



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



**SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD AJUSCO
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA**

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PORCENTAJES CON ESTUDIANTES DE
PRIMERO DE SECUNDARIA. LOGROS Y ERRORES**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN PEDAGOGÍA**

P R E S E N T A:

ESTEFANÍA AYLÍN LOYOLA ROJAS

ASESORA:

DRA. IVONNE TWIGGY SANDOVAL CÁCERES

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO, 2021

Agradecimientos

Esta tesis no hubiera sido posible sin la ayuda de mi familia, que de manera incondicional me apoyó. Agradezco a mi madre Silvia, a mis hermanas Angélica e Irais, a mis abuelos Cristina y Antonio.

Le doy gracias a mi asesora por estar al pendiente de mis ideas, ayudarme a organizar, fomentar la participación y por la lectura constante de esta tesis.

Gracias a Dios por darme salud y fuerzas cuando más lo necesité.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo 1. El aprendizaje del porcentaje en estudiantes de secundaria.	
Presentación del problema	3
1.1. Las matemáticas en el curriculum mexicano	4
1.1.1. <i>Breve recorrido por las reformas educativas de 1993, 2006 y 2017. Desde la proporcionalidad y desde el análisis de datos</i>	14
1.1.2. <i>Desde la investigación. Estudios respecto a la enseñanza-aprendizaje del porcentaje</i>	17
1.2. Planteamiento del problema	22
1.3. Preguntas del estudio	24
1.4. Objetivos	24
1.5. Supuesto de investigación	24
1.6. Justificación	25
Capítulo 2. El porcentaje: definición, tipos de problemas, dificultades y representaciones	26
2.1. <i>¿Cómo se define el porcentaje?</i>	26
2.2. Tipos de situaciones o problemas relacionados con el porcentaje	28
2.2.1. <i>Revisión de documentos oficiales</i>	29
2.2.2. <i>Revisión de libros de texto</i>	31
2.2.3. <i>Revisión de la literatura</i>	33
2.2.4. <i>Algunas dificultades en el aprendizaje de los porcentajes</i>	36
2.3. Representaciones semióticas y el aprendizaje conceptual en matemáticas	40
2.3.1. <i>Registros semióticos de representación, ¿qué son? ¿Cómo se caracterizan? ¿En qué se diferencian?</i>	41
2.3.2. <i>Transformaciones entre registros: conversiones y tratamiento. Ejemplos con porcentaje</i>	41
2.3.3. <i>Ejemplos de libros de texto de secundaria: Tipos de problema y diferentes representaciones</i>	42
Capítulo 3. Metodología	45
3.1. Tipo de estudio.....	45
3.2. Contexto del estudio y sujetos participantes	47

3.3. Recolección de datos: Diseño de instrumentos y proceso de recolección.....	49
3.3.1. <i>Instrumentos de recolección de datos: Cuestionario y entrevista</i>	50
3.3.2. <i>Proceso de recolección de datos</i>	53
3.4. De los datos a los resultados. Procesamiento y análisis	54
Capítulo 4. Resolución de problemas de porcentaje. Una mirada con estudiantes de primero de secundaria	56
4.1. Resolución de problemas de porcentaje: Logros y dificultades	56
4.1.1. <i>La aplicación de un por ciento. Un tipo de problema con mayor comprensión.</i> 56	
4.1.2. <i>La determinación de un por ciento</i>	63
4.1.3. <i>La determinación de una base. Un mayor reto para los alumnos</i>	68
4.2. ¿Qué orientó algunas estrategias erróneas en la resolución de problemas de porcentaje? Voces de alumnos de primero de secundaria.....	74
4.2.1. <i>Entrevistas</i>	74
4.3. A manera de cierre	78
Conclusiones y recomendaciones	80
Referencias bibliográficas	85
Anexos	89

Introducción

En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2006) reconoce la relevancia de las matemáticas para la formación de los ciudadanos debido a que permite modelar, matemáticamente, situaciones diversas en entornos socioculturales, así como el reconocimiento, el planteamiento y la resolución de problemas cotidianos, sociales, científicos y tecnológicos. Un concepto visible en diferentes actividades de la vida cotidiana es el porcentaje, por su amplio uso social; por ejemplo, en encuestas, concursos, comercio, descarga de archivos, facturas electrónicas, salarios, cálculo del Impuesto sobre el Valor Agregado (IVA), operaciones bancarias.

