, los **bancos**, los **mapas**, los **pizarrones**, los **libros**, las **pizarras**, los **pizarrines**, los **lápices**, etc., etc.

10. En la ciudad, abundan **personas** y cosas: las **calles**, las **casas**, los **carruajes**, los **paseos**, los **jardines**, los **templos**, etc., etc.

11. En el campo, la tierra ocultando en su interior un conjunto variado de **minerales**; en su superficie los terrenos sembrados de numerosas **plantas**, habitados además por infinidad de **animales**; los mares poblados de **peces**, y los aires de variadas **aves**; el globo entero lleno de **pueblos, ciudades** y **naciones**, en donde está distribuida la familia humana, formada de **hombres** de diversas razas.

12. Por último, elevando nuestra vista hacia el cielo lo vemos también lleno de **mundos**, de **globos** y de **soles**, que por la gran distancia á que se encuentran de nosotros, nos parecen apenas diminutos é insignificantes puntos brillantes, colocados aquí y allá en la gran bóveda azul.

13. Pues bien, todas estas cosas, todos estos seres pueden contarse, pueden medirse, pueden pesarse, pueden agruparse, de manera que unos grupos sean **grandes**, otros **pequeños**, y unos y otros entre sí, puedan formar también grupos **iguales**.

14. Los sabios, al examinar de qué están he-

chas las cosas que nos rodean: los minerales, el aire, el agua, las plantas, los animales, los hombres, los astros; han convenido después de muchos estudios en dar á todas las sustancias juntas el nombre común de **materia**; de manera, dicen ellos, que el Universo entero está hecho de materia, y nosotros que hemos visto que todo se cuenta, se mide, se pesa, se agrupa, etc., diremos que:

15. La **materia** se mide, se pesa, se cuenta, se agrupa; ó de un modo general diremos, que la materia se aumenta, se disminuye ó se iguala.

16. ¿Y por qué los objetos duros como los metales no se desmoronan, no se convierten en polvo tan fácilmente? ¿por qué nosotros mismos estamos sólidamente unidos á la tierra en donde moramos, y no en cada paso que damos, seguimos en firme y no nos lanzamos hacia la atmósfera? ¿por qué los soles, los mundos, los astros no se desploman y nos aplastan á su caída? Porque la materia de que está hecho el universo tiene una gran propiedad muy estimable; esa propiedad que consiste en unir ó en repeler cuando es necesario, en confundir ó en separar dos ó más substancias; esa propiedad de tan inestimable valor, han convenido los sabios en darle el nombre común de **fuerza**, de manera que podemos asegurar que la materia está dotada de una propiedad que le es inherente y que es susceptible, como la materia misma, de medirse, de valuarse, de estimarse; es decir, podremes afirmar de un modo general que:

17. La **fuerza** se aumenta, se disminuye ó se iguala.

18. La materia y la fuerza al obrar constantemente necesita de un lugar en donde efectuar sus

cambios y sus transformaciones; ese lugar que se acomoda á todas las formas; desde la forma precisa que tienen los cuerpos regulares: el cubo la esfera, el cilindro. hasta la variadísima forma irregular de las plantas y de los animales, lo mismo que la forma cualquiera que afectan todos los líquidos como los gases, que necesitan en su expansibilidad sin límites una vasta extensión. Este lugar de variadas formas han convenido los sabios en darle el nombre común de **espacio**, que también como la materia y la fuerza es susceptible de medirse y de valuarse, ó de otro modo:

19. El **espacio** se aumenta, se disminuye ó se iguala.

20. Finalmente, la materia al cambiar en virtud de la fuerza que le es inherente, y cuyos cambios efectúa en el espacio, tiene además otra propiedad nueva y distinta de las anteriores que consiste en que los cambios y transformaciones tienen determinada duración; como la tierra al dar vuelta alrededor de sí misma en un día, ó bien alrededor del sol en un año. Estos períodos en que la materia va cambiando sucesivamente como la semilla desde que se siembra hasta la planta perfecta que da sus frutos, como el niño que nace hasta el hombre maduro, todos estos cambios, lentos ó rápidos, ese mudar constante de las cosas, ha recibido el nombre común de **tiempo** que los sabios le han dado, y que también como la materia, la fuerza y el espacio, es susceptible de medirse y de valuarse, ó de otro modo:

21. El **tiempo** se aumenta, se disminuye ó se iguala.

22. Estos tres hechos: **aumento, diminu-**

ción é **igualdad**, tanto de la materia como de la fuerza, del espacio y el tiempo, que hemos obseavado, se han designado con una palabra nueva aplicable á los tres hechos: es la palabra **cantidad**

23. Para emplear bien esa palabra se dice vulgarmente.

Una gran **cantidad** de materia.

Una gran **cantidad** de fuerza.

Una gran **cantidad** de espacio.

Una gran **cantidad** de tiempo.

24. Podremos afirmar que en el Universo hay una gran **cantidad, cantidad** sin límites, sin fin: de **materia**, de **fuerza**, de **espacio** y de **tiempo**.

25. Haciendo un resumen de todo lo expuesto, diremos:

1º Que la **materia** y sus propiedades: **fuerza, espacio** y **tiempo**, son susceptibles de medirse y de valuarse.

2º Que la materia, la fuerza, el espacio y el tiempo se aumentan, se disminuyen y se igualan.

3º Que la **cantidad** consiste en que todo lo que existe en el Universo: materia, fuerza, espacio y tiempo, se aumenta, se disminuye ó se iguala.

Ejercicios.—7. ¿Cómo podremos aumentar un montón de arena?—¿Cómo haremos para disminuir el agua que contiene un barril?—¿Cómo podremos igualar la harina que hay en dos cajones, de los cuales uno tiene más que otro?—¿Todas las cosas materiales pueden aumentarse?—¿Pueden disminuirse?—¿Pueden igualarse?

8. Aquí hay una distancia, ¿podré aumentarla?—¿Podré disminuirla?—¿Podre igualarla con otra?—Este terreno tiene determinadas medidas; si le doy doble extensión á esas medidas ¿qué habrá pasado con el tamaño del terreno?—Si lo reduzco á la mitad ¿qué habrá pasado con el tamaño del terreno?—Y si trazo otro terreno con las mismas medidas ¿cómo serán entre sí los dos terrenos respecto de su tamaño?—Aquí está un trozo de jabón, ¿podré aumentarlo?—¿Podré disminuirlo?—¿Podré igualarlo con otro?—A una porción de espacio cualquiera ¿puede aumentársele más espacio?—¿Puede disminuírsele alguna porción de espacio?—¿Pueden formarse dos porciones iguales de espacio?

9. Entre un ferrocarril y un carro con mulas ¿cuál camina con rapidez y cuál con lentitud?—¿Cómo podré aumentar la velocidad de un carruaje si solo va tirado por dos caballos?—Una mula de carga lleva un peso considerable y camina lentamente, ¿qué se tendrá que hacer para que camine con más rapidez?—Para subir por medio de una carretilla materiales de construcción, si son muy pesados ¿qué habrá que hacer para subirlos pronto?—Y si pesan poco ¿se necesitará mucha ó poca fuerza?—¿La fuerza puede aumentarse?—¿Puede disminuirse una fuerza?—¿Cómo tendrán que ser entre sí dos fuerzas para subir pesos iguales?

10. Para escribir un pliego de papel un niño emplea media hora, si escribiera más de un pliego ¿necesitaría más tiempo ó menos tiempo?—Si escribiera menos de un pliego ¿necesitaría más tiempo ó menos tiempo?—Si el trabajo se aumenta ¿habrá que aumentar el tiempo para desempeñarlo ó habrá que disminuirlo?—Dos obreros que tienen la misma habilidad para trabajar ¿harán más trabajo ó menos trabajo en tiempos iguales?—¿El tiempo es susceptible de aumentarse?—¿Puede disminuirse el tiempo activando el trabajo?—Dos bombas iguales movidas con fuerzas iguales ¿en qué tiempo llenarán de agua dos tinacos desiguales?—Y si los tinacos son iguales ¿cómo serán entre sí los tiempos empleados para llenarlos de agua?

CAPITULO III.

Pluralidades y unidades

26. Sabemos que la **materia** de que están hechas todas las cosas del universo, puede medirse, lo mismo que el **espacio,** el **tiempo** y la **fuerza.** Lo que no sabemos es, de qué tamaño serán esas cantidades; son tan grandes, tan inmensas, que no podremos decir dónde comienzan y dónde acaban.

Por eso los sabios han dicho muy bien que la cantidad es **infinita** como el universo, es decir, que no tiene principio ni fin.

27. No obstante ser tan grande la cantidad se pueden formar de ella grandes masas ó grandes grupos: una masa de tierra, de agua, de aire; un grupo de hombres, de animales, de libros, de muebles, etc.

Tanto las masas, como los grupos á que nos referimos en los ejemplos propuestos, se ha convenido en llamarles **pluralidades.**

28. Pero las pluralidades son también susceptibles de medirse: una pluralidad de naranjas, puede descomponerse en porciones pequeñas de una, de dos ó más naranjas; una pluralidad de agua se puede descomponer en un conjunto de porciones pequeñas iguales del tamaño que se quiera. Cada porción que resulta indivisible y única de las indicadas se ha convenido en llamarle **unidad.** De manera que podemos decir que una pluralidad se descompone fácilmente en **unidades.**

29. Según la especie de cantidad que se trata de valorizar ó medir, así resultan las unidades, más ó menos convencionales y arbitrarias, ó precisas y bien determinadas.

Examinemos algunos ejemplos.

Si observamos una gran extensión de **agua,** notaremos que todas sus partículas están de tal manera juntas, que no pueden separarse formando porciones claramente visibles como sucede con un montón de naranjas en el cual fácilmente se distinguen unas de otras.

Una **distancia** tampoco tiene interrupción ninguna, desde que comienza hasta que acaba; pero no pasa lo mismo con una hilera de árboles, que están separados unos de otros por pequeños trechos, lo cual permite contarlos fácilmente.

El **tiempo** es también una serie sucesiva de instantes que no se interrumpen jamás, como sucede si pretendiéramos contar un conjunto de relojes.

30. Las cantidades que no tienen una interrupción en porciones semejantes fácilmente visibles reciben el nombre de cantidades **continuas** como el agua, el aire, el espacio, el tiempo, etc., etc.

Las cantidades que pueden descomponerse sin dificultad en porciones fácilmente distintas, separables unas de otras, se llaman cantidades **no continuas**, como un grupo de hombres, de animales, plantas, flores, frutas, objetos artificiales, etc., etc.

31. Tanto las cantidades **continuas** como las **no continuas** se descomponen en porciones más ó menos grandes que hemos designado con el nombre de **pluralidades.** Un grupo de na-

ranjas, de libros, de hombres, son pluralidades en las cantidades **continuas**; un trozo de hielo, de madera, de agua, etc., son pluralidades en las cantidades **no continuas**.

32. Una pluralidad formada de cantidades **no continuas** se puede descomponer en porciones completas, de un solo objeto que reciben cada una el nombre de unidades **absolutas**: una naranja es una unidad absoluta en un grupo de naranjas; un libro es una unidad absoluta en un grupo de libros, etc.

33. Una pluralidad formada de cantidades **continuas**, se puede también descomponer en porciones iguales que reciben el nombre de unidades **relativas**; por ejemplo, con el agua se pueden formar porciones del tamaño de un **litro**, con las distancias se pueden formar porciones del tamaño de un **metro**, con el tiempo se pueden formar porciones del tamaño de una **hora**, etc., y todas estas porciones convencionales y arbitrarias son susceptibles de cambiarse por otras de mayor ó menor tamaño.

34. Haciendo un resumen de lo anterior resulta lo siguiente:

I. La cantidad es **infiuita** como el universo, no tiene principio ni fin.

II. Toda cantidad se descompone en porciones más ó menos grandes que reciben el nombre de **pluralidades**

III. Las pluralidades se descomponen en porciones menores únicas é indivisibles que reciben el nombre de **unidades**.

IV. Hay dos clases de cantidades: la cantidad **continua** y la cantidad **no continua**.

V. La cantidad **no continua** se descompone en unidades precisas é indivisibles llamadas **unidades absolutas**, por ejemplo: hombres, plantas, etc.

VI. La cantidad **continua** se descompone en unidades arbitrarias y convencionales que reciben el nombre de **unidades relativas** por ejemplo el litro, el metro, la hora, etc.

Ejercicios.—11. Entre varios niños ¿cuál es la unidad? —Entre varios libros ¿cuál es la unidad?—Aquí está un pizarrón, ¿cómo representaré la pluralidad?—¿Cómo podré representar la unidad y la pluralidad en un grupo de naranjas?—Cite usted diversas unidades de todos los objetos que hay aquí en la clase.—¿Cómo podrán representarse las pluralidades correspondientes de esos objetos?

12. Cite usted algunos ejemplos de pluralidades formadas con cantidades continuas.—¿Por qué el agua, el aire, el espacio y el tiempo, etc., son cantidades continuas?—¿De qué modo se pueden formar unidades arbitrarias de un depósito de agua?—¿Qué unidades arbitrarias se pueden formar de una distancia cualquiera?—¿Qué unidades distintas se pueden formar con una porción de tiempo?—De una porción de aire ¿qué unidades arbitrarias pueden formarse?

13. Cite usted algunos ejemplos de cantidades no continuas.—¿Por qué un montón de naranjas es cantidad no continua?—¿Por qué un grupo de niños es cantidad no continua?—¿Cuáles son las unidades en las siguientes cantidades no continuas: hombres, perros, pesas, libros, sillas, etc.?—¿Qué diferencia hay entre las unidades que se forman con las cantidades continuas y con las unidades de las no continuas?

14. ¿Tendrá fin el espacio?—Si yo lo limito hasta el cerro que se ve allá lejos ¿qué sigue?—Si limito el espacio hasta donde están la luna ó el sol ¿continuará ó se habrá acabado?—¿Tiene el espacio principio y fin?—Si yo extendiera

un cordel ó un hilo ¿llegaría yo alguna vez al fin?—Si yo trazara un círculo grande, muy grande, sería posible llegar al fin del espacio?

15. ¿Se podrá saber el tiempo que vive una planta, un animal ó una persona?—¿Y los años que han vivido nuestros padres, nuestros abuelos y nuestros bisabuelos podríamos saberlo?—¿Y los años que han vivido la luna, el sol y la tierra donde habitamos?—¿Y antes de la vida de estos seres había tiempo, ó de otro modo habrían vivido algunos otros seres?—¿Qué tendrá principio el tiempo?—¿Tendrá fin el tiempo?—¿Las pluralidades que indiquen tiempo se pueden descomponer en unidades absolutas ó convencionales?

CAPITULO IV.

Los números y sus nombres.

35. Hemos dicho que toda **cantidad** se descompone en pluralidades; que toda **pluralidad** se descompone en unidades, y que toda **unidad** es uno solo de los objetos que se consideraron.

Ahora bien, si enumeramos todas las unidades que hay en una cantidad cualquiera, la habremos medido ó **valorizado.** ¿Cuántos litros de agua hay en un barril? es indicar todas las unidades convencionales ó **relativas** de agua que contiene el barril, es su medida ó su **valor.** ¿Cuántos pesos hay en este cajón? es indicar todas las unidades **absolutas** ó pesos que contiene el cajón, hemos determinado un valor.

Pero como todo valor se expresa con números, y los números se refieren á una cantidad cualquiera, fácilmente se comprende que:

El **número** es la cantidad valorizada, ó de otro modo, el valor en unidades de la cantidad.

36. Vamos á contar un grupo de pequeños cubos iguales del tamaño de un centímetro cúbico cada uno. El primer cubo lo designaremos con la palabra **uno**, es el nombre que se le da á toda unidad aislada. Un cubo junto con otro cubo forman el número **dos.** Estos dos cubos con otro cubo forman el número **tres.** Estos tres cubos con otro cubo forman el número **cuatro**. Estos cuatro cubos con otro cubo forman el número **cinco.** Estos cinco cubos con otro cubo forman el número **seis**. Estos seis cubos con otro cubo forman el número **siete.** Estos siete cubos con otro cubo forman el número **ocho**. Estos ocho cubos con otro cubo forman el número **nueve**. Estos **nueve** cubos con otro cubo forman el número **diez.**

37. Con los diez cubos unidos se forma una regla que mide un decímetro de largo. La reunión de diez unos se le llama **decena.** Una decena de cubos ó una regla forman el número **diez.** Dos decenas de cubos ó dos reglas forman el número **veinte.** Tres decenas de cubos ó tres reglas forman el número **treinta.** Cuatro decenas de cubos ó cuatro reglas forman el número **cuarenta.** Cinco decenas de cubos ó cinco reglas el número **cincuenta.** Seis decenas de cubos ó seis reglas el **sesenta.** Siete decenas de cubos ó siete reglas el **setenta.** Ocho decenas de cubos ú ocho reglas el **ochenta.** Nueve decenas de cu-

bos ó nueve reglas el **noventa**. Diez decenas de cubos ó diez reglas el **cien**.

Según se nota, las palabras diez, veinte y cien, se forman de un modo especial, en tanto que las palabras: treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa; están formadas de las palabras: tres, cuatro, cinco, etc., agregadas de la terminación **enta** modificándolas según el uso y la buena pronunciación.

38. Los números intermedios entre el diez y el veinte se pueden representar con una regla y nueve cubos y reciben los nombres siguientes: una regla y un cubo ó sean una decena y una unidad forman el número **once**. Una regla y dos cubos ó sean una decena y dos unidades forman el **doce**. Una regla y tres cubos ó sean una decena y tres unidades forman el **trece**. Una regla y cuatro cubos ó sean una decena y cuatro unidades forman el **catorce**. Una regla y cinco cubos ó sean una decena y cinco unidades forman el número **quince** Una regla y seis cubos ó sean una decena y seis unidades forman el número **diez y seis**. Una regla y siete cubos ó sean una decena y siete unidades forman el número **diez y siete**. Una regla y ocho cubos ó sean una decena y ocho unidades forman el número **diez y ocho**. Una regla y nueve cubos ó sean una decena y nueve unidades forman el número **diez y nueve**. Dos reglas ó sean dos decenas forman el número **veinte**.

39. Los números intermedios entre el veinte y el treinta se pueden representar con dos reglas y nueve cubos y reciben los nombres siguientes: **veintiuno,** dos decenas y una unidad; **veinti-**

dos, dos decenas y dos unidades; **veintitrés**, dos decenas y tres unidades; **veinticuatro**, dos decenas y cuatro unidades; **veinticinco**, dos decenas y cinco unidades; **veintiséis**, dos decenas y seis unidades; **veintisiete**, dos decenas y siete unidades; **veintiocho**, dos decenas y ocho unidades; **veintinueve**, dos decenas y nueve unidades; el **treinta** se forma con tres decenas.

40. Los números intermedios entre el treinta y el cuarenta, el cuarenta y el cincuenta, el cincuenta y el sesenta, el sesenta y el setenta, el setenta y el ochenta, el ochenta y el noventa, el noventa y el cien; se pueden representar con tres, cuatro, etc., hasta nueve reglas y nueve cubos sueltos.

Tres reglas y nueve cubos forman el número **treinta y nueve** Cinco reglas y siete cubos forman el número **cincuenta y siete**, etc.

Los nombres de los números comprendidos entre el treinta y el cien se forman con el nombre de la **decena**, unida por medio de la conjunción **y** al nombre de las **unidades: ochénta y siete, cuarenta y tres, noventa y nueve,** son ejemplos que indican el modo de formación de los nombres de los números intermedios formados con decenas y unidades.

41. Con diez reglas unidas de modo que se forme una tabla de un decímetro cuadrado y de un centímetro de grueso, se puede representar el número **cien**, que recibe además el nombre de **una centena** ó sean cien unidades. Dos tablas ó centenas forman el número **doscientos**. Tres tablas ó centenas el **trescientos**. Cuatro tablas ó centenas el **cuatrocientos**. Cinco tablas ó cen-

tenas el **quinientos**. Seis tablas ó centenas el **seiscientos**. Siete tablas ó centenas el **setecientos**. Ocho tablas ó centenas el **ochocientos**. Nueve tablas ó centenas el **novecientos**. Diez tablas ó decenas el **millar** ó **mil**.

42. Los números intermedios entre cien y doscientos, entre doscientos y trescientos, entre trescientos y cuatrocientos, entre cuatrocientos y quinientos, entre quinientos y seiscientos, entre seiscientos y setecientos, entre setecientos y ochocientos, entre ochocientos y novecientos, entre novecientos y mil, se pueden representar con tablas, reglas y cubos y se forman pronunciando primero las palabras **ciento, doscientos, trescientos**, etc., y agregando en seguida los nombres de la serie de los números del uno al cien como se ha explicado en los párrafos anteriores.

He aquí algunos ejemplos:

Cuatro tablas, tres reglas y cinco cubos representan el número **cuatrocientos treinta y cinco.** Cinco tablas, nueve reglas y siete cubos representan el número **quinientos noventa y siete**, etc.

43. Con diez tablas unidas de manera que formen un decímetro cúbico, se pueden representar diez centenas ó sea el número **mil**, que también recibe el nombre de **un millar**. Con dos decímetros cúbicos se forma el **dos mil**, con tres el **tres mil**, con cuatro el **cuatro mil**.......... con nueve el **nueve mil** y con diez decímetros cúbicos colocados en línea recta de manera que formen una regla del tamaño de un metro se representa el número **diez mil**.

44. Los números intermedios entre un mil y

otro mil se pueden representar con cubos de á mil, tablas de á cien, reglas de á diez y cubos de un centímetro cúbico.

Siete cubos, cuatro tablas, nueve reglas y tres cubos de uno forman el número **siete mil cuatrocientos noventa y tres.**

Los nombres que se dan á estos números intermedics entre un mil y otro mil se forman pronunciando, primero los millares, en seguida las centenas, siguiendo las decenas y al último las unidades; por ejemplo: (millares) **ocho mil,** (centenas) **novecientos,** (decenas) **cuarenta** y (unidades) **tres.**

45. Después de haber estudiado el modo de contar con **unidades** ó unos, con **decenas** ó dieces, con **centenas** ó cientos y con **millares** ó miles, podemos formar un resumen en el cual veremos cómo han sido representados por medio de objetos:

UNIDADES: Un centímetro cúbico;

DECENAS: Diez centímetros cúbicos colocados en línea recta, de modo que formen una regla del tamaño de un decímetro lineal y un centímetro de grueso;

CENTENAS: Diez reglas de diez centímetros cúbicos cada una y colocados de modo que formen una tabla del tamaño de un decímetro cuadrado y un centímetro de grueso;

MILLARES: Diez tablas de cien centímetros cúbicos cada una y colocadas unas sobre otras de modo que formen un cubo del tamaño de un decímetro cúbico.

46. Ahora bien, si tomamos nuevamente como punto de partida el **decímetro cúbico** que es

la representación de un millar ó mil, podremos formar otros números más grandes que los anteriores y los podremos representar del mismo modo que ellos, es decir, con cubos, con reglas y con tablas para volver después á comenzar con cubos de mayor tamaño. He aquí el nuevo cuadro que resultaría:

UNIDADES DE MILLAR: Un cubo del tamaño de un decímetro cúbico.

DECENAS DE MILLAR: Una regla formada con diez decímetros cúbicos ó sea del tamaño de un metro lineal y un decímetro de grueso.

CENTENAS DE MILLAR: Una tabla formada con cien decímetros cúbicos ó sea del tamaño de un metro cuadrado y un decímetro de grueso.

MILLONES (millares de millar): Un nuevo cubo formado con mil decímetros cúbicos ó sea del tamaño de un metro cúbico.

47. Para formar los nombres de los nuevos números que resultan, se pronuncian primero los millones; después las centenas de millar, en seguida las decenas de millar y al último los millares, terminando después con las centenas, decenas y unidades simples, por ejemplo: cuatro metros cúbicos, siete tablas de un metro cuadrado, cinco reglas de un metro lineal y nueve decímetros cúbicos, representará el número **cuatro milones, setecientos cincuenta y nueve mil** centímetros cúbicos ó unidades.

48. Del mismo modo que hemos formado las unidades, decenas y centenas, **simples;** las unidades, decenas y centenas de **millar;** se forman también las unidades, decenas y centenas de **millón,** las unidades, decenas y centenas de **millar**

de millón, etc., hasta formar una reunión de **un millón de millones** que recibe el nombre de un **billón**. He aquí el cuadro correspondiente:

MILLONES: Un metro cúbico.

DECENAS DE MILLÓN: Una regla formada de *diez* metros cúbicos ó sea del tamaño de un decámetro lineal y un metro de grueso.

CENTENAS DE MILLÓN: Una tabla formada de *cien* metros cúbicos ó sea del tamaño de un decámetro cuadrado y un metro de grueso.

MILLARES DE MILLÓN: Un cubo formado de *mil* metros cúbicos ó sea del tamaño de un decámetro cúbico.

DECENAS DE MILLAR DE MILLÓN: Una regla formada de diez decámetros cúbicos ó sea del tamaño de un hectómetro lineal y un decámetro de grueso.

CENTENAS DE MILLAR DE MILLÓN: Una tabla formada de cien decámetros cúbicos ó sea del tamañe de un hectómetro cuadrado y un decámetro de grueso.

BILLONES (millares de millar de millón): Un cubo formado de mil decámetros cúbicos ó sea del tamaño de un hectómetro cúbico.

Los nombres de los números formados con billones, millones y unidades simples, se pronuncian en este orden: billones, centenas de millar de millón, decenas de millar de millón, millares de millón, centenas de millón, decenas de millón, millones, centenas de millar, etc., hasta las unidades simples.

49. Del mismo modo se pueden representar los números más altos que los billones, los trillones,

los cuatrillones, los quintillones, y la formación de sus nombres es semejante enteramente á la de los números inferiores que hemos estudiado. Pero esto vamos á aclararlo mejor con el siguiente resumen:

I. Las **unidades** simples de millar, de millón, de millar de millón, de billón, de millar de billón, de trillón, etc., se representan con **cubos** de un centímetro, de un decímetro, de un metro, de un decámetro, de un hectómetro, de un kilómetro y de un miriámetro cúbicos respectivamente.

II. Las **decenas** simples, de millar, de millón, de millar de millón, de billón, de millar de billón, etc., se representan con **reglas** formadas de diez cubos que tengan una medida igual á la décima parte del tamaño de la regla como sigue: de un decímetro (diez centímetros cúbicos), un metro (diez decímetros cúbicos), un decámetro (diez metros cúbicos), un hectómetro (diez decámetros cúbicos), un kilómetro (diez hectómetros cúbicos), un miriámetro (diez kilómetros cúbicos), lineales respectivamente.

III. Las **centenas** simples, de millar, de millón, de millar de millón, de billón, de millar de billón, etc., se forman con **tablas** cuadradas que contengan cien cubos del tamaño de una centécima parte de una tabla, como sigue: un decímetro cuadrado (cien centímetros cúbicos), un metro cuadrado (cien decímetros cúbicos), un decámetro cuadrado (cien metros cúbicos), un hectómetro cuadrado (cien decámetros cúbicos), un kilómetro cuadrado (cien hectómetros cúbicos), un miriámetro cuadrado (cien kilómetros cúbicos) respectivamente.

50. El cuadro anterior nos indica el modo de representar por medio de objetos todos los números posibles: las **unidades** por medio de **cubos**, las **decenas** por medio de **reglas** y las **centenas** por medio de **tablas.**

Ahora vamos á formar un resumen de los nombres que se dan á todos los números, pero antes los iremos ordenando en grupos de lo menor á lo mayor, del modo siguiente:

I A las **unidades** simples del uno al nueve les llamaremos de **primer orden;** á las **decenas** del diez al noventa les llamaremos del **segundo orden;** á las **centenas** del ciento al novecientos les llamaremos del **tercer orden;** á los **millares** del mil al nueve mil les llamaremos del **cuarto orden,** y así sucesivamente con los demás, **quinto orden, sexto orden,** etc., etc.

II. Pero como hemos visto que todos los números se representan con **cubos** con **reglas** y con **tablas,** y que todos los cubos corresponden á *unidades* iguales; todas las reglas corresponden á *decenas* iguales; y todas las tablas corresponden también á *centenas* iguales, es claro que el conjunto de los tres órdenes sucesivos formados de unidades del mismo tamaño darán origen á una sola clase de unidades, según el tamaño de que se trate; así las unidades, decenas y centenas simples se forman de cubos de un centímetro cúbico, les llamaremos por lo mismo de **primera clase** ó sean de las unidades simples; las unidades, decenas y centenas de millar se forman de cubos de un decímetro cúbico, les llamaremos de **segunda clase** ó sean de las unidades de millar; las unidades, decenas y centenas de millón se formarán de cubos de un metro cúbico, les llamaremos de **tercera clase** ó sean de las unidades de millón, y así sucesivamente, **cuarta clase** á las **unidades de millar de millón; quinta clase** á las **unidades de billón,** etc., etc.

III. Hemos representado los millones por medio de **metros cúbicos** y los hemos formado ó de un millón de **centímetros cubicos** ó de un millar de **decímetros cúbicos.** De uno ó de otro modo el punto de partida para contar nuevamente es el **millón,** compuesto de seis órdenes ó de dos clases sucesivas: las unidades simples y las unidades de millar. A estas unidades de primera y segunda clase sucesivas, les llamaremos de **primer género** ó millones; de tercera y cuarta clase sucesivas, de **segundo género** ó billones; quinta y sexta clases sucesivas, de **tercer género** ó trillones; séptima y octava clase sucesivas, de **cuarto género** ó cuatrillones, y así sucesivamente, quintillones, sextillones, etc., etc.

He aquí el cuadro que resulta:

I. Ordenes.	1º unidades, 2º decenas, 3º centenas, 4º millares, 5º decenas de millar, 6º centenas de millar, 7º millones, 8º decenas de millón, 9º centenas de millón, etc., etc.

II. Clases. { 1ª unidades, 2ª millares, 3ª millones, 4ª millares de millón, 5ª billones, 6ª millares de billón, etc.

III. Géneros. { 1º millones, 2º billones, 3º trillones, etc., etc.

Modo de representar los órdenes:

1ª clase. Cubos, reglas y tablas de **centímetros cúbicos**.

2ª clase. Cubos, reglas y tablas de **decímetros cúbicos**.

3ª clase. Cubos, reglas y tablas de **metros cúbicos**.

4ª clase. Cubos, reglas y tablas de **decámetros cúbicos**.

5ª clase. Cubos, reglas y tablas de **hectómetros cúbicos**.

6ª clase. Cubos, reglas y tablas de **kilómetros cúbicos**.

7ª clase. Cubos, reglas y tablas de **miriámetros cúbicos,** etc., etc.

51. Todo lo que existe á nuestro rededor puede contarse ó enumerarse: los hombres, los animales, las plantas, los astros, etc. No sabemos cuántos millones de hombres, de animales, de plantas, de estrellas existen en el universo. No sabemos tampoco cuántos millones, billones ó tri-

llones de años solares tiene de existencia nuestra tierra ó sea el planeta que habitamos. No hemos podido hasta ahora precisar lo que miden todas las distancias que nos separan de los demás mundos.

Todo esto nos indica que es necesario disponer de una serie infinita de palabras para expresar los nombres de todos los números con el objeto de que podamos contar todas las cosas que existen; si no podemos nosotros hacerlo, lo harán seguramente otras personas más inteligentes que nosotros, ó que vivan en épocas más adelantadas que la época actual en que nosotros vivimos.

El conjunto de las palabras que se usan para nombrar todos los números y la serie de las convenciones que los sabios han aceptado para formar sus nombres, ha recibido el nombre de **numéración hablada.**

Ejercicios.—16. Contar de uno en uno con los números del uno al diez: con los niños, con los dedos de las manos, con canicas ó con cubitos. — Nombrar los diez primeros números invirtiendo el orden, es decir, del diez al uno. —Comparar dos números: entre el tres y el cinco ¿cuál es mayor y cuál es menor? Entre el nueve y el siete ¿cuál es mayor y cuál es menor? Entre el dos y el cuatro, etc., etc. —¿Cuántos unos hay en siete, en cinco, en cuatro, en nueve? etc.—¿Qué número hay antes del cinco y después del cinco; antes y después del siete; antes y después del tres? etc.

17. Contar con grupos de diez objetos ó decenas: una regla tiene diez cubos, dos reglas, tres reglas, cuatro reglas, etc., hasta diez reglas.—Nombrar las decenas invirtiendo el orden: del cien al diez.—Comparar dos decenas: entre el veinte y treinta ¿cuál es mayor y cuál es menor? ¿entre cincuenta y sesenta? etc. — ¿Cuántas decenas hay en ochenta,

en cuarenta, en noventa, etc? — ¿Qué decenas hay antes y después de cuarenta? ¿Antes y después de ochenta? ¿Antes y después de veinte? etc.

18. Aquí tengo nueve reglas y cuatro cubos, ¿qué número se forma? ¿Con siete reglas y tres cubos? ¿Con seis reglas y seis cubos? ¿Con ocho reglas y siete cubos? etc.—Represente usted con reglas y cubos el número veintisiete, el treinta y nueve, el cuarenta y cinco, el cincuenta y cuatro, el sesenta y tres, el setenta y nueve, el ochenta y uno, etc., etc.—Cuente usted ordenadamente los números del uno al cien. —Cuente usted retrocediendo del cien al uno.—Entre el número cuarenta y tres y veintinueve ¿cuál es mayor y cuál es menor? etc.—¿Cuántos unos y dieces hay en ochenta y tres, en noventa y dos, etc., etc.?—Diga usted todos los números del uno al cien que se expresan con una sola palabra.

19. Contar con tablas formadas de diez reglas unidas: una tabla tiene diez reglas ó cien cubos, dos tablas, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, ¿cuántas reglas y cubos serán?—Nombrar las centenas invirtiendo el orden de mil á cien —Comparar dos centenas: entre quinientos y setecientos ¿cuál es mayor y cuál es menor? ¿Entre doscientos y ochocientos? etc., etc.—¿Cuántas centenas hay en ochocientos, en quinientos, en mil, en trescientos, etc., etc.? —¿Qué centenas hay antes y después de setecientos, de doscientos, de cuatrocientos? etc., etc.

20. Formar números de centenas, decenas y unidades: con tres tablas, cuatro reglas y cinco cubos ¿qué número se forma? ¿Con ocho tablas, una regla y siete cubos? ¿Con nueve tablas, dos reglas y un cubo? ¿Con seis tablas, una regla y nueve cubos? etc., etc. — En el número quinientos veintisiete ¿cuántas tablas, reglas y cubos hay? ¿En el doscientos cuarenta y tres? ¿En el novecientos catorce? etc., etc.—¿Cuántos cientos, dieces y unos hay en ciento noventa y tres, en trescientos diez y ocho, en seiscientos veinticuatro, en ochocientos diez y nueve, etc., etc.—¿Qué números del cien al mil se expresan con una sola palabra?—Cuente usted con unos, con dieces y con cientos hasta diez unos, diez dieces y diez cientos y diga usted qué números resultan.—En un número formado de unidades, decenas y centenas ¿en qué orden se nombran ó pronuncian?

21. Con diez tablas unidas se forma un nuevo cubo del tamaño de un decímetro cúbico y vale mil cubos, ¿cuánto valdrán dos decímetros cúbicos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez? — Formar números: con nueve decímetros cúbicos, tres tablas, siete reglas y dos cubitos qué número se forma? Con seis decímetros cúbicos, seis tablas, cinco reglas, ocho cubitos ¿qué número se forma? Con dos decímetros cúbicos, nueve tablas, cinco reglas siete cubitos ¿qué número se forma? etc. — En el número dos mil quinientos setenta y cuatro ¿cuántos decímetros cúbicos, tablas, reglas y cubitos hay? En el número ocho mil cuatrocientos catorce ¿cuántos decímetros cúbicos, tablas, reglas y cubitos hay? etc.—¿Cuántos miles, cientos, dieces y unos hay en los números cinco mil trescientos noventa y uno, tres mil cuatrocientos quince, mil ochocientos ochenta y tres, siete mil novecientos trece? etc., etc.—¿En qué orden se nombran ó pronuncian los números que tienen unidades, decenas, centenas y millares?

22. ¿Cómo hemos representado las unidades, las decenas, las centenas y los millares?—¿Qué hemos representado con un centímetro cúbico? Con una regla formada de diez centímetros cúbicos ¿qué hemos representado? Con una tabla formada de diez reglas unidas de diez centímetros cúbicos cada una ¿qué hemos representado? Con un decímetro cúbico formado con diez tablas superpuestas ¿qué hemos representado?—Aquí están un centímetro cúbico, una regla, una tabla y un decímetro cúbico ¿qué número se ha formado?—¿Cómo se representará el número dos mil doscientos veintidos? etc.

23. Si los millares se representan con un decímetro cúbico ¿cómo representaremos las decenas de millar que son diez millares? ¿Y las centenas de millar que son cien millares?—¿Qué número representa el decímetro cúbico? ¿La regla de diez decímetros cúbicos? ¿La tabla de cien decímetros cúbicos?—Con una tabla de decímetros cúbicos, dos reglas de decímetros cúbicos, tres decímetros cúbicos, cuatro tablas de centímetros cúbicos, cinco reglas de centímetros cúbicos y seis cubos de centímetros cúbicos ¿qué número se habrá formado? etc.—¿Cómo podré representar con cubos, reglas y tablas los números siguientes: trescientos veinticinco mil ochocientos catorce, seiscientos quince mil no-

vecientos trece? etc., etc.—¿Cuántos cien miles, diez miles, miles, cientos, dieces y unos hay en quinientos doce mil ochocientos catorce? etc.—En qué orden se nombran ó pronuncian los números de mayor á menor ó al contrario?

24. Con diez tablas de decímetros cúbicos superpuestas se forma un nuevo cubo que mide un metro cúbico y que tiene un valor de un millón de centímetros cúbicos; ¿qué tanto valdrán dos metros cúbicos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez metros cúbicos?—Y si el millón se representa con un metro cúbico ¿cómo podrán representarse la decena de millón y la centena de millón?—¿Qué números representan el metro cúbico, la regla de metros cúbicos y la tabla de metros cúbicos?—¿Qué número se formará con una tabla de metros cúbicos, tres reglas de metros cúbicos, cinco metros cúbicos, siete tablas de decímetros cúbicos, nueve reglas de decímetros cúbicos y ocho decímetros cúbicos? etc —¿Cómo podré representar con cubos, reglas y tablas de diferentes tamaños el número siguiente: ochocientos quince millones, cuatrocientos trece mil ciento veinticinco unidades?—¿Cuántas centenas, decenas y unidades de millón contiene el número anterior?—¿Cuántas centenas, decenas y unidades de millar? ¿Cuántas centenas, decenas y unidades simples?—¿En qué orden se han nombrado ó pronunciado?

25. Superponiendo diez tablas de cien metros cúbicos cada una se formará un cubo que mide mil metros cúbicos ó sean mil millones de centímetros cúbicos, es un decámetro cúbico; ¿cómo pues se representarán los números diez mil millones y cien mil millones?—¿Qué número representa el decámetro cúbico? ¿Qué número representa la regla de diez decámetros cúbicos? ¿Qué número representa la tabla de cien decámetros cúbicos? — Con diez tablas de decámetros cúbicos se forma el hectómetro cúbico que es la representación de mil millares de millón ó billón, ¿cómo se representarán las decenas y centenas de billón?—¿Qué número representa el hectómetro cúbico? ¿Qué número representa la regla de diez hectómetros cúbicos? ¿Qué número representa la tabla de cien hectómetros cúbicos?—Si los millones se representan con el metro cúbico, los billones con el hectómetro cúbico, ¿cómo se representarán los trillones? —¿Qué número representa el miriámetro cúbico?—¿Cómo

se representan en general toda clase de unidades, decenas y centenas?—¿Qué representan en general los cubos, las reglas y tablas de cualquier tamaño que sean?

CAPITULO V.

Los números y sus signos.

52. Además de poderse representar los números por medio de objetos, se pueden representar también por medio de ciertas figuras dibujadas ó escritas; por ejemplo, con puntos, con rayas ó con estrellitas, etc. He aquí un cuadro de los diez primeros números.

Nombres. Figuras.

Uno .... |

Dos .... | |

Tres .... | | |

Cuatro .... | | | |

Cinco .... | | | | |

Seis .... | | | | | |

Siete .... | | | | | | |

Ocho .... | | | | | | | |

Nueve .... | | | | | | | | |

Diez .... | | | | | | | | | |

53. Las decenas se pueden representar con esta figura × que significará **diez** Pongamos algunos ejemplos.

Nombres. Figuras.

Once.................. × |

Veintidos........... ×× ||

Treinta y tres...... ××× |||

Cuarenta y cuatro. ×××× ||||

Cincuenta y cinco. ××××× |||||

Sesenta y uno...... ×××××× |

Setenta y dos...... ××××××× |

Ochenta y tres..... ×××××××× |||

Noventa y cuatro. ××××××××× ||||

54. Las centenas se pueden representar con esta figura [que significará **cien.** Veamos unos ejemplos:

Nombres. Figuras

Ciento doce..................... [× ||

Doscientos treinta y dos..... [[××× ||

Trescientos diez y seis....... [[[× ||||||

Quinientos veintitrés.... .... [[[[[×× |||

Setecientos treinta y uno.... [[[[[[[××× |

55. De un modo semejante á los ejemplos anteriores se podrán representar por escrito los

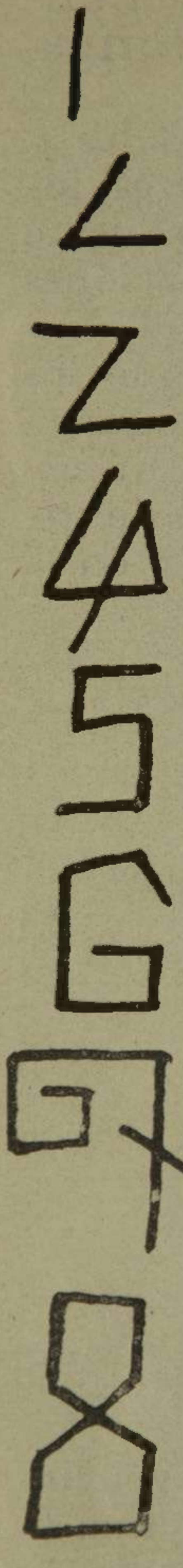
millares, las **decenas de millar,** las **centenas de millar,** los **millones, billones, trillones,** etc., etc.

Estos signos como se vé son convencionales y necesitaríamos para que todos los hombres los entendiesen, que fueran siempre iguales, lo mismo aquí en nuestro país que en las demás naciones del mundo.

Precisamente este fué el motivo por el que los hombres convinieron en aceptar una figurita constante para cada uno de los primeros números. Estas figuras han recibido el nombre de **cifras** y según que se usen en la escritura ó en la imprenta se dibujan del modo siguiente:

Nombres.	Cifras manuscritas.	Cifras de imprenta.
Uno	1	1
Dos	2	2
Tres	3	3
Cuatro	4	4
Cinco	5	5
Seis	6	6
Siete	7	7
Ocho	8	8
Nueve	9	9

Antiguamente estas cifras ó signos convencionales se procuró que cada una representara una figura equivalente al valor de ella por medio de



líneas rectas enlazadas en forma quebrada; de modo que el **uno** lo representaron con una raya, el **dos** con dos rayas, etc., según se observará en el adjunto cuadro:

Estas figuras se fueron modificando sucesivamente, perdieron la rigidez de la línea recta, se formaron con rectas y curvas combinadas, hasta llegar á adquirir la figura que hoy tienen y que nosotros ya conocemos, tanto en su forma manuscrita como en su forma impresa.

56 Estas nueve cifras escritas aisladamente como constan en el cuadro que precede, representan **unos** ó **unidades** y con ellos bastan para poder escribir toda clase de valores que no pasen de nueve.

Pero ¿cómo representaremos el diez, el veinte, el treinta, etc. y en general todas las **decenas** ó valores de **dieces**? Habría que inventar seguramente otros nueve signos distintos de los anteriores, de manera que colocándolos á la izquierda de las cifras de las unidades, pudiésemos representar todas las decenas desde el diez hasta el noventa y nueve.

Y el cien, el doscientos, el trescientos, el cuatrocientos, etc., hasta el novecientos ¿cómo podríamos representarlos? Inventando otros nueve signos distintos de las decenas y de las unidades y que tendrían el valor de las **centenas** ó **cientos**.

Del mismo modo habría que inventar otros nueve signos para los **millares**, otros nueve para las **decenas de millar**, y continuaríamos así inventando de nueve en nueve sigos cada vez distintos, para poder representar los demás ordenes, las **centenas de millar**, los **millones**, los **billones**, los **trillones**, etc., etc.

57. Nada se adelantaría si se hubiese adoptado este sistema de variados signos muy difícil por cierto de poderse conservar en la memoria; entonces se convino en usar los mismos signos que ya conocemos para representar con ellos todos los ódenes posibles ¿y de qué modo? de un modo muy sencillo: cambiándolos de lugar; de manera que el uno ó sea 1 sólo: vale **uno** ó **una unidad**; si lo pasamos á la izquierda en segundo lugar dejando libre un hueco ó pequeño espacio, vale **diez** ó **una decena**, si lo pasamos al tercer lugar de la izquierda vale **cien** ó **una centena**; si lo pasamos al cuarto lugar de la izquierda vale **mil** ó **un millar**; al quinto lugar **diez mil**, al sexto lugar **cien mil**, al séptimo lugar **un millón**, al octavo lugar **diez millones**, y así sucesivamente como podrá observarse en el siguiente cuadro:

l m u	c	d	l u	c	d	m u	c	d	u
									1
								1	
							1		
						1			
					1				
				1					
			1						
		1							
	1								
1									

Las iniciales u, d y c significan respectivamente: unidades, decenas y centenas; $^{m}_{u}$ significa unidades de milar; $^{l}_{u}$ significa unidades de millón; $^{l}_{\substack{m\\u}}$ significa unidades de millar de millón, etc.

El primer uno 1 colocado á la derecha vale uno, el segundo diez, el tercero cien, el cuarto mil, el quinto diez mil, el sexto cien mil, el séptimo un millón, el octavo diez millones, el noveno cien millones, el décimo mil millones; etc.

Del mismo modo el 2 colocado en los mismos lugares respectivamente valdrá: dos, veinte, doscientos etc. El 3 colocado en dichos lugares valdrá: tres, treinta, trescientos, etc. y así sucederá si se colocan en los mismos lugares los demás números 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

58. La dificultad que existía de inventar muchos signos ha quedado destruida, empleando sólo nueve signos que cambiándolos de lugar representan todos los números posibles.

Pero como no sería fácil al escribir los números disponer de un rayado especial cuadriculado, como se vé en el cuadro, de manera que al escribir el número diez mil por ejemplo tuviesemos que hacerlo de este modo algo complicado y difícil,

1				

fué necesario inventar un nuevo signo, ó una nueva cifra para ocupar los cuadros vacíos, es decir los huecos, la nada ó mejor dicho la falta de otros órdenes que como en el ejemplo propuesto, se vé claramente que no existen las unidades, las decenas, las centenas y los millares y para no dejar esos vacíos ni tampoco imponernos el trabajo de dibujar los cuadritos, se inventó el nuevo signo que los sabios le llamaron cero ó sea la cifra para representar por escrito la nada y cuya figura es una O grande, de manera que el número diez mil quedará escrito así:

10000

y el cuadro anterior se podrá sustituir como sigue:

Nombres.	Cifras.
Uno	1
Diez	10
Cien	100
Mil	1000
Diez mil	10,000
Cien mil	100 000
Un millón	1.000,000

59. Muy fácil nos será ahora, representar con cifras un número cualquiera en el momento de oir su enunciado. Pongamos algunos ejemplos:

(*a*) Cuarenta y siete, unidades.

Este número consta de dos partes, cuarenta es la primera, es decir cuatro decenas ó sea segundo lugar se escribirá así: 40 y las siete unidades ó sea primer lugar, se escribirá así: 7. Pero como en el número 40 hay un lugar vacío el de las unidades ocupado por el cero, lo ocupo con la cifra 7, que también representa unidades y quedará escrito así: 47.

(*b*) Trescientos noventa y cinco unidades.

Consta de tres partes: Trescientas, tercer lugar ó sean tres centenas ó 300, noventa, segundo lugar ó sean nueve decenas ó 90. Cinco, unidades, primer lugar ó 5, de manera que el número trescientos noventa y cinco, equivale á 3 centenas, 9 decenas y 5 unidades y poniendo estas cifras en lugarde los ceros quedaráescrito así: 395.

(*c*) Ocho mil quinientos treinta y dos unidades.

Consta de cuatro partes: ocho mil cuarto lugar, ó sean ocho millares ú 8000, quinientos, tercer lugar ó sean cinco centenas ó 500. **Treinta**, segundo lugar ó sean tres decenas ó 30. **Dos** unidades ó 2. De manera que el número ocho mil quinientos treinta y dos se forma de 8 millares, 5 centenas, 3 decenas y 2 unidades y se escribirá así:

8 5 3 2.

(*d*) **Veinticinco mil doscientas cuarenta y tres** unidades.

Consta de cinco partes: **veinte mil,** 20000; **cinco mil**, 5000; **doscientos,** 200; **cuarenta,** 40; y **tres,** 3 unidades. De otro modo: 2 decenas de millar, 5 millares, 2 centenas, 4 decenas y tres unidades, se escribirá así:

2 5 2 4 3.

(*e*) **Ochocientas noventa y dos mil, seiscientas catorce** unidades.

Consta de seis partes: **ochocientos mil,** 800000; **noventa mil,** 90000; **dos mil**, 2000; **seiscientos,** 600; **diez,** 10; y **cuatro,** 4 unidades. De otro modo: 8 centenas de millar, 9 decenas de millar, 2 millares, 6 centenas, 1 decena y 4 unidades. Se escribirá asi:

8 9 2 6 1 4.

60 Ninguna dificultad presenta la escritura de números de tres cifras, es decir, los números formados con los tres primeros órdenes que hemos llamado de la **primera clase** ó sean las unidades simples.

La **segunda clase** ó sean las unidades de millar; la **tercera clase** ó unidades de millón; la **cuarta clase** ó unidades de millar de millón; la **quinta clase** ó unidades de billón, etc., etc., se escriben también sin dificultad, porque sabemos ya que cada clase consta siempre de tres órdenes sucesivos: **unidades, decenas** y **centenas**, y por consiguiente, el mejor modo de descomponer un número grande formado de varios órdenes, es enunciarlo en clases y así se facilitará su escritura comenzándola por las clases más altas hasta terminar con la primera clase de las unidades simples que es la más baja. Pongamos algunos ejemplos:

(a) *Ciento veinticinco millones, cuatrocientos treinta y dos mil, seiscientas cuarenta y nueve unidades.*

Se notan claramente tres clases: ciento veinticinco millones, 125.000,000; cuatrocientos treinta y dos mil, 432,000; y seiscientas cuarenta y nueve, 649 unidades. Se escribirá así:

125 432 649

(b) *Ochocientos cuarenta y dos billones, ciento cuarenta y cinco mil doscientos setenta y tres millones, seiscientas catorce mil trescientas noventa y dos unidades.*

Hay en este número cinco clases: ochocientos cuarenta y dos billones, 842.000,000.000,000; ciento cuarenta y cinco mil millones,.............. 145,000.000,000; doscientos setenta y tres millones, 273.000,000; seiscientas catorce mil, 614,000; y trescientas noventa y dos, 392 unidades. Se escribirá así:

842 145 273 614 392

61. Como se ve en todos los ejemplos precedentes de números escritos, las clases se distinguen perfectamente por estar formadas cada una de tres cifras; no obstante eso, conviene distinguirlas con mayor claridad, y al efecto se acostumbra señalarlas con una **coma** todas las que expresan millares, y con un **punto** todas las que expresan millones, billones, trillones, etc., escribiendo además arriba de los puntos las cifras 1, 2, 3, etc., en forma más pequeña, para poder leer con más facilidad y de un solo golpe de vista todo el número por más grande que sea y esté formado de muchos órdenes.

El número propuesto en el último ejemplo que consta al final del párrafo anterior quedaría bien escrito del modo siguiente:

$842.^{2}145,273.^{1}614,392$.

62. Hay multitud de números en los cuales no se enuncian todas las clases, lo cual quiere decir que esas clases que no se enuncian, no podrán representarse con cifras que tengan valor, sino simplemente con **ceros.** Pongamos algunos ejemplos:

(*a*) ***Tres trillones, cuarenta mil doscientos millones, nueve mil unidades.***

En este número se pueden considerar **siete** clases distintas; la séptima de los **trillones** existe valorizada; la sexta de los **millares de billón** no existe; la quinta de los **billones** tampoco existe; la cuarta de los **millares de millón** existe, la tercera de los **millones** existe, la segunda de los **millares** existe y la primera de las **unidades simples** no existe. Se escribirá así.

$$3.^{3}000,000.^{2}040,200.^{1}009,000.$$

(*b*) *Doscientos mil billones, quinientos millones, una unidad.*

En este número hay seis clases: la sexta de los **millares de billón**, la tercera de los **millones** y la primera de las **unidades simples** tienen valores expresos; y no los tienen la quinta de los **billones**, la cuarta de los **millares de millón** y la segunda de los **millares** El número que resulta se escribirá así:

$$200,000^{2}000,500.^{1}000,001.$$

63. En todos los ejemplos anteriores que hemos propuesto para escribir un número cualquiera compuesto de varios órdenes, se observa lo siguiente:

I. Se escribe la clase más alta colocando sus tres órdenes de manera que las unidades ocupen el primer lugar, las decenas el segundo lugar de la izquierda, y las centenas el tercer lugar también á la izquierda de las decenas.

II. Se continúan escribiendo las demás clases, cubriendo con ceros los órdenes que no tengan alguna cifra de valor.

III. Se señalan con comas los órdenes que expresan millares y con puntos los órdenes que expresan millones, billones, trillones, etc., colocando arriba de los puntos en cifras pequeñas los números 1, 2, 3, etc., respectivamente.

64. Una serie de cifras colocadas en línea recta y de derecha á izquierda, representa un número que podrá leerse con facilidad si antes lo señalamos comenzando por la derecha con comas y puntos en los millares y en los millones, billones, etc. respectivamente. La lectura se comenzará por las clases superiores y se terminará con la de las unidades simples.

Sea el número siguiente:

3000890001003000 2

Poniéndole comas y puntos quedará:

30,008.² 900,010.¹ 030,002.

Se leerá así: treinta mil ocho billones, novecientos mil diez millones. treinta mil dos unidades.

65. Después de las explicaciones anteriores para representar por escrito los números, podemos hacer el siguiente resumen:

I. Hemos visto que la cifra 1 por ejemplo, vale uno siempre; pero si cambia de lugar vale 10, 100, 1000, etc., luego:

Toda cifra tiene dos valores: uno **absoluto** por su figura y otro **relativo** por el lugar que ocupa.

II. Hemos visto que una decena vale diez unidades, que una centena vale diez decenas, que un millar vale diez centenas, etc., luego:

Cada unidad de un orden superior vale **diez** unidades del orden inferior inmediato y al contrario; cada unidad de un orden inferior es la **dé-**

cima parte de las unidades del orden superior inmediato.

III. Hemos visto en la escritura que las decenas están á la izquierda de las unidades, que las centenas están á la izquierda de las decenas, etc., luego:

Cada cifra de la izquierda representa unidades de un orden superior inmediato y al contrario, cada cifra de la derecha representa unidades de un orden inferior inmediato.

IV. Hemos visto que cada clase consta de tres órdenes invariables: unidades, decenas y centenas, pero que solo se distinguen unas de otras por su valor; así el primer orden es de unidades simples, el cuarto unidades de millar, el séptimo unidades de millón, el décimo millares de millón, etc., luego:

Las unidades, decenas y centenas de que se compone cada clase se repiten contando de tres en tres lugares y el número del lugar que resulte marcará el orden y el nombre de la clase correspondiente.

V. Hemos visto que los millones, billones, trillones, etc., que hemos llamado géneros, constan de dos clases ó de seis órdenes; de manera que el primer orden se llama de unidades simples, el séptimo de unidades de millón, el treceavo unidades de billón, etc., luego:

Las unidades simples, las unidades de millón, las unidades de billón, etc., están entre sí colocadas á una distancia de seis órdenes y ocupan respectivamente el primero, el séptimo, el treceavo, etc., etc. lugar, en un número que consta de varias cifras.

Otras muchas observaciones curiosísimas podrían hacerse de todas las convenciones aceptadas en la escritura de los números, pero las expuestas bastan para que podamos comprender y admirar el ingenioso mecanismo inventado por los hombres con el fin de poder representar por escrito todos los números posibles, valiéndose de un grupo pequeñísimo de cifras, y cuyo conjunto de convenciones es lo que se ha llamado la **numeración escrita.**

Tanto la numeración hablada como la numeración escrita han recibido el nombre de sistema de numeración **decimal** por tener ambas como base fija y permanente el número **diez** para representar el valor de cada uno de los diversos órdenes numéricos.

66. Hemos dado nombres á todos los números, los hemos representado en la escritura por medio de un corto número de signos llamados **cifras**; podemos contar con ellos toda clase de grupos ó pluralidades descomponiéndolas en diez unidades componentes; ¿qué otras cosas, además de las indicadas, podrán hacerse con los números?

Examinemos algunos hechos para dar una respuesta satisfactoria á esta pregunta.

I. Si un grupo de naranjas lo juntamos con otro grupo de naranjas, habremos hecho una agregación ó un **aumento** de naranjas.

II. Si á un grupo de peras le quitamos algunas peras, habremos hecho una desagregación ó una **diminución** de peras.

III. Si á un depósito lleno de agua le ponemos enfrente otro depósito del mismo tamaño y con la misma cantidad de agua, habremos hecho una igualación ó **igualdad** de dos cantidades de agua.

Se vé pues por estos tres hechos que con las cantidades se pueden efectuar: **aumentos, diminuciones é igualdades.**

Y cuando estos aumentos y diminuciones se efectúan con números, entonces reciben el nombre de **operaciones numéricas**

Ejercicios. — 26 Representar por medio de rayas los números siguentes: ocho, tres, dos, cinco, cuatro, uno, nueve, seis, siete.— Si este signo × lo hacemos equivalente á diez rayas, ¿cómo representaremos los números siguientes: cincuenta, noventa, diez, ochenta, veinte, setenta, treinta, sesenta, cuarenta, cien?—Si un ciento lo representamos por este signo [, represente usted los númeres siguientes: novecientos, cien, ochocientos, doscientos, setecientos, trescientos, seiscientos, cuatrocientos, quinientos, mil.—Si diez cientos ó mil lo representamos así M, represente usted los números siguientes: nueve mil, un mil, ocho mil, dos mil, siete mil, tres mil, seis mil, cuatro mil, cinco mil, diez mil.

27. Con los mismos signos anteriores representar los números siguientes: quince, diez y ocho, veinticinco, treinta y siete, cuarenta y tres, cincuenta y uno, sesenta y dos, setenta y nueve, ochenta y cuatro, noventa y ocho.—Ciento cartoce, doscientos treinta y dos, trescientos veintiséis, cuatrocientos doce, quinientos once, seiscientos ochenta y cuatro, setecientos trece, ochocientos noventa y cuatro, novecientos diez y siete.—Mil ciento doce, dos mil quinientos veinte, tres mil ochenta y cuatro, mil quinientos diez y ocho, cinco mil ochocientos nueve, seis mil trescientos catorce, siete mil doscientos treinta y cuatro, ocho mil seiscientos quince, nueve mil doscientos cuarenta y nueve.

28. Trazar un cuadro que se divida en diez por diez, ó sean cien cuadritos, para escribir en ellos algunos números por medio de cifras. — Siete, ocho, tres, cuatro, uno, cinco, dos, nueve, seis unidades —Escribir decenas y unidades con cifras en el cuadro: diez y ocho, ventiuno, treinta y

nueve, cuarenta y dos, cincuenta y siete, sesenta y tres, setenta y cuatro, ochenta y cinco, noventa y seis.—Escribir en el cuadro centenas, decenas y unidades, con cifras: ciento catorce, doscientos veintinueve, trescientos cuarenta y ocho, cuatrocientos noventa y dos, quinientos setenta y siete, ochocientos diez y nueve, novecientos veinticuatro.—Escribir millares, centenas, decenas y unidades: un mil quinientos setenta y siete, un mil quinientos veintinueve, dos mil setecientos ochenta y tres, tres mil doscientos ochenta y cuatro, cuatro mil quinientos veintiocho, cinco mil doscientos setenta y cuatro, seis mil doscientos treinta y nueve, siete mil quinientos noventa y cuatro, ocho mil seiscientos catorce, nueve mil setecientos treinta y uno.

29. Usar el mismo cuadro anterior dejando el cuadro vacío cuando no se pronuncie la cifra correspondiente.—Diez, veinte, ciento, cuarenta, trescientos cuatro, cuatrocientos cincuenta, novecientos ocho, ochocientos.—Mil nueve, dos mil ochenta y cuatro, tres mil cuatrocientos cuatro, mil cincuenta, cinco mil, seis mil, doscientos uno, siete mil ocho. —Treinta mil, cuarenta mil nueve, sesenta mil doce, setenta mil quinientos, ochenta mil veinte, noventa y tres mil doscientos siete.—Trescientos mil doscientos, quinientos mil ochenta, seiscientos mil ciento nueve, ochocientos, seiscientos, ciento nueve mil quinientos nueve.

30. Escribir números al dictado con cifras escritas fuera del cuadro y empleando el cero ó sea la cifra que representa la nada.—Un millón trescientas noventa unidades.--Veintisiete millones setecientas mil cuatrocientas cincuenta unidades.—Cincuenta y cuatro millones ochenta mil ciento cuatro unidades.—Novecientos veinte millones cuatrocientas treinta mil quinientas una unidades.—Seiscientos millones setecientos mil doscientas unidades.—Seis mil millones cuatrocientas mil una unidades.—Dos mil siete millones siete mil cuatro unidades.—Veinte mil cuarenta millones, setenta mil ochenta unidades.—Ciento cinco mil, doscientos nueve millones, seiscientas cuatro mil ochocientas nueve unidades.

31. Escribir los números siguientes: setecientos mil trece billones, cuatro mil quinientos millones, veinte mil cuatro unidades.—Mil trillones, cien mil un billón, cien mil doce millones, trece mil cuatro unidades.—Nueve mil trillones,

doscientos mil treinta billones, cuarenta y cinco mil seis millones, siete mil ocho unidades.—Ochenta mil siete trillones, trescientos cuatro billones, seiscientos millones, cincuenta mil dos unidades.—Cinco mil trillones, ochocientos mil treinta billones, dos millones quinientas unidades.—Novecientos mil billones, ocho millones, trescientas dos unidades.—Doscientos trillones, ocho mil cuatrocientos treinta billones, trescientos veinticinco millones, cuatrocientas sesenta mil unidades.—Cincuenta trillones, ocho billones, nueve millones, ocho unidades.—Setenta trillones, novecientos billones, tres millones, cuatro unidades.

32. Leer los números siguientes: 1, 3, 5, 7, 9, 12, 15, 20, 40, 45, 89, 93, 100, 104, 290, 308, 906, 1080, 2000, 3400, 9040, 2008, 7049, 34002, 20904, 902700, 7003400, 20030094, 130700244, 1020304097, 30200070048, ... 3049072089724, 1300900020084.

33. Nombrar los órdenes: ¿cómo se llama el primer orden, el tercero, el quinto, el séptimo, el noveno, el onceavo, el treceavo, el quinceavo, el vigésimo? etc.—Lugar de los órdenes: ¿qué lugar ocupan los millares, las decenas simples, los millones, las centenas de millar, las decenas de millar de millón? etc.—¿Qué órdenes comprende la primera clase, la segunda, la tercera, la cuarta, la quinta, la sexta, la séptima? etc —¿A qué clases pertenecen las unidades simples, las de millar, las de millón, las de millar de millón, las de billón? etc.—¿A qué clases corresponden las decenas simples, las de millar, de millón? etc.—¿A qué clases corresponden las centenas simples, las de millar, de millón? etc.—¿De qué orden y de qué clase son las decenas de millón, las unidades de millar de billón, las centenas de millón? etc.

34. Cuántas unidades valen una decena simple, una centena, un millar?—Qué es la unidad respecto de la decena, la centena y el milllar?—Una centena ¿cuántas decenas vale?—¿Qué es la decena respecto de la centena?—Un millar ¿cuántas centenas vale?—¿Qué es la centena respecto del millar?—La decena de millar ¿cuántas unidades de millar, centenas, decenas y unidades simples vale?—¿Qué son las unidades simples, las decenas, las centenas y los millares respecto de las decenas de millar?—¿Qué son la decena simple, la centena y el millar respecto de la decena de

millar?—¿Cuántas decenas simples hay en una decena de millar?—Cuántas unidades, decenas y centenas simples hay en una centena de millar?—¿Qué son las centenas simples respecto de las centenas de millar?—¿Cuántos millares hay en un millón?—Cuántas decenas y centenas simples hay en un millón?—¿Qué son respecto del millón los millares y las unidades? etc.

35. Escriba usted por separado los órdenes con sus ceros correspondientes en que se descomponen los números que siguen: 75080, 234042, 7204972, 103040792, 70493024908. — Escriba usted veinticinco decenas simples. — Ciento ochenta y cuatro centenas simples. —Doscientos nueve millares. —Trescientas catorce decenas de millar. —Un mil nueve centenas de millar. —¿Con cuántas cifras se podrán escribir los números siguientes: treinta y un millones doscientos catorce billones; ciento veintisiete mil millones; seiscientos treinta y dos mil unidades; diez y nueve decenas de millar de millón? etc. —¿Qué significan las palabras dosena y docena, tresena y trecena, quincena y veintena, cuarentena, centena, y cómo están formadas?

CAPITULO VI.

— —

Operaciones de aumento.

67. Si juntamos un grupo de niños con otro grupo de niños; un montón de naranjas con otro montón de naranjas; un litro de agua con otro litro de agua; una docena de sillas con otra docena de sillas, etc., habremos efectuado varias operaciones de **aumento**.

Si en vez de juntar todas estas cosas las representamos por medio de puntos ó rayitas, en el pizarrón, en la pizarra ó en el papel, y después contamos el conjunto para averiguar cuántas rayas ó puntos resultan, habremos efectuado varias operaciones de **aumento**.

Si por último, en vez de los objetos mismos ó de su representación en figuritas escribimos las cifras ó sean los signos con que representamos los números, y escribimos además los resultados también con cifras, habremos verificado una operación de **aumento**.

Luego podremos ejecutar operaciones de **aumento** de tres modos diferentes, pero que todos conducen al mismo resultado.

I. Por medio de objetos.

II. Por medio de figuritas.

III. Por medio de cifras.

Examinemos algunos ejemplos.

68. ¿Cuántos centavos reuniré juntando **nueve** que tengo en la mano, con otros **ocho** que tengo en la bolsa?

El modo sencillo y natural de efectuar este aumento, es juntar los **nueve** centavos que están en la mano con los **ocho** centavos que están en la bolsa y contar en seguida el resultado. Hecha la operación se obtienen **diez y siete** centavos.

Pero si no tuviésemos los centavos, entonces nos valdríamos del lápiz y el papel y dibujaríamos **nueve** rayas primero y **ocho** rayas después, contaríamos en seguida el resultado que daría **diez y siete** rayas ó sea un número igual al de los centavos que deseabamos saber.

Encontrado el resultado podremos expresarlo por escrito ú oralmente empleando la siguiente frase: **nueve centavos más ocho centavos son diez y siete centavos.**

Y en general la agregación de nueve y ocho, ya sea que se refieran á centavos, á naranjas ó á otra cosa cualquiera, se diría así: **nueve más ocho es igual á diez y siete.**

Para las palabras **nueve, ocho** y **diez y siete** ya tenemos signos bien conocidos que son las cifras, y la frase anterior podríamos representarla del modo que sigue:

9 más 8 igual á 17.

Mucho se ha conseguido sustituyendo los nombres de los números con las cifras correspondientes; pero si en vez de emplear las palabras **más** é **igual** las cambiamos por los signos que se han inventado para sustituirlas que son: $+$ ó sean dos líneas perpendiculares que se cortan á iguales distancias para significar **más**, y $=$ ó sean dos líneas rectas horizontales paralelas para significar **igual.** Obtendremos el siguiente resultado:

$$9 + 8 = 17$$

que se leerá así: **nueve más ocho igual á diez y siete.**

69. Un niño compró el lunes **cuatro** canicas, el martes **siete**, el miércoles **cinco** y el jueves **ocho**, ¿cuántas canicas compró?

Juntándolas todas y contándolas después se obtendrían **veinticuatro** canicas.

A falta de canicas se dibujarían rayas, tantos grupos de rayas cuantas partidas de canicas se compraron, se juntarían después el primer grupo con el segundo: **cuatro más siete son once rayas**; estas once rayas se agregarían á las cinco siguientes y se diría: **once más cinco son diez y seis rayas**; estas diez y seis rayas se agregarían á las ocho restantes y se diría: **diez y seis más ocho son veinticuatro rayas.**

Todas estas agregaciones se podrían representar con cifras del modo siguiente:

$$4 + 7 = 11$$
$$11 + 5 = 16$$
$$16 + 8 = 24$$

Pues las cuatro partidas de canicas dan lugar á tres agregaciones que son las que resultan indicadas; pero muy bien se pueden representar en una sola expresión por medio de cifras como sigue:

$$4 + 7 + 5 + 8 = 24$$

que se leería así: **cuatro más siete más cinco más ocho igual á veinticuatro**.

En la cual se han suprimido los resultados de las agregaciones intermedias **once** y **diez y seis** para no pronunciar tanta palabra.

Pero si quisiéramos economizar más palabras, entonces, señalando las cifras 4, 7, 5 y 8 diríamos respectivamente **cuatro, once, diez y seis y veinticuatro** para referirnos solamente á los resultados intermedios hasta llegar al resultado final, veinticuatro canicas.

70. Un obrero trabajó durante tres años seguidos los siguientes días: 293 el primer año, 345 el segundo y 198 el tercero; ¿cuántos días trabajó en los tres años?

En esta cuestión no podremos juntar los días como hicimos con los centavos y con las canicas, porque no son cosas materiales; no podríamos tampoco dibujar tanta raya cuantas indican los números, porque sería muy dilatado dibujarlas y contarlas; finalmente no se pueden agregar dos números grandes con la misma facilidad que se agregan dos números pequeños; entonces ¿qué haremos para ejecutar esta agregación de días?

Lo primero que se ocurre es descomponer los tres números dados en sus órdenes correspondientes para facilitar la operación. Así el 293 se podrá descomponer en $200 + 90 + 3$, el 345 se descompondrá en $300 + 40 + 5$, y el 198 se descompondrá en $100 + 90 + 8$.

Ahora resultan en lugar de tres partidas nueve partidas que colocadas unas en seguida de otras quedarán así:

$$200+90+3+300+40+5+100+90+8$$

y juntando la primera con la segunda, la segunda con la tercera, etc., como hicimos en otro ejemplo anterior, resultarán las agrupaciones siguientes:

En la primera agregación, juntamos **centenas** con **decenas**; en la segunda **decenas** con **unidades**; en la tercera **unidades** con **centenas**; en la cuarta **unidades** con **decenas**; en la quinta **unidades** con **unidades**; en la sexta **unidades** con **centenas**; en la séptima **unidades** con **decenas** y en la octava **unidades** con **unidades**.

$$
\begin{aligned}
200+\ \ 90&=290\\
290+\ \ \ \ 3&=293\\
293+300&=593\\
593+\ \ 40&=633\\
633+\ \ \ \ 5&=638\\
638+100&=738\\
738+\ \ 90&=828\\
828+\ \ \ \ 8&=836
\end{aligned}
$$

A pesar de ser tan difícil ejecutar estas ocho agregaciones, lo hemos hecho juntando **órdenes diferentes**; quizá será más facil juntar **órdenes semejantes** y entonces las agregaciones se efectuarán por centenas, por decenas y por unidades del modo que sigue:

$$
\begin{aligned}
200 + 300 + 100 &= 600\\
90 + \ \ 40 + \ \ 90 &= 220\\
3 + \ \ \ \ 5 + \ \ \ \ 8 &= \ \ 16
\end{aligned}
$$

Pero aun así nos quedan otra vez tres partidas que podrán juntarse descomponiéndolas también en sus órdenes y juntándolas nuevamente con sus semejantes se obtendrá lo que sigue:

$$
\begin{aligned}
600 + 200 &= 800\\
20 + \ \ 10 &= \ \ 30\\
6 &= \ \ \ \ 6
\end{aligned}
$$

y como nos han resultado 8 centenas, 3 decenas y 6 unidades, podremos formar fácilmente el número 836 que es igual al resultado que obtuvimos anteriormente.

La operación se ha facilitado notablemente porque hemos logrado formar el número 836 con las tres partidas 293, 345 y 198, y en la experiencia anterior hemos comenzado á juntar **centenas con centenas, decenas con decenas y unidades con unidades;** no obstante eso nos resultó una segunda operación si bien es cierto más facil que la primera; pero de todos modos debemos evitar un segundo trabajo cambiando el orden; es decir, comenzar juntando mejor primero las unidades, después las decenas y al último las centenas, y entonces escribiremos la operación del modo siguiente:

$$3+5+8=16,$$

pero como hay 1 decena y 6 unidades en el resultado, las agregaremos á las demás decenas del modo siguiente:

$$10+90+40+90=230;$$

en este nuevo resultado hay 3 decenas y 2 centenas que agregaremos á las demás centenas del modo que sigue:

$$200+200+300+100=800.$$

El resultado final ha sido de 8 centenas, más 3 decenas, más 6 unidades ó sean

$$800+30+6=836$$

que es el resultado definitivo.

Este medio de ejecutar la operación de aumento propuesta no ofrece ya grandes dificultades; pero quizá sea más sencillo en vez de colocar las partidas de derecha á izquierda, sería mejor colocarlas de arriba á abajo, cada orden con sus semejantes. Hagamos, pues, la experiencia; coloquémosla del modo que sigue:

$$\begin{array}{c} 200+90+3 \\ 300+40+5 \\ 100+90+8 \end{array}$$

Los resultados serían comenzando por las unidades:

$$16+220+600,$$

y agregando las decenas y las centenas á sus semejantes, quedaría así:

$$6+30+800=836$$

que puestos debajo de las partidas anteriores y separados con una línea recta horizontal para que no se confundan con ellas, quedaría así:

$$\begin{array}{r} 200+90+3=293 \\ 300+40+5=345 \\ 100+90+8=198 \\ \hline 800+30+6=836 \end{array}$$

Pero como no es conveniente descomponer los números en sus órdenes respectivos, porque sería dilatado tanto por la descomposición misma como por la escritura, la mejor forma que resulta cómoda, facil y sencilla después de ensayar las anteriores, es escribir los números unos debajo de otros, de manera que se correspondan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas y las centenas con las centenas; de este modo la operación se facilita comenzándola por las unidades y agregando á las decenas las decenas completas que resulten, haciendo lo mismo con las centenas; pero teniendo siempre cuidado de dejar escritas con cifras las unidades y decenas sobrantes debajo de sus semejantes. La operación, según lo dicho, quedaría escrita exactamente igual á la que aparece colocada en el lado derecho del ejemplo que venimos examinando.

71. Aplicando este último modo de efectuar agregaciones á un ejemplo más grande, acabaremos de comprender sus ventajas en la ejecución de esta clase de operaciones de aumento.

Supongamos que se han asociado cinco comerciantes con el fin de formar una compañía; el primero puso un capital de 80,934 pesos; el segundo de 193,242; el tercero de 17,487; el cuarto de 300,502; y el quinto de 25,389; se desea saber ¿á cuánto asciende el capital social?

Estas agregaciones no las haremos materialmente, ni con figuras, ni descomponiendo en sus órdenes respectivos cada partida. Lo que haremos será escribirlas unas debajo de otras, de manera que se correspondan los órdenes semejantes; en seguida comenzaremos á efectuar las agregaciones por las unidades y terminaremos por el orden más alto. He aquí cómo procederemos:

4 unidades y 2 son 6, y 7 son 13, y 2 son 15, y 9 son 24; escribimos **4 unidades,** y las **dos** decenas completas las agregamos á las demas: 2 decenas y 3 son 5, y 4 son 9, y 8 son 17, y 8 son 25; escribimos **5 decenas,** y las **dos** centenas completas las agregamos á las demás; 2 centenas y 9 son 11, y 2 son 13, y 4 son 17, y 5 son 22, y 3 son 25; escribimos **5 centenas,** y los **dos** millares completos los agregamos á los demás: 2 millares y 3 son 5, y 7 son 12, y 5 son 17: escribimos **7 millares,** y **la** decena de millar completa la agregamos á las demás: 1 decena de millar y 8 son 9, y 9 son 18, y 1 son 19, y 2 son 21; escribimos **1 decena de millar** y las **dos** centenas de millar completas las agregamos á las demás: 2 centenas de milar y 1 son 3, y 3 son **6,** que escribimos en su lugar. El resultado fué de 617,554 unidades.

80,934
193,242
17,487
300,502
25,389
617,554

Como se ve con las cinco partidas de los socios, hemos formado un nuevo número total que es el resultado de todas las agregaciones, por medio de las cuales hemos llegado á averiguar á lo que ascendía el capital de los asociados.

72. Después de haber examinado detenidamente estos distintos ejemplos de agregaciones, podemos darle un nombre común á todas ellas: es lo que se ha llamado operacion de **sumar.**

A los números que entran en la ejecución de la suma se les llama **sumandos.**

Al resultado total de la operación se le llama **suma.**

Ahora sí nos será muy fácil comprender el siguiente resumen:

I. **Sumar** es una operación de **aumento** que consiste en formar por medio de agregaciones sucesivas de uno en uno un número total llamado **suma,** por medio de otros números parciales llamados **sumandos.**

II. La operación de **sumar** se efectúa de los modos siguientes:

(*a*) Si los sumandos son solamente dos números menores que diez, bastará agregar á uno de ellos todas las unidades del otro.

(*b*) Si los sumandos son más de dos números menores que diez, se van haciendo las agregaciones del modo siguiente: el primero con el segundo, el resultado con el tercero, el nuevo resultado con el cuarto y así sucesivamente.

(*c*) Si los sumandos son mayores que diez, se procederá así: se escriben unos debajo de otros de manera que los órdenes semejantes se correspondan; se trazará una línea recta debajo de ellos; se comenzará la operación por las unidades, después se continuará por las decenas, centenas y demás órdenes superiores; si las sumas de cada columna pasan de diez se escribe en su lugar el sobrante, y las unidades completas que se obtengan se sumarán con sus semejantes. El resultado será la suma total.

III. En la operación de sumar los sumandos pueden ser iguales ó desiguales. En ambos casos la suma podrá ejecutarse conforme á lo indicado en el párrafo anterior; pero se puede **abreviar** más la operación, cuando **los sumandos** sean **iguales** como lo veremos más adelante.

73. Supongamos que un obrero ha ganado durante una semana de lunes á sabado, 8 pesos dia-

rios; se desea saber ¿cuánto ganó en los 6 días de trabajo?

Se comprende fácilmente que hay que agregar á los 8 pesos del lunes los 8 del martes; al total los del miércoles, después los del jueves, en seguida los del viérnes y finalmente los del sábado. Es decir, el resultado se obtendría así:

lunes...............	1 vez	8 = 8	pesos.
martes............	2 veces	8 = 16	„
miércoles........	3 „	8 = 24	„
jueves.............	4 „	8 = 32	„
viérnes...........	5 „	8 = 40	„
sábado............	6 „	8 = 48	„

Se ve que hemos sumado 6 veces el 8, lo cual podremos indicar del modo siguiente:

$$8+8+8+8+8+8=48.$$

En esta suma todos los sumandos son iguales y no se necesita, por lo mismo, escribirlos todos, bastará escribir uno solo y á su izquierda el **número de veces** que se ha de repetir dicho sumando de esta manera:

6 veces 8 = 48.

Pero tampoco es conveniente mezclar palabras con números y en el resultado anterior hay la palabra **veces** que podremos sustituir con este nuevo signo × formado con dos líneas oblícuas que se cortan por su parte media, y la expresión anterior la escribimos de este modo sencillo:

$$6 \times 8 = 48$$

es decir, **seis veces ocho es igual á cuarenta y ocho.**

Para poder sumar con alguna rapidez varios sumandos iguales, hay que saber muy bien cuando menos las sumas de los diez primeros números repetidos de una á diez veces cada uno como constan en el siguiente cuadro; ya sea que se lean los resultados horizontal ó perpendicularmente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

74. Se reunieron cinco comerciantes con el fin de abrir una pequeña tienda; todos contribuyeron

con igual cantidad de dinero, ó sean 493 pesos por socio; ¿cuál era el capital de los cinco socios?

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, habrá que hacer la suma de las cinco partidas de dinero, y la haremos sencillamente del modo que nos es conocido.

En esta operación de sumar se observa que tanto las unidades como las decenas y las centenas, se han repetido 5 veces cada uno de dichos órdenes; de manera que podremos indicar dicha operación del modo que sigue:

$$\begin{array}{r} 493 \\ 493 \\ 493 \\ 493 \\ 493 \\ \hline 2,465 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 5\times 3 & = & 15 \\ 5\times 90 & = & 450 \\ 5\times 400 & = & 2000 \\ \hline & & 2465 \end{array}$$

y de un modo general

$$5 \times 493 = 2465.$$

Pero no se necesita seguramente: ni ejecutar la primera suma, ni escribir los tres resultados obtenidos; bastará escribir solamente el resultado final, haciendo antes la operación de este modo: 5 veces 3 unidades, son 15 unidades: escribo 5 y me sobra **una** decena; 5 veces 9 decenas, son 45 decenas y una que me sobró son 46 decenas: escribo 6 decenas y me sobran **cuatro** centenas; 5 veces 4 centenas son 20 centenas y cuatro que me sobraron son 24 centenas que escribo á continuación. El resultado final es de 2465 unidades ó sea el número de pesos que importa el fondo de la sociedad.

Sería indiferente comenzar la operación por las centenas ó por las unidades; pero recordemos que es más fácil comenzarla por las unidades; supuesto que lo único que hacemos hoy, es abreviar la suma empleando un medio más fácil y sencillo y de simple repetición de números iguales.

Pero ya que de abreviaciones se trata, podemos muy bien economizar algunas palabras más y la explicación anterior, en la que hemos nombrado los órdenes y hemos empleado la palabra **veces**; vamos á suprimir los primeros y á sustituir la segunda por la palabra **por** más corta, teniendo el propósito de que para nosotros indique lo mismo; diremos entonces: 5 por 3, 15 y va 1; 5 por 9, 45 y 1, 46; 5 por 4, 20 y 4, 24. Total, 2465. Todo esto al irlo diciendo, lo iremos escribiendo para no perder tiempo, ni gastar muchas palabras inútilmente.

75. En una ciudad hay 75 escuelas, habiendo 345 alumnos en cada escuela; se desea saber ¿cuántos alumnos hay por todos en dichas escuelas?

Se ve con toda claridad que hay que repetir el número 345 alumnos 75 veces; es pues una suma muy larga y conviene abreviarla desde luego; pero como el número 75 se puede descomponer en 70+5, es facil hacer primero la repetición con el 5 y en seguida se hará la repetición con el 70.

$$5 \times 345 = 1725.$$

El 70 podemos descomponerlo en 7×10; de manera que repitiendo el número 345 diez veces primero, nos será después muy facil repetir el resultado **siete veces** para agregarlo en seguida al número 1725 que antes hemos encontrado.

Observemos cómo se puede repetir un número cualquiera 10 veces en los siguientes ejemplos:

$$10 \times 1 = 10$$
$$10 \times 3 = 30$$
$$10 \times 8 = 80$$
$$10 \times 12 = 120, \text{ etc.}$$

los resultados son los mismos números con un **cero** á la derecha; luego si repetimos otros números más grandes, por ejemplo

$$10 \times 34 = 340$$
$$10 \times 45 = 450, \text{ etc.},$$

obtendremos resultados semejantes, de manera que el número 345 repetido 10 veces dará como resultado:

$$10 \times 345 = 3450.$$

Pero como hay que repetir ese nuevo resultado 7 veces, tendremos:

$$7 \times 3450 = 24150,$$

la operación se podrá disponer de este modo:

$$\begin{array}{r} 5 \times 345 = 1{,}725 \\ 70 \times 345 = 24{,}150 \\ \hline 75 \times 345 = 25{,}875 \end{array}$$

Hay 25,875 alumnos en las 75 escuelas.

Es muy cómodo disponer la operación en forma menos complicada, por ejemplo, de este modo:

El número que se va á repetir está arriba, el número que indica las veces que se va á repetir el primero está abajo precedido del signo $\times$ **por** ó **veces**; la línea recta que sigue es para separar los resultados. Obsérvese además que hemos suprimido el **cero** de las unidades del segundo resultado para disminuir el trabajo. Al final se vuelve á poner una nueva línea recta para efectuar la suma total y no confundirla con las anteriores. Por lo expuesto bien se comprende que todo este conjunto de cosas es un buen medio de abreviar la suma.

$$\begin{array}{r} 345 \\ \times\ 75 \\ \hline 1,725 \\ 24,15 \\ \hline 25,875 \end{array}$$

Esta operación de sumar en forma **abreviada** y cuando los sumandos son iguales, se la designa en general con el nombre de operación de **multiplicar**; particularmente se dice: duplicar, cuando se suman dos sumandos iguales; triplicar si son tres, cuadruplicar si son cuatro, quintuplicar si son cinco, etc., y **multiplicar** si son muchas veces; pero con este último nombre se distingue toda clase de repeticiones cualquiera que sea el número de veces que sea necesario repetir el número de que se trate.

Al número que se va á repetir se le llama **multiplicando,** al número que indica las veces que se va á repetir el primero se le llama **multiplicador** y á los resultados se les llama **productos;** parciales á los intermedios y total á la suma de todos los parciales. Dos ó más números que se multiplican reciben el nombre de **factores**.

Antes de hacer el resumen para indicar de un modo general cómo se multiplica, vamos á observar algunos ejemplos nuevos.

76. Una persona compró una partida de 304 pianos á razón de 1394 pesos cada uno; ¿cuánto debe pagar por su compra?

Si cada piano tiene un valor de 1394 pesos, es claro que este número debe sumarse tantas veces como pianos se compraron, es decir, 304 veces, por consiguiente se tendrá que efectuar una operación de multiplicar del modo que sigue:

$$\begin{array}{r} 1\,3\,9\,4 \\ \times\ \ 3\,0\,4 \\ \hline 5{,}5\,7\,6 \\ 4\,1\,8{,}2 \\ \hline 4\,2\,3{,}7\,7\,6 \end{array}$$

Como el multiplicador 304 contiene 4 unidades, formaremos el primer producto parcial con este número y el multiplicando y obtendremos 5,576. No habiendo decenas, supuesto que están representadas por **cero** no habrá tampoco producto. Con las 3 centenas como sabemos se hacen dos productos: el primero por 100 que da 139,400 y el segundo por 3 que da 418,200; pero como se suprimen los dos ceros solo se escribirá el número 4182 centenas. Sumando ambos productos parciales se obtendrá 423,776 pesos que es el valor de los pianos comprados.

Nótese que cuando en el multiplicador hay algún **cero** intercalado, no se forma producto por carecer dicho signo de valor, pero se deja en blanco el lugar respectivo, y se continúa la operación con el orden inmediato superior.

77. Supongamos que el número 483 deseamos multiplicarlo por 2500, ¿cómo se procederá?

Notemos desde luego que no puede haber productos de las unidades y las decenas por estar representadas con ceros; obsérvese además que el número 2500 puede descomponerse en dos factores 25×100; de manera que según esto habría que multiplicar primero por 25 el número 483 y después el producto obtenido por 100, agregándole solamente dos ceros á su derecha del mismo modo que se agrega un cero cuando se multiplica por 10. La operación se dispondrá así:

$$\begin{array}{r} 483 \\ \times\ 2500 \\ \hline 2215 \\ 966 \\ \hline 1.187,500 \end{array}$$

Como se ve, no ofrece ninguna dificultad esta multiplicación; cuando alguno de los factores termina en ceros, pues basta multiplicar primero las cifras y agregarse los ceros á la derecha del producto.

Lo mismo se hará si hubiere ceros en el multiplicando ó si en ambos factores los hubiera también, se contarían y se agregarían despues al producto.

Véanse los dos ejemplos siguientes:

3900	4900
$\times$34	$\times$ 230
156	147
117	98
132,600	1.127,000

78. En la práctica, cuando se trata de multiplicar dos números, conviene siempre elegir como multiplicador el más sencillo, es decir, el que tenga menor número de cifras. En efecto, si observamos la multiplicación de 3×4 se verá que 3 veces 4 y 4 veces 3 dan el mismo resultado:

$$4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3$$

por lo mismo

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

y de este hecho bastante sencillo se puede concluir que el cambio de orden en los factores no altera para nada el producto.

79. Después de las diversas observaciones hechas en los ejemplos precedentes de multiplicaciones podremos formular el resumen siguiente:

I. **Multiplicar** es una operación de **aumento** que consiste en sumar un número llamado **multiplicando** tantas veces cuantas unidades tenga otro llamado **multiplicador**, y cuyo resultado ó suma total recibe el nombre de **producto**.

II. La operación de **multiplicar** se efectúa del modo siguiente:

(*a*) Si los factores son dos números menores que diez, el producto se obtiene efectuando la suma de uno de ellos tantas veces como unidades tenga el otro; pero estos resultados deben retenerse siempre en la memoria.

(*b*) Si uno de los factores consta de varias cifras y el otro de una sola cifra, entonces se escribe el mayor arriba, el menor abajo; después se traza una línea recta horizontal y se comienza á efectuar la multiplicación por las unidades, tomándola tantas veces cuantas indique el multiplicador; en seguida se forma el producto de las decenas agregándole las decenas sobrantes del producto anterior; se continúa así con las centenas, millares, etc., hasta terminar con el orden más alto del multiplicando.

(*c*) Si los dos factores constan de varias cifras, se escribe el menor debajo del mayor, se traza una línea recta horizontal, se forma el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador; en seguida se forma el nuevo producto del multiplicando con las decenas del multiplicador, escribiéndolo en la columna de las decenas; se forma después el producto de las centenas y se escribe en la columna de las centenas; después se continúa con los millares, decenas de millar, etc., colocando los productos respectivos debajo de las columnas correspondientes; por último se sumarán todos los productos parciales y el resultado será el producto total que se buscaba.

(*d*) Si uno de los factores es la unidad seguida de ceros, se obtiene el producto, agregando al otro factor tantos ceros como sean los que acompañan á la unidad.

(*e*) Si un factor ó los dos terminan en ceros, se prescinde de ellos, se efectúa la multiplicación con las cifras y al producto se le agregan á la derecha los ceros que contengan ambos factores.

(*f*) Si entre las cifras del multiplicador hay uno ó varios ceros intercalados, el producto se obtiene multiplicando solamente las cifras significativas, teniendo cuidado de colocar el producto debajo de la cifra del multiplicador que lo ha producido y suprimiendo por consiguiente los resultados nulos que se obtendrían con los ceros intercalados.

80. Las operaciones de **aumento** son dos:

I. **Sumar** ó sea la agregación de dos ó más sumandos desiguales ó iguales.

II. **Multiplicar** ó sea la agregación de dos ó más sumandos forzosamente iguales.

Ejercicios.—36. Agregar el número uno: un cubo y un cubo hasta nueve cubos y un cubo.—Agregar el número dos: dos cubos y dos ¿cuánto es? ¿y dos? ¿y dos? hasta llegar á veinte.—Tres cubos y dos ¿cuánto es? ¿y dos? ¿y dos? hasta llegar á veintiuno. — Agregar el número tres: tres y tres cubos ¿cuánto es? ¿y tres? ¿y tres? hasta llegar á treinta.—Cuatro cubos y tres ¿cuánto es? ¿y tres? ¿y tres? hasta llegar á treinta y uno.— Cinco cubos y tres ¿cuánto es? ¿y tres? ¿y tres? hasta llegar á treinta y dos.—Agregar el número cuatro: cuatro cubos y cuatro ¿cuánto es? ¿y cuatro? ¿y cuatro? hasta llegar á cuarenta.— Cinco cubos y cuatro ¿cuánto es? ¿y cuatro? ¿y cuatro? hasta llegar á cuarenta y uno.—Seis cubos y cuatro ¿cuánto es? ¿y cuatro? ¿y cuatro? hasta llegar á cuarenta y dos. — Siete cubos y cuatro cuánto es? ¿y cuatro? ¿y cuatro? hasta llegar á cuarenta y tres.

37. Agregar el número cinco: cinco cubos y cinco ¿cuánto es? ¿y cinco? ¿y cinco? hasta llegar á cincuenta. — Seis cubos y cinco ¿cuánto es? ¿y cinco? etc , hasta llegar á cincuenta y uno.—Siete cubos y cinco ¿cuánto es? ¿y cinco? etc., hasta cincuenta y dos.—Ocho cubos y cinco ¿cuánto es? ¿y cinco? etc., hasta cincuenta y tres.—Nueve cubos y cinco ¿cuánto es? ¿y cinco? etc., hasta cincuenta y cuatro.—Agregar el número seis: seis cubos y seis ¿cuánto es? ¿y seis? etc., hasta sesenta. Siete cubos y seis ¿cuánto es? ¿y seis? etc., hasta sesenta y uno. Ocho cubos y seis ¿cuánto es? ¿y seis? etc., hasta sesenta y dos. Nueve cubos y seis ¿cuánto es? ¿y seis? etc., hasta sesenta y tres. Diez cubos y seis ¿cuánto es? ¿y seis? etc., hasta sesenta y cuatro. Once cubos y seis ¿cuánto es? ¿y seis? etc., hasta sesenta y cinco.

38. Agregar el número siete: siete cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta. Ocho cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta y uno. Nueve cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta y dos. Diez cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta y tres. Once cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta y cuatro. Doce cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta y cinco. Trece cubos y siete ¿cuánto es? ¿y siete? etc., hasta setenta y seis?

39. Agregar el número ocho: ocho cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta. Nueve cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y uno. Diez cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y dos. Once cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y tres. Doce cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y cuatro. Trece cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y cinco. Catorce cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y seis. Quince cubos y ocho ¿cuánto es? ¿y ocho? etc., hasta ochenta y siete.

40. Agregar el número nueve: nueve cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa. Diez cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa y uno. Once cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa y dos. Doce cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc.,

hasta noventa y tres. Trece cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa y cuatro. Catorce cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa y cinco. Quince cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa y seis. Diez y seis cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa y siete. Diez y siete cubos y nueve ¿cuánto es? ¿y nueve? etc., hasta noventa ocho.

41. Agregar el número diez: diez cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta cien. Once cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento uno. Doce cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento dos. Trece cubós y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento tres. Catorce cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento cuatro. Quince cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento cinco. Diez y seis cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento seis. Diez y siete cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento siete. Diez y ocho cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento ocho. Diez y nueve cubos y diez ¿cuánto es? ¿y diez? hasta ciento diez y nueve.

42. Sumar números que den cero en las unidades. Sumar el número 1 con los números: 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 y 99.—Sumar el 2 con los números: 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88 y 98.—Sumar el 3 con los números: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87 y 97. —Sumar el 4 con los números: 6, 16, 26, 36 46, 56, 66, 76, 86 y 96. — Sumar el 5 con los números 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85 y 95.

43. Sumar números que den 1 en las unidades. Sumar el 1 con 10, 20, 30, 40 ...... 100. Sumar el 2 con 9, 19, 29.........99. Sumar el 3 con 8, 18, 28 .... 98. Sumar el 4 con 7, 17, 27.........97. Sumar el 5 con 6, 16, 26 .... 96.

44. Sumar números que den 2 en las unidades. Sumar 1 con 1, 11, 21, 31.......101. Sumar 2 con 10, 20, 30 ...... 100. Sumar 3 con 9, 19, 29........ 99. Sumar 4 con 8, 18, 28........ 98 Sumar 5 con 7, 17, 27 .... 97. Sumar 6 con 6, 16, 26, 36........ 96.

45. Sumar números que den tres en las unidades. Sumar uno con dos, doce, veintidos ....ciento dos. Sumar dos con uno, once, veintiuno .... ciento uno. Sumar tres con diez, veinte, treinta......... cien. Sumar cuatro con nueve, diez y nueve, veintinueve........ noventa y nueve. Sumar

cinco con ocho, diez y ocho........ noventa y ocho. Sumar seis con siete, diez y siete .... noventa y siete.

46. Sumar números que den cuatro en las unidades. Sumar uno con tres, trece, veintitrés....... ciento tres. Sumar dos con dos, doce, veintidos........ ciento dos. Sumar tres con uno, once, veintiuno........ ciento uno. Sumar cuatro con diez, veinte, treinta.........cien. Sumar cinco con nueve, diez y nueve........ noventa y nueve. Sumar seis con ocho, diez y ocho........ noventa y ocho. Sumar siete con siete, diez y siete. ....noventa y siete.

47. Sumar números que den cinco en las unidades. Uno con cuatro, catorce........ ciento cuatro. Dos con tres, trece........ ciento tres. Tres con dos, doce........ ciento dos. Cuatro con uno, once ...... ciento uno. Cinco con diez, veinte........ cien. Seis con nueve, diez y nueve ...... noventa y nueve. Siete con ocho, diez y ocho.........noventa y ocho. Ocho con siete, diez y siete .... noventa y siete.

48. Sumar números que den seis en las unidades. Uno con cinco, quince........ ciento cinco. Dos con cuatro, catorce....... ciento cuatro. Tres con tres, trece .... ciento tres. Cuatro con dos, doce........ ciento dos. Cinco con uno, once........ ciento uno. Seis con diez, veinte........ cien. Siete con nueve, diez y nueve .... noventa y nueve. Ocho con ocho, diez y ocho........ noventa y ocho. Nueve con siete, diez y siete........ noventa y siete.

49. Sumar números que den siete en las unidades. Uno con seis, diez y seis.........ciento seis. Dos con cinco, quince........ ciento cinco. Tres con cuatro, catorce........ ciento cuatro. Cuatro con tres, trece........ ciento tres. Cinco con dos, doce.........ciento dos. Seis con uno, once ....ciento uno. Siete con diez, diez y siete........ cien. Ocho con nueve, diez y nueve.........noventa y nueve. Nueve con ocho, diez y ocho........ noventa y ocho.

50. Sumar números que den ocho en las unidades. Uno con siete, diez y siete........ ciento siete. Dos con seis, diez y seis........ ciento seis. Tres con cinco, quince .... ciento cinco. Cuatro con cuatro, catorce.........ciento cuatro. Cinco con tres, trece........ ciento tres. Seis con dos, doce .... ciento dos. Siete con uno, once........ciento uno. Ocho con diez, veinte........ cien. Nueve con nueve, diez y nueve........ noventa y nueve.

51. Sumar números que den nueve en las unidades. Uno con ocho, diez y ocho.........ciento ocho. Dos con siete, diez y siete.........ciento siete. Tres con seis, diez diez y seis .... ciento seis. Cuatro con cinco, veinticinco.........ciento cinco. Cinco con cuatro, catorce .... ciento cuatro. Seis con tres, trece .... ciento tres. Siete con dos, doce . .... ciento dos. Ocho con uno, once..........ciento uno. Nueve con diez, veinte.........Cien.

52. Sumar con números de una y dos cifras.—Siete cubos más nueve, más doce, más quince, ¿cuáto es?—Trinta más uno, más veinte, más veintiocho, ¿cuánto es?—Agregar los números uno, dos, tres y cuatro sucesivamente hasta llegar á cien.—Agregar sucesivamente los números cinco, seis y siete hasta cien.—Agregar sucesivamente los números ocho, nueve y diez hasta llegar á cien.—Sumar con números pares: 28 y 12, 34 y 18, 26 y 32, 74 y 16, etc.—Sumar con números impares: 17 y 31, 15 y 23, 19 y 27, 73 y 13, etc —Sumar duplicando: 15 y 15, 23 y 23, 37 y 37, 42 y 42, 57 y 57, 63 y 63, 72 y 72, 89 y 89, 93 y 93, etc.

53. Sumar decenas: 20 y 30, 70 y 40, 10 y 50, 80 y 90, etc —Sumar centenas: 100 y 500, 800 y 900, 300 y 200, 400 y 600, 200 y 700, etc.—Sumar decenas con decenas y unidades: 40 y 36, 20, 18, 70 y 14, 80 y 15, 60 y 32, etc.—Sumar decenas y unidades con decenas y unidades: 37 y 12, 14 y 21, 73 y 42, etc.—Sumar centenas y decenas con decenas: 650 y 30, 890 y 20, 710 y 40, 350 y 80, 290 y 50, etc.—Sumar centenas y decenas con decenas y unidades: 420 y 36, 870 y 14, 540 y 25, 230 y 17, 840 y 93, 780 y 73, etc.—Sumar unidades, decenas y centenas con unidades y decenas: 349 y 18, 842 y 73, 194 y 12, 375 y 43, etc.—Sumar decenas y centenas con decenas y centenas: 490 y 370, 810 y 420, 420 y 540, 630 y 510, etc.—Sumar unidades, decenas y centenas con decenas y centenas: 492 y 340, 587 y 250, 614 y 570, 725 y 830, etc.—Sumar unidades, decenas y centenas con unidades, decenas y centenas: 125 y 412, 639 y 842, 595 y 837, 629 y 842, etc.

54. Sumar por escrito números de tres cifras, cuya suma de los órdenes semejantes no pase de nueve: 325 y 473, 742 y 237, 143 y 845, 312 y 685, etc.—Suma escrita de números en los que la suma de algunos órdenes semejantes pase de nueve: 597 y 878, 6392 y 1587, 2971 y 9308, 9728 y

6437, etc.—Haga usted la suma siguiente: 397+8525+7300+97089+7897+6432 pesos.—¿Puede hacerce esta suma comenzando por cualquier orden, especialmente por los órdenes superiores?—¿Se puede hacer sin colocar los sumandos en columna vertical?—¿Por qué se comienza por las unidades?—¿Por qué se colocan en columna vertical?—¿Para qué se traza una línea recta debajo de los sumandos?—Qué cifra se escribe debajo de la recta y qué se agrega á la columna siguiente?

55. Sumar abreviando ó repetir un número: una vez un cubo, dos veces, tres veces, etc., hasta diez veces un cubo.—Una vez dos cubos, dos veces, tres veces, etc., hasta diez veces dos cubos—Una vez tres cubos, dos veces, tres veces, hasta diez veces tres cubos.—Una vez cuatro cubos hasta diez veces cuatro cubos.—Una vez cinco cubos hasta diez veces cinco cubos.—Una vez seis cubos hasta diez veces seis cubos.—Una vez siete cubos hasta diez veces siete cubos.—Una vez ocho cubos hasta diez veces ocho cubos.—Una vez nueve cubos hasta diez veces nueve cubos.—Una vez diez cubos hasta diez veces diez cubos.

56. Repetir el número dos de once á cincuenta veces.—El tres de once á treinta y tres veces.—El cuatro de once á veinticinco veces.—El cinco de once á veinte veces.—El seis de once á diez y seis veces.—El siete de once á catorce veces.—El ocho de once á doce veces.—Once veces nueve ¿cuánto es?

57. Ejercicios de repetición: unidades por unidades: 5 veces 8, 4 veces 7, 2 veces 9, etc.—Unidades por decenas: 3 veces 40, 8 veces 70, 7 veces 50, 6 veces 90 etc.—Unidades por unidades y decenas: 4 veces 25, 7 veces 37, 2 veces 94, 5 veces 87, 4 veces 29, etc.—Decenas por decenas: 20 veces 40, 80 veces 70, 50 veces 30, 70 veces 90, etc.—Unidades y decenas por unidades y decenas: 25 veces 17, 37 veces 49, 82 veces 73, 93 veces 74, etc.

58. Unidades por centenas: 4 veces 500, 8 veces 200, 7 veces 900, etc.—Unidades por decenas y centenas: 7 veces 450, 5 veces 690, 3 veces 410, 9 veces 770, 6 veces 890, etc. —Unidades por unidades, decenas y centenas: 2 veces 197, 3 veces 492, 4 veces 189, 5 veces 614, 6 veces 983, etc.—Repetir un número 10, 100, 1000, etc. veces: 10 veces 97, 100 veces 814, 1000 veces 937, 10000 veces 732, etc.—Repetir

un número terminado en cero: 4 veces 7000, 9 veces 4000, 70 veces 200, 400 veces 50, etc.

59. Repetir el número 679 cinco veces: (*a*) por medio de una suma; (*b*) por medio de productos parciales del cinco por las unidades, las decenas y las centenas. Hacer lo mismo con los números 374 tres veces, 8743 siete veces, 9312 ocho veces.—Repetir el número 397 noventa y siete veces: (*a*) descomponiendo el 97 en 7+90 y sumando los productos parciales.—Hacer lo mismo con los productos siguientes: 4392×79, 6324×49, 39428×83, etc.—Repetir el número 9342 setecientas treina y nueve veces, descomponiendo el 739 en 700+30+9 y sumando los productos parciales.—Hacer lo mismo con los productos siguientes: 4832×597, 7249×234, 73897×465, etc.

60. Repetir el número 2534 quinientas cuatro veces, ó sea 500+4 veces. En este caso ¿hay producto de decenas? ¿cómo se colocan los productos parciales para sumarlos?—Hacer lo mismo con los productos siguientes: 493×809, 2943×4003 72497×7009, etc.—Repetir el número 63400 setecientas cincuenta veces, ó sea 700+50. En este caso ¿cómo se colocan los productos parciales para sumarlos?—Hacer las multiplicaciones siguientes: 4900×3900, 29300×4090, 7009×40900, etc.—¿De qué modo se abrevia la operación cuando hay ceros en los factores?—¿Por dónde es más facil comenzar la multiplicación, por las unidades ó por los órdenes superiores?—Cuando se repite un número ¿qué es lo que se escribe y qué es lo que se agrega al producto siguiente?—Si se repiten pesos ó manzanas, ¿de qué especie será el producto?—Es indiferente para multiplicar invertir los factores?—¿Y cuál número será más cómodo aceptar como repetidor?

CAPITULO VII.

Operaciones de diminución.

81.—Si de un grupo de niños separamos algunos; de un montón de naranjas apartamos algunas; de un depósito de agua, quitamos una poca; de un centenar de sillas, rompemos algunas docenas, etc., habremos efectuado varias operaciones de **diminución**.

Si en vez de hacer materialmente con los objetos mismos las separaciones ó desagregaciones anteriores; representamos por medio de puntos ó de rayitas en el pizarrón, en la pizarra ó en el papel todas las cosas á que antes nos referimos, con el fin de ir tachando ó marcando con alguna señal las separaciones dichas, habremos efectuado varias operaciones de **diminución**.

Si por último, en vez de los objetos mismos ó de su representación en figuritas, escribimos las cifras como signos de los números para que indiquen los valores de los objetos ó de las rayas, en seguida indicamos con otra cifra el número de las rayas separadas y finalmente con otra cifra el resultado de la separación ó sea el número de los objetos ó rayas que quedan; habremos efectuado una operación de **diminución**.

Luego podemos ejecutar operaciones de **dimi-**

nución de tres modos diferentes; pero que todos conducen al mismo resultado.

I. Por medio de objetos.
II. Por medio de figuritas.
III. Por medio de cifras.

Examinemos algunos ejemplos.

82.—Un niño recibió de su papá una moneda de **veinte** centavos, dió á un pobre **cinco** centavos ¿cuántos centavos le quedaron al niño?

El medio más sencillo y natural de efectuar esta operación es cambiar la moneda por veinte centavos de cobre, tomar del conjunto cinco centavos para entregarlos al pobre y contar en seguida los centavos sobrantes. Hecha la operación resultarían **quince** centavos.

A falta del cambio en centavos podremos dibujar en el pizarrón, en la pizarra ó en el papel, veinte rayas; tachar ó marcar con una señal **cinco** rayas y contar en seguida las rayas que quedaron sin señal. El resultado sería igual á **quince** rayas; es decir, igual al número de centavos sobrantes.

El modo de enunciar dicho resultado en una sola frase oral ó escrita sería el siguiente: **veinte centavos menos cinco centavos son quince centavos.**

En general, toda separación ó desagregación que consista en quitar cinco de veinte, ya sea que se refiera á centavos, naranjas ó á otros objetos de distinta clase, se expresará así: **veinte menos cinco es igual á quince**

Pero como las palabras **veinte, cinco** y **quince** ya sabemos expresarlas por escrito con cifras, quedaría así:

20 menos 5 igual á 15

Y suprimiendo completamente las dos palabras que nos quedan **menos** é **igual** por los signos inventados al efecto, la expresión escrita quedaría más corta y más precisa Estos signos son:

— ó sea una línea recta horizontal para significar **menos** y

= dos líneas rectas horizontales paralelas para significar **igual,** cuyo signo ya nos es conocido.

La expresión escrita quedaría así:

$$20—5=15.$$

Veinte menos cinco igual á quince.

83.—Así como en la operación de sumar las agregaciones se efectúan facilmente cuando se trata de los números menores que diez, así también pasa una cosa semejante cuando se trata de las diminuciones con los mismos números. Quitar uno, dos, tres, etc. hasta quitar el número diez de otros números mayores que él, es cosa bien sencilla haciéndolo por medio de objetos, por medio de rayas dibujadas y aún á la memoria. Pero tratándose de quitar números más grandes que el diez de otros números mayores, es menos sencillo y necesitamos poner algunos ejemplos para comprender bien el modo de ejecutar con cierta facilidad y rapidez esas operaciones.

Supongamos que en una Escuela hay 578 niños de los cuales 245 no supieron sus cursos, ¿cuantos alumnos resultaron aprobados?

Haciendo la operación con los mismos niños habría que reunir los 578 alumnos, en seguida ir separando los 245 reprobados y finalmente contar los alumnos que quedaron para saber cuántos resultaron aprobados. La operación así ejecutada sería larga y algo difícil.

Si en vez de tener á los niños presentes, representamos con rayas los 578 que concurren á la Escuela, en seguida tachamos ó señalamos 245 rayas, para contar después las que quedan, llegaríamos seguramente al resultado; pero también con bastante trabajo y con una gran pérdida de tiempo.

Hay un medio práctico, bastante sencillo y en extremo rápido: Representemos el número 578 como sigue: las 8 unidades con ocho cubos de un centímetro; las 7 decenas con siete reglas de un decimetro lineal y las 5 centenas con cinco tablas de un decímetro cuadrado. Ahora bien, como de ese número tenemos que quitar 245 ó sean 5 cubos, 4 reglas y 2 tablas, es muy facil ejecutar la operación de un modo material, de esta manera:

8 cubos menos 5 cubos, quedan 3 cubos,
7 reglas menos 4 reglas, quedan 3 reglas,
5 tablas menos 2 tablas, quedan 3 tablas.

El resultado es de:

3 tablas, 3 reglas y 3 cubos

ó sean 3 centenas, 3 decenas y 3 unidades que sumadas producirán el número 333 ó sea el número de los niños que fuero aprobados.

Si en vez de los cubos, las reglas y las tablas escribimos con cifras sus valores, colocaremos para mayor claridad el número mayor arriba, el menor abajo y el resultado más abajo aún, separado con una linea recta horizontal del modo siguiente:

Número mayor 500+70+8=578

Número menor 200+40+5=245

Diferencia 300+30+3=333

Como ya tenemos alguna experiencia adquirida en la operación de sumar, la hemos aprovechado en las diminuciones hechas, es decir, los semejantes con los semejantes y además colocando los números del mismo orden unos debajo de otros y ejecutando las diminuciones por las unidades; aunque se ve que en el ejemplo propuesto es indiferente comenzarlas por las centenas. No obstante eso veremos en otro ejemplo distinto que siguiendo el orden de la menor á la mayor se obtienen las mismas ventajas que obtuvimos antes cuando comenzamos la suma por los órdenes inferiores en vez de comenzarla por los superiores.

84.—Una persona ha comprado mercancías por valor de 623 pesos y pagó al contado 457 pesos ¿cuánto quedó á deber?

Si representamos objetivamente el valor de la compra ó sean los 623 pesos por medio de 6 billetes de cien pesos, 2 de diez pesos, y 3 pesos en plata; y de ese valor quitamos el abono de 457 pesos ó sean 4 billetes de cien, 5 de diez y 7 pesos en plata, ¿de qué modo procederíamos para averiguar lo que quedábamos á deber?

Desde luego se presenta una dificultad; no podemos quitar de 3 pesos 7 pesos; tampoco podemos quitar de 2 billetes de á diez pesos 5 billetes del mismo valor; lo único que se puede hacer es quitar de seis billetes de á cien pesos 4 billetes del mismo valor; pero aun haciendo esta última separación sólo quedarían después de ejecutada 23 pesos, de los cuales no se pueden quitar los 57 pesos restantes, porque no alcanzan, ¿que convendrá entonces hacer para facilitar la operación?

Procedamos por partes: si de 3 pesos no se pueden quitar 7 pesos, lo que hay que hacer es tomar para cambiarlo por plata un billete de á diez pesos y reuniendo este dinero con los 3 pesos, resultarán 13 pesos; de los cuales sí podemos quitar 7 pesos, es decir: 13 menos 7 quedan 6 pesos. Pero ahora solo nos queda un billete de á diez pesos, del cual no podemos quitar 5 billetes del mismo valor, tenemos forzosamente que tomar un billete de cien pesos para cambiarlo por diez billetes de diez pesos, los que reunidos con el billete sobrante darán 11 billetes y de estos sí podemos quitar 5 billetes, es decir 11 menos 5 quedan 6 billetes de diez pesos. Por último, nos quedan solamente 5 billetes de cien, de los cuales quitamos 4, es decir 5 menos 4 queda 1 billete de cien pesos. El sobrante consta pues de 1 billete de cien pesos, 6 billetes de diez pesos y 6 pesos en plata ó sean ciento sesenta y seis pesos (166) que es el dinero que se quedó á deber.

Si en vez de los billetes y los pesos, representamos el dinero por medio de cubos para las unidades, reglas para las decenas y tablas para las centenas, representaremos por escrito esta operación del modo que sigue:

6 tablas, 2 reglas, 3 cubos
menos 4 tablas, 5 reglas, 7 cubos

Pero como no se puede efectuar la operación, poque de 3 cubos no se pueden quitar 7, ni de 2 reglas se pueden quitar 5, haremos los cambios correspondientes de 1 regla por diez cubos y de 1 tabla por diez reglas y entonces la operación quedará así:

5 tablas, 11 reglas, 13 cubos
menos 4 tablas, 5 reglas, 7 cubos

diferencia 1 tabla, 6 reglas, 6 cubos.

Y como 1 tabla vale 100, 6 reglas valen 60 y 6 cubos 6 unidades, el resultado final será de 166 unidades.

Representemos ahora por medio de cifras el número mayor, el número menor y la diferencia:

$$600+20+3=623$$
$$\text{menos } 400+50+7=457$$
$$\text{diferencia } 100+60+6=166$$

En la práctica no se acostumbra descomponer los órdenes superiores en sus órdenes inferiores, porque sería dilatada la operación; los números se escriben sencillamente del modo que se indica á la derecha del ejemplo escrito anteriormente: el mayor arriba, el menor abajo, y una línea recta horizontal en seguida y debajo de ella la diferencia.

Para operar se dirá así: 3 unidades menos 7 unidades no puede restarse, tomo 1 decena que vale diez unidades para agregarlas á las 3 unidades y quedan 13 unidades, menos 7 quedan 6 unidades que escribo debajo; 1 decena menos 5 decenas no puede restarse, tomo 1 centena que vale diez decenas y 1 decena que les agrego son 11 decenas menos 5 quedan 6 decenas, que escribo á la izquierda de las unidades; 5 centenas menos 4 centenas queda 1 centena que escribo á la izquierda de las decenas.

La diferencia es de 166 unidades.

Cuando ya se puede operar del modo anterior, podemos abreviar el trabajo diciendo como sigue: 13 menos 7 son 6 unidades, 11 menos 5 son 6 decenas, 5 menos 4 queda 1 centena.

Pero como el número mayor es un todo; el menor una parte de él y la diferencia la otra parte que le falta, fácilmente se comprende que sumando el menor con la diferencia se obtendrá el número mayor, y así es en efecto.

Número menor+diferencia=número mayor.

$$457+166=623$$

En este hecho podemos fundarnos para efectuar la operación diciendo de un modo todavía más sencillo que los anteriores: 7 para 13 faltan 6 y va uno más 5 son 6 para 12 faltan 6 y va 1 y 4 son 5 para 6 falta ta 1. Resultado 166.

$$\begin{array}{r} 623 \\ -457 \\ \hline 166 \end{array}$$

85.—En una ciudad hay una población de 508,000 habitantes de los cuales perecieron en una catástrofe 132,654 ¿cuántos habitantes quedaron?

En esta cuestión hay que quitar del número mayor el número menor para encontrar la diferencia la cual indicará el número de habitantes que quedaron en la ciudad.

Si aplicamos el último modo, el más sencillo de todos de efectuar esta operación, tendremos que averiguar lo que le falta á cada cifra del número menor para ser igual á la cifra correspondiente del número mayor de manera que después de escribir el número mayor arriba, el menor abajo y trazar una linea recta horizontal debajo, procederemos del modo siguiente: 4 para 10 son 6, y va 1 y 5 son 6 para 10 son 4, y va 1 y 6 son 7 para 10 son 3, y va 1 y 2 son 3 para 8 son 5, y no va nada, 3 para 10 son 7, y va 1 y 1 son 2 para 5 son 3 que escribo á la izquierda.

$$
\begin{array}{r}
508,000 \\
-132,654 \\
\hline
375,346
\end{array}
$$

La diferencia es de 375,346 habitantes que quedaron en la ciudad después de la catástrofe.

86. Esta operación que hemos venido ejecutando y que consiste en desagregar, quitar ó disminuir un número menor de otro mayor, es lo que se ha llamado operación de **restar**.

Al número mayor se le llama **minuendo**, al número menor se le llama **substraendo** y al resultado de la operación se le llama **resta** ó **diferencia**

Hagamos un resumen de lo que hemos aprendido acerca de esta nueva operación.

I. **Restar** es una operación de **diminución** que consiste en quitar de un número mayor llamado **minuendo**, otro número menor llamado **substraendo** y cuyo resultado recibe el nombre de **resta** ó **diferencia**.

II. La operación de **restar** se efectúa del modo siguiente:

(*a*) Si el número menor que se va á restar consta de una sola cifra, es facil buscar la diferencia, quitando del número mayor una á una todas las unidades de que consta el número menor.

(*b*) Si el número menor ó substraendo consta de varias cifras, pero que cada una de ellas sea menor que su correspondiente del minuendo, entonces la diferencia, aun cuando se obtendrá fácilmente comenzando indistintamente por cualquier orden, es preferible, para no equivocarse, comenzar por las unidades, seguir después con las decenas, centenas, etc., hasta llegar al último orden superior de la izquierda.

(*c*) Si alguna de las cifras del substraendo es mayor que la correspondiente del minuendo, se le agregarán á esta cifra **diez** unidades de su orden y de la suma que resulte se restará la cifra inferior; teniendo cuidado al continuar la resta de agregar **una unidad** á la cifra del substraendo que siga inmediatamente á la izquierda.

III. En la operación de restar, el substraendo puede restarse una sola vez ó varias veces, cuantas esté contenido en el minuendo, y en ambos casos la operación se ejecutará del modo que se ha indicado anteriormente; no obstante, en el segundo caso, es decir, cuando el substraendo tenga que restarse **varias veces**, entonces la operación podrá **abreviarse**, como lo veremos más adelante.

87. Un profesor va á repartir 56 canicas entre 7 niños; ¿cuántas canicas le tocarán á cada niño?

El modo más natural de hacer este reparto sería dar una canica á cada niño, y como los niños son 7, le quedarían al profesor después del primer reparto:

56—7=49 canicas.

Un segundo reparto de otra canica más á los siete niños, dejaría una existencia al profesor de 49—7=42 canicas. Con el tercer reparto de otra canica más, quedarían 42—7=35 canicas. Después del cuarto reparto quedarían 35—7=28 canicas. Después del quinto reparto 28—7=21 canicas. Después del sexto reparto, 21—7=14 canicas. Después del séptimo reparto, 14—7=7 canicas. Después del octavo y último reparto, 7—7=0 canicas.

Véase el cuadro siguiente:

	Canicas.
Primer reparto:	56—7=49
Segundo „	49—7=42
Tercer „	42—7=35
Cuarto „	35—7=28
Quinto „	28—7=21
Sexto „	21—7=14
Septimo „	14—7= 7
Octavo „	7—7= 0

Y contando el número de repartos, resultan 8 repartos de una canica por niño en cada reparto, ó sean 8 canicas que corresponden á cada niño.

Hemos restado 8 veces el número 7 del número 56, cuyas restas, escritas en el cuadro anterior, podrán colocarse también del modo siguiente:

$$56-7-7-7-7-7-7-7-7=0.$$

Pero con el fin de economizar cifras se ha convenido para representar esta operación, en escribir el número que se va á repartir, arriba; el número que se va á restar varias veces, se escribe debajo, y ambos números separados por una línea recta horizontal, de este modo:

$$\frac{56}{7}=8$$

que se lee así: **cincuenta y seis entre siete igual á ocho;** es decir, hay que hacer de 56 canicas 7 grupos iguales de canicas, ¿cuántas canicas deberá tener cada grupo? 8 canicas fué el resultado de la operación.

Además de esta forma de representar la operación anterior, cuando no se quiere emplearla, se emplea otra, aunque poco usada, para escribir los números en línea recta. Entonces se escribe primero el número que se va á repartir, en seguida la línea recta pero con un punto arriba y otro abajo para que no se confunda con el signo **menos** usado en la resta; adelante se escribe el número que se va á restar varias veces; finalmente el resultado de la operación precedido del signo igual. El ejemplo anterior quedaría escrito así:

$$56 \div 7 = 8$$

cincuenta y seis **entre** siete igual á ocho. La palabra **entre** es el nombre del nuevo signo, ya sea que se use entre dos números uno arriba y otro abajo, pero sin puntos; ó bien seguidos por medio de la recta pero con puntos, según se observa en el ejemplo propuesto.

Ahora bien, cuando se trata de repartir los números del uno al cien entre otro número que no pase de diez, bastará saber á la memoria los resultados y si éstos son siempre exactos, podrán encontrarse en el cuadro que consta en el párrafo 67 referente á la multiplicación.

Hé aquí algunos ejemplos de estas pequeñas particiones:

$$\frac{18}{2}=9,\quad \frac{30}{3}=10,\quad \frac{24}{4}=6,\quad \frac{35}{5}=7.$$

88. Se trata de repartir 963 pesos entre 3 personas, ¿cuánto le tocará á cada una?

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, habría que restar el número 3 del número 963 muchas veces hasta dejar cero como última diferencia; y el número de veces que se hubiere efectuado dicha resta sería el número de pesos que le tocaría á cada individuo. Este modo de operar es demasiado largo y en extremo laborioso; no lo aceptaremos en el presente caso y emplearemos otro mucho más sencillo.

El dinero que trata de repartirse ó sea 963 pesos se puede representar por 9 billetes de á cien pesos, 6 billetes de á diez y 3 pesos en plata; de manera que la operación es bien sencilla y podrá disponerse del modo siguiente:

9 billetes de á cien pesos entre 3 personas, les tocará 3 billetes de á cien, ó sean...	$	300
6 billetes de á diez pesos entre 3 personas, les tocarán 2 billetes de á diez, ó sean..		20
3 pesos entre 3 personas, les tocarán á cada una..............................		1
Suma.........	$	321

De manera que la partición se indicaría así:

$$\frac{963}{3} = 321$$

La operación en el ejemplo propuesto, es indiferente comenzarla por las unidades ó por las centenas porque se obtienen resultados exactos; pero en el caso contrario, es decir, cuando haya resultados inexactos, será preferible comenzarla por los órdenes mayores para poder cambiar los sobrantes por órdenes menores como lo veremos más adelante.

89. Se trata de repartir 6245 pesos entre 5 personas, ¿cuánto le tocará á cada una?

Suponiendo que dispongamos de 6 billetes de á 1000 pesos, 2 de á 100, 4 de á 10 y 5 pesos, haremos la distribución como sigue:

6 billetes de á 1000 entre 5 personas, les toca á 1, ó sean..............................	$	1000

Pero como sobra un billete de á mil, lo cambiaremos por **diez** de á 100 y

2 que tenemos serán 12, que repartiremos entre 5 del modo que sigue:

12 billetes de á 100 entre 5 personas, les toca á 2 ó sean.............................	200
Pero como sobran dos billetes de á cien, los cambiamos por **veinte** de á 10 y 4 que tenemos serán 24 que repartiremos como sigue:	
24 billetes de á 10 entre 5 personas les toca á 4 ó sean.............................	40
Pero como sobran 4 billetes de á diez, los cambiamos por **cuarenta** pesos y 5 que tenemos serán 45, que repartiremos como sigue:	
45 pesos entre 5 personas les toca á......	9
Suma........... $	1249

Podremos indicar la partición hecha de este modo:

$$\frac{6245}{5} = 1249$$

Hemos comenzado por los millares para poder cambiar los sobrantes por centenas, después las centenas por decenas y las decenas por unidades, facilitando de ese modo la operación.

90. Vamos á repartir 20,748 pesos entre 57 personas, ¿cuántos pesos le tocarán á cada persona?

El dinero en efectivo constará de 20 billetes de á 1000; 7 de á 100, 4 de á 10 y 8 pesos. Observemos desde luego que 20 billetes de á 1000 entre 57 no alcanzan; hay que cambiarlos por billetes de á 100 que son 200 y 7 más que tenemos, quedarán 207. Dispondremos la operación del modo que sigue:

207 billetes de á 100 entre 57 personas, les toca á 3, ó sean........................	$ 300
Pero como son 57 grupos de 3 billetes los repartidos, tendremos 3×57=171 billetes que restados de 207 quedarán 207—171=36. Estos 36 billetes de á 100 cambiados por billetes de á 10 serán 360 y 4 que tenemos, quedarán 364 que vamos á repartir del modo que sigue:	
364 billetes de á 10 entre 57 personas, les toca á 6, ó sean............................	60
Pero como son 57 grupos de 6 billetes los repartidos, tendremos 6×57=342, que restados de 364 quedarán 364—242=22. Estos 22 billetes de á 10, cambiados por pesos darán 220 y 8 que tenemos quedarán 228 que vamos á repartir como sigue:	
228 pesos entre 57 personas les toca á 4 á cada persona............................	4
Suma......................	$364

Pero como son 57 grupos de á cuatro pesos cada uno los repartidos, tendremos $4 \times 57 = 228$, que restados de 228 pesos no sobra nada, porque 228 $-228 = 0$ pesos. Hecha la suma de los repartos resultan 364 pesos para cada persona.

Esta operación puede indicarse así:

$$\frac{20,748}{57} = 364.$$

91. Abreviando la explicación que antecede y escribiendo solamente las operaciones efectuadas que son tres restas, podremos colocar las cifras del modo que sigue:

1ª Resta: 207 billetes de 100 entre 57 tocan á 3.
—171......................$3 \times 57 = 171$

2ª Resta: 364 billetes de 10 entre 57 tocan á 6.
—342......................$6 \times 57 = 342$

3ª Resta: 228 pesos entre 57 tocan á 4.
—228......................$4 \times 57 = 288$

000

En la primera resta se **tantea** el número de billetes de á 100 que le tocan á cada persona, y como son 3, tendremos que repartir $3 \times 57 = 171$ billetes que restados de 207 quedan 36, los que cambiados por billetes de á 10 y agregando los que había ya, quedarán 364. En la segunda resta se **tantea** el número de billetes de á 10 que le tocan á cada persona, y como son 6, tendremos que repartir $6 \times 57 = 342$ billetes que restados de 364 quedan 22, los que cambiados por pesos y agregando los que hay, quedarán 228. En la tercera resta se **tantea** el número de pesos que le tocan á cada persona, y como son 4, tendremos que repartir $4 \times 57 = 228$ pesos que restados de 228 no queda nada.

92. Este modo de colocar las operaciones es todavía algo complicado y exige la escritura de algunas palabras y mucho espacio para desarrollar una partición que sea de varias restas. Suprimiremos esas palabras y las operaciones auxiliares y acercaremos más las cifras, separándolas para que no se confundan por medio de una raya vertical y otra horizontal, según se ve en el ejemplo siguiente:

```
207,4,8, | 57
—171     |-----
           364
———————
  364
 —342
———————
   228
  —228
———————
   000
```

El objeto de la raya vertical es separar el número 20,748 que indica los pesos que se van á repartir, para que no se confunda con el número 57 que indica las personas entre las cuales se va á repartir aquel dinero. Por medio de la raya horizontal separamos el número 57 que indica las personas, para que no se confunda con el número 364 que indica los pesos que le tocó á cada persona después de efectuado el reparto. Obsérvese además que el primer grupo de billetes de 100 ó sea el número 207 lo separamos de las demás cifras con una **coma**; hecha la primera resta separamos con otra **coma** la cifra 4 que escribimos á la derecha de la diferencia; en seguida efectuamos la segunda resta, y á la derecha de la diferencia se escribe la cifra 8, separándola arriba también con otra coma; finalmente hacemos la última resta cuya diferencia resultó nula.

El uso de la coma no ha tenido otro objeto que ir señalando ó marcando las cifras con las cuales se va operando para no repetir con ellas la misma operación.

93. Pero el modo más facil y sencillo de operar en una partición, es suprimir las restas parciales y efectuarlas al mismo tiempo que se van obteniendo los productos correspondientes. En la escritura de la operación también se suprimen dichas restas y solo se escriben las diferencias del modo siguiente:

20,7,4,8	57
3 6 4	364
2 2 8	
0 0 0	

Ahora, para efectuar la operación no podría hacerse seguramente formando productos completos y restarlos mentalmente, por ejemplo diciendo: 207 entre 57 tocan á 3 por 57 son 171 para 207 faltan 36; bajo el 4 y digo: 364 entre 57 tocan á 6 por 57 son 342 para 364 faltan 22; bajo el 8 y digo: 228 entre 57 tocan á 4 por 57 son 228 para 228 no falta nada. Este modo de operar es difícil porque no estamos acostumbrados á retener en la memoria resultados con números grandes, y por lo mismo, para vencer esa dificultad hay que ir descomponiendo cada operación auxiliar en partes cada vez más pequeñas, de modo que no sea necesario escribir otras operaciones intermedias, sino simplemente conservar en la memoria los pequeños resultados que se obtengan. He aquí cómo procederemos:

20 entre 5 tocan á 3 por 7 son 21 para 27 faltan 6 y van 2; 3 por 5 son 15 y 2 son 17 para 20 faltan 3. Se baja el 4: 36 entre 5 tocan á 6 por 7 son 42 para 44 faltan 2 y van 4; 6 por 5 son 30 y 4 son 34 para 36 faltan dos. Se baja el 8; 22 entre 5 son tocan á 4 por 7 son 28 para 28 cero y van 2; 4 por 5 son 20 y 2 son 22 para 22 cero.

Esta operación de restar en forma **abreviada** y cuando los números que se van á restar son iguales se le ha dado el nombre de operación de **dividir**. El número que se va á dividir ó del cual se van á quitar otros números iguales se le llama **dividendo.** Al número entre el cual se va á efectuar la división ó sea el que se va á restar varias veces del primero se le llama **divisor**. Al número que indica las veces que se ha efectuado la resta ó sea el resultado de la división se le llama **cociente**. Y si sobra algo del dividendo que ya no alcance para hacer un nuevo reparto se le llama **residuo**.

Observemos otros nuevos ejemplos de la operación de dividir antes de hacer el resumen correspondiente.

94. Se trata de repartir 3894 metros de manta entre 100 personas, ¿cuánto le tocaría á cada una?

Si se fueran á dar los metros de manta á 1 sola persona, es claro que los recibiría todos; á 2 personas les tocaría la mitad á cada una, á tres la tercera parte, á 4 la cuarta parte, etc., y á 100 la centésima parte á cada una; es decir, hay que hacer de 3894 metros 100 partes iguales, ó lo que es igual, hay que dividir 3894 entre 100.

Ejecutando la operación del modo más abreviado que nos es cono cido, obtendríamos 38 como cociente y 94 como resíduo; pero se observa además que el resíduo 94 está formado de las dos últimas cifras del dividendo y el cociente 38 de las primeras. De este hecho se puede afirmar que el número 3894 quedaría dividido entre 100 si sólo hubiesemos separado las dos últimas cifras considerándolas como resíduo y las primeras como cociente, de manera que la operación quedaría indicada así:

$$\begin{array}{r|l} 389{,}4 & \underline{100} \\ 089\ 4 & \ 38 \\ 09\ 4 & \end{array}$$

$$\frac{3894}{100}=38+\frac{94}{100}$$

Es decir tocarán á cada persona 38 metros de manta y el resíduo 94 metros que no alcaza para dividirlos entre 100 exactamente, habría que convertirlos en centímetros que repartidos les tocará á cada persona 94 centímetros de manta. Por eso queda agregado al cociente 38 en forma de una división indicada.

Si dividiéramos 8912 pesos entre 1000 personas les tocará á 8 pesos por persona y 912 milésimos de peso, ó sean

$$\frac{8912}{1000}=8+\frac{912}{1000}$$

En general cuando el divisor es 10, 100, 1000 etc. ó sea la unidad seguida de ceros, la división se ejecuta fácilmente separando á la derecha tantas cifras cuantos ceros haya; estas cifras serán el resíduo, y las restantes de la izquierda formarán el cociente al cual para ser completo se le aumentarán en forma de división indicada dicho resíduo como dividendo y la unidad seguida de ceros como divisor.

95. Puede darse el caso en que en una división el divisor termine en ceros, por ejemplo la siguiente.

$$\begin{array}{l|l} 38{,}9(74 & 1{,}4(00 \\ \cline{2-2} 10\,9 & 27+\dfrac{1174}{1400} \\ \;\,1\,174 & \end{array}$$

En este caso como el divisor 1400 puede descomponerse en 14×100 se dividirá primero el número 38974 entre 100; después el resíduo 389 se dividirá entre 14; el cociente será de 27 que habría que completar agregándole el resíduo 11 centenas ó 1100 dividido entre 1400; pero como á este resíduo le falta el aumento de 74 ó sea el resíduo anterior añadiéndolo, quedaría definitivamente convertido en 1174 que dividido entre 1400 será lo que falta para completar el cociente verdadero.

$$\frac{38974}{1400} = 27 + \frac{1174}{1400}$$

En general, cuando el divisor termina en ceros, para abreviar la operación, podrán separarse á la derecha del dividendo tantas cifras cuantos ceros haya en el divisor; se ejecutará la división con las cifras separadas que quedan á la izquierda teniendo cuidado de aumentar el resíduo que resulte con el valor de las cifras de la izquierda separadas en el dividendo.

96. Si tanto el dividendo como el divisor terminan en ceros podrá abreviarse la operación del modo siguiente:

Supongamos que se trata de dividir el número 497,000 entre el número 39,000. Como tanto el dividendo como el divisor pueden descomponerse en dos factores, en los cuales hay de común el número 1000 resultarían dos divisiones multiplicadas: la primera de 497 entre 39 y la segunda de 1000 entre 1000; pero como esta última dá 1 por cociente, es claro que al multiplicar este cociente por la primera división, dará el mismo resultado; por consiguiente el cociente que se obtenga de dicha división será el único cociente que se obtendría sin suprimir igual número de ceros en el dividendo y divisor juntos. Esta explicación podremos expresarla con cifras del modo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 497(000 & 39(000 \\ \hline 107 & 12+\frac{29}{39} \\ 29 & \end{array}$$

$$\frac{497000}{39000}=12+\frac{29}{39}$$

$$\frac{497}{39}\times\frac{1000}{1000}=\frac{497}{39}\times 1=\frac{497}{39}=12+\frac{29}{39}$$

Según esto, puede abreviarse muy bien una división cuando se da el caso de que el dividendo y el divisor terminen en ceros, separando igual número de ellos en el dividendo y en el divisor y ejecutando la operación tan sólo con las cifras separadas de la izquierda; el cociente que resulte será el verdadero aun cuando no se hubiesen suprimido dichos ceros.

97. Después de las observaciones hechas en los

ejemplos que preceden sobre varios casos de la división, podemos formular el siguiente resumen:

I. **Dividir** es una operación de **diminución** que consiste en restar de un número llamado **dividendo** otro número llamado **divisor,** tantas veces cuantas unidades tenga, otro llamado **cociente** que es el resultado de la operación.

II. La operación de **dividir** se efectúa del modo siguiente:

(*a*) Si el dividendo es un número menor que 100 y el divisor menor que 10, la división deberá hacerse á la memoria sabiendo de antemano el número de veces que el número menor cabe en el mayor.

(*b*) Si el dividendo fuese mayor que 100 entonces se escribirá dicho número poniendo á su derecha el divisor separado con una línea recta vertical y debajo del divisor otra recta horizontal para separar el cociente.

El primer dividendo parcial se formará separando con una coma de la izquierda del dividendo, tantas cifras cuantas tenga el divisor, ó una más si no bastaren para formar un número mayor que el divisor.

Se verá cuántas veces cabe el divisor en dicho dividendo parcial, la cifra que se obtenga se escribirá debajo del divisor, se multiplicará por él y se restará del referido dividendo parcial.

El segundo dividendo parcial se formará del resíduo anterior, colocándole á su derecha la cifra siguiente del dividendo; se buscará la cifra del cociente, se escribirá á la derecha de la anterior, se multiplicará por el divisor y se restará el producto del dividendo parcial respectivo; de este modo se continuarán formando los demás dividendos parciales, lo mismo que los cocientes y resíduos hasta llegar á la última cifra del dividendo.

En caso de que algún dividendo parcial después del primero sea menor que el divisor, se pondrá cero en el cociente antes de bajar la siguiente cifra del dividendo.

Ningún producto de la cifra del cociente por el divisor podrá ser mayor que el dividendo parcial, porque entonces no podrá restarse y tendrá que ser **menor** el cociente. Tampoco ningún resíduo deberá ser mayor que el divisor, porque entonces puede restarse aún el divisor y tendrá que ser **mayor** el cociente.

(*c*) Si el divisor es la unidad seguida de ceros se separan en el dividendo contando de derecha á izquierda tantas cifras como ceros haya en el divisor. Las cifras de la izquierda formarán el cociente y las de la derecha el resíduo.

(*d*) Si en vez de la unidad hay en el divisor una ó más cifras mayores seguidas de ceros, se separan éstos é igual número de cifras á la derecha del dividendo, se hace la división de las cifras significativas que no se hayan separado en el dividendo; pero al terminarla, se escribirán á la derecha del resíduo dichas cifras separadas, y entonces el divisor se considerará íntegro, es decir, con todo y los ceros de que consta.

(*e*) Si el dividendo y el divisor terminan en ceros, se suprime igual número de ceros en uno y otro y la división se ejecutará con las cifras restantes.

98. Las operaciones de **diminución** son dos:

I. **Restar** ó sea quitar un número menor de otro mayor una ó más veces.

II. **Dividir** ó sea averiguar cuántas veces un número menor está contenido en otro mayor.

Ejercicios.—61. Quitar el número uno: diez cubos menos un cubo hasta un cubo menos un cubo.—Quitar el número dos: Veinte cubos menos dos cubos hasta dos menos dos. Veintiun cubos menos dos cubos hasta tres menos dos.—Quitar el número tres: treinta menos tres hasta tres menos tres. Treinta y uno menos tres hasta cuatro menos tres. Trinta y dos menos tres hasta cinco menos tres.—Quitar el número cuatro: Cuarenta menos cuatro hasta cuatro menes cuatro. Cuarenta y uno menos cuatro hasta cinco menos cuatro. Cuarenta y dos menos cuatro hasta seis menos cuatro. Cuarenta y tres menos cuatro hasta siete menos cuatro.

62. Quitar el número cinco: cincuenta cubos menos cinco hasta cinco menos cinco. Cincuenta y uno menos cinco hasta seis menos cinco. Cincuenta y dos menos cinco hasta siete menos cinco. Cincuenta y tres menos cinco hasta ocho menos cinco. Cincuenta y cuatro menos cinco hasta nueve menos cinco.—Quitar el número seis: sesenta menos seis hasta seis menos seis. Sesenta y uno menos seis hasta siete menos seis. Sesenta y dos menos seis hasta ocho menos seis. Sesenta y tres menos seis hasta nueve menos seis. Sesenta y cuatro menos seis hasta diez menes seis. Sesenta y cinco menos seis hasta once menos seis.

63. Quitar el número siete: setenta menos siete hasta siete menos siete. Setenta y uno menos siete hasta ocho menos siete. Setenta y dos menos siete hasta nueve menos siete. Setenta y tres menos siete hasta dies menos siete. Setenta y cuatro menos siete hasta once menos siete. Setenta y cinco menos siete hasta doce menos siete. Setenta y seis menos siete hasta trece menos siete.

64. Quitar el número ocho: ochenta menos ocho hasta ocho menos ocho. Ochenta y uno menos ocho hasta nueve menos ocho. Ochenta y dos menos ocho hasta diez menos

ocho. Ochenta y tres menos ocho hasta once menos ocho. Ochenta y cuatro menos ocho hasta doce menos ocho. Ochenta y cinco menos ocho hasta trece menos ocho. Ochenta y seis menos ocho hasta catorce menos ocho. Ochenta y siete menos ocho hasta quince menos ocho.

65. Quitar el número nueve: Noventa menos nueve hasta nueve menos nueve. Noventa y uno menos nueve hasta diez menos nueve. Noventa y dos menos nueve hasta once menos nueve. Noventa y tres menos nueve hasta doce menos nueve. Noventa y cuatro menos nueve hasta trece menos nueve. Noventa y cinco menos nueve hasta catorce menos nueve. Noventa y seis menos nueve hasta quince menos nueve. Noventa y siete menos nueve hasta diez y seis menos nueve. Noventa y ocho menos nueve hasta diez y siete menos nueve.

66. Quitar el número diez: Cien menos diez hastas diez menos diez. Ciento uno menos diez hasta once menos diez. Ciento dos menos diez hasta doce menos diez. Ciento tres menos diez hasta trece menos diez. Ciento cuatro menos diez hasta catorce menos diez. Ciento cinco menos diez hasta quince menos diez Ciento seis menos diez hasta diez y seis menos diez. Ciento siete menos diez hasta diez y siete menos diez. Ciento ocho menos diez hasta diez y ocho menos diez. Ciento nueve menos diez hasta diez y nueve menos diez.

67. Quitar el número once comenzando sucesivamente con los números noveta y nueve, cien, cinto uno, ciento dos, ciento tres, ciento cuatro, ciento cinco, ciento seis, ciento siete, ciento ocho y ciento nueve.—Quitar el número doce comenzando sucesivamente con los números noventa y seis, noventa y siete ....hasta ciento siete.—Quitar el número trece comenzando sucesivamente con los números noventa y uno, noventa y dos.........hasta ciento tres

68. Quitar el número catorce comenzando sucesivamente con los números: noventa y ocho, noventa y nueve......... hasta ciento doce.—Quitar el número quince sucesivamente con los números: noventa, noventa y uno .... hasta ciento cinco—Quitar el número diez y seis comenzando sucesivamente con los números: noventa y seis, noventa y siete.........hasta ciento once.

69. Quitar el número diez y siete comenzando sucesiva-

mente con los números: ochenta y cinco, ochenta y seis ....hasta ciento uno.—Quitar el número diez y ocho comenzando sucesivamente con los números: noventa, noventa y uno.........hasta ciento siete.—Quitar el número diez y nueve comenzando sucesivamente con los números noventa y cinco, noventa y seis.........hasta ciento trece.

70. Quitar de cien sucesivamente los números siguientes: catorce, veinte, trece, siete, nueve, ocho —Quitar de cien sucesivamente hasta agotarse todos los números pares: dos, cuatro, seis, ocho y diez.—Quitar sucesivamente de cien hasta agotarse todos los números impares: uno, tres, cinco, siete y nueve.— Quitar sucesivamente de cien los números: once, trece, quince, diez y siete y diez y nueve.—Quitar sucesivamente de cien los números: doce, catorce, diez y seis, diez y ocho y veinte.

71. Restar decenas: 100 menos 30, 40 menos 10, 80 menos 50, etc.—Restar centenas: 500 menos 200, 700 menos 500, 800 menos 600, etc —Restar decenas de unidades y decenas: 86 menos 30, 93 menos 40, 79 menos 20, 47 menos 30, etc.—Restar decenas y unidades de decenas y unidades: 86 menos 45, 93 menos 57, 75 menos 23, etc.—Restar decenas de centenas y decenas: 680 menos 30, 490 menos 70, 570 menos 60, 960 menos 40, etc.—Restar decenas y unidades de decenas y centenas: 340 menos 34, 290 menos 87, 850 menos 75, etc.—Restar unidades y decenas, de unidades decenas y centenas: 592 menos 73, 879 menos 45, 649 menos 28, etc.—Restar decenas y centenas de decenas y centenas: 460 menos 240, 890 menos 520, 670 menos 250, etc.—Restar decenas y centenas de unidades, decenas y centenas: 437 menos 250, 892 menes 190, 645 menos 580, etc.—Restar unidades, decenas y centenas de unidades, decenas y centenas: 597 menes 134, 245 menos 192, 493 menos 329, etc.

72. Restas escritas 1,080 menos 395, 73,240 menos 2954, 123,590 menos 253,004, 7.100,000 menos 598,497, etc.—Para facilitar la operación recuérdese que se pueden representar las unidades, decenas y centenas con cubos, reglas y tablas; lo mismo los órdenes más altos.—¿Puede comenzarse la operación por los órdenes superiores?—¿Se puede hacer la resta sin escribir los números uno debajo de otro? —¿Es preciso colocar el número menor debajo del mayor? —¿Por qué se comienza por la unidades?—¿Por qué se co-

locan verticalmente los números? —¿Por qué se traza una raya debajo? —En una resta ¿qué números se suman para producir el minuendo.

73. Divisiones en las que el divisor es menor que diez: uno entre uno; dos entre uno, etc., hasta diez entre uno.— Dos entre dos; cuatro entre dos; seis entre dos; hasta cien entre dos.—Tres entre tres; seis entre tres; nueve entre tres, hasta noventa y nueve entre tres.— Cuatro entre cuatro; ocho entre cuatro .... hasta cien entre cuatro.—Cinco entre cinco; diez entre cinco.........hasta cien entre cinco.

74. Seis entre seis; doce entre seis.........hasta noventa y seis entre seis.—Siete entre siete; catorce entre siete......... hasta noventa y ocho entre siete — Ocho entre ocho; diez y seis entre ocho .. ..hasta noventa y seis entre ocho.— Nueve entre nueve; diez y ocho entre nueve.........hasta noventa y nueve entre nueve.—Diez entre diez; veinte entre diez ....hasta cien entre diez.

75. ¿En qué números del uno al cien cabe exactamente el once?—¿En qué números de la misma serie cabe el número doce?—¿Y el número trece?—¿El catorce?—¿El quince?—¿El diez y seis?—¿El diez y siete?—¿El diez y ocho?— ¿El diez y nueve?—¿El veinte?

76. Ejercicios mentales diversos: 80 entre 7, 18 entre 9, 63 entre 7, 81 entre 3, 56 entre 7, etc.—100 entre 20, 200 entre 50, 900 entre 30, 700 entre 10, 8 0 entre 40, etc. —740 entre 10, 890 entre 20, 570 entre 30, 960 entre 60, 840 entre 70, etc. —Con resultados inexactos: 7, 9, 11, 13, 17, etc., entre 2. - 23, 31, 47, 74, etc., entre 3.—25, 71, 43, 58, etc., entre 4.—21, 18, 14, 79, etc., entre 5.—29, 38, 44, 73, etc., entre 6.— 92, 41, 18, 74, etc., entre 7.—81, 18, 14, 91, 39, etc., entre 8.—12, 15, 70, 94, 88, etc., entre 9.—25, 37, 48, 53, 92, 18, 48, etc., entre 10.

77. Divisiones con cifras: 495 pesos entre 3 personas considerando las unidades como pesos, las decenas y centenas como billetes de 10 y 100 pesos respectivamente —Ejecutar la división de 8497 pesos entre siete personas haciendo la consideración anterior.—Hacer por el mismo estilo las divisiones siguientes: 43854 entre 9; 204718 entre 8; 53483 entre 5; 945870 entre 3, etc.

78.—¿Cuántas veces está contenido el número 47 en el número 85342? Hacer esta división por medio de restas parciales y después abreviando. Sígase la misma marcha con las siguientes divisiones: 79034 entre 29; 700,000 entre 192; 497323 entre 345; 6793 entre 100; 497,300 entre 290; 7300840 entre 710; 97000 entre 400, etc.

79. ¿Cómo se avrevia la división cuando hay ceros en el divisor?—¿Por qué la división se comienza por los órdenes mayores y no por las unidades?—¿Cómo se completa el cociente cuando hay resíduo?—¿Qué objeto tienen las líneas vertical y horizontal que se colocan á la derecha del dividendo para efectuar la división?—¿Por qué se separan con una coma las cifras del dividendo que se van dividiendo entre el divisor?—¿Por qué se separan en la primera división tantas cuantas hay en el divisor ó una más?—¿Puede haber un resíduo mayor que el divisor?—¿Por qué se pone cero en el cociente cuando un dividendo parcial no alcanza para dividirse entre el divisor?

80. Ejercicios mentales de suma y resta combinadas: siete más nueve, menos ocho, más trece, más once, más tres, menos cuatro ¿cuánto es? Doce menos cinco, más quience, menos doce, más tres, más dos, menos diez y siete ¿cuanto es? Ocho más cuatro, más doce, menos once, más cinco, más diez y nueve, menos siete ¿cuánto es?—Multiplicación y división combinadas: Ocho por cinco, por tres, dividido entre diez, multiplicado por cinco, dividido entre doce ¿cuánto es?—Seis por nueve entre dos, por tres, dividido entre nueve, multiplicado por cinco ¿cuánto es? etc. —Suma, resta, multiplicación y división combinadas: cinco, más doce, menos cuatro, por dos, más catorce, entre ocho ¿cuánto es? Ocho por nueve, menos dos, entre diez, por cuatro, entre catorce ¿cuánto es?—5 más 3, menos 1, más 12 por 2 entre 19 más 8 ¿cuánto es?—20 entre 4, por 9 entre 15, más 8 entre 11 ¿cuánto es?—$12+3+9-8-2+5\times3\div5$, ¿cuáto es? $18+4\div11\times5+9+7-2\div9$ ¿cuánto es? etc.

CAPITULO VIII.

Problemas con números enteros.

99. Observemos los siguientes fenómenos numéricos:

1º Un niño recibió **seis** centavos que le dió su papá y **cuatro** centavos más que le dió su mamá; ¿cuántos centavos recibió?

2º El mismo niño de sus **diez** centavos regaló **dos** centavos á un pobre, ¿cuántos centavos le quèdaron?

3º En seguida compró **cuatro** canicas á **dos** centavos cada canica, ¿cuánto le costaron?

4º Finalmente, regaló las **cuatro** canicas á dos hermanitos suyos, ¿cuántas canicas le tocaron á cada hermanito?

I. En cada uno de estos fenómenos numéricos se distinguen dos partes principales:

1º
- **I. Un niño recibió seis centavos que le dió su papá y cuátro centavos más que le dió su mamá.**
- **II. ¿Cuántos centavos recibió?**

2º
- **I. El mismo niño de sus diez centavos regaló dos centavos á un pobre.**
- **II. ¿Cuántos centavos le quedaron?**

3º { I. En seguida compró **cuatro** canicas á **dos** centavos cada canica.
II. ¿Cuánto le costaron? }

4º { I. Finalmente regaló las **cuatro** canicas á dos hermanitos suyos.
II. ¿Cuántas canicas le tocaron á cada hermanito? }

II. Observando estas dos partes separadamente se nota:

1º Que en la primera parte se **afirman** hechos conocidos y por eso le podremos llamar con propiedad la parte **conocida** del fenómeno numérico; la cual expresamos por medio de una proposición **afirmativa**.

2º En la segunda parte se **pregunta** por algún hecho desconocido, y por esa razón podremos llamarle también con propiedad la parte **desconocida** del fenómeno numérico, la cual se expresa por medio de una proposición **interrogativa.**

III. Observemos ahora las relaciones que ligan á la primera parte con la segunda.

1º En el primer ejemplo se nota que al **juntar** los **seis** centavos que dió el papá con los **cuatro** que dió la mamá, el resultado tendrá que ser **mayor.** Hay pues una relación de **aumento** entre esos dos números, y como aquí se trata de unidades absolutas, se resolverá la pregunta por medio de una **operación de sumar.**

2º En el segundo ejemplo se nota que al **quitar** de los **diez** centavos del niño los **dos** que regaló; el resultado tendrá que ser **menor** que diez. Hay pues una relación de **diminución** entre esos dos números, y como también aquí se trata de unidades absolutas, se resolverá la pregunta por medio de una **operación de restar.**

3º En el tercer ejemplo se nota que si una canica vale **dos** centavos, **cuatro** canicas costarán cuatro veces dos centavos; es decir, el número dos se **repetirá** cuatro veces y el resultado tendrá que ser forzosamente **mayor** que dos. Hay pues una relación de **aumento** entre dichos números, y como aquí se trata de repetir **grupos** iguales se resolverá la pregunta por medio de una **operación de multiplicar**.

4º En el cuarto ejemplo se nota que si las **cuatro** canicas se han de **repartir** entre los **dos** hermanitos, es claro que á un sólo hermano le han de tocar **menos** canicas, es decir, habrá que hacer dos grupos iguales de las cuatro canicas y uno de esos grupos corresponderá á cada hermano. Hay pues una relación de **diminución** entre el cuatro y el dos, pero efectuada con grupos iguales; luego la pregunta se resolverá por medio de una **operación de dividir**.