La siguiente tesis pretende dar cuenta del desarrollo conceptual respecto al porcentaje, la manera en que los estudiantes de primer grado de secundaria resuelven problemas del tanto por ciento en diferentes contextos, representaciones y tipos de problemas. Además, indagar sobre sus logros y errores en el aprendizaje, contrastarlos con los planteamientos curriculares oficiales (contenido, objetivos, aprendizajes clave y esperados), a través de una serie de investigaciones sobre el tema.

La presente tesis está conformada por cuatro capítulos; el primero de ellos muestra el lugar que ocupan las matemáticas en el currículo, desde preescolar hasta secundaria. Además, se presentan los antecedentes respecto al porcentaje; un breve recorrido educativo - histórico curricular de esta asignatura a través de tres reformas educativas: 1993, 2006, 2017; y se describen algunos resultados de estudios, investigaciones en los que se ha abordado este tema. Más adelante, se presenta el planteamiento del problema, las preguntas y objetivos (generales y específicos) de la tesis, y finaliza con el supuesto del estudio y la justificación, donde se resalta la necesidad de abordar la problemática de analizar los logros y errores de estudiantes al momento de resolver problemas de porcentajes.

En el segundo capítulo, encontraremos cómo se aborda la definición del porcentaje o tanto por ciento; se muestran los diferentes tipos de interpretación en torno al tema; cómo se abordan estas interpretaciones en libros de texto de primero de secundaria; en la literatura especializada en Educación Matemática y se describen algunas dificultades en el aprendizaje del porcentaje. Posteriormente se desglosan las características principales en torno a las representaciones matemáticas para el porcentaje.

En el tercer capítulo se expone la metodología, se describe el tipo de estudio realizado y sus características, el contexto y los sujetos participantes. También se muestran los aspectos considerados para el diseño de los instrumentos y su aplicación; y, por último, el procesamiento y análisis de la información, la organización de las respuestas y las categorías de análisis.

En el último capítulo se aborda el análisis de los resultados de la investigación. Se inicia con una descripción global de logros y dificultades; para después, profundizar con algunos casos específicos, a fin de comprender qué acciones de los alumnos los llevaron a obtener sus respuestas.

Esta tesis pretende analizar el proceso de resolución de problemas de porcentajes que alumnos de primero de secundaria hacen, centrándose en el contexto, representación y tipos de problemas. Además de comparar los diversos errores con el tipo de problemas propuestos en el libro de texto gratuito (2018-2020) que usa una escuela secundaria técnica en la Ciudad de México.

Capítulo 1. El aprendizaje del porcentaje en estudiantes de secundaria.

Presentación del problema

El porcentaje es un concepto presente en actividades cotidianas como en las compras, descarga de archivos o representación de información. Usarlo adecuadamente requiere de otros conceptos matemáticos; como es la proporcionalidad, número decimal, equivalencias, razón, fracción.

En este capítulo se muestra la pertinencia de seguir estudiando cómo usan los alumnos el porcentaje y comprender las principales dificultades a las que se enfrentan.

En un primer apartado se muestra el lugar que ocupan las matemáticas en el currículo, es decir, una asignatura con bastante presencia curricular desde preescolar hasta secundaria. En un segundo apartado se presentan los antecedentes respecto al porcentaje desde dos vertientes. Por un lado, un breve recorrido educativo - histórico curricular de esta asignatura a través de tres reformas educativas: 1993, 2006, 2017. En particular, se describen los aspectos que cambian y permanecen en los planes y programas oficiales mexicanos presentados por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 1993, 2006, 2017). Por el otro, se describen algunos resultados de estudios en los que se ha abordado este tema.

Posteriormente, en el tercer apartado, se presenta el planteamiento del problema, las preguntas y objetivos (generales y específicos) de la tesis. Este capítulo finaliza con el supuesto del estudio y la justificación, donde se resalta la relevancia y la necesidad de abordar la problemática de analizar los logros y errores de estudiantes al momento de resolver problemas de porcentajes.

1.1. Las matemáticas en el curriculum mexicano

El sistema educativo nacional mexicano está organizado en tres niveles a saber, básica, media superior y superior. La educación básica se integra por preescolar, primaria y secundaria.

- En la educación preescolar en sus tres grados, se atiende a niños de tres a cinco años.
- En nivel primaria tiene seis grados, incorpora a niños de seis a doce años.
- La educación secundaria se imparte en tres grados, da cobertura a jóvenes de trece a quince años.

En este sistema se trata de cumplir una serie de propósitos en cada nivel educativo; para ello, antes se tienen que establecer un número de horas mínimas en las que, el docente y alumno dedicarán tiempo a ciertos contenidos programáticos. A este tiempo establecido se le denomina tiempo lectivo.

Enmarca la SEP (2017) que en cada uno de estos niveles la jornada mínima determinada es:

preescolar, la jornada debe ser de al menos tres horas diarias y de 600 horas lectivas anuales; en el caso de la educación primaria, la jornada diaria es de un mínimo de 4.5 horas, que equivalen a 900 horas anuales; y en el nivel de educación secundaria, de siete horas lectivas diarias que dan lugar a un mínimo de 1 400 horas lectivas anuales. (p. 135)

Se le designa como jornada regular y hay instituciones educativas en que van más allá de estas horas asignadas; jornadas escolares que se extienden y amplían, donde los estudiantes pasan más horas dentro de la escuela y se les denomina escuelas de tiempo completo, donde se benefician del máximo de horas lectivas.

En este apartado se presentan las jornadas regulares en cada nivel educativo nacional, las horas lectivas anuales de cada campo de formación académica; áreas de desarrollo personal y social; autonomía curricular.

En el caso de preescolar, los estudiantes abordan tres campos de formación académica principales, según la SEP (2017):

- *Lenguaje y comunicación.* Este campo está conformado por dos cursos; lengua materna (español/lengua indígena) y lengua extranjera (inglés). Los alumnos de primero y segundo grado, dedican anualmente 140 horas y en tercero 100 horas a la primera y 100 horas a la segunda.
- *Pensamiento matemático.* Dentro de este apartado, se encuentra, únicamente, el curso de matemáticas; en este, los alumnos trabajan 80 horas lectivas anuales por cada grado.
- *Exploración y comprensión del mundo natural y social.* Los niños tienen la materia asignada con el mismo nombre de este campo y cumplen en cada grado 80 horas lectivas anuales.

Asimismo, se tienen tres áreas de desarrollo personal y social:

- *Artes de desarrollo personal y social.* A este curso, los alumnos de primero y segundo le dedican 90 horas y los de tercero 60 horas lectivas anuales.

los estudiantes aprenden otras formas de comunicarse, a expresarse de manera original, única e intencional mediante el uso del cuerpo, los movimientos, el espacio, el tiempo, los sonidos, las formas y el color; y desarrollan un pensamiento artístico que les permite integrar la sensibilidad estética con otras habilidades complejas de pensamiento (SEP, 2017, p. 465).

- *Educación socioemocional.* Este campo busca que los estudiantes se conozcan y confíen en sí mismos, logren “entender y regular sus emociones, establecer y alcanzar metas positivas, tomar decisiones responsables, mostrar empatía hacia los demás, establecer y mantener relaciones interpersonales armónicas” (SEP, 2017, p. 465). Los alumnos de primer y segundo grado trabajan con esta asignatura 90 horas lectivas anuales y en tercero 60 horas.

- *Educación física*. Este curso tiene 40 horas lectivas anuales en las que los estudiantes realizan “actividades que desarrollan su corporeidad, motricidad y creatividad” (SEP, 2017, p. 590).

En la Tabla 1.1 se muestran las horas lectivas anuales que se desarrollan en los tres grados de preescolar, organizados por campos de formación académica, áreas de desarrollo personal y social y autonomía curricular.

Tabla 1.1. Horas lectivas anuales de los campos de formación académica; áreas de desarrollo personal y social; autonomía curricular en Preescolar.

Preescolar				
			Primer y segundo grados	Tercer grado
Formación académica	Campos y asignaturas	Lenguaje y comunicación	140	100
		Ingles*		100
		Pensamiento matemático	80	80
		Exploración y comprensión del mundo natural y social	80	80
Desarrollo personal y social	Áreas	Artes	90	60
		Educación socioemocional	90	60
		Educación física	40	40

Autonomía curricular	Ámbitos	Ampliar la formación académica; potenciar el desarrollo personal y social; nuevos contenidos relevantes; conocimientos regionales; proyectos de impacto social.	80	80
----------------------	---------	---	----	----

Como se visualiza en la tabla anterior, durante los tres grados de preescolar el Lenguaje y comunicación es la asignatura con más horas lectivas anuales (240 horas), seguido el Pensamiento matemático; Exploración y comprensión del mundo natural y social; y Autonomía Curricular (160 horas).

Ahora bien, en el nivel primaria se presentan los mismos campos y áreas con nombres más específicas y diferentes horas semanales para cada asignatura. A continuación se desarrolla.