100. Después de hechas las observaciones anteriores, les daremos los nombres con que más adelante las designaremos de un modo general:

(*a*) A los fenómenos numéricos que citamos como ejemplos más arriba, les llamaremos **problemas.** Cada uno por sí se **enuncia** como un **todo** formado claramente de los **datos** del problema ó sean los números conocidos y la **incógnita**, ó sea el número desconocido ó que se trata de encontrar.

(*b*) Las observaciones relativas á las **partes** de que se forma un problema, les llamaremos el **análisis** del problema que nos hizo descubrir la parte **conocida** en forma de proposiciones **afirmativas** y la parte **desconocida** en forma de proposiciones **interrogativas.**

(c) Por último las observaciones relativas á las **relaciones** de los datos del problema entre sí y con el todo, constituye la **solución** del problema, y en la cual puede haber relaciones de **aumento** ó que se resuelven por medio de las operaciones de **sumar** y **multiplicar** y relaciones de **diminución** ó que se resuelven por medio de las operaciones de **restar** y **dividir.**

He aquí el cuadro correspondiente:

ELEMENTOS DEL PROBLEMA.

1º El **todo** ó sea el **enunciado** del problema..........	Datos. Incógnita.	
2º Las **partes** ó sea el **análisis** del problema......	Parte **conocida** en forma de proposiciones **afirmativas.** Parte **desconocida** en forma de proposiciones interrogativas.	
3º **Relaciones** de las partes entre sí y con el todo ó sea la **solución** del problema.........................	Aumento	Sumar. Multiplicar.
	Diminución	Restar. Dividir.

101. De este cuadro resultan las afirmaciones siguientes:

1ª El **problema** numérico es una cuestión en la cual por medio de ciertos datos conocidos y relacionados entre sí, se desea investigar otros desconocidos, empleando al efecto una operación numérica.

2ª En el estudio de un problema numérico se distinguen tres partes principales: el **enunciado** del problema ó sea el todo; el **análisis** del problema ó sean las partes de que consta, y la **solución** del problema ó sean las relaciones que ligan á las partes entre sí y con el todo, teniendo en cuenta el resultado obtenido.

3ª En el **enunciado** del problema se distinguen dos subdivisiones: los **datos**, ó sea la parte **conocida** y la **incógnita** ó sea la parte **desconocida**.

4ª En el **análisis** del problema se observa que la parte conocida se expresa en forma de proposiciones **afirmativas**, y la parte desconocida en forma de proposiciones **interrogativas**.

5ª En la **solución** del problema se distinguen dos partes: la **relación** entre los datos y la incógnita que puede existir por **aumento** ó **diminución** y las operaciones que de esas relaciones se derivan, que son: la **suma** ó la **multiplicación** en el primer caso y la **resta** y la **división** en el segundo.

102. Además de las observaciones anteriores, haremos notar que cada uno de los problemas propuestos se resuelve empleando **una sóla operación**; pero existen problemas en los que hay necesidad de emplear dos ó más operaciones, ya sea relacionadas entre sí ó sin relación alguna según podremos observarlo en los siguientes ejemplos:

(*a*) Un obrero gana en la mañana 60 centavos y 40 en la tarde, ¿cuánto gana en todo el día?

En este problema hay una sola operación, la **suma** de 60 y 40.

(*b*) Voy á repartir entre 5 niños el dinero que traigo en mi chaleco; en una bolsa 30 centavos y en la otra 70, ¿cuánto tengo y cuánto le toca á cada niño?

En este problema hay una **suma,** la de 30 y 70 centavos; y después una **división**, la del resultado 100 entre 5. Son pues dos operaciones, **pero que no se relacionan entre sí.**

(*c*) Un niño compró seis canicas en 18 centavos y desea saber ¿cuánto le costarán 10 canicas al mismo precio que las primeras?

En este problema, lo primero que se ocurre es averiguar el precio de 1 canica; sabiendo que seis canicas valen 18 centavos, hay pues que repartir los 18 centavos entre las seis canicas, y esto se consigue por medio de una **división** que da 3 centavos como valor de 1 canica. Ahora es facil averiguar el valor de 10 canicas, haciendo una repetición de 3 centavos 10 veces, lo cual se conseguirá por medio de una **multiplicación** que dará como resultado 30 centavos. Hay pues en este problema dos operaciones: la multiplicación y la división, las cuales se **relacionan entre sí** y cuya clase de relaciones estudiaremos más adelante.

103. En los ejemplos propuestos se distinguen claramente tres tipos de problemas diferentes: de una sola operación, de dos ó más operaciones iguales ó no, pero sin relación alguna y de dos operaciones contrarias con relación entre sí. A estos tres tipos de problemas les daremos respectivamente los nombres siguientes:

I. Problemas **simples.**

II. Problemas **compuestos**.

III. Problemas **combinados.**

En los problemas **simples** solo se emplea una sóla operación: una **suma**, una **resta**, una **multiplicación** ó una **división**.

En los problemas **compuestos** se emplean dos ó más operaciones **iguales** ó **desiguales** á la vez.

En los problemas **combinados** sólo se emplean dos operaciones y han de ser forzosamente **contrarias:** una **suma** y una **resta**, ó bien una **multiplicación** y una **división**; pero en ambos casos han de tener una **relación** cuyo caracter veremos más adelante.

104. Con el fin de que podamos comprender lo mejor posible todos y cada uno de los tres tipos de problemas que indicamos en la clasificación anterior, comenzaremos nuestro estudio con los problemas **simples**.

I. **Enunciado.** Un comerciante ganó 80 pesos en el mes de Enero, 63 en Febrero, 149 en Marzo, 259 en Abril, 493 en Mayo y 200 en Junio; desea saber ¿cuánto ha ganado en los seis meses?

Análisis. (*a*) En este problema **conocemos** las diferentes partidas de dinero que ganó el comerciante durante los primeros seis meses del año. (*b*) **Desconocemos** la ganancia total que obtuvo en los seis meses, es decir, la reunión de las seis partidas en una sola. (*c*) Para formar un número mayor que tenga el mismo valor que otros números menores desiguales, bastará agregar todas las unidades de que constan los números menores y con ellas formar el número mayor. Esto se consigue por medio de una operación de **sumar**. En efecto, sumando 80 más 63, más 149, más 259, más 493 y más 200 pesos, se obtendrá el resultado que se desea.

Solución. Escribo los sumandos unos debajo de otros para facilitar la operación, y después de sumar ordenadamente los números de cada especie, obtengo 1244 pesos que es la ganancia total que obtuvo el comerciante durante los seis meses.

$$\begin{array}{r} 80 \\ +\ 63 \\ +149 \\ +259 \\ +493 \\ +200 \\ \hline 1244 \end{array}$$

II. **Enunciado**. A una persona le faltan por subir 15 escalones de una escalera, y ha subido ya 10 escalones, ¿cuántos escalones tendrá la escalera?

Análisis. (*a*) En este problema **conocemos** dos datos: los 15 escalones que ha subido la persona y los 10 escalones que le faltan por subir. (*b*) **desconocemos** el número total de escalones que tendrá la escalera. (*c*) Pero como aquí se trata de formar un número total con la reunión de las unidades de los números parciales 15 y 10; para obtenerlo, bastará ejecutar una operacion de **sumar**

$$15+10=25$$

Solución: La escalera tiene 25 escalones que resultan de la suma de 15 y 10.

III. **Enunciado.** Un empleado ganó durante un año 10340 pesos y gasto 7597 pesos, ¿cuánto le sobró de dinero?

Análisis. (*a*) En este problema **conocemos** el número de pesos que ganó en un año el empleado y el número de pesos que gastó durante el mismo tiempo. (*b*) **Desconocemos** lo que le sobró de dinero después de lo gastado. (*c*) Pero como no gastó todo lo ganado, sino un número menor; es claro que quitando lo gastado de lo ganado se obtendrá lo sobrante, y ésto se consigue por medio de una operación de **restar**.

$$\begin{array}{r} 10340 \\ -\ 7597 \\ \hline 2743 \end{array}$$

Solución. La diferencia obtenida es de 2,743 pesos que es el sobrante que se buscaba.

IV. **Enunciado.** Una escalera tiene 25 escalones y una persona ha subido ya 10 escalones ¿cuántos escalones le faltarán por subir?

Análisis. (*a*) En este problema **conocemos** el número de escalones que tiene la escalera que son 25 y los escalones subidos por la persona que son 10. (*b*) **Desconocemos** el número de escalones que falta subir á la persona para terminar la escalera. (*c*) Y como aquí se conoce el total de escalones que tiene la escalera y una parte de ellos ya subidos, es claro que para obtener la otra parte ó sean los escalones que faltan por subir se conseguirá quitando el número de los escalones subidos del total de escalones de la escalera, y la diferencia que se obtendrá será el número de escalones que falta por subir; es pues una operación de **restar** la que resolverá el problema.

$$25-10=15$$

Solución. 15 escalones faltan por subir.

V. **Enunciado.** Sabiendo que un metro de casimir ha costado 5 pesos, se desea saber ¿cuánto costarán 12 metros de la misma tela?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** 1 metro de casimir vale 5 pesos. (*b*) Parte **desconocida:** 12 metros de casimir ¿cuánto costarán? (*c*) En este problema se observa que si 1 metro cuesta 5 pesos; 2 metros costarán el doble ó 5×2; 3 metros costarán el triple ó 5×3; 4 metros costarán el cuádruplo ó 5×4; 5 metros costarán el quíntuplo ó 5×5, etc., y siguiendo este camino llegaremos á descubrir que 12 metros de casimir costarán 12 veces 5 pesos ó sean 5×12, y ésto es pues una operación de **multiplicar.**

Solución. El problema podrá plantearse así:

Metro	Pesos
1 ———	5
12 ———	$x = 60$

$$x = 5 \times 12 = 60$$

y simplificando el razonamiento anterior diríamos de un modo más sencillo: si un metro de casimir cuesta cinco pesos, 12 metros que son doce veces 1 metro, costarán **doce veces cinco pesos** ó sean $5 \times 12 = 60$ pesos.

Observación. En el problema que acabamos de resolver se nota que á medida que se va **aumentando** el número de metros se va **aumentando** también el número de pesos; es decir, cada metro que se aumenta por un lado, son cinco pesos que se aumentan por el otro. Esta **relación** constante que se nota en el mismo sentido, ó digamos mejor **en la misma dirección,** supuesto que es siempre por **aumento,** es lo que se llama **relación directa;** de manera que el problema resuelto es un **problema simple de multiplicar con relación directa.**

VI. **Enunciado.** Sabemos que 12 operarios hicieron una zanja durante 5 días, y no teniendo más que 1 sólo operario, deseamos saber ¿en cuántos días hará el mismo trabajo?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** 12 operarios hicieron una zanja en 5 días. (*b*) Parte **desconocida.** 1 operario ¿en cuántos días hará la zanja? (*c*) En este problema se observa que si 12 operarios necesitan 5 días para hacer una zanja, la mitad de los operarios necesitarían doble número de días ó sean 5×2; la tercera parte de los operarios necesitarían triple número de días ó sean 5×3; la cuarta parte de los operarios necesitarían cuádruplo número de días ó sean 5×4; la quinta parte de los operarios necesitarían quíntuplo número de días ó 5×5, etc., y siguiendo este camino llegaríamos á descubrir que la **doceava** parte de los operarios ó sea 1 sólo operario, necesitará 12 veces 5 días ó sean 5×12, y este resultado se obtiene por medio de una operación de **multiplicar.**

Solución. El problema se podrá plantear así:

Operarios.		Días.
12	———	5
1	———	$x = 60$

$$x = 5 \times 12 = 60$$

y simplificando el razonamiento anterior, diríamos de un modo más sencillo: Si 12 operarios necesitan 5 días para hacer una zanja, 1 operario que es la doceava parte de doce operarios y que tiene que hacer el mismo trabajo que todos ellos, necesitará **doce veces cinco** días ó sean $5 \times 12 = 60$ días.

Observación. En el problema que acabamos de resolver se nota que á medida que se va **disminuyendo** el número de operarios, se va **aumentando** el número de días; es decir, á la mitad de los operarios, á la tercera parte, á la cuarta parte, etc., corresponden el doble, triple, cuádruplo, etc., del número de días. Esta relación constante que se nota en sentido contrario ó en dirección opuesta, supuesto que por un lado es **diminución** en tanto que por el otro es **aumento**, es lo que se llama **relación inversa**; de manera que el problema resuelto es un **problema simple de multiplicar con relación inversa.**

VII. **Enunciado.** Sabemos que 12 metros de casimir han costado 60 pesos y deseamos saber ¿cuál será el precio de un metro?

Análisis. (*a*) Parte **conocida**: 12 metros de casimir han costado 60 pesos. (*b*) Parte **desconocida:** 1 metro de casimir ¿cuánto costará? (*c*) En este problema se nota que si 12 metros de casimir cuestan 60 pesos, la mitad de los metros costarán la mitad de los pesos ó sean $60 \div 2$; la tercera parte de los metros costarán la tercera parte de los pesos ó sean $60 \div 3$, la cuarta parte de los metros costarán la cuarta parte de los pesos ó sean $60 \div 4$; la quinta parte de los metros costarán la quinta parte de los pesos ó sean $60 \div 5$, etc., y siguiendo este camino llegaríamos á descubrir que la **doceava** parte de los metros, ó sea 1 sólo metro costará la doceava parte de los pesos ó sean $60 \div 12$, y este resultado se obtendrá por medio de una operación de **dividir.**

Solución. El problema se podrá plantear así:

Metros.		Pesos.
12	——	60
1	——	$x = 5$

$$x = \frac{60}{12} = 5$$

y simplificando el razonamiento anterior diríamos de un modo más sencillo: Si 12 metros de casimir cuestan 60 pesos, 1 metro que es la doceava parte de doce metros, costará la doceava parte de sesenta pesos ó sean $60 \div 12 = 5$ pesos.

Observación. En el problema que acabamos de resolver se nota que á medida que se va **disminuyendo** el número de metros, se va **disminuyendo** también el número de pesos; es decir, á la mitad de los metros, la tercera parte, la cuarta parte, etc., corresponden también la mitad, la tercera, la cuarta parte, etc. de los pesos. Esta **relación** constante que se nota en el mismo sentido, es decir, **en la misma dirección** supuesto que es siempre por **disminución** se llama también **relación directa;** de manera que el problema resuelto es un **problema simple de dividir con relación directa**.

VIII. **Enunciado.** 1 operario ha hecho una zanja en 60 días, y se desea saber, 12 operarios ¿en cuántos días harán la misma zanja?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** 1 operario ha hecho una zanja en 60 días. (*b*) Parte **desconocida:** 12 operarios ¿en cuántos días harán la misma zanja? (*c*) En este problema se nota que si 1 operario ha hecho una zanja en 60 días, dos operarios necesitarán la mitad de los días ó sean $60 \div 2$; tres operarios necesitarán la tercera parte de los días ó sean 60÷3; cuatro operarios necesitarán la cuarta parte de los días ó 60÷4; cinco operarios necesitarán la quinta parte de los días ó sean 60÷5, etc., y siguiendo este camino llegaríamos á descubrir que 12 operarios que son doce veces 1 operario, necesitarán la doceava parte de los días ó sean 60÷12, y este resultado se obtendrá por medio de una operación de **dividir**.

Solución. El problema se podrá plantear así:

Operarios.		Días.
1	——	60
12	——	$x = 5$

$$x = \frac{60}{12} = 5$$

y simplificando el razonamiento anterior diríamos de un modo más sencillo: Si un operario necesita 60 días para hacer una zanja, 12 operarios que son doce veces un operario, necesitarán la doceava parte de sesenta días ó sean 60÷12=5 días.

Observación. En el problema que acabamos de resolver se nota que á medida que se va **aumentando** el número de operarios se va **disminuyendo** el número de días; es decir, al duplo de los operarios, al triple, al cuádruplo, al quíntuplo, etc., corresponden la mitad, la tercera, la cuarta, la quinta, etc. parte de los días. Esta **relación** constante que se nota en sentido contrario ó en **dirección opuesta,** supuesto que por un lado es **aumento** en tanto que por el otro lado es **diminución** es lo que se llama **relación inversa**; de manera que el problema resuelto es un **problema simple de dividir con relación inversa.**

105. Pongamos ahora algunos ejemplos de problemas **compuestos.**

I. **Enunciado.** Un comerciante ha comprado 20 pichones en 7 pesos, 73 gallinas en 34 pesos, 12 cerdos en 96 pesos; ¿cuántos animales compró y cuánto dió por todos juntos?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes:

1ª parte. Un comerciante ha comprado 20 pichones, 73 gallinas y 12 cerdos, ¿cuántos animales son por todos?

(*a*) Parte **conocida.** 20 pichones, más 73 gallinas más 12 cerdos. (*b*) Parte **desconocida.** ¿Cuál es el total de esas tres partidas de animales? (*c*) Como se trata de formar un número total con los valores de los tres números conocidos por la agregación de unos con otros, se empleará una operación de **sumar.**

Primer resultado: $20+73+12=105$ animales comprados.

2ª Parte. Un comerciante gastó 7 pesos en pichones, 34 pesos en gallinas y 96 pesos en cerdos, ¿cuánto ha gastado por todo?

(*a*) Parte **conocida.** 7 pesos más 34 pesos más 96 pesos. (*b*) Parte **desconocida.** ¿Cuántos pesos son por todos? (*c*) Se trata de formar una sola partida por la agregación de las tres conocidas; habrá que emplear una operación de **sumar.**

Segundo resultado. $7+34+96=137$ pesos.

Solución. En este problema compuesto resultan dos sumas: una que produce 105 animales y otra 137 pesos que costaron.

II. **Enunciado.** Una persona tenía que hacer dos pagos sucesivos: el primero de 75 pesos y el segundo de 123, ¿cuánto le quedó de 300 pesos después de efectuar cada pago?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes:

1ª parte: Una persona tenía 300 pesos y pagó 75, ¿cuánto le quedó?

(*a*) Parte **conocida.** Se tienen 300 pesos y se deben 75. (*b*) Parte **desconocida.** ¿Cuánto quedó después del pago? (*c*) Quitando de 300 pesos la deuda 75 se obtendrá el resultado por medio de una operación de **restar.**

Primer resultado. 300—75=225 pesos que quedaron después del primer pago.

2ª parte. Una persona tiene 225 pesos y paga 123, ¿cuánto le queda?

(*a*) Parte **conocida.** Se tienen 225 pesos y se pagan 123. (*b*) Parte **desconocida.** ¿Cuánto queda después del pago? (*c*) Como se trata de buscar una diferencia, se encontrará por medio de una operación de **restar.**

Segundo resultado. 225—123=102 pesos que quedaron después del segundo pago.

Solución. En este problema compuesto hay que ejecutar dos operaciones de restar: la primera al efectuar el primer pago y quedaron 225 pesos, y la segunda al efectuar el segundo pago y quedaron 102 pesos.

III. **Enunciado.** Un comerciante vendió dos partidas de mercancías: la primera de 150 pesos y la segunda de 348 pesos; en seguida compró nuevas mercancías por valor de 480 pesos, ¿cuánto le sobró de dinero?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes:

1ª parte. Un comerciante vendió dos partidas de mercancías: una de 150 pesos y otra de 348, ¿cuánto recibió de dinero en las dos ventas?

Resultado: 150+348=498 pesos importe de las dos ventas.

2ª parte. Un comerciante vendió en mercancías 498 pesos y gastó en otras mercancís nuevas 480 pesos; ¿cuánto le quedó de dinero?

Resultado: 498—480=18 pesos sobrantes.

Solución. En este problema compuesto se emplearon dos operaciones: la primera de **sumar** para obtener el valor total de las mercancías vendidas y fué de 498 pesos, y la segunda de **restar** para encontrar el dinero sobrante que quedó después de la compra y fué de 18 pesos.

IV. **Enunciado.** Sabiendo que un siglo tiene 20 lustros, que un lustro tiene 5 años, que un año tiene 12 meses y un mes 30 días, se desea saber ¿cuántos días tiene un siglo?

Análisis. En este problema se distinguen las partes siguientes:

1ª parte. 1 lustro tiene 5 años, 20 lustros que tiene un siglo ¿cuántos años serán?

Resultado. Si 1 lustro tiene 5 años, 20 lustros que son veinte veces 1 lustro tendrán veinte veces 5 años ó sean 5×20=100 años.

2ª parte. 1 año tiene 12 meses, 100 años que tiene un siglo ¿cuántos meses serán?

Resultado. Si 1 año tiene 12 meses, 100 años que son cien veces 1 año, tendrán cien veces 12 meses ó sean $12 \times 100 = 1200$ meses.

3ª parte. 1 mes tiene 30 días, 1200 meses que tiene un siglo ¿cuántos días serán?

Resultado. Si 1 mes tiene 30 días, 1200 meses que son mil doscientas veces 1 mes, tendrán mil doscientas veces 30 días ó sean $30 \times 1200 = 36000$ días.

Solución. En este problema compuesto hay tres problemas simples de multiplicar, que resueltos separadamente dan como resultado final 36000 días que tiene el siglo.

V. **Enunciado**. Un pagador tiene que distribuir 50000 pesos entre 25 ayudantes suyos; cada ayudante pagará con la parte recibida á 50 empleados, ¿cuánto le toca recibir á un empleado?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes.

1ª parte. Un pagador va á distribuir 50000 pesos entre 25 ayudantes suyos, ¿cuánto le toca á cada ayudante?

Resultado. $50000 \div 25 = 2000$ pesos tocan á cada ayudante.

2ª parte. Teniendo que repartirse los 2000 pesos que recibió cada ayudante entre 50 empleados ¿cuánto le corresponde recibir á cada empleado?

Resultado. $2000 \div 50 = 400$ pesos para cada empleado.

Solución. En este problema compuesto hay dos problemas simples de dividir. Del primero se obtienen 2000 pesos para cada ayudante y del segundo 400 pesos para cada empleado.

VI. **Enunciado**. Un padre al morir dejó 10,000 pesos en dinero efectivo con el fin de que se repartiese en 25 partes, de las cuales corresponden 4 para cada uno de sus dos hijos varones, 3 para cada una de sus tres hijas mujeres y el resto para 5 casas de beneficencia; se desea saber ¿cómo se hizo el reparto?

Análisis. En este problema se distinguen las partes siguientes:

1ª parte. Un padre al morir dejó 10,000 pesos con el fin de repartirlos en 25 partes, ¿cuánto corresponde á cada parte?

Resultado. $10{,}000 \div 25 = 400$ pesos que corresponden á cada parte.

2ª parte. Sabiendo que á cada uno de sus hijos varones les corresponden 4 partes de á 400 pesos á cada uno ¿cuánto deberán recibir?

Resultado. $400 \times 4 = 1600$ pesos á cada varón; pero como son 2 hermanos, les corresponderá recibir $1600 \times 2 = 3200$ pesos.

3ª parte. Sabiendo que á cada una de sus hijas mujeres les corresponden 3 partes de 400 pesos á cada una ¿cuánto deberán recibir?

Resultado. $400 \times 3 = 1200$ pesos á cada hija; pero como son 3, les corresponde recibir $1200 \times 3 = 3600$ pesos.

4ª parte. De la herencia de 10000 pesos se han repartido ya 3200 pesos á los hijos varones y 3600 pesos á las hijas mujeres; sólo falta averiguar ¿cuánto corresponde á cada una de las 5 casas de beneficencia?

Resultado. Entre los hijos varones y las hijas mujeres se han distribuido ya: $3200 + 3600 = 6800$ pesos, y como el sobrante es para las casas de beneficencia, tendremos: $10000 - 6800 = 3200$ pesos que distribuidos por partes iguales en las 5 casas les corresponderá á cada una $3200 \div 5 = 640$ pesos.

Solución. En este problema compuesto hay varios problemas simples: el **primero** fué la división de 10000 entre 25 para determinar el valor de cada parte; el **segundo** fué una multiplicación de 400 por 4 para averiguar lo que correspondía á cada varón; el **tercero** otra multiplicación de 1600×2 para formar una sola partida perteneciente á los varones; el **cuarto** otra multiplicación de 400 por 3 para determinar la parte de cada hija; el **quinto** otra multiplicación de 1200×3 para formar una partida perteneciente á las hijas mujeres; el **sexto** una suma de 3200 con 3600 para saber lo que se ha repartido; el **séptimo** una resta de 10000 y 6800 para determinar la parte que le correspondía á la beneficencia, y el **octavo** una división de 3200 entre 5 para determinar lo que le tocaba á cada casa de beneficencia.

Pero nosotros descompusimos el problema compuesto en cuatro partes, de las cuales las tres últimas eran también problemas compuestos, con el fin de abreviar y llegar pronto á la resolución final.

106. Pongamos ahora algunos ejemplos de problemas **combinados**.

I. **Enunciado**. Dos niños, Manuel y Antonio, tienen respectivamente 12 y 15 años de edad; cuando Manuel tenga 21 años ¿qué edad tendrá Antonio?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes:

1ª parte. El niño Manuel tiene hoy 12 años de edad, cuando tenga 21 años de edad ¿cuántos años habrán transcurrido?

(*a*) Parte **conocida**. 21 años que tendrá Manuel y 12 años que hoy tiene. (*b*) Parte **desconocida**. ¿Cuántos años le faltan? (*c*) Como aquí se trata de buscar una diferencia entre 21 y 12, bastará emplear una operación de **restar**.

Primer resultado. 21—12=9 años faltan para que Manuel tenga 21 años.

2ª parte. El niño Antonio tiene hoy 15 años de edad y dentro de 9 años que viva al mismo tiempo que Manuel ¿cuántos años tendrá?

(*a*) Parte **conocida**. 15 años que hoy tiene Antonio y 9 que tiene que vivir. (*b*) Parte **desconocida**. ¿Cuántos años llegará á tener Antonio? (*c*) Como aquí se trata de una simple agregación de los 15 años con los 9 años, se empleará una operación de **sumar**.

Segundo resultado. 15+9=24 años será la edad de Antonio cuando Manuel tenga 21 años.

Solución.

	Años de Manuel.	Años de Antonio.
Edades anteriores:	0	3
	etc.	etc.
	9	12
	10	13
	11	14
Edades actuales:	**12**	**15**

	13	....	16
	14	....	17
	15	....	18
	etc.	....	etc.
Edad final:	**21**	....	**24**
	21—12=9	....	15+9=24

El problema combinado que acabamos de estudiar, se forma de dos problemas simples de suma y resta. El primer problema simple se resolvió por medio de una resta: 21—12=9 con las dos edades de Manuel; y el segundo problema simple con una suma 15+9=24 con las dos edades de Antonio.

Observación. Si comparamos las dos edades de Manuel y Antonio se notará que **aumentando** la edad de Manuel se **aumentará** también la edad de Antonio, y por el contrario. **disminuyendo** la edad de Manuel se **disminuirá** también la edad de Antonio. Por eso al agregarle á los doce añes de Manuel de 1 en 1 años, llegó á 21 después de 9 años, y haciendo lo mismo con los 15 años de Antonio de 1 en 1 llegará á 24 en el mismo tiempo. Esta relación constante que se nota entre las dos edades en la **misma dirección** es una **relación directa,** y el problema que hemos resuelto es un **problema combinado de sumar y restar con relación directa.**

II. **Enunciado.** Una persona debía cierta cantidad de dinero, abonó 15 pesoss y quedó á deber

35 pesos; si hubiera abonado 20 pesos ¿cuánto quedaría á deber?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes:

1ª parte. Una persona debía cierta cantidad de dinero, abonó 15 pesos y quedó á deber 35 pesos; ¿á cuánto ascendía su deuda?

(*a*) Parte **conocida**. Una persona abonó 15 pesos de su deuda y quedó á deber 35 pesos (*b*) Parte **desconocida**. ¿A cuánto asciende su deuda? (*c*) Como aquí se trata de juntar el abono 15 pesos con lo que se queda á deber ó sean 35 pesos para formar una sola partida, bastará emplear una operación de **sumar.**

Primer resultado. 15+35=50 pesos, importe de la deuda.

2ª parte. Una persona debía 50 pesos y deseaba abonar 20 pesos, ¿cuánto quedará á deber?

(*a*) Parte **conocida**. Una persona debía 50 pesos y abonó 20 pesos. (*b*) Parte **desconocida**. ¿Cuánto quedó á deber? (*c*) Como aquí se trata de buscar una diferencia entre 50 y 20, bastará emplear una operación de **restar.**

Segundo resultado. 50—20=30 pesos que quedaría á deber.

Solución.

	Abonos		Deuda
Ningún abono:	0	....	50
	etc.	....	etc.
	13	....	37
	14	....	36
Abono actual:	**15**	....	**35**

	16	34
	17	33
	etc.	etc.
Abono definitivo:	**20**	**30**
	$15+35=50$	$50-20=30$

Este nuevo problema combinado consta de dos problemas simples de suma y resta. El primer problema simple se resolvió por medio de la suma de $15+35=50$ que son las dos partidas de la deuda, y el segundo problema simple con la resta de $50-20=30$, es decir, de la deuda y el abono.

Observación. Si comparamos el abono 15 con la deuda 35 se notará que **aumentando** el abono, la deuda se **disminuye,** y por el contrario **disminuyendo** el abono, la deuda se **aumenta.** Por eso al agregarle al abono de 15 pesos de 1 en 1 hasta llegar á 20 pesos, habrá que quitarle á la deuda 35 pesos de 1 en 1 el mismo aumento anterior hasta reducirla á 30 pesos Esta relación constante que se nota entre el abono y la denda en **dirección opuesta,** es una **relación inversa** y el problema que hemos resuelto es un **problema combinado de sumar y restar con relación inversa.**

III. **Enunciado.** 7 albañiles han ganado en una semana 63 pesos; ¿cuánto ganarán en el mismo tiempo y con el mismo sueldo 10 albañiles?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes.

1ª parte. 7 albañiles han ganado en una semana 63 pesos; 1 albañil ¿cuánto habrá ganado en el mismo tiempo?

(*a*) Parte **conocida.** 7 albañiles han ganado 63 pesos. (*b*) Parte **desconocida.** 1 albañil ¿cuánto ha ganado? (*c*) Siendo un albañil la séptima parte de siete albañiles, ganará la séptima parte de 63 pesos; se resolverá ésto por medio de una operación de **dividir.**

Primer resultado. $63 \div 7 = 9$ pesos, es el sueldo de 1 albañil en la semana.

2ª parte. Sabiendo que un albañil gana 9 pesos semanarios, se desea saber 10 albañiles ¿cuánto ganarán en el mismo tiempo?

(*a*) Parte **conocida.** 1 albañil gana 9 pesos semanarios. (*b*) Parte **desconocida.** 10 albañiles ¿cuánto ganarán? (*c*) Siendo 10 albañiles diez veces 1 albañil ó que su trabajo es diez veces equivalente al trabajo de un hombre, es claro que su sueldo será de diez veces 9 pesos que es el sueldo de un solo hombre, se resuelve por medio de una operación de **multiplicar.**

Segundo resultado. $9 \times 10 = 90$ pesos es el sueldo de los diez albañiles en la semana.

Solución.

Albañiles.		Pesos.
7	——	63
1	——	$x = 9$

$$x = 63 \div 7 = 9$$

Albañiles.		Pesos.
1	——	9
10	——	$x = 90$

$$x = 9 \times 10 = 90$$

Este problema combinado está formado de dos problemas simples de multiplicar y dividir. El primero fué una división de 63 pesos entre 7 albañiles que dió por resultado 9 pesos, ó sea el sueldo semanario de un albañil; y el segundo fué una multiplicación de 10 albañiles por 9 pesos, que dió como resultado 90 pesos, sueldo que corresponde á los diez albañiles juntos.

Observación. En el problema combinado que acabamos de resolver, hemos descendido de la **pluralidad** 7 albañiles que ganan 63 pesos, á la **unidad** 1 albañil, que siendo la séptima parte de siete, tendrá que ganar la séptima parte de sesenta y tres, ó sean 9 pesos; se ve pues, que **disminuyendo** los albañiles se **disminuyen** tambien los pesos; pero si ascendemos ahora de la **unidad** 1 albañil á la **pluralidad** 10 albañiles, entonces se notará que siendo diez albañiles diez veces un albañil, el sueldo que les corresponde será diez veces nueve pesos ó 90 pesos; se ve ahora que **aumentando** los albañiles **aumentaron** también los pesos. En ambos problemas simples hay pues una **relación directa** y el resultado de su unión es un **problema combinado de multiplicar y dividir con relación directa.**

IV. **Enunciado.** Se sabe que 15 albañiles de igual fuerza para el trabajo hicieron una barda en 20 días, y deseando hacer otra barda igual pero sólo con 10 albañiles de la misma fuerza que los anteriores, ¿cuántos días dilatarán en hacerla?

Análisis. En este problema se distinguen dos partes:

1ª parte. 15 albañiles han construido una barda en 20 días, 1 sólo albañil de igual fuerza para el trabajo que los anteriores ¿en cuántos días hará la barda?

(*a*) Parte **conocida.** 15 albañiles han construido una barda en 20 días. (*b*) Parte **desconocida.** 1 albañil en cuántos días construirá la misma barda? (*c*) Si 15 albañiles necesitan 20 días, la mitad de los albañiles necesitarán doble tiempo ó 20×2; la tercera parte de los albañiles necesitarán triple tiempo ó 20×3, etc., y la **quinceava** parte de los albañiles ó sea 1 albañil, necesitará quince veces veinte días ó sea 20×15, lo cual se resuelve empleando una operación de **multiplicar.**

También se podrá razonar del modo siguiente, aunque es más difícil que el razonamiento anterior: Siendo un albañil la quinceava parte de quince albañiles, es claro que para que haga él sólo el trabajo que los quince albañiles harían en 1 día, necesitará trabajar 15 días, y por consiguiente el trabajo de dos días lo haría en 2 veces 15 días, el de tres días en 3 veces 15 días, etc., y el de veinte días en 20 veces 15 días ó sea 15 por 20, lo cual se resuelve por medio de una **multiplicación.**

Primer resultado. $20\times15=300$ días que necesita un albañil para construir por sí sólo la barda.

2ª parte. Sabiendo que 1 albañil necesita 300 días para construir una barda, se desea saber, 10 albañiles de la misma fuerza ¿en cuántos días construirán la misma barda?

(*a*) Parte **conocida.** 1 albañil necesita 300 días para construir una barda. (*b*) Parte **desconocida.** 10 albañiles ¿en cuántos días construirán la misma barda? (*c*) Si un albañil necesita 300 días, dos albañiles se distribuirán el trabajo en dos partes iguales y necesitarán la mitad del tiempo ó $300\div$

2, tres albañiles se distribuirán el trabajo en tres partes iguales y necesitarán la tercera parte del tiempo ó 300÷3, etc., y diez albañiles se distribuirán el trabajo en diez partes iguales y necesitarán la décima parte del tiempo ó 300÷10, lo cual se obtiene ejecutando una operación de dividir.

Segundo resultado. 300÷10=30 días que necesitan los 10 obreros trabajando juntos, para hacer la misma barda.

Solución.

Albañiles.		Días.	
15	——	20	
1	——	x	$= 300$

$$x = 20 \times 15 = 300$$

Albañiles.		Dias.	
1	——	300	
10	——	x	$= 30$

$$x = 300 \div 10 = 30$$

Este problema combinado está formado de dos problemas simples de multiplicar y dividir. El primero fué una multiplicación de 15 por 20 que dió como resultado 300 días ó sea el tiempo que necesita un albañil para hacer una barda; y el segundo es una división de 300 metros entre 10 que da como resultado 30 días que necesitan los diez obreros para hacer juntos la barda.

Observación. En este nuevo problema combinado que acabamos de resolver, hemos descendido de la **pluralidad** 15 albañiles que necesitan 20 días para hacer una barda, á la **unidad** 1 albañil que siendo la quinceava parte de quince, necesita quince veces 20 días ó sean 300 días; se ve pues que **disminuyendo** los albañiles se **aumentan** los días; pero si ascendemos ahora de la **unidad** 1 albañil á la **pluralidad** 10 albañiles, entonces se notará que siendo diez albañiles diez veces un albañil, los días que necesitan para hacer la barda se reducen á la décima parte de 300 días ó sea á 30 días; se ve ahora que **aumentando** los albañiles se **disminuyen** los días. En ambos problemas simples hay pues una **relación inversa**, y el resultado de su unión es **un problema combinado de multiplicar y dividir con relación inversa.**

107. Después del estudio anterior, en el cual hemos examinado detenidamente por medio de algunos ejemplos los diferentes problemas que se resuelven con los números **enteros**, vamos ahora á formular un resumen, cuyo contenido consta en el siguiente cuadro:

PROBLEMAS CON NÚMEROS ENTEROS.

- **Simples:** una operación aislada
  - Sumar.
  - Restar.
  - Multiplicar.
  - Dividir.
- **Compuestos** (sin relación)......
  - Dos ó más operaciones iguales.
    - $+ \ +$ etc.
    - $- \ -$ etc.
    - $\times \ \times$ etc.
    - $\div \ \div$ etc.
  - Dos operaciones desiguales.
    - $+ \ -$
    - $+ \ \times$
    - $+ \ \div$
    - $- \ \times$
    - $- \ \div$
    - $\times \ \div$
  - Tres ó más operaciones desiguales.
    - $+ \ - \ \times$
    - $+ \ - \ \div$
    - $+ \ \times \ \div$
    - $- \ \times \ \div$
    - $+ \ - \ \times \ \div$
- **Combinados** (con relación).
  - Suma y resta.
    - Relación directa.
    - Relación inversa.
  - Multiplicación y división.
    - Relación directa.
    - Relación inversa.

108. Hagamos algunas observaciones finales que se desprenden de nuestro estudio anterior.

I. En los problemas **simples** de **sumar** y **restar**, no se presentó ninguna dificultad en su resolución; tan pronto como descubrimos que se trataba de formar un **total** ó buscar una **diferencia**, procedimos inmediatamente á la ejecución de la operación respectiva.

II. En los problemas simples de **multiplicar** y **dividir** fué indispensable distinguir con toda claridad la **relación** que hay entre los **datos** y la **incógnita**, que según sabemos pudo ser **directa** ó **inversa**, y una vez descubierta dicha relación, entonces decidimos la clase de operación que debería emplearse. He aquí los casos que se presentaron:

1º Si se parte de la **unidad** á la **pluralidad** con relación **directa**, se resolvió el problema por **multiplicación.**

2º Si se parte de la **unidad** á la **pluralidad** con relación **inversa**, se resolvió el problema por **división.**

3º Si se parte de la **pluralidad** á la **unidad** con relación **directa**, se resolvió el problema por **división.**

4º Si se parte de la **pluralidad** á la **unidad** con relación **inversa**, se resolvió el problema por **multiplicación**.

III. En los problemas **compuestos** se procuró siempre al hacer el análisis de ellos, descomponerlos en el mayor número posible de problemas simples, teniendo cuidado de ir resolviéndolos sucesivamente hasta poder dar la resolución final de todo el problema compuesto.

IV. En los problemas **combinados** se procuró siempre descomponerlos en problemas simples, sin descuidar en ningún caso la clase de relación que los unía para poderlos resolver aisladamente y no incurrir en ningún error.

V. El sistema de planteos, tanto en los problemas simples de multiplicar y dividir como en los combinados correspondientes, se procuró fuese bastante claro con el fin de facilitar su resolución, por lo que seguiremos empleándolo en los demás problemas de su clase.

Problemas. 81.—¿Cuántos niños habrá en una Escuela que tiene 110 en el primer año, 80 en el segundo, 79 en el tercero, 63 en el cuarto, 59 en el quinto y 44 en el sexto?

82. Un comerciante tenía 1,000 pesos, de los cuales gastó 625, y el resto lo abonó en cuenta de 700 pesos que adeudaba en una casa de abarrotes; se desea saber ¿cuánto abonó y cuánto quedó á deber?

83. Tres viajeros llevaban cantidades diferentes de dinero; el primero tenía 150 pesos más que el segundo; el segundo 300 más que el tercero y el tercero 500 pesos; reunieron sus fondos y compraron una finca en 1,500 pesos, poniendo todos partes iguales; se desea saber ¿qué tanto les sobró á todos y cuánto á cada uno?

84. Una persona desea gastar 600 pesos en cinco trajes de ropa: el primero de á 80 pesos, el segundo de 120, el tercero de 45, el cuarto de 69 y el quinto de 100 pesos; con el resto se comprará un reloj, ¿cuál será su valor?

85. Cuando nació Eduardo, su padre tenía 25 años y 20 la madre; hoy Eduardo tiene 40 años; se desea saber ¿cuántos años tienen actualmente cada uno de sus padres y qué diferencia de edades hay entre ellos y el hijo?

86. Una persona compró alhajas por valor ae 653 pesos y las vendió en tres partidas; por la primera recibió 223 pesos, por la segunda 489 y por la tercera 178, ¿cuál sería la utilidad en la venta?

87. Un padre al morir dejó 10,000 pesos para que se repartiesen entre sus hijos de la manera siguiente: á Enrique

1,897; á Lupe 3,592, á Eloísa 2,399, y á Julio el resto, ¿cuánto le tocó?

88. Corregir la cantidad 8,936 agregándole 10 centenas y 13 unidades y quitándole 2 millares y 75 decenas ¿cuál será la diferencia entre ambas cantidades?

89. Un caminante recorrió durante cinco días las siguientes distancias: al Norte, los tres primeros días, 20, 30 y 35 kilómetros respectivamente; y al Oriente los dos días restantes, 27 y 29; ¿cuál fué la distancia total que recorrió y la diferencia entre ambas?

90. Se trata de hacer dos mezclas: la primera de 87 kilogramos de carbón con 127 de azufre, y la segunda con 25 kilogramos menos de cada cosa; se desea saber ¿cuál será el peso de las dos mezclas?

91. ¿Qué tiempo necesitará un obrero para construir un muro sabiendo que 27 obreros juntos lo han construido en 87 días?

92. Un libro consta de 80 páginas, cada página de 32 renglones y cada renglón de 50 letras, ¿cuántas letras tendrá el libro?

93. Un comerciante compró 1987 kilogramos de azucar en 2,397 pesos; y al venderlas perdió 250 pesos, se desea saber ¿á cómo compró el kilogramo, á cómo lo vendió y qué cantidad de dinero recibió en la venta?

94. Un hacendado tenía 375 becerros que le costaron 4,975 pesos; vendió 300 á 23 pesos cada uno y los que le quedaron á 18 ¿cuánto ganó en la venta?

95. Una factura de libros contiene los datos siguientes: 50 ejemplares de á $3.50; 75 de á $1.50; 89 de á $1.75 ¿cuál será el valor de la factura quitándole la décima parte de descuento?

96. Un comerciante compró efectos por valor de 897 pesos, y desea ganar la tercera parte más de su valor al venderlos ¿á cuánto ascenderá el valor de la venta?

97. Supongamos que un depósito de agua contiene 10,704 litros, y que al desaguarse por un tubo pierde 85 litros por hora ¿qué cantida de agua se vaciará durante 24 hora y cuál será la que quede?

98. Se han recibido para venderse 37 tercios de café que pesan cada uno 115 kilogramos y las envolturas 19 kilogramos cada una, ¿cuál será el peso del café?

99. Cuatro individuos desean repartirse 10,580 pesos del modo que sigue: la mitad al primero, la tercera parte del resto al segundo, la cuarta parte del resto al tercero y al cuarto lo que quede, ¿cuánto le tocó á cada uno?

100. He comprado á razón de 81 pesos por cada 9 metros de casimir y lo he vendido á razón de 30 pesos por cada 5 metros. En la venta he perdido 240 pesos ¿cuantos metros compre?

101. Una persona gana 5 pesos diarios y gasta semanariamente 30 pesos ¿en qué tiempo podrá economizar 1,000 pesos?

102. Una señora compró 50 metros de varias telas á 3 pesos el metro; pero notó que le faltaban 2 metros 50 centímetros ¿á cómo le costó en realidad el metro de tela?

103. Mezclando maíz de los precios siguientes: 5 hectólitros de á 4 pesos; 10 hectólitros de á 3 pesos; 20 hectólitros de á 5 pesos; se desea saber ¿á cómo se podrá vender el hectólitro de maíz mezclado sin perder ni ganar en la venta?

104. Un empleado que gana 1,800 pesos anuales debe pagar mensualmente por una deuda 23 pesos; al cabo de 5 años 9 meses quedó saldada la cuenta; se desea saber ¿cuál fué el monto de la deuda y cuánto de dinero le quedaba cada mes después de dar el abono?

105. Vendiendo á 5 centavos el litro de petróleo y comprando la caja de dos botes de 40 litros cada uno y á 2 pesos 75 centavos la caja, se desea saber ¿cuánto se habrá ganado en 10 cajas de petróleo?

106. Sabiendo que 12 hombres construyen una pared en 8 días, se desea saber un hombre ¿en qué tiempo la hará?

107. ¿Cuántos caballos consumirán en un día la misma cantidad de alimento que 10 caballos en 8 días.

108. Una familia compuesta de 9 personas ha comprado alimentos para 7 meses; si sólo fuera una persona, ¿qué tiempo le duraría esa misma cantidad de alimentos?

109. Dos hermanos están empleados y ganan diferente sueldo, el primero 13 pesos semanarios y el segundo 17, ¿cuánto ganan los dos juntos en 5 semanas?

110. Un individuo compró: 8 kilogramos de dulces de á 10 centavos el kilogramo y 15 kilogramos de á 6 centavos; ¿cuál es la diferencia de los precios que costaron los dulces?

111. Dos viajeros salieron al medio día de la ciudad de México: uno en dirección del Norte y el otro en dirección del Sur; el primero camina 5 kilómetros por hora y el segundo 7, se desea saber ¿qué distancia habrán caminado hasta las ocho de la noche en el mismo día de la partida?

112. En cambio de 2 docenas de naranjas de á 4 centavos cada naranja recibió un niño 7 juguetes de los cuales 3 eran de á 8 centavos y el resto de á 11, ¿cuánto recibirá en dinero?

113. Habiendo comprado 13 metros de una tela en 36 pesos deseo saber ¿á cómo podré vender cada metro para ganar 16 pesos en la venta?

114. Un estudiante paga 25 pesos mensuales por sus alimentos, ¿qué tanto deberá pagar en 3 meses 20 días?

115. Un barril contenía 100 litros de cerveza y fué embotellada en botellas de tres cuartos de litro; se desea saber ¿cuántas botellas resultaron y cuántas docenas son?

116. Se habían comprado 5 litros de leche en 50 centavos, se desea saber ¿cuánto se pagará por 1 litro, por 3 y por 7 respectivamente?

117. Para hacer uu foso 8 hombres emplearon 12 días, ¿cuántos hombres se necesitarían para hacer el foso en 16 días trabajando las mismas horas diarias?

118. Una familia gasta anualmente 2,570 pesos en alimentos, 850 en ropa, 910 en habitación y 400 en criados, ¿cuánto gasta por todo?

119. ¿Cuántos hombres tendrá una división compuesta de cinco batallones, de los cuales el primero tiene 1,047 hombres, el segundo 947, el tercero 845, el cuarto 888 y el quinto 999?

120. Se ha repartido una herencia del modo siguiente: el primer hermano recibió 1,500 pesos, el segundo 700 pesos menos, el tercero 897 menos que el segundo; además se distribuyeron 8,000 á la beneficencia y 1,500 á un hospital, ¿cuál será el monto total de la herencia?

121. Se ha comprado una casa en 90,480 pesos, se han gastado 12,500 peso en reparaciones, y se quiere revenderla ganando 5,000 pesos, ¿en cuánto se debe revenderla?

122. Tres herederos se repartieron una herencia del modo que sigue: al primero le tocó el doble de lo que recibió

el segundo, al segundo el triple de lo que recibió el tercero, que fueron 1,080 pesos, ¿de qué cantidad se componía la herencia?

123. Un comerciante en vinos ha comprado 87 barriles de Burdeos á 40 pesos el barril y 92 de Jerez á 30 pesos, ¿cuánto tendrá que pagar?

124. Un hojalatero recibió 745 pesos por los vidrios de 89 ventanas de 8 vidrios cada una, ¿cuál será el costo de cada vidrio?

125. Se han pagado 800 pesos por una barrica de 315 botellas de vino, ¿cuánto se ganará vendiéndolo al por menor al precio de 2 pesos la botella, suponiendo que el valor de las botellas vacías sea de 25 pesos?

126 Dos individuos tienen 40 pesos; si el primero tuviese 5 pesos menos y el segundo 10 pesos más tendrían iguales sumas, ¿cuanto tiene cada uno?

127. Un tocinero pagó 512 pesos por 15 barriles de manteca, la cual revendió ganando 87 pesos, ¿á qué precio revendió cada barril?

128. De una hacienda se han vendido 87 becerros, de los cuales 50 se vendieron á 14 pesos cada uno y los demás á 10, se ha obtenido una utilidad de 115 pesos, ¿cuál sería el precio de dichos becerros?

129. Un depósito de agua que contiene 8,549 litros de agua tiene un pequeño desagüe que deja salir 50 litros por hora, se desea saber ¿qué cantidad de agua quedará en la fuente después de 24 horas?

130. Un sastre ha comprado en 85 pesos 11 metros de casimir y lo vendió á razón de 12 pesos metro, ¿cuánto ganó en la venta?

131. Una modista compró 45 metros de cierta tela á razón de 3 pesos metro; pero habiendo perdido 15 milímetros en cada metro por ser la medida incompleta, se desea saber ¿cuál sería su pérdida de dinero?

132 En una madereria se han hecho la siguientes compras: 15 vigas de á 2 pesos, 87 duelas de á 25 centavos, 9 docenas de tabla de 1 peso 75 centavos docena, ¿cuál será el importe de la factura?

133. En un despacho de materiales de construcción se han vendido los siguientes objetos: 4,500 tabiques á 18 pesos millar, 80 recintos á 40 centavos pieza, 1,800 ladrillos

á 12 pesos millar y 875 tepetates á un peso docena, ¿cuánto importa la factura?

134. Sabiendo que 12 albañiles en determinado tiempo han construido 80 metros cuadrados de pared, se desea saber ¿cuánto habrá hecho un albañil y cuánto harán 100 albañiles trabajando en la misma proporción?

135. En una construcción se han consumido 59 brazadas de piedra á razón de 8 pesos brazada y faltan por construir 880 metros cúbicos de mampostería; suponiendo que se hagan 5 metros cúbicos de pared por cada brazada de piedra, se desea saber, ¿cuántas brazadas de piedra se necesitarán por todo y cuál será el importe total de piedra?

136 Una diligencia de 12 asientos hace 6 viajes al día, ¿cuántos viajeros trasportará en 1 año 3 meses, suponiendo que todos los asientos vayan siempre ocupados?

137. ¿Cuántas plumas habrá en 85 paquetes, de los cuales 40 contienen 30 plumas cada uno y los demás 38?

138. Un negociante compró en una fábrica 25 sombreros que vendió después en 248 pesos ganando 2 pesos 50 centavos en cada sombrero, ¿cuál fué su utilidad?

139. Seis niños han reunido sus canicas con objeto de repartírselas en partes iguales. El primero tenía 12, el segundo 4, el tercero 25, el cuarto 18, el quinto 20 y el sexto 1, ¿cuántas canicas ganaron y perdieron cada uno de los niños?

140. ¿Cuál será el precio de 150 piezas de un género á 150 pesos 50 centavos la pieza y cuánto se ganará revendiéndolas con una utilidad de 12 pesos 75 centavos en cada pieza?

141. Sabiendo que un obrero gana 2 pesos 25 centavos diarios, ¿cuánto se deberá pagar á 49 obreros que han trabajado un mes con exepción de los domingos?

142. Corregir la suma 8.097,245. En la columna de las unidades se ha puesto un 2 de más, en las decenas no se agregaron 5, en las centenas se contaron 10 de menos, en la cuarta 8 de más, la quinta ha de sumar cero y 9 la sexta, la última está exacta, ¿cual será la suma verdadera?

143. Una máquina ha costado 3,580 pesos, ¿en cuánto debe venderse para ganar en la venta 512 pesos pagando 80 pesos de corretaje?

144. Un banquero debe recibir 25,897 pesos en tres pagos, dé los cuales el primero es de 8,500 pesos, el segundo y tercero por partes iguales, ¿cuánto importarán?

145. Otro banquero recibió en el primer trimestre 12,087 pesos, en el segundo 15 800, en el tercero 18,490 y en el cuatro 20,402; ha pagado en el año 100,000 pesos, ¿cuánto le quedará suponiendo que tiene en caja 17,497 pesos?

146. Un vendedor de aves de corral ha vendido 8 docenas de palomas á 25 centavos cada una y 6 docenas de gallinas cuyo precio ha excedido al de las palomas en 15 pesos, ¿á cómo vendió cada gallina?

147. Un negociante tenía 897 pacas de algodón de primera clase y 425 de segunda; ha vendido 215 de la primera y sólo le quedan 750 pacas, ¿cuántas ha vendido de cada clase?

148. Se han comprado 73 sacos de cacao, de los cuales 20 son de á 27 pesos y los restantes de 33, ¿cuánto se debe pagar por todo?

149. Un zapatero ha vendido en 2,500 pesos 530 pares de botines, de los cuales 47 son de á 8 pesos par, ¿cuál será el precio de cada uno de los demás?

150. Una persona ha recibido 27 docenas de naranjas en dos cestos, de los cuales el uno contiene 43 naranjas más que el otro, ¿cuántas naranjas hay en cada cesto?

151. En un estanque han caído 897 litros de agua y faltan para que se llene 193 litros; si hubieran caído solamente 590 litros ¿cuántos faltarían para llenarse?

152. Un niño tenía dos botellas iguales de tinta: azul y roja respectivamente; de la tinta azul había gastado ya 43 centílitros y le sobraban 57 centílitros; de la roja había gastado 72 centílitros ¿cuánto le sobraba de esta última?

153. Un niño había leído ya de su libro de lectura 27 páginas y le faltaba leer todavía 98 páginas para concluirlo; ¿cuántas páginas le faltarán para concluirlo, cuando haya leído 50 páginas?

154. Los minuteros de dos relojes señalan horas distintas: en el primer reloj marca las 2 y en el segundo las 6; el cuando en el primer reloj se marquen las 10, ¿qué hora se marcará en el segundo?

155. Cuando en una ciudad son las 4 de la mañana, en otra son las 9 de la misma; siendo las doce del día en la primera ¿qué horas serán en la segunda?

156. Tomando los mismos datos del problema anterior; es decir, siendo en un lugar las 4 de la mañana y en otro las

9 de la misma, se desea saber, cuando sean las 7 de la noche en el segundo lugar, ¿qué horas serán en el primero?

157. Tres poblaciones están situadas en una misma línea recta: de la primera á la tercera hay 109 kilómetros; de la segunda á la tercera hay 25 kilómetros, ¿qué distancia habrá de la primera á la segunda población?

158. La ciudad de México tiene actualmente tres octavos de millón de habitantes y le falta un octavo para ser igual al número de habitantes de todo el Distrito; si fuera de dos quintos de millón la actual población de México, ¿cuánto le faltaría para igualarse con la de todo el Distrito?

159. En 1521 se hizo la conquista de México, en 1810 se proclamó la independecia y en 1857 se promulgó nuestra constitución, ¿cuántos años han transcurrido de cada acontecimiento á la fecha?

160. Un artesano ha economizado 1596 pesos, guardando cada mes 4 pesos más que el mes anterior, ¿cuántos meses economizó, suponiendo que el primer mes hubiera guardado 3 pesos?

161. Dos correos partieron á un mismo tiempo de dos diferentes ciudades que distaban entre sí 420 kilómetros y tenían que encontrarse en determinado paraje; el primero caminó cada día 8 kilómetros y el segundo 12 más que el día precedente, se encontraron á los 6 días de marcha y el segundo había hecho 36 kilómetros más que el primero. Se desea determinar el número de kilómetros recorrido el primer día por cada uno de los dos correos.

162. Una persona debe 800 pesos que va á pagar en partidas mensuales, comenzando con la primera de 20 pesos y aumentando cada mes la misma cantidad, de manera que el último pago sea de 80 pesos, ¿en cuántos meses quedará cubierta la deuda y en cuánto aumentará cada pago mensual?

163. Habiéndose observado que un cuerpo al caer en el vacío recorre en el primer segundo de su caída 4 m. 90 y que en cada uno de los segundos siguientes recorre 9 m. 80 más que en el segundo precedente; suponiendo que ese cuerpo haya caído durante 20 segundos, ¿cuantos metros habrá recorrido en el último segundo y cuántos durante todo el tiempo indicado?

164. Un empleado recibe actualmente 550 pesos de suel-

do anual; el primer año de ser empleado recibió 100 pesos y en cada año de los siguientes se le aumentó su sueldo en 50 pesos más, ¿cuántos años ha durado en su empleo?

165. Caminando diariamente 1 kilómetro más que el día anterior y en el último día 58 kilómetros, se puede hacer un viaje en 19 días, ¿cuántos kilómetros se caminaron el primer día y cuántos en todo el viaje?

166. Un constructor de pozos artesianos cobró dos pesos por el primer metro perforado y 50 centavos más por cada metro de los siguentes, á los 20 metros se encontró el agua, ¿cuánto se pagó por el último metro y por toda la obra?

167. Un comerciante solicitó á un tenedor de libros para que arreglase sus cuentas, ofreciéndole una buena paga por su trabajo; el tenedor le dijo que le diera un centavo por las 10 primeras páginas que escribiera, dos centavos por las otras diez siguientes y así sucesivamente, de manera que se le duplicara el valor en cada 10 páginas al de las precedentes. El número de páginas que escribió ascendió á 400, se desea saber, ¿cuánto fué lo que cobró el tenedor al comerciante por su trabajo?

168. El inventor del ajedrez se contentó con pedir un grano de trigo por la prinera casilla del tablero, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente hasta la sexagésima cuarta ó última; suponiendo que en 1 litro de trigo haya 25000 granos y que cada hectólitro de trigo vale 4 pesos, ¿á qué suma ascendió lo que pidió el inventor?

169. Una persona desea pagar una deuda de 4840 pesos en diversos pagos, triplicando sucesivamente las partidas y comenzando por 400 pesos, ¿cuántos pagos debe hacer?

170. Otro deudor pagó una deuda en un año dando 50 pesos el primer mes y triplicando siempre la suma en el mes siguiente, ¿á cuánto ascendía la deuda?

171. Un filántropo dió limosna á 10 familias, duplicando sinmpre la que daba á la precedente; á la décima familia le tocaron 25 pesos 60 centavos, ¿cuánto le había dado á la primera y cuánto gastó por todo?

172. ¿A qué suma montaría el capital y los intereses á interés compuesto de 1 peso durante 20 años, al 5 por ciento anual?

173. Un individuo vendió un buen caballo con las siguientes condiciones: 1 centavo por el primer clavo de las herra-

duras, 2 por el segundo, 4 por el tercero y así en adelante, duplicando en cada clavo el valor del precedente hasta el trigésimo segundo y último, ¿cuál será el valor del caballo?

174. A un minero encargado de abrir una galería se le pagaron dos pesos por el primer metro, una cuarta parte más por el segundo, y así en adelante, aumentando en un cuarto sobre el metro precedente el valor de cada metro siguiente. La galería tenía 10 metros de longitud, ¿cuánto ganó el minero?

175. Un constructor de pozos artesianos se comprometió á construir un pozo por 1000 pesos durante el plazo de un mes; en el concepto de que pagaría de multa 1 peso por el primer día que excediera al plazo fijado y duplicando sucesivamente el valor de la multa precedente. El pozo quedó terminado 11 días después, ¿cuánto pagó de multa y cuánto costó el pozo?

CAPITULO IX.

Propiedades de los números.

109. Sabemos que una pluralidad cualquiera, según que sea compuesta de cantidades continuas ó no continuas, da lugar á la formación de unidades **relativas** ó á unidades **absolutas.** Pues bien, en uno ó en otro caso se pueden considerar dichas unidades como completas ó incompletas.

Una unidad completa cualquiera ó un conjunto de unidades completas como lo serían **cuatro** metros, **ocho** hombres, etc., es lo que se ha convenido en llamar número **entero**

Pero si en vez de ser una unidad completa después de haberla elegido como tal, consideramos solamente una ó varias partes iguales tomada de las muchas en que la hayamos dividido, como **medio** metro, **dos tercios** de metro, **tres cuartos** de metro, etc., entonces decimos que el número que exprese estas partes es una **fracción** ó un número **quebrado**.

Del grupo general de los números quebrados se ha hecho un grupito particular de los que expresan partes decimales de la unidad, como los décimos, los centésimos, los milésimos etc.; á estos quebrados se les ha dado el nombre de fracciones **decimales** para distinguirlos de los demás que se les designa con el nombre de fracciones **comunes**,

A veces juntamos en una sóla expresión las unidades **enteras** con las **fracciones** como cuando decimos **tres y medio** metros, **dos pesos y cuarto**, etc.: entonces decimos que son números **mixtos** ó **fraccionarios**.

De manera que los números en general se consideran por la forma en que los expresamos, de tres modos:

(*a*) Números **enteros** ó que constan de unidades completas.

(*b*) Números **quebrados** ó fracciones, ó que constan de una ó varias partes iguales menores siempre que la unidad elegida.

(*c*) Números **fraccionarios** ó **mixtos**, ó que constan de unidades enteras y partes iguales de una unidad.

110. Tanto los números **enteros** como los **quebrados** y los **fraccionarios,** según que indiquen ó no la especie de objetos reales á que se refieran, reciben respectivamente los nombres de números **concretos** ó números **abstractos.**

Un libro, **medio** peso, **tres un cuarto** naranjas, etc., son números **concretos.**

Cinco, tres cuartos, nueve dos quintos, etc., son números **abstractos.**

Como se ve en los ejemplos de los números concretos, cada número se refiere á alguna cosa, á algún objeto real; es precisamente lo que se llama **especie.** Si dos ó más números se refieren á una misma especie como **tres libros** y **nueve libros,** entonces se dice que son de la misma especie, cuya frase podremos abreviar con una sóla palabra, **homo-específicos** (de la misma especie). Si por el contrario dos ó más números se refieren á distinta especie como **tres hombres** y **cuatro mesas,** entonces se les llamará á esos números con una sola palabra **hetero-específicos** (de distinta especie). (*)

Además de estas especies **reales** á que pueden referirse los números concretos, se consideran para facilitar las operaciones como especies **convencionales** las expresiones abstractas que se forman con los órdenes de nuestro sistema de numeración, los números quebrados y los decimales; por ejemplo, una **decena,** dos **centenas,** tres **quintos,** cuatro **séptimos,** cinco **décimos,**

(*) La mayor parte de los autores usan los términos *homogéneo* y *heterogéneo* para designar dos ó más números de la misma ó de diferente *especie*. Nosotros creemos que son más exactos los términos *homo-específico* y *hetero-específico*.

ocho **centésimos**, etc. Estos números en sí mismos son verdaderamente abstractos; pero al operar con ellos el resultado de nuestras operaciones lo expresamos siempre en una forma que nos indica los órdenes ó las partes de la unidad que hubiésemos elegido. Estos números bien podrían llamarse **abstracto concretos**; abstractos porque no se refieren á ninguna especie **real** y concretos porque se pueden descomponer muy bien en un número abstracto, que es la parte numérica, y en una especie **convencional**, que es el nombre del orden ó de la parte fraccionada en que la unidad se hubiese dividido.

111. Con los números se pueden contar las cosas de esta manera: uno, dos, tres, cuatro......diez, veinte...... cien, quinientos...... mil, un millón, etc.; entonces se dice que son números **cardinales**, y cuando se señala simplemente el orden de las cosas, entonces reciben el nombre de **ordinales** como primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, décimo, vigésimo, centésimo, milésimo, etc.

Ya sabemos que los números cardinales tienen diez signos para representarse por escrito: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Sabemos además, cómo se escriben todos los números desde el uno hasta los números más grandes.

Los números **ordinales** se representan en la escritura por medio de letras, que son las siguientes:

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M,
1º,	5º,	10º,	50º,	100º,	500º,	1000º

También pueden escribirse con las mismas cifras de las cardinales y una pequeña letra **o** en la parte superior derecha.

Cuando los números ordinales se escriben con letras, entonces están sujetos á algunas convenciones, que podremos observar en los ejemplos siguientes:

VI = 5 + 1 = 6º	XI = 10 + 1 = 11º
IV = 5 — 1 = 4º	IX = 10 — 1 = 9º
II = 1 + 1 = 2º	XX = 10 + 10 = 20º

LX = 50 + 10 = 60º

XL = 50 — 10 = 40º

CC = 100 + 100 = 200º

Estas convenciones aceptadas en los números ordinales son las siguientes:

I. Todo número colocado á la **derecha** de otro **mayor** se **suma** con él.

II. Todo número colocado á la **izquierda** de otro **mayor** se **resta** de él.

III. Cuando se juntan números del mismo valor indican suma.

Los **millares** se escriben con los 999 números anteriores al 1000 y la letra M. Ejemplos:

IIM = 2,000, XM = 10,000, CM = 100,000

Los **millones** se pueden indicar con una línea recta horizontal arriba de la letra, los **billo-**

nes con dos, los **trillones** con tres, etc. Ejemplos:

$$\overline{\text{I}} = 1.000,000, \quad \overline{\overline{\overline{\text{X}}}} = 10.'000,000.'000,000.$$

Hemos tratado aquí de los números **ordinales** más bien con el fin de poderlos interpretar cuando nos encontremos con ellos; y por eso ha sido preciso conocer sus convenciones; pero no se usan para nada en las operaciones numéricas.

112. Hemos visto que con los números se efectúan **aumentos** y **diminuciones.** Los primeros por medio de la **suma** y de la **multiplicación** y las segundas por medio de la **resta** y de la **división.**

Tanto los aumentos como las diminuciones se pueden representar en la escritura en la forma de **igualdades,** es decir, en la forma de valores **distintos** en su formación pero iguales en los resultados. Pongamos algunos ejemplos.

(*a*) Si juntamos 3 centavos con 4 centavos observaremos que el resultado 7 es una **suma.**

A este resultado particular le llamaremos un **fenómeno** numérico de suma que representaremos en la siguiente igualdad:

$$3 + 4 = 7.$$

He aquí otros fenómenos numéricos:

$$7 - 3 = 4, \quad 3 \times 4 = 12, \quad \frac{12}{3} = 4$$

representan una resta, una multiplicación y una división.

Todas estas igualdades son resultados de casos particulares, es decir, son verdaderos **fenómenos** numéricos.

Ahora bien, si en vez de juntar los 3 centavos con los 4 centavos á que nos referimos en el primer ejemplo, invertimos el orden, es decir, juntamos los 4 centavos con los 3 centavos, observaremos también un resultado igual al anterior ó sea de 7 centavos. En el primer modo de operar diremos: $3+1+1+1+1=7$, y en el segundo $4+1+1+1=7$. Lo que prueba que en estos fenómenos numéricos es igual el resultado en los dos modos de operar. La igualdad en consecuencia quedará así:

$$3+4=4+3.$$

Este fenómeno es constante en muchos casos, como por ejemplo los siguientes:

$$2+1=1+2. \quad 2+5=5+2. \quad 7+9=9+7$$

y cuando un fenómeno numérico es siempre constante, podremos darle ya á ese fenómeno por su constancia en verificarse, el nombre de **propiedad** numérica. En el caso que nos ocupa, esa propiedad que venimos observando, la expresaremos como sigue:

"El valor de la suma no se altera aunque se invierta el orden de los sumandos.

(*b*) Supongamos que en una balanza tenemos en el platillo derecho 15 gramos y en el otro 15 canicas que pesen un gramo cada una. Si **quita-**

mos un gramo, la balanza pierde su equilibrio, y para conservarlo tenemos que **quitar** una canica en el otro platillo; si quitamos dos gramos hay que quitar también dos canicas para conservar el equilibrio; si quitamos tres gramos hay que quitar tres canicas, y así sucesivamente.

Si en vez de quitar **agregamos** un gramo, el equilibrio se pierde y hay necesidad para conservarlo de **agregar** una canica en el otro platillo; si agregamos dos gramos, tenemos que agregar también dos canicas; si agregamos tres gramos hay que agregar tres canicas y así sucesivamente.

Todo esto nos representa una serie de fenómenos numéricos de igualdad, que dan lugar á dos interesantes propiedades numéricas:

I. Una igualdad no se altera cuando se le **agregan** unidades iguales á cada uno de los dos miembros que la forman.

II. Una igualdad no se altera cuando se le **quitan** unidades iguales á cada uno de los dos miembros que la forman.

Ejemplos de igualdades:

$$14 = 8 + 6$$

Agregando 1 y 5 respectivamente:

$$14 + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$$
$$14 + 5 = 8 + 6 + 5 = 19$$

Quitando 1 y 5 respectivamente:

$$14 - 1 = 8 + 6 - 1 = 13$$
$$14 - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$$

De todas estas observaciones podremos afirmar de un modo general la siguiente proposición:

Si á valores iguales se agregan ó quitan valores iguales, los resultados serán iguales

113. (a) Examinemos la siguiente igualdad que representa una **suma**:

$$8 + 9 = 17.$$

Si le **agregamos** al sumando 9 que está en el primer miembro de la igualdad, una, dos, tres ó más unidades, tendremos necesidad de **agregar** también una, dos, tres ó más unidades al segundo miembro de la igualdad, para que no se altere, de esta manera:

$$8 + 9 + (1) = 17 + (1) = 18$$

$$8 + 9 + (2) = 17 + (2) = 19$$

$$9 + 9 + (3) = 17 + (3) = 20$$

Si le **quitamos** al sumando 9 que está en el primer miembro de la igualdad una, dos, tres ó más unidades, tendremos necesidad de **quitar** también una, dos, tres ó más unidades al segundo miembro de la igualdad, para que no se altere, de esta manera:

$$8 + 9 - (1) = 17 - (1) = 16$$

$$8 + 9 - (2) = 17 - (2) = 15$$

$$8 + 9 - (3) = 17 - (3) = 14$$

Estas dos nuevas propiedades numéricas de la sumà observadas en varios casos, se pueden expresar en la siguiente proposición universal:

Si á uno de los sumandos se agrega ó quita un número, la suma resultará aumentada ó disminuida del mismo número.

(b) Observemos ahora lo que pasará con la suma **agregando** una, dos, tres ó más unidades á un sumando, y **quitándolas** á la vez en el otro:

$$8 + (1) + 9 - (1) = 17$$

$$8 + (2) + 9 - (2) = 17$$

$$8 + (3) + 9 - (3) = 17$$

Se ve que la suma ha permanecido inalterable; es, pues, una nueva propiedad de la suma que observada en otros muchos casos, se podrá expresar en la siguiente proposición:

La suma permanece inalterable, cuando á uno de los sumandos se agrega un número y á otro se le quita el mismo número.

114. (a) Una persona tenía 20 pesos, de los cuales gastó 8, quedándole 12 pesos sobrantes Es un fenómeno numérico que podemos representar por medio de la siguiente igualdad:

$$20 - 8 = 12$$

Si al número 20 que es el mayor de los números del primer miembro de la igualdad ó sea el minuendo le **agregamos** una, dos, tres ó más unidades, tendremos necesidad de agregar las mismas unidades al segundo miembro de la igualdad para que no se altere:

$$20 + (1) - 8 = 12 + (1)$$

$$20 + (2) - 8 = 12 + (2)$$

$$20 + (3) - 8 = 12 + (3) \text{ etc.}$$

Si por el contrario le **quitamos** al 20 una, dos, tres ó más unidades, habrá necesidad también de **quitar** las mismas unidades al segundo miembro para que la igualdad no sufra ninguna alteración:

$$20 - (1) - 8 = 12 - (1)$$

$$20 - (2) - 8 = 12 - (2)$$

$$20 - (3) - 8 = 12 - (3)$$

Estas dos nuevas propiedades numéricas observadas en infinidad de casos relativos á la resta, podremos expresarlas en la siguiente proposición general:

Cuando al minuendo se le agrega ó quita un número, la resta ó diferencia resultará aumentada ó disminuida del mismo número.

(*b*) En la misma igualdad anterior observemos lo que pasará **agregando ó quitando** una, dos, tres ó más unidades al substraendo ó número menor los resultados serán los siguientes:

Agregando:

$$20 - (8 + 1) = 12 - 1 = 11$$

$$20 - (8 + 2) = 12 - 2 = 10$$

$$20 - (8 + 3) = 12 - 3 = \ \ 9 \text{ etc.}$$

Quitando:

$$20 - (8 - 1) = 12 + 1 = 13$$

$$20 - (8 - 2) = 12 + 2 = 14$$

$$20 - (8 - 3) = 12 + 3 = 15, \text{ etc.}$$

Estas dos nuevas propiedades numéricas observadas en varias restas, las podremos expresar del modo siguiente:

Cuando al substraendo se le agrega un número, la resta ó diferencia resultará disminuida del mismo número; y cuando al substraendo se le quita uu número, la diferencia resultará aumentada del mismo número.

(c) Observemos lo que pasa en la misma igualdad, **agregando ó quitando** una, dos, tres ó más unidades al minuendo y al substraendo á la vez.

Agregando á ambos

$$20 + (1) - 8 + (1) = 12$$

$$20 + (2) - 8 + (2) = 12$$

$$20 + (3) - 8 + (3) = 12, \text{ etc.}$$

Quitando á ambos

$$20 - (1) - 8 - (1) = 12$$

$$20 - (2) - 8 - (2) = 12$$

$$20 - (3) - 8 - (3) = 12, \text{ etc.}$$

Esta nueva propiedad numérica verificada en la resta, la expresaremos del modo siguiente:

La resta no sufre ninguna alteración cuando se agrega ó se quita á la vez un mismo número al minuendo y al substraendo.

115. (*a*) Una persona compró en 12 pesos 3 libros á razón de 4 pesos cada libro. Es un fenómeno numérico que podremos representar por medio de la siguiente igualdad:

$$3 \times 4 = 12.$$

Esto es, que cada libro representa un valor de 4 pesos; pero como son 3 libros, deberá repetirse el número cuatro tres veces, del modo siguiente:

$$4 + 4 + 4 = 12.$$

Y si en lugar de tres libros y de cuatro pesos, invertimos el orden, es decir, 4 libros á razón de 3 pesos, entonces habrá que repetir el precio 3 pesos, 4 veces, del modo que sigue:

$$3+3+3+3=12.$$

En ambos casos los resultados son iguales; luego muy bien podremos establecer la siguiente igualdad:

$$4+4+4 = 3+3+3+3$$

la que significa que 3 veces 4 ó bien 4 veces 3, dan el mismo resultado, esto es,

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Observemos otros ejemplos:

$$5 \times 8 = 8 \times 5 = 40$$

$$4 \times 9 = 9 \times 4 = 36$$

$$7 \times 3 = 3 \times 7 = 21, \text{ etc.}$$

Esta propiedad numérica que se observa en la multiplicación, la expresaremos del modo siguiente:

El valor del producto de dos números no se altera, aun cuando se invierta el orden de los factores.

(*b*) Observemos lo que pasa en una igualdad cuando se multiplican ó dividen sus dos miembros por un mismo número. Sea la igualdad siguiente:

$$5 \times 12 = 60.$$

Multiplicando por 2, por 3, por 4, etc. sus dos miembros

$$5 \times 12 \times (2) = 60 \times (2) = 120$$

$$5 \times 12 \times (3) = 60 \times (3) = 180$$

$$5 \times 12 \times (4) = 60 \times (4) = 240, \text{ etc.}$$

Dividiendo entre 2, entre 3, entre 4, etc., sus dos miembros:

$$\frac{5 \times 12}{(2)} = \frac{60}{(2)} = 30$$

$$\frac{5 \times 12}{(3)} = \frac{60}{(3)} = 20$$

$$\frac{5 \times 12}{(4)} = \frac{60}{(4)} = 15, \text{ etc.}$$

En todos estos ejemplos la igualdad subsiste y se vería comprobada en otros muchos; pero con los expuestos nos bastará para establecer la siguiente proposición:

Si los dos miembros de una igualdad se multiplican ó dividen por un mismo número, los resultados serán iguales.

116. (*a*) Observemos lo que pasará al producto en una multiplicación, cuando se multiplican ó dividen por 2, por 3, por 4, etc., uno de los factores. Sea la igualdad siguiente:

$$5 \times 12 = 60$$

Multiplicando:

$$5 \times 12 \times (2) = 60 \times (2) = 120$$

$$5 \times 12 \times (3) = 60 \times (3) = 180$$

$$5 \times 12 \times (4) = 60 \times (4) = 240, \text{ etc.}$$

Dividiendo:

$$5 \times \frac{12}{(2)} = \frac{60}{(2)} = 30$$

$$5 \times \frac{12}{(3)} = \frac{60}{(3)} = 20$$

$$5 \times \frac{12}{(4)} = \frac{60}{(4)} = 15, \text{ etc.}$$

Al multiplicar ó dividir el primer miembro de la igualdad por un número, hemos tenido necesidad de multiplicar ó dividir por el mismo número al segundo miembro, para que la igualdad no sufriese ninguna alteración.

El resultado de nuestras observaciones en otros ejemplos semejantes, lo podremos expresar del modo siguiente:

En una multiplicación, si uno de los factores se multiplica ó divide por un número, el producto resultará multiplicado ó dividido también por el mismo número.

(*b*) Observemos ahora lo que pasará á un producto, **multiplicando** por 2, por 3, por 4, etc., un factor y **dividiendo** á la vez por los mismos números el otro factor:

$$5 \times 12 = 60$$

$$5 \times (2) \times \frac{12}{(2)} = 60$$

$$5 \times (3) \times \frac{12}{(3)} = 60$$

$$5 \times (4) \times \frac{12}{(4)} = 60, \text{ etc.}$$

Se ve que el producto ha permanecido inalterable; es pues una nueva propiedad numérica, que observada en muchos casos de la multiplicación, la podremos expresar de la siguiente manera:

El producto de dos factores permanece inalterable cuando uno de ellos se multiplica y el otro se divide por el mismo número.

117. (*a*) Habiendo distribuido una persona 20 pesos entre 4 personas, les tocó á cada una 5 pesos. He aquí un fenómeno numérico que podremos representar en la siguiente igualdad

$$\frac{20}{4} = 5$$

Si al dividendo 20 que está en el primer miembro de la igualdad lo **multiplicamos** por 2 ó por 10, tendremos también necesidad de **multiplicar** por 2 y por 10 el segundo miembro para que la igualdad no se altere.

$$\frac{20 \times (2)}{4} = 5 \times (2)$$

$$\frac{20 \times (10)}{4} = 5 \times (10), \text{ etc.}$$

Si por el contrario **dividimos** el dividendo 20 que está en el primer miembro por 2 y por 10, tendremos también que dividir por 2 y por 10 el segundo miembro para que dicha igualdad no sufra ninguna alteración.

$$\frac{20 \div (2)}{4} = \frac{5}{(2)}$$

$$\frac{20 \div (10)}{4} = \frac{5}{(10)}, \text{ etc.}$$

Comprobada esta nueva propiedad numérica en la división de varios casos, podremos expresarla del modo siguiente:

Cuando en una división se multiplica ó divide el dividendo por un número, el cociente resultará multiplicado ó dividido por el mismo número.

(*b*) Observemos ahora lo que pasa al cociente de una división cuando el divisor se multiplica ó divide por un número. Sea la igualdad siguiente:

$$\frac{180}{12} = 15$$

Multiplicando el divisor:

$$\frac{180}{12 \times (2)} = \frac{15}{(2)}$$

$$\frac{180}{12 \times (3)} = \frac{15}{(3)} \text{ etc.}$$

Dividiendo el divisor:

$$\frac{180}{12 \div (2)} = 15 \times (2)$$

$$\frac{180}{12 \div (3)} = 15 \times (3) \text{ etc.}$$

Y si estas propiedades numéricas las observamos en varios ejemplos semejantes, podremos expresarlas de un modo general como sigue:

Cuando en una división se multiplica el divisor por un número, el cociente resultará dividido, y cuando el divisor se divide por un número, el cociente resultará multiplicado por el mismo número.

(c) Observemos lo que pasa al cociente en una división cuando se **multiplican** ó **dividen** á la vez el dividendo y el divisor por un mismo número.

Sea la igualdad siguiente:

$$\frac{30}{6} = 5$$

Multiplicando:

$$\frac{30 \times (2)}{6 \times 2} = 5$$

$$\frac{30 \times (3)}{6 \times (3)} = 5, \text{ etc.}$$

Dividiendo:

$$\frac{30 \div 2}{6 \div 2} = 5$$

$$\frac{30 \div 3}{6 \div 3} = 5, \text{ etc.}$$

Se ve que el cociente permanece inalterable, y observando esta propiedad en otros muchos ejemplos semejantes, la podremos expresar del modo siguiente:

El cociente en una división no sufre alteración alguna cuando se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por un mismo número.

118. Observemos la siguiente serie de números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, etc.

Bajo el punto de vista de su mayor ó menor grado de su divisibilidad exacta, se nota lo siguiente:

1º Los números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc., son todos divisibles exactamente por **sí mismos** y por **la unidad;** pero no tienen otra manera de dividirse de un modo exacto.

$$7 \div 1 = 7, \text{ ó bien } 7 \div 7 = 1$$

y así se comprobará con los demás números.

2º Los números 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, etc., además de ser divisibles exactamente por sí mismos y por la unidad, son divisibles con exactitud por algunos números de los **primeros.**

El 4 es divisible por 2; el 6 por 2 y por 3; el 8 por 2; el 9 por 3; el 10 por 2 y por 5; el 12 por 2 y por 3; el 14 por 2 y por 7; el 15 por 3 y por 5; el 16 por 2; el 18 por 2 y por 3; el 20 por 2 y por 5, etc.

De estas dos observaciones se desprende con toda claridad la formación de dos grupos distintos de números: los **primeros** que sólo son divisibles exactamente por sí mismos y por la unidad, y los se-

gundos que además de ser divisibles por sí mismos y por la unidad, lo son también por algunos números de los primeros.

De aquí la clasificación de los números según su mayor ó menor grado de divisibilidad: en **"primos"** y **"no primos."**

119. Hay necesidad de distinguir cuando un número es primo ó no primo. Desde luego se notan en la forma de los números las siguientes observaciones:

1ª Con excepción del número primo 2, los demás números que terminan en esa cifra inclusive, ó en sus productos por el mismo número, como 4, 6, 8 y 10 que son cifras pares no podrán ser nunca números primos por ser divisibles por dos.

2ª Con excepción del número primo 5, los demás números que terminen en esa cifra no podrán ser números primos por ser divisibles por cinco

3ª Sólo podrán ser números primos los números que terminen en 1, 3, 7 y 9, menos en los casos que sean divisibles por otros números primos diferentes.

120. Según estas tres observaciones, podremos formar una tabla de números primos en la serie del 1 al 100, como sigue:

Números primos excepcionales, 2 y 5.

1— 3— 7— **9**	**51**—53—**57**—59
11—13—17—19	61—**63**—67—**69**
21—23—**27**—29	71—73—**77**—79
31—**33**—37—**39**	**81**—83—**87**—89
41—43—47—49	**91**—**93**—97—**99**

De esta tabla quedan excluidos como **no-primos** los siguientes: 9, 21, 27, 33, 39, 49, 51, 57, 63, 69, 77, 81, 87, 91, 93 y 99, porque son divisibles por diversos números primos.

De manera que en la serie del 1 al 100 hay que quitar **58** números que terminan en las cifras 2, 4, 6, 8 y 0 y 16 números que terminan en las cifras 1, 3, 7 y 9; de donde resultan solamente: 100 — 58 — 16 = 26, veintiséis números primos.

121. Según esto, será muy fácil descubrir si un número es primo ó no-primo, descomponiéndolo previamente en sus factores primos correspondientes. Observemos algunos ejemplos:

$9 = 3 \times 3$	$63 = 3 \times 3 \times 7$
$21 = 3 \times 7$	$69 = 3 \times 23$
$27 = 3 \times 3 \times 3$	$77 = 7 \times 11$
$33 = 3 \times 11$	$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$39 = 3 \times 13$	$87 = 3 \times 29$
$49 = 7 \times 7$	$91 = 7 \times 13$
$51 = 3 \times 17$	$93 = 3 \times 31$
$57 = 3 \times 19$	$99 = 3 \times 3 \times 11$

Ninguno de los números propuestos es número primo, supuesto que son divisibles exactamente por otros números primos distintos, además de ser también divisibles por sí mismos y por la unidad.

Observemos ahora algunos nuevos ejemplos:

7. No es divisible por 2, 3 y 5.
11. No es divisible por 2, 3, 5 y 7.
13. No es divisible por 2, 3, 5, 7 y 11.
17. No es divisible por 2, 3, 5, 7, 11 y 13.
19. No es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17.

Luego estos números tienen que ser forzosamente números primos porque no son divisibles más que por sí mismos y por la unidad.

Y para convencernos de que un número es primo ¿será preciso dividirlo por todos los números primos menores que él? No es necesario; en el 7 por ejemplo, caben muy bien **más de una vez** el 2 y el 3, pero el cinco ya no cabe; en el 11 caben muy bien **más de una vez** el 2, 3 y 5, pero no cabe el 7 **más de una vez,** etc. Luego bastará con que el último número primo porque se divide el número propuesto **sea menor que la mitad** de su valor para ya no continuar la operación y asegurar que ese número es un número primo.

122. En la práctica, para determinar los números primos que contienen un número no-primo, se procede del modo siguiente:

1º Se le dividirá una ó varias veces por 2 hasta obtener un cociente indivisible por dicho número.

2º El último cociente se dividirá por 3 una ó más veces, después por 5, 7, 11, etc.; cuantas veces sea necesario hasta obtener 1 como último cociente.

2520	2
1260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

3º El número propuesto quedará descompuesto en sus factores primos y la igualdad se formará: como primer miembro el número propuesto y como segundo miembro los números primos **diferentes** multiplicados entre sí y marcando cada uno de ellos con una pequeña cifra colocada á la derecha y arriba, y que se llama **exponente** para indicar el número de veces que entra como factor cada número primo.

En el ejemplo propuesto obtendremos:

$$2520 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

y abreviando en la escritura estos siete factores, tendremos:

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

El exponente del 5 y del 7 es la unidad, supuesto que entran en el producto **una** vez como factores.

123. Obsérvese que en el ejemplo anterior el número 2520 contiene como **factores** á los números $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$; luego también será un **dividendo** exacto de todos ellos.

Estos dividendos exactos que resultan de la multiplicación de dos ó más factores reciben el nombre de **múltiplos** y los factores que entran en la multiplicación se les llama **submúltiplos.**

Si en vez de considerar todos los factores en que se descompone el número 2520, solo consideráramos los diferentes, uno de cada cifra, entonces se formaría un número nuevo que sólo contuviera una vez el 2, el 3, el 5 y el 7, es decir, $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$; y á este número que resulta, lo podríamos llamar muy bien el **menor múltiplo** ó bien el menor dividendo que podrá dividirse exactamente entre los números 2, 3, 5 y 7.

De manera que el **menor múltiplo** es el menor dividendo que puede dividirse exactamente entre dos ó más números dados.

124. Descompongamos ahora en sus factores primos **dos** números diferentes, por ejemplo 24 y 40.

$$24=2^3\times3$$

$$40=2^3\times5$$

Si multiplicamos ordenadamente estas dos igualdades, obtendríamos una nueva igualdad con sus productos

$$24\times40=2^3\times3\times2^3\times5$$

El múltiplo $24\times40=960$ contiene á los factores $2^3\times3\times2^3\times5$; pero si de estos factares suprimimos el 2^3 que está repetido, entonces nos resultará un múltiplo menor formado de los factores restantes:

$$2^3\times3\times5 = 120.$$

El número 120 que resulta, es pues el **menor múltiplo común** entre 24 y 40 ó sea el menor dividendo que podrá dividirse exactamente entre los números 2^3, 3 y 5.

Luego para encontrar el **menor múltiplo común** entre dos números se hará lo siguiente:

1º Se descompondrán en sus factores primos.

2º Se separarán los factores **diferentes** que tengan **mayor** exponente.

3º Se suprimirán los factores sobrantes afectados de **menores** exponentes.

4º Se formará un producto con los factores separados, y este será el menor múltiplo común de los dos números dados.

125. Busquemos ahora el menor múltiplo común de **varios** números:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 14,\ 24,\ 40.$$

Obsérvese que el factor 2 está contenido en el 14, el factor 3 en el 24, el factor 5 en el 40 y el factor 7 también en el 14. Podremos suprimirlos desde luego, y nos quedarán solamente los números 14, 24 y 40 que descompondremos en sus factores primos

$$14=2\times 7$$

$$24=2^3\times 3$$

$$40=2^3\times 5$$

y como los factores diferentes son $2^3\times 3\times 5\times 7$, habrá que suprimir los sobrantes, 2×2^3 y el menor múltiplo común que resulta en los tres números dados será:

$$2^3\times 3\times 5\times 7=840.$$

que á la vez será dividendo exacto de todos los números 2, 3, 5 y 7 suprimidos anteriormente.

Se ve pues que para encontrar el **menor múlti-**

plo común entre **varios** números, se tiene que comenzar por **excluir** los que son factores de algunos de los propuestos; los números que quedan se descompondrán en sus factores primos y el menor múltiplo común será el producto de todos los factores **diferentes** que entren en su formación, afectando estos factores del **mayor** de sus exponentes.

126. Así como hay un **menor dividendo común** que es divisible exactamente entre dos ó más números dados, así también hay un **mayor divisor común** que pueda dividirlos exactamente. Pongamos algunos ejemplos.

Sean los números 162 y 360 que descompondremos en sus factores primos:

$$162 = 2 \times 3^4$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Se ve claramente que el número 162 no se divide exactamente entre 2^3 y 5; ni tampoco el 360 se divide exactamente entre 3^4; luego los factores 2^3, 3^4 y 5 no pueden considerarse como divisores comunes.

Pero sí pueden considerarse como divisores comunes á los números 162 y 360 el 2 y el 3^2, que multiplicados entre sí dan el resultado siguiente:

$$2 \times 3^2 = 18.$$

Y este número 18 formado de los factores **iguales** 2 y 3^2 afectados del **menor** de los exponentes, es precisamente el **mayor divisor común** entre los dos números 162 y 360.

Otro ejemplo: ¿Cuál será el mayor divisor común entre los números 48, 60 y 96?

Busquémoslo primero entre 48 y 60.

$$48=2^4\times3$$

$$60=2^2\times3\times5$$

Los divisores **iguales** afectados del **menor** de los exponentes son $2^2\times3=12$; luego 12 será el **mayor divisor común** entre 48 y 60.

Ahora busquemos el mayor divisor común entre el resultado 12 y el número 96:

$$12=2^2\times3$$

$$96=2^5\times3.$$

Los divisores **iguales** afectados del **menor** de los exponentes son $2^2\times3=12$; luego 12 será el **mayor divisor común** entre los tres números 48, 60 y 96.

Se llama pues el mayor divisor común ó **máximo común divisor** de dos ó más números el mayor divisor que puede dividirlos exactamente.

Para determinar el **máximo común divisor** de dos ó más números, se procederá así:

1º Se descompondrán los dos primeros en sus factores primos.

2º Se elegirán los factores comunes ó **iguales** afectados del **menor** de los expenentes.

3º Se hará el producto de los factores elegidos, y ese producto será el **máximo común divisor.**

4º Con el resultado obtenido y el número siguiente se buscará nuevamente el máximo común divisor.

5° Así se continuará hasta agotar todos los números; el último resultado será el **máximo común divisor** de todos los números propuestos.

127. Es facil conocer á primera vista los caracteres de la divisibilidad de todos los números **no primos**, haciendo al efecto las observaciones correspondientes á cada **múltiplo** que contenga como faceor un **número primo** cualquiera.

El primer número primo de nuestro sistema de numeración es el número **uno.**

$$1\times1=1;\quad 1\times1\times1=1;\quad 1\times1\times1\times1=1.$$

Todos los múltiplos del número **uno** son siempre iguales á uno.

$$1\times2=2;\quad 1\times3=3;\quad 1\times4=4.$$

Todos los productos que resultan de multiplicar **uno** por cualquier número son iguales á este número.

$$2\div1=2;\quad 3\div1=3;\quad 4\div1=4.$$

Todo número dividido entre **uno** da como cociente el mismo número. Luego:

Todo número es divisible exactamente por la unidad.

He aquí la fórmula

$$\frac{u}{1}$$

128. Observemos la serie de los múltiples del **dos**; 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, etc.

En todos se nota que la cifra de las unidades es una cifra par ó sea exactamente divisible dor dos. Luego:

Todo número que tenga en sus unidades una cifra par, será un múltiplo de dos y por consiguiente será exactamente divisible por dos.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u}{2}$$

129. Observemos la serie de los múltiplos del **tres:** 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, etc.

Se nota que los números 3, 6 y 9 tienen un valor absoluto de tres, seis y nueve unidades respectivamente.

En los números 12, 15 y 18 se nota que sumando sus cifras separadamente dan una suma igual á los tres primeros ó sean 3, 6 y 9.

En los tres siguientes, 21, 24 y 27 se nota el mismo fenómeno, y si se continúan observando los demás números en todos ellos habrá uná suma resultante de 3, 6 y 9. Luego:

Todo número cuya suma de sus cifras sean 3, 6 ó 9, será un múltiplo de tres y por consiguiente será exactamente divisible por tres.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+d+c.......}{3}$$

130. Observemos la serie de los múltiplos del **cinco:** 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, etc.

Se nota que la cifra de las unidades es **cinco** ó **cero.**

En uno ó en otro caso, dividiendo las unidades por **cinco** tienen quinta parte exacta, supuesto que el cero de las unidades con una decena á la izquierda representa al número diez. Luego:

Todo número que tenga en sus unidades un cinco ó un cero será un múltiplo de cinco, y por consiguiente será exactamente divisible por cinco.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u}{5}$$

131. Observemos algunos múltiplos del **siete,** formados de dos á seis cifras:

(a) De dos cifras:

14.........4+ 3= 7	63.........3+18=21
21.........1+ 6= 7	77.........7+21=28
35.........5+ 9=14	91.........1+27=28
49.........9+12=21	98.........8+27=35

En todos estos números se nota que la cifra de las unidades sumadas con el triple de las decenas produce siete ó un múltiplo de siete. Luego:

Todo número formado de dos cifras y cuya cifra de las unidades sumada con el triple de las decenas, dé como resultado siete ó un múltiplo de siete, será dicho número exactamente divisible por siete.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u + 3\,d}{7}$$

(*b*) De tres cifras:

112......2+3+2= 7	651......1+15+12=28
217......7+3+4=14	763......3+18+14=35
336......6+9+6=21	994......4+27+18=49

En todos estos números se nota que la cifra de las unidades sumada con el triple de las decenas, más el duplo de las centenas, da siete ó un múltiplo de siete. Luego:

Todo número formado de tres cifras y cuyas unidades sumadas con el triple de las decenas y el duplo de las centenas. dé como resultado un múltiplo de siete, será exactamente divisible por siete.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+3\,d+2\,c}{7}$$

(*c*) De cuatro cifras:

1519.........9+ 3+10+ 6=28
2352.........2+15+ 6+12=35
3381.........1+24+ 6+18=49

Se observa que la cifra de las unidades, más el triple de las decenas, más el duplo de las centenas, más el séxtuplo de los millares, la suma es un múltiplo de siete. Luego:

Todo número formado de cuatro cifras y cuyas unidades sumadas con el triple de las decenas, más el duplo de las centenas, más el séxtuplo de los milla-

res, dé como resultado un múltiplo de siete, será divisible exactamente por siete.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+3\,d+2\,c+6\,m}{7}$$

(d) De cinco cifras:

15197.........7+27+2+30+4=70

27048.........8+12+0+42+8=70

Se nota que á la fórmula anterior, se agrega el cuádruplo de las decenas de millar para obtener como suma un múltiplo de siete. Luego:

Todo número formado de cinco cifras y cuyas unidades sumadas con el triple de las decenas, más el duplo de las centenas, más el séxtuplo de los millares y más el cuádruplo de las decenas de millar, dé como resultado un múltiplo de siete, será exactamente divisible por siete.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+3\,d+2\,c+6\,m+4\,dm}{7}$$

(e) De seis cifras:

111111.........1+3+2+6+4+5=21

222222.........2+6+4+12+8+10=42

Al resultado de la fórmula anterior se agrega el quíntuplo de las centenas de millar para obtener como suma un múltiplo de siete. Luego:

Todo número formado de seis cifras y cuyas unidades sumadas con el triple de las decenas, más el duplo de las centenas, más el séxtuplo de los millares, más el cuádruplo de las decenas de millar, más el quíntuplo de las centenas de millar, dé como resultado un múltiplo de siete, será exactamente divisible por siete.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+3\,d+2\,c+6\,m+4\,dm+5\,cm}{7}$$

(*f*) Esta fórmula final se repite en el mismo orden cuando los números constan de siete cifras en adelante.

132. Observemos algunos ejemplos de múltiplos del **once**, de dos á seis cifras:

11.........1+10=11
121.........1+20+1=22
1111.........1+10+1+10=22
91113.........3+10+1+10+9=33
111111.........1+10+1+10+1+10=33

En tòdos estos ejemplos se nota que multiplicando alternativamente las unidades, decenas, centenas, etc., por los números 1 y 10, la suma de sus productos da un múltiplo de once. Luego:

Todo número formado de varias cifras y cuyas unidades, decenas, centenas, etc., multiplicadas alternativamente por los números 1 y 10, y estos

productos sumados den como resultado un múltiplo de once, el número total será también exactamente divisible por once.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+10\,d+c+10\,m\ldots\ldots}{11}$$

133. Observemos algunos múltiplos del número **trece.**

1131.........1+30+9+12=52

11115.........5+10+9+12+3=39

111111.........1+10+9+12+3+4=39

En estos ejemplos se nota que la cifra de las unidades, más el décuplo de las decenas, más el nónuplo de las centenas, más el dodécuplo de los millares, más el triple de las decenas de millar, más el cuádruplo de las centenas de millar, da como suma un múltiplo de trece. Luego:

Todo número formado de seis cifras y cuyas unidades, más diez veces las decenas, más nueve veces las centenas, más doce veces les millares, más tres veces las decenas de millar, más cuatro veces las centenas de millar, dé como resultado un múltiplo de trece, el número total será exactamente divisible por trece.

He aquí la fórmula:

$$\frac{u+10\,d+9\,c+12\,m+3\,dm+4\,cm}{13}$$

Si el número se forma de más de seis cifras, se repetirá en el mismo orden la fórmula anterior.

134. Del mismo modo que hemos podido determinar los caracteres de divisibilidad de los múltiplos de los números primos anteriores, podríamos determinar indefinidamente los de los demás números primos; pero este estudio es mucho más extenso y lo hemos desarrollado ampliamente en nuestra obra "**Las maravillas de los números primos**" ó sea "**El principio de la divisibilidad numérica**" que podrán consultar nuestros pequeños lectores si así lo desean. (*)

No obstante les vamos á poner algunas fórmulas más tomadas de la citada obra.

(*a*) Fórmula del número **treinta y siete.**

$$\frac{u+10\ d+26\ c\ldots\ldots}{37}$$

Un número es divisible por **treinta y siete** cuando la suma de las unidades más **diez** veces las decenas y más **veintiséis** veces las centenas, la suma es treinta y siete ó uno de sus múltiplos.

(*b*) Fórmula del número **cuarenta y uno.**

$$\frac{u+10\ d+18\ c+16\ m+37\ dm}{41}$$

Unidades más **diez** veces decenas, más **dieciocho** veces centenas, mas **diez y seis** veces millares, más **treinta y siete** veces decenas de millar, dará un múltiplo de **cuarenta y uno.**

(*) *A los maestros.* — El estudio de los números primos tal como nosotros lo hemos hecho, es de gran importancia científica para comprender y apreciar mejor la "Teoría de los logaritmos." Consúltese nuestra obra "Tratado de Logaritmia."

(c) Fórmula del número **ciento uno.**

$$\frac{u+10\,d+100\,c+91m}{101}$$

Unidades más **diez** veces decenas, más **cien** veces centenas, más **noventa y una** veces millares, dará un múltiplo de **ciento uno.**

135. Para determinar los caracteres de divisibilidad de los múltiplos de los números **no primos** se procederá de un modo semejante. Veamos algunos ejemplos.

(a) Múltiplos del **cuatro.**

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, etc.

$$\frac{u+2\,d\ldots\ldots}{4}$$

Unidades más duplo de las decenas son siempre múltiplos de cuatro.

(b) Múltiplos de **seis.**

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, etc.

$$\frac{u+4\,d+4\,c+4m\ldots\ldots}{6}$$

Unidades más cuádruplo de las decenas, centenas, millares, etc., darán un múltiplo de seis.

(c) Múltiplos de **ocho.**

8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, etc.

$$\frac{u+2\,d+4\,c\ldots\ldots}{8}$$

Unidades más duplo de las decenas, más el cuádruplo de las centenas, la suma será un múltiplo de ocho.

(*d*) Múltiplos de **nueve.**

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, etc.

$$\frac{u+d+c,\ \text{etc.}}{9}$$

Unidades más decenas, más centenas, etc., la suma será un múltiplo de nueve.

(*e*) Los múltiplos de **diez, cien, mil,** etc., se conocen en que terminan en uno, dos, tres ó más ceros á la derecha.

(*f*) Múltiplos del **doce.**

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, etc.

$$\frac{u+10\,d+4\,c+4\,m\ldots\ldots}{12}$$

Unidades más diez veces decenas, más cuatro centenas, millares, decenas de millar, etc., la suma será un múltiplo de doce.

Como ejemplos bastan los indicados; pero podrán continuarse indefinidamente.

136. En la práctica se pueden aplicar algunas reglas que se derivan con suma facilidad de todos los ejemplos que hemos examinado anteriormente:

(*a*) Si el número termina en cifra par ó en cero, es divisible por **dos.**

(*b*) Si la suma de sus cifras es tres, seis ó nueve, será divisible por **tres.**

(*c*) Si las dos últimas cifras son un múltiplo de cuatro, será divisible por **cuatro.**

(*d*) Si termina en cinco ó en cero, será divisible por **cinco.**

(*e*) Si tiene mitad y tercera, será divisible por **seis.**

(*f*) Si las tres últimas cifras son un múltiplo de ocho, será divisible por **ocho.**

(*g*) Si la suma de sus cifras es nueve, será divisible por **uueve.**

(*h*) Si tiene tercera y cuarta, será divisible por **doce,** etc., etc.

Ejercicios.—176. Diga usted entre los números siguientes ¿cuáles son enteros, cuáles son quebrados y cuáles son mixtos? Tres libros, medio litro, siete y cuarto de la mañana.— Dos y medio pesos, nueve décimos de kilogramo, veinte nueces.—Cinco metros ¿qué clase de número es? y diga usted si se refiere á cantidad continua ó no continua? —Seis naranjas y media ¿qué número es y á qué clase de cantidad corresponde, á las continuas ó á las no continuas? —Ponga usted tres ejemplos de números enteros que se refieran á cantidades continuas.—Otros tres ejemplos de números quebrados que se refieran á cantidades no continuas. —Tres ejemplos de números mixtos de cantidades continuas y otros tantos de cantidades no continuas.

177. Diga usted en los ejemplos siguientes ¿cuáles son números concretos y cuáles son abstractos?—Cuatro, tres quintos y siete y medio.—Dos libros, medio kilómetro, doce y tres cuartos manzanas.—Diga usted tres ejemplos de números concretos que sean enteros; otros tantos de quebrados y otros tantos de mixtos.—Diga usted tres ejemplos

de números abstractos que sean enteros; otros tantos de quebrados y otros tantos de mixtos.—Cuando dos números son de la misma especie ó de diferente especie ¿con qué nombres podremos distinguirlos?—Tres libros y seis libros ¿qué clase de números son?—Cinco pesos y siete hombres ¿qué clase de números son?—Ponga usted tres ejemplos de números homoespecíficos y otros tantos de números heteroespecíficos.—¿Con qué nombre particular podremos designar los siguientes números: tres decenas, nueve centenas, ocho décimos, nueve séptimos?—¿Por qué se les puede llamar abstracto-concretos?—Ponga usted algunos ejemplos de números abstracto-concretos.

178. Diga usted en los ejemplos siguientes ¿qué números son cardinales y cuáles son ordinales? siete, nueve, vigésimo, cuarenta, centésimo, cincuenta y nueve, trigésimo, etc. —¿Cuáles son los signos con que se representan en la escritura los números cardinales y los ordinales?—Escriba usted los números ordinales con sus letras respectivas en la serie de uno á diez —Escriba usted con letras los números ordinales 15º, 17º, 21º, 37º, 43º, 59º, 63º, 77º, 82º, 99º —Escriba usted con letras los números ordinales: 125º, 247º, 354º, 497º, 592º, 640º, 792º, 847º, 932º.—Escriba usted con letras 1810º, 1862º, 1907º—Escriba usted con letras tres millones, quinientos treinta y nueve mil, seiscientos catorce.—Diga usted las tres convenciones principales del sistema de numeración romana.

179. Represente usted por escrito algunos fenómenos numéricos en la forma de igualdades y empleando las cuatro operaciones numéricas.—Pruebe usted que $3 + 4$ y $4 + 3$ dan resultados iguales.—En la misma igualdad $3 + 4 = 7$ agregue 3 á sus dos miembros ¿qué pasa?—En la misma igualdad $3 + 4 = 7$ quite usted 2 á sus dos miembros ¿qué pasa? ¿de qué modo podrán probarse estas propiedades con una balanza?

180. Sea la suma $12 + 13 = 25$. Si le agregamos 5 al sumando 12 ¿qué le pasa á la suma? Si le quitamos 5 al sumando 13 ¿qué pasa á la suma? ¿Qué propiedad general se ha observado?—Sea la suma $8 + 9 = 17$. Si le agregamos 2 al sumando 8 y le quitamos 2 al sumando 9 ¿qué pasa á la suma? ¿qué propiedad general se ha observado?

181. Sea la resta $20 - 8 = 12$. Si le agregamos 3 al mi-

nuendo 20 ¿qué pasa con la resta 12? Si le quitamos 3 al minuendo 20 ¿qué pasa con la resta 12? ¿Qué propiedad general se ha observado?—Sea la resta $20 - 8 = 12$. Si le agregamos 2 al sustraendo 8 ¿qué le pasa á la resta 12? Si le quitamos 2 al sustraendo 8 ¿qué pasa á la resta 12? ¿Qué propiedades nuevas se han observado?—Sea la resta $20 - 8 = 12$. Si le agregamos 4 al minuendo 20 y al sustraendo 8 ¿qué pasa con la resta? Si le quitamos 4 al minuendo 20 y al sustraendo 8 ¿qué pasa con la resta? ¿Qué nueva propiedad se ha observado?

182. Es lo mismo 3×4 que 4×3, ¿por qué? ¿qué propiedad resulta?—Sea el producto $5 \times 12 = 60$. Si se multiplican por 2 los dos miembros de la igualdad ¿se alterará ó no dicha igualdad? Si se dividen por 2 los dos miembros ¿qué pasará con la igualdad, se alterará ó no? ¿Qué propiedad se ha observado?

183. Sea la igualdad $5 \times 12 = 60$. Si multiplicamos por 3 cualquiera de los factores ¿qué le pasa al producto? Si dividimos por 3 cualquiera de los factores ¿qué le pasa al producto? ¿Qué propiedad se ha observado?—Sea la misma igualdad $5 \times 12 = 60$. Si multiplicamos por 2 el multiplicando 5 y dividimos por 2 el multiplicador 12 ¿qué pasa al producto 60? ¿Qué propiedad nueva se ha observado?

184. Sea la igualdad $20 \div 4 = 5$. Si el dividendo 20 lo multiplicamos por 2 ¿qué le pasa al cociente? Si el dividendo 20 se divide entre 2 ¿qué le pasa al cociente? ¿Qué propiedad se ha observado?—Sea la igualdad $180 \div 12 = 15$. Si multiplicamos el divisor 12 por 2 ¿qué le pasa al cociente? Si dividimos el divisor 12 entre 2 ¿qué le pasa al cociente? ¿Qué propiedad se ha observado?—Sea la igualdad $30 \div 6 = 5$. Si multiplicamos por 2 el dividendo 30 y el divisor 6 ¿qué le pasa al cociente 5? Si dividimos por 2 el dividendo 30 y el divisor 6 ¿qué le pasa al cociente 5? ¿Qué nueva propiedad se ha observado?

185. ¿Se altera el valor de la suma cuando se invierte el orden de los sumandos? ¿Qué pasa con los resultados cuando á valores iguales se agregan ó quitan valores iguales?—¿Qué le pasa á una suma cuando á uno de los sumandos se le agrega ó quita un número?—¿Qué pasa á la suma cuando á uno de los sumandos se le agrega un número y á otro

se le quita el mismo número?—¿Qué pasa á la resta cuando al minuendo se le agrega ó quita un número?—¿Qué pasa á la resta cuando al substraendo se le agrega ó quita un número?—¿Qué pasa á la resta cuando se le agrega y quita á la vez un mismo número al minuendo y al substraendo?

186. ¿Qué le pasa al producto cuando se invierte el ord n de los factores?—¿Qué pasa á una igualdad cuando sus dos miembros se multiplican ó dividen por un mismo número?—¿Qué le pasa á un producto cuando uno de los factores se multiplica ó divide por un número?—¿Qué pasa á un producto cuando un factor se multiplica y el otro se divide por un mismo número?—¿Qué le pasa á un cociente cuando el dividendo se multiplica ó divide por un número?—¿Qué le pasa á un cociente cuando el divisor se multiplica ó divide por un número?—¿Qué le pasa á un cociente cuando el dividendo y el divisor se multiplican ó dividen por un mismo número?

187. Diga usted en la serie de números de 1 al 20 ¿cuáles son los únicos que son divisibles por sí mismos y por la unidad?—¿Por qué números son divisibles el 4, el 6, el 8, el 9, el 10, el 12, el 14, el 15, el 16, el 18, y el 20?—¿Cuáles son los números primos comprendidos del 21 al 40?—¿Cuáles son los no primos del 21 al 40 y por qué números son divisibles?—Practicar estos dos ejercicios del 41 al 60.—Los mismos del 61 al 80.—Los mismos del 81 al 100.

188. ¿Podrán ser números primos los terminados en 2, 4, 6, 8 y 0?—¿Cuál es el único número primo par?—Podrán ser números primos los terminados en 5?—Cuál es el único número primo que termina en 5?—¿En qué cifras podrán terminar los demás números primos con excepción del 2 y el 5?—¿Todos los números terminados en 1, 3, 7 y 9 serán números primos.

189. Diga usted en la serie de 1 á 49 ¿cuáles son los números primos terminados en 1, 3, 7 y 9 y cuáles terminando en esas cifras no son primos?—¿Por qué cifras son divisibles los números no primos terminados en 1, 3, 7 y 9 en la serie de 1 á 49?—Diga usted en la serie de 51 á 99 ¿qué números terminados en 1, 3, 7 y 9 son primos y cuáles no son primos aunque terminen en las mismas cifras?—Diga usted ¿por qué números son divisibles los números no primos á que se refiere la pregunta anterior?

190. En resumen: ¿cuántos números primos hay en la serie de 1 á 100?—¿Cuántos números no-primos hay que terminen en cifra par ó en cero en la misma serie?—¿Cuántos números no-primos hay que terminen en 1, 3, 7 y 9?—Forme usted un cuadro general de la serie de números del 1 al 100 señalando los de cada clase á que se refieren las preguntas anteriores.

191. Determinar los números primos comprendidos del 101 al 200.—Determinar los números no-primos en la misma serie.—En la misma serie determinar los números no primos terminados en cifra par ó cero.—En la misma serie determinar los números no-primos terminados en 1, 3, 7 y 9.—Hacer el resumen en un cuadro.

192. Descomponer en sus factores primos los números siguientes: 148, 396, 408, 692, 834, 1028, 7049, 8074, 9004, 10,000, 20,403, 70,128, 90,400.

193. Buscar el menor múltiplo entre dos números. Entre 40 y 96.—Entre 128 y 400.—Entre 300 y 192.—Entre 200 y 256.—Entre 500 y 891.—Buscar el menor múltiplo entre tres números. Entre 12, 18 y 36.—Entre 56, 64 y 96.—Entre 40, 100 y 125.—Entre 200, 300 y 120.—Buscar el menor múltiplo entre varios números: Entre 2, 4, 8 y 24.—Entre 18, 30, 50 y 60.—Entre 2, 5, 7, 14, 58, 39 y 104, etc., etc.

194. Buscar el máximo común divisor entre dos números. Entre 14 y 24.—Entre 50 y 80.—Entre 104 y 196.—Entre 204 y 908.—Entre 700 y 1080.—Buscar el máximo común divisor entre varios números. Entre 50, 80, y 100.—Entre 128, 300 y 596.—Entre 12, 20, 40, 60, 100 y 200.

195. Buscar á la vez el menor múltiplo y máximo común divisor entre los números siguientes: 25 y 45.—39 y 146.—90 y 108.—78 y 86.—30, 40 y 90.—50, 87 y 29.—124, 312 y 740.—200, 500 y 800.—10, 100 y 1000.—70, 40, 38 y 12.—2, 4, 6, 9 y 12.—14, 24, 36 y 88.—12, 16, 20, 25 y 50.—50, 60, 70, 80, 90 y 100.

196. Determinar qué números son divisibles por 2 en la serie de 1 á 100.—¿En qué se les conoce que son divisibles por 2?—¿Por qué los números restantes no son divisibles por 2?—¿Qué números son divisibles por 3 en la serie de 1 á 100?—En qué se les conoce que sean divisibles por 3?—¿Los restantes por qué no son divisibles por 3?—¿Qué números

son divisibles por 5 en la serie de 1 á 100?—¿Por qué son divisibles por 5?—Los números restantes ¿por qué no son divisibles por 5?

197. ¿Qué números son divisibles por 7 en la serie de 1 á 100?—¿En qué se les conoce?—¿Los demás por qué no son divisibles por 7?—¿Qué números son divisibles por 11 en la serie de 1 á 100?—¿En qué se les conoce?—Los demás, ¿por qué no son divisibles por 11?—¿Qué números son divisibles por 13 en la serie de 1 á 100?—¿En qué se les conoce?—Los demás, ¿por qué no son divisibles por 13?

198. Los números de 3 ó más cifras ¿en qué se les conoce que tengan mitad exacta?—Diga Ud. en esta serie de números ¿cuáles tienen mitad exacta, cuáles no la tienen, y por qué? 14, 25, 124, 200, 175, 704, 1,024, 7,493, 2,490, 7,000 20,491.—Los números que no tienen mitad exacta ¿qué correcciones podrán hacérseles para que la tengan?

199. Los números de tres ó más cifras ¿en qué se les conoce que tengan tercera parte exacta?—Diga Ud. en esta serie de números ¿cuáles tienen tercera parte exacta?—cuáles no la tienen y por qué? 21, 28, 36, 40, 48, 63, 71, 87, 96, 114, 193, 453, 873, 1,049, 2,436, 71,343, etc.—Los números que no tienen tercera parte exacta, ¿qué corrección podrá hacérseles para que la tengan?

200. Los números de tres ó más cifras ¿en qué se les conoce que tengan quinta parte exacta?—25, 31. 50, 87, 325, 1.200, 7,430, 3,450, 73,000, 39,325, 894,300, 290,005, 74.000,320. En estos números ¿cuáles tienen quinta parte exacta, cuáles no la tienen y por qué?—Los números que no tienen quinta parte exacta ¿qué corrección podrá hacérseles para que la tengan?

201. Los números de tres, cuatro, cinco y seis cifras ¿en qué se les conoce que tengan séptima parte exacta?—Los números 112, 217, 336, 483, 567, 574, 651, 763, 847, 945, 994 tienen séptima parte exacta, ¿por qué?—Los números 1,519, 2,352, 3,381, 4,347, 4,536 tienen séptima parte exacta ¿por qué?—Los números 15,197, 27,048 40,824, 111,111, 555,555, 666,666 ¿por qué tienen séptima parte exacta?—¿Qué corrección necesitarán los números siguientes para tener séptima parte exacta: 354, 897, 246, 7,480, 87,493, 79,208, 113,456, 470,031, 89,743, 874,982, etc.?

202. Los números de tres, cuatro, cinco, seis, etc. cifras

¿en qué se les conoce que tengan onceava parte exacta?—¿Por qué tienen onceava parte exacta los números: 121, 242, 363, 1,111, 25,795, 474,892, etc.?—¿Qué corrección necesitan los números siguientes para tener onceava parte exacta: 497, 693, 8,434, 89,740, 39,487, 89,745, 1.100,089.

203. Los números de tres, cuatro, cinco, y seis cifras ¿en qué se les conoce que tengan treceava parte exacta?—Examine Ud. si tienen y por qué treceava parte exacta los números siguientes: 104, 117, 130, 143, 156, 1,131, 1,144, 1,157, 1,170, 1,183, 11,115, 11,128, 11,141, 11,154, 111,111 222,222, 333,333.—¿Qué corrección necesitan los números siguientes para tener treceava parte exacta: 497, 289, 7,143, 89,742, 10,072, 93,409, 703,456?

204. ¿Por qué tienen treinta y siete ava parte exacta los números: 111, 1,221, 10,101, 111,111?—¿Qué corrección necesitan los números 743, 897, 7,432, 34,903, 89,074, etc. para tener treinta y siete ava parte exacta?—¿Por qué tienen cuarenta y una ava parte exacta los números: 205, 1,107, 10,004, 110,003, 11,111, 22,222, 33,333, 1.100,030. —¿Qué corrección necesitan los números: 497, 8,003, 7,490, 29,4[illegible]9, etc. para tener cuarenta y una ava parte exacta?—¿Por qué tienen ciento una ava parte exacta los números 1,111, 2,222, 3,333, 202, 1,010, 11,110?—¿Cómo se corregirán estos números 7,493, 89,720, 34,022, 77,093, etc. para que tengan ciento una ava parte exacta?

205. ¿En qué se conoce que un número de tres ó más cifras tiene cuarta parte exacta?—¿Y sexta parte?—¿Y octava parte?—¿Y novena parte?—¿Y décima parte?—¿Y doceava parte?—Ponga Ud. cinco ejemplos de tres á cinco cifras que tengan cuarta parte exacta.—Otros tantos de sexta parte.—De octava.—De novena.—De décima, centésima y milésima.—De doceava.—¿Cuáles son los signos más sencillos para conocer cuando un número es divisible exactamente por los números del uno al doce?—¿Cuáles son las fórmulas para representar por escrito la divisibilidad de los múltiplos de los números primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 37, 41 y 101?—¿Cuáles son las fórmulas para representar por escrito la divisibilidad de los múltiplos de los números no-primos 4, 6, 8, 9, 10 y 12?

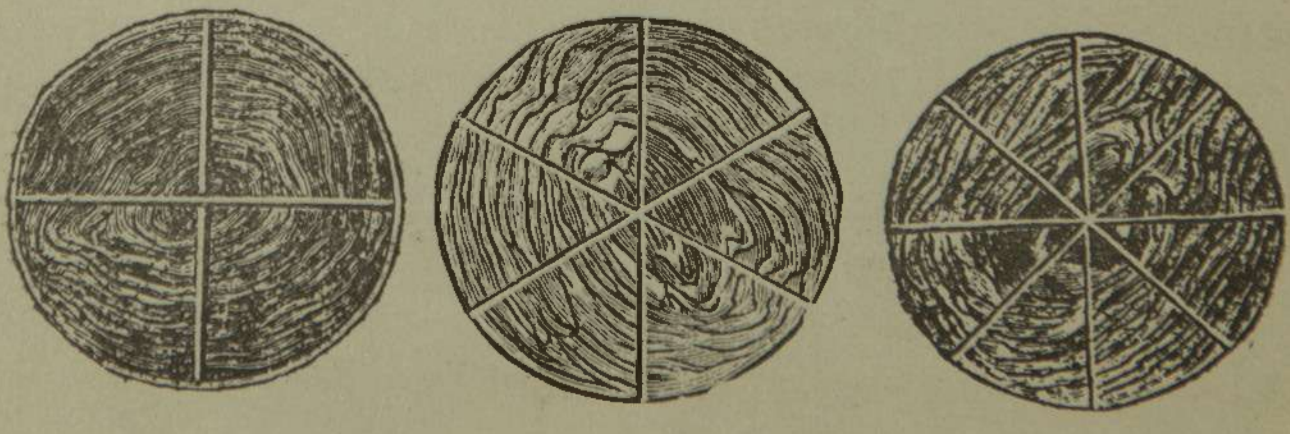
CAPITULO X.

Números quebrados.

137. Mientras sea posible distribuir con exactitud objetos enteros, será facil ejecutar operaciones con sencillez. Repartir 12 naranjas entre 2 niños, es cosa sencilla, 20 centavos entre 5 limosneros, lo mismo. Pero no sucede igual cosa cuando hay que repartir 1 torta de pan, 1 naranja, 1 queso, etc., entre dos ó más niños.

En efecto, si se tratara de repartir una naranja, por ejemplo, entre 10 niños, habría que desgajarla, tocándole á cada niño 1 gajo, en el supuesto que pudiera dividirse exactamente en diez gajos iguales.

Repartir 1 queso entre 4 niños; ó entre 6 niños, ó entre 8 niños, es cuestión de



cortarlo con mucha exactitud, para que les tocase en el primer caso la **cuarta** parte del queso á cada niño; en el segundo caso la **sexta** parte, y en el tercer caso la **octava** parte, y las divisiones quedarían hechas del mismo modo que se indica en las figuras.

138 De manera que **un objeto entero** puede dividirse exactamente en dos ó más partes iguales.

Si se divide en **dos** partes iguales reciben el nombre de **mitades;** si se divide en tres partes iguales reciben el nombre de **tercios;** en **cuatro** partes iguales el de **cuartos;** en **cinco** partes el de **quintos;** en **seis** partes el de **sextos;** en **siete** partes el de **séptimos;** en **ocho** partes el de **octavos;** en **nueve** partes él de **novenos,** y en **diez** partes el de **décimos**.

Cuando un objeto se divide en **once** partes iguales, en **doce, trece, catorce,** etc. partes iguales, los nombres que se usan para designar esas partes, se forman con el nombre del número que indica las partes y la terminación **avos.** De manera que **onceavo, doceavo, treceavo, catorceavo,** etc., indican el nombre de las partes en que se ha dividido un objeto; si éstas han sido respectivamente **once, doce, trece, catorce,** etc. partes iguales.

139. ¿Se podrá dividir un objeto en más de **dos mitades,** en más de **tres tercios,** en más de **cuatro cuartos,** etc.? Seguramente que no, porque un objeto **sólo puede tener** dos mitades, ó tres tercios, ó cuatro cuartos, ó cinco quintos, etc.; pero nunca podrá pasar de esas partes, porque entonces ya no será **un objeto** sino **más** de un objeto.

¿Y cada parte de las muchas en que puede dividirse un objeto podrá ser **mayor** que todo el objeto, **igual** á todo el objeto ó **menor** que todo el objeto?

Mayor nunca, porque media torta de pan, un tercio de queso, un cuarto de metro, no pueden ser más grandes que una torta entera, que un queso ni que un metro. **Igual**, tampoco; nunca una parte podrá igualarse al todo, es decir, que medio queso sea igual á un queso entero, ó que un cuarto de naranja sea igual á á la naranja entera. **Menor** sí, porque precisamente una parte de un todo es menor que el todo; un medio melón siempre será menor que el melón entero, un cuarto de metro será siempre menor que el metro, etc.

Ahora bien, cuando **un** objeto entero se divide en partes iguales, estas partes reciben el nombre de **quebrados** ó **fracciones**; de manera que:

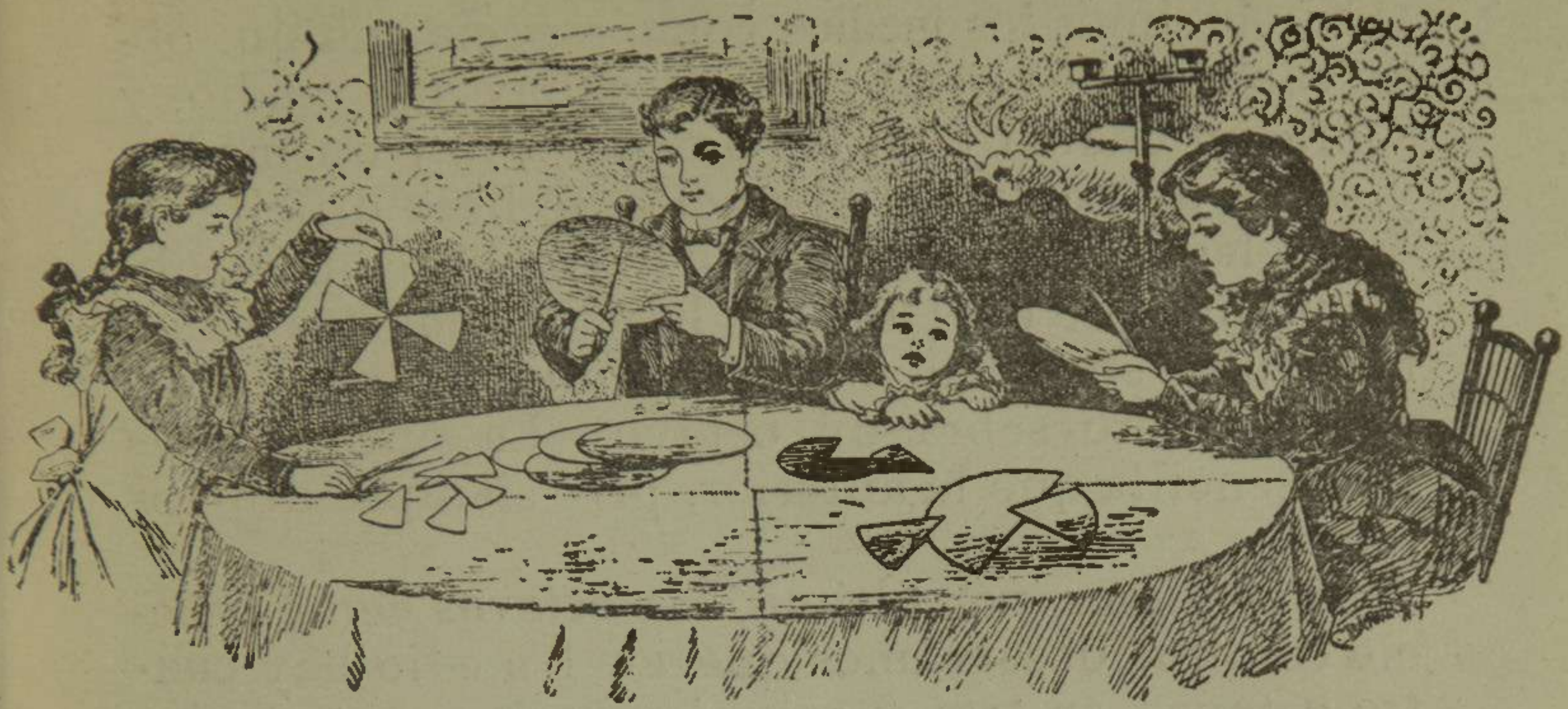
Se llama **quebrado** ó **fracción** una ó más partes iguales, tomadas de **una unidad** entera. O de otro modo:

Un **quebrado** es, pues, un número **menor** que **uno.**

Vamos á estudiar algunos problemas en cuyos datos haya algunos números quebrados.

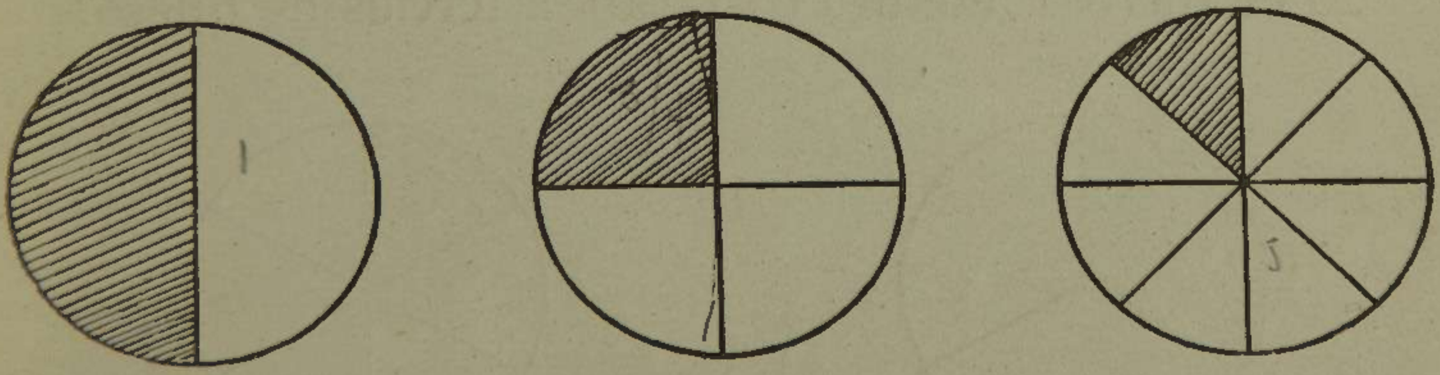
140. (*a*) Cuatro niños se repartieron un pastel del modo siguiente: Jorgito 1 décimo de pastel, Emma 2 décimos de pastel, Julio 3 décimos de pastel y á Delfina que repartía le tocó el resto del pastel; ¿cuántos décimos le tocaron?

Solución. Como se trata de **décimos** de pastel, es claro que el pastel entero habría que dividirlo en 10 partes iguales, de las que hay que quitar las partidas $1+2+3=6$, de Jorgito, Emma y Julio. Pero como á Delfina le tocó el resto será $10-6=$ 4 décimos de pastel, lo cual resuelve el problema.



En este problema los datos son de la misma especie porque todos son **décimos** de pastel, tanto para la **suma** como para la **resta.** La solución fué en extremo sencilla.

141. (*b*) Tres hermanos llevaron al recreo lo ssguiente: Enrique **1 medio** queso, Eduardo **3 cuartos** de queso y Antonio **5 octavos** de queso; ¿cuántos quesos compraron?



Solución. Como los **medios,** los **cuartos** y los **octavos** son fracciones de tamaños diferentes ó de distinta **especie** no pueden sumarse desde luego.

Es indispensable que todas las fracciones sean del mismo tamaño ó de la misma especie: ó medios, ó cuartos ú octavos.

Si elegimos los **medios** como especie común, observamos que en los 3 cuartos hay un medio, y sobra un cuarto y en los 5 octavos hay un medio, y sobra un octavo la operación se hace difícil.

Si elegimos los **cuartos** como especie común, observamos que en 1 medio hay dos cuartos exactos y que en 5 octavos hay también dos cuartos exactos, pero sobra un octavo. La operación es más sencilla que la anterior, pero siempre dificultosa.

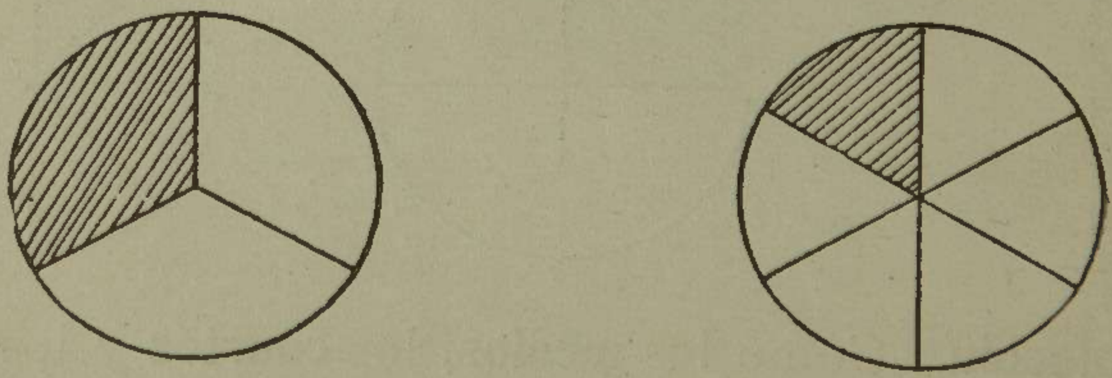
Si elegimos por último, los **octavos** como especie común, observamos que en 1 medio hay **cuatro** octavos, en tres cuartos hay **seis** octavos y los **cinco** octavos darán el siguiente resultado:

$$4 + 6 + 5 = 15$$

octavos. La operación se facilitó notablemente.

Y como un queso tiene ocho octavos, se habrán comprado 1 queso y 7 octavos de queso.

142. (*c*) Se han comprado 5 **sextos** de queso en 20 centavos, ¿cuánto costarán 2 **tercios** de queso?



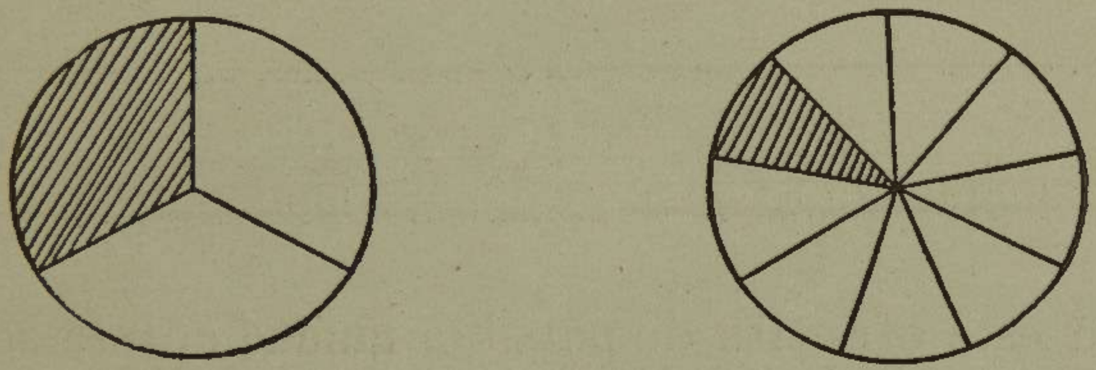
Solución. Si 5 **sextos** de queso valen 20 centavos, 1 **sexto** de queso valdrá la quinta parte de veinte centavos, ó 20÷5=4 centavos.

Pero conocido el valor de 1 sexto de queso no se puede obtener desde luego el valor de 2 **tercios** porque no son de la misma especie, habrá que reducir los tercios á sextos.

Cada tercio corresponde á dos sextos; luego los **dos** tercios corresponderán á **cuatro** sextos.

Y como 1 sexto vale 4 centavos, 4 sextos valdrán $4 \times 4 = 16$ centavos.

143. (*d*) Vendí 1 **tercio** de queso en 12 centavos, ¿cuánto me darán por **7 novenos** de queso?



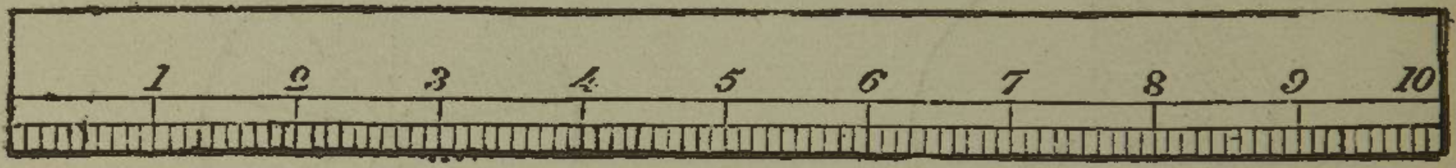
Solución. 1 tercio de queso corresponde exactamente á 3 **novenos** de queso; luego si tres novenos de queso se venden en 12 centavos, 1 noveno de queso se venderá en $12 \div 3 = 4$ centavos.

Y si cada noveno de queso se vende en 4 centavos, 7 novenos de queso se venderán en $4 \times 7 = 28$ centavos.

Observación. Se ve pues que con los números **quebrados** se pueden ejecutar las mismas operaciones que con los números **enteros,** es decir, **sumas, restas, multiplicaciones** y **divisiones.**

143. Los números quebrados pueden representarse fácilmente con tiras de papel dobladas en dos **mitades,** en tres **tercios,** en cuatro **cuartos,** etc., etc., es decir, doblarse en tantas partes como se quiera.

En esta figura, por ejemplo, la tira de papel ó bien la **unidad** entera se ha dividido en **mitades,** en **tercios,** en **cuartos,** en **sextos,** en **novenos,** en **doceavos,** en **diez y ocho avos** y en **treinta y seis avos.**



En esta otra tira de papel la **unidad** entera se ha dividido en **mitades,** en **cuartos,** en **quintos,** en **décimos,** en **vigésimos,** en **veinticinco avos,** en **cincuenta avos** y en **centésimos.**

144. En la escritura los números quebrados pueden representarse de dos maneras:

1ª Escribiendo la cifra que indica el **número** de partes que se han tomado de la unidad y en seguida el **nombre** que llevan dichas partes.

Un medio, tres cuartos, dos quintos, cuatro séptimos, etc., se escribirán así:

1 medio, 3 cuartos, 2 quintos, 4 séptimos.

2ª Se escriben también en forma de **divisiones indicadas,** es decir como **dividendo** el **número** de partes que se han tomado de la unidad y como **divisor** el **nombre** que llevan dichas partes, pero en forma numérica ó sea indicando el número de partes en que la unidad se haya dividido.

Un medio, tres cuartos, dos quintos, cuatro séptimos, se escribirán así:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{4}{7}.$$

En nuestros cálculos usaremos indistintamente uno ú otro modo de escribir los números quebrados, según fuere más conveniente, para facilitar la resolución de los problemas.

145. Aun cuando los números quebrados representados en forma de divisiones indicadas, deberían llamarse á los dos números que los representan: **dividendo** y **divisor** respectivamente, no sucede así, pues se tiene ya la vieja costumbre de llamarle al dividendo **numerador**, porque indica el número de partes que se toman de la unidad y al divisor se le llama **denominador** porque indica el nombre que llevan las partes en que se dividió la unidad, y además el número completo de todas ellas.

De esta semejanza que tienen en la escritura la división y los quebrados, resulta que estos últimos tienen las mismas propiedades que la primera.

Véamos algunos ejemplos:

(*a*) Supongamos que al repartir 5 pesos entre 10 personas, nos conformamos con expresar el cociente en la forma del quebrado $\frac{5}{10}$.

¿Qué observaciones podremos hacer con este quebrado si **alteramos por multiplicación** sus términos? Las siguientes:

$$\frac{5\times2}{10}=\frac{10}{10}, \qquad \frac{5\times3}{10}=\frac{15}{10}, \qquad \frac{5\times4}{10}=\frac{20}{10}$$

1ª Duplicando, triplicando ó **multiplicando** el número de pesos sin aumentar las personas, el cociente se multiplica. Luego:

Cuando el **numerador** se **multiplica** por un número y sin tocar el denominador el valor del quebrado se **multiplica** por ese número:

$$\frac{5}{10\times2}=\frac{5}{20}, \qquad \frac{5}{10\times3}=\frac{5}{30}, \qquad \frac{5}{10\times4}=\frac{5}{40}.$$

2ª Duplicando, triplicando ó **multiplicando** el número de personas y sin aumentar los pesos, el cociente se divide. Luego:

Cuando el **denominador** se **multiplica** por un número y sin tocar el numerador el valor del quebrado se **divide** por ese número.

$$\frac{5\times2}{10\times3}=\frac{10}{20}, \qquad \frac{5\times3}{10\times3}=\frac{15}{30}, \qquad \frac{5\times4}{10\times4}=\frac{20}{40}$$

3ª Duplicando, triplicando ó **multiplicando á** la vez el número de pesos y el número de personas por un mismo número, el cociente ni se multiplica ni se divide. Luego:

Cuando el **numerador** y el **denominador** de un quebrado se **multiplican** por un **mismo número** el quebrado conservará su **mismo valor.**

(*b*) Supongamos que al **repartir** 12 naranjas entre 24 niños **nos** conformamos con expresar el cociente en la forma del quebrado $\frac{12}{24}$.

¿Qué **observaciones** podremos hacer con este quebrado **si alteramos** por **división** sus términos? Las **siguientes:**

$$\frac{12 \div 2}{24} = \frac{6}{24}, \quad \frac{12 \div 3}{24} = \frac{4}{24}, \quad \frac{12 \div 4}{24} = \frac{3}{24}$$

1ª **Tomando la mitad, tercera parte ó dividiendo el número de naranjas sin aumentar los niños, el** cociente se divide. Luego:

Cuando el **numerador** se **divide** por un número y sin tocar el denominador, el valor del quebrado se **divide** por ese número.

$$\frac{12}{24 \div 2} = \frac{12}{12}, \quad \frac{12}{24 \div 3} = \frac{12}{8}, \quad \frac{12}{24 \div 4} = \frac{12}{6}$$

2ª Tomando la mitad, tercera parte ó **dividiendo el número de niños sin aumentar las naranjas el cociente se multiplica. Luego:**

Cuando el **denominador** se **divide** por un número y **sin tocar el numerador, el valor del quebrado se multiplica por ese número.**

$$\frac{12 \div 2}{24 \div 2} = \frac{6}{12}, \quad \frac{12 \div 3}{24 \div 3} = \frac{4}{8}, \quad \frac{12 \div 4}{24 \div 4} = \frac{3}{6}$$

3ª Tomando **la mitad, tercera** parte ó **dividiendo** á la vez el número de naranjas y el número de niños por un mismo número, el cociente ni se multiplica ni se divide. Luego:

Cuando el **numerador** y el **denominador** de un quebrado se **dividen** por un mismo número, el quebrado conservará su **mismo** valor.

Observación. De todo lo explicado ha resultado el siguiente principio general:

Un quebrado no cambia de valor, cuando se multiplican ó dividen su numerador y denominador por un mismo número.

146. Comparemos algunos quebrados de valores **iguales:**

Primero .... $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$

Segundo .... $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$

En el primer ejemplo se observa que los dos quebrados tienen **iguales** sus numeradores y denominadores; luego serán **iguales** también en valor.

En el segundo ejemplo se observa que los dos quebrados tienen **diferentes** sus numeradores y denominadores, luego ¿serán **diferentes** también en valor?

Operemos con el quebrado $\frac{3}{4}$ **multiplicando** sus dos términos por 2; tendremos:

$$\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}$$

Se ve pues, que el quebrado $\frac{3}{4}$ se ha cambiado por **multiplicación** en $\frac{6}{8}$; luego á pesar de tener numeradores y denominadores diferentes son **iguales** en valor.

Operemos ahora con el quebrado $\frac{6}{8}$ **dividiendo** sus dos términos por dos; tendremos:

$$\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

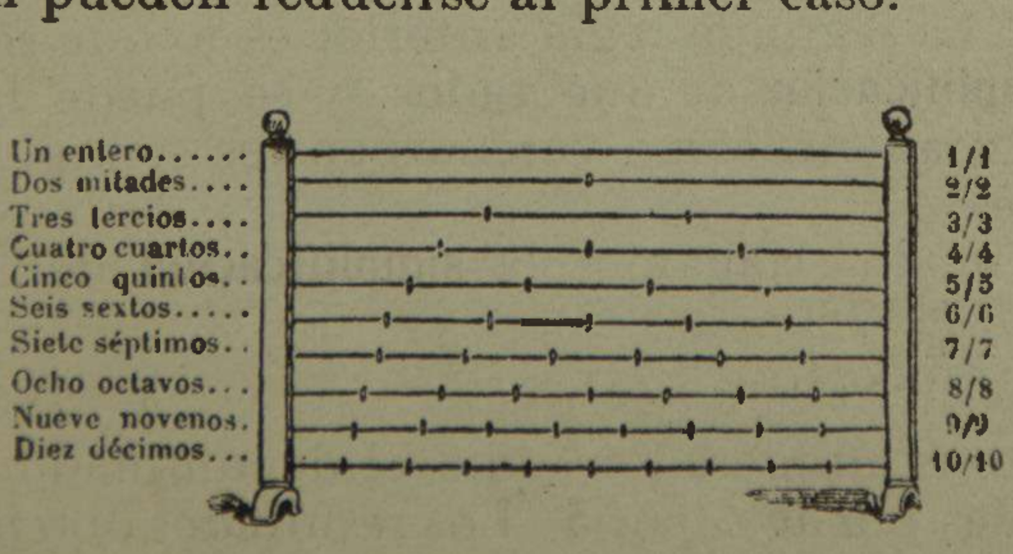
Se ve pues, que el quebrado $\frac{6}{8}$ se ha cambiado por **división** en $\frac{3}{4}$; luego á pesar de tener también numeradores y denominadores diferentes, son **iguales** en valor. Luego:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Se ve que los numeradores y denominadores son entre sí múltiplos y submúltiplos exactos, y por multiplicación ó división se reducen al primer caso. Hay pues dos casos en que dos quebrados son igualas:

1º Cuando tienen sus numeradores y denominadores respectivamente **iguales.**

2º Cuando teniendo sns numeradores y denominadores **diferentes** son entre sí múltiplos y submúltiplos exactos, y que por multiplicación ó división pueden reducirse al primer caso.



He aquí algunos ejemplos de quebrados iguales con numeradores y denominadores diferentes, que se observan en la figura:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}, \quad \frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}, \quad \frac{1}{4}=\frac{2}{8}, \quad \frac{3}{4}=\frac{6}{8}, \quad \frac{1}{5}=\frac{2}{10},$$

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}, \quad \frac{3}{5}=\frac{6}{10}, \quad \frac{4}{5}=\frac{8}{10}.$$

De todo lo anterior se desprenden dos reglas importantes:

1ª Cuando un quebrado de números **menores** se desea transformar en otro del mismo valor pero con números **mayores,** bastará **multiplicar** sus dos términos por un mismo número.

2ª Cuando un quebrado de números **mayores** se desea transformar en otro del mismo valor, pero con números **menores** bastará **dividir** sus dos términos por un mismo número.

147. La segunda regla anterior es lo que se llama **simplificación** de quebrados, y se puede hacer de dos maneras como veremos en los ejemplos siguientes:

1er. modo. Hagamos la **simplificación** del quebrado $\frac{725760}{1088640}$

Tanto el numerador como el denominador son divisibles por **10** ó por **5**. Los resultados obtenidos son divisibles por **8**, por **4** ó por **2**. Después por **9** ó por **3**. Finalmente por **7**. He aquí el cálculo:

$$
\begin{array}{rcl}
2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{7} & \\
14 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{9} & \\
126 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{9} & \\
1134 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{8} & \\
9072 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{8} & \\
72576(0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{10} & \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & = \dfrac{2}{3} \\
\frac{1}{10} \ldots\ldots\ldots 108864(0 & & \\
\frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots 13608 & & \\
\frac{1}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots 1701 & & \\
\frac{1}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots 189 & & \\
\frac{1}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots 21 & & \\
\frac{1}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots 3 & &
\end{array}
$$

El resultado es el siguiente:

$$\frac{725760}{1088640} = \frac{2}{3}$$

2º modo. En vez de ir dividiendo por partes, se calculará desde luego el **máximo común divisor** del numerador y denominador, y por el número que resulte se hará la **simplificación** definitiva.

El máximo común divisor es 362880, entre el numerador y denominador del quebrado propuesto, luego.

$$\frac{725760 \div 362880}{1088640 \div 362880} = \frac{2}{3}$$

148. Comparemos ahora dos quebrados de valores **diferentes:**

Primero............ $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{5}$

Segundo............ $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{7}$

Tercero............ $\frac{5}{8}$ y $\frac{4}{9}$

En el primer ejemplo se observa que los dos quebrados tienen **iguales sus denominadores** y desiguales sus numeradores. Respecto de su valor se ve que 4 **quintos** es mayor que 3 **quintos,** porque siendo iguales las partes, se toman más en uno que en otro; luego los quebrados son **diferentes.**

En el segundo ejemplo se observa que los dos quebrados tienen **iguales sus numeradores** y desiguales sus denominadores. Respecto de su valor se ve que **4 quintos** tiene sus partes más grandes que 4 **séptimos;** y como el número de partes tomadas es el mismo, á pesar de ser **desiguales** en tamaño, es claro que los dos quebrados resultarán **diferentes.**

En el tercer ejemplo se nota que los dos quebrados tienen diferentes sus numeradores y denominadores: pero no tienen la particularidad de que los términos de un quebrado sean múltiplos ó submúltiplos de los correspondientes del otro para transformarse en quebrados iguales, y de esto se desprende su desigualdad ó lo que es lo mismo son también **diferentes.**

Del estudio anterior resultan las observaciones siguientes:

1ª De dos ó más quebrados diferentes que tienen un **mismo denominador** y **distintos numeradores** es mayor el que tiene **mayor** numerador, y menor el que tiene **menor** numerador.

$$\frac{1}{8},\quad \frac{2}{8},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{4}{8},\quad \frac{5}{8}$$

El mayor es 5 **octavos** y el menor 1 **octavo.**

2ª De dos ó más quebrados diferentes que tienen un **mismo numerador** y **distintos denominadores** es mayor el que tiene **menor** denominador, y menor el que tiene **mayor** denominador.

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6}$$

El mayor es 1 **medio** y el menor es 1 **sexto.**

3ª De dos ó más quebrados diferentes que tienen **distintos** sus numeredores y denominadores, no se puede con facilidad distinguir á primera vista cuál es el mayor y cuál es el menor, y por consiguiente necesitarán transformarse en alguno de los dos casos anteriores; es decir, ó que tengan un denominador ó un numerador **común á todos.**

149. Vamos á examinar algunos problemas para reducir dos ó más quebrados á **un común denominador.**

Primer problema. ¿Cuál será el denominador común entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$?

No podrá ser el 2 denominador común porque no se pueden reducir exactamente los **cuartos á medios**; pero sí podrá ser el 4 porque los **medios** sí pueden reducirse exactamente á **cuartos.** El raciocinio se hará así:

2 **medios** que tiene la unidad equivalen á 4 **cuartos.** 1 **medio** equivaldrá á la mitad ó sea $4 \div 2 = 2$ cuartos. Luego

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Segundo problema. ¿Cuál será el denominador común entre $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{18}$?

No podrán ser 3 y 9 porque no se pueden reducir exactamente los **diez y ocho avos** á tercios y novenos; pero sí podrá ser 18 porque los **tercios** y los **novenos** sí pueden reducirse exactamente á diez y ocho avos. El raciocinio se hará así:

(*a*) **3 tercios** que tiene la unidad equivalen á 18 diez y ocho avos. 1 **tercio** equivaldrá á la tercera parte ó sea $18 \div 3 = 6$ diez y ocho avos. **2 tercios** equivaldrán á dos veces el valor de un tercio ó sea $2 \times 6 = 12$ diez y ocho avos. Luego

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$$

(*b*) **9 novenos** que tiene la unidad equivalen á 18 diez y ocho avos. **1 noveno** equivaldrá á la novena parte ó sea $18 \div 9 = 2$. **5 novenos** equivaldrán á cinco veces el valor de un noveno ó $2 \times 5 = 10$ diez y ocho avos, Luego

$$\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$$

Tercer problema. ¿Cuál será el denominador común entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$?

No podrá ser ni 2 ni 3 porque no se pueden reducir exactamente ni los medios á tercios, ni los tercios á medios; pero sí se podrá formar un producto de 2 y 3 que dará 6, y este número como es múltiplo de 2 y 3 podrá servir de denominador común y se podrán transformar facilmente en **sextos** los dos quebrados propuestos.

En efecto: si la unidad equivale á 6 **sextos**, 1 **medio** serán 3 **sextos** y 1 **tercio** serán 2 **sextos**. Luego

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Cuarto problema. ¿Cuál será el denominador común de los siguientes quebrados?

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{7}{8}$$

El denominador común tendrá que ser un número que sea múltiplo de 2, de 4, de 6 y de 8 y por consiguiente se podrá formar fácilmente ese número con el producto de todos los denominadores:

$$2\times4\times6\times8=384$$

Según esto la unidad ya no se considerará dividida en medios, cuartos, sextos ni octavos; sino en **trescientos ochenta y cuatro avos**; luego habrá que transformar dichas partes mayores en otras más pequeñas, según se verá en los siguientes razonamientos:

(*a*) 2 **medios** que tiene la unidad equivalen á 384 trescientos ochenta y cuatro avos.—1 **medio** equivaldrá á la mitad ó sea á $384\div2=192$; trescientos ochenta y cuatro avos.

$$\frac{1}{2}=\frac{192}{384}$$

(*b*) 4 **cuartos** que tiene la unidad equivalen á 384 trescientos ochenta y cuatro avos.—1 **cuarto** equivaldrá á la cuarta parte ó sea á $384\div4=96$. trescientos ochenta y cuatro avos.—3 **cuartos** equivaldrán á tres veces el valor de un cuarto ó sean $96\times3=288$, trescientos ochenta y cuatro avos.

$$\frac{3}{4}=\frac{288}{384}$$

(*c*) 6 **sextos** que tiene la unidad equivalen á 384 trescientos ochenta y cuatro avos.—1 **sexto** equivaldrá á la sexta parte ó sea $384\div6=64$ trescientos ochenta y cuatro avos.—5 **sextos** equivaldrán á cinco veces el valor de un sexto ó sean $64\times5=320$, trescientos ochenta y cuatro avos.

$$\frac{5}{6}=\frac{320}{384}$$

(d) 8 **octavos** que tiene la unidad equivalen á 384 trescientos ochenta y cuatro avos.—1 **octavo** equivaldrá á la octava parte ó sea $384 \div 8 = 48$, trescientos ochenta y cuatro avos.—7 **octavos** equivaldrán á siete veces el valor de un octavo ó sean $48 \times 7 = 336$, trescientos ochenta y cuatro avos.

$$\frac{7}{8} = \frac{336}{384}$$

150. No sólo puede servir como denominador común el **producto de todos los denominadores;** sino que puede elegirse por multiplicación otro mayor que él, ó bien por división otro menor hasta llegar á obtener el menor denominador que será el **menor múltiplo común** de los denominadores propuestos.

Primer problema. Convertir los quebrrdos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$ al denominador común doble del producto de sus denominadores.

El producto de sus denominadores es 384, y el doble producto será $384 \times 2 = 768$.