- *Lenguaje y comunicación.* Este campo está conformado por dos cursos; lengua materna (español/lengua indígena) y lengua extranjera (inglés). Estas dos materias se trabajan de primero a sexto grado. Lengua materna, en primero y segundo grados, los alumnos dedican 320 horas; en tercer grado 200 horas y de cuarto a quinto grados 200 horas lectivas anuales. Lengua extranjera, en todos los grados se cumplen con 100 horas.
- *Pensamiento matemático.* Matemáticas. Los estudiantes trabajan de primero a sexto grados 200 horas lectivas anuales.
- *Exploración y comprensión del mundo natural y social.* Establecido por seis cursos. En primer y segundo grados se denota como Conocimiento del medio, los estudiantes dedican 80 horas; en tercer grado son dos las asignaturas: Historias, paisajes y convivencia en mi localidad y Ciencias naturales y tecnología, la primera cumple con 80 horas y la segunda 120 horas. Para los

grados cuarto, quinto y sexto los cursos son cuatro: Ciencias naturales y tecnología; Historia; Geografía y Formación cívica y ética; los estudiantes trabajan 80 horas a la primera y 40 horas lectivas anuales a cada una respectivamente.

En relación con el desarrollo personal y social las asignaturas son:

- *Artes de desarrollo personal y social; educación socioemocional y educación física.* Estas tres materias se trabajan en todos los grados de educación primaria. La primera cumple con 40 horas; la segunda con 20 horas y la última con 40 horas lectivas anuales.

En la Tabla 1.2 se muestran las horas lectivas anuales organizadas por campos de formación académica, áreas de desarrollo personal y social y autonomía curricular, para Primaria.

Tabla 1.2. Nivel educativo primaria. Horas lectivas anuales de los campos de formación académica; áreas de desarrollo personal y social; autonomía curricular.

Primaria					
			Primer y segundo	Tercero	Cuarto, quinto y sexto
Formación académica	Campos y asignatura	Lengua materna	320	200	200
		Inglés	100	100	100
		Matemáticas	200	200	200
		Conocimiento del medio	80		
		Ciencias naturales y tecnología		80	80
		Historias, paisajes y convivencia en mi localidad		120	
		Historia			40

		Geografía			40
		Formación cívica y ética			40
Desarrollo personal y social	Áreas	Artes	40	40	40
		Educación socioemocional	20	20	20
		Educación física	40	40	40
Autonomía curricular	Ámbitos	Ampliar la formación académica; potenciar el desarrollo personal y social; nuevos contenidos relevantes; conocimientos regionales; proyectos de impacto social.	100	100	100

Como se mostró en la tabla, la asignatura con mayores horas lectivas anuales durante los seis grados del nivel educativo primaria es la Lengua materna con 720 horas, seguido Matemáticas con 600 horas lectivas anuales.

Esta tesis está centrada en la educación secundaria, donde se siguen trabajando con los mismos campos y áreas de desarrollo personal hasta ahora presentados (SEP, 2017). En la Tabla 1.3 se sintetizan las horas lectivas anuales por campo formativo.

- *Lenguaje y comunicación.* Está establecido por dos cursos; lengua materna (español) y lengua extranjera (inglés). Los alumnos dedican 200 horas a la primera y 120 horas a la segunda.
- *Pensamiento matemático.* La asignatura de matemáticas contempla este campo de formación académica. Se cumplen 200 horas.

Abarca la resolución de problemas que requieren el uso de conocimientos de aritmética, álgebra, geometría, estadística y probabilidad... se busca que los estudiantes utilicen el pensamiento matemático al formular explicaciones, aplicar métodos, poner en práctica algoritmos, desarrollar estrategias de generalización y particularización; pero sobre todo al

afrentar la resolución de un problema hasta entonces desconocido para ellos. (SEP, 2017, p. 297)

- *Exploración y comprensión del mundo natural y social.* Se constituye por diferentes disciplinas (entorno a las ciencias sociales y naturales) como son la Biología, Historia, Geografía, Formación Cívica y Ética, Tecnología. Con estas asignaturas se pretende que “Los educandos adquieran una base conceptual para explicarse el mundo en que viven, que desarrollen habilidades para comprender y analizar problemas diversos y complejos; en suma, que lleguen a ser personas analíticas, críticas, participativas y responsables” (SEP, 2017, p. 329).