El razonamiento se hará del mismo modo que en el anterior problema. Si la unidad equivale á 768 partes; 1 **medio** será la mitad ó 384; 1 **cuarto** la cuarta parte ó 192, 3 **cuartos** el triple de ella ó 576; 1 **sexto** la sexta parte ó 128, y 5 **sextos** el quíntuplo de ella ó 640; 1 **octavo** la octava parte ó 96 y 7 **octavos** el séptuplo de ella ó 672. He aquí el resultado final:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{7}{8}$$

$$\frac{384}{768} \qquad \frac{576}{768} \qquad \frac{640}{768} \qquad \frac{672}{768}$$

Segundo problema. Convertir los quebrados anteriores al denominador común que sea la mitad del producto de sus denominadores.

El producto de sus denominadores es 384 y su mitad es 192 ó sea $384 \div 2 = 192$.

El razonamiento se hará así: Si la unidad equivale á 192 partes, 1 **medio** será la mitad ó 96; 1 **cuarto** la cuarta parte ó 48, y 3 **cuartos** el triple de ella ó 144; 1 **sexto** la sexta parte ó 32 y 5 **sextos** el quíntuplo de ella ó 160; 1 **octavo** la octava parte ó 24 y 7 **octavos** el séptuplo de ella ó 168. He aquí el nuevo resultado:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{7}{8}$$

$$\frac{96}{192} \qquad \frac{144}{192} \qquad \frac{160}{192} \qquad \frac{168}{192}$$

Tercer problema. Convertir los quebrados anteriores al denominador común que sea el menor múltiplo común de todos sus denominadores.

El menor múltiplo de los números 2, 4, 6 y 8 deberá estar contenido entre 6 y 8 porque el 2 y el 4 quedan excluidos por estar contenidos en el 8. Sus factores primos son:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2^3$$

Se excluye de nuevo el factor 2 por estar contenido en el 2^3 y quedará como menor múltiplo común:

$$2^3 \times 3 = 24$$

El razonamiento se hará así: Si la unidad equivale á 24 partes, **1 medio** será la mitad ó 12; 1 **cuarto** la cuarta parte ó 6 y 3 **cuartos** el triple de ella ó 18; 1 **sexto** la sexta parte ó 4, y 5 **sextos** el quíntuplo de ella ó 20; 1 **octavo** la octava parte ó 3 y 7 **octavos** el séptuplo de ella ó 21. He aquí el resultado:

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{12}{24}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{21}{24}$

En el ejemplo propuesto hay como denominadores comunes los siguientes: **24** menor múltiplo común; **48, 96** y **192** denominadores intermedios y **384** que es el producto de los denominadores.

Hay además un número infinito de denominadores mayores que 384, y aún pueden aceptarse denominadores menores que 24; pero estos últimos darán resultados exactos algunas veces y otras aproximados.

151. Veamos ahora cómo pueden reducirse dos ó más quebrados á un **numerador común.**

Primer problema. ¿Cuál será el numerador común entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{7}$?

No podrá ser **3** el numerador común porque habría que dividir **por dos** los dos términos del quebrado $\frac{6}{7}$ y resultaría inexacto el denominador **siete**; pero sí podrá servir como numerador común el **6** porque el quebrado $\frac{3}{5}$ puede transformarse en otro equivalente, multiplicando por **dos** sus dos términos para quedar convertidos en $\frac{6}{10}$. El raciocinio se hará así:

Al numerador 3 corresponde el denominador 5 —Al numerador 1 corresponderá un denominador igual á $\frac{5}{3}$ y al numerador 6 corresponderá un numerador seis veces mayor ó $\frac{5 \times 6}{3} = 10$.

Luego

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

Segundo problema. Convertir los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{7}$ y $\frac{8}{9}$ al numerador común que resulte del producto de los numeradores.

El numerador común será $2 \times 4 \times 6 \times 8 = 384$.

Y buscando para cada quebrado un número por el cual se multipliquen sus dos términos, resultará que para $\frac{2}{3}$ será la mitad de 384 ó $384 \div 2 = 192$; para $\frac{4}{5}$ será la cuarta parte de 384 ó $384 \div 4 = 96$; para $\frac{6}{7}$ la sexta parte de 384 ó $384 \div 6 = 64$ y para $\frac{8}{9}$ la octava parte de 384 ó $384 \div 8 = 48$. El resultado será el siguiente:

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{6}{7} \qquad \frac{8}{9}$$

$$\frac{384}{576} \qquad \frac{384}{480} \qquad \frac{384}{448} \qquad \frac{384}{432}$$

En efecto, si quisiéramos hacer un razonamiento particular para cada quebrado obtendríamos los mismos resultados anteriores. Hagámoslo con el primer quebrado:

Al numerador 2 corresponde el denominador 3.—Al numerador 1 corresponderá un denominador igual á $\frac{3}{2}$, y al numerador 384 corresponderá un numerador mayor ó sea $\frac{3 \times 384}{2} = 576$.

Luego

$$\frac{2}{3} = \frac{384}{576}$$

Tercer problema. Convertir los quebrados anteriores al numerador común que sea el menor múltiplo común de sus numeradores.

El menor múltiplo común entre 2, 4, 6 y 8 es 24.

Ahora bien, buscando para cada quebrado un número por el cual se multipliquen sus dos términos resultará que para $\frac{2}{3}$ será $24 \div 2 = 12$; para $\frac{4}{5}$ será $24 \div 4 = 6$; para $\frac{6}{7}$ será $24 \div 6 = 4$ y para $\frac{8}{9}$ será $24 \div 8 = 3$. El resultado será el siguiente:

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{6}{7} \qquad \frac{8}{9}$$

$$\frac{24}{36} \qquad \frac{24}{30} \qquad \frac{24}{28} \qquad \frac{24}{27}$$

En estos tres problemas se observa que puede haber indistintamente varios numeradores comunes: 24 como menor múltiplo, **48, 96** y **192** como numeradores intermedios y **384** como producto de todos los numeradores. También puede haber un número infinito de numeradores comunes multiplicando 384 por 2, 3, 4, ó más números, y aun hay además numeradores comunes menores que 24, pero sus resultados podrían algunas vecer ser exactos y otras aproximados.

152. En la comparación de los números enteros con los quebrados se dan los casos siguientes:

Primer problema. Dar al número entero 7 la forma de un quebrado común.

Desde el momento en que dijimos que **un quebrado es un número menor que uno,** es claro que nunca podrá haber quebrados que sean iguales á enteros ni enteros que sean iguales á quebrados; lo único que puede hacerse es **representar por escrito** números enteros en la forma de quebrados; es decir en la forma de **divisiones indicadas.**

La forma más sencilla de transformar el entero 7 á la forma de quebrado es darle como divisor ó denominador la unidad, de esta manera:

$$7=\frac{7}{1}$$

Pero si multiplicamos sus dos términos por 2, 3, 4 ó más números tendremos los resultados siguientes:

$$7=\frac{7}{1}=\frac{14}{2}=\frac{21}{3}=\frac{28}{4}=\frac{35}{5}$$

En efecto, si la unidad vale 2 mitades, 7 unidades equivaldrán á 14 mitades. Si la unidad vale 3 tercios, 7 unidades valdrán 21 tercios. Si la unidad vale 4 cuartos, 7 unidades valdrán 28 cuartos. Si la unidad vale 5 quintos, 7 unidades valdrán 35 quintos, etc.

Luego un número entero puede transformarse en quebrado tomando como denominador la unidad ó convirtiéndolo en mitades, tercios, cuartos, quintos, etc.

Segundo problema. Dar al número mixto $8\frac{3}{4}$ la forma de un quebrado común, con el denominador 4.

Sabemos ya que 8 enteros pueden transformarse en $\frac{8}{1}$ y multiplicando sus dos términos por 4 quedarán $\frac{32}{4}$. Esto es muy claro, porque un entero vale 4 cuartos; luego 8 enteros valdrán 32 cuartos.

Pero como en el problema hay 3 cuartos más, habrá que agregarlos y entonces tendremos 35 cuartos. Luego

$$8+\frac{3}{4}=\frac{32}{4}+\frac{3}{4}=\frac{35}{4}$$

Un número mixto ó sea un entero acompañado de un quebrado, puede transformarse en quebrado de la misma especie, transformando primero el entero en quebrado del mismo denominador y añadiendo al nuevo numerador el del quebrado.

Los números **mixtos** cuando toman la forma de quebrados reciben el nombre de números **fraccionarios** que no son otra cosa que simples divisiones indicadas.

Tercer **problema.** Cambiar en número mixto el número fraccionario $\frac{35}{4}$ ó sea averiguar cuántos enteros contiene y qué partes de otro entero sobran.

Como sabemos que cada unidad entera equivale á cuatro cuartos, es claro que habrá que formar de 35 cuartos tantos grupos de 4 cuartos cuantos pueda contener, ó de otro modo, dividir 35 entre 4 y tendremos:

$$35 \div 4 = 8 + \tfrac{3}{4}$$

Un número **fraccionario** puede transformarse en enteros, dividiendo el numerador entre el denominador, y si queda resíduo, se formará con él un quebrado cuyo numerador sea el resíduo y el denominador el divisor.

Observaciones. Después del estudio precedente que se refiere á las **propiedades de los quebrados** podremos hacer el siguiente resumen:

I. Siendo los quebrados divisiones indicadas tienen necesariamente las mismas propiedades de la división.

II. En consecuencia, ningún quebrado cambia de valor, cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

III. Se pueden convertir á una especie común, es decir reducirlos á un mismo denominador para distinguir á primera vista su valor.

IV. Se pueden también reducir á un común numerador con el mismo fin de distinguirlos fácilmente por su valor.

V. Se pueden simplificar ó amplificar, es decir, disminuir ó aumentar el valor absoluto de sus dos términos.

VI. Se pueden transformar los enteros á la forma de quebrados y viceversa.

VII. Se pueden transformar los mixtos en fraccionarios y viceversa.

VIII. Se puede operar con los quebrados del mismo modo que se opera con los enteros: es decir: objetivamente, representativamente y por escrito y sin tomar en cuenta la forma adoptada en su escritura.

Vamos á examinar en seguida algunos problemas cuyos datos sean quebrados comunes y en los cuales haya necesidad de resolverlos por medio de operaciones escritas.

153. I. **Enunciado.** Un vendedor de periódicos ganó 3 décimos de peso el lunes, cuatro décimos el martes, 5 décimos el miércoles, 6 décimos el jueves, 7 décimos el viernes, 8 el sábado y 9 el domingo, ¿cuánto ganó por todo?

Análisis. (*a*) En este problema **conocemos** las diversas partidas de dinero en décimos de peso que ganó el vendedor de periódicos durante toda la semana. (*b*) **Desconocemos** la ganancia total que obtuvo en los mismos días. (*c*) Se trata pues de formar un número mayor que tenga el mismo valor que todas las partidas juntas y ésto se obtiene por medio de una operación de **sumar.**

Solución. Para ejecutar esta operación de sumar se puede proceder de dos maneras: 6 escribiendo los números en su forma entera 6 bien en forma de quebrados, de este modo:

Forma entera:

$3+4+5+6+7+8+9=42$ décimos 6 sean:

$42\div10=4$ pesos 2 décimos $=$ 4 pesos 20 centavos.

Forma quebrada:

$$\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+\frac{9}{10}=\frac{42}{10}=\$4.20.$$

Como todos los quebrados tienen iguales sus denominadores, es claro que todos tienen una misma especie y por consiguiente pueden sumarse formando un sólo numerador con el valor de todos los numeradores de los quebrados y transformar después el número fraccionario que resulte en unidades enteras y partes de la unidad. Luego:

Para **sumar** dos ó más quebrados que tengan **iguales** sus denominadores, se procede sumando los numeradores, á la suma que resulte se le pondrá el mismo denominador; en caso de que se obtenga un número fraccionario se transformará en unidades enteras y partes de la unidad.

154. II. **Enunciado.** Cuatro obreros trabajaron durante el mes de Noviembre del modo siguiente: el primero $\frac{1}{2}$ mes, el segundo $\frac{3}{5}$ de mes, el tercero $\frac{5}{6}$ de mes y el cuarto $\frac{7}{10}$ de mes ¿cuánto tiempo trabajaron los cuatro obreros?

Análisis. (*a*) **Conocemos** las cuatro partidas de tiempo que trabajaron los obreros, expresadas en forma de quebrados de denominadores diversos. (*b*) **Desconocemos** el número total de días que trabajaron los cuatro obreros. (*c*) Se trata de formar un número que tenga el mismo valor que los cuatro quebrados propuestos, y esto se consigue por medio de una operación de **sumar** dichos quebrados.

Solución. Como los cuatro quebrados que se van á sumar tienen denominadores diversos, hay necesidad de reducirlos á un común denominador, el cual podrá ser el menor múltiplo común de sus denominadores.

El menor múltiplo entre 2, 5, 6 y 10 es:

$$2 \times 3 \times 5 = 30.$$

Los quebrados quedarán del modo siguiente:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{7}{10}$$

$$\frac{15}{30}+\frac{18}{30}+\frac{25}{30}+\frac{21}{30}=\frac{79}{30}=2\,\frac{19}{30} \text{ meses.}$$

La suma de los quebrados es 79 **treinta avos** de mes ó sean 2 meses y 19 treinta avos de mes ó 19 días.

La suma de dos ó más quebrados que tengan **distintos** denominadores se efectúa reduciéndolos primero á un común denominador y después se procede como en el primer ejemplo.

155. III. **Enunciado.** Un albañil hizo tres tramos de pared de tamaños diferentes: el primero de $3\frac{1}{2}$ metros, el segundo de $5\frac{3}{4}$, y el tercero de $7\frac{5}{8}$, ¿cuántos metros de pared hizo por todo?

Análisis. (*a*) **Conocemos** tres números mixtos que representan los diferentes tramos de pared hechos por un albañil. (*b*) **Desconocemos** el número total de metros hechos por el albañil. (*c*) Se trata pues de formar un número que tenga el mismo valor que los tres números mixtos juntos, y esto se conseguirá empleando una operación de **sumar** dichos números mixtos.

Solución. Para resolver este problema lo primero que se ocurre es formar dos sumas: una con los **quebrados** y otra con los **enteros.**

La suma de los quebrados da el siguiente resultado tomando como denominador común el 8.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$$

$$\frac{4}{8}+\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=1\ \tfrac{7}{8}\text{ metros}$$

Y agregando 1 metro más $\frac{7}{8}$ de metro á los enteros correspondientes, obtendremos:

$$3+5+7+1+\tfrac{7}{8}=16\ \tfrac{7}{8}\text{ metros}$$

que es el resultado total de metros de pared construidos por el albañil.

También podría resolverse el mismo problema anterior transformando los mixtos á números **fraccionarios** y sumarlos después como si fueran quebrados. He aquí el resultado:

$$3\ \frac{1}{2}+5\ \frac{3}{4}+7\ \frac{5}{8}$$

$$\frac{7}{2}+\frac{23}{4}+\frac{61}{8}$$

$$\frac{28}{8}+\frac{46}{8}+\frac{61}{8}=\frac{135}{8}=16\tfrac{7}{8}\text{ metros}$$

Para **sumar** dos ó más números mixtos se procederá de dos modos diferentes:

1º Sumando los quebrados separadamente, lo mismo que los enteros y formar después un sólo número con ambos resultados.

2º Transformar los **mixtos** en números **fraccionarios** y sumarlos después como si fueran quebrados.

156. IV. **Enunciado**. Un niño compró 6 metros de cordón y regaló $\frac{7}{10}$ de metro á un amigo suyo; ¿cuánto le quedó?

Análisis. (*a*) **Conocemos** el número de metros de cordón que se compraron, y las partes de metro de cordón que se regalaron. (*b*) **Desconocemos** qué tanto quedó de cordón después del regalo. (*c*) Para llegar al resultado habrá que efectuar una operación de **restar** el número menor del mayor, es decir, el quebrado del entero.

Solución. El número mayor 6 metros y el menor $\frac{7}{10}$ de metro no son números de la misma especie, porque el primero representa unidades enteras y el segundo partes de la unidad, y por lo mismo la resta no puede efectuarse; será pues necesario transformar los 6 metros en **décimos** de metro y así la resta podrá verificarse. He aquí la operación:

$$\frac{6}{1} - \frac{7}{10}$$

$$\frac{60}{10} - \frac{7}{10} = \frac{53}{10} = 5\frac{3}{10} \text{ metro.}$$

En efecto, el entero se transforma en quebrado poniéndole 1 como denominador; después se toma como denominador común 10 y ambos números así transformados facilitan la solución del problema, supuesto que de 60 **décimos** de metro se tienen que quitar 7 **décimos** quedando un resultado igual á 53 décimos, ó sean 5 metros y 3 décimos de metro.

Para **restar** un número **quebrado** de un **entero** se procurará transformar el entero en quebrado de igual denominador que el quebrado, y se buscará en seguida la diferencia entre los numeradores.

157. V. **Enunciado**. Un obrero trabajó $\frac{7}{8}$ de día y sólo le pagaron $\frac{5}{6}$ de día; ¿qué parte del día le quedaron á deber?

Análisis. (*a*) **Conocemos** un quebrado que representa el tiempo que trabajó el obrero y otro quebrado que representa el tiempo que se le pagó. (*b*) **Desconocemos** el tiempo que dejó de pagársele. (*c*) Para llegar al resultado habrá que buscar una diferencia entre los dos quebrados y esto se obtendrá por medio de una operación de **restar.**

Solución. El quebrado $\frac{7}{8}$ no es de la misma especie que el quebrado $\frac{5}{6}$ y por lo mismo no se pueden restar **sextos** de **octavos;** hay necesidad de reducirlos á un común denominador, y en el presente caso aceptaremos el menor múltiplo común entre los denominadores **6** y 8 que es **24**, y por consiguiente los dos quebrados quedarán transformados en **veinticuatro avos** del modo que sigue:

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{21}{24} - \frac{20}{24} = \frac{1}{24} \text{ de día.}$$

Sólo falta $\frac{1}{24}$ de dia que no se le ha pagado al obrero.

Para **restar** un **quebrado** de otro **quebrado** es indispensable que tengan un denominador común, después se restan los numeradores y la diferencia llevará el mismo denominador.

158. VI. **Enunciado.** Se han comprado $23\frac{3}{4}$ kilogramos de azucar de los cuales se han vendido $17\frac{8}{9}$ kilogramos; ¿cuánto ha quedado después de la venta?

Análisis. (*a*) **Conocemos** en la forma de números mixtos los kilogramos de azucar que se han comprado y los que se han vendido. (*b*) **Desconocemos** el número de kilogramos que nos han quedado después de la venta. (*c*) El resultado deberá ser una diferencia entre el número mayor y el menor, y esto se obtendrá por medio de una operación de **restar** números mixtos.

Solucióm. Siguiendo la práctica que hemos adoptado de comenzar las operaciones de sumar y restar por los valores menores, comenzaremos la resta en el presente caso por los quebrados y seguiremos después por los enteros. La primera operación será:

$$\frac{3}{4} - \frac{8}{9} = \frac{27}{36} - \frac{32}{36}$$

El primer quebrado $\frac{3}{4}$ forma parte del minuendo y el segundo quebrado $\frac{8}{9}$ forma parte del sustraendo; pero reducidos al denominador común 36 resulta que no puede restarse del numerador 27 el numerador 32 por ser mayor este último.

Tomaremos 1 unidad entera del minuendo $23\frac{3}{4}$ para agregarla convertida en **treinta y seis ávos** al quebrado $\frac{27}{36}$ y de la suma que se obtenga podremos restar el sustraendo $\frac{32}{36}$. He aquí la forma del nuevo cálculo.

$$\left(\frac{27}{36}+\frac{36}{36}\right)-\frac{32}{36}=\frac{63}{36}-\frac{32}{36}=\frac{31}{36}$$

El minuendo ha quedado convertido en 22 del cual hay que quitar el sustraendo 17. La diferencia 5 aumentada del quebrado $\frac{31}{36}$ será la diferencia total de los dos números mixtos.

La colocación general de las operaciones ejecutadas se dispondrá del modo siguiente:

$$23\,\frac{3}{4}=23\,\frac{27}{36}=22\,\frac{63}{36}$$

$$-\,17\,\frac{8}{9}=17\,\frac{32}{36}=17\,\frac{32}{36}$$

Diferencia: $5\,\frac{31}{36}$ kilogramos

También se puede resolver el problema anterior transformando los números **mixtos** en números **fraccionarios** y operar después con ellos como si fueran **quebrados.** He aquí los cálculos:

$$23\,\frac{3}{4}-17\,\frac{8}{9}=\frac{95}{4}-\frac{161}{9}=\frac{855}{36}-\frac{644}{36}$$

$$=\frac{211}{36}=5\,\frac{31}{36}\text{ kilogramos.}$$

Para restar números **mixtos** se puede proceder de dos maneras: ó bien restando primero los quebrados y después los enteros, ó bien transformar los mixtos en fraccionarios y operar con ellos como si fueran quebrados.

159. VII. **Enunciado.** 1 kilogramo de azucar ha costado $\frac{3}{4}$ de peso, se desea saber ¿cuánto costarán 7 kilogramos de la misma mercancía?

Análisis. (*a*) **Conocemos** el valor de 1 kilogramo de azucar ó sean $\frac{3}{4}$ de peso. (*b*) **Desconocemos** el valor de 7 kilogramos. (*c*) Como se trata de repetir el quebrado $\frac{3}{4}$ de peso varias veces hasta obtener el precio de 7 kilogramos, se resolverá el problema por medio de una operación de **multiplicar** el entero 7 por el quebrado $\frac{3}{4}$.

Solución. Sabemos que al multiplicarse por 7 el quebrado $\frac{3}{4}$ se hará siete veces mayor, y uno de los medios de hacer mayor un quebrado es multiplicar su numerador. Luego el problema quedará resuelto del modo siguiente:

$$x = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4} = 5\tfrac{1}{4} \text{ pesos.}$$

En efecto, si un kilogramo vale $\frac{3}{4}$ de peso 7 kilogramos que son siete veces un kilogramo valdrán siete veces tres cuartos de peso. He aquí el planteo:

Kilogramos.		Pesos.
1	———	$\frac{3}{4}$
7	———	x

$$x = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4} = 5\,\frac{1}{4} \text{ pesos.}$$

Cuando el valor de la **unidad** es un quebrado el valor de la **pluralidad entera** se obtendrá multiplicándola por el numerador del quebrado.

En la práctica se dice:

Para **multiplicar** un **entero** por un **quebrado** ó al contrario, se multiplicará el entero por el numerador del quebrado y el resultado tendrá como denominador el mismo del quebrado.

160. VIII. **Enunciado.** En 1 día de trabajo, varios obreros ganaron 8 pesos, se desea saber ¿qué tanto ganarían los mismos obreros si sólo hubieran trabajado $\frac{3}{4}$ de día?

Análisis. (*a*) **Conocemos** la ganancia de 1 día de de trabajo que es de 8 pesos. (*b*) **Desconoeemos** lo que podrá ganarse en $\frac{3}{4}$ de día. (*c*) Hay que averiguar primero lo que se gana en **un cuarto** de día supuesto que sabemos lo que se gana en el día completo que tiene cuatro cuartos; en seguida será bien fácil averiguar lo que se ganaría en **tres cuartos** de día sabiendo lo que se gana en un cuarto de día; se trata pues de dos operaciones, la **división** primero y la **multiplicación** después y de la unión de estas dos operaciones ha resultado un problema **combinado** con quebrados.

Solución. Supuesto que en 1 día se han ganado 8 pesos, en $\frac{1}{4}$ de día se ganará la cuarta parte de 8 pesos, es pues una operación de **dividir** ó sea $8 \div 4 = 2$ pesos; y como ahora ya sabemos que en $\frac{1}{4}$ de día se ganaron 2 pesos, es claro que en $\frac{3}{4}$ de día se ganarán **tres veces dos pesos,** es una operación de **multiplicar,** ó sean $2 \times 3 = 6$ pesos.

El planteo general del problema quedará así:

Día.	Pesos.
1 ———	8
$\frac{3}{4}$ ———	x

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ pesos}$$

Y desarrollándola en la forma de un problema **combinado**, su planteo será como sigue:

Cuartos de día.	Pesos.
4 ———	8
1 ———	$\frac{8}{4}$
3 ———	$\frac{8 \times 3}{4}$

$$x = \frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ pesos.}$$

Se ve que en este nuevo desarrollo, el quebrado $\frac{3}{4}$ pierde su forma de **fracción** y se cambia en en**tero;** lo cual mucho facilita la solución del problema.

Cuando el valor de la **unidad** es un número entero y se desea averiguar el valor de **varias partes de la unidad** ó sea de un quebrado, el resultado se obtiene buscando primero el valor de **una parte** de la unidad por medio de la **división** y después el valor de **todas las partes** juntas del quebrado por medio de la **multiplicación.**

Obsérvese en el último planteo que el **entero** 8 está multiplicado por el **numerador** 3 del quebrado y el producto está dividido por el **denominador** 4 del mismo quebrado, de lo cual se ha derivado una regla semejante á la que indicamos en el problema anterior.

No obstante eso son dos problemas bien distintos: en el anterior se conoce el valor de la **unidad** en la forma **quebrada** y se desea averiguar el valor de una **pluralidad** en la forma **entera;** en tanto que en el segundo problema se conoce el valor de la **unidad** en la forma **entera** y se trata de averiguar el valor de **varias partes de la unidad** ó sea de un **quebrado.**

Pero la diferencia fundamental consiste: en que el primer problema es un problema **simple** de multiplicar, y el segundo es un problema **combinado** de multiplicar y dividir.

161. IX. **Enunciado.** 1 metro de listón cuesta $\frac{7}{10}$ de peso, ¿cuánto costarán $\frac{4}{5}$ de metro?

Análisis. (*a*) **Conocemos** el valor de 1 metro en forma de quebrado ó sean $\frac{7}{10}$ de peso. (*b*) **Desconocemos** el valor de una parte del metro ó sean $\frac{4}{5}$. (*c*) Hay que averiguar primero lo que cuesta **un quinto** de metro para averiguar en seguida lo que costarán **cuatro quintos;** se ve que hay dos operaciones: una **división** primero y una **multiplicación** después; se trata en consecuencia de un problema **combinado** con quebrados.

Solución. Si pues, 1 metro de listón vale $\frac{7}{10}$ de peso, **un quinto** de metro valdrá la quinta parte de ese precio, hay que dividir el quebrado entre cinco, ó hacerlo menor cinco veces, ó tomarle la quinta parte de su valor, y esto se consigue, según sabemos, de dos modos: ó **dividiendo** su numerador entre cinco, ó **multiplicando** su denominador por cinco. Lo primero no se puede efectuar por no dar cociente exacto, pero lo segundo sí, de manera que $\frac{1}{5}$ de metro valdrá $\frac{7}{10 \times 5}$ ó sean $\frac{7}{50}$ avos de peso.

Ahora es muy fácil averiguar el valor de $\frac{4}{5}$ de metro, formando el cuádruplo del nuevo quebrado ó multiplicándolo por cuatro, de manera que el resultado definitivo sería:

$$\frac{7 \times 4}{10 \times 5} = \frac{28}{50} \text{ de peso}$$

En efecto, el planteo del problema de un modo general quedaría así:

Metro.		Pesos.
1	———	$\frac{7}{10}$
$\frac{4}{5}$	———	x

$$x = \frac{7 \times 4}{10 \times 5} = \frac{28}{50}$$

Pero supuesto que es **combinado**, podremos descomponerlo del modo siguiente:

Quintos de metro.	Pesos.
5	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{10 \times 5}$
4	$\frac{7 \times 4}{10 \times 5}$

$$x = \frac{7 \times 4}{10 \times 5} = \frac{28}{50}$$

Cuando el valor de la **unidad** es un quebrado y se desea averiguar el valor de **varias partes de la unidad** ó sea de otro quebrado, el resultado se obtiene buscando primero el valor de **una parte** por medio de la **división** y después el valor de **todas las partes** juntas del quebrado por medio de la **multiplicación.**

En el último planteo anterior se observa en el resultado que en el dividendo aparecen multiplicados los **numeradores** 7 y 4 y en el **divisor** los **denominadores** 10 y 5. De aquí se ha inferido una regla que dice así:

El producto de dos quebrados se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.

Para nosotros el resultado no es un **producto** solamente, sino una solución que se obtiene con dos operaciones, la **división** primero y la **multiplicación** después, y esto constituye **no un simple** pro-

blema de multiplicar quebrados, sino un problema **combinado** en el cual se conoce el valor de la **unidad** y se desea conocer el valor de **algunas partes de la unidad.**

162. X. **Enunciado.** Un albañil ha construido $6\frac{3}{8}$ metros cúbicos de pared y se le ha pagado por cada metro cúbico $4\frac{7}{10}$ pesos; ¿cuánto cobrará por su trabajo?

Análisis (*a*) Parte **conocida**, 1 metro cúbico de pared vale $4\frac{7}{10}$ pesos. (*b*) Parte **desconocida**: ¿cuánto valdrán $6\frac{3}{8}$ metros cúbicos de pared? (*c*) El valor de 6 metros es fácil obtenerlo repitiendo seis veces el valor de un metro ó sea $4\frac{7}{10}\times 6$; es una operación de **multiplicar** un **mixto** por un **entero,** y el valor de $\frac{3}{8}$ de metro se puede obtener averiguando primero el valor de un **octavo** y en seguida el de **tres octavos**; son pues dos operaciones combinadas de **división** y **multiplicación.**

Solución. En efecto, si un metro costara solamente 4 pesos, 6 metros costarían $4\times 6=24$ pesos, y 6 metros á $\frac{7}{10}$ de peso costarían $\frac{42}{10}=4\frac{2}{10}$, que unidos al anterior resultado darán $24+4\frac{2}{10}=28\frac{2}{10}$ pesos. Ahora falta calcular $\frac{3}{8}$ de metro á 4 pesos son $\frac{12}{8}=1\frac{4}{8}$ que unidos al anterior resultado serán $28\frac{2}{10}+1\frac{4}{8}=29\frac{56}{80}$ pesos. Por último, $\frac{3}{8}$ de metro á $\frac{7}{10}$ de peso serán $\frac{3}{8}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{80}$ que agregado al resultado anterior se obtendrá: $29\frac{56}{80}+\frac{21}{80}=29\frac{77}{80}$ pesos que recibió el albañil por su trabajo. He aquí cómo podrá disponerse la operación:

Pesos...........	$4+\frac{7}{10}$	multiplicando.
Metros..........	$6+\frac{3}{8}$	multiplicador.

	Metros.	Pesos.		
1º.........	6×4	$= 24$		
2º.........	$6 \times \frac{7}{10}$	$= 4 + \frac{2}{10}$		$\frac{16}{80}$
3º.........	$\frac{3}{8} \times 4$	$= 1 + \frac{4}{8}$		$\frac{40}{80}$
4º.........	$\frac{3}{8} \times \frac{7}{10}$	$= 0 + \frac{21}{80}$		$\frac{21}{80}$
		Suma	$\$\,29\,\frac{77}{80}$	Producto total.

Si transformamos los mixtos en números fraccionarios, el problema podrá plantearse de este modo:

Metro.		Pesos.
1	———	$\frac{47}{10}$
$\frac{51}{8}$	———	x

O de otra manera:

Octavos de metro.		Pesos.
8	———	$\frac{47}{10}$
1	———	$\frac{47}{10 \times 8}$
51	———	$\frac{47 \times 51}{10 \times 8}$

$$x = \frac{47 \times 51}{10 \times 8} = \frac{2397}{80} = 29\,\frac{77}{80} \text{ pesos.}$$

Cuando el valor de la **unidad** es un número **mixto** ó **fraccionario** y se desea averiguar el valor de una **pluralidad entera** aumentada de **algunas partes de la unidad**, el resultado se obtendrá formando un producto total que constará de cuatro productos parciales: 1º de los enteros del multiplicando y multiplicador. 2º del entero del multiplicador por el quebrado del mutiplicando. 3º del quebrado del mutiplicador por el entero del multiplicando. 4º de los quebrados del multiplicando y multiplicador.

También se puede encontrar el producto de dos números **mixtos** transformándolos en números **fraccionarios** y operando con ellos como si fueran quebrados.

163. XI. **Enunciado.** Se sabe que un operario en 8 horas ha ganado $\frac{4}{5}$ de peso; se desea saber ¿qué tanto ganará en 1 hora?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** en 8 horas un operario ganó $\frac{4}{5}$ de peso. (*b*) Parte **desconocida:** en 1 hora ¿cuánto ganará el mismo operario? (*c*) En 1 hora se ganará forzosamente la octava parte de lo que se ganó en 8 horas, es decir, hay que hacer ocho veces menor el quebrado $\frac{4}{5}$ que es lo mismo que **dividirlo** entre 8; es pues, una operación de **dividir** un **quebrado** entre un **entero.**

Solución. En efecto, la octava parte de $\frac{4}{5}$ tiene que ser un quebrado que sumado ocho veces sea igual á cuatro quintos; sabemos que un quebrado puede hacerse menor de dos maneras: ó **dividiendo su numerador ó multiplicando su denominador;** lo primero no es posible porque no alcanza el 4 para dividirlo exactamente entre 8; lo segundo sí es posible, y entonces el resultado será:

$$\frac{4}{5} \div 8 = \frac{4}{5 \times 8} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \text{ de peso.}$$

Pero para mayor claridad, el problema se planteará del modo siguiente:

Horas.		Pesos.
8	———	$\frac{4}{5}$
1	———	x

$$x = \frac{4}{5 \times 8}$$

Se ve pues que en el resultado obtenido, el numerador 4 es el mismo del quebrado, y el denominador es un producto formado con el denominador 5 del mismo quebrado multiplicado por el entero 8. Luego:

Cuando el valor de la **pluralidad** entera es un **quebrado** y se desea averiguar el valor de la **unidad,** el resultado se obtendrá haciendo el quebrado tantas veces menor cuantas unidades tenga el entero.

En la práctica se ha formado la regla siguiente:

Para **dividir** un **quebrado** entre un **entero** se multiplicará el entero por el denominador del quebrado y al producto se le pondrá como numerador el mismo del quebrado.

164. XII. **Enunciado.** Un comerciante gana cada $\frac{3}{4}$ de hora 5 pesos; ¿cuánto ganará en 1 hora?

Análisis (*a*) Parte **conocida:** en $\frac{3}{4}$ de hora se ganan 5 pesos. (*b*) Parte **desconocida:** en 1 hora ¿cuánto se ganara? (*c*) Hay que averiguar primero lo que se podrá ganar en **un cuarto de hora** y después averiguar lo que se podrá ganar en **cuatro cuartos de hora** ó sea en **una hora** completa; lo primero es una **división** y lo segundo una **multiplicación;** de manera que aquí se trata de un problema **combinado** en el cual hay un quebrado

Solución. Si pues en $\frac{3}{4}$ de hora se han ganado 5 pesos, en un cuarto de hora se ganará la tercera parte de cinco pesos ó sean $\frac{5}{3}$ de peso, y en 4 cuartos de hora que tiene la hora completa se ganaría 4 veces la ganancia obtenida en el cuarto de hora ó sean $\frac{5\times4}{3}$ de peso.

El planteo se podrá disponer de un modo general como sigue:

Horas.		Pesos.
$\frac{3}{4}$	———	5
1	———	x

O de otro modo:

Cuartos de hora.		Pesos.
3	———	5
1	———	$\frac{5}{3}$
4	———	$\frac{5\times4}{3}$

$$x = \frac{5\times4}{3} = \frac{20}{3} = 6\tfrac{2}{3} \text{ pesos.}$$

Cuando se conoce el valor de **varias partes iguales** de la unidad ó sea de un quebrado, y se trata de averiguar el valor de la **unidad** completa; se buscará primero el valor de **una parte** de la unidad por medio de la **división** y en seguida se buscará el valor de **todas las partes juntas de que se compone la unidad** por medio de la **multiplicación.**

En el problema que se acaba de resolver se observa, que el resultado es un dividendo formado por el producto del **entero** 5 por el **denominador** 4, y el divisor por el **numerador** 3 del **quebrado** propuesto.

Se observa además que siendo $6\frac{2}{3}$ pesos lo que se gana en 1 hora, en $\frac{3}{4}$ de hora se ganarán 5 pesos. De ésto resulta que 5 es un **producto** y $\frac{3}{4}$ **uno de los factores** y por consiguiente para obtener **el otro factor** habrá que **dividir** 5 entre $\frac{3}{4}$, ó sea:

$$5 \div \tfrac{3}{4} = 6\tfrac{2}{3} \text{ pesos}$$

que fué el valor de la incógnita, y de esta observación se ha formulado la siguiente regla:

Para **dividir** un **entero** entre un **quebrado** se multiplicará el entero por el denominador del quebrado y al producto se le pondrá por denominador el numerador del quebrado.

Para nosotros no ha sido un **cociente** sólamente el resultado; sino una solución que se obtiene con dos operaciones: la **división** primero y la **multiplicación** después; no es pues un **problema simple de dividir un entero entre un quebrado,** sino un problema **combinado** en el cual se conoce el valor de **varias partes iguales de la unidad** y se desea conocer el valor de toda la **unidad entera.**

165. XIII. **Enunciado.** Para ganar $\frac{7}{10}$ de peso necesita trabajar un obrero $\frac{5}{6}$ de hora; para ganar 1 peso ¿qué tiempo necesitará trabajar?

Análisis. (*a*) **Parte conocida:** $\frac{7}{10}$ de peso se ganan en $\frac{5}{6}$ de hora. (*b*) Parte **desconocida:** 1 peso ¿en qué tiempo se ganara? (*c*) Habrá que averiguar primero **1 décimo de peso** en qué tiempo se gana para averiguar después **10 decimos de peso** en qué tiempo se ganarán; se trata pues de resolver un problema **combinado** en el cual interviene la **división** antes y le **multiplicación** después, habiendo entre los datos dos quebrados.

Solución. Si $\frac{7}{10}$ de peso se ganan en $\frac{5}{6}$ de hora, **1 décimo de peso** se ganará en la **séptima parte** del tiempo, ó en $\frac{5}{6\times7}$ de hora, y **10 décimos** de peso se ganarán en un tiempo igual á diez veces el que se necesita para ganar un décimo, ó sean $\frac{5\times10}{6\times7}$ de hora.

El problema se planteará de un modo general como sigue:

Pesos.		Horas.
$\frac{7}{10}$	————	$\frac{5}{6}$
1	————	x

y reduciendo los datos á una misma especie, el planteo se transformará así:

Décimos de peso.		Horas.
7	———	$\frac{5}{6}$
1	———	$\frac{5}{6\times7}$
10	———	$\frac{5\times10}{6\times7}$

$$x=\frac{5\times10}{6\times7}=\frac{50}{42}=1\frac{8}{50} \text{ de hora.}$$

Cuando se conoce el valor de **varias partes de la unidad** en la forma de un quebrado, y se desea averiguar el valor de la **unidad** completa, se buscará primero el valor de **una parte** de la unidad empleando la **división**, y en seguida se buscará el valor de **todas las partes de que consta la unidad completa** empleando la **multiplicación.**

Nótese que el resultado es un dividendo formado por un producto del **numerador 5**, de un quebrado por el **denominador 10**, del otro quebrado y el divisor por el **denominador 6** del primer quebrado por el **numerador 7** del segundo quebrado.

Y como 1 peso se ha ganado en $1\frac{8}{50}$ de hora según el raciocinio anterior, es claro que $\frac{7}{10}$ de peso se ganarán en $\frac{5}{6}$ de hora. De aquí resulta que $\frac{5}{6}$ de hora es un **producto** y $\frac{7}{10}$ **uno de los factores,** y por consiguiente para obtener el **otro factor** habrá que **dividir** $\frac{5}{6}$ entre $\frac{7}{10}$, ó sea:

$$\frac{5}{6}\div\frac{7}{10}=1\frac{8}{50} \text{ de hora,}$$

que fué el tiempo que se necesitó para ganar un peso, y de esta observación se ha inferido la regla siguiente:

Para **dividir** un **quebrado** entre otro **quebrado** se multiplicará el numerador del dividendo por el denominador del divisor y al producto se le pondrá como denominador el producto que resulta de multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor.

Para nosotros no hemos resuelto un **problema simple** de **dividir dos quebrados;** sino un **problema combinado de multiplicación y división** en el cual se conoce en la forma de un **quebrado** el valor de **varias partes iguales de la unidad** y se desea averiguar el valor de la **unidad** entera.

166. XIV. **Enunciado**. Se han comprado en $15\frac{4}{5}$ pesos, $4\frac{2}{3}$ docenas de tepetate; ¿cuál será el precio de 1 docena?

Análisis. (*a*) Parte **conocida**: Se han comprado $4\frac{2}{3}$ docenas de tepetate en $15\frac{4}{5}$ pesos (*b*) Parte **desconocida**: ¿cual será el precio de 1 docena de tepetate? (*c*) Para encontrar el valor de 1 docena de tepetate, conociendo el valor de varias docenas, habrá que efectuar una operación de **dividir** el precio total entre el número de docenas; pero como los datos del problema son enteros acompañados de quebrados, la operación será una **división** de números **mixtos.**

Solución. Para llegar al resultado que se desea, el medio más sencillo es transformar los números mixtos en **fraccionarios** de la especie del denominador de cada quebrado que acompaña á los enteros respectivos, en seguida el problema podrá resolverse aplicando el mismo razonamiento que hicimos al dividir dos quebrados.

El planteo general quedará así:

Docenas tepetate.		Pesos.
$4\frac{2}{3}$	———	$15\frac{4}{5}$
1	———	x

Haciendo la transformación de los mixtos á fraccionarios, el planteo quedrará así:

Docenas tepetate.		Pesos.
$\frac{14}{3}$	———	$\frac{79}{5}$
1	———	x

Reduciendo las docenas de tepetate á una especie común:

Tercios dnas. tepetate.		Pesos.
14	———	$\frac{79}{5}$
1	———	$\frac{79}{5\times14}$
3	———	$\frac{79\times3}{5\times14}$

$$x=\frac{79\times3}{5\times14}=\frac{237}{70}=3\frac{27}{70}\text{ pesos.}$$

Cuando se conoce en forma de mixtos el valor de **varias unidades enteras y varias partes iguales de la unidad**, y se desea conocer el valor de **una unidad entera**, el resultado se obtendrá transformando los números mixtos en **fraccionarios**; en seguida se buscará el valor de **una parte de la unidad** para calcular después **el valor de todas las partes iguales de la unidad.**

En la práctica se dice cuando se trata de una división de números mixtos:

Para **dividir** dos números **mixtos** se transformarán á la forma de quebrados y en seguida se operará como si fueran quebrados.

167. Después del estudio que hemos hecho de los problemas precedentes en los que intervienen los números **enteros**, los **quebrados** y los **mixtos**, podremos formular el siguiente resumen de las operaciones que se ejecutan en su solución.

Sumar.
- I. **Quebrados** con denominadores **iguales.**
- II. **Quebrados** con denominadores **desiguales.**
- III. Números **mixtos.**

Restar.
- I. Un **quebrado** de un **entero.**
- II. Un **quebrado** de otro **quebrado.**
- III. Números **mixtos.**

Multiplicar.
- I. Un **quebrado** por un **entero.**
- II. Un **entero** por un **quebrado.**
- III. Dos **quebrados.**
- IV. Números **mixtos.**

Dividir.
- I. Un **quebrado** entre un **entero.**
- II. Un **entero** entre un **quebrado.**
- III. Un **quebrado** entre otro **quebrado.**
- IV. Un **mixto** entre otro **mixto.**

168. El anterior resumen se refiere á las operaciones que intervinieron en la solución de los problemas cuyos datos son: **enteros, quebrados y mixtos.** Vamos ahora á formular otro resumen que se refiera exclusivamen á los **problemas.**

I. Determinar el total de varias fracciones que tengan un mismo denominador.

II. Determinar el total de varias fracciones que tengan distintos denominadores.

III. Determinar el total de varias unidades enteras y partes de la unidad.

IV. Buscar la diferencia entre un entero y un quebrado.

V. Buscar la diferencia entre dos quebrados.

VI. Buscar la diferencia entre dos números mixtos.

VII. Dado el valor de la **unidad entera** en **quebrado**, buscar el valor de **la pluralidad entera.**

VIII. Dado el valor de la **unidad entera** en números **enteros** buscar el valor **de varias partes de la unidad.**

IX. Dado el valor de la **unidad entera** en **quebrado**, buscar el valor **de varias partes de la unidad.**

X. Dado el valor de la **unidad entera** en número **mixto** buscar el valor de una **pluralidad mixta.**

XI. Dado el valor de una **pluralidad entera** en **quebrado, buscar** el valor de la **unidad entera.**

XII. Dado el valor de **varias partes de la uni-**

dad en enteros, buscar el valor de la **unidad entera**.

XIII. Dado el valor de **varias partes de la unidad en quebrado**, buscar el valor de la **unidad entera.**

XIV. Dado el valor de un **número mixto** en **mixto**, buscar el valor de la **unidad entera**.

169. Ademas de los problemas anteriores que se resuelven con quebrados, vamos á proponer otros semejantes en los cuales no intervenga en su enunciado el valor de la **unidad** ni como **dato** ni como **incógnita.**

Primer problema. Enunciado. Se sabe que 8 limosneros han reunido $\frac{4}{5}$ de peso, ¿cuánto corresponderá á 5 limosneros?

Analisis. (*a*) Parte **conocida:** 8 limosneros han reunido $\frac{4}{5}$ de peso. (*b*) Parte **desconocida:** ¿cuánto corresponde á 5 limosneros? (*c*) Hay que averiguar lo que corresponde á 1 limosnero y después lo que corresponde á 5; lo primero es una **división** y lo segundo una **multiplicación.**

Solución. El planteo y desarrollo se hará así:

Limosneros.		Pesos.
8	———	$\frac{4}{5}$
1	———	$\frac{4}{5\times 8}$
5	———	$\frac{4\times 5}{5\times 8}$

$$x = \frac{4\times 5}{5\times 8} = \frac{20}{40} = \tfrac{1}{2} \text{ peso.}$$

Corresponderá **medio** peso á los 5 limosneros.

Segundo problema. Enunciado. 7 litros de arroz han costado $\frac{9}{10}$ de peso; ¿cuánto costarán $\frac{4}{5}$ de litro de la misma semilla?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** 7 litros de arroz valen $\frac{9}{10}$ de peso. (*b*) Parte **desconocida:** $\frac{4}{5}$ de litro de arroz ¿cuánto costarán? (*c*) Hay que averiguar primero lo que vale 1 **litro, división;** después lo que vale 1 **quinto** de litro, otra vez **división,** y por último lo que valen $\frac{4}{5}$ de litro, **multiplicación.**

Solución. He aquí los planteos y su desarrollo.

Primer planteo:

Litros.		Pesos.
7	———	$\frac{9}{10}$
1	———	x

$$x = \frac{9}{10 \times 7} = \frac{9}{70}$$

Segundo planteo:

Quintos de litro.		Pesos.
5	———	$\frac{9}{70}$
1	———	$\frac{9}{70 \times 5}$
4	———	$\frac{9 \times 4}{70 \times 5}$

$$x = \frac{9 \times 4}{70 \times 5} = \frac{36}{350} \text{ de peso.}$$

Análisis. (*a*) **Parte conocida:** por $\frac{5}{8}$ de litro de vino se dan $\frac{4}{5}$ de kilogramo de pescado. (*b*) **Parte desconocida:** por $\frac{9}{10}$ de litro de vino ¿qué cantidad se dará de pescado? (*c*) Hay que averiguar qué tanto se da de pescado por $\frac{1}{8}$ de litro de vino, **división;** después qué tanto se dará por $\frac{8}{8}$ de litro de vino á sea por **un litro entero, multiplicación;** en seguida lo que se da por $\frac{1}{10}$ de litro de vino, **división,** y por último lo que se da por $\frac{9}{10}$ de litro de vino, **múltiplicación.**

Solución. He aquí los planteos y desarrollo correspondientes.

Primer planteo:

Litros de vino.		Kilogramos de pescado.
$\frac{5}{8}$	————	$\frac{4}{5}$
$\frac{9}{10}$	————	x

Segundo planteo:

Octavos de litro.		Kilogramos de pescado.
5	————	$\frac{4}{5}$
1	————	$\frac{4}{5\times 5}$
8	————	$\frac{4\times 8}{5\times 5}$

$$x = \frac{4\times 8}{5\times 5} = \frac{32}{25} \text{ kilogramos pescado.}$$

Por $\frac{8}{8}$ litros de vino ó sea por **un litro** de vino se dan $\frac{32}{25}$ kilogramos de pescado.

Tercer planteo:

Supuesto que $\frac{8}{8}$ es igual á $\frac{10}{10}$ ó sea un litro de vino, tendremos:

Décimos de litro.	Kilogramos de pescado.
10 ——	$\frac{32}{25}$
1 ——	$\frac{32}{25 \times 10}$
9 ——	$\frac{32 \times 9}{25 \times 10}$

$$x = \frac{32 \times 9}{25 \times 10} = \frac{288}{250} = 1\,\frac{38}{250}$$

kilogramos de pescado.

Luego por $\frac{9}{10}$ de litro de vino se darán $1\,\frac{38}{250}$ kilogramos de pescado.

170. Los problemas anteriores en los cuales no interviene el **valor de la unidad** en el enunciado ni como **dato** ni como **incógnita** podremos resumirlos en los casos siguientes:

I. Dado el valor de una **pluralidad entera** en **quebrado,** buscar el valor de otra **pluralidad entera.**

II. Dado el valor de una **pluralidad entera** en **quebrado,** buscar el valor de **varias partes de la unidad.**

III. Dado el valor de **varias partes de la unidad,** buscar el valor de una **pluralidad entera.**

Los $\frac{4}{5}$ de litro valen $\frac{36}{350}$ de peso.

Tercer problema. Enunciado. Los $\frac{3}{4}$ de litro de vino valen 4 pesos; ¿cuánto costarán 8 litros del mismo vino?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** $\frac{3}{4}$ de litro de vino valen 4 pesos. (*b*) Parte **desconocida:** ¿cuánto costarán 8 litros del mismo vino? (*c*) Se averiguará primero lo que vale $\frac{1}{4}$ de litro, **división;** después lo que valen $\frac{4}{4}$ de litro ó sea 1 litro, **multiplicación;** por último se averiguará lo que valen 8 litros de vino, **multiplicación.**

Solución. He aquí los planteos y su desarrollo.

Primer planteo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cuartos de litro} & & \text{Pesos.} \\ 3 & \text{———} & 4 \\ 1 & \text{———} & \dfrac{4}{3} \\ 4 & \text{———} & \dfrac{4\times 4}{3} \end{array}$$

$$x = \frac{4\times 4}{3} = \frac{16}{3} = 5\tfrac{1}{3} \text{ pesos.}$$

Segundo planteo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Litros.} & & \text{Pesos.} \\ 1 & \text{———} & \dfrac{16}{3} \\ 8 & \text{———} & \dfrac{16\times 8}{3} \end{array}$$

$$x = \frac{16\times 8}{3} = \frac{128}{3} = 42\tfrac{2}{3} \text{ pesos}$$

Los 8 litros de vino valen $42\frac{2}{3}$ pesos.

Cuarto problema. Enunciado. Si en $\frac{7}{20}$ de hora un empleado gana 3 pesos, ¿cuánto ganará en $\frac{19}{20}$ de hora?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** En $\frac{7}{20}$ de hora se ganan 3 pesos. (*b*) Parte **desconocida:** ¿cuánto se ganará en $\frac{19}{20}$ de hora? (*c*) Averiguar primero lo que se gana en $\frac{1}{20}$ de hora, **división**; después lo que se gana en $\frac{19}{20}$ de hora, **multiplicación.**

Solución. Planteo y desarrollo.

Horas.	Pesos.
$\frac{7}{20}$ ————	3
$\frac{19}{20}$ ————	x

Vigésimos de hora	Pesos.
7 ————	3
1 ————	$\frac{3}{7}$
19 ————	$\frac{3\times19}{7}$

$$x = \frac{3\times19}{7} = \frac{57}{7} = 8\ \frac{1}{7}\ \text{pesos.}$$

El empleado gana por cada $\frac{19}{20}$ de hora, $8\frac{1}{7}$ pesos.

Quinto problema. Enunciado. Una persona cambió por $\frac{5}{8}$ de litro de vino $\frac{4}{5}$ de kilogramo de pescado, ¿cuánto recibirá de pescado por $\frac{9}{10}$ de litro de vino?

Si la llave de agua produjera $\frac{7}{8}$ de litro por segundo, se llenaría la fuente en $\frac{48}{140}$ de hora.

....

Con los dos ejemplos anteriores basta para indicar que á los casos que hemos señalado de problemas con enteros, quebrados y mixtos y las operaciones que intervienen en su solución en virtud de las **relaciones directas**, hay que agregar otros tantos en los cuales, empleando los mismos datos, enteros, quebrados y mixtos, se resolverán por las operaciones contrarias, en virtud de las **relaciones inversas**.

Ejercicios.—206. ¿Cómo podré repartir 1 manzana entre 2 niños? —¿1 melón entre 3 niños? —¿1 sandía entre 4 niños? —¿1 naranja entre 5 niños? —¿Cómo se llaman las dos partes en que se dividió la manzana? — ¿Cómo se llaman las tres partes en que se dividió el melón? — ¿Cómo se llaman las cuatro partes en que se dividió la sandía?—¿Cómo se llaman las cinco partes en que se dividió la naranja? —¿Cuántas mitades tiene una manzana?—¿Cuántos tercios tiene un melón? — ¿Cuántos cuartos tiene una sandía? — ¿Cuántos quintos tiene una naranja?

207. ¿Cómo se repartirá un queso entre 6 niños?—¿Entre 7 niños?—¿Entre 8 niños?—¿Entre 9 niños?—¿Entre 10 niños?—¿Cómo se llaman las seis partes en que se dividió el queso?—¿Cómo las siete partes?—¿Cómo las ocho?—¿Cómo las nueve?—¿Cómo las diez?—¿En cuántos sextos se divide un queso? ¿En cuántos séptimos? ¿En cuántos octavos? ¿En cuántos novenos? ¿En cuántos décimos?

208. ¿Cómo se llaman las partes en que se divide un objeto cualquiera, si son 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, etc., el número de partes en que se hubiere dividido? — ¿Cuántos onceavos, doceavos, treceavos, catorceavos, etc. tiene un objeto cualquiera? — Diga usted los nombres particulares

con que se designan las partes en que un objeto puede dividirse si son de dos á diez. —Y si son de once en adelante ¿cómo se designan esas partes?

209. ¿Se podrá dividir un objeto en más ó en menos de dos mitades?—¿En más ó en menos de tres tercios?—¿En más ó en menos de cuatro cuartos? — ¿En más ó en menos de cinco quintos?—¿A qué se llama fracción ó quebrado?—Dos mitades, tres tercios, cuatro cuartos, cinco quintos, etc. serán quebrados?—Cinco medios, ocho tercios, nueve cuartos, diez quintos, serán quebrados?— ¿Por qué son quebrados un medio, dos tercios, tres cuartos, cuatro quintos, etc.?

210. ¿Cuál es la mitad de dos, cuatro, seis, ocho y diez peras?—¿Cuál es la mitad de una naranja, tres, cinco, siete y nueve, etc.?—¿Qué números tienen mitad exacta y cuáles no la tienen?—¿Cuál es la tercera parte de tres libros, seis, nueve, doce, quince, etc ? — ¿Cuál es la tercera parte de dos manzanas, cuatro, cinco, siete, ocho, diez, etc.?—¿Qué números del uno al cien tienen tercera parte exacta y cuáles no la tienen? — ¿Cuál es la cuarta parte de cuatro bancos, ocho, doce, deiz y seis, etc ?—¿Cuál es la cuarta parte de un peso, dos, tres, cinco, seis, siete, etc.? ——¿Qué números del uno al cien tienen cuarta parte exacta y cuáles no la tienen?

211. ¿Cuál es la quinta parte de cinco gises, de diez, quince, etc.?—¿Cuál es la quinta parte de un pizarrín, dos, tres, cuatro, seis, etc.?—¿Qué números del uno al cien tienen quinta parte exacta y cuáles no la tienen?—¿Cuál es la sexta parte de seis, doce, etc. libros?—¿Cuál es la sexta de cinco, siete, nueve, etc. melones?—¿Qué números del uno al cien tienen sexta parte exacta y cuáles no la tienen?—¿Cuál es la séptima parte de 7, 14, etc. (números exactos). —¿Cuál es la séptima de 1, 3, 5, etc ? (inexactos).—¿Qué números del uno al cien tienen séptima parte exacta y cuáles no? — Octava parte de 8, 16, etc. (exactos). — Octava parte de 1, 2, 3, etc. (inexactos) —¿Qué números tienen octava parte exacta y cuáles no? — Novena parte de números exactos é inexactos é indicar los que la tienen y los que no.—Décima parte de números exactos é inexactos é indicar los que la tienen y los que no.

212. ¿Cuántos cuartos, sextos, octavos y décimos tiene una media manzana?—Un cuarto de manzana ¿cuántos oc-

IV. Dado el valor de **varias partes de la unidad** en **enteros,** buscar el valor de **varias partes de la unidad.**

V. Dado el valor de **varias partes de la unidad** en **quebrado,** buscar el valor de **varias partes de la unidad.**

171. En todos los problemas cuyos datos contienen **quebrados,** hemos estudiado solamente los casos en que hay **relaciones directas;** pero existen además infinidad de problemas también con quebrados, en los cuales hay **relaciones inversas** del mismo modo que los hemos estudiado en los problemas con números **enteros.**

Sería muy largo el estudio de estos problemas de relaciones **inversas,** pero como ya nos son conocidos, solo vamos á limitarnos á poner unos ejemplos.

1º 3 obreros dilatan $\frac{5}{8}$ de día para hacer un trabajo; 2 obreros ¿en qué tiempo lo harán?

Solución:

Obreros.		Días
3	——	$\frac{5}{8}$
1	——	$\frac{5\times 3}{8}$
2	——	$\frac{5\times 3}{8\times 2}$

$$x = \frac{5\times 3}{8\times 2} = \frac{15}{16} \text{ de día.}$$

2º En $\frac{3}{4}$ de hora se llenó una fuente abriendo una llave que producía $\frac{2}{5}$ de litro de agua por segundo; si produjera $\frac{7}{8}$ de litro de agua por segundo ¿en qué tiempo se llenaría la fuente?

Solución:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Litros.} & & \textbf{Horas.} \\ \frac{2}{5} & \text{———} & \frac{3}{4} \\[1ex] \frac{1}{5} & \text{———} & \frac{3\times 2}{4} \\[1ex] \frac{5}{5} & \text{———} & \frac{3\times 2}{4\times 5} \end{array}$$

$$x = \frac{3\times 2}{4\times 5} = \frac{6}{20} \text{ de hora.}$$

Pero como $\frac{5}{5} = \frac{8}{8}$ de litro, tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Litros.} & & \textbf{Horas.} \\ \frac{8}{8} & \text{———} & \frac{6}{20} \\[1ex] \frac{1}{8} & \text{———} & \frac{6\times 8}{20} \\[1ex] \frac{7}{8} & \text{———} & \frac{6\times 8}{20\times 7} \end{array}$$

$$x = \frac{6\times 8}{20\times 7} = \frac{48}{140} \text{ de hora.}$$

219. Voy á repartir 5 pasteles entre 10 niños, ¿qué pasará si duplico, triplico ó cuadruplico el número de pasteles sin aumentar los niños?—¿Y qué propiedad se infiere de esa observación?—Y si duplico, triplico ó cuadruplico el número de niños sin aumentar los pasteles ¿qué pasará?—¿Y qué nueva propiedad se infiere de esa observación?—En el ejemplo propuesto ¿qué número de los dos hace de numerador y cuál de denominador?—Diga usted las dos propiedades anteriores refiriéndose á los quebrados.—¿Y cómo quedaría expresada si se refiriera á la división?

220. Voy á repartir 12 manzanas entre 24 niños; ¿qué pasará si tomo la mitad de las manzanas ó la tercera parte, etc., sin aumentar los niños?—Y qué propiedad se infiere de esta observación?—¿Y si tomo la mitad, la tercera parte, etc. de los niños sin aumentar las manzanas qué pasará?—¿Qué nueva propiedad se infiere de esta otra observación?—¿Cuál es el numerador y cuál el denominador en los dos números del ejemplo propuesto?—Diga usted las dos propiedades anteriores refiriéndose á los quebrados.—¿Y cómo quedaría expresada si se refiriera á la división?

221. Las cuatro propiedades anteriores ¿cómo podrán resumirse en una sola frase general? —¿Por qué media manzana es igual á otra media manzana? —Y en la escritura ¿por qué $\frac{1}{2}$ es igual á $\frac{1}{2}$? —¿Por qué $\frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4}$ son dos quebrados iguales? —¿Qué otros quebrados hay iguales á $\frac{1}{2}$ naranja? —¿Y á $\frac{2}{3}$ de peso? —¿Y á $\frac{3}{4}$ de melón? —¿Dos quebrados son iguales únicamente cuando sus numeradores y denominadores son respectivamente iguales?—Diga usted con precisión si los numeradores y los denominadores respectivamente de los quedrados son desiguales ¿qué requisitos deberá tener cada término respecto de su correspondiente?

222. Cíteme usted, diez quebrados iguales á un medio. —Otros diez iguales á dos tercios — Otros diez iguales á tres cuartos —Otros diez iguales á cuatro quintos.—Otros diez iguales á cinco sextos.—Otros diez iguales á cinco séptimos.—Otros diez iguales á siete octavos. —Cinco novenos y diez diez y ocho avos ¿son iguales ó no, y por qué?—Por qué son iguales cuatro décimos y ocho vigésimos?—Diga usted, ¿qué quebrados de términos menores será igual á veinte centésimos?—¿Yá catorce veintiocho avos?—¿Cómo se con-

sigue transformar un quebrado de términos mayores á menores y viceversa?

223. Simplificar los quebrados siguentes: $\frac{312}{456}$, $\frac{114}{266}$, $\frac{548}{1096}$, $\frac{714}{2648}$, $\frac{71402}{89626}$.—La simplificación se hará primero por partes y luego empleando el procedimiento del máximo cumún divisor.—Hecha la simplificación ¿habrán cambiado de valor los quebrados propuestos?

224 ¿Son iguales ó diferentes los quebrados $\frac{5}{8}$, y $\frac{7}{8}$, y por qué?—Los quebrados $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{9}$ ¿son iguales ó diferentes y por qué?—Los quebrados $\frac{7}{8}$ y $\frac{9}{11}$ ¿son iguales ó diferentes y por qué?— De dos ó más quebrados que tienen iguales sus denominadores ¿cuál es el mayor y cuál es el menor?—De dos ó más quebrados que tienen iguales sus numeradores ¿cuál es mayor y cuál es menor?—De dos ó más quebrados que tienen diferentes sus numeradores y denominadores ¿cuál es mayor y cuál es menor?

225. En el caso de que los denominadores sean iguales ¿en qué relación están los numeradores respecto de los valores de los quebrados? Es decir, á mayor numerador ¿qué valor corresponde? y á menor valor ¿qué numerador corresponde?—En el caso de que los numeradores sean iguales ¿en qué relación están los denominadores respecto de los valores de los quebrados? Es decir, á menor denominador ¿qué valor corresponde? y á mayor denominador ¿qué valor corresponde?—De manera que mientras aumenta el número de las partes ¿qué pasa con su tamaño? y cuando disminuye el número de las partes ¿qué pasa con el tamaño?

226. Si pues para estimar el valor de dos ó más quebrados hay que reducirlos á una especie común, sírvase usted hacer la reducción en los siguientes ejemplos: ¿Cuál es el denominador común entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{7}{8}$, entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{25}$, entre $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$, entre $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$ y $\frac{9}{25}$; entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$; entre $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, y $\frac{4}{5}$; entre $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ y $\frac{1}{2}$?

227. Reducir al denominador común que resulta del producto de todos los denominadores en los siguientes quebrados: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$.—Tomar como denominador común en los mismos el doble del producto de todos sus denominadores.—Tomar como denominador común el menor múltiplo de los denominadores de dichos quebrados.—Tomar como denominadores comunes los denominadores intermedios entre el menor múltiplo y el producto de los denominado-

tavos, doceavos y diez y seis avos tiene?—¿Cuántos sextos, novenos y doceavos tiene un tercio de naranja?—Un quinto ¿cuántos décimos, quinceavos y vigésimos tiene?—Un sexto ¿cuántos doceavos, diez y ocho y veinticuatro avos tiene?—Un séptimo ¿cuántos catorceavos, veintiunavos y veintiocho avos tiene?—Un octavo ¿cuántos diez y seis avos, veinticuatro avos y treinta y dos avos tiene? — Un noveno ¿cuántos diez y ocho avos, veintisiete avos y treinta y seis avos tiene? – Un décimo ¿cuántos vigésimos, trigésimos y cuadragésimos tiene?

213. Por medio de diez tiras de papel del mismo tamaño, y dobladas en dos, tres, cuatro, hasta diez partes, observar los tamaños de unas partes con otras. —¿Qué es más grande, una mitad ó un tercio? ¿Un tercio ó un cuarto? ¿Un cuarto ó un quinto? ¿Un quinto ó un sexto? etc., hasta un noveno ó un décimo.—Dos tercios ¿cuántos sextos y novenos son? — Tres cuartos ¿cuántos octavos son? — Dos, tres y cuatro quintos ¿cuántos décimos son?—Uno, tres y cinco sextos ¿cuántos doceavos son?—Uno, dos, tres, hasta siete séptimos ¿cuántos catorce avos son?—Uno, tres, cinco y siete octavos ¿cuántos diez y seis avos son? — Uno, dos, cuatro, cinco, siete y ocho novenos ¿cuántos diez y ocho avos son?—Uno, tres, siete y nueve décimos ¿cuántos vigésimos son?

214. Dos, cuatro, seis y ocho décimos ¿cuántos quintos son?—Dos, cuatro y seis octavos ¿cuántos cuartos son?—Dos, cuatro, seis, ocho, diez y doce catorce avos ¿cuántos séptimos son?—Dos, cuatro, seis, ocho y diez doce avos ¿cuántos sextos son?—Dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce, diez y seis y diez y ocho avos ¿cuántos novenos son?—Dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce, diez y seis y diez y ocho vigésimos ¿cuántos décimos son?—Ocho, doce y diez y seis cuartos ¿cuántos medios son?—Seis, nueve y doce tercios ¿cuántos unos son?

215. Cuando el entero se divide en dos partes ¿cómo se llaman? — ¿Cuántas mitades tiene un entero? — Escriba usted una mitad como si fuera número concreto.—Cuando el entero se divide en tres partes ¿cómo se llaman?—¿Cuántos tercios tiene el entero?—Escriba usted como números concretos: uno y dos tercios.—Cuando la unidad se divide en cuatro partes ¿cómo se llaman?—¿Cuántos cuartos tiene

el entero?—Escriba usted como números concretos: uno, dos y tres cuartos.—Cuando la unidad se divide en cinco partes ¿cómo se llaman? —¿Cuántos quintos tiene la unidad?—Escriba usted como números concretos: uno, dos, tres y cuatro quintos.

216. Decir ¿cómo se llaman las partes cuando la unidad se divide en seis partes?—La unidad tiene ¿más ó menos de seis sextos?—Escriba usted: uno, dos, tres, cuatro y cinco sextos como números concretos.—Cuando la unidad se divide en siete partes ¿cómo se llaman?—¿Tiene la unidad más ó menos de siete séptimos?—Escriba usted como números concretos, de uno á seis séptimos.—¿Cómo se llaman las partes si se hacen ocho de la unidad?—¿Tiene la unidad más ó menos de ocho octavos?—Escriba usted como números concretos de uno á siete octavos. — ¿Qué son los novenos?—¿Qué son los décimos?—¿Cuántos novenos y cuántos décimos tiene la unidad?—Escriba usted como números concretos de uno á ocho novenos y de uno á nueve décimos.

217. ¿Con qué cifra se podrá sustituir la palabra mitades?—¿Y la palabra tercios?—¿Y la especie cuartos?—¿Y la especie quintos?—¿Y la especie sextos?—¿Y la especie séptimos?—¿Y la especie octavos?—¿Y la especie novenos?—¿Y la especie décimos?—¿Y se podrán escribir el número de partes que se toman de la unidad seguido de la especie representada en forma de números y sin que ambas cifras se confundieran?—Por ejemplo: ¿tres cuartos lo podría yo escribir así, 3 4?—¿Por qué se confunden tres cuartos con treinta y cuatro?—¿Y para que no haya esa confusión ¿cómo podré separar el 3 del 4?

218. Supuesto que los quebrados se pueden representar como divisiones indicadas, represente usted con cifras los quebrados siguientes: cuatro novenos, ocho once avos, cinco quince avos, un séptimo, siete vigésimos, cuatro centésimos, nueve milésimos, etc.—Lea usted estos quebrados: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{4}{19}$, $\frac{7}{23}$, etc.—¿Por qué se le ha llamado numerador al dividendo y denominador al divisor?—Qué, ¿sólo los quebrados ó números menores que uno se podrán representar por escrito en la forma de divisiones indicadas?—Represente usted 12, 15 y 20 naranjas entre diez niños, en forma de quebrados. — Represente usted en forma de quebrado cuatro, ocho y doce pesos entre 40 niños.

día; en descansos, $\frac{1}{16}$, y el resto en trabajar. Se ha calculado que la hora de trabajo le produce $5\frac{3}{4}$ pesos; ¿qué tanto ganará por semana, por mes y por año?

251. Tres peones se ocupan en abrir una zanja: el primero trabajando sólo la abriría en 8 días, el segundo en 6 y el tercero en 4, se desea saber qué parte de la zanja harían en un día, trabajando todos juntos.

252. Habiéndose hecho las $\frac{3}{8}$ partes de una obra, más las $\frac{2}{5}$, más $\frac{1}{10}$, se desea saber qué tanto se ha hecho por todo.

253. Uu tejedor hizo el primer día $\frac{3}{10}$ de una pieza de tela, el segundo día $\frac{3}{20}$ y el tercer día $\frac{3}{40}$, se desea saber qué tanto ha hecho de toda la pieza y cuánto falta para concluirla.

254. Dos viajeros que siguen la misma dirección saliendo del mismo punto y á la misma hora, desean saber después del primer día de viaje qué distancia los separará, en el concepto de que el primero debe emplear en su camino 8 días á caballo y el segundo 5 días en bicicleta.

255. Siendo la suma de dos números 7 y el menor de ellos $2\frac{5}{8}$, se desea saber cuál será el otro número.

256. Una fuente puede llenar un depósito de agua en 5 horas y para vaciarse este depósito por una llave necesita 7 horas; se desea saber al cabo de una hora qué parte del depósito estaría con agua si la fuente y la llave se hubieran destapado al mismo tiempo?

257. Teniendo que pagar 100 pesos por una obra de mampostería se pregunta ¿cuánto se deberá abonar por los $\frac{2}{2}\frac{2}{5}$ de dicha obra?

258. Sabiendo que el metro de una tela cuesta $\frac{7}{8}$ de peso, se desea averiguar el valor de $\frac{3}{4}$ de metro.

259. Uu obrero recibe por cada $\frac{5}{6}$ de hora, $\frac{3}{8}$ de peso, ¿cuánto ganará en una hora?

260. He multiplicado $10\frac{5}{6}$ por un número y he obtenido como producto 36, se desea saber cuál es el otro número.

261. Las $\frac{2}{3}$ partes de una cantidad son 42 pesos ¿cuál será toda la cantidad?

262. Habiendo pagado 70 pesos por las $\frac{5}{7}$ partes de un trabajo, se desea saber ¿cuánto se pagará por el total?

263. Cinco chorros de agua derraman en un estanque: el primero podría llenarlo en 25 horas, el segundo en 15, el

tercero en 20, el cuarto en 12 y el quinto en 30; ¿qué parte del estanque llenarán todos juntos en 1 hora?

264. Cuatro albañiles trabajan en una obra; el primero podría acabarla en 15 días, el segundo en 18, el tercero en 21 y el cuarto en 24, ¿qué parte de la obra harían en 1 día si trabajasen todos juntos?

265. Una costurera ganó el primer día $\frac{3}{5}$ de peso, el segundo día $\frac{8}{9}$, el tercero $\frac{1}{2}$, el cuarto $\frac{3}{8}$ y el quinto $\frac{9}{10}$, ¿qué tanto ganó en los cinco días?

266 Tres correos parten al mismo tiempo de tres ciudades distintas, recorriendo todos la misma distancia, el primero tenía que dilatar 8 días, el segundo 11 y el tercero 13; ¿qué parte de la distancia habrán caminado en un día?

267 ¿Cuál será la suma de $\frac{3}{4}$ de kilometro más los $\frac{2}{5}$, más los $\frac{5}{8}$ y más los $\frac{9}{16}$?

268. Un obrero para ganar cierta cantidad de dinero trabajó el lunes $1\frac{1}{2}$ horas, y ganó $2\frac{3}{4}$ pesos, el martes trabajó $3\frac{1}{4}$ horas y ganó $4\frac{7}{8}$ pesos, el miércoles trabajó $2\frac{1}{3}$ horas y ganó $5\frac{1}{10}$ pesos, ¿cuánto ganó en los tres días y qué tiempo trabajó?

269. Mezclando agua y leche en tres depósitos iguales de un doble decálitro cada uno; en el primero, 3 partes de agua y 5 de leche; en el segundo 6 partes de agua y 6 de leche; en el tercero 8 partes de leche y 4 de agua; se desea saber, mezclando el contenido de los tres depósitos en otro mayor ¿cuál será la cantidad de leche y cuál la cantidad de agua?

270. La rueda de una máquina da 20 vueltas en 10 horas y la de otra máquina da 50 vueltas en 12 horas ¿cual de las dos máquinas tiene mayor potencia?

271. Una llave sola llenaría en 4 horas un receptáculo que desaguado por una válvula quedaría vacío en 6 horas: al cabo de 1 hora ¿qué parte del receptáculo estaría con agua si la llave y la válvula se hubiesen destapado al mismo tiempo?

272. Añadiendo un número á 6 metros y $\frac{5}{8}$ de metro se ha obtenido 10 $\frac{3}{4}$ de metro ¿cual será ese número?

273. La suma de dos números es $15\frac{1}{2}$ y el mayor de los dos es $12\frac{7}{9}$ ¿cuál es el otro?

274. Dos correos van á seguir el mismo camino: el primero ha de andar la ruta en 8 días y el segundo en 11; des-

res.—¿Podrán designarse denominadores menores que el menor múltiplo y cómo serán los resultados?

228. También se puede estimar el valor de los quebrados reduciéndolos á un común numerador.—Haga usted las siguientes reducciones: $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{9}$ á un numerador común—$\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{26}$.—$\frac{7}{8}$ y $\frac{4}{5}$.—$\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$. y $\frac{2}{5}$ —$\frac{7}{9}$ $\frac{4}{5}$ y $\frac{9}{11}$.—$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, y $\frac{8}{9}$.

229. Reducir al numerador común que sea el producto de todos los numeradores los siguientes quebrados: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{11}$ y $\frac{12}{17}$— Tomar en los mismos quebrados como numerador común el doble producto de los numeradores —Tomar en los mismos quebrados como numerador común el menor múltiplo común de sus numeradores.—Tomar como numeradores comunes, los numeradores intermedios entre el menor múltiplo y el producto de todos los numeradores.—¿Podrán aceptarse numeradores comunes menores que el menor múltiplo y cómo serán los resultados?

230. Escriba usted en forma de quebrados los números del uno al diez, tomando como denominador la unidad.—Transformar los mismos números en mitades.—En tercios —En cuartos,—En quintos.—En sextos—En séptimos.—En octavos.—En novenos.—En décimos.—¿De qué manera se puede trasformar un entero en quebrado?

231. Dé usted la forma de quebrados á los números mixtos siguientes: $2\frac{3}{5}$, $4\frac{9}{10}$, $8\frac{5}{6}$, $10\frac{4}{7}$, $9\frac{2}{3}$, $6\frac{5}{8}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $8\frac{4}{11}$.—¿Cómo se hace para dar á un número mixto la forma de quebrado?—¿Qué diferencia hay entre un número mixto y un número fraccionario?

232. ¿Diga usted, á qué números enteros y fracciones equivaldrán los siguientes números fraccionarios: $\frac{39}{2}$, $\frac{43}{3}$, $\frac{63}{5}$, $\frac{77}{6}$, $\frac{75}{7}$, $\frac{87}{8}$, $\frac{93}{9}$, y $\frac{103}{10}$—¿Cómo se tranforma un número fraccionario en número mixto?—En resúmen ¿qué propiedades generales ha observado usted, que tienen los mismos quebrados?

Problemas. 233 Sabiendo que un mes tiene 30 días, se desea saber un operario cuántos días habrá trabajado en un semestre, en el supuesto que trabajó en cada mes: la mitad del primer mes, la tercera del segundo, la cuarta del tercero, la quinta del cuarto y la sexta del sexto mes?

234. Si tomamos como denominador común 360 días que tiene el año Comercial, averiguar cuántos días hay en las siguientes fracciones de año, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{10}$ y $\frac{11}{12}$?

235. Se trata de saber cuántos kilogramos de azucar se habrán comprado por un comerciante al por menor, supuesto que lo comprado lo vendió del modo siguiente: $3\frac{1}{2}$ kilogramos el lunes, $7\frac{3}{5}$ el martes, $12\frac{4}{9}$ el miércoles, $5\frac{2}{3}$ el jueves, $10\frac{5}{8}$ el viernes, $9\frac{1}{4}$ el sábado y $1\frac{7}{9}$ el domingo?

236. Un niño compró 4 kilogramos de dulces y repartió entre sus amigos $\frac{7}{8}$ de kilogramo, qué tanto le quedó?

237. De un retazo de casimir de $\frac{8}{10}$ de metro, se tiene tomado $\frac{5}{17}$ de metro, ¿cuánto quedó?

238. En un barril se habían depositado $93\frac{4}{5}$ litros de vino, y al cabo de cierto tiempo sólo se encontraron $72\frac{7}{9}$, ¿cuántos litros faltan?

239. Se sabe que la tonelada de cal cuesta 15 pesos; ¿cuánto costarán $\frac{3}{7}$ de tonelada?

240. El metro de cierta tela vale $\frac{7}{8}$ de peso, ¿cuánto costarán 14 metros?

241. Un albañil gana en el día $\frac{9}{10}$ de peso, ¿cuánto habrá ganado en $\frac{8}{11}$ de día?

242. Suponiendo que en un día se hayan caminado $8\frac{3}{4}$ kilómetros de distancia ¿qué tanto se caminará en $7\frac{7}{9}$ de día?

243. Si 12 kilómetros se pueden caminar fácilmente en $\frac{7}{8}$ de día, ¿qué tiempo se empleará para recorrer un kilómetro?

244. Las $\frac{4}{5}$ partes de su fortuna empleó un negociante y compró con ese dinero 80,000 metros de terreno; si hubiera empleado toda su fortuna ¿cuántos metros habría comprado?

245. En $\frac{3}{4}$ de hora un aprendiz escribió en máquina $\frac{9}{10}$ de un pliego de papel, ¿qué tanto escribirá en 1 hora?

246. En $71\frac{2}{5}$ pesos se han vendido $43\frac{5}{9}$ litros de vinagre, ¿qué tanto costará un litro?

247. En 8 pesos he vendido $\frac{5}{12}$ de metro de casimir, ¿en cuánto podré vender $\frac{9}{17}$ avos de metro de la misma tela?

248. Suponiendo que en $\frac{4}{5}$ de hora una llave de agua produzca los $\frac{7}{9}$ de una fuente, ¿qué tanto produciría de agua en $\frac{5}{8}$ de hora la misma llave?

249. ¿Cómo sabré lo que valen $14\frac{7}{9}$ metros de tafetán, tomando como base el precio de $10\frac{4}{5}$ que costaron $50\frac{3}{8}$ pesos?

250. Un empleado distribuye su tiempo cada día del modo que sigue: en dormir, $\frac{7}{24}$ del día; en alimentarse, $\frac{1}{6}$ de

pués del primer día ¿qué distancia separará á los dos correos suponiendo que partieron al mismo tiempo?

275. De una pieza de tela de 30 metros $\frac{3}{4}$, se han vendido 12 metros $\frac{5}{8}$ ¿cuánto queda de la pieza?

276. En un depósito de vino que contiene una capacidad de tres barriles, se depositaron el primer día $\frac{3}{8}$ de barril y se vendieron $\frac{3}{12}$, el segundo día se depositaron $\frac{7}{8}$ y se vendieron $\frac{2}{3}$; el tercer día se depositaron $2\frac{3}{4}$ barriles y se vendieron $\frac{5}{11}$, ¿cuánto se depositó, cuánto se vendió y cuánto quedó?

277. Un vendedor de semillas vendió 18 hectólitros $\frac{3}{4}$ de maíz, 20 hectólitros $\frac{5}{8}$ de frijol; después $14\frac{5}{12}$ de maíz y $50\frac{3}{15}$ de frijol; de 1(0 hectólitros que tiene de cada semilla ¿cuánto le queda?

278. Un correo que va á caminar 80 leguas ha recorrido á pie la $\frac{1}{15}$ parte, á caballo 7 leguas $\frac{9}{11}$, en bicicleta $2\frac{3}{5}$ y el resto en ferrocarril, ¿cuántas leguas caminará en el tren?

279. Un filántropo repartió 100 pesos entre cuatro pobres: al primero le dió $10\frac{3}{4}$ pesos, al segundo $2\frac{3}{8}$ pesos más que al primero, al tercero $3\frac{2}{5}$ menos que al segundo y al cuarto el resto, ¿cuánto le tocó á cada uno?

280. Un obrero que debe trabajar $6\frac{1}{2}$ horas diarias, durante una semana, sólo ha trabajado dos días $3\frac{1}{2}$ horas, otros dos días $4\frac{3}{4}$ horas, y los tres días restantes $5\frac{2}{5}$ horas, ¿cuántas horas ha dejado de trabajar?

281. Una fuente puede llenar en 8 horas un depósito de agua ¿qué parte del depósito llenará en 1 hora otra fuente que da 3 veces menos cantidad de agua que la primera?

282. Uu trabajador puede hacer en una hora los $\frac{7}{8}$ de una obra; otro obrero no puede hacer más que los $\frac{3}{4}$ de lo que hace el primero, ¿qué parte de la obra hará este último en 1 hora?

283. ¿Cuáles son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{9}$ de $85\frac{3}{4}$ pesos?

284 Debiéndose pagar por una construcción 5,097 pesos, ¿qué tanto deberá pagarse por los $\frac{15}{31}$ de dicha construcción?

285. ¿Qué suma de dinero harán los $\frac{3}{5}$ de 50 pesos, con los $\frac{3}{4}$ y los $\frac{8}{11}$ de la misma cantidad?

286. Un viajero ha caminado en una hora 1 legua y $\frac{3}{4}$, ¿qué tanto podrá caminar en $20\frac{1}{2}$ horas?

287. ¿Cuánto se deberá pagar en $\frac{7}{8}$ de día á un jornalero que gana $62\frac{1}{2}$ centavos diarios?

288. ¿Qué cantidad de dinero se necesitará para repartir $\frac{4}{5}$ de peso á 25 personas?

289. Sabiendo que $4\frac{1}{2}$ metros de género han costado $16\frac{3}{8}$ pesos ¿cuánto costarán $12\frac{3}{4}$ metros de la misma tela?

290. ¿Cuál será el importe de 4 kilogramos y $\frac{2}{5}$ de kilogramo de azucar á razón de 3 pesos $\frac{1}{4}$ el kilogramo?

291. Se desea saber ¿qué tanto será la $\frac{1}{2}$ de las $\frac{2}{3}$ partes de $\frac{4}{5}$ de un peso?

292. ¿Qué número de horas serán los $\frac{3}{4}$ de la $\frac{1}{2}$ de un día de 24 horas?

293. La temperatura del hombre es de 37 grados del termómetro centígrado ¿á cuántos grados del termómetro Réaumur equivaldrán, sabiendo que 100 grados centígrados equivalen á 80 Réaumur?

294. Una persona cambió 8 quintales de café por cierto número de metros de casimir, dando por cada $\frac{1}{4}$ de metro de tela $11\frac{3}{8}$ libras de café; y como vendió el casimir á $5\frac{7}{8}$ pesos el metro, se desea saber ¿cuántos metros de casimir cambió y cuánto le costaron?

295. Se desea repartir $\frac{7}{8}$ de kilogramo de dulce entre 4 niños, ¿cuánto le toca á cada uno?

296. Una sociedad de hombres y mujeres ha gastado cierta cantidad de dinero, de la cual sólo los hombres han pagado las $\frac{3}{4}$ partes y han dado 50 pesos, ¿cuál es el gasto total?

297. Por $27\frac{1}{2}$ kilogramos de cacao se han dado $14\frac{3}{4}$ pesos, ¿á cómo sale el kilogramo?

298. Un obrero hizo de una obra los $\frac{5}{6}$, por lo cual le pagaron 120 pesos ¿cuál será el importe de toda la obra?

299. Los $\frac{4}{5}$ de los $\frac{7}{8}$ de una cantidad son 50 pesos ¿cuál será la cantidad?

300. Una rueda movida por vapor da 9,500 vueltas en $1\frac{3}{4}$ de hora ¿cuántas vueltas dará en 1 hora?

301. Qince y medio centavos cuesta el metro de percal, ¿cuánto costarán 20 metros 2 tercios?

302. Medio kilogramo de hielo vale 2 centavos ¿cuál es el precio de una tonelada?

303. El hectólitro de maíz vale $10\frac{3}{4}$ pesos ¿cuál será el precio de un litro?

304. Se desea saber el precio de un miriágramo sabiendo que $\frac{3}{8}$ de kilogramo valen $\frac{3}{5}$ de pesos?

305. ¿Cual será el número cuyas $\frac{5}{8}$ partes suman 40?

306. ¿Cuántos pedazos de género de $\frac{4}{7}$ de metro se necesitarán para formar un lienzo de $8\frac{1}{2}$ metros?

307. Un artesano ejecutó los $\frac{4}{15}$ de su trabajo en las $\frac{2}{3}$ partes de un día, ¿cuánto tiempo se dilatará en concluirlo?

308 Un albañil recibió por trabajar las $\frac{7}{18}$ partes de un día, $\frac{2}{3}$ de peso, ¿cuánto gana diario?

309. ¿Cuántos litros de maíz podré comprar con $10\frac{1}{2}$ pesos á razón de $\frac{3}{5}$ de peseta el litro?

310. Se trata de repartir entre cuatro niños $25\frac{3}{4}$ cuadernos de papel, de manera que al primero le toque la sexta parte, al segundo la cuarta, y al tercero y al cuarto por partes iguales, ¿cuánto le tocó á cada uno?

311. Comprando 14 piezas de calicot á $10\frac{3}{8}$ pesos la pieza y pagando $30\frac{3}{9}$ pesos ¿cuánto se debe?

312. Una diligencia sale de una ciudad á las $6\frac{1}{4}$ de la mañana y llega á otra población á las $9\frac{3}{4}$ de la noche, ¿qué tiempo empleó en el camino?

313. Un padre al morir dejó repartidos sus bienes del modo siguiente: á Luis las $\frac{3}{5}$ partes, á Enrique las $\frac{4}{7}$ partes á Lola 1,800 pesos y á la beneficencia el resto, ¿cuánto sumaba la herencia y qué cantidad le tocó á cada heredero?

314. ¿Cual será la suma de las siguientes fracciones de metro: $\frac{3}{4}$, más $\frac{4}{5}$, más $\frac{8}{9}$, más $\frac{7}{16}$?

315. Buscar la suma de $\frac{1}{2}$, más $\frac{2}{3}$, más $\frac{5}{6}$, más $\frac{3}{7}$, más $\frac{7}{8}$ de litro.

316. Hacer la suma de $\frac{5}{12}$, más $\frac{7}{15}$, más $\frac{9}{25}$, más $\frac{13}{15}$, más $\frac{13}{26}$, de kilogramo.

317. ¿Cuál será la suma de los siguientes números mixtos: $8\frac{1}{16}$, más $7\frac{3}{16}$, más $12\frac{4}{5}$, más $17\frac{4}{9}$, más $9\frac{5}{14}$, de metro cuadrado?

318. Hacer la suma de $5\frac{4}{5}$, más $7\frac{3}{10}$, más $9\frac{4}{11}$, más $12\frac{3}{16}$, más $15\frac{7}{17}$, más $14\frac{5}{21}$ de metro cubico.

319. Hacer la suma de $9\frac{3}{14}$, más $15\frac{4}{25}$, más $30\frac{4}{31}$, más $13\frac{5}{27}$, más $14\frac{5}{28}$ de litro.

320. ¿Cuál será la diferencia entre $\frac{5}{27}$ y $\frac{13}{31}$ de una resma de papel?

321. Restar de $\frac{5}{18}$ de grado $\frac{8}{41}$.

322. Restar de 17 metros $\frac{8}{9}$ de metro.

323. Restar de 43 kilogramos $\frac{8}{17}$ de kilogramo.

324. Restar de 21 litros $\frac{17}{41}$ de litro.

325. Restar de $7\frac{2}{9}$ de resma $4\frac{5}{8}$.
326. Restar de $14\frac{3}{7}$ de día $5\frac{8}{11}$.
327. Restar de $15\frac{4}{31}$ de grado $12\frac{3}{13}$.
328. Sabiendo que 1 metro de tela cuesta $\frac{7}{13}$ de peso. se desea saber ¿cuánto costarán 17 metros?
329. Sabiendo que un litro de vino vale $\frac{12}{17}$ de peso, ¿cuánto valdrán 25 litros?
330. Sabiendo que 1 kilogramo de azucar vale $\frac{5}{6}$ de peso, se desea saber el valor de 49 kilogramos.
331. El cuaderno de papel cuesta $\frac{1}{5}$ de peso, ¿cuánto costarán $\frac{4}{5}$ de cuaderno?
332. El metro de una tela cuesta $\frac{8}{9}$ de peso ¿cuánto costarán $\frac{11}{12}$ de metro?
333. Un jornalero gana al día $\frac{6}{8}$ de peso, ¿cuánto ganará en $\frac{5}{17}$ de dia?
334. ¿Cuál será el precio de $18\frac{3}{5}$ metros de paño á $9\frac{3}{8}$ pesos el metro?
335. Buscar el precio de $41\frac{3}{7}$ kilogramos de jabón á $21\frac{4}{9}$ centavos el kilogramo.
336. Determinar el precio de $28\frac{4}{5}$ resmas de papel á razón de $6\frac{3}{7}$ pesos cada resma.
337. Repartir $\frac{8}{9}$ de kilogramo de dulces entre 7 niños, ¿cuánto le toca á cada uno?
338. Distribuir $\frac{7}{8}$ de mano de papel entre 9 personas, ¿cuánto le toca á cada una?
339. ¿Cuál será el cociente de dividir $\frac{11}{12}$ de metro cuadrado de tela de salud en 10 partes iguales.
340. Sabiendo que $\frac{8}{11}$ de metro de cierta tela han costado 12 pesos, se desea saber ¿cuál será el precio de 1 metro?
341. ¿Cuál será el precio de 1 kilogramo de café sabiendo que $\frac{5}{6}$ de kilogramo han costado 40 centavos?
342. ¿Cuál será el jornal de un obrero al día sabiendo que por $\frac{3}{5}$ de dia le han pagado 60 centavos?
343. Un artesano para ganar $\frac{5}{8}$ de peso necesita trabajar $\frac{5}{6}$ de hora, para ganar 1 peso ¿qué tiempo necesitará trabajar?
344. ¿Cuál será el precio del kilogramo de café sabiendo que $\frac{3}{4}$ de kilogramo han costado $\frac{5}{8}$ de peso?
345. ¿Cuál será el precio del litro de vino sabiendo que $\frac{5}{7}$ de litro han costado $\frac{2}{3}$ de peso?

346. Una persona ha comprado $4\frac{5}{9}$ metros de género en $22\frac{5}{16}$ pesos ¿cuál será el precio de 1 metro?

347. ¿Cuál será el precio de una resma de papel sabiendo que $8\frac{3}{5}$ resmas han costado $40\frac{2}{3}$ pesos?

348. Un obrero ha ganado $18\frac{4}{9}$ pesos en $22\frac{3}{4}$ días ¿cuánto ha ganado en un día?

349 Suponiendo que en un ejercito la caballería sea la sexta parte de la infantería y la artillería igual á la décima parte de la misma infantería, ¿á qué parte de la infantería equivaldrán la caballería y la artillería reunidas?

350. Cuatro fuentes derraman juntas en un receptáculo; la primera podría llenarlo en 15 horas, la segunda en 20, la tercera en 25 y la cuarta en 30; ¿qué parte del receptáculo llenarán en una hora?

351. Dos correos parten al mismo tiempo de dos ciudades diferentes y tienen que encontrarse en un punto determinado; el primero podría recorrer la distancia en 12 días y el segundo en 10, ¿qué parte de la distancia habrán recorrido en un día?

352. Tres obreros trabajan en una obra; el primero la haría en 15 días, el segundo en 20 y el tercero en 30, ¿qué parte de la obra harían en 1 día si trabajasen todos juntos?

353. Se ha dividido el número 514 en dos partes: la primera es $118\frac{3}{7}$ ¿cuál será la segunda?

354. La suma de dos números es $14\frac{5}{8}$, uno de ellos es $4\frac{3}{8}$ ¿cuál será el otro?

355. Una fuente llenaría sola en 4 horas un receptáculo que desaguando por una válvula quedaría vacía en 6 horas; al cabo de 1 hora qué parte del receptáculo estaría lleno si la fuente y la válvula se hubiesen destapado al mismo tiempo?

356. Debiéndose pagar 532 pesos por una obra, se desea saber ¿cuánto se pagará por los $\frac{14}{17}$ de dicha obra?

357. Una fuente puede llenar un depósito en 10 horas, ?qué parte del depósito llenará en 1 hora otra fuente que fluye 4 veces menor cantidad de agua que la primera?

358. ¿Cuál será el número que multiplicado por $4\frac{1}{2}$ da por producto 47?

359. Se ha disuelto un kilogramo de sal en una cubeta llena de agua; se vacía $\frac{1}{2}$ cubeta y se vuelve á llenar; en seguida se vacía $\frac{1}{3}$ de cubeta y se vuelve á llenar; por último

se vacían $\frac{3}{4}$ de cubeta; ¿qué cantidad de sal quedaría en disolución después de las operaciones anteriores?

360. Observar el reloj: 1º ¿qué hora es cuando las dos manecillas están una sobre otra entre 3 y 4 y entre 10 y 11? 2º ¿qué hora es cuando las dos manecillas están en línea recta entre 4 y 5? 3º Después de estar las manecillas una encima de otra ¿al cabo de qué tiempo volverán á juntarse?

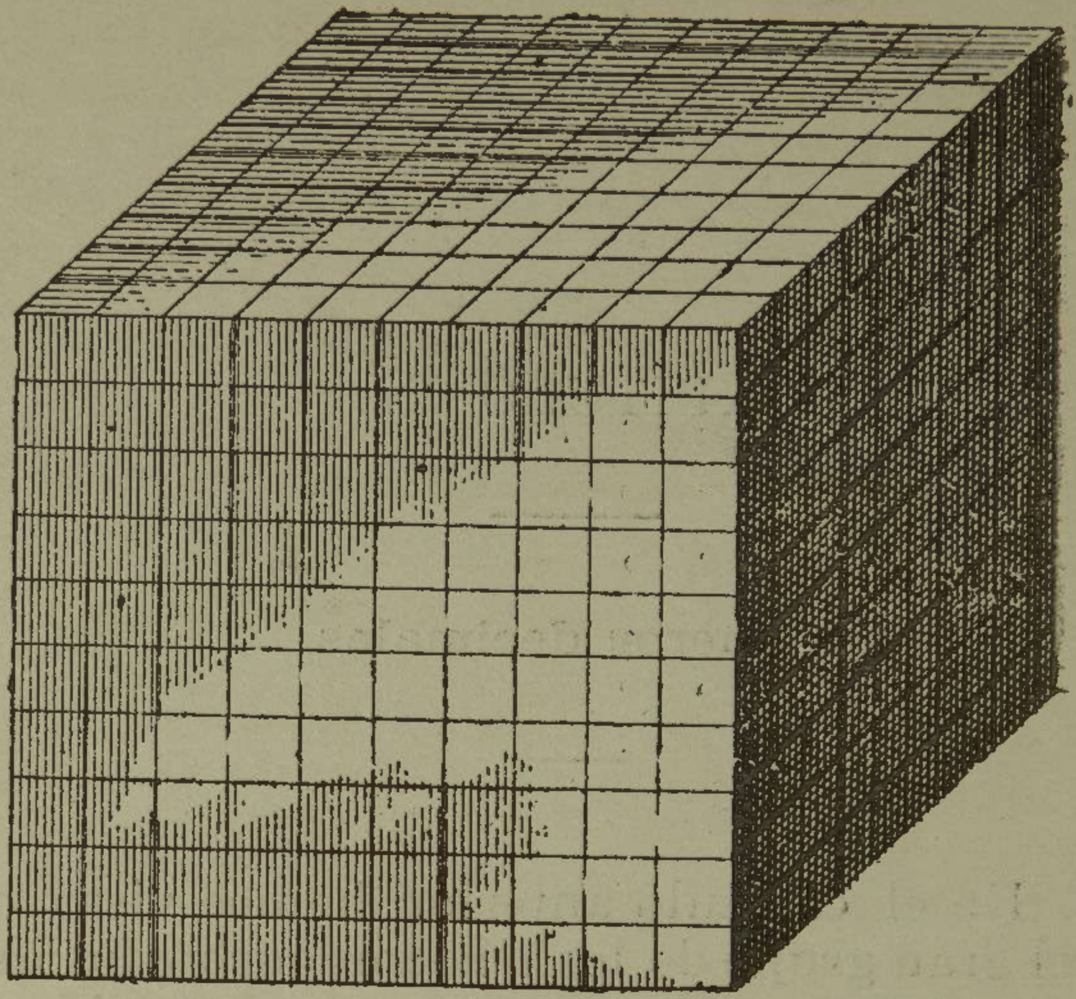
CAPITULO XI.

Números decimales.

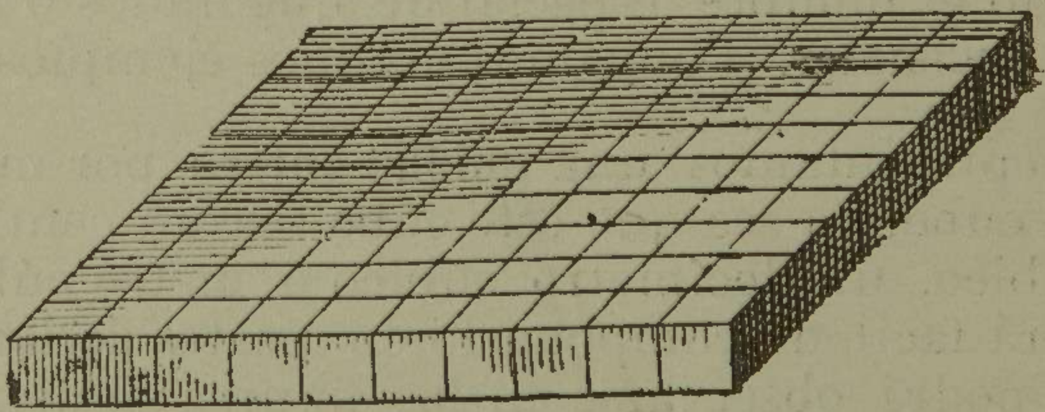
172. En el capítulo anterior hemos visto que entre el gran grupo de los **números quebrados** existe un grupo pequeño, sumamente reducido, de quebrados también, pero que tienen la particularidad de que la unidad se divide solamente en **diez, cien, mil**, etc. partes iguales, y de aquí han recibido el nombre especial de quebrados ó **fracciones decimales.** Pongamos algunos ejemplos.

Si representamos una **unidad entera** por medio de un cubo, ya sea que este cubo sea un centímetro cúbico, un decímetro cúbico ó metro cúbico, nos será facil descomponerlo en partes **decimales,** según podrá observarse en las figuras siguientes:

La primera figura ó **cubo** nos representa la **unidad entera** que podremos descomponer en diez partes iguales, á las cuales les llamaremos desde luego **décimas,** y separándolas unas de otras ten-

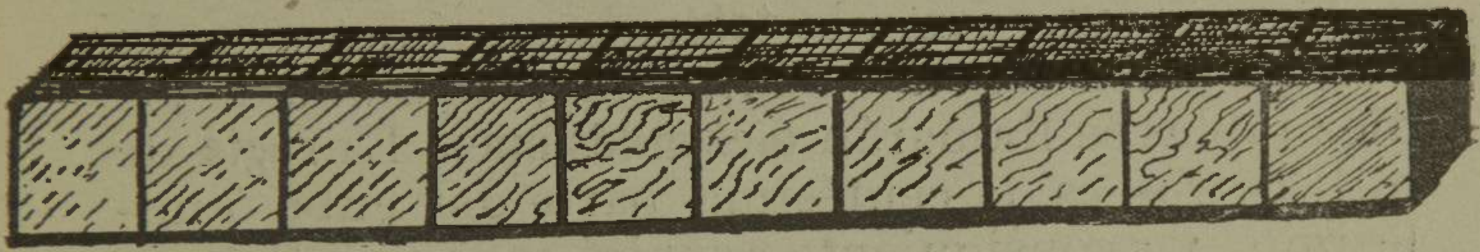


drán exactamente la forma de una **tabla.** He aquí la figura correspondiente.



Cada **tabla ó décima** se puede también descomponer en **diez partes** iguales; pero como son **diez** tablas las que forman la **unidad entera**, tendremos $10 \times 10 = 100$ partes iguales que llamaremos cen-

tésimas, y separándolas unas de otras en la segunda figura, nos resultará exactamente cada parte en la forma de una **regla**, la cual podremos representar en su tamaño natural, suponiendo que el cubo primitivo elegido por **unidad entera** hubiera sido un decímetro cúbico. He aquí la figura correspondiente:



Cada **regla** ó **centésima** se puede descomponer en **diez** partes iguales; pero como son **diez** reglas las que forman la **tabla** ó décima, tendremos: $10 \times 10 \times 10 = 1000$ partes iguales que llamaremos **milésimas**, y separándolas unas de otras en la tercera figura, nos resultará exactamente cada parte en la forma de un **cubo** el cual podremos representar en su tamaño natural que será la de un centímetro cúbico. He aquí la figura correspondiente.

173. De las observaciones anteriores podemos inferir que las **décimas** se pueden representar con **tablas**, las **centésimas** con **reglas** y las **milésimas** con **cubos**.

Pero si quisiéramos continuar descomponiendo el último cubo ó **milésimo** resultarían nuevamente otras **fracciones decimales** mucho más pequeñas que las anteriores, que podríamos representar del modo siguiente:

Supuesto que el milésimo lo hemos representado **convencionalmente** por un centímetro cúbico, las diez **tablas** en que se descomponga tendrán la forma de centímetros cuadrados en su superficie y un milímetro de grueso. Las diez **reglas** en que se descomponga cada tabla medirán un centímetro de largo y un milímetro de grueso. Finalmente, los diez **cubos** en que se descomponga cada regla tendrán exactamente la forma de un milímetro cúbico.

Ahora bien, como la **tabla** de milímetros es la décima parte del cubo ó milésimo, cada una de las diez tablas se llamarán **diez milésimas.** La **regla** de milímetros es la centésima parte del cubo ó milésimo, por consiguiente recibirá cada una el nombre de **cien milésimos.** El cubo del tamaño de un milímetro cúbico es la milésima parte del cubo ó centímetro cúbico, luego recibirá el nombre de mil milésimos ó **millonésimos.**

174. Del mismo modo que hemos formado las **fracciones decimales** anteriores, se podrán seguir formando las siguientes, cada vez más pequeñas: **diez millonésimos** (tabla), **cien millonésimos** (regla), **mil millonésimos** (cubo), y continuando más adelante tendríamos los **diez mil millonésimos** (tabla), **cien mil millonésimos** (regla) y **billonésimos** (cubo), y así sucesivamente.

175. Los números decimales no solamente pueden representarse **objetivamente** con tablas, reglas y cubos; pueden también representarse por medio de **tiras de papel** dobladas en 10, 100, 1000, etc. partes iguales que llevarían respectivamente cada fracción de tira los nombres de **décimos, centécimos, milesímos,** etc.

Podrían también representarse **gráficamente** por medio de **líneas rectas** divididas y subdivididas en

10, 100, 1000, etc, partes iguales ó bien por medio de **círculos** divididos y subdivididos también en partes iguales por medio de radios, según lo vimos al tratarse de los **quebrados comunes.**

176. Así como al estudiar el sistema de **numeración hablada** en su forma **ascendente** dimos á cada grupo de números según sus distintos valores un nombre especial: unidades, decenas, centenas, millares, etc., así también podremos hacer ahora que nos ocupamos de estudiar la misma **numeración hablada** en su forma **descendente,** daremos también un nombre especial, según sus valores á cada grupo de los nuevos números menores que la **unidad entera** y que hemos llamado **números decimales.**

Pero para no confundir los números **enteros** con los **decimales** y supuesto que los primeros forman la numeración **ascendente** y los segundos la numeración **descendente,** los distinguiremos fácilmente llamando **sub-órdenes** á los décimos, centésimos, milésimos, diez milésimos, etc., etc., **sub-clases** á cada grupo de tres sub-órdenes que estén formados de las mismas unidades y sub-géneros á la reunión de dos sub-clases sucesivas formadas de seis sub-órdenes y que hemos dado los nombres de millonésimas, billonésimas, trillonésimas, etc., etc.

He aquí el cuadro correspondiente:

I. Sub-órdenes	1º décimos, 2º centésimos, 3º milésimos, 4º diez milésimos, 5º cienmilésimos, 6º millonésimos, 7º diez millonésimos, 8º cien millonésimos, 9º mil millonésimos, etc., etc.

II. Sub-clases. { 1º unidades, 2º milésimos, 3º millonésimos, 4º mil millonésimos, 5º billonésimos, 6º mil billonésimos, etc., etc.

III. Sub-géneros. { 1º millonésimos.
2º billonésimos.
3º trillonésimos, etc., etc.

177. Para representar por escrito los números **decimales** se emplean las mismas **cifras** que hemos usado para representar los numeros enteros y los quebrados. Pongamos algunos ejemplos de números decimales.

Representar con cifras: **ocho décimos** de peso; **veintisiete centésimos** de metro, **ciento noventa y cuatro** milésimos de litro.

I. El primer modo que se ocurre para hacer la representación pedida, sería escribir las **cifras** y á continuación el nombre de la **especie** de unidades decimales.

8 décimos 27 centésimos

194 milésimos.

II. El segundo modo puede ser la forma de quebrados comunes, aceptando como numerador el número de las unidades tomadas, y como denominador el conjunto de unidades decimales en que se dividió la unidad entera que tendrá que ser forzosamente la unidad seguida de ceros, de este modo.

$$\frac{8}{10} \quad \frac{27}{100} \quad \frac{194}{1000}$$

III. El tercer modo consiste en suprimir el nombre de la **especie** decimal y el **denominador;** pero como en este caso se podrían **confundir** los enteros con los decimales, se convino en **separar** unos de otros por medio de una **coma invertida,** con la condición de que los enteros, los haya ó no, se han de representar **siempre** ó con cifras significativas ó por medio de un **cero.**

De manera que los ejemplos anteriores se escribirían así:

0‘8 0‘27 0‘194

178. De este último modo de representar por escrito los números decimales, se infiere que su escritura está sujeta enteramente á las mismas **convenciones** de la numeración entera, y para convencernos de ello, vamos á examinar el siguiente cuadro:

Unidades.	Décimas.	Centésimas.	Milésimas.	Diez milésimas.	Cien milésimas.	Millonésimas.	Diez millonésimas	Cien millonésimas	Mil millonésimas.
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$	$\frac{1}{10\,000\,000}$	$\frac{1}{100\,000\,000}$	$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$
1									
	1								
		1							
			1						
				1					
					1				
						1			
							1		
								1	
									1

(*a*) En la parte superior está escrito en primer lugar el nombre del primer orden de los enteros llamado las **unidades** y en seguida los nombres de los **sub-órdenes** de los decimales: **décimas, centésimas, milésimas, etc.**

(*b*) Abajo de los nombres de los **órdenes** y **sub-órdenes** estan representados con cifras y en forma de **quebrados comunes** los mismos decimales.

(*c*) El primer **1** colocado en el cuadro á la izquierda vale **uno**, el segundo **1** de la derecha vale **un décimo**; el tecer **1** vale **un centésimo**, el cuarto un milésimo, el quinto **un diezmilésimo**, el sexto **un cienmilésimo**, el séptimo **un millonésimo, el octavo un diez milionésimo**, el noveno **un cien millonésimo** y el décimo **un mil millonésimo.**

(*d*) Del mismo modo que se ha escrito el número **uno** podría escribirse el **dos**, y el **tres**, etc. ó **ninguno** y en tal caso quedaría el cuadro **vacío**, y si no había cuadro, entonces se ocuparía el lugar con un **cero**.

(*e*) Los números decimales escritos dentro del cuadro se representarán fuera del cuadro y empleando la coma decimal del modo siguiente:

Un décimo...............	0'1
Un centésimo...........	0'01
Un milésimo............	0'001
Un diez milésimo.......	0'000 1
Un cien milésimo.......	0'000 01
Un millonésimo.........	0'000 001
Un diez millonésimo...	0'000 000 1
Un cien millonésimo...	0'000 000 01
Un mil millonésimo...	0'000 000 001

179. Como ejercicios para la **escritura** de los números decimales vamos á examinar los ejemplos siguientes:

(*a*) **Cinco enteros treinta y nueve milésimos.**

Este número consta de dos partes: la parte entera que se representará con el número 5 y la coma, y la parte decimal con el 39; pero como los milésimos ocupan tres lugares y sólo hay dos cifras, quedará vacío el lugar de los decímos y por lo mismo se cubrirá con un cero. He aquí el resultado:

5'039.

(*b*) **Veinticinco enteros setecientas cuatro cien milésimas.**

La parte entera está representada por el número 25 y la parte decimal por el número 704; pero como los cien milésimos ocupan cinco lugares y sólo hay tres cifras, habrá que agregar dos ceros á la izquierda para sustituir á las décimas y centésimas que faltan. He aquí el resultado:

25'00704.

(*c*) **Noventa y tres millonésimas.**

No hay parte entera; hay que representarla con un cero, y la parte decimal con el número 93 precedido de cuatro ceros porque los millonésimos ocupan seis lugares. He aquí el resultado:

0'000093.

Para **escribir** un número decimal se escribirá primero la parte entera seguida de una coma invertida, á continuación se escribirá la parte decimal de manera que el primer lugar lo ocupen las décimas, el segundo las centésimas, el tercero las milésimas, etc.

180. Vamos á examinar ahora algunos ejemplos escritos de números decimales con el fin de poder ejercitarnos en su **lectura**.

(*a*) 25'003045.

La primera parte que representa los enteros se leerá así: **veinticinco enteros**, y la segunda parte decimal que ocupa seis lugares se leerá así: **tres mil cuarenta y cinco millonésimas.**

(*b*) 5'000000097.

La parte entera dice así: **cinco enteros**; la parte decimal ocupa nueve lugares, se leerá así: **noventa y siete mil millonésimas.**

(*c*) 0'0007.

Como no hay enteros se podrá decir solamente **siete diez milésimos**; pero para mayor claridad podrían agregarse antes estas palabras: **cero enteros.**

Para **leer** un número decimal se enuncia primero la parte entera, en seguida se lee la parte decimal como si fuera entera, teniendo cuidado de nombrar al fin el orden de la última subdivisión decimal.

181. Siendo la **coma** el signo que separa los números enteros de los números decimales, es evidente que un número formado de enteros y deci-

males tendrá siempre un valor **constante**; pero si se cambia de lugar la coma, entonces el valor del número se hará **variable**. Pongamos algunos ejemplos:

Sea el número decimal 234‘57450.

(*a*) Cambiando la coma un lugar hacia la **derecha**, quedará así: 2345‘7450.

Es decir, ha **aumentado** de valor, porque se ha **multiplicado** por diez.

(*b*) Cambiando la coma un lugar hacia la **izquierda** quedará así: 23‘457450.

Es decir: ha **disminuido** de valor, porque se ha **dividido** por diez.

(*c*) Dejando la coma en su lugar; pero aumentando un cero á la derecha de la parte decimal quedará así: 234‘574500: es decir, ni **aumenta** ni **disminuye** de valor, porque ni se ha **multiplicado**, ni se ha **dividido**, lo único que ha pasado es que se ha reducido á una especie **menor**; los cien milésimos se convirtieron en millonésimos.

Igual fenómeno se efectuaría si se le **quitara** un cero de la derecha, no cambiaría tampoco de valor, porque los cien milésimos, quedarían convertidos solamente en diez milésimos, de esta manera:

$$234‘57450 = 234‘5745$$

Estas tres observaciones pueden resumirse de un modo general como sigue:

1ª Cambiando la coma un lugar, dos, tres, etc., hacia la **derecha**, el número decimal se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor.

2ª Cambiando la coma un lugar, dos, tres, etc, hacía la **izquierda,** el número decimal se hace diez, cien, mil, etc, veces **menor.**

3ª Dejando la coma en su lugar aunque se agreguen ó quiten ceros á la derecha el número decimal **no se altera.**

182. Hagamos algunas aplicaciones de la tercera propiedad.

(*a*) Reducir á milésimos los números decimales 0'4 y 0'032; se agregarán á la derecha ceros al que tiene menos decimales, de este modo 0'400 y 0'032.

(*b*) Reducir á centésimos los números decimales 0'34 y 0'8000, se quitarán ceros de la derecha al que tiene más decimales, de este modo: 0'34 y 0'80.

De estos dos ejemplos se infiere: que dos ó más números decimales se pueden **reducir á una especie común, agregando** ceros á la derecha á los que tengan menos decimales, ó bien **quitando** ceros á los que los tengan de más á la derecha y se quiera **simplificarlos.**

183. ¿Es posible establecer algunas relaciones entre los quebrados comunes y los decimales y viceversa? Hagamos algunas observaciones.

(*a*) Sea el quebrado común $\frac{1}{2}$. Para transformarlo en decimal habría que cambiar el denominador 2 en 10, 100, 1000, etc., lo cual es muy fácil, porque todos los números formados con la unidad seguida de ceros tienen **mitad exacta.**

En efecto, si **dos medios** equivalen á **diez décimos,** 1 medio equivaldrá á 5 décimos.

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0‘5$$

(*b*) Sea el quebrado común $\frac{1}{4}$. El denominador 4 es submúltiplo de 100; luego los **cuartos** se podrán transformar en **centésimos** exactamente.

En efecto, si **cuatro cuartos** equivalen á **cien centésimos,** 1 cuarto equivaldrá á la cuarta parte de cien ó sean 25 centésimos.

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0'25$$

(*c*) Sea el quebrado común $\frac{1}{8}$. Sabemos que 1000 es múltiplo de 8, luego los **octavos** podremos transformarlos en **milésimos** exactamente.

En efecto, si **ocho octavos** equivalen á **mil milésimos,** 1 octavo equivaldrá á la octava parte de mil ó sean 125 milésimos.

$$\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0'125$$

En estos tres ejemplos se observa lo siguiente:

I. El denominador de los quebrados es 2 ó una de sus potencias 2^2, 2^3, etc.

II. Siendo el denominador de los quebrados 2 ó alguna de sus potencias 2^2, 2^3, etc., la decimal es exacta.

III. El 2 como denominador de un quebrado produce en su **primera** potencia **una** decimal, en su **segunda** potencia **dos** decimales, en su **tercera** potencia **tres** decimales.

184. Hemos convertido fácilmente los medios, los cuartos, los octavos, etc., á décimos, centésimos, milésimos, etc., porque los números 10, 100, 1000, etc. son múltiplos exactos de 2, 4, 8, etc.;

luego otro número que no esté contenido exactamente como factor en los mismos números diez, cien, mil, etc., no podrá dar una decimal exacta.

En efecto, el **3** y todos sus múltiplos están fuera del sistema de numeración decimal, luego los **tercios** no pueden reducirse á décimos, centésimos, etc., lo mismo los **novenos, veintisieteavos**, y en general el 3 y sus potencias 3^2, 3^3, 3^4, no podrán nunca dar una decimal exacta.

185. No pasa lo mismo tratándose del número **5** que es submúltiplo exacto de 10, 100, 1000, etc.; luego los **quintos** sí podrán transformarse fácilmente en décimos, centésimos, milésimos, etc.

En efecto, si **cinco quintos** equivalen á **diez décimos**, 1 quinto equivaldrá á la quinta parte de diez ó sean 2 décimos.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0‘2$$

Observemos el denominador 5 en su segunda potencia. Si **veinticinco veinticincoavos** equivalen **á cien centésimos**, 1 veinticincoavo equivaldrá á la veinticincoava parte de cien ó sean 4 centésimos.

$$\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0‘04$$

Véamos el 5 como denominador en su tercera potencia. Si **ciento veinticinco ciento veinticincoavos** equivalen á **mil milésimos**, 1 ciento veinticincoavo equivaldrá á la ciento veinticincoava parte de mil ó sean 8 milésimos.

$$\frac{1}{125} = \frac{8}{1000} = 0'008$$

Se observa en los tres nuevos ejemplos con el denominador **5** los mismos fenómenos que observamos con el denominador **2**, es decir, que siendo 5 ó una de sus potencias 5^2, 5^3, etc. el denominador de un quebrado, produce decimal exacta; en la primera potencia con una cifra, en la segunda con dos y en la tercera con tres.

186. Sería inutil continuar observando otros quebrados que tengan denominadores distintos del 2 y el 5 en sus diversas potencias, para encontrar decimales exactas, supuesto que el 10, el 100, el 1000, etc. que indican las partes decimales en que la unidad se divide, no contienen ni pueden contener exactamente otros factores distintos. En efecto, si los descomponemos en sus factores primos, obtendremos los siguientes resultados:

$$10 = 2 \times 5$$
$$100 = 2^2 \times 5^2$$
$$1000 = 2^3 \times 5^3$$
$$10000 = 2^4 \times 5^4$$
$$100000 = 2^5 \times 5^5, \text{ etc., etc.}$$

Se ve que en la serie infinita de los números primos, con excepción del **2** y el **5**, no hay otro número primo que esté contenido exactamente como factor en ninguno de los números decimales, que son precisamente los que tienen como denominador tácito la unidad seguida de ceros.

187. Para determinar con toda claridad las condiciones que debe tener un **quebrado** común para transformarse **exactamenle** en **decimal,** obsérvemos bien el siguiente cuadro:

I.	II.
$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0{'}5$	$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0{'}2$
$\frac{1}{2^2}=\frac{25}{100}=0{'}25$	$\frac{1}{5^2}=\frac{4}{100}=0{'}04$
$\frac{1}{2^3}=\frac{125}{1000}=0{'}125$	$\frac{1}{5^3}=\frac{16}{1000}=0{'}016$
$\frac{1}{2^4}=\frac{625}{10000}=0{'}0625$	$\frac{1}{5^4}=\frac{64}{10000}=0{'}0064$

III.	IV.
$\frac{1}{2\times5}=\frac{1}{10}=0{'}1$	$\frac{1}{2\times5^2}=\frac{1}{50}=\frac{2}{100}=0{\cdot}02$
$\frac{1}{2^2\times5^2}=\frac{1}{100}=0{'}01$	$\frac{1}{2^2\times5}=\frac{1}{20}=\frac{5}{100}=0{'}05$
$\frac{1}{2^3\times5^3}=\frac{1}{1000}=0{'}001$	$\frac{1}{2^3\times5}=\frac{1}{40}=\frac{25}{1000}=0{'}025$
$\frac{1}{2^4\times2^4}=\frac{1}{10000}=0{'}0001$	$\frac{1}{2^3\times5^2}=\frac{1}{200}=\frac{5}{1000}=0{'}005$

En este cuadro general se **nota** que los quebrados comunes elegidos, ya no pueden **simplificarse,** es decir, ya no pueden transformarse en números más pequeños sus dos términos.

Y este requisito de la **simplificación** previa es necesario para no incurrir en errores.

$$\frac{15}{30} = \frac{3\times5}{2\times3\times5} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0‘5$$

En este ejemplo, el denominador contiene un **3** y sin embargo la decimal es exacta; pero obsérvese que al simplificar dicho qebrado el 3 desaparece y sólo quedan el 2 y el 5, de lo que resulta su exactitud en la decimal correspondiente.

Se observa además en la serie de ejemplos anteriores, que el número de cifras decimales de que se forma cada decimal está determinado por el número de unidades que tiene el exponente del 2 ó del 5.

De todo le expuesto podemos inferir que:

Una fracción **común** se convierte **exactamente** en **decimal**, cuando después de haber sido **simplificada** solo queda en su denominador un **2** ó un **5** ó ambos números **multiplicados** y elevados á cualquiera potencia, y el número de decimales ha de ser igual al número de unidades que tenga el mayor de los exponentes del 2 ó del 5.

188. Todas las reducciones de quebrados comunes en decimales dan lugar á la formación de problemas **combinados** según se verá por el siguiente ejemplo:

Enunciado. ¿A cuántos milésimos de kilogramo equivaldrán $\frac{7}{8}$ de kilogramo?

Análisis. (*a*) Parte **conocida:** 8 octavos equivalen á 1000 milésimos. (*b*) Parte **desconocida:** 7 octavos de kilogramo ¿cuántos milésimos serán? (*c*) Si ocho octavos equivalen á 1000 milesimos, 1 octavo será la octava parte de mil ó $1000 \div 8 = 125$

milésimos, **división**; y 7 octavos equivaldrán á 7 veces 125 ó sean $125 \times 7 = 875$ milésimos, **multiplicación.**

Solución. Según el análisis anterior el planteo y su desarrollo quedarán así:

$$\begin{array}{ccc} \text{Octavos.} & & \text{Milésimos.} \\ 8 & \text{———} & 1000 \\ 1 & \text{———} & \dfrac{1000}{8} \\ 7 & \text{———} & \dfrac{1000 \times 7}{8} \end{array}$$

$$x = \frac{1000 \times 7}{8} = \frac{7000}{8} = 875$$

milésimos de kilogramo. Luego:

$$\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = 0‘875$$

Se ve que el **numerador** 7 se **multiplicó** por 1000 ó se le agregaron tres ceros y el producto 7000 se **dividió** por el **denominador** 8. El cociente fue de 875 milésimos.

En la práctica se da la siguiente regla:

Para convertir un quebrado **común** en **decimal** se divide el numerador entre el denominador, agregándole sucesivamente al numerador tantos ceros cuantas decimales se desea tenga la decimal.

Esta regla es bien clara; si se reparten enteros y no alcanza, se pone **cero** al cociente, el residuo se reduce después á décimos, centésimos, milésimos, etc., y entonces ya alcanza y se obtiene un cociente decimal. He aquí cómo se disponen los cálculos:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0‘875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

189. La misma regla anterior se aplica cuando se trata de los numeros fraccionarios ó mayores que la unidad y se desea buscar la decimal del resíduo; á este problema combinado es á lo que generalmente se le llama **aproximación del cociente.** Veamos un caso.

Enunciado. Distribuir 14 pesos entre 4 niños, ¿cuánto le toca á cada uno?

Hecho el **análisis** correspondiente se llegará á esta **solución:**

$$x = \frac{14}{4}$$

Ejecutando la **división** tendríamos que buscar la decimal del resíduo ó sea la **aproximación del cociente.**

$$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 3‘5 \text{ pesos.} \\ 0 & \end{array}$$

A cada niño corresponden \$ 3,50 centavos, ó sea:

$$\frac{14}{4} = 3\frac{2}{4} = 3\frac{50}{100} = 3'50$$

De manera que cuando en la división hay resíduo se reducirá á décimos, centésimos, milésimos, etc., y se dividirán entre el divisor para completar el cociente.

190. El problema contrario, ó sea la conversión de un número **decimal** en número **quebrado**, afecta también la forma de un problema combinado. Véamos un ejemplo.

Enunciado. ¿A cuántos octavos equivale la decimal 0'625 milésimos?

Análisis. (*a*) **Parte conocida**: 1000 milésimos equivalen á 8 octavos. (*b*) Parte **desconocida:** 625 milésimos ¿á cuántos octavos equivaldrán? (*c*) 1 milésimo es la milésima parte de 8, **división,** y 625 milésimos serán seiscientas veinticinco veces 8 milésimos, **multiplicación.**

Solución. El planteo y desarrollo se harán así:

Milésimos.		Octavos.
1000	———	8
1	———	$\frac{8}{1000}$
625	———	$\frac{8\times625}{1000}$

$$x = \frac{8\times625}{1000} = \frac{5000}{1000} = 5 \text{ octavos}$$

En la práctica se omite el razomamiento anterior y el planteo se reduce á una **simplificación** solamente:

$$0'625 = \frac{625}{1000} = \frac{625 \div 125}{1000 \div 125} = \frac{5}{8}$$

De aquí se ha derivado la siguiente regla:

Para **convertir** un número **decimal exacto** en **quebrado común,** se le pondrá como numerador la parte decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantos decimales haya después de la coma, el quebrado que resulte se **simplificará** dividiendo sus dos términos por un mismo número.

191. Hemos examinado los casos de reducción de quebrados comunes que dan decimales **exactas,** véamos ahora los demás quebrados que dan lugar á decimales **inexactas.**

(*a*) Sea el quebrado común $\frac{1}{3}$. Operando obtendremos:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline 1 & 0'3\ldots\ldots \end{array} \qquad \tfrac{1}{3} = 0'3$$

Se repite indefinidamente la cifra *3*, es un **período** constante de **una** sola cifra.

(*b*) Sea el quebrado $\frac{1}{7}$. Tendremos:

$$\begin{array}{l|l} 10 & 7 \\ \hline 30 & 0{,}142857 \\ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array} \qquad \tfrac{1}{7} = 0'142857\ldots\ldots$$

Se repite indefinidamante el **período 142857** que constará siempre de **seis** cifras.

(*c*) Sea el quebrado común $\frac{7}{11}$. Tendremos:

$$\begin{array}{l|l} 70 & 11 \\ \cline{2-2} 40 & 0'63\ldots\ldots \\ 7 & \end{array} \qquad \frac{7}{11} = 0'63\ldots\ldots$$

Se repite indefinidamente el **período 63** que constará siempre de **dos** cifras.

En estos tres ejemplos se nota que los denominadores de los quebrados son números **primos** 3, 7, 11, etc., en su primera potencia, y al convertir los quebrados en sus decimales resultan períodos fijos de decimales; por esta razón se les ha llamado fracciones **periódicas.**

Se observa además en los períodos obtenidos que el número de cifras de que consta cada período es menor siempre que el número de unidades de que consta el número primo respectivo de que se forma el denominador.

Si los denominadores primos anteriores se elevaran á la segunda, tercera ó cuarta potencia se obtendría siempre una decimal periódica constante.

Véamos algunos ejempos:

$$\frac{1}{3^2} = 0'1\ldots \quad \frac{1}{3^3} = 0'037\ldots$$

$$\frac{1}{3\times7} = 0'047619\ldots\ldots$$

Se ve por los ejemplos propuestos, que para que un quebrado común produzca una fracción decimal **periódica**, es indispensable que después de simplificar dicho quebrado, el denominador sea un número **primo** que no sea submúltiplo de 10, ó bien un **producto** de esos mismos números primos elevados en uno ú otro caso á cualquiera potencia, y cuyo número de decimales será siempre menor que el número de unidades de que consta el denominador.

A estas fracciones decimales que producen un período que comienza **inmediatamente** después de la coma, se les llama **fracciones decimales periódicas simples.**

192. Las fracciones **periódicas simples** se pueden transformar también en **quebrados comunes;** pero no se les pone como denominador la unidad seguida de ceros, porque no siendo exactas, resultaría siempre **incompleto** su valor, y para **completarlo**, se **disminuye** el valor del denominador **aumentando** de ese modo el tamaño de las partes, según podremos observarlo en los siguientes fenómenos.

(*a*) $\frac{1}{9}$ es mayor que $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{99}$ es mayor que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{999}$ es mayor que $\frac{1}{1000}$, etc.; esto es evidente, porque sabemos que entre dos quebrados que tienen **iguales** sus numeradores será **mayor** el que tenga **menor** denominador.

(*b*) Si buscamos los decimales correspondientes á $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, etc., obtendremos los siguientes resultados que nos prueban que son decimales periódicas simples.

$$\frac{1}{9}=0‘1\ldots.\frac{1}{99}=0‘01\ldots.\frac{1}{999}=0‘001\ldots\ldots$$

(*c*) De estas igualdades se infiere que si 1 décimo (fracción periódica simple) equivale á la fracción común $\frac{1}{9}$, 2, 3, 4, etc. décimos de la misma especie, equivaldrán á $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$, etc. Lo mismo pasará con los centésimos que se obtengan en las fracciones periódicas: 0'34...por ejemplo, será igual á $\frac{34}{99}$, y en los milésimos 0'114. . . . será igual á $\frac{114}{999}$, etc.

He aquí otros ejemplos:

$$0'4.\ldots=\frac{4}{9},\ 0'23.\ldots=\frac{23}{99},\ 0'128\ldots=\frac{128}{999}$$

Para **convertir** una fracción **decimal periódica simple** en **quebrado común**, se considerará el período como numerador y se le pondrá como denominador tantos **nueves** como cifras tenga el período.

Aplicando esta regla en cada caso, se obtendrá en los cálculos mayor exactitud que si se aceptara como denominador la unidad seguida de ceros.

193. Hemos visto hasta ahora los quebrados comunes que después de simplificados tienen en su denominador como factores un 2 ó un 5 ó ambos números multiplicados entre sí y elevados á cualquiera potencia; la decimal que se obtiene de esos quebrados resulta **exacta**.

Otros quebrados después de simplificados hemos visto que en su denominador tienen uno ó más números primos como factores y que no son submúltiplos de 10; las decimales que se obtienen de esos quebrados son **periódicas simples**.

Pero hay además otros quebrados en los cuales después de simplificados, el denominador puede resultar formado á la vez con un submúltiplo de 10 y con otro número primo que no lo sea: un 2 y un 3; un 5 y un 3; un 2 y un 7; un 5 y un 7, etc. elevados á cualquiera potencia; y en estos casos las decimales no podrán ser ni exactas ni periódicas simples; desde luego se puede asegurar que serán diferentes de las anteriores. Véamos algunos ejemplos:

$$\frac{5}{2\times 3}=\frac{5}{6}=0\text{‘}8\ (3)\ldots\ldots \quad \frac{7}{5\times 3}=\frac{7}{15}=0\text{‘}4\ \ (6)\ldots\ldots.$$

$$\frac{7}{2^2\times 3}=\frac{7}{12}=0\text{‘}58\ (3)\ldots\ldots\frac{37}{5^2\times 3}=\frac{37}{75}=0\text{‘}49\ (3)..$$

$$\frac{43}{2^3\times 11}=\frac{43}{88}=0\text{‘}488\ (63)\ldots\ldots$$

$$\frac{25}{2^4\times 3}=\frac{25}{48}=0\text{‘}5208\ (3)\ldots\ldots\ldots$$

En todos estos ejemplos se observa que estando previamente simplificados los quebrados comunes, el denominador en cada quebrado se forma de un 2 ó de un 5 elevados á cualquiera potencia y otro número primo cualquiera, el 3 ó el 11, etc.

Se observa además que la decimal correspondiente se forma de dos partes: la que sigue inmediatamente después de la coma que es **variable**, y la que consta encerrada dentro de un paréntesis que es **invariable**, es precisamente la que forma el período.

En los dos primeros ejemplos en los cuales el 2 y el 5 están en su **primera** potencia sólo hay **una** cifra antes del período; en el tercero y cuarto ejemplos el 2 y el 5 están elevados á la **segunda** potencia y hay **dos** cifras antes del período; en el quinto ejemplo el 2 está elevado á la **tercera** potencia y hay **tres** decimales antes del período, y en el sexto y último ejemplo el 2 está elevado á la **cuarta** potencia y hay **cuatro** decimales antes del período.

Se ve perfectamente que la decimal que resulta de esta clase de quebrados comunes participa de la índole de las **exactas** y de las **periódicas simples**; por esa razón se ha convenido en llamarlas **periódicas mixtas**; es decir, contienen un período determinado por el número primo que es anti–submúltiplo del 10, y un conjunto de cifras antes del período determinado por los submúltiplos del 10 que son el 2 y el 5 elevados á cualquiera potencia. Luego:

Para que un quebrado común produzca una fracción decimal **periódica mixta**, es indispensable que después de **simplificar** dicho quebrado, el denominador contenga como factores un 2 ó un 5 y otro número primo cualquiera, constando la decimal de dos partes: la primera que seguirá inmediatamente después de la coma y que tendrá tantas cifras decimales cuantas unidades tenga el mayor exponente de dicho número; y la segunda parte que se formará del período y cuyo número de cifras será siempre menor que el número de unidades de que conste el número primo extraño elevado á la potencia que tuviere indicada en el denominador.

194. Las fracciones decimales **periódicas mixtas** se pueden transformar también en quebrados comunes como lo veremos en los siguientes ejemplos:

(*a*) Sea la fracción periódica mixta 0'8 (3)...

Consta de dos partes: la primera 8 **décimos** antes del período que resulta de la existencia de un 2 en el denominador y la segunda de (3) **noventavos** que forma el período y que procede de otro número primo extraño; por lo mismo no podrá tener 100 como denominador sino 90 y ambos quebrados comunes sumados nos darán el siguiente resultado:

$$0'8\,(3)=\frac{8}{10}+\frac{3}{90}=\frac{72}{90}+\frac{3}{90}=\frac{75}{90}=\frac{3\times5^2}{2\times3^2\times5}=$$

$$\frac{5}{2\times3}=\frac{5}{6}$$

Y es claro; los 8 **décimos** más los 3 **noventavos** sumados darán 75 **noventavos** y simplificando el resultado se obtendrá 5 **sextos**, que es el quebrado común que se buscaba y que equivale á la fracción decimal periódica mixta 0'8 (3)......

(*b*) Sea la fracción periódica mixta 0'58(3).

Consta de dos quebrados comunes: 58 **centésimos** y 3 **novecientosavos** que sumados darán el siguiente resultado:

$$0'58(3)......=\frac{58}{100}+\frac{3}{900}=\frac{522}{900}+\frac{3}{900}=\frac{525}{900}=$$

$$\frac{3\times5^2\times7}{2^2\times3^2\times5^2}=\frac{7}{2^2\times3}=\frac{7}{12}$$

Y en efecto, siete **doceavos** da como decimal periódica mixta 0'58(3)......

(*c*) Sea la fracción periódica mixta 0'488(63)...

Consta de 488 **milésimos** y 63 **noventa y nueve mil cienmilésimos**, que sumados darán el siguiente resultado:

$$0'488(63)\ldots\ldots=\frac{488}{1000}+\frac{63}{99000}=\frac{48312}{99000}+\frac{63}{99000}=$$

$$\frac{48375}{99000}=\frac{3^2\times5^3\times43}{2^3\times3^2\times5^3\times11}=\frac{43}{2^3\times11}=\frac{43}{88}$$

En efecto, el quebrado común 43 **ochenta y ocho avos** da como decimal periódica mixta 0'488(63)...

Para **convertir** una fracción decimal **periódica mixta** en **quebrado común,** se descompondrá en dos partes: la primera que precede al período se considerará como numerador y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene; la segunda que forma el período se considerará tambiém como numerador y se le pondrá como denominador tantos nueves como cifras tenga, seguidos de tantos ceros como cifras hay en la parte no periódica; se suman los dos quebrados y el resultado será el quebrado común equivalente á la fracción periódica mixta.

Con los números **decimales** se ejecutan exactamente las mismas operaciones que hicimos con los números **enteros,** es decir, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Véamos algunos ejemplos.

195. **Problema primero.** Un negociante en metales vendió cinco barras de plata cuyos pesos son los siguientes: la primera de 15 kilogranos 93 milésimos; la segunda de 7 kilogramos 109 cien milésimos; la tercera de 14 kilogramos 8115 millonésimos; la cuarta de 12 kilogramos 79 diez milésimos, y la quinta de 8 kilogramos 9 diez millonésimos; ¿cuánto pesarán las cinco barras juntas?

Solución. Esta cuestión es un problema en el cual se distinguen muy bien la parte conocida, la desconocida y la clase de operación que debe efectuarse; pero como los datos son números **decimales** necesitamos saber cómo podrán **sumarse** estos números por el medio más sencillo posible.

Se comprende claramente que en todos los sumandos hay una parte **entera** de la misma especie que es el kilogramo; en cambio en la parte **decimal** hay unidades de diferentes especies: en el primer sumando hay milésimos, en el segundo cien milésimos, en el tercero millonésimos, en el cuarto diez milésimos y en el quinto diez millonésimos; ¿cómo sería posible hacer la **suma** con datos de **especies tan diversas?** Al estudiar los números **enteros** resolvimos esta dificultad ejecutando agregaciones de unidades con unidades, decenas con decenas, etc.; al estudiar los números **quebrados** lo resolvimos buscando un denominador común; en el presente caso la parte entera no presenta dificultad alguna, pero la parte decimal sí, porque no están expresas las **décimas,** las **centésimas,** las **milésimas,** etc. en todos los sumandos; ni tampoco hay denominadores para aplicar la regla de la suma de los quebrados.

No obstante, estas dificultades aparentes se pueden subsanar fácilmente: la primera escribiendo ordenadamente y unos debajo de otros los sumandos, teniendo cuidado de cubrir con **ceros** los sub-órdenes vacíos, y la segunda considerando como **denominador tácito común** el sub-orden más pequeño para reducir todos los sumandos á la misma especie; pero como sabemos que los ceros escritos á la derecha de los números decimales no alteran su valor, los suprimimos en la escritura. La operación quedará así:

15'093
7'00109
14'008115
12'0079
8'0000009
56'1101059

Como los números decimales representan la forma **descendente** de nuestro sistema de numeración escrita, el modo de sumarlos tiene que ser necesariamente igual al que empleamos en los enteros; es decir, de lo **menor** á lo **mayor** para ir agregando sin dificultad las unidades completas á la izquierda y dejar escritas las sobrantes incompletas á la derecha. Luego:

Para **sumar** números **decimales**, se procederá lo mismo que si fueran números enteros, teniendo cuidado de que las **comas** formen columna y por consiguiente todos los órdenes y sub-órdenes de la misma especie.

196. **Problema segundo.** De 32 kilólitros de leche más 32 milésimos, se han vendido 16 kilólitros 874 millonésimos, ¿cuánto queda?

Solución. En este problema hay dos números conocidos entre los cuales se trata de buscar una **diferencia**; pero como los datos son números **decimales**, conviene ejecutar la **resta** por algún medio que sea á la vez facil y sencillo.

Desde luego se presenta una dificultad: la diversidad de especies, y para subsanarla se tiene que hacer lo que en la suma, elegir como **denominador tácito común** el sub-orden más pequeño, y para ir restando sucesivamente los de la misma especie conviene escribir los dos números ordenadamente uno debajo del otro y cubriendo con ceros los órdenes ó sub-órdenes que falten. La operación se podrá disponer así:

32'032
16'000874
—————
16'031126

En esta **resta** hay órdenes y sub–órdenes y por lo mismo en la parte **descendente** se tienen que aplicar las mismas reglas que en la parte **ascendente** y comenzar también de lo **menor** á lo **mayor** como lo ejecutamos con los números enteros. Luego:

Para **restar** números **decimales** se procede del mismo modo que si fueran enteros, teniendo cuidado de que las **comas** formen columna y por consiguiente los órdenes y sub–órdenes de la misma especie.

197. **Problema tercero.** El kilogramo de queso vale $ 1'32 centavos, ¿cuánto costarán 7 kilogramos 83 milésimos?

Solución. Con los elementos de que disponemos para resolver problemas **combinados,** el presente caso no tiene dificultad ninguna y bastaría reducir la **unidad** y la **pluralidad** á una especie común y el **precio** cambiarlo todo en centavos, para formular un **planteo** y desarrollarlo de un modo semejante á lo que hicimos con los números enteros. He aquí la forma:

Milésimos de kilogramo.		Centavos.
1000	————	132
1	————	$\frac{132}{1000}$
7083	————	$\frac{132 \times 7083}{1000}$

$$x = \frac{132 \times 7083}{1000} = \frac{934956}{1000} = 934'956 \text{ cts.}$$

$$= \$\, 9'35 \text{ centavos.}$$

Como se ve, nada de particular tiene la solución anterior, lo que prueba la semejanza completa entre los cálculos con enteros y los cálculos con decimales; pero si conservamos la **escritura especial** de los números decimales, entonces el planteo se transformará un poco y la operación final sería una **multiplicación** de decimales que conviene saber ejecutar del modo más facil y sencillo. He aquí el nuevo planteo:

Kilogramos.		Pesos.
1	———	1'32
7'083	———	x

$$x = 1'32 \times 7'083$$

En efecto, si un kilogramo de queso vale 1,32 pesos, es claro que 7'083 kilogramos valdrán siete veces el valor de uno, más ochenta y tres milésimos del mismo valor, de cuyo raciocinio resulta la **multiplicación** de dos números decimales.

La operación ejecutada como enteros ya sabemos hacerla, pero no sabríamos determinar si el producto representaba enteros, ó décimos, ó centésimos, ó milésimos, y para lograrlo tendremos que hacer el siguiente raciocinio:

1º Si 1 kilogramo vale 1'32 pesos, 7 kilogramos valdrán siete veces el valor de uno, ó $1'32 \times 7 = 9'24$ pesos

Esto equivale á una suma de siete sumandos iguales á 1'32 que da 9'24 pesos, en donde se ve que las **comas** forman columna lo mismo que los órdenes y sub–órdenes.

2º Si 1000 milésimos de kilogramo valen 1'32 pesos, 1 milésimo valdrá la milésima parte del valor de uno ó 1'32÷1000=0'00132 cienmilésimos de peso.

Sabemos que dividir por 1000 es lo mismo que hacer mil veces menor un número, y en los decimales se ejecuta esta operación corriendo la coma tres lugares hacia la izquierda, de donde resultó el cociente 0'00132.

3º Si un milésimo de kilogramo vale 0'00132 cien milésimos de peso, 83 milésimos de kilogramo valdrán ochenta y tres veces el valor de uno ó 0'00132×83 = 0'10956 cien milésimos de peso.

Es también una suma abreviada de ochenta y tres sumandos iguales á 0'00132 cien milésimos de peso que dió como resultado 0'10956 cien milésimos de peso en donde se ve que las **comas** forman columna lo mismo que los órdenes y sub-órdenes.

4º Sabemos que 7 kilogramos de queso costaron 9'24 pesos y que 83 milésimos de kilogramo costaron 0'10196 cien milésimos de peso; ¿cuánto se habrá comprado de queso?

Es claro que la suma de las dos partidas indicadas dará el resultado ó sea 9'24+0'10956=9'34956 pesos.

La operación de sumar ha sido ejecutada del mismo modo que si fueran enteros los datos y teniendo cuidado de que las comas, órdenes y sub-órdenes formaran columna.

Del estudio anterior podemos hacer dos observaciones importantes:

1ª Los números 132 y 7083 considerados como enteros, al multiplicarse dan como producto 934956. Hágase la operación:

$$132 \times 7083 = 934196$$

```
      132
   ------
    14166
   21249
   7083
   ------
   934956
```

2ª Los mismos números considerados como decimales contienen: el multiplicando 1'32 **dos** decimales, el multiplicador 7'083 **tres** decimales y el producto 9'34956 **cinco** decimales, es decir, $2+3=5$ decimales de ambos factores.

De estas dos observaciones se ha inferido la siguiente regla:

Para **multiplicar** números **decimales** se procede del mismo modo que si fueran enteros, teniendo cuidado de separar á la derecha del producto tantas cifras como decimales haya en ambos factores juntos.

El ejemplo anterior se ejecutará así:

```
      1'32
    ×7'083
   -------
       396
     1056
    924
   -------
   9'34956 pesos.
```

Otros ejemplos de multiplicar números decimales:

(*a*) 0'007×0'00375

375

× 7

0'00002625

(*b*) 0'000051×0'015

51×15

255

0'000000765

(*c*) 7'00005×0'0000103

700005

103

2100015

700005

0'0000721C0515

198. **Problema cuarto.** Se han comprado en 9 pesos 34956 cien milésimos de peso, 7 kilogramos 83 milésimos de kilogramo de cierta mercancía; ¿cuál será el precio de 1 kilogramo?

Solucíón. Vamos á resolverlo como si los datos fueran números enteros. El planteo y desarrollo quedaría así:

Milésimos de kilogramo.		Cien milésimos de peso.
7083	———	934956
1	———	$\frac{934956}{7083}$
1000	———	$\frac{934956 \times 1000}{7083}$

$$x = \frac{934956 \times 1000}{7083} = \frac{934956000}{7083} = 132000$$

cien milésimos de peso.

Y como el peso tiene 100000 cien milésimos de peso, el resultado final sería: $132000 \div 100000 =$ 1'32 pesos, valor de un kilogramo.

Hagamos ahora un nuevo planteo conservando la escritura de los números decimales:

Kilogramos.		Pesos.
7'083	———	9·34956
1	———	x

$$x = \frac{9{\cdot}34956}{7{'}083}$$

En efecto, si 7 kilogramos y 83 milésimos de kilogramo valen 9·34956 pesos, 1 kilogramo valdrá la 7'083 ava parte de aquel número; es, pues, una división de números decimales.

Si fueran enteros los dos números que se trata de dividir, el cociente sería 132 exactamente, pero como son decimales, hay que hacer el siguiente razonamiento:

1º Sabemos que en toda división, cuando se **multiplican** el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no sufre ninguna alteración; luego podemos multiplicarlos por 100000 y tendremos:

$$\frac{9'34956}{7,083}=\frac{934956}{708300}$$

Al multiplicar por 100000 hemos corrido la **coma** decimal **cinco** lugares hacia la **derecha** y los decimales primitivos quedaron convertidos en números enteros, pero su cociente no habrá cambiado.

2º Como se trata ahora de ejecutar una operación de dividir enteros, se hará aplicando las reglas que nos son conocidas:

$$\begin{array}{l|l} 934956 & \underline{708300} \\ 226656 & 1 \end{array}$$

3º Sabemos que en una división **inexacta** el cociente puede completarse de dos maneras: ó con un **quebrado común** colocado á la derecha del cociente que tenga como numerador el resíduo y como denominador el divisor, ó por medio de una fracción decimal que resultaría de la **aproximación del cociente.**

En el presente caso aproximaremos hasta **centésimos** agregando sucesivamente de uno en uno dos ceros al resíduo:

$$\begin{array}{r|l} 934956 & \underline{708300\qquad} \\ 2266560 & 1'32 \text{ pesos.} \\ 1416600 & \\ 000000 & \end{array}$$

4º Sabemos que **multiplicando** el dividendo ó **dividiendo** el divisor por un mismo número el resultado que se obtiene siempre es el mismo. Luego en vez de **agregar** ceros al residuo los podremos quitar al divisor al hacer la aproximación correspondiente, de este modo:

```
934956 | 7083(0(0
226656   1'32 pesos.
 14166
  0000
```

Obsérvese que al multiplicar por 100000 los dos términos de la división quedaron ambos con **igual** número de decimales.

De esta observación y del raciocinio anterior se ha derivado la siguiente regla:

Para **dividir** números decimales, se **igualará** con ceros el número de cifras decimales en el dividendo y el divisor; se prescindirá de la coma y se ejecutará la operación lo mismo que si fueran números enteros; en seguida se hará la aproximación correspondiente ó **agregando** ceros al resíduo ó **quitándolos** del divisor.

He aquí algunos ejercicios de división de números decimales:

(*a*) $$\frac{0‘0256}{0‘08}=\frac{256}{800}=0‘32$$

```
256 | 8(0(0
 16   0'32
  0
```

Prueba: $0‘32 \times 0‘08 = 0‘0256$

(*b*) $\frac{0'0008}{1'25}=\frac{8}{12500}$

```
800  | 125(0(0
       ---------
0500   0'00064
 000
```

Prueba: $0'00064 \times 1'25 = 0'0008$

(*c*) $\frac{7}{0'0023}=\frac{70000}{23}$

```
70000 | 23
        ---------
  100   3043
   080
    11
```

Prueba: $3043 \times 0'0023 + 11 = 7$

199. Del estudio que hemos hecho de los números decimales podemos derivar las conclusiones siguientes:

I. Considerados los números decimales como la forma **descendente** de nuestro sistema de numeración, están sujetos enteramente á las mismas **convenciones** aceptadas para la numeración hablada y escrita de números **enteros.**

II. Si los números decimales se representan en la forma de **quebrados comunes** tendrán exactamente las mismas propiedades que ellos.

III. Representados los números decimales en la escritura por medio de la **coma** decimal, sufrirán variaciones en sus valores por el simple cambio de lugar de dicho signo.

IV. Los números decimales pueden simplificarse ó reducirse á un denominador tácito común.

V. Los números decimales pueden convertirse en quebrados comunes y viceversa.

VI. Con los números decimales se pueden ejecutar sumas restas, multiplicaciones y divisiones.

VII. Los problemas cuyos datos contengan números decimales podrán resolverse: razonando del mismo modo que se razonó con los números enteros y quebrados, y en la ejecución de operaciones aplicando las reglas de aquellos ó las especiales que se derivaren de su particular estructura.

Ejercicios. — 361. Si representamos la unidad entera por medio de un decímetro cúbico y lo dividimos en 10, 100 ó 1000 partes, ¿qué nombres reciben cada una de esas partes?—¿Qué forma tendrán los décimos si la unidad se representa por un decímetro cúbico?—¿Qué forma tendrán los centésimos si los décimos se representan con una tabla de centímetros cúbicos?—¿Qué forma tendrán los milésimos si las centésimas se representan con una regla de centímetros cúbicos?

362. Si se reparte un peso entre 10 niños ¿cuánto le toca á cada uno?—Y un peso entre 100 niños ¿cuánto le toca á cada uno?—Y un kilómetro de cordón entre 1000 niños ¿cuánto le toca á cada uno?—¿Una unidad entera podrá tener más ó menos de 10 décimos, de 100 centésimos y 1000 milésimos y por qué?—¿Cuántos décimos, centésimos y milésimos hay en uno, dos, tres, etc., hasta nueve unidades enteras?

363. ¿Qué son las unidades enteras respecto de los décimos, los centésimos y los milésimos?—¿Qué son los décimos respecto de la unidad entera?—¿Qué son los centésimos respecto de los décimos y las unidades enteras?—¿Qué son los milésimos respecto de los centésimos, los décimos y las unidades enteras?—¿Cuántos centésimos hay en dos, tres, cuatro, etc., hasta nueve décimos?—¿Cuántos milési-

mos hay en dos, tres, cuatro, etc., hasta nueve centésimos?

364. Si representamos los milésimos por un centímetro cúbico y lo dividimos en diez tablas de milímetros cúbicos ¿qué nombre recibirá cada tabla?—Y si cada tabla la dividimos en diez reglas de milímetros cúbicos ¿qué nombre recibirá cada regla?—Y si la regla de milímetros cúbicos la dividimos en diez cubos de milímetros cúbicos ¿qué nombre tomarán?—Diga usted ¿cómo pueden representarse por medio de objetos los diez milésimos, cien milésimos y millonésimos?—¿Qué representan los cubos, las tablas y las reglas refiriéndose á los números decimales?

365. ¿Cuántos diez milésimos, cien milésimos y millonésimos tiene la unidad entera?—¿Podrá la unidad entera tener más ó menos de 10000 diez milésimos, 100000 cien milésimos y 1000000 de millonésimos?—¿Cuántos diez milésimos tienen de 2 á 9 unidades enteras, de 2 á 9 décimos, de 2 á 9 centésimos y de 2 á 9 milésimos?—¿Cuántos cien milésimos tienen de 2 á 9 enteros, décimos, centésimos, milésimos y diez milésimos? — ¿Cuántos millonésimos tienen de 2 á 9 enteros, décimos, centésimos, milésimos, diez milésimos y cien milésimos?

366. ¿Qué son las unidades enteras respecto de los diez milésimos, cien milésimos y millonésimos?—¿Qué son los diez milésimos respecto de los milésimos, centésimos, décimos y unidades?—¿Qué son los cien milésimos respecto de los diez milésimos, milésimos, centésimos, décimos y unidades?—¿Qué son los millonésimos respecto de los cien milésimos, diez milésimos, milésimos centésimos, décimos, y unidades?

367. Si la unidad la representáramos con un metro cúbico ¿cómo se representarían los milésimos?—Y si los milésimos se representaran con un decímetro cúbico ¿cómo se representarían los millonésimos?—Y si los millonésimos se representaran con un centímetro cúbico ¿cómo se representarían los diez millonésimos, los cien millonésimos y los mil millonésimos?

368. ¿Qué vienen á ser los millonésimos respecto de la unidad entera?—¿Y los diez millonésimos, cien millonésimos, y mil millonésimos?—¿Cuántos diez millonésimos, cien millonésimos y mil millonésimos hay en 2, en 3, en 4, etc. hasta 9 unidades enteras?—¿En 2, en 3, en 4, etc. has-

ta 9 décimos?—¿En 2, en 3, en 4, etc. hasta 9 centésimos? —¿En 2, en 3, en 4, etc. hasta 9 milésimos?—¿En 2, en 3, en 4, etc. hasta 9 diez milésimos?—¿En 2, en 3, en 4, etc. hasta 9 cien milésimos?—¿En 2, en 3, en 4, etc. hasta 9 millonésimos?

369. ¿Qué cosa es el mil millonésimos respecto de la unidad entera?—¿Qué son los cien millonésimos respecto de los décimos?—¿Qué son los diez millonésimos respecto de los centésimos?—¿Qué son los millonésimos respecto de los milésimos?—¿Qué son los cien milésimos respecto de los diez milésimos?—¿Qué son los diez milésimos respecto de los milésimos?