En primer grado el estudiante cursa Biología, Geografía, 160 horas respectivamente; en segundo grado Física, 240 horas; en tercero Química 240 horas. En todos los grados las asignaturas Historia (primer grado 80 horas; segundo y tercero 160 horas) y Formación Cívica y Ética 80 horas lectivas anuales.

Asimismo, se tienen tres áreas de desarrollo personal y social:

- *Artes de desarrollo personal y social; educación socioemocional y educación.* En esta área, se organizan diferentes artes como son las visuales, danza, música y teatro. Por otra parte, en la secundaria se presenta la tutoría, educación socioemocional y educación física donde los estudiantes desarrollan actividades corporales, motrices y creativas. En la primera, se cumplen 120 horas; en la segunda 40 horas y en la tercera 80 horas en cada grado.

Tabla 1.3. Nivel educativo secundaria. Horas lectivas anuales de los campos de formación académica; áreas de desarrollo personal y social; autonomía curricular.

Secundaria					
			Primero	Segundo	Tercero
Formación académica	Campos y asignaturas	Lengua materna	200	200	200
		Inglés	120	120	120
		Matemáticas	200	200	200
		Ciencias y tecnología. Biología-Física-Química*	160	240	240
		Historia	80	160	160
		Geografía	160		
		Formación cívica y ética	80	80	80
Desarrollo personal y social	Áreas	Artes	120	120	120
		Educación socioemocional	40	40	40
		Educación física	80	80	80
Autonomía curricular	Ámbitos	Ampliar la formación académica; potenciar el desarrollo personal y social; nuevos contenidos relevantes; conocimientos regionales; proyectos de impacto social.	160	160	160

Como se observa en las tablas 1.1., 1.2. y 1.3, una de las asignaturas con mayor presencia curricular, desde preescolar hasta secundaria, son las matemáticas.

Un aspecto importante a destacar cuando los alumnos ingresan a secundaria, afrontan un cambio en contenidos (nuevos y en profundización), en todos los ejes, ya sea porque hay nuevos temas o porque se profundiza en nuevos elementos de los temas abordados en los grados anteriores.

- *Número, álgebra y variación.* Enmarca la SEP (2017) que en primaria y secundaria, “en el estudio de la aritmética se trabaja con los números naturales, fraccionarios, decimales y enteros, las operaciones que se resuelven con ellos y las relaciones de proporcionalidad” (p. 304). En el tema de fracciones y decimales se abordan aspectos como su expresión, notaciones, conversión, multiplicación, división y se profundiza en aspectos de la variación, en vista de que en secundaria se trabaja más en las relaciones de proporcionalidad. En secundaria se inicia con las herramientas como son las algebraicas “para generalizar y expresar simbólicamente las propiedades de los números y sus operaciones” (p. 304). Además, se desarrollan situaciones que requieren nociones conceptuales, técnicas y métodos adecuados del álgebra.
- *Forma, espacio y medida.* “Las experiencias dentro del ámbito geométrico y métrico ayudarán a los alumnos a comprender, describir y representar el entorno en el que viven, así como resolver problemas y desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo” (SEP, 2017, p. 305). El sistema de referencia de la organización espacial (interioridad, proximidad, orientación y direccionalidad) proporciona herramientas para que el alumnado no sólo resuelva problemas matemáticos escolares, sino de su entorno cotidiano; permite un razonamiento propiamente matemático, el deductivo.
- *Análisis de datos.* Se busca que los estudiantes “desarrollen habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico. Con esto, se espera que fortalezcan los recursos que tienen para analizar y comprender la información que los rodea” (SEP. 2017, p. 306).

Las ideas fundamentales a profundizar en este eje son:

1. La importancia de los datos para entender los fenómenos naturales y sociales.

2. El uso de las distribuciones y sus representaciones —tablas o gráficas— como recursos para comprender los datos.
3. El uso de medidas de tendencia central y de dispersión para reducir la complejidad de los conjuntos de datos y aumentar las posibilidades de operar con ellos.
4. El estudio de la probabilidad como método para tratar con la incertidumbre (SEP. 2017, p. 306).

En el eje de análisis de datos, los alumnos realizan actividades que les ayudan a interpretar, analizar y visualizar información en diferentes representaciones (tablas, gráficas). En secundaria, se amplía, profundiza el desarrollo de análisis de datos; medidas de tendencia central y medidas de dispersión de datos.

Como se ha ilustrado a lo largo de este apartado, desde las propuestas curriculares, la educación secundaria “representa la culminación de la instrucción matemática básica y es la iniciación a los métodos formales, como el del lenguaje algebraico, que habrán de utilizarse en la enseñanza [posterior]” (Eudave, 2013, pp. 75-76). El desarrollo del pensamiento lógico – matemático en el estudiante, a lo largo de la educación básica, le permitirá la comprensión de su realidad, construir conocimiento, comprender y reflexionar elementos abstractos que en su entorno existen. Fortalecer los aprendizajes de los estudiantes en el campo de pensamiento matemático es una tarea pedagógica, la cual concierne a todo agente implicado en la educación; las matemáticas son útiles en la vida social, económica y es un producto cultural particular, útil y necesario en diferentes disciplinas. La resolución de problemas que impliquen porcentajes están presentes en asignaturas como son la geografía (densidad de la población, tasa de natalidad, escalas de mapas) y gráficos de cualquier tema general, con el fin de organizar datos específicos (Lia, Grimaldi y Machiunas, 2006).

Varios autores han documentado dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos, particularmente en el tema de porcentajes, en los que intervienen diferentes factores: la complejidad conceptual del tema, las estrategias didácticas del profesor y las situaciones de la escuela y de sus estudiantes. Al identificar logros

y errores vinculados con el aprendizaje del “tanto por cierto” en un determinado grupo, será posible realizar un análisis profundo que podría ser insumo para futuras propuestas pedagógicas o de intervención (Lia, *et al.*, 2006).

Para ilustrar algunos aspectos respecto al porcentaje, se han estructurado en dos miradas; desde el currículo y desde la investigación. En el primero, se concentra la organización temática, cómo se han abordado en las reformas educativas de 1993, 2006 y 2017. En el segundo, las investigaciones previas a partir de 1982 hasta el 2014 y con diferentes perspectivas sobre el tema.

1.1.1. Breve recorrido por las reformas educativas de 1993, 2006 y 2017.

Desde la proporcionalidad y desde el análisis de datos

La educación mexicana está organizada en un sistema desde preescolar hasta nivel superior. Aunque a lo largo de los años se ha ido modificando, no deja de existir. En particular, en la educación secundaria se han propuesto cambios curriculares derivados de las tres últimas reformas educativas (1993, 2006 y 2017). Estas muestran cómo se han ido ajustando a las necesidades de la sociedad actual, según lo afirmado en los documentos oficiales.

En cada reforma educativa, los cambios propuestos impactan en los recursos, materiales educativos y las prácticas docentes pues plantean enfoques y orientaciones didácticas; sugerencias de evaluación, dosificación (ejes y temas) y aprendizajes esperados. Algunos temas están interconectados entre ejes como es el de porcentajes, estudiado en dos temas (o contenidos): proporcionalidad y estadística.

Desde 1993, en los programas oficiales, este tema se aborda en dos ejes: proporcionalidad y manejo de la información; y tiene como propósito “Conocer el uso de los porcentajes, tablas, gráficas y otras formas usuales de organizar y presentar la información” (SEP, 1993, p. 14).

En proporcionalidad, introduce “la noción de razón entre dos cantidades y su expresión por medio de un cociente. Calcular por porcentajes y sus aplicaciones en

la vida cotidiana, [elaborar] tablas de números o cantidades que varían proporcionalmente y problemas de variación proporcional directa” (SEP, 1993, p. 22).

En la presentación y tratamiento de la información busca:

que los alumnos conozcan y acostumbren a la utilización de porcentajes, tablas, gráficas y otras formas usuales de presentar y tratar la información, [haciendo uso] de una tabla o de una gráfica para explorar si dos cantidades varían proporcionalmente o no [y dando] ejemplos para ilustrar el uso de razones y porcentajes en la presentación de información (SEP, 1993, p. 24).

Estos “programas recomiendan que sea durante el primer grado de secundaria, el estudio de los porcentajes [...] en la solución de ejercicios y problemas (donde los apliquen)” (SEP, 1993, p. 124). En dicho documento se señalan tres casos vinculados con el aprendizaje del porcentaje: “aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje; la determinación de un tanto por ciento y la determinación de la base” (SEP, 1993, pp. 123-124).

En 2006, los porcentajes se presentan en un eje principal: el manejo de la información; abordado en dos temas, proporcionalidad y funciones; análisis y representación de datos.

Se pide al estudiante “Resolver problemas que impliquen el cálculo de porcentaje utilizando adecuadamente la expresión fraccionaria o decimal [...] Aplicar el porcentaje a una cantidad, determinar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra, determinar la base de un porcentaje, plantear problemas en los que el porcentaje es mayor que 100” (SEP, 2006, pp. 45-46).

Por otro lado, “interpretar información representada en gráficas de barras y circulares de frecuencia absoluta y relativa, provenientes de diarios o revistas y de otras fuentes; en torno a la relación entre los porcentajes señalados y las fracciones de área del círculo que ocupan, o bien, establecer directamente una relación proporcional entre las cantidades y los ángulos (p. 47).

En la reforma educativa de 2017 se marcan aprendizajes claves y se ubican en campos de formación académica; se mantiene la organización de contenidos en dos ejes. El porcentaje se vincula con el eje de Número, álgebra y variación (en proporcionalidad) y en el eje Análisis de datos (en estadística).

[En el primero, se indica que los alumnos] aprenderán a resolver problemas más complejos y a expresar el tanto por ciento mediante números con punto decimal [...] Cuando se aplica un tanto por ciento a una cantidad entran en juego tres datos: el tanto por ciento (o tasa), la cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento y la cantidad final que resulta (el porcentaje). (SEP, 2017, párr. 3-4)

En el segundo, se introduce la elaboración de gráficas circulares, además de continuar con su lectura e interpretación; siendo útil determinar los porcentajes, considerando los datos de los ángulos de la circunferencia, se divide en sectores y en cada sector se anotan los porcentajes correspondientes (SEP, 2017).

Los propósitos en relación al tanto por ciento son:

- “Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas,
- Tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias [...] y
- Perfeccionar las técnicas para calcular valores faltantes en problemas de proporcionalidad y cálculo de porcentajes” (SEP, 2017, pp. 299-300).

De lo anterior, se puede afirmar que el aprendizaje de los porcentajes es un concepto importante a consolidarse en la educación básica. Como ya se describió en cada una de estas reformas educativas se precisan lo fundamental del concepto, la aplicación y las diversas maneras de calcularlo. Este tema tiene un campo de trabajo privilegiado por su amplio uso social en situaciones de la vida real.

Si bien el nombre de los ejes ha cambiado en estas reformas educativas, lo relacionado con porcentajes permanece casi sin modificación. Asimismo, su posición en el libro de texto; unas veces está después del tema de “fracciones”, otras veces después de “ecuaciones lineales”. No dejan de tener relación, principalmente porque se le presenta al alumno de secundaria cuando ya reconoce

que un número puede ser parte de otro, ser parte de un todo. Y porque puede así, manejar información en determinadas circunstancias, con distintos contextos, tipos de problemas y representaciones.

A grandes rasgos, estas tres reformas abordan el tanto por ciento en “proporcionalidad” y en “gráficas”. Su análisis y enseñanza, principalmente, está centrado en estos dos contenidos y abordado desde tres distintos tipos de problemas (aplicación del porcentaje, determinación de un por ciento y el de la base).

De los ejemplos presentados en las orientaciones didácticas en estos documentos (SEP, 1993, 2006, 2017) para actividades y situaciones problemas que se les pueden proponer a los alumnos, los contextos más comunes son de precios, dinero, población, recetas de cocina, objetos, peso o cantidad, distancia y tiempo. Las representaciones que se usan son la verbal, gráfica circular, gráfica de barras, tablas y figuras. En cada una de estas tres reformas se sugiere el uso de la calculadora para obtener los porcentajes, lo que implica no solo a usar la tecla %, sino aprender a aplicar porcentajes, calcular aumentos y descuentos (SEP, 1993, 2006, 2017).

En este recorrido por estas tres reformas, que de algún modo modificó la presentación de los contenidos entorno al porcentaje, permite, además, visualizar que el porcentaje se relaciona con otros contenidos como es el de la fracción (parte-todo), con equivalencias, con las gráficas (para un mejor manejo de la información), operaciones básicas (multiplicación, suma, resta, división), números decimales, por mencionar algunos.

1.1.2. Desde la investigación. Estudios respecto a la enseñanza-aprendizaje del porcentaje

El tema de porcentajes ha sido abordado desde un análisis conceptual; desde el aprendizaje y las dificultades en ese proceso de resolución; desde propuestas para

propiciar en los alumnos el aprendizaje del cálculo de porcentajes y desde didácticas para el maestro, su enseñanza.