370. ¿Qué diferencia hay entre numeración ascendente y descendente?—¿Entre órdenes y sub-órdenes?—¿Entre clases y sub-clases?—¿Entre géneros y sub-géneros?—¿Diga usted los nombres de los primeros diez sub-órdenes.—Diga usted los nombres de las primeras siete sub-clases.—Diga usted los nombres de los primeros cinco sub-géneros.

371. Explique usted ¿cómo podrán representarse los números decimales empleando tiras de papel?—¿Explique usted ¿cómo podrán representarse los números decimales empleando círculos?—¿Escriba usted con cifras y los nombres de las especies correspondientes los siguientes números decimales: cinco décimos, diez y siete centésimos, cuarenta y nueve milésimos, treinta y nueve diez milésimos, cuarenta y ocho cienmilésimos, etc.—Escriba usted los mismos números en la forma de quebrados comunes.—Escriba usted los mismos números empleando la coma decimal.

372. Escriba usted empleando lo coma decimal los siguientes números decimales: tres enteros ocho milésimos.—Noventa y cuatro cien milésimos.—Cincuenta enteros siete mil novecientos catorce millonésimos.—Dos enteros, cuatro millones cinco cien millonésimos.—Ocho millones veinticinco mil millonésimos.—Diez y nueve enteros cuarenta y nueve milésimos.—Quinientos cuarenta y tres décimos.—Ocho diez mil cincuenta y nueve centésimos.—Catorce mil quinientos diez y siete milésimos.—Cuatro millones cinco diez milésimos.—Catorce billonésimos.

373. ¿Qué lugares ocupan los sub-órdenes siguientes: los décimos, los diez milésimos, los diez millonésimos, los diez mil millonésimos, los diez billonésimos.—Los centési-

mos, los cien milésimos, los cien millonésimos, los cien mil millonésimos, los cien billonésimos.—Los milésimos, los millonésimos, los mil millonésimos, los billonésimos, los mil billonésimos.

374. Diga usted por orden los sub–órdenes comenzando con los décimos hasta los mil billonésimos—¿Con cuántas cifras decimales se escribirán los sub–órdenes siguientes: los décimos, los cien millonésimos, los centésimos, los diez mil millonésimos, los milésimos, los mil millonésimos, los diez milésimos, los billonésimos, los cien milésimos, los diez billonésimos, los millonésimos y los cien billonésimos.

375. ¿Cómo se llaman los decimales que ocupan los siguientes lugares después de la coma: el segundo, el noveno, el tercero, el décimo, el primero, el undécimo, el cuarto, el duodécimo, el quinto, el décimo tercero, el sexto, el décimo cuarto, el séptimo, el décimo quinto, el octavo, el décimo sexto.—En una decimal de cinco cifras ¿cuál es el nombre de la última unidad sub–decupla?—¿En una de siete?—¿De cuatro?—¿De doce?—¿De quince?—¿De ocho?—¿De diez y siete? etc.

376. ¿Cuál es la unidad decimal cien veces menor que la decena?—¿Mil veces menor que la decena de millar?—Cien veces menor que el décimo?—¿Mil veces mayor que el centésimo?—¿Cien mil veces menor que la centena?—El décimo ¿cuántos millonésimos vale, cuántos milésimos, cuántos billonésimos?— El centésimo ¿cuántos millonésimos vale, cuántos diez billonésimos, cuántos cienmilésimos?--¿Qué son los millonésimos respecto de los décimos, los centésimos y los milésimos?—¿Qué son los billonésimos respecto de los décimos, centésimos, milésimos, diez milésimos, etc.?

377. Lea usted los siguientes números decimales: 0'4; 0'003; 0'00074; 3'008; 0'00080009; 0'00070004: 0'003002; 34'0008974; 2'00245; 7'00034; 0'4; 0'34; 0'049; 0'0004, 5'003004; 2'0004005431.

378. Haga usted 10, 100, 1000, etc. veces mayor los números decimales siguientes: 0'43, 7'008, y 8'00009, ¿cómo quedan los resultados? —Haga usted 10, 100, 1000, etc. veces menor los mismos números anteriores, ¿cómo quedan los resultados?—Cuando la coma decimal se corre uno ó más lugares hacia la derecha ¿qué pasa con el valor de un número decimal? —Y si se corre uno ó más lugares hacia la

izquierda ¿qué pasa con el valor del número decimal? —¿Qué pasa con el valor de un número decimal si se le agregan ó quitan ceros á la derecha?—Y si se le intercalan ó quitan ceros entre la coma y los décimos ¿qué pasará con el valor de la decimal?

379. ¿Cómo se hace para hacer un número decimal 10, 100, 1C00, etc., veces mayor?—¿Cómo se hace para hacer un número decimal 10, 100, 1000, etc. veces menor?—Reduzca usted á una especie común los siguientes números decimales: 0'7 y 0'43 á centésimos; 0'0034 y 8'3 á millonésimos; 0'03 y 24'00009 á diez millonésimos.—¿Cómo se reducen dos ó más números decimales á una especie común?—Cómo podrá simplificarse un número decimal y en qué casos es facil la simplificación?

380. Los quebrados comunes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, y $\frac{7}{16}$ ¿darán decimal exacta ó inexacta y por qué?—Los quebrados comunes $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{25}$ y $\frac{17}{25}$ ¿darán decimal exacta ó inexacta y por qué?—Los quebrados comunes $\frac{7}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{7}{40}$ y $\frac{9}{50}$ darán decimal exacta ó inexacta y por qué?—¿Qué condiciones debe tener un quebrado común para que produzca una decimal exacta?—¿Cómo puede precisarse anticipadamente el número de cifras decimales que debe tener un quebrado común que produzca una decimal exacta?—¿Es necesario simplificar antes un quebrado común para saber si dará ó no una decimal exacta y por qué?—¿Qué relación tienen los exponentes de los números 2 y 5 en el denominador de un quebrado respecto de la exactitud é inexactitud de sus decimales?

381. Los quebrados comunes $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$ y $\frac{5}{13}$ ¿darán decimal exacta ó inexacta y por qué?—¿Qué requisitos debe tener un quebrado común para producir una decimal periódica simple?—¿Se puede precisar anticipadamente el número de cifras decimales de que constará el período de una decimal periódica simple?—Para saber si un quebrado común ha de producir una decimal periódica simple ¿deberá simplificarse ó no y por qué?—¿De qué números debe estar formado el denominador de un quebrado para producir decimales periódicas simples?

382. Los quebrados comunes $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{5}{12}$ y $\frac{9}{24}$ ¿darán decimal exacta ó inexacta y por qué?—¿Qué requisitos debe tener un quebrado común para producir una decimal periódica mixta?—¿Es preciso simplificar antes un quebrado

para saber si dará una decimal periódica mixta y por qué? ¿Cómo se puede saber anticipadamente de cuántas cifras ha de constar el período y cuántas ha de haber antes del período?—¿Qué relación tienen los exponentes del 2 y del 5 respecto del número de cifras que han de preceder al período? —¿De qué números debe estar formado el denominador de un quebrado común para producir una decimal periódica mixta?- Diga usted, de estos quebrados $\frac{5}{13}$, $\frac{9}{26}$, $\frac{14}{38}$, $\frac{15}{25}$ y $\frac{72}{96}$ ¿qué clases de fracciones decimales producirán?

383. ¿A qué quebrados comunes equivaldrán las siguientes fracciones decimales: 0'54, 0'0972, 0'00834, 0'125, 0'256, 0'00625, 0'0025?- ¿Qué denominador se le pone á una decimal exacta para convertirla en quebrado común? —¿Y á una periódica simple?—¿Y á una periódica mixta? —¿A qué quebrados comunes equivalen las siguientes fracciones periódicas simples: 0'47, 0'087, 0'71, 0'32?—¿A qué quebrados comunes equivalen las siguientes decimales periódicas mixtas: 0'7(3), 0'34(8), 0'043(714), 0'04([illegible]3), 0'01 (31014)?

384. ¿A cuántos enteros y milésimos equivalen los siguientes números fraccionarios: $\frac{18}{5}$, $\frac{73}{3}$, $\frac{49}{2}$, $\frac{79}{12}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{78}{4}$ y $\frac{702}{15}$?—¿A qué números mixtos equivalen los siguientes números decimales: 3'5, 8'04, 7'007, 10'00743, 9'74?—¿Cómo se aproxima el cociente?

385. Ejecute usted las sumas siguientes: 0'4+0'39+5'009+7'0008+18'52387, ¿cuánto es?—Cuál es la suma de ocho enteros quince milésimos, más siete millonésimos, más un entero quince diez milésimos, más ciento treinta y dos cien milésimos, más cuatrocientos veintiún diez millonésimos?—Sume usted lo siguiente: 34'009+51'003+12'00097 +0'7,+12'43,+0'0000087,+3'41,+19'00 34, ¿cuánto es?

386. Busque usted la diferencia entre los siguientes números decimales: 4'8 y 0'07, entre 12'009 y 7'3, entre 54'0003 y 7'9000.—¿Qué diferencia hay entre el número diez y nueve milésimos y noventa y tres millonésimos?—¿Entre cuatro enteros y setenta y cinco cien milésimos?—¿Entre cuarenta y nueve décimos y quince centésimos?

387. ¿Cuál será el producto de 0'04 por 17'5?—¿De 0'09 por 12'4?—¿De 0'00504 y 0'0009?—¿De 0'0007 y 0'04?—¿De 0'0005 y 0'2?—¿De 15'0007 y 1'2?

388. ¿Cuál será el cociente de 0'005 entre 0'009?—¿De 1'5

y 0'007?—¿De 0'007 y 0'0009?—¿De 19'4 y 0'005?—¿De 1'5 y 0'00007?—¿De 2'7 y 0'009?—¿De 1'4 y 1'5?—¿De 0'7 y 0'00 07?

Problemas.—389. Un litro de aceite vale $1,88 centavos ¿cuánto valdrán 15 litros 73 milésimos?

390 Sabiendo que 2'73 kilogramos de azucar han costado 87'043 centavos, ¿cuál será el valor de un kilogramo?

391. Un comerciante dice que con 12'73 pesos compró 14'009 hectólitros de maíz, con 100'73 pesos, ¿cuántos hectólitros comprará?

392. Si los 23 milésimos de kilogramo de harina cuestan 83 milésimos de peso ¿cuánto costarán 7'49 kilogramos de harina?

393. Una vela de 43 centésimos de metro de largo se disminuye cada minuto en 15 diez milésimos de metro al estar encendida, ¿qué tiempo dilataría en acabarse?

394. Un obrero ofreció á un limosnero 0'25 pesos cada vez que gane 4'73 pesos; llegó á dar 3'42 pesos de limosna, ¿cuánto ganó?

395. Un albañil blanquea una pared en 4 horas; otro en 6 y otro en 8; si se reúnen los tres albañiles ¿qué parte de la pared blanquearán en una hora y cuánto tiempo tardarían en blanquearla toda entera?

396. ¿Cuál será la suma de las siguientes cantidades decimales de peso: 4 pesos 73 milésimos; 897 mi lonésimos; 18 pesos 302 cienmilésimos;1093 centésimos y 18008 diez milésimos?

397. Buscar la suma de las cantidades siguientes: 18 metros 54 millonésimos; 332 centésimos; 2050 milésimos; un millón cuatro cienmillonésimos; 125 metros 73 cienmilésimos

398. Hacer la suma siguiente: 28 días y 537 millonésimos de día; 37 diezmilésimos: 14 días y 53 cienmilésimos; 328 diezmillonésimos; 143 cienmillonésimos.

399 Hacer la suma siguiente: 32 007+2'00058+7'345 +0 003456+72'0003008+0'045+17 0032. Todos estos números indican kilogramos y fracciones de kilogramos

400. ¿Cuál será la diferencia entre 18 metros 7 centésimos y 5 metros 7' 297 cienmillonésimos?

401. ¿Qué número es preciso añadir á 2 enteros 74893 millonésimos para obtener 18 enteros 5 décimos?

402. La suma de dos números es 439 enteros 73 centésimos; uno de ellos es 43 enteros 5493 cienmillonésimos: ¿cuál será el otro?

403. La diferencia en una substracción es de 45 enteros 72951 milmillonésimos, y haciendo la prueba por la adición se ha obtenido 597 enteros 8 décimos; ¿cuál será el minuendo?

404. Se han pagado 80 pesos por 20 salarios de varios trabajadores; si cada salario se hubiese aumentado con 27 centavos, ¿cuánto se habría pagado?

405. ¿Qué producto se obtendrá de multiplicar 23 enteros 7 décimos por 5047 millonésimos?

406. Las entradas de una caja durante 27 días y 5 décimos de día, han sido iguales á 143 pesos 145 milésimos de peso; ¿cuál sería la entrada total durante dicho tiempo?

407. ¿Cuál será el precio de 25 metros de paño 43 milésimos de metro á razón de 8 pesos 375 milésimos de peso el metro?

408. ¿Qué cantidad formarán los 105 millonésimos de 12 pesos 4 centésimos de peso?

409. Tomando los 45 milésimos de un número se ha encontrado 4 enteros 8 décimos; ¿cuál es el número?

410. ¿Cuál será el número cuyos 73 cienmilésimos es igual á 15?

411. ¿Cuántas veces el número 15 enteros 8 décimos estará contenido en 123 enteros 47 millonésimos?

412. Sabiendo que 12 metros 75 milésimos de metro han costado 145 pesos 129 milésimos de peso, se desea saber cuánto costará 1 metro.

413 Se ha dividido 0'00037 por cierto número y se ha obtenido por cociente 4 enteros 18 milésimos; ¿cuál será el divisor?

414. Se ha obtenido como producto de una multiplicación la cantidad 7 enteros 8 centésimos; uno de los factores es 43 millonésimos; ¿cuál será el otro factor?

415 Determinar el cociente de cinco enteros cuatro décimos entre quince cienmilésimos.

CAPITULO XII.

Números Denominados.

200. Según las bases de nuestro sistema de numeración, toda unidad **mayor** vale **diez** unidades menores, y por consiguiente toda unidad **menor** es la **décima** parte de la mayor inmediata.

Existen aún multitud de **medidas** que están fuera de esa convención decimal, y antes de la adopción en nuestro país del sistema métrico decimal francés, de que trataremos en el siguiente capítulo, se usaron diversas medidas cuyas divisiones eran en extremo caprichosas: la unidad de medida de **longitud**, por ejemplo, se dividía en 3, 4, 6, 8 y 36 ó más partes; la unidad de medida de **peso** se dividía en 4, 16, 25 ó más partes, y así por el mismo estilo y de un modo arbitrario se dividían todas las demás medidas, pesos y monedas antiguas.

De esta gran variedad de sistemas de medidas, fué necesario crear un **sistema especial** de cálculos que se llamó por los antiguos de los **números denominados.**

Este sistema en la época presente debiera ser desechado por completo, porque nuestras medidas actuales están ajustadas en su mayor parte al sistema decimal; sin embargo, nos quedan todavía algunos restos de divisiones arbitrarias, por ejemplo, las que se refieren al **tiempo,** á la medición de la **circunferencia,** á la medición del **papel** y algunas otras creadas ó por crear que la necesidad ó el capricho, ó por circunstancias muy especiales, se juzgue indispensable conservarlas á pesar de separarse de las convenciones del sistema decimal adoptado como de hecho están fuera de él, y aun se aceptan todas las variadísimas é infinitas divisiones que se admiten entre los quebrados comunes.

Por estas razones nos ocuparemos aquí de los llamados **números denominados** que en realidad no son otra cosa que números **concretos** de especies diversas; pero todos fácilmente **reductibles** á una unidad **principal.**

Sólo trataremos aquí de las medidas de **tiempo,** de las medidas de la **circunfereneia** y de las medidas del **papel.**

201. La base de las medidas de **tiempo** es el **día,** que es la duración de una vuelta de la tierra al rededor de su eje. Las unidades de tiempo son: el **siglo** que se divide en 20 lustros, el **lustro** en 5 años, el **año** en 12 meses, el **mes** en 30 días, el **día** en 24 horas, la **hora** en 60 minutos, el **minuto** en 60 segundos. El año **común** tiene 365 días, y cada cuatro años se cuenta uno de 366 días que se llama **bisiesto,** por ejemplo el año de 1896.

202. Toda **circunferencia** se considera dividida en 360 partes iguales que se llaman grados, el **grado** se divide en 60 minutos y el **minuto** en 60 se-

gundos. También se divide la circunferencia en 4 cuadrantes y cada **cuadrante** en 90 grados ó sea el valor de un ángulo recto.

203. El **papel** se cuenta por balones, resmas, manos, cuadernos y pliegos. El **balón** tiene 20 resmas, la **resma** 20 manos, la **mano** 5 cuadernos y el **cuaderno** 5 pliegos. Las dimensiones que generalmente se usan en el papel para impresiones son las siguientes: **duplo** $46\frac{1}{2}\times67\frac{1}{2}$ centímetros, **triple** $60\times80\frac{1}{2}$ centímetros, **cuádruplo** $67\frac{1}{2}\times93\frac{1}{2}$ centímetros, **quíntuplo** $74\frac{1}{2}\times111$ centímetros, **séxtuplo** 81×120 centímetros, etc.

204. Los cálculos que se ejecutan con los números denominados, son los siguientes:

I. Reducir unidades de especie **mayor á menor y viceversa.**

II. Convertir un número **denominado** en **quebrado común** y **viceversa.**

III. Convertir un número **denominado** en **decimal** y **viceversa.**

IV. Hacer **sumas, restas, multiplicaciones** y **divisiones** con números **denominados.**

205. **Primer problema.** Se desea saber ¿cuántos días serán 8 años, 7 meses, 25 días?

Solución. Sabiendo que 1 año tiene 12 meses, 8 años siete meses serán: $8\times12+7=103$ meses. El mes tiene 30 días, luego 103 meses 25 días serán $103\times30+25=3115$ días.

Se disponen los cálculos de esta manera:

$$
\begin{array}{rl}
8 & \text{años 7 meses 25 días.} \\
\times\ 12 & \\
\hline
96 & \\
+\ \ 7 & \\
\hline
103 & \text{meses.} \\
\times\ 30 & \\
\hline
3090 & \\
+\ 25 & \\
\hline
3115 & \text{días.}
\end{array}
$$

El resultado del problema es igual á 3115 días.

Para reducir un número denominado de especie **mayor á menor**, se multiplican las unidades mayores por el número de unidades menores que contenga cada unidad mayor, agregando al producto las unidades de la misma especie; así se continuará la operación hasta las últimas unidades inferiores que indique el número denominado.

206. **Segundo problema.**—Se desea saber ¿cuántos años, meses y días serán 3115 días?

Solución. Sabiendo que el mes es la unidad inmediata superior al día, veo cuántas veces caben 30 días que tiene el mes en 3115 días por medio de una **división**, el residuo que queda es de 25 días y el cociente 103 meses se convierte en años ejecutando otra **división** entre 12 que da 7 meses de residuo y 8 años de cociente.

Coloco los números de esta manera:

3115 días	30 días	
115	103 meses	12 meses
25 días	7 meses	8 años 7 meses 25 días

El resultado es igual á 8 años, 7 meses, 25 días.

Para reducir un número denominado de especie **menor á mayor** se dividen las unidades menores por el número de las de igual clase de que se compone una mayor, el cociente indicará el número de unidades mayores y el residuo indicará las menores; así se continuará la operación hasta llegar á la primera unidad superior con la cual comience el número denominado.

207. **Tercer problema.** ¿A qué número quebrado de año equivaldrán 10 meses 15 días?

Solución. Este problema se puede resolver de dos maneras: 1ª, sabiendo que un mes es igual á $\frac{1}{12}$ de año, 10 meses serán $\frac{10}{12}$ de año. Un día es $\frac{1}{360}$ de año, y 15 días serán $\frac{15}{360}$ de año. La suma de los quebrados $\frac{10}{12}$ y $\frac{15}{360}$ de año será igual á $\frac{315}{360}$ de año, que dividiendo sus dos términos por 45 dará como resultado final $\frac{7}{8}$ de año. 2ª, sabiendo que un mes vale 30 días, 10 meses valdrán $30\times 10=300$ días, más 15 días son 315 días; pero como 1 día es igual á $\frac{1}{360}$ de año, 365 días serán $\frac{315}{360}$ de año, y simplificando este quebrado quedará transformado en $\frac{7}{8}$ de año.

Se colocarán los números del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 10 \text{ meses } 15 \text{ días} \\ \times\ 30 \\ \hline 300 \\ +\ 15 \\ \hline 315 \end{array} \qquad \frac{315}{360}=\frac{7}{8} \text{ de año.}$$

El resultado es de 10 meses 15 días que equivalen á $\frac{7}{8}$ de año.

Para convertir un número denominado en quebrado, se reduce á la especie menor y se le pone por denominador el número de unidades menores de que se compone la mayor.

208. **Cuarto problema.** ¿A qué número denominado equivaldrán $\frac{7}{8}$ de año?

Solución. La solución de este problema comprende dos partes: 1ª, $\frac{8}{8}$ de año equivalen á 12 meses, $\frac{7}{8}$ de año ¿á cuántos meses equivaldrán? Se obtiene como resultado 10 meses y $\frac{4}{8}$ de mes. 2ª, $\frac{8}{8}$ de mes equivalen á 30 días, $\frac{4}{8}$ ¿á cuántos días equivaldrán? Se obtiene como resultado 15 días. Por consiguiente: $\frac{7}{8}$ de año equivalen á 10 meses 15 días exactamente.

El planteo se hará así:

Primera parte:

Años.		Meses.
$\frac{8}{8}$	....	12
$\frac{7}{8}$	....	$x = 1\frac{4}{8}$ meses.

$$
\begin{array}{l|lcl}
(1) & \dfrac{8}{8} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12 \\[2ex]
(2) & \dfrac{1}{8} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{12}{8} \\[2ex]
(3) & \dfrac{7}{8} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{12\times 7}{8}
\end{array}
$$

Segunda parte:

Meses.		Días.
$\frac{8}{8}$	....	30
$\frac{4}{8}$	....	$x = 15$ días.

(1) $\frac{8}{8}$ 30

(2) $\frac{1}{8}$ .... $\frac{30}{8}$

(3) $\frac{4}{8}$ .... $\frac{30 \times 4}{8}$

También puede hacerse el planteo de este modo:

$$
\begin{array}{r|l}
7 & 8 \\ \cline{2-2}
\times\ 12 \text{ meses} & 0 \text{ años } 10 \text{ meses } 15 \text{ días} \\ \cline{1-1}
84 & \\
04 & \\
\times\ 30 \text{ días} & \\ \cline{1-1}
120 & \\
40 & \\
0 &
\end{array}
$$

El resultado de la operación es de 10 meses 15 días.

Para convertir un quebrado en denomidado se divide el numerador por el denominador y si hay residuo se multiplicará por el número de unidades inferiores inmediatas, dividiendo después el producto por el denominador, y así se continuará hasta llegar á la última especie inferior.

209. **Quinto problema.** —¿A qué fracción decimal de año equivaldrán 10 meses 15 días?

Solución Para resolver este problema se transforma el denominado 10 meses 15 días en el quebrado $\frac{315}{360}$ de año, en seguida dicho quebrado se transformará en fracción decimal.

La decimal que corresponde al quebrado $\frac{315}{360}$ es 0.875 milésimos de año.

Para convertir un denominado en decimal se transforma primero el denominado en quebrado y después el quebrado en decimal.

210. **Sexto problema.**—¿A qué número denominado equivaldrán 0, años 875 milésimos de año?

Solución. La solución de este problema comprende dos partes: 1ª., 1000 milésimos de año equivalen á 12 meses, 875 milésimos ¿á cuántos meses equivaldrán? Hecho el cálculo correspondiente, se obtendrán 10 meses y 5 décimos de mes. 2ª., 10 décimos de mes equivalen á 30 días, 5 décimos ¿á cuántos días equivaldrán? Hechos los cálculos se obtendrán 15 días exactamente.

El planteo se hará así:

Primera parte:

	Milésimos de año.		Meses.
	1000	....	12
	875	....	$X = 10{,}5$
(1)	1000	....	12
(2)	1	....	$\frac{12}{1000}$
(3)	875	....	$\frac{12 \times 875}{1000}$

Segunda parte:

Décimos de mes.		Días.
10	....	30
5	....	X = 15

(1)	10	....	30
(2)	1	....	$\frac{30}{10}$
(3)	5	....	$\frac{30\times 5}{10}$

También puede hacerse el planteo de este modo:

Años.

$0{,}875 = 10$ meses 15 días.

$\times$ 12

1750
875

10,500 meses.

$\times$ 30

15,000 días.

El resultado es igual á 10 meses 15 días.

Para convertir una decimal en número denominado, se considerará la parte entera como parte del denominado con su especie correspondiente y la parte decimal se multiplica por el número de subdivisiones de que consta la unidad á que corresponde, separando en el producto igual número de cifras decimales. Se considerará de nuevo la parte entera como parte del denominado y la parte decimal se volverá á multiplicar por las subdivisiones siguientes; así se continuará hasta la última subdivisión de que conste el número denominado.

211. **Séptimo problema**. En una imprenta se han gastado en una semana las siguientes cantidades de papel: el lunes 25 balones, 15 resmas, 17 manos, 4 cuadernos, 3 pliegos; el martes 18 balones, 19 resmas, 19 manos, 3 cuadernos, 2 pliegos; el miércoles 49 balones, 18 resmas, 16 manos, 2 cuadernos, 4 pliegos; el jueves 75 balones, 16 resmas, 15 manos, 1 cuaderno; el viernes 70 balones, 14 resmas, 13 manos. ¿Qué cantidad de papel se ha consumido en los cinco dias?

Solución. En el sistema decimal la suma se efectúa de los órdenes menores á los mayores; aquí por semejanza procederemos del mismo modo: sumando las cantidades homoespecíficas inferiores y reduciéndolas sucesivamente á las homoespecíficas superiores inmediatas, será el procedimiento más sencillo para la solución de este problema.

Coloco los números de manera que todas las cantidades de la misma especie formen una sola columna vertical.

	Balones.	Resmas.	Manos.	Cuadern s.	Pliegos.
	25	15	17	4	3
+	18	19	19	3	2
	49	18	16	2	4
	75	16	15	1	0
	70	14	13	0	0
	241	6	2	1	4

Se comienza la suma por las unidades inferiores, de esta manera: $3+2+4=9$ pliegos, en cuya cantidad hay un cuaderno 4 pliegos; agrego los cuadernos á la columna inmediata y digo: $1+4+3+2+1=11$ cuadernos que son dos manos 1 cuaderno; agrego las manos á la columna inmediata y digo: $2+17+19+16+15+13=82$ manos que son cuatro resmas dos manos; agrego las resmas á la columna siguiente: $4+15+19+18+16+14=86$ resmas que son cuatro balones 6 resmas; agrego los balones á la columna siguiente: $4+25+18+49+75+70=241$ balones. El resultado de la operación es de 241 balones, 6 resmas, 2 manos, 1 cuaderno y cuatro pliegos de papel gastados en los cinco días.

Para sumar números **denominados** se colocan las cantidades de la misma especie unas debajo de otras de manera que formen columna vertical; en seguida se procede á la suma comenzando por las cantidades de especie inferior, teniendo cuidado de ir agregando sucesivamente á la columna inmediata las cantidades superiores que están contenidas en las sumas anteriores.

212. **Octavo problema.** Se han medido dos ángulos: el mayor mide 87 grados, 12 minutos, 15 segundos; el menor mide 63 grados, 45 minutos, 57 segundos; ¿cual será la diferencia?

Solución. Lo mismo que en el sistema decimal se opera comenzando por los órdenes inferiores, así aquí se conenzará restando sucesivamente las cantidades de la misma especie pero comenzando por las de orden inferior, tal es el prcedimiento que deberá emplearse para la resolución de este problema.

Se colocan las cantidades de la misma especie unas debajo de otras de manera que formen columna vertical.	87° ... 12′ ... 15″ 63° ... 45′ ... 57″ ——— ——— ——— 23° ... 26′ ... 18″

Se comienza la resta de este modo: 15″ menos 57″ no pueden restarse, agrego á los primeros un minuto que vale sesenta segundos y quince son 75—57 = 18 segundos; los doce minutos se convierten en 11′ menos 45′ no pueden restarse, les agrego un grado que vale sesenta minutos y once son 71—45=26 minutos; por último, los ochenta y siete grados se convierten en 86—63=23 grados. El resultado de la operación es de 23°, 26′, 18″.

Para **restar** números **denominados** se colocan las cantidades de la misma especie unas debajo de otras, de manera que formen columna vertical; en seguida se comienza la resta por las de orden inferior teniendo cuidado de agregar una unidad mayor reducida á la menor especie, cuando las cifras del minuendo sean menores que las del substraendo á fin de poder facilitar la resta.

213. **Noveno problema.** Un empledo permaneció en un empleo 2 años, 8 meses, 15 días, ganando 25 pesos mensuales, se desea seber ¿qué cantidad de dinero había ganado en dicho tiempo?

Solución. (1) En 30 días se ganan 25 pesos. (2) En un día se ganará la treintava parte de 25 pesos. (3) En 975 días se ganarán novecientas setenta y cinco veces más el valor de un día.

Se colocan los números de este modo:

	Días.		Pesos.
	30	....	25
	975	....	X=$ 812·50
(1)	30	....	25
(2)	1	....	$\frac{25}{30}$
(3)	975	....	$\frac{25 \times 975}{30}$

El empleado ganó 812 pesos 50 centavos.

Para **multiplicar** números denominados se transformarán los datos del problema de manera que formen un problema **combinado** de multiplicación y división y se resolverá descomponiéndolo en problemas simples.

214. **Décimo problema**. Sabiendo que un empleado ha ganado 812 pesos 50 centavos en 2 años 8 meses 15 días, se desea saber ¿cuánto habrá ganado anualmente?

Solución. (1) En 975 días se han ganado 812 pesos 50 centavos. (2) En un día se ganarán 975 veces menos. (3) En 360 días se ganarán 360 veces lo de un día. El planteo se hará así:

	Días.		Pesos
	975	....	812·50
	360	....	X=$ 300
(1)	975	....	812·50
(2)	1	....	$\frac{812{\cdot}50}{975}$
(3)	360	....	$\frac{812{\cdot}50 \times 360}{975}$

El sueldo anual es de 300 pesos.

Para **dividir** números denominados se transformarán los datos del problema de manera que formen un problema **combinado** de multiplicación y división y se resolverá descomponiéndolo en problemas **simples**.

Problemas.—416 Averiguar, 3 siglos, 75 años, 11 meses, 20 días, ¿cuántos días son?

417. Un ángulo mide 47 grados, 25 minutos, 17 segundos, ¿cuál será su valor en segundos?

418. ¿Cuántos pliegos de papel serán 25 balones, 15 resmas, 18 manos, 3 cuadernos y 3 pliegos?

419. Se desea saber, un billón de segundos, ¿cuántos minutos, horas, días, meses, años y siglos serán?

420. ¿Cuántos segundos, minutos y grados serán un millón quinientos mil segundos?

421. Se desea saber ¿cuántos balones, resmas, manos, cuadernos y pliegos de papel serán 150 millones de pliegos?

422. Convertir en quebrado común de mes, 5 años, 10 meses, 13 días y 14 horas.

423. Convertir en fracción común de grado, 3 grados, 20 minutos 18 segundos.

424. Convertir en quebrado común de resma de papel 15 manos 23 pliegos.

425. ¿A qué número denominado equivalen $\frac{13}{16}$ de siglo?

426. ¿A qué número denominado equivaldrán $\frac{18}{25}$ de grado?

427. ¿A qué número denominado equivaldrán $\frac{14}{3}$ de balón de papel?

428. ¿Cuál será la fracción decimal de siglo equivalente á 20 años 3 meses 25 días?

429. ¿Cuál será la fracción decimal de grado, equivalente á 7 grados 40 minutos y 50 segundos?

430. ¿Cuál será la fracción decimal de balón de papel equivalente á 50 resmas 15 manos?

431. ¿Qué número denominado será el equivalente de 8 años y 497 millonésimos de año?

432. ¿Qué número denominado será el equivalente de 15 grados y 293 cienmilésimos de grado?

433. ¿Qué número denominado será el equivalente de 25 balones de papel y 745 diez milésimos de balón?

434. Sumar los siguientes números denominados: 18 siglos 14 años 11 meses +73 años 10 meses 15 días+7 meses 14 días 12 horas+17 años 24 horas 25 minutos 13 segundos + 15 años 10 meses 15 días 20 horas+ 13 lustros 2 años.

435. Sumar los siguientes números denominados: 45 grados 13 minutos 20 segundos + 70 grados 49 minutos 12 segundos+17 grados 30 minutos 59 segundos + 80 grados 50 minutos 50 segundos.

436. Sumar los siguientes números denominados: 18 balones 15 resmas 15 manos + 25 resmas 13 manos 4 cuadernos + 16 resmas 6 manos 3 cuadernos 4 pliegos + 15 manos 20 pliegos + 18 resmas 14 manos.

437. Dos viajeros hicieron el mismo camino: el primero en 50 días 13 horas 25 minutos; el segundo en 33 días 7 horas 45 minutos: ambos anduvieron 13 horas diarias, ¿cuánto tiempo menos que el segundo viajero empleó el primero?

438. ¿Cuál será la diferencia entre 80 grados 13 minutos 12 segundos y 50 grados 40 minutos y 37 segundos?

439. En la impresión de un libro se gastaron 45 resmas 15 manos 10 pliegos de papel y en otra 30 resmas, 19 manos 24 pliegos, ¿cuánto menos de papel se gastó en la segunda impresión?

440. Un dependiente ha trabajado 13 años 10 meses 15 días ganando 80 pesos 75 centavos mensuales, ¿cuanto habrá ganado en dicho tiempo?

441. En una hora cada punto de la circunferencia de una rueda corre 2 grados 25 minutos ¿cuanto tiempo empleará en correr 80 grados 40 minutos 27 segundos?

442. Costando la resma de papel 4 pesos 25 centavos, se desea saber ¿cuánto costarán 18 resmas 15 manos 21 pliegos?

443. ¿Cuánto ganará por día un obrero que ha ganado 425 pesos 30 centavos en dos años 4 meses 8 días?

444. La distancia del ecuador al polo es de 90 grados, ¿cuál será en miriámetros la longitud de 1 grado y en metros la de un minuto y 1 segundo de grado?

445. Con 800 pesos se han comprado 4 balones de papel 12 resmas 15 manos, ¿á cómo costó la resma?

446. La distancia de dos ciudades que se hallan sobre un mismo meridiano es 5340 kilómetros, ¿cuál será la porción de meridiano comprendida entre esas dos ciudades?

447. La distancia entre dos ciudades es de 4 grados 12 minutos de grado, ¿cuántos kilómetros serán?

448. Una circunferencia mide 12 metros de longitud, ¿cuál será la longitud de un arco de ella que mide 37 grados 8 minutos?

449. Suponiendo que la tierra en su movimiento alrededor del sol corre cerca de 92 millones de miriámetros en un año, ¿cuánto correrá por día, por hora, por minuto y por segundo?

450. Sabiendo que el meridiano terrestre mide 40 millones de metros, se desea saber ¿cuál será la longitud de un grado, de un minuto y de un segundo?

451. El agua de un molino hace ascender cierto objeto á 2 metros 45 centímetros por cada grado de la rueda, ¿cuántos grados debe correr la rueda para que el objeto ascienda á 12 metros?

452 La rueda de una máquina da una vuelta en 12 horas; ¿cuántos grados corre en 1 hora cada punto de la circunferencia de la rueda?

453 Un ferrocarril corre 40 kilómetros por hora; ¿cuánto podrá caminar en 4 días 7 horas y 25 minuto ?

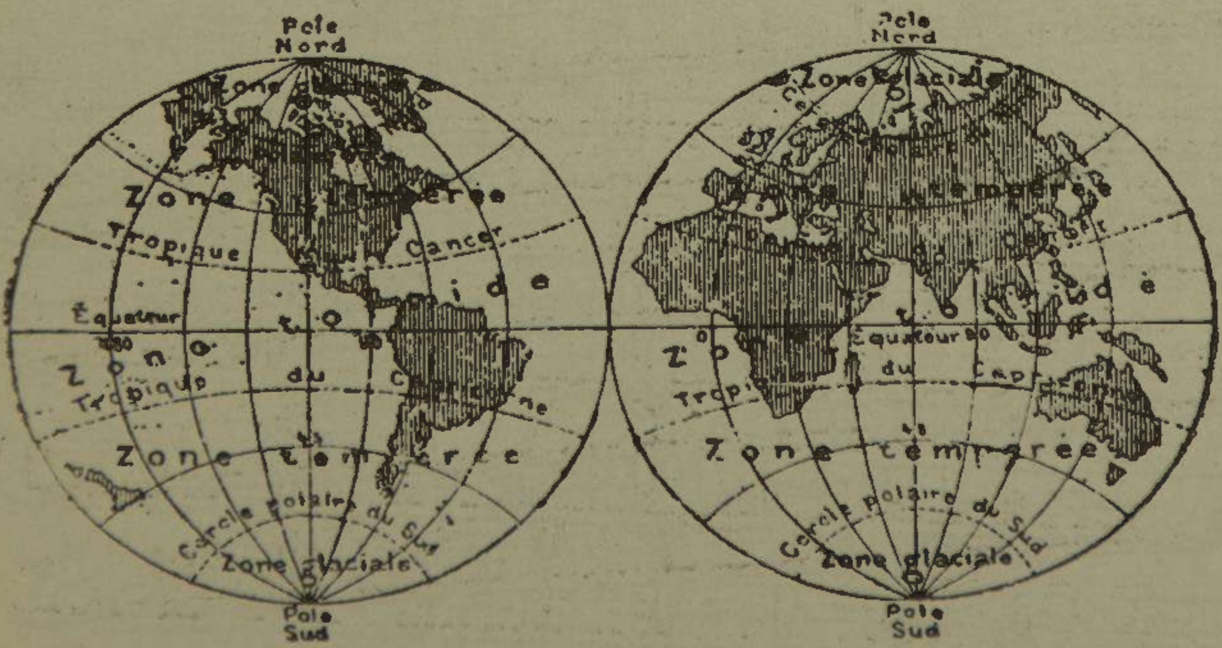
454 Sabiendo que con 4 resmas de papel se tiran 4000 ejemplares de un libro que sólo tiene 16 páginas; se desea saber, una obra de 345 páginas ¿qué cantidad de papel se consumirá en ella?

455. Un carruaje recorre con una vuelta de sus ruedas mayores una distancia de 6 metros, y camina 2 kilómetros por hora; se desea saber, ¿en qué tiempo recorrerá 25 kilómetros y cuántas vueltas habrá dado una de las ruedas mayores?

CAPITULO XIII.

Sistema nacional de pesas y medidas.

215. El sistema moderno de pesas y medidas adoptado actualmente en la República Mexicana, es el que se conoce con el nombre de "sistema métrico decimal," y también con el nombre de "sistema francés." Se le llama sistema métrico porque tiene por base una medida lineal llamada **metro**, que es la cuarenta millonésima parte del meridiano terrestre que pasa por la ciudad de París. Se le llama decimal porque todas sus medidas, tanto las grandes como las pequeñas, se han dividido en diez partes iguales, siguiendo exactamente las leyes de nuestro sistema de numeración. Finalmente, se le llama sistema francés porque fué inventado en Francia por una sociedad de ingenieros franceses.



En cada género de medidas del sistema moderno hay una **unidad principal**, que se toma como base ó punto de partida para calcular el valor de las demás medidas que le son mayores ó menores.

Las medidas mayores que la unidad principal se llaman **múltiplos** y se expresan con las palabras griegas siguientes: **Deca** que significa diez, **Hecto** que significa cien, **Kilo** que significa mil y **Miria** que significa diez mil.

Las medidas menores que la unidad principal se llaman **submúltiplos** y se expresan con las palabras latinas siguientes: **deci** que significa décima parte, **centi** que significa centésima parte, y **mili** que significa milésima parte.

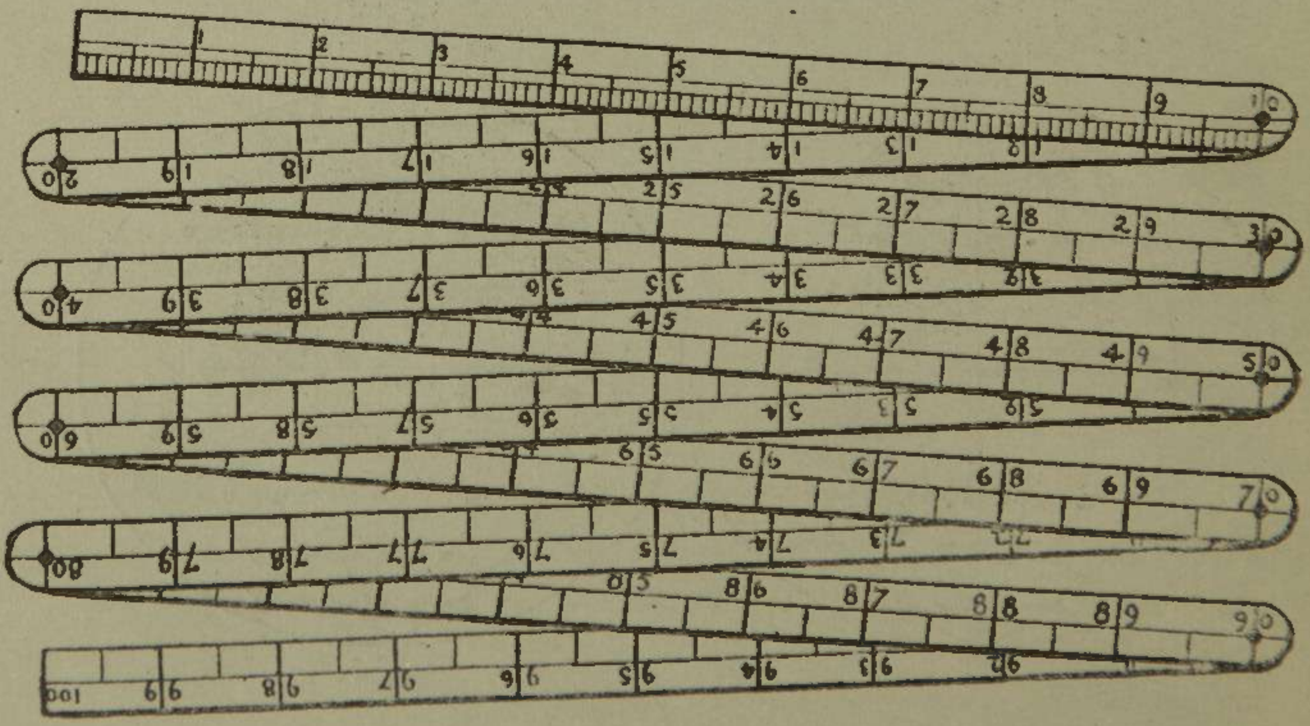
Para expresar en la escritura las medidas modernas se usarán para los múltiplos las letras iniciales mayúsculas y para los submúltiplos las letras iniciales minúsculas, por ejemplo, **DM** significa decámetro y **dm** significa decímetro, etc.

El sistema métrico moderno comprende las medidas siguientes:

1º Medidas de longitud. —2º Medidas de superficie.— 3º Medidas de volumen. —4º Medidas de capacidad para semillas y líquidos.—5º Medidas de peso.—6º Monedas.

216. Las medidas de **longitud** tienen por objeto medir líneas, determinar distancias ó bien medir el largo, el ancho y la altura de los cuerpos.

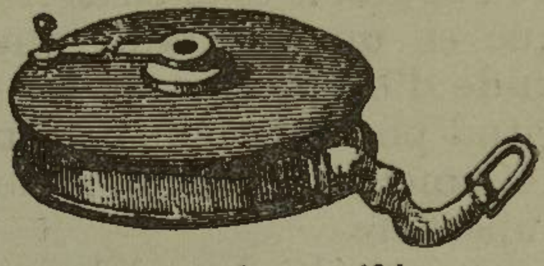
La base de las medidas modernas de longitud es el Me-



tro lineal (M) que es una línea recta igual á la diez millonésima (0'0000001) parte del cuadrante del meridiano terrestre, ó sea la distancia del polo al ecuador.

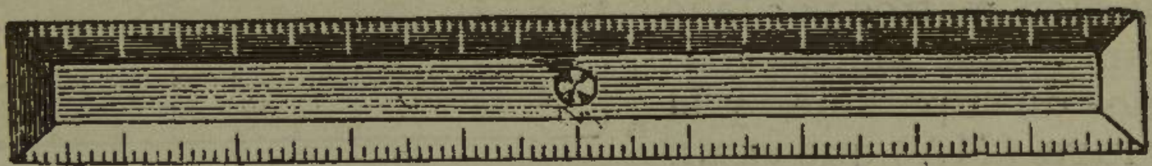
Los múltiplos del metro lineal son: el **Decámetro** (DM) que vale 10 metros, el **Hectómetro** (HM) que vale 100 metros, el **Kilómetro** (KM) que vale 1,000 metros, y el **Miriámetro** (MM) que vale 10,000 metros.

Los submúltiplos del metro lineal son: el **decímetro** (dm) que vale la décima parte (0'1) del metro, el **centímetro** (cm) que vale la centésima parte (0'01) del metro y el **milímetro** (mm) que vale la milésima parte (0'001) del metro.



Las medidas de longitud que conforne á la ley deben usarse en el comercio son: el **metro**, el **doble decímetro** y el **decímetro**.

Estas medidas podrán ser de madera ó de metal y las rayas que indiquen los decímetros, los centímetros y los milímetros serán perfectamente visibles.



El decámetro se puede representar por una cinta ó bien por una cadena de fierro de diez metros, que recibe el nombre de cadena métrica. El hectómetro, el kilómetro y el miriámetro son medidas imaginarias que sólo se emplean en los cálculos.

Las cantidades que expresan medidas lineales se escriben lo mismo que los números enteros y los números decimales; es decir, si la coma decimal se coloca en los metros por ejemplo, los múltiplos del metro representarán los números enteros y los submúltiplos representarán los números decimales. No obstante, la coma decimal puede colocarse en cualquier lugar de los múltiplos ó de los submúltiplos, teniendo cuidado de dar el nombre que le corresponda á la unidad de medida á cuya derecha se encuentre.

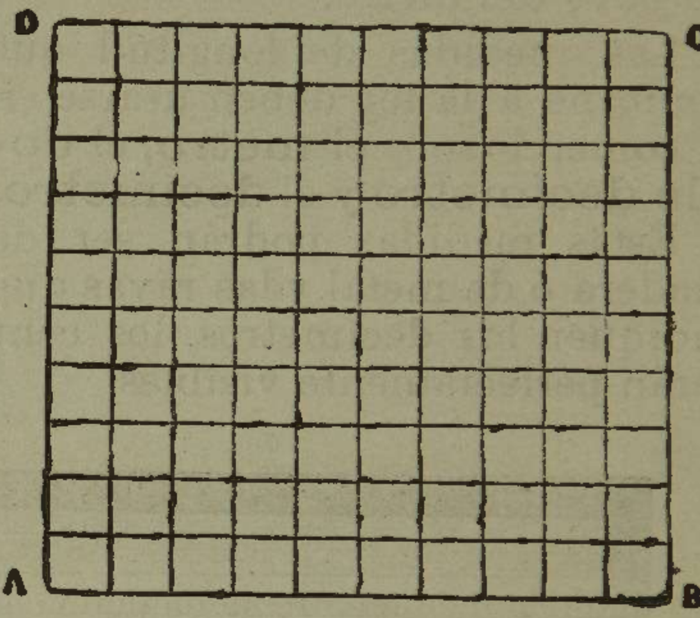
Supongamos la cantidad 45698,^{M}325 milímetros puede escribirse de los siguientes modos:

1º 45693'^{M}325.=2º 4569'^{DM}3325.=3º 456'^{HM}93325.= 4º 45'^{KM}693325.= 5º 4'^{MM}5693325. = 6º 456933'^{dm}25.= 7º 4569332'^{cm}5.=8º 45693325'^{mm}.

Del ejemplo que antecede se deduce que toda cantidad que represente metros lineales puede expresarse de diferentes maneras, ya sea expresando múltiplos ó submúltiplos, corriendo la coma en el primer caso hacia la izquierda y en el segundo caso hacia la derecha.

217. Las medidas de **superficie** tienen por objeto medir la cara ó faz de todos los cuerpos.

La base de las medidas de superficie es el **ara** (A) que es un cuadrado que mide diez metros de longitud por cada lado ó sean 100 metros cuadrados de superficie.



Los múltiplos del ara son la **hectara** (HA) que es un cuadrado que mide cien metros por lado ó sean 10,000 metros cuadrados de superficie, y la **miriara** (MA) que es un cuadrado que mide mil metros por lado ó sean 1 000,000 de metros cuadrados de superficie.

El submúltiplo del ara es: la **centiara** (cA) ó metro cuadrado que es la centésima parte (0'01) del ara

Se consideran además como submúltiplos del metro cuadrado los siguientes: el **decímetro cuadrado** que es la centésima parte (0 01) del metro cuadrado; el **centímetro cuadrado** que es la diez milésima parte (0 0001) del metro cuadrado y el **milímetro cuadrado** que es la millonésima parte (0'000001) del metro cuadrado.

Para determinar las divisiones de las medidas de superficie, basta multiplicar por sí misma la longitud de un lado y el producto que resulte indicará las divisiones que se buscan; por ejemplo, sabiendo que el metro lineal se divide en 10 decímetros, 100 centímetros y 1,000 milímetros lineales, el metro cuadrado medirá $10 \times 10 = 100$ decímetros cuadrados, 100 × 100=10,000 centímetros cuadrados, y 1,000×1,000=1.000,000 de milímetros cuadrados.

Considerándose como un producto de dos números las cantidades que expresan medidas de superficie, es evidente que al escribirlas deben indicarse con doble número tanto los múltiplos como los submúltiplos, cuyas cifras deberán contarse partiendo de la coma decimal, ya sea á la derecha ó á la izquierda.

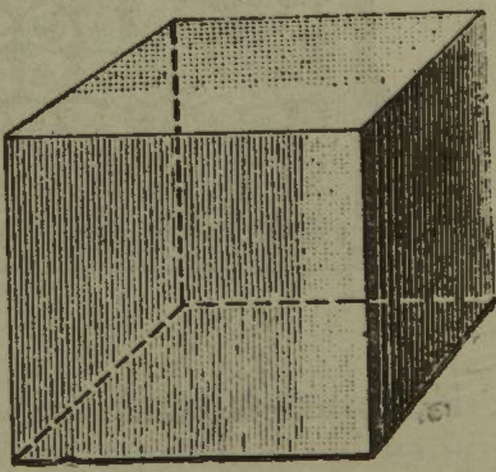
La cantidad 789265‘A39 puede escribirse de los modos siguientes:

1º 789265‘A39.=2º 7892‘HA6539.=3º 78‘MA926539
=4º 78926539‘cA

Otro ejemplo de una cantidad que expresa medidas de superficie y diferentes modos de escribirla:

1º 48‘M²876512.=2º 4887‘dm²6512 =3º 488765‘cm²12.
=4º 48876512mm².

218. Las medidas de **volumen** tienen por objeto determinar la parte de espacio que ocupan los cuerpos; por ejemplo, la capacidad interior de una habitación, de un estanque, etc.



La base de las medidas modernas de volumen es el **metro cúbico** (M^3) que tiene la forma de un cubo, cuyo lado tiene un metro de longitud y sus seis caras son metros cuadrados.

El metro cúbico carece de múltiplos porque dichas medidas no se usan en la práctica.

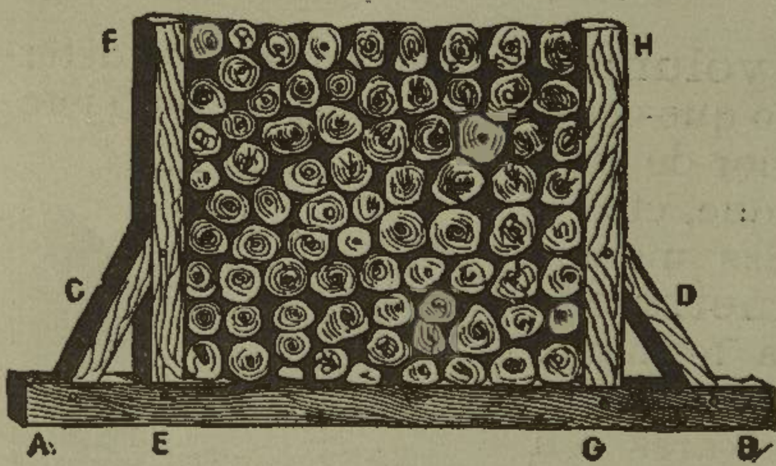
Los submúltiplos del metro cúbico son: el **decímetro cúbico** (dm^3) que es la milésima parte (0‘001) del metro cúbico; el **centímetro cúbico** (cm^3) que es la millonésima parte (0,000001) del metro cúbico, y el **milímetro cúbico** (mm^3) que es la milmillonésima parte.................. (0‘000000001) del metro cúbico.

Para determinar las divisiones de las medidas de volumen basta tomar tres veces como factor la longitud de un lado y el producto que resulte indicará las divisiones que se buscan; por ejemplo, sabiendo que el metro lineal se divide en 10 decímetros, 100 centímetros y 1000 milímetros lineales, el metro cúbico medirá $10 \times 10 \times 10 = 1000$ decímetros cúbicos, $100 \times 100 \times 100 = 1.000,000$ de centímetros cúbicos y $1000 \times 1000 \times 1000 = 1,000.000,000$ de milímetros cúbicos.

Considerando como un producto de tres números las cantidades que expresan medidas de volumen, es evidente que al escribirlas deben indicarse con triple número de cifras decimales, las cuales deberán contarse partiendo de la coma decimal, ya sea para la derecha ó ya para la izquierda.

La cantidad $48^{\text{'M}^2}125347896$, puede escribirse de los modos siguientes:

1º $48^{\text{'M}^2}125347896. =$ 2º $48125^{\text{'dm}^3}347896. =$
3º $48125347^{\text{cm}^3}896 =$ 4º $48125347896^{\text{mm}^3}$.



Para medir el volumen de la leña y las maderas de construcción se usa del **esterio** (E) que equivale exactamente al metro cúbico.

El único múltiplo del esterio es el **decaesterio** (DE) que vale 10 esterios ó diez metros cúbicos.

El único submúltiplo del esterio es el **deciesterio** (de) que es la décima parte (0'1) del esterio ó del metro cúbico, y que vale, por consiguiente, 100 decímetros cúbicos.

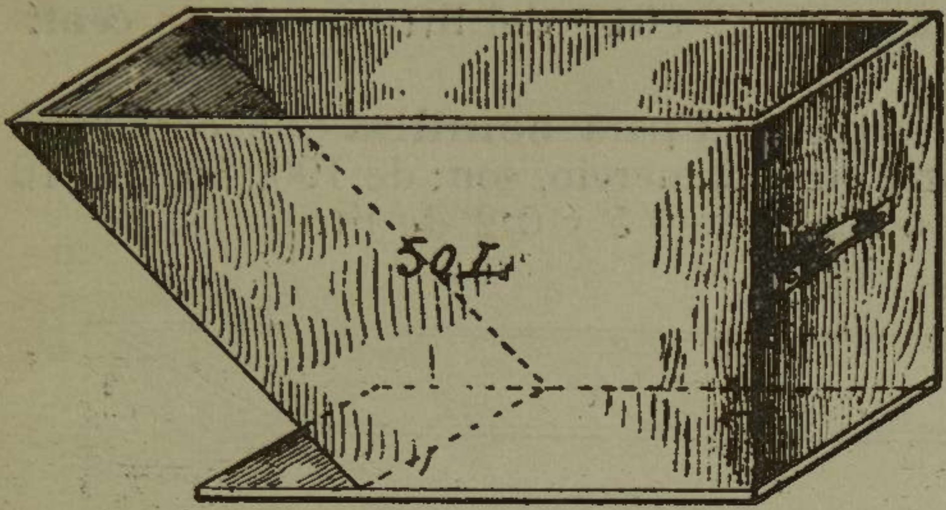
Como medidas efectivas se usan el **medio decaesterio**, el **doble esterio** y el **esterio**.

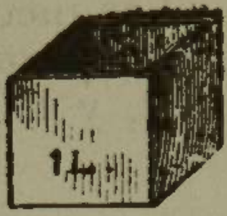
Las cantidades que expresan esterios ó su múltiplo y submúltiplo se representan con una sola cifra decimal.

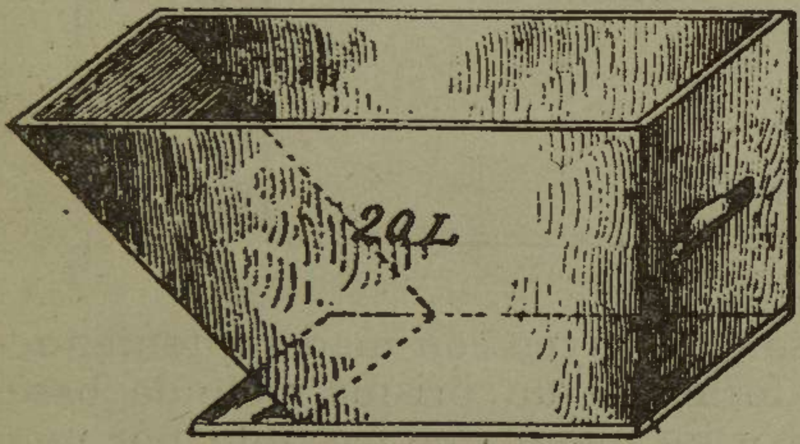
Ejemplos para indicar los diferentes modos como pueden escribirse estas medidas.

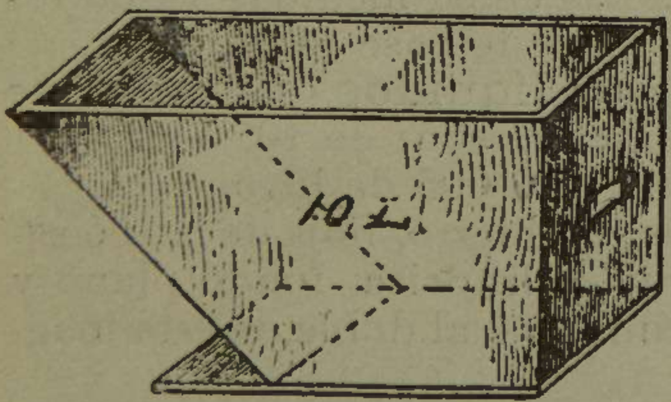
1º $82^{\text{'E}}3. =$ 2º $8^{\text{'DE.}}23. =$ 3º 823^{de}.

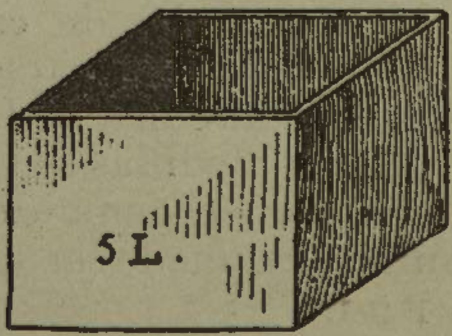
219. **La base de las medidas de capacidad para semillas y líquidos es el litro (L) que es un cubo que mide exactamente un decímetro cúbico.**







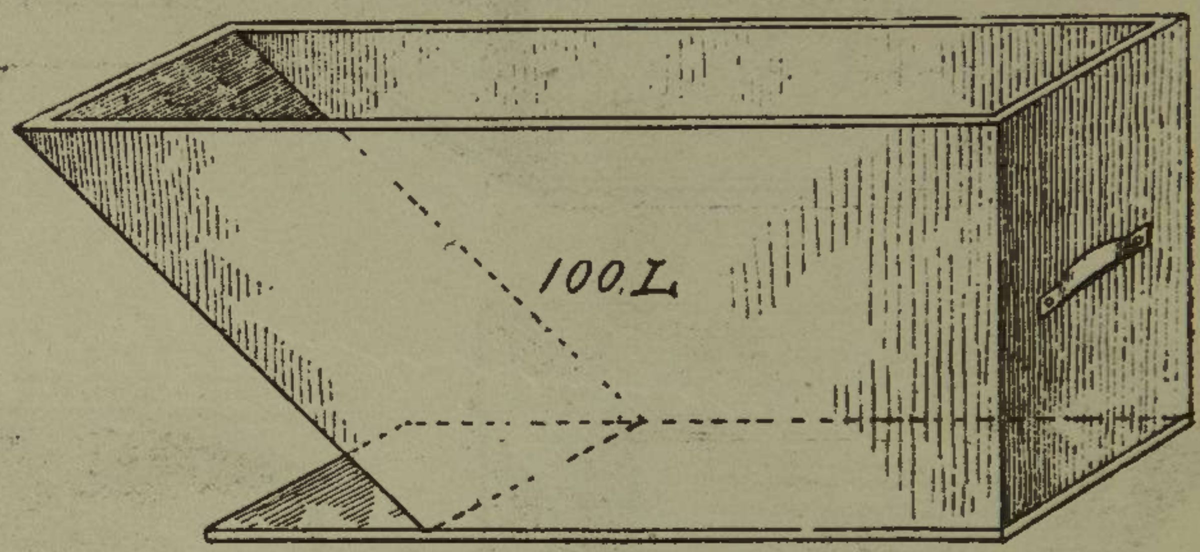




Los múltiplos del litro son: **decálitro** (DL) que vale 10 litros ó diez decímetros cúbicos, el **hectólitro** (HL) que vale 100 litros ó cien decímetros cúbicos, y el **kilólitro** (KL) que vale 1,000 litros ó un metro cúbico.

Los submúltiplos del litro son: el **decílitro** (dl) que es la décima parte (0'1) del litro ó sean cien centímetros cúbicos, el **centílitro** (cl) que es la centésima parte (0'01) del litro ó sean diez centímetros cúbicos, y el **milílitro** (ml) que es la milésima parte (0'001) del litro ó sea un centímetro cúbico.

Las medidas de capacidad para **semillas** que conforme á la ley deben usarse en el comercio, son: de 100, 50, 20, 10 5, 2, y 1 litros, y además de 0·5 y 0'2 de litro.



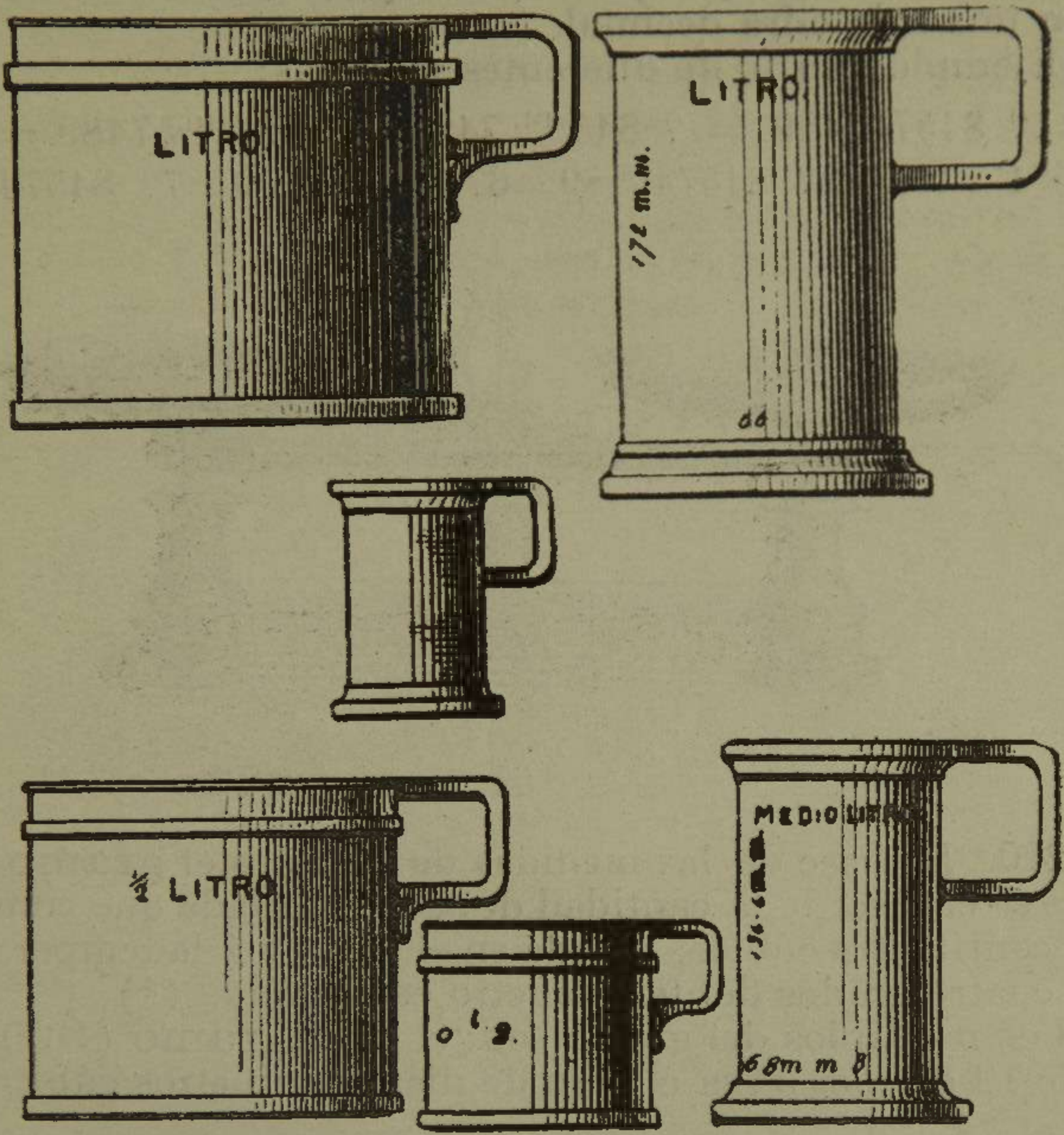
Todas estas medidas se construyen con madera, teniendo las cuatro primeras las forma de un prisma recto de base rectangular, truncado por un plano que pasando por una de las aristas menores de su base superior forme con la misma un ángulo de 135 grados. Las cinco medidas restantes tienen la forma de un prisma recto de base rectangular.

Las medidas de capacidad para **líquidos** que conforme á la ley deben usarse en el comercio son: de 10, 5, 2, y 1 litros, y además de 0'5, 0'2, 0'1 y 0'005 de litro.

Estas medidas se construyen con hierro, hoja de lata ó estaño: tienen generalmente forma cilíndrica, fondo plano y su altura puede ser igual al diámetro ó al doble de esta magnitud.

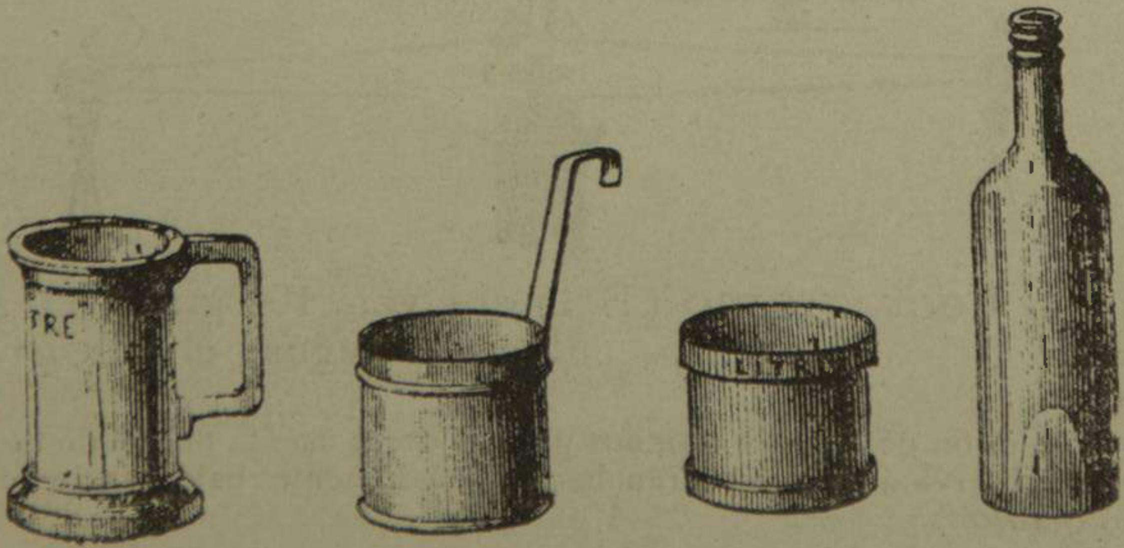
El **litro** es la medida que deberá usarse para la medida de las aguas rústicas y urbanas. En el cómputo de las primeras se tomará por unidad de tiempo el **segundo** y en el de las urbanas el **minuto**.

Un **surco** se considerará igual á **seis litros y medio por segundo** en las aguas rústicas, y en las urbanas se con-



siderará la paja igual á cuarenta y cinco centésimos de litro por minùto.

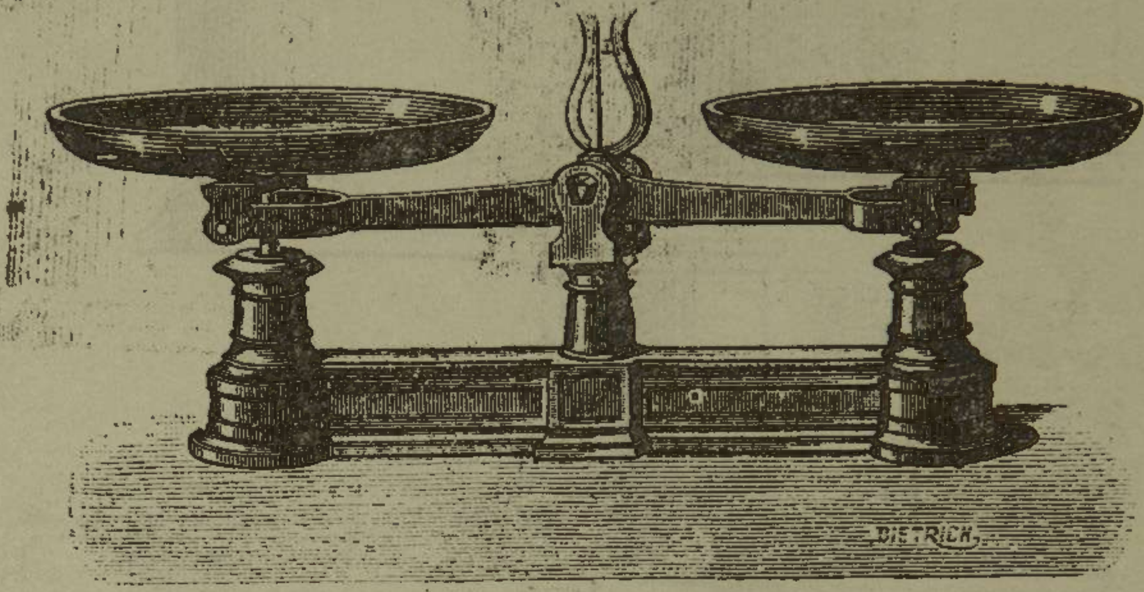
Como se cuentan de diez en diez las medidas de capaci-



dad para semillas y líquidos, se representan en la escritura con una sola cifra decimal.

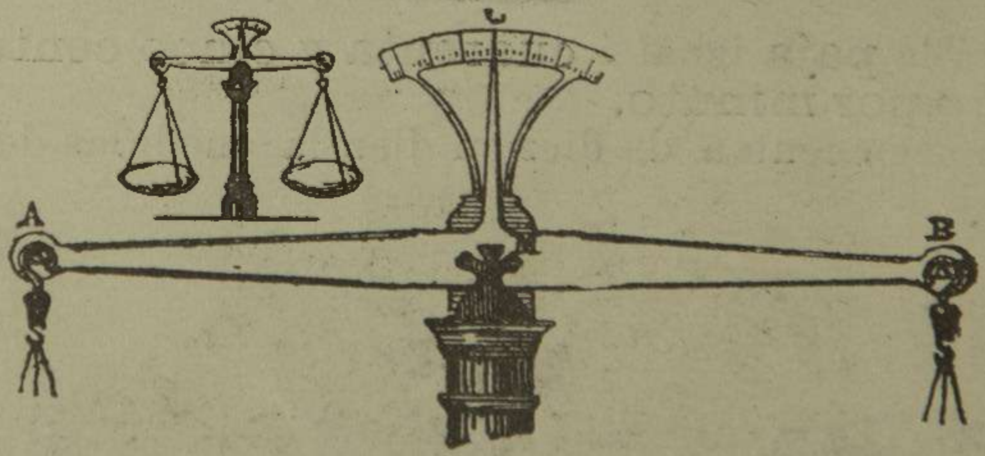
Ejemplo escrito de diferentes maneras:

1º $8457^{\text{‘L}}489.$ = 2º $845^{\text{‘DL}}7489.$ = 3º $84^{\text{‘HL}}57489.$ = 4º $8^{\text{‘KL}}457489$ = 5º $84574^{\text{‘dl}}89$ = 6º $84748^{\text{‘cl}}9$ = 7º $8457489^{\text{ml}}.$



220. La base de las medidas de peso es el **gramo** (G) que es el peso de la cantidad de agua destilada que contiene un centímetro cúbico, pesada en el vacío y á la temperatura de cuatro grados del termómetro centígrado. (*)

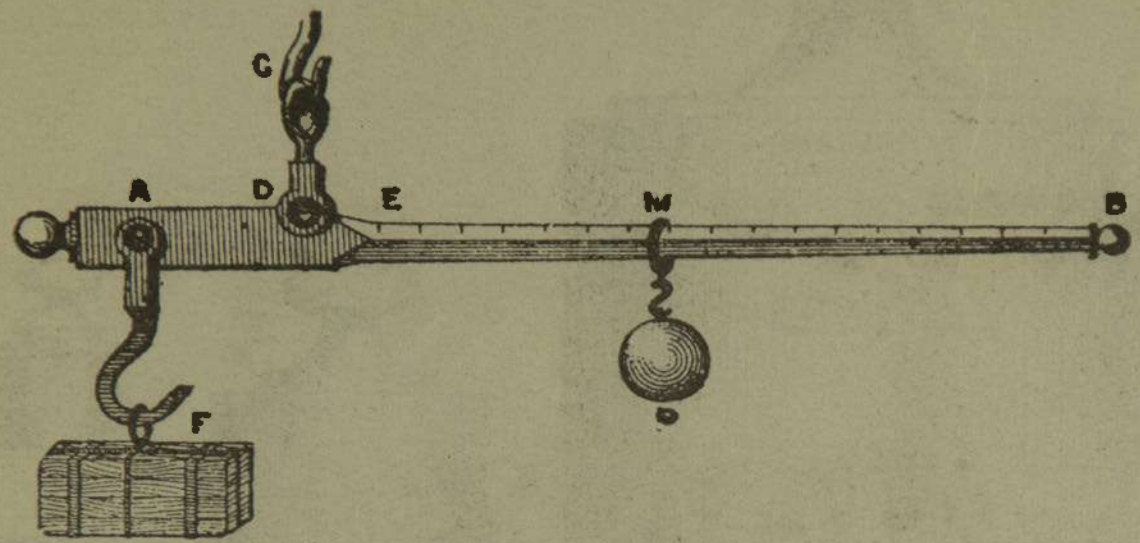
Los múltiplos del gramo son: el **decagramo** (DG) que vale 10 gramos ó sea el peso de diez centímetros cúbicos de



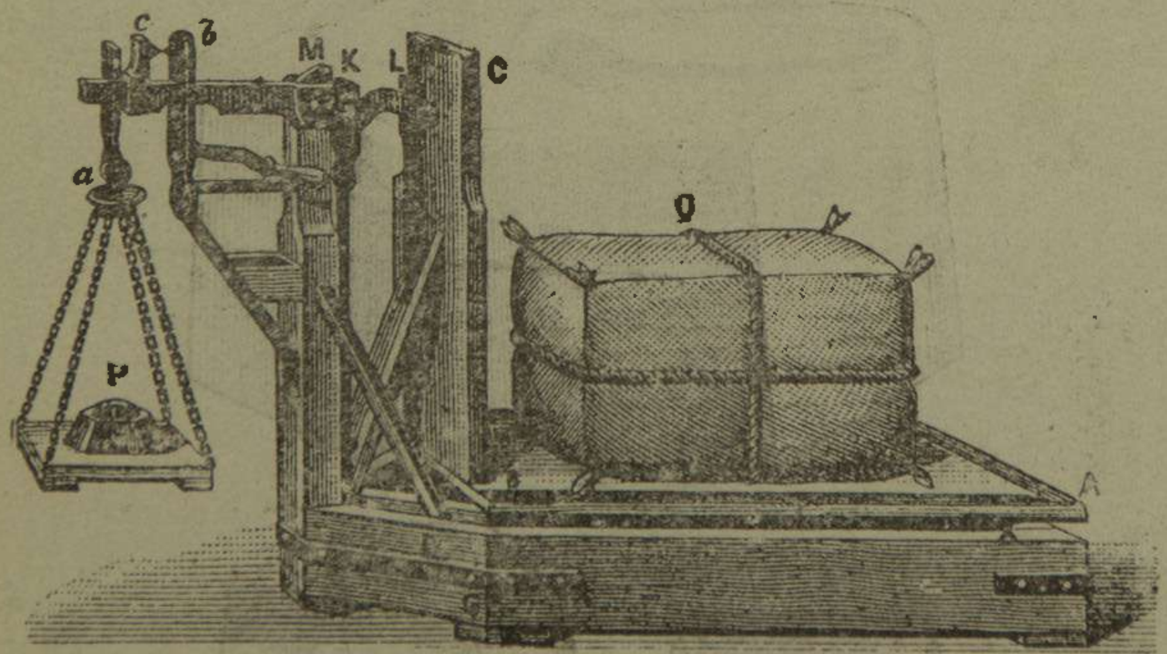
agua, el **hectogramo** (HG) que vale 100 gramos ó sea el peso de cien centímetros cúbicos de agua, el **kilogramo**

(*) Con el fin de que los alumnos puedan darse cuenta del modo de usarse las *pesas* observarán y describirán después las diferentes balanzas que constan en los grabados.