Whipkey, Whipkey y Conway (1982) abordan a los porcentajes en dos temáticas, la del por ciento y gráficas circulares. Primero explica el concepto de por ciento; por cientos mayores que 100 y menores que 1; por ciento y decimales; cómo encontrar el por ciento de un número; cómo encontrar qué por ciento es un número de otro; cómo encontrar un número cuando se conoce un por ciento y por ciento de aumento y disminución. Segundo, cómo hacer gráficas circulares, encontrando el por ciento del total representada en cada parte. En cada apartado hace uso de ejemplos, soluciones y ejercicios para la práctica.

Navarrete (1993) propone una intervención para dar solución a un problema de aprendizaje en estudiantes de un grupo de sexto año de primaria. Ella inicia con identificar lo que ya saben sus alumnos e indaga sobre cómo aprenden los porcentajes. Aborda factores como son la falta de interés de los padres, la nula motivación de los maestros, el interés de los alumnos y sus mismas edades; los que limitan una mayor comprensión al momento de resolver problemas. Esta autora propone el uso de conocimientos previos como es la fracción para así comprender al tanto por ciento. Su perspectiva de enseñanza es desde la pedagogía operatoria. Se centra en cómo el alumno construye sus propios conocimientos con conciencia de los conocimientos previos ya abordados en grados anteriores (operaciones básicas y fracciones). El maestro se ve como un guía, quien propicia el aprendizaje y conduce al alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje; favorece la idea de dejar pensar al alumno para que logre aplicar de manera eficiente, la solución de problemas de porcentajes. Es así como en su estudio, destaca que, a lo largo del desarrollo del niño, tiene que construir su conocimiento, sea independiente y resuelva problemas a través del razonamiento propio; pretende que el alumno con el cúmulo de experiencias que posee, en particular, logre entender que “hablar de porcentaje es sacar o dividir partes centesimales de uno o varios enteros o ciertas cantidades” (Navarrete, 1993, p. 20). Su evidente preocupación se aleja, pero al mismo tiempo contribuye en los objetivos de esta investigación, ya que se centra

principalmente en que temas anteriores (operaciones básicas y fracciones) permitirán que el niño comprenda los porcentajes, permitiendo adherir que es un tema complejo, difícil de entender si no se aprenden distintos conceptos previamente.

Asimismo, Valenzuela (1993) analiza el proceso de enseñanza - aprendizaje del porcentaje en sexto de primaria, presentando estrategias didácticas que proporcione (al docente) inquietudes y mayor interés para mejorar su práctica profesional. En esta propuesta toma el constructivismo de Piaget como marco teórico para sustentar dichas estrategias. Él destaca conceptos como es la razón, la equivalencia, las fracciones y el porcentaje; las cuales trabaja en sus estrategias didácticas, notando que el problema central es que los estudiantes no tienen tanto material didáctico, tan solo el libro de texto del grado escolar. Este autor considera relevante que cada una de las estrategias propuestas “deben estar en función de sus intereses [...], su contexto social y sobre todo adecuadas al nivel de pensamiento del cual son poseedores” (Valenzuela, 1993, p. 53).

Chaidez, Leyva y Villegas (1995) analizan que es a partir del tercer ciclo de primaria (quinto y sexto grado) donde el estudiante avanza erróneamente con su comprensión y aplicación del porcentaje en la vida cotidiana, ya que los procedimientos en la resolución de problemas son mecánicos y con un problema metodológico empleado en la enseñanza. Se “pretende despertar en el niño el deseo e interés por aprender, para que sienta que el ‘cálculo de porcentaje’, le es muy útil en relación con su vida práctica” (p. 10). Estos autores analizan el desarrollo histórico de las matemáticas; resaltando que el contexto social y cultural, los contenidos, la preparación del magisterio, los apoyos didácticos, los recursos económicos son algunas de las causas en las que los alumnos se ven inmersos. Señalan que, en cuarto, quinto y sexto de primaria, los estudiantes trabajan curricularmente con números fraccionarios, números decimales y procesos de cambio (tablas de variación proporcional), en cada grado, los contenidos se vuelven más complejos y profundos. Ellos hacen recomendaciones didácticas, ya que los libros de texto carecen de variedad de ejercicios, estas sugerencias están centradas

en el porcentaje diferente a 100, el uso del porcentaje en gráficas y el porcentaje de una cantidad (aumentos y descuentos).

Por otra parte, Llinares y Sánchez (1997) indican que dentro del tema de proporcionalidad se encuentran los porcentajes, estos se establecen “entre un número y 100 (ó 1000)” (p. 71); que a su vez se relacionan con conceptos como son las fracciones, identificándose así con la interpretación parte-todo. Para ellos, el tema de porcentaje