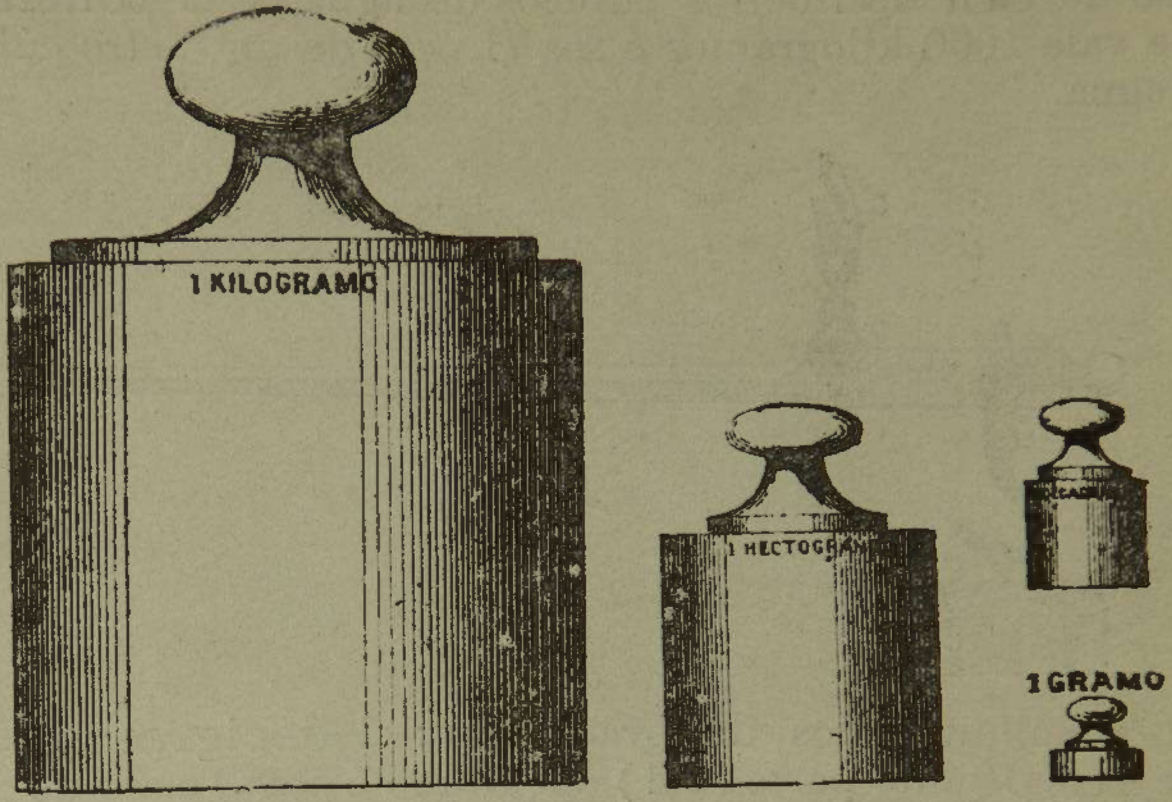
(KG) que vale 1000 gramos ó sea el peso de un decímetro cúbico de agua, el **quintal** que vale 100 kilogramos ó sea el peso de cien decímetros cúbicos de agua, y la **tonelada** que vale 1000 kilogramos ó sea el peso de un metro cúbico de agua.



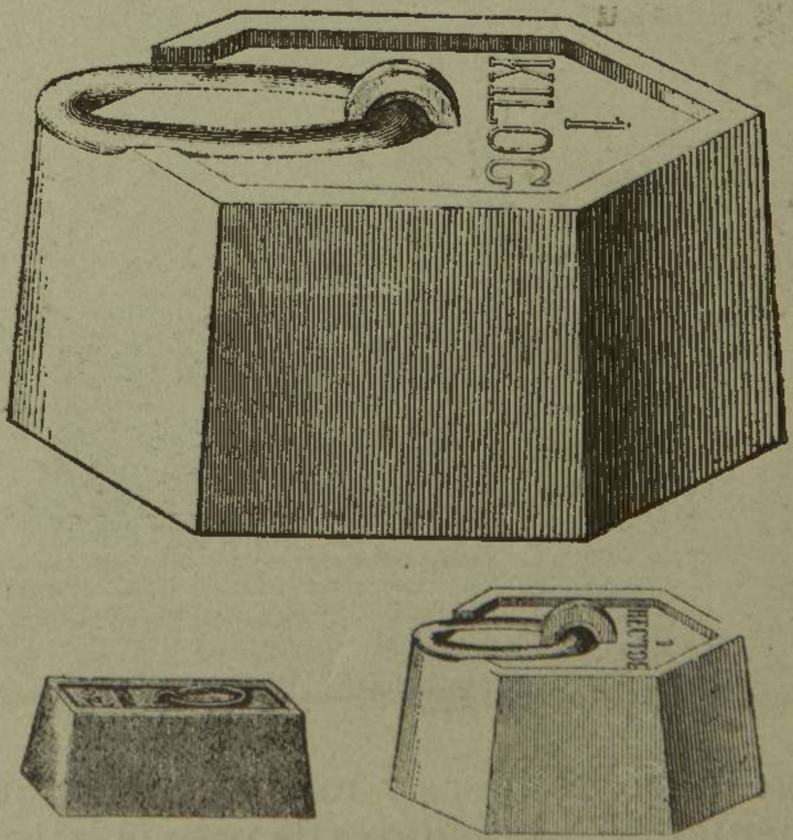
Los submúltiplos del gramo son: el **decigramo** (dg) que es la décima parte (0'1) del gramo ó sea el peso de cien milímetros cúbicos de agua, el **centigramo** (cg) que es la centésima parte (0'01) del gramo ó sea el peso de diez milímetros cúbicos de agua, y el **miligramo** (mg) que es la milésima parte (0'C01) del gramo ó sea el peso de un milímetro cúbico de agua.

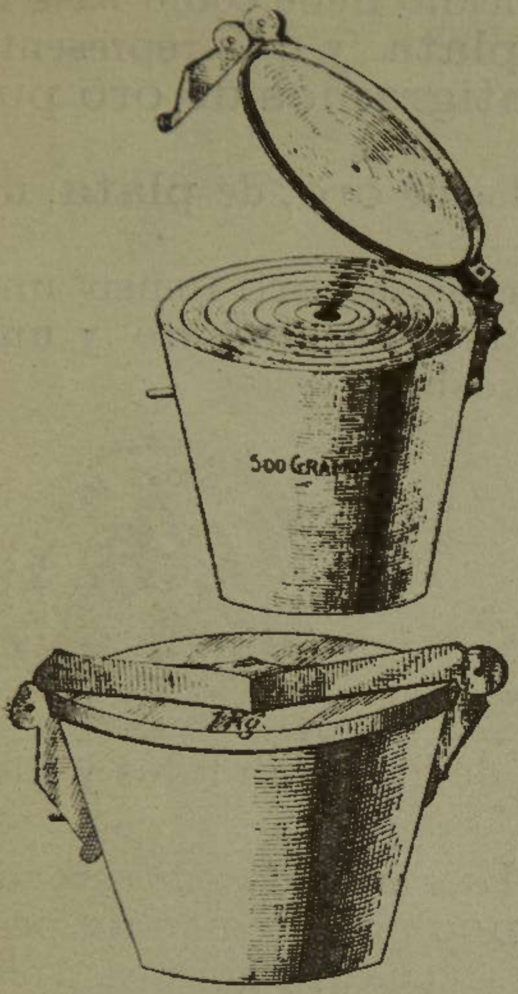


La ley vigente sobre pesas y medidas recoñoce como unidad fundamental de las medidas de peso el **kilogramo**; como múltiplos el quintal y la tonelada y como submúltiplos el gramo, el decigramo, el centigramo y el miligramo.



Las medidas de peso que se usan en el comercio, son: de 20, 10, 5, 2 y 1 kilogramos, y además de 500, 200, 100, 50, 20, 10 y 5 gramos.

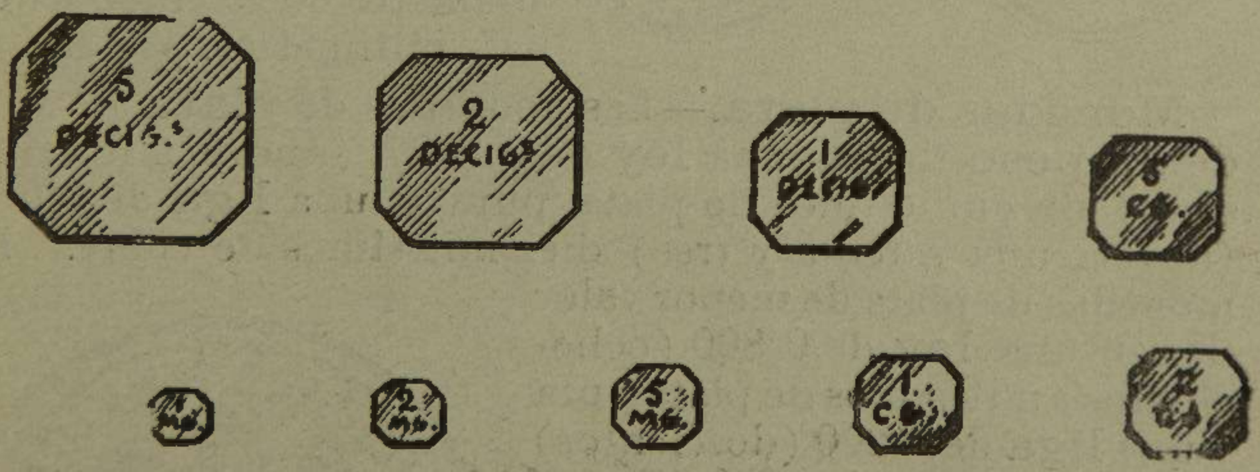




Estas pesas tienen la forma cilíndrica de altura igual al diámetro y provistas de botón para su facil manejo. Pueden construirse de hierro fundido, de hierro dulce, de cobre, de latón, de bronce y de otros metales ó ligas de dureza inferior á la del acero, pero no á la del cobre.

Los comerciantes ambulantes usan pesas huecas, contenidas unas dentro de otras, formando pila y con peso de un kilogramo. Las piezas de que consta una pila son las siguientes: Una de 500 gramos, una de 200, dos de 100, una do 50, una de 20, dos de 10, una de 5, dos de 2 y una de 1 gramo.

La medida que se usa en las potencias mecánicas es el **kilográmetro**, esto es, un kilogramo por segundo á la altura de un metro. La fuerza de 75 kilográmetros se le llama un **caballo de vapor**.



Las cantidades que expresan medidas de peso se representan con una sola cifra decimal y se escriben como sigue:

1º $8764^{\text{'G}}123.$ = 2º $876^{\text{'DG}}4123.$ = 3º $87^{\text{'HG}}64123.$ = 4º $8^{\text{'KG}}1764123$ · = 5º $87641^{\text{'dg}}23.$ = 6º $876412^{\text{'cg}}3$ = 7º $8764123^{\text{mg}}.$

221. El sistema monetario mexicano tiene como base la unidad denominada el **peso de plata** y que representa un valor de **setenta y cinco centigramos** de oro puro.

En la actualidad circulan monedas de oro, de plata, de niquel y de bronce.

Monedas de oro. — Las monedas de oro tienen una ley de 0'900 (novecientos) milésimos de oro puro y una liga de 0'100 (cien) milésimos de cobre.

Las monedas de oro de diez pesos tienen un peso de 8 (ocho) gramos y 333⅓ (trescientos treinta y tres un tercio) milígramos y un diámetro de 22½ (veintidos y medio) milímetros.

Las monedas de oro de cinco pesos tienen un peso de 4 (cuatro) gramos, 166⅔ (ciento sesenta y seis dos tercios) milígramos y un diámetro de 19 (diez y nueve) milímetros.

Monedas de plata.—Las monedas de plata de valor de un peso tienen una ley de 0'9027 (nueve mil veintisiete) diez milésimos de plata pura y una liga de 0'0973 (novecientos setenta y tres) diez milésimos de cobre. Las monedas de plata de menor valor tienen una ley de 0'800 (ochocientos) milésimos de plata pura y una liga de 0'200 (doscientos) milésimos de cobre.

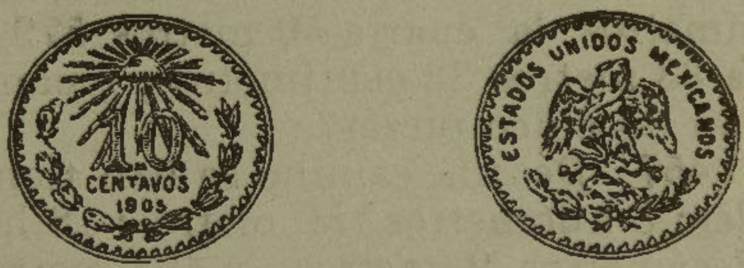
Las monedas de plata de un peso tienen un peso de 27 (veintisiete) gramos 73 (setenta y tres) milígramos y un diámetro de 39 (treinta y nueve) milímetros.

Las monedas de plata de cincuenta centavos tienen un

peso de 12 (doce) gramos 500 (quinientos) milígramos y un diámetro de 30 (treinta) milímetros.

Las monedas de **plata de veinte centavos** tienen un peso de 5 (cinco) gramos y un diámetro de 22 (veintidos) milímetros.

Las monedas de **plata de diez centavos** tienen un peso de 2 (dos) gramos 500 (quinientos) milígramos y un diámetro de 18 (diez y ocho) milímetros.



Monedas de niquel.—Las monedas de **niquel de cinco centavos** tienen un peso de 5 (cinco) gramos y un diámetro de 20 (veinte) milímetros.

Monedas de bronce.—Las monedas de **bronce** tienen una ley de 0'95 (noventa y cinco) centésimos de cobre, 0'04 (cuatro) centésimos de estaño y 0'01 (un) centésimo de zinc.

Las monedas de **bronce de dos centavos** tienen un peso de 6 (seis) gramos y un diámetro de 25 (veinticinco) milímetros.

Las monedas de bronce de **un centavo**, tienen un peso de 3 (tres) gramos y un diámetro de 20 (veinte) milímetros.

Problemas.—456. En un almacén hay cinco piezas de cierta tela; la primera mide 32 metros 63 centímetros, la segunda 49 metros 89 milímetros, la tercera 28 metros 4 decímetros, la cuarta 50 metros 579 milímetros, y la quinta 33 metros 33 centímetros; ¿cuántos metros de tela medirán las cinco piezas?

457. De un camino se han tomado las siguientes medidas: 8 kilómetros 150 metros; 18 hectómetros 76 metros; 97 decámetros 9 metros, y 498 metros; ¿cuánto mide el camino?

458. De una pieza de percal de 80 metros se han vendido 37 metros 48 centímetros; ¿cuánto queda?

459. Un viajero tenía que recorrer 572 kilómetros, ha caminado ya 150 kilómetros 89 metros, ¿cuánto le falta por andar?

460. Una persona ha comprado 18 metros 85 centímetros de una tela, á razón de 9 pesos 89 centavos el metro; ¿cuánto tiene que pagar?

461. Sabiendo que el metro de terciopelo cuesta 12 pesos 90 centavos, se desea saber ¿cuánto costaron 892 milímetros?

462. Un ferrocarril camina por hora 63 kilómetros ¿cuánto habría caminado en 8 horas 50 minutos?

463. Por una pieza de cierto género que mide 75 metros 8 decímetros se han pagado 600 pesos 73 centavos; ¿cuál será el valor del metro?

464. En un camino de 28 kilómetros de largo hay dos órdenes de árboles colocados en toda su extensión á la distancia de 4 metros uno de otro; ¿cuántos árboles hay por todo?

465. En una torre que mide 125 metros 70 centímetros de altura hay una escalera cuyos peldaños iguales son de 25 centímetros; ¿cuántos peldaños habrá que subir?

466. Una pieza tiene en sus cuatro paredes las siguientes medidas: las paredes más largas miden 12 metros 84 centímetros de largo por 7 metros 14 centímetros de altura, y las otras dos miden las dos terceras partes de las dimensiones anteriores; ¿cuántos metros cuadrados medirán las cuatro paredes juntas?

467. Un terreno ha quedado dividido en cuatro lotes: el primero de 8 hectaras 14 aras, el segundo de dos hectaras 87 aras, el tercero de 27 aras, 87 centiaras y el cuarto de 1 hectara 9 aras 25 centiaras; ¿cuánto mide la superficie total del terreno?

468. Hay un jardin que mide 724 metros cuadrados de superficie; las plantas ocupan un espacio de 125 metros cuadrados 97 decímetros cuadrados; ¿qué espacio de terreno queda sin sembrar?

469. Una hacienda de 25 hectaras 77 aras de superficie contiene un estanque cuya superficie se desea conocer. Midiendo las tierras se ha obtenido una extensión superficial de 24 hectaras, 92 aras, 88 centiaras; ¿qué superficie medirá el estanque?

470. La superficie de un patio mide 125 metros cuadrados; ¿cuánto se pagará por embaldosarlo con baldosas de 16 decímetros cuadrados si cada una cuesta 68 centavos?

471. La ara de un terreno cuesta 23 pesos 7 centavos; ¿cuánto costarán 18 hectaras, 40 aras y 78 centiaras?

472. Un propietario tiene un terreno que mide 4 hectaras 89 aras y que le ha costado 25,802 pesos; ¿á qué precio deberá vender la hectara para ganar 2,500 pesos en la venta

473. Una hacienda de 73 hectaras que había costado 300,000 pesos, se vendió en dos lotes: el uno en 23 hectaras 87 aras al precio de 5,000 pesos hectara y el otro al precio de 4,800; ¿se perdió ó ganó en la venta?

474. Se ha comprado una lámina metálica en 17 pesos 82 centavos, que mide 8 metros cuadrados 74 centímetros; ¿cuál será el precio del metro cuadrado?

475. Para hacer un embudo se han empleado 12 decímetros cuadrados 78 centímetros cuadrados de hoja de lata; ¿cuántos embudos podrán hacerse con 38 metros cuadrados 72 decímetros cuadrados del mismo metal?

476 Cuatro obreros han extraído de una cantera, durante un día, las cantidades de piedra que siguen: 20 metros cúbicos 87 decímetros cúbicos; 14 metros cúbicos 129 decímetros cúbicos; 38 metros cúbicos 150 decímetros cúbicos, y 12 metros cúbicos 48 centímetros cúbicos; ¿cuánto han extraído por todo?

477. Un negociante en maderas ha hecho las ventas siguientes: primera, de 24 esterios 2 deciesterios; segunda, de 12 decaesterios 7 deciesterios; tercera, de 92 esterios 7 deciesterios; ¿cuánto ha vendido por todo?

478. Un estanque mide 8,972 metros cúbicos de volumen y otro de menor capacidad sólo mide 3,518 metros cúbicos 847 decímetros cúbicos; ¿cuál es la diferencia?

479. De 529 esterios de leña se han consumido 315 esterios 8 deciesterios; ¿cuánto queda todavía?

480. Un albañil cobra 12 pesos 83 centavos por cada metro cúbico de pared; ¿cuánto se le deberá pagar por 18 metros cúbicos 439 decímetros cúbicos de pared?

481. Para la construcción de un muro se han empleado 73 metros cúbicos 899 decímetros cúbicos de piedra á 3 pesos 87 centavos el metro cúbico; ¿cuánto costó toda la piedra?

482. En un incendio se consumió un depósito de leña que contenía 6,400 esterios; si el esterio cuesta 4 pesos 18 centavos, se desea saber ¿cuál sería la pérdida del dueño de la leña?

483. En una casa que tiene 27 chimeneas se han consumido 493 esterios de leña; ¿cuánto ha consumido cada chimenea y cuánto importa esa cantidad de leña á razón de 3 pesos 75 centavos el esterio?

484 Se ha construído un muro de 97 metros cúbicos 892 decímetros cúbicos, con tabiques de dos decímetros cúbicos 500 centímetros cúbicos; ¿cuántos tabiques se han empleado en la construcción?

485. Un dueño de carros ha transportado 297 esterios de leña en cierto número de viajes, transportando en cada carro 2 esterios 8 deciesterios; ¿cuántos carros de leña ha conducido y cuántos viajes á razón de 10 carros por viaje?

486 Un comerciante ha hecho una mezcla de diferentes clases de vinos: de la primera 12 hectólitros 25 litros; de la segunda, 38 hectólitros; de la tercera; 18 decálitros 93 decílitros; ¿cuántos litros contendrá la mezcla?

487. Se han comprado las siguientes cantidades de trigo: 13 hectólitros 91 litros; 14 decálitros 18 decílitros; 7 hectólitros 38 litros; ¿cuántos hectólitros se han comprado por todo?

488. Un negociante tenía en depósito 123 hectólitros de vino, y ha vendido 43 hectólitros 70 litros; ¿cuánto le queda?

489. Un cosechero tenía en una bodega 439 hectólitros de maíz, y ha vendido 98 hectólitros 7 decálitros, 91 decílitros; ¿qué cantidad de maíz le queda existente?

490. Costando el litro de vino 2 pesos 38 centavos ¿cuánto costarán 12 hectólitros 15 litros y 9 decílitros?

491. Costando el hectólitro de trigo 3 pesos 75 centavos, se desea saber ¿cuánto costarán 8 kilólitros 192 litros?

492. ¿Cuántas botellas de la capacidad de 75 centílitros se necesitarán para embotellar 123 litros de vino?

493 ¿Cuántos costales de la capacidad de 1 hectólitro y medio se necesitarán para contener 8 kilólitros 9 hectólitros, 7 decálitros y 6 litros de arroz?

494. En una lechería se han vendido 15 pesos 89 centavos de leche á razón de 23 centavos el litro; ¿qué cantidad de leche se ha vendido?

495. Si el hectólitro de vino cuesta 300 pesos 50 centavos, ¿cuánto costará el litro?

496. Teniendo necesidad de recibir en una casa 12 litros 129 milílitros de agua por minuto, se desea saber ¿cuántas pajas de agua urbana tendrán que pedirse?

497. En una finca rústica se necesitan 87 hectólitros 98 litros de agua por segundo, ¿cuántos surcos de agua deben pasar por aquella finca para obtener la que se desea?

498. Un comerciante tiene tres bultos que contienen manteca: el primero de 21 kilogramos 120 gramos; el segundo de 97 kilogramos 73 decagramos, y el tercero de 50 kilogra-

mos 8 hectogramos; ¿cuántos kilogramos de manteca suman por todo?

499. Una persona desea fundir tres barras de plata para hacer una sola: la primera pesa 4 kilogramos 8 hectogramos; la segunda 3 kilogramos 28 decagramos, y la tercera 2 kilogramos 748 gramos; ¿cuántos kilogramos pesarán las tres barras fundidas en una sola?

500. En una ferretería había 8,5C0 kilogramos de fierro; se han vendido 978 kilogramos 333 gramos, ¿cuántos kilogramos de fierro quedan?

501. Si de 14 hectogramos 937 decigramos de aceite, se quitan 87 gramos 329 miligramos, ¿qué cantidad de aceite quedará?

502. Costando el kilogramo de jabón 75 centavos, ¿cuánto costarán 97 kilogramos 397 gramos?

503. Si un centímetro cúbico de fierro pesa 7 gramos 8 decígramos, ¿cuánto pesarán 3 metros cúbicos 697 decímetros cúbicos del mismo metal?

504. Una familia ha pagado en cierto tiempo 120 pesos 49 centavos á razón de 50 centavos el kilogramo de carne; ¿qué cantidad de carne ha consumido?

505. ¿Cuántas cajas se necesitan para guardar 932 kilogramos de bizcochos si en cada caja se pueden guardar 12 kilogramos 580 gramos?

506. Sabiendo que un pilón de azúcar pesa 4 kilogramos 397 gramos, se desea saber ¿cuánto pesarán 538 pilones de azúcar?

507. Se ha comprado un cajón de jabón en 58 pesos 89 centavos; pero el cajón lleno pesa 75 kilogramos 82 decagramos y el cajón vacío pesa 4 kilogramos 97 decagramos: ¿cuántos kilogramos de jabón se compraron y á cómo cada kilogramo?

508. Sumar las siguientes cantidades: 7 pesos 4 quintos de peso, 16 quintos de peso 15 centavos, 7 décimos de peso 9 centavos, 25 vigésimos de peso 4 centavos, 13 pesos 87 centavos.

509. De 100 pesos restar 73 pesos, 4 quintos de peso, 3 vigésimos de peso y 4 centavos.

510. ¿Cuánto pesarán 1000 monedas de 1 peso, 50 cetavos, 20 centvos, 10 centavos, 5 centavos, 2 centavos y 1 centavo?

CAPITULO XIV.

Problemas combinados diversos.

222. Hemos estudiado ya infinidad de problemas **combinados** de multiplicación y división, en los cuales entran **dos** operaciones y **dos** relaciones solamente. Existen además otras combinaciones mayores aún, y que constan de más de dos operaciones y de más de dos relaciones.

Vamos á estudiar en este capítulo algunos ejemplos de esta clase de problemas, y haremos además algunas otras aplicaciones importantes de los diferentes asuntos que hemos aprendido en los capítulos precedentes.

223. **Primer Problema.**—I. 24 obreros trabajando 8 horas diarias han empleado 50 días para hacer una zanja de 500 metros de largo, ¿cuántos días se necesitarán para hacer 1000 metros de la misma obra, con 20 obreros, trabajando 5 horas diarias?

Planteo del problema:

Obreros.	Horas.	Metros.	Días.
24	8	500	50
20	5	1000	x=192

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) 24 obreros han hecho una obra en 50 días, se desea saber 20 obreros ¿en cuántos días la harán?

Planteo y solución.

Obreros.	Días
24	50
20	$x = 60$
1	50×24
20	$\frac{50 \times 24}{20}$

(*b*) Varios obreros trabajando 8 horas diarias necesitan 60 días para hacer una obra; si sólo trabajaran 5 horas diarias ¿en cuántos días harían la obra?

Planteo y solución.

Horas	Días.
8	60
5	$x = 96$
1	60×8
5	$\frac{60 \times 8}{5}$

(*c*) Para hacer una zanja de 500 metros de largo se han necesitado 96 días, para hacerla de 1000 metros ¿cuántos días se necesitarán?

Planteo y solución.

Metros.	Días.
500	96
1000	$x = 192$
1	$\frac{96}{500}$
1000	$\frac{96 \times 1000}{500}$

Solución final: Los 20 obreros, trabajando 5 horas diarias, para hacer una zanja de 1000 metros de largo, necesitan 192 días.

Si en vez de buscar los días buscamos los metros, el problema quedará redactado de este modo:

II. 24 obreros en 50 días, trabajando 8 horas diarias, han hecho una zanja de 500 metros de largo; se desea saber ¿cuántos metros harán 20 obreros en 192 días, trabajando 5 horas diarias?

Planteo del problema.

Obreros.	Días	Horas.	Metros.
24	50	8	500
20	192	5	x=1000

Los problemas combinados de que se compone este problema son los siguientes:

(a) 24 obreros han hecho en cierto tiempo una zanja de 500 metros de largo, 20 obreros en el mismo tiempo ¿cuántos metros harán de zanja?

(b) Cierto número de obreros han hecho en 50 días una zanja de $416\frac{2}{3}$ metros, se desea saber en 192 días ¿cuántos metros de zanja harán?

(c) Cierto número de obreros en determinado tiempo y trabajando 8 horas diarias, han hecho una zanja de 1600 metros; se desea saber, si sólo trabajaran 5 horas diarias ¿cuántos metros harían de zanja?

Solución final: Los 20 obreros, en 192 días y trabajando 5 horas diarias harían una zanja de 1000 metros de largo.

Si en vez de buscar los días ó los metros, buscamos las horas, el problema quedará redactado como sigue:

III. Para hacer una zanja de 500 metros de largo, se han empleado 24 obreros, trabajando 50 días y 8 horas diarias se desea saber ¿cuántas horas diarias tendrán que trabajar 20 obreros en 192 días, para hacer una zanja de 1000 metros de largo?

Planteo del problema:

Obreros.	Metros.	Días.	Horas.
24	500..............	50..............	8
20	1000..............	192..............	$x=5$

Los problemas combinados de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) 24 obreros para hacer una obra necesitan trabajar 8 horas diarias, se desea saber 20 obreros ¿cuántas horas diarias necesitarán trabajar para hacer la misma obra?

(*b*) Para hacer una zanja de 500 metros de largo se ha necesitado un trabajo diario de 9'6 horas; para hacer una zanja de 1000 metros de largo ¿cuántas horas diarias se necesitarán de trabajo?

(*c*) Para hacer una obra en 50 días se ha necesitado un trabajo de 19'2 horas diarias; para hacer la misma obra en 192 días ¿cuántas horas diarias se necesitará trabajar?

Solución final: Los 20 obreros, para hacer la zanja de 1000 metros de largo en 192 días, necesitan trabajar 5 horas diarias.

Si en vez de buscar los días, los metros ó las horas, buscáramos los obreros, el problema quedaría redactado de este modo:

IV. Para hacer una zanja de 500 metros de largo en 50 días, trabajando 8 horas diarias, se han necesitado 24 obreros ¿cuántos obreros se necesitarán para hacer una zanja de 1000 metros de largo en 192 días, trabajando 5 horas diarias?

Planteo del problema.

Metros.	Días.	Horas.	Obreros.
500	50.............	8...............	24
1000	192.............	5..............	$x = 20$

Los problemas combinados de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Para hacer una zanja de 500 metros de largo se han necesitado 24 hombres ¿cuántos hombres se necesitarían para hacer una zanja de 1000 metros de largo?

(*b*) Para hacer una zanja en 50 días se han necesitado 48 obreros, si la zanja se hiciera en 192 días ¿cuántos obreros se necesitarían?

(*c*) Para hacer una obra trabajando 8 horas diarias se han necesitado 12'5 obreros; si sólo se trabajara 5 horas diarias ¿cuántos obreros se necesitarían?

Solución final: La zanja de 1000 metros de largo para hacerla en 192 días, trabajando 5 horas diarias, se han necesitado 20 obreros.

....

Como habrá podido notarse, considerando solamente los términos relativos inferiores que constan en el planteo del problema primitivo, es decir, los días, los metros, las horas, y los obreros; resultan cuatro problemas compuestos principales, formado cada uno de tres problemas combinados de multiplicación y división; de todo lo cual podemos hacer el siguiente resumen:

Problemas compuestos principales..................	4
Problemas combinados	12
Problemas simples..................................	24
Suma.....................	40
Y considerando además como incógnitas los términos relativos superiores del problema primitivo, resultan otros tantos problemas semejantes...	40
Total........	80

De manera que un problema proporcional compuesto de varios combinados y que consta de 7 términos conocidos y 1 desconocido, dará origen á 80 problemas diversos.

Cuando se haya empleado con buen éxito esta marcha que podríamos considerar como esencialmente analítica, hay que emplear la marcha contraria, es decir, la sintética, que consiste en combinar en conjunto todos los datos del problema y formar con ellos un solo razonamiento, según se verá en el siguiente ejemplo:

Obreros.	Horas.	Metros.	Días.
24	8	500	50
20	5	1000	x=192 días.

(1)	24	8	500	50
(2)	1	8	500	50×24
(3)	20	8	500	$\frac{50 \times 24}{20}$
(4)	20	1	500	$\frac{50 \times 24 \times 8}{20}$
(5)	20	5	500	$\frac{50 \times 24 \times 8}{20 \times 5}$
(6)	20	5	1	$\frac{50 \times 24 \times 8}{20 \times 5 \times 500}$
(7)	20	5	1000	$\frac{50 \times 24 \times 8 \times 1000}{20 \times 5 \times 500}$

Solución. (1) 24 obreros, trabajando 8 horas diarias hacen una zanja de 500 metros de largo en 50 días. (2) 1 obrero trabajando las mismas horas, para hacer la misma zanja, necesitará:............ (3) 20 obreros, trabajando las mismas horas para hacer la misma obra, necesitan:......... (4) Los mismos obreros, trabajando 1 hora diaria para hacer la misma obra, necesitarían:............ (5) Los mismos obreros, trabajando 5 horas diarias, para hacer la misma obra necesitarían:............ (6) Los mismos obreros, trabajando 5 horas diarias, para hacer 1 metro de la obra necesitarían:............ (7) Los mismos obreros, en las mismas horas, para hacer la zanja de 1000 metros de largo, necesitarían:............

Ejecutando las operaciones que resultan indicadas se obtendrá la solución final: 192 días.

En la práctica el razonamiento anterior se simplifica notablemente suprimiendo la escritura de todas las operaciones indicadas con los números (1), (2), (3), etc., y sólo se acostumbra escribir el resultado final á medida que se va razonando:

$$x = \frac{50 \times 24 \times 8 \times 1000}{20 \times 5 \times 500}$$

Después se simplifica, como si fuera un quebrado común hasta llegar á obtener el valor de la incógnita.

224. Segundo problema.—Un agiotista prestó 1600 pesos con un rédito de 5 por ciento anual; se desea saber ¿cuál será el interés que se obtenga en 270 días?

Planteo del problema:

Capital.	Días.	Rédito.
\$100	360	\$5
1600	270	$x =$ \$60

Los problemas combinados de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Con un capital de 100 pesos en un año se obtienen 5 pesos de rédito; con un capital de 1600 pesos en el mismo tiempo ¿qué rédito se obtendrá?

Planteo y solución:

Capital.	Rédito.
\$ 100	\$5
1600	$x =$ \$80
1	$\frac{5}{100}$
1600	$\frac{5 \times 1600}{100}$

(*b*) Con cierto capital, se han ganado en 360 días 80 pesos de rédito, en 270 días ¿cuánto se ganará de rédito?

Planteo y solución:

Días:	Rédito.
360	\$ 80
270	$x =$ \$60
1	$\frac{80}{360}$
270	$\frac{80 \times 270}{360}$

Solución final: El capital de 1600 pesos en 270 días ha producido un rédito de 60 pesos.

Si en vez de buscar el **rédito** buscamos el **tiempo** el problema quedará redactado así:

Un agiotista con un capital de 1600 pesos ha obtenido de rédito 60 pesos al 5 por ciento anual, se desea saber ¿qué **tiempo** ha tenido prestado dicho capital?

Planteo del problema:

Capital.	Rédito.	Días.
$100	$5	360
1600	60	x = 270 días.

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Un capital de 100 pesos para ganar cierto rédito ha estado prestado durante 360 días; un capital de 1600 pesos para ganar el mismo rédito ¿qué tiempo deberá estar prestado?

(*b*) Cierto capital para ganar 5 pesos de rédito necesita estar prestado durante 22'5 días; el mismo capiral para ganar 60 pesos de rédito ¿cuántos días deberá estar prestado?

Solución final: El capital de 1600 pesos para ganar un rédito de 60 pesos necesita estar prestado 270 días.

Si en vez de buscar el **rédito** ó el **tiempo** buscamos el **capital** el problema quedará redactado así:

Un agiotista ha prestado cierta cantidad de dinero que le produjo 60 pesos de rédito al 5 por ciento anual y en un plazo de 270 días; se desea saber ¿qué **capital** ha prestado?

Planteo del problema:

Rédito.	Días.	Capital.
$5	360	100
60	270	x = $1600

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Para obtener un rédito anual de 5 pesos se ha necesitado un capital de 100 pesos; para obtener un rédito anual de 60 pesos ¿qué capital se necesitará?

(*b*) En un plazo de 360 días se ha obtenido cierto rédito con un capital de 1200 pesos; para obtener el mismo rédito en 270 días ¿qué capital se necesitará?

Solución final: Para obtener un rédito de 60 pesos en 270 días, se necesita un capital de 1600 pesos.

Si se buscara la tasa ó tanto por ciento, el problema quedaría así:

Un agiotista prestó 1600 pesos, habiendo obtenido como interés durante 270 días la cantidad de 60 pesos; se desea saber ¿cuál fué el tanto por ciento anual con que prestó dicho dinero?

Planteo del problema:

Capital.	Días.	Rédito.
$1600	270	$60
100	360	$x =$ $5

Los problemas combinados de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Con un capital de 1600 pesos en cierto tiempo se ha obtenido un rédito de 60 pesos, ¿qué rédito se obtendrá con un capitai de 100 pesos?

(*b*) En un plazo de 270 días cierto capital ha estado prestado al 3'75 por ciento, ¿cuál será el tanto por ciento en un año de 360 días?

Solución final: El tanto por ciento anual es de 5 pesos.

Resolvamos el problema primitivo siguiendo la marcha sintética, se decir, tomando en conjunto todos los datos. El planteo y solución quedará así:

Capital.	Días.	Rédito.
$ 100	360	$5
1600	270	$x =$ $60

(1) 100 .... 360 5

(2) 1 .... 360 .... $\frac{5}{100}$

(3) 1600 .... 360 .... $\frac{5 \times 1600}{100}$

(4) 1600 .... 1 .... $\frac{5 \times 1600}{100 \times 360}$

(5) 1600 .... 270 .... $\frac{5 \times 1600 \times 270}{100 \times 360}$

Solución. (1) 100 pesos de capital en 360 días producen un rédito de 5 pesos. (2) 1 peso de capital en el mismo tiempo, producirá un rédito:..............(3) 1600 pesos de capital en 360 días, producirán un rédito:..............(4) El mismo capital en 1 día, producirá un rédito:............ (5) El mismo capital en 270 días, producirá un rédito..........

Ejecutando las operaciones indicadas, se obtiene un rédito de 60 pesos.

225. **Tercer problema.**—¿Cuál es el **capital** que colocado al 5 por ciento anual ha producido en 270 días, con capital é intereses, la suma de 1660 pesos?

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Si en 360 días se ganan 5 pesos de rédito en 270 días ¿cuánto se ganará?

Planteo y solución:

Días.	Réditos
360	$5
270	$x = \$3{\cdot}75$
1	$\frac{5}{360}$
270	$\frac{5 \times 270}{360}$

(*b*) Si 103·75 capital y réditos juntos, provienen de un capital de 100 pesos, 1660 pesos capital y réditos también juntos ¿de qué capital provendrán?

Planteo y solución:

Capital y réditos.		Capital.
$103‘75	....	$100
1660	....	$x = \$1600$
1	....	$\frac{100}{103‘75}$
1600	....	$\frac{100 \times 1600}{103‘75}$

Solución final: El capital que se busca es de 1600 pesos y el rédito de 1660 — 1600 = 60 pesos.

Si se nos preguntase el **interés** aun cuando ya quedó câlculado en el problema anterior, podría también calcularse del modo siguiente:

Planteo y solución:

Capital y rédito.		Rédito.
$103‘75	....	$3‘75
1660	....	$x = \$60$
1	....	$\frac{3·75}{103‘75}$
1660	....	$\frac{3‘75 \times 1660}{103‘75}$

Luego el rédito será de 60 pesos y el capital de $1660 — 60 = 1600 pesos.

Si buscáramos el **tanto por ciento**, el problema quedaría así:

¿Cuál será el **tanto por ciento** anual con que se prestó un capital de 1600 pesos, que durante 270 días produjo con capital é intereses la suma de 1660 pesos?

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) Un capital de 1600 pesos en cierto tiempo se aumenta con todo y réditos á 1660 pesos; un capital de 100 pesos en el mismo tiempo ¿á cuánto se aumentará?

Planteo y solución:

Capital.	Capital y rédito.
$1600	$1660
100	$x = \$103{\cdot}75$
1	$\frac{1660}{1600}$
100	$\frac{1660 \times 100}{1600}$

(*b*) Si en 270 días el tanto por ciento de un capital es de 3'75 pesos, ¿cuál será el tanto por ciento en un año de 360 días?

Planteo y solución:

Días.	Tanto por ciento.
270	$3 75
360	$x = \$5$
1	$\frac{3'75}{270}$
360	$\frac{3'75 \times 360}{270}$

Solución final: El tanto por ciento anual es de 5 pesos.

Si buscamos el **tiempo** el problema quedará así:

Un capital de 1600 pesos prestado al 5 por ciento anual durante cierto tiempo, se ha aumentado en 1660 pesos con capital y réditos; se desea saber ¿cuántos **días** estuvo prestado?

Los problemas **combinados** de que se compone el problema anterior son los siguientes:

(*a*) Un capital de 1600 pesos produce en cierto tiempo un rédito de 60 pesos, un capital de 100 pesos, ¿qué rédito producirá en el mismo tiempo?

Planteo y solución:

Capital.	Rédito.
\$1600	\$60
100	$x = \$3{`}75$
1	$\frac{60}{1600}$
100	$\frac{60 \times 100}{1600}$

(*b*) Si un rédito de 5 pesos corresponde á un capital determinado durante un plazo de un año ó sean 360 días, un rédito de 3'75 pesos, correspondiente al mismo capital, ¿á cuántos días corresponderá?

Planteo y solución:

Rédito.	Días.
\$ 5	360
3'75	$x = 270$ días.
1	$\frac{360}{5}$
3'75	$\frac{360 \times 3{`}75}{5}$

Solución final: El capital estuvo prestado 270 días.

226. **Cuarto problema.**—Un capitalista prestó la cantidad de 10000 pesos con un rédito de 10 por ciento anual durante 3 años; pero con la condición de acumular anualmente los réditos con el capital, á fin de producir nuevos intereses; se desea saber á cuánto ascendería el capital al cabo de dicho tiempo?

Los problemas combinados de que se compone este problema son los siguientes:

(*a*) ¿Cuál será el rédito de 10000 pesos al 10 por ciento en el primer año?

Planteo y solución:

Capital.		Rédito.
\$100	....	\$10
10000	....	$x=1000$
1	....	$\frac{10}{100}$
10000	....	$\frac{10\times 10000}{100}$

Capital. Rédito.

\$ 10000 + \$ 1000 = \$ 11000

(*b*) ¿Cuál será el rédito de 11000 pesos al 10 por ciento en el segundo año?

Planteo y solución:

Capital.		Rédito.
\$100	....	\$10
11000	....	$x=1100$
1	....	$\frac{10}{100}$
11000	....	$\frac{10\times 11000}{100}$

Capital. Rédito.

11000 + 1100 = \$ 12100

(*c*) ¿Cuál es el rédito de 12100 pesos al 10 por ciento en el tercero y último año?

Planteo y solución:

Capital.		Rédito.
\$100	....	\$10
12100	....	$x=\$1210$
1	....	$\frac{10}{100}$
12100	....	$\frac{10\times 12100}{100}$

Capital.		Rédito.		
12100	+	1210	=	13310

Para facilitar la solución de estos problemas, el planteo podrá disponerse del modo siguiente:

	Capital..	\$ 10000
1er. año.	Rédito..	1000
	Capital y rédito..	\$ 11000
2º año.	Rédito..	1100
	Capital y rédito..	\$ 12100
3er. año.	Rédito..	1210
	Capital y rédito..	\$ 13310

etc., etc.

También se puede calcular el interés de 100 pesos al 10 por ciento con acumulación de todos los intereses por 3 años, y después que se haya encontrado se calculará el interés que corresponda al capital de 10000 pesos.

El planteo se hará así:

Capital..........................	$ 100
1er. año. Rédito...	10
Capital y rédito	$ 110
2º año. Rédito..................................	11
Capital y rédito.....	$ 121
3er. año. Rédito................	12'10
Capital y rédito......................................	$ 133'10

etc., etc.

El problema quedará transformado del modo siguiente: Si 100 pesos de capital al 10 por ciento anual con acumulación de intereses se ha aumentado á $ 133'10 centavos en el término de 3 años, un capital de 10000 pesos, ¿á qué tanto se aumentará?

Planteo y solución:

Capital.	Capital y réditos.
100	13310
10000	$x = \$\,133'10$
1	$\dfrac{133'10}{100}$
10000	$\dfrac{133'10 \times 10000}{100}$

Puede por último calcularse el interés de 1 peso al 10 por ciento anual con intereses acumulados durante 3 años, del modo siguiente:

Capital..	\$ 1
1er. año. Rédito..	0'10
Capital y rédito..	\$ 1'10
2º año. Rédito..	0'11
Capital y rédito..	\$ 1'21
3er. año. Rédito..	0'121
Capital y rédito..	\$ 1'331

etc., etc.

El problema primitivo quedaría transformado nuevamente del modo que sigue:

Si 1 peso de capital al 10 por ciento anual con intereses acumulados durante 3 años se aumenta á \$ 1'331 milésimos, un capital de 10000 pesos ¿á qué tanto se aumentará?

Planteo y solución:

Capital,	Capital y reditos.
\$1	\$1'331
10000	$x =$ \$13310

$$x = 1'331 \times 10000 = \$\,13310$$

Siguiendo los mismos procedimientos indicados, podrán resolverse los siguientes problemas que se derivan del anterior.

1º Un capital se ha elevado á interés compuesto, es decir, con acumulación de intereses, á la suma de 13310 pesos, al 10 por ciento anual durante 3 años, se desea saber ¿cuál será el capital?

2º Un capital de 10000 pesos se ha elevado al cabo de cierto tiempo con capital é intereses á la suma de 13310 pesos; siendo el rédito anual de 10 por ciento, se desea saber ¿cuántos años estuvo prestado?

3º Sabiendo que un capital de 10000 pesos se ha elevado al cabo de 3 años, con capital é intereses á la suma de 13310 pesos; se desea saber ¿cuál será el **tanto por ciento** anual con que fué prestado?

227. **Quinto problema.**—El dueño de un pagaré de 1600 pesos que se vence dentro de 270 días pretende descontarlo al 5 por ciento anual; ¿qué suma perderá en dicho pagaré usando el **descuento exterior?**

Planteo del problema:

Pagaré.	Días.	Descuento.
$100	360	5
1600	270	$x = \$60$

Según habrá podido notarse, el planteo de este problema es semejante al que hicimos con el **segundo problema** al calcular el interés de un capital, tomando como base un tanto por ciento cualquiera en un tiempo determinado. En el presente caso, el asunto es casi el mismo con diferencia de palabras: al capital le llamamos **pagaré**, y al interés le llamamos **descuento**; y la diferencia radical consiste en que en los problemas de interés **aumentamos** el capital y en los problemas de descuento lo **disminuimos**; en el primer caso hay una **ganancia** y en el segundo hay una **pérdida**. Como el capital de que se trata es de 1600 pesos, y el rédito de 60 pesos, obtendremos tanto en el **interés** como en el **descuento** los resultados siguientes:

1º En el interés: $1600 + 60 = \$1660$.

2º En el descuento: $1600 - 60 = \$1540$.

En el primer resultado hay un **aumento** y en el segundo hay una **diminución**.

Respecto del razonamiento que debe emplarse en la solución de los problemas llamados de **descuento**, es muy parecido al que empleamos en la solución de los llamados de **interés**. O empleamos el **análisis**, descomponiendo el problema total en problemas parciales, ó empleamos la **síntesis** tomando todos los datos en conjunto. De uno ú otro modo se llega á este resultado final: **el descuento es de 60 pesos** que hay necesidad de deducir del valor del pagaré de 1600 pesos, con cuya operación quedará reducido á la suma de 1540 pesos que es la cantidad pagada en efectivo, 270 días antes del vencimiento de dicho pagaré, en cuya fecha se cobrará su valor íntegro de 1600 pesos.

También podrá hacerse el planteo de este modo:

Días.	Descuento.
360	$5
270	$x = \$\,3{\cdot}75$

y descontando de 100 el descuento 3'75 obtenido en 270 días, quedarán $96 25. Luego:

Valór nominal.	Valor real.
100	96'25
1600	$x = \$\,1540$

El resultado es igual al anterior, supuesto que:

$$1600 - 1540 = 60 \text{ pesos.}$$

Los agiotistas distinguen dos clases de descuentos: el descuento **exterior** ó por fuera y el descuento **interior** ó por dentro. Pongamos unos ejemplos:

1º Si pedimos prestados á un agiotista 100 pesos con el 5 por ciento de descuento; por un mes nos dará solamente 95 pesos, quedándase él con 5 pesos que es el descuento y nosotros tendremos la necesidad de firmarle un pagaré de 100 pesos, que nos hará efectivo al terminar el plazo.

Si en lugar de 1 mes fueran 2 meses, nos descontaría 10 pesos; en 3 meses, 15 pesos; en 4 meses 20 pesos........ y en 20 meses 100 pesos; es decir, que sin darnos **ni un solo centavo**, le quedaríamos á deber 100 pesos con 20 meses de plazo al 5 por ciento de descuento. Esto es lo que ellos llaman **descuento exterior**, casi sinónimo de robo.

2º Si el agiotista nos entrega 100 pesos en efectivo, con un rédito de 5 por ciento mensual, tendremos la obligación de firmarle un pagaré de 1(0 pesos que nos cobraría al fin del primer mes, de 110 pesos al fin del segundo mes, de 115 pesos á fin del tercero, etc., y al cabo de 20 meses el pagaré sería de 200 pesos que nos haría efectivo llegado el término del plazo respectivo. Esto es lo que se llama **descuento interior.**

Entre ambos descuentos hay una gran diferencia: en el **exterior** no recibimos **nada** y tenemos que pagar 1(0 pesos á los 20 meses de plazo y en el **interior** recibimos **todo** el préstamo de 100 pesos y al cabo de 20 meses pagamos el rédito correspondiente que son otros 100 pesos, ascendiendo el capital á 2(0 pesos en efectivo.

En nuestro problema el pagaré de 1600 pesos, ha sufrido un descuento de 60 pesos al 5 por ciento anual por los 270 días que faltan para su vencimiento, quedando reducido á 1540 pesos; es, pues, un problema de **descuento exterior.**

El pagaré en cuestión tiene en consecuencia dos valores: 1540 pesos que es un valor **real** en la fecha actual y 1600 pesos que es su valor **nominal** pagadero á su vencimiento. El valor real es **variable** y el valor nominal es **constante.** El valor real y el nominal de un pagaré son **iguales** al expirar el plazo de su vencimiento.

Los problemas de descuento exterior que se derivan del ejemplo propuesto se resuelven del mismo modo que los problemas de interés. Son los siguientes:

1º Un pagaré de 1600 pesos ha sufrido un descuento exterior de 60 pesos en 270 días, ¿cuál ha sido el **tanto por ciento** de descuento?

2º ¿Cuál será el **valor nominal** de un pagaré que en 270 días ha sufrido un descuento exterior de 60 pesos al 5 por ciento anual?

3º ¿Cuántos **días** faltarán para su vencimiento á un pagaré cuyo valor nominal es de 1600 pesos y su descuento exterior de 60 pesos al 5 por ciento anual?

228. **Sexto problema.**—El dueño de un pagaré de 1600 pesos que se vence dentro de 270 días pretende descontarlo al 5 por ciento anual, ¿qué suma perderá en dicho pagaré usando el **descuento interior**?

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

(a) Si en 360 días el descuento de 100 sería de 5 pesos, en 270 días ¿cuál será el descuento?

Planteo y solución:

Días.		Descuento.
360	....	\$5
270	....	$x =$ \$3'75
1	....	$\frac{5}{360}$
270	....	$\frac{5 \times 270}{360}$

Luego por un pagaré de 100 pesos, en 270 días de plazo al 5 por ciento anual, hay que pagar de réditos \$3 75 centavos ó sean 100 + 3'75 = 103'75 con todo y préstamo.

(b) Si la cantidad de \$103'75 centavos se reducen por el descuento á 100 pesos, ¿á qué cantidad se reducirá un pagaré de 1600 pesos?

Planteo y solución:

Pagaré y descuento.		Pagaré.
\$103·75	....	\$100
1600	....	$x =$ 1542'17
1	....	$\frac{100}{103 \cdot 75}$
1600	....	$\frac{100 \times 1600}{103 \cdot 75}$

Luego el pagaré de 1600 pesos en 270 días y con un descuento interior anual de 5 por ciento, se reduce á \$1542·17 centavos; es decir, el descuento propiamente dicho será de \$1600—\$1542'17=\$57·83 centavos.

Comparando el descuento exterior con el interior en el problema propuesto, se nota la siguiente diferencia:

Descuento exterior....................................	$60'00
Descuento interior....................................	57'83
Diferencia..................	$ 2'17

que es precisamente el rédito de 57'83 centavos en 270 días, según podrá comprobarse resolviendo el siguiente problema:

Si 100 pesos en 360 días obtienen un rédito de 5 pesos, $57'83 centavos en 270 días ¿qué rédito obtendrán?

Planteo y solución:

Capital.	Días	Rédito.
100	360	5
57'83	270	x=$2'17
100	360	5
1	360	$\frac{5}{100}$
57'83	360	$\frac{5\times57'83}{100}$
57'83	1	$\frac{5\times57'83}{100\times360}$
57'83	270	$\frac{5\times57'83\times270}{100\times360}$

Después de estos cálculos podemos establecer otras diferencias entre el descuento exterior y el descuento interior.

1ª El agiotista en el descuento **exterior** aprovecha el interés de la suma que paga ($57'83) más el interés de ese interés ($2'17) ó sean 60 pesos.

2ª El agiotista en el descuento **interior** sólo aprovecha el interés de la suma que paga ($57'83) y deja de percibir el interés de ese interés ($2'17).

En general se puede afirmar: que en el descuento **exterior** ó por **fuera**, se paga el interés por el valor **nominal** del pagaré; y en el descuento **interior** ó por **dentro**, sólo se paga el interés por el valor **real** del mismo pagaré.

Los problemas de descuento interior que se derivan del ejemplo propuesto son los siguientes:

1º ¿Cuál será el descuento interior de un documento de 1600 pesos que se vence dentro de 270 días y que se desea descontar al 5 por ciento anual?

2º ¿Cuántos días faltarán para el vencimiento de un pagaré de 1600 pesos, que ha sido reducido por el descuento interior á $1542'17 centavos al 5 por ciento anual?

3º ¿Cuál será el tanto por ciento con que ha sido descontado interiormente un pagaré de 1600 pesos en 270 días en el concepto de que el descuento interior ha sido de $ 57'83 centavos?

229. **Séptimo problema.**—Tres personas hicieron una compañia; la primera puso 2000 pesos, la segunda 5000 pesos y la tercera 10000 pesos; después de cierto tiempo obtuvieron una ganancia de 34000 pesos, ¿cuánto le toca á cada uno?

Este problema compuesto, puede descomponerse en los siguientes problemas simples:

(*a*) Con 17000 pesos que es la suma total de las tres puestas de los socios, se ha obtenido una ganancia de 34000 pesos, con 1 peso ¿qué ganancia se obtendrá?

Planteo y solución:

Capital social.	Ganancia.
17000	$34000
1	$x = \$2$

$$x = \frac{34000}{17000} = \$2$$

(*b*) Con un 1 peso se han ganado 2 pesos, con 2000 pesos que puso el primer socio ¿cuánto se ganará?

Planteo y solución:

Capital social.	Ganancia.
$1	$2
2000	$x = \$4000$

$$x = 2 \times 2000 = \$4000$$

(*c*) Con 1 peso se han ganado 2 pesos, con 5000 pesos que puso el segundo socio ¿cuánto se ganará?

Planteo y solución:

Capital social.	Ganancia.
\$1	\$2
5000	$x =$ \$10000.

$x = 2 \times 5000 =$ \$10000.

(*d*) Con 1 peso se han ganado 2 pesos, con 10000 pesos que puso el tercer socio ¿cuánto se ganará?

Planteo y solución.

Capital social.	Ganancia.
\$ 1	\$2
10000	$x =$ 20000

$x = 2 \times 10000 =$ \$20000.

Los cuatro problemas simples pueden resolverse con un solo planteo del modo siguiente:

Capital social.	Ganancia.
\$17000	\$34000
1	\$2
2000	4000
5000	10000
10000	20000
Total	\$34000

En los problemas que, como el anterior, hay que distribuir proporcionalmente una ganancia ó una pérdida entre varias personas ó entre varios números, se sigue la marcha indicada.

En el caso de que se fije tiempo, el problema se razona previamente de otro modo. Pongamos un ejemplo:

Tres comerciantes hicieron una compañía: el primero puso 300 pesos que dejó en los negocios durante 6 años; el segundo puso 400 pesos durante 5 años; y el tercero 800 pesos durante 9 años; habiendo perdido 5500 pesos, se desea saber ¿cuál será la pérdida de cada socio?

Si la sociedad se hubiera disuelto al fin del primer año, la pérdida de 5500 pesos se distribuiría proporcionalmente á cada socio, según el monto de sus puestas respectivamente; pero como no pasa así, sino que la puesta del primer socio estuvo 6 años, la del segundo 5 años y la del tercero 9 años, es claro que cada puesta estuvo repetida tantas veces como años duró en la compañía; por consiguiente el primer socio tuvo $300 \times 6 = 1800$ pesos; el segundo $400 \times 5 = 2000$, y el tercero $800 \times 9 = 7200$ pesos. La suma de las puestas así transformadas es de 11000 pesos y el problema se reducirá á distribuir la pérdida de 5500 pesos de acuerdo con las nuevas puestas de cada socio.

Hé aquí el planteo general.

Capital social.	Pérdida.
\$11000	\$5500
1	0,50
1800	900
2000	1000
7200	3600
Total	\$5500

De los dos problemas de esta clase que acabamos de estudiar pueden derivarse los siguientes:

1º En una compañía uno de los socios puso 2000 pesos y obtuvo una ganancia de 4000 pesos; el capital social fué de 17000 pesos ¿cuál sería la ganancia total?

2º En una sociedad mercantil se obtuvo una utilidad de 34000 pesos; uno de los socios ganó 10000 pesos con una puesta de 5000 pesos ¿cuál sería la puesta total?

3º El capital social de una compañía es de 17000 pesos, y la ganancia obtenida de 34000 pesos; uno de los socios ganó 20000 pesos ¿cuál sería su puesta?

4º La ganancia de una compañía fué de 34000 pesos, y el capital social de 17000 pesos; uno de los socios puso 5000 pesos ¿cuál sería la parte de ganancia que le correspondería?

230. **Octavo problema.**—Se desea situar en Londres la cantidad de 6400 pesos suponiendo que el cambio de México á Paris esté á 3 francos 75 céntimos y el de Paris á Londres á 23 francos 50 céntimos por libra esterlina, ¿cuál será el valor en monedas inglesas de la cantidad que se quiere situar haciendo el cambio de México á Paris y de Paris á Londres?

Los problemas **combinados** de que se compone este problema son los siguientes:

1º Si el peso mexicano vale en Paris 3 francos 75 céntimos, se desea saber 6400 pesos ¿á cuántos francos equivaldrán?

Planteo y solución:

Pesos mexican s.	Francos.
1	3·75
6400	$x = 24000$

$$x = 3‘75 \times 6400 = 24000$$

2º Si 23 francos 50 céntimos equivalen á 1 libra esterlina, 24 francos ¿á cuántas libras equivaldrán?

Planteo y solución:

Francos.	Libras esterlinas.
23‘50	1
24000	$x =$ 1021 lib. est. 5 chs. 6 p.

$$1 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{23‘50}$$

$$24000 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 \times 24000}{23‘50}$$

Solución final: Los 6400 pesos mexicanos situados en Londres equivaldrán á 1021 libras esterlinas, 5 chelines y 6 peniques.

231. **Noveno problema;**—Se trata de hacer una fundición de tres barras de plata: la primera pesa 5 kilogramos y tiene una ley de 903 milésimos; la segunda pesa 3 kilogramos y tiene una ley de 875 milésimos y la tercera pesa 2 kilogramos y tiene una ley de 900 milésimos; se desea saber ¿cuál será la ley que resulte después de la fundición?

Para averiguar la ley que resulte después de hecha la fundición, se necesita saber el número de kilogramos que entraron en la liga, en seguida la cantidad de ley que corresponde á la liga. El número de kilogramos de plata es de $5 + 3 + 2 = 10$. La cantidad de ley que hay en cada barra es como sigue:

		Kilogramos.
Primera barra	$5 \times 0{\cdot}903 =$	4'515
Segunda barra	$3 \times 0'875 =$	2'625
Tercera barra	$2 \times 0'900 =$	1'800
	KG. 10	Ley. 8'940

Si en 10 kilogramos de plata hay una ley de 8 kilogramos 940 gramos, se desea saber ¿cuál será la ley que corresponda á 1 kilogramo?

Planteo y solución:

KG. liga.	KG. Ley.
10	8'940
1	$x = 0'894$
1	$\frac{8'940}{10}$

La ley será de 894 milésimos y la liga de 106 milésimos.

232. **Décimo problema.** Un comerciante tiene vinos de dos clases diferentes: la primera de 21 pesos caja y la segunda de 30 pesos; se desea hacer una mezcla que se pueda vender á 25 pesos la caja, ¿cuánto debe tomarse de cada clase?

Si una caja de vino que vale 30 pesos se vende en 25 pesos, claro es que se pierden 5 pesos; pero vendiendo en 25 pesos la caja que vale sólo 21, entonces se ganarán 4 pesos. Por consiguiente, tomando 5 cajas de á 21 pesos para venderlas en 25 pesos cada una, se ganarán 20 pesos y tomando 4 cajas de á 30 pesos para venderlas en 25 cada una, se perderán 20 pesos. Esta compensación indica que la mezcla se hará en la proporción de 4 cajas de á 30 pesos con 5 cajas de á 21, para poder vender en 25 pesos la caja sin perder ni ganar en la venta.

Planteo y solución:

Precio medio.	Precio de las cajas.	Diferencias.
25	30	4
	21	5

Comprobación:

Cajas de vino.		Precio.		Pesos.
4	×	$30	=	120
5	×	21	=	105
9				$225

es decir, que 9 cajas de vino se deben vender en 225 pesos, 1 caja ¿cuánto valdrá?

Planteo y solución.

Cajas de vino.	Pesos.
9	225
1	$x = \$25$
1	$\frac{225}{9}$

Pongamos otro ejemplo.

Un vendedor de semillas tiene maíz de varios precios el hectólitro, á saber: de 5, de 6, de 8 y de 10 pesos y quiere hacer una mezcla de tal manera que sin perder ni ganar pueda vender el hectólitro de mezcla á 7 pesos, ¿cuántos hectólitros debe tomar de cada clase para hacer dicha mezcla?

Como se habrá notado en el problema anterior, se hizo la compensación con las diferencias de cada clase de precios y el precio medio, dando lugar á una solución única, aunque suficiente para reducirla á la mitad de los tantos obtenidos, la cuarta parte etc., ó bien al doble, triple, etc. En el presente caso vamos á tomar como base la unidad entera en uno de los precios, quedando el planteo del modo siguiente:

	Precios.	Base de la mezcla.	Duplicando	Precio de la mezcla.
Precio medio $7	$ 5	HL. 1'5	HL. 3	$15
	6	,, 1	,, 2	12
	8	,, 1	,, 2	16
	10	,, 1	,, 2	20
			9	63

Hectólitros.	Pesos.
9	63
1	$x = \$7$

Solución. Si tomo 1 hectólitro de á 10 pesos y lo vendo en 7 pesos pierdo 3 pesos; si tomo 1 de á 5 pesos y lo vendo en 7 pesos, gano 2 pesos; ¿cuántos deberé tomar de á 5 pesos para ganar 3 pesos?

Planteo y solución.

Si ganando.	Debo tomar de á 5.
$2	1
3	$x = \frac{3}{2} = 1'5$
1	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1 \times 3}{2}$

Deberé tomar 1'5 hectólitros de á 5 pesos; si tomo 1 de á 6 pesos y lo vendo en 7 pesos gano 1 peso; si tomo 1 de á 8 pesos y lo vendo en 7 pesos pierdo 1 peso, luego quedará ya todo compensado.

Duplicando obtendré 9 hectólitros que valen 63 pesos, y 1 hectólitro de la mezcla valdrá 7 pesos que es el precio á que se desea vender sin perder ni ganar.

Obsérvese que todo problema de aligaciones en el cual hay necesidad de determinar las proporciones que de cada clase han de tomarse para hacer la mezcla, admite un número infinito de soluciones; pero admitida una de ellas, puede duplicarse, triplicarse; etc., ó bien simplificarse del mod o que se quiera, la relación proporcional permanecerá siempre la misma. No obstante todas estas soluciones pueden reducirse á dos casos fundamentales:

1º Admitir **una** unidad de una clase cualquiera y determinar con ella las proporciones que deben entrar de las demás clases para hacer la mezcla.

2º Admitir **varias** unidades de una clase cualquiera y determinar con ellas las proporciones que deben entrar de las demás clases para hacer la mezcla.

Estos dos casos son completamente diferentes entre sí, pero uno y otro precisan una solución determinada, que después podrá servir de base para derivar de ella otras muchas, según se quiera.

En el ejemplo propuesto, si tomamos 1 hectólitro de á 5 pesos para venderlo en 7, ganaremos 2 pesos y esta diferencia servirá de base para determinar las proporciones que de las demás clases de maíz, comparando de dos en dos, deberán entrar en la mezcla, empleándose al efecto el siguiente razonamiento:

Si ahora tomo un hectólitro de á 10 pesos y lo vendo en 7 pierdo 3 pesos; pero como sólo quiero perder 2 pesos ¿qué tanto tomaré de á 10?

Planteo y solución:

Si perdiendo.	Tomo de á 10
\$3	1 HL.
2	$x = \frac{2}{3}$

Luego debo tomar $\frac{2}{3}$ de hectólitro de á 10 pesos para mezclarlo con 1 hectólitro de á 5 pesos.

Si tomo ahora 1 hectólitro de á 6 pesos y lo vendo en 7 pesos gano 1 peso; pero si tomo 1 hectólitro de á 8 y lo vendo en 7 pesos pierdo 1 peso, quedará hecha la compensación.

El resultado de la mezcla será como sigue:

	Precios.	Base de la mezcla.	Precio de la mezcla
$7	$ 5	1	$5
	6	1	6
	8	1	8
	10	$0\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$
		$3\frac{2}{3}$	$25\frac{2}{3}$

En el mismo ejemplo anterior podremos admitir como punto de partida 10 hectólitros de á 10 pesos cada uno para mezclarlos con los demás ¿cuánto se deberá tomar de cada clase? El razonamiento se hará como sigue:

10 hectólitros de á 10 pesos cada uno importan 100 pesos, pero como tengo que venderlos en 10 pesos tengo una pérdida de 30 pesos que deberé recompensarme tomando hectólitros de á 5 pesos; ¿cuántos deberé tomar? Si tomando 1 de á 5 para venderlo en 7 gano 2 pesos, para ganar 30 pesos ¿cuántos deberé tomar?

Planteo y solucion:

Si ganando.	Tomo de á 5.
$2	1 H L.
30	$x = 15$ H L.

Luego debo tomar 15 hectólitros de á 5 pesos para mezclarlos con 10 hectólitros de á 10 pesos cada uno.

Si tomo ahora uno de á 6 y lo vendo en 7, gano 1 peso que después pierdo vendiendo en el mismo precio uno de á 8. El resultado quedará así:

	Precios.	Base de la mezcla.	Precio de la mezcla.
$7	5	15	$ 75
	6	1	6
	8	1	8
	10	10	100
		27	189

Con estas dos soluciones queda probada la existencia de los dos casos fundamentales que indicamos más arriba y con ellos también la prueba irrefutable de que estos problemas admiten tantas soluciones cuantas se quieran y según convenga al comerciante hacer su mezcla, según las circunstancias y hasta designando previamente el número de unidades que de algunas especies convenga introducir en ella.

233. **Duodécimo problema.**—Hay infinidad de problemas que dan lugar á una ecuación de primer grado con una ó más incógnitas que se pueden resolver del mismo modo que se resuelven los problemas proporcionales. Examinemos algunos ejemplos.

1º ¿Cuál será el número cuya mitad, tercera, cuarta y quinta parte reunidas den un número igual á 154?

Planteo y solución: Si el número fuera 1 el resultado sería:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} = \frac{38‘50}{30}$$

Tomando como denominador común el 30 y reduciendo también á treintavos el número 154 el problema quedaría en esta forma:

Si 38‘50 treintavos proceden del número 1 ¿de qué número procederán 4620 treintavos?

Treintavos.	Número.
38‘50	1
4620	$x = 120$

$$1 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{38{`}50}$$

$$4620 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 \times 4620}{38{`}50}$$

En efecto, la mitad, tercera, cuarta y quinta de 120 es igual á 154.

2º La suma de dos números es 40 y su diferencia es 10 ¿cuáles son los números que se buscan?

Planteo y solución: Si uno de los números fuera 1, el otro sería 39. Si fuera 2, el otro sería 38. Si fuera 3, el otro sería 37. Estos tres números darían las tres soluciones siguientes:

1ª .... $1 + 39 = 40$ .... $1 - 39 = -38$
2ª .... $2 + 38 = 40$ .... $2 - 38 = -36$
3ª .... $3 + 37 = 40$ .... $3 - 37 = -34$

Pero como las tres soluciones —38, —36 y —34 no son iguales al número 10, que debería ser el resultado verdadero, hay que hacer las siguientes correcciones:

Soluciones.	Errores.	Diferencia de los errores.
1	48	
2	46	2
3	44	2
etc.	etc.	etc.

Se nota que los errores van disminuyendo en 2 constantemente, en tanto que las soluciones van aumentando en 1 también constantemente; luego el problema se podrá transformar en el siguiente problema proporcional:

Si cuando los errores disminuyen en 2, las soluciones aumentan en 1, para que el error disminuya en 44 ¿á cuánto hay que aumentar la solución?

Los errores disminuyen.		Las soluciones aumentan en
2	....	1
44	....	$x = 22$
1	....	$\frac{1}{2}$
44	....	$\frac{1 \times 44}{2}$

Luego hay que aumentar la solución en 22; es así que la solución que da lugar al error 44 es 3; luego hay que aumentarla de 22, de esta manera:

$$3 + 22 = 25$$

Si uno de los números es 25, el otro será $40 - 25 = 15$. En efecto, representando cada número con letras respectivamente, tendremos:

$$x + y = 40$$
$$x - y = 10$$

Sustituyendo:

$$25 + 15 = 40$$
$$25 - 15 = 10$$

Los números que se buscan son 25 y 15.

3º Un empleado que ganaba 5 pesos diarios fué amonestado de que se le impondría una multa de 6 pesos el día que no concurriera á su oficina; al fin del mes recibió 40 pesos, ¿cuántos días trabajó y cuántos no?

Planteo y solución: Si el empleado hubiera concurrido á su oficina todo el mes, no hubiera sido multado y habría recibido su sueldo íntegro; pero como recibió solamente 40 pesos se comprende que tuvo varias multas. Supongamos que no concurrió á su oficina una, dos ó tres veces; las soluciones serían las siguientes:

	No asistió.	Asistió.
1ª	$1 \times 6 = 6$	$29 \times 5 = 145$
2ª	$2 \times 6 = 12$	$28 \times 5 = 140$
3ª	$3 \times 6 = 18$	$27 \times 5 = 135$

En consecuencia los saldos serán mayores que 40 en el orden siguiente:

Por 1 día, el saldo es de $145 - 6 = 139$.
Por 2 días, el saldo es de $140 - 12 = 128$.
Por 3 días, el saldo es de $135 - 18 = 117$.

Luego hay que hacer con el saldo verdadero de 40 pesos las correcciones respectivas:

Soluciones.	Errores.	Diferencias de los errores.
1	99	
2	88	11
3	77	11
etc.	etc.	etc.

Se observa que los errores disminuyen en 11, en tanto que las soluciones aumentan en 1; en consecuencia el problema se transformará del modo siguiente:

Si cuando los errores disminuyen en 11 las soluciones aumentan en 1, cuando el error disminuya en 88 ¿á cuánto se debe aumentar la solución?

Los errores disminuyen en	Las soluciones aumentan en
11	1
88	$x = 8$
1	$\frac{1}{11}$
88	$\frac{1 \times 88}{11}$

Pero como el error 88 corresponde á la solución 2, hay que aumentar esta última en 8, es decir, quedará convertida en $2 + 8 = 10$.

Luego el empleado ha faltado á la oficina 10 días y ha asistido el resto del mes, ó sea $30 - 10 = 20$ días. Comprobando la solución tendremos:

Asistió:	$20 \times 5 =$	100
No asistió:	$10 \times 6 =$	$-$ 60
Saldo.....................		\$ 40

4º Julio, jugando un día á las canicas, le dijo á su hermano Guillermo:—Si me das 10 canicas de las tuyas entonces tendré doble número de las que tú tienes.—Guillermo le contestó: Aquí las tienes; ahora dame tú el doble de las que me pides, y entonces tendré triple número de las que te quedan. ¿Cuántas canicas tiene Julio y cuántas Guillermo?

Planteo y solución: Si Julio hubiera tenido una canica, dos ó tres solamente, los resultados serían los siguientes:

Primera solución: 1 canica.

Canicns de Julio.	Canicas de Guillermo.
$1 + 10 = 11$	$11 \div 2 = 5'5$
$1 - 10 = -9$	$5'5 + 10 = 15'5$
$3 \times -9 = -27$	$15'5 + 10 = 25'5$

Pero como no son iguales los resultados hay que quitar á $+25'5$ el número -27 cuya diferencia será: $25'5 + 27 = 52'5$.

Segunda solución: 2 canicas.

Canicas de Julio.	Canicas de Guillermo.
$2 + 10 = 12$.................	$12 \div 2 = 6$
$2 - 10 = -8$	$6 + 10 = 16$
$3 \times -8 = -24$..............	..$16 + 10 = 26$

Pero como tampoco son iguales los resultados hay que buscar la diferencia respectiva entre 26 y — 24 ó sea 26 + 24 = 50.

Tercera solución: 3 canicas.

Canicas de Julio.			Canicas de Gillermo.
3 +	10 =	13	13 ÷ 2 = 6'5
3 —	10 = —	7	6'5 + 10 = 16'5
3 × —	7 = —	21	16'5 + 10 = 26'5

Los resultados son desiguales y la diferencia entre +26'5 y — 21 es lo mismo que 26'5 + 21 = 47'5.

En los tres resultados anteriores hay errores que vamos á corregir en el cuadro siguiente:

Soluciones.	Errores.	Diferencias.
1	52'5	
2	50	2'5
3	47'5	2'5
etc.	etc.	etc.

Se observa que los errores disminuyen en 2'5 cuando las soluciones aumentan en 1; luego el problema se podrá transformar en el siguiente problema proprocional:

Cuando los errores disminuyen en 2'5 las soluciones aumentan en 1; para que el error 47'5 disminuya totalmente ¿qué tanto debo aumentar á la solución respectiva?

Planteo y soluciónf

Errores disminuyen en	Soluciones aumentan en
2'5	1
47'5	$x = 19$
1	$\frac{1}{2'5}$
47'5	$\frac{1 \times 47'5}{2'5}$

La solución 3 se debe aumentar con el número 19 dando un resultado de $3 + 19 = 22$. Luego Julio tenía 22 canicas.

Hagamos la comprobación.

Canicas de Julio.	Canicas do Guillermo.
$22 + 10 = 32$	$32 \div 2 = 16$
$22 - 10 = 12$	$16 + 10 = 26$
$3 \times 12 = 36$	$26 + 10 = 36$

En efecto, 36 es el triple de 12 y 32 el duplo de 16 que es el número de canicas que tenía Guillermo.

Con estos ejemplos nos basta para probar que los problemas que dan lugar á una ecuación de primer grado con una ó más incógnitas, son susceptibles de transformarse en problemas proporcionales, en virtud de que la ley que rige á los errores es proporcional á la ley que rige á las soluciones; como cada error que indica la distancia á que nos encontramos de la verdad, es proporcional también al aumento ó dimiuución definitivas en relación con la solución correspondiente á dicho error.

Hemos puesto ejemplos de los principales problemas proporcionales compuestos de dos ó más combinados, sin necesidad de dar ninguna regla particular que deba emplearse en su solución, como es costumbre muy vieja entre los autores y entre los maestros. En cada caso especial deberá procurarse que los alumnos lo analicen y lo descompongan en seguida en una serie de problemas combinados, que después, á su vez, se descompondrán cada uno en los problemas simples correspondientes. Los niños que así se eduquen, estarán aptos en todo tiempo para resolver en su vida sin ninguna dificultad toda clase de cálculos, cualquiera que sea el asunto que en ellos se trate.

(Consúltese nuestra obra "Metodología de la Aritmética" en donde se trata extensamente el asunto objeto de estos problemas).

FIN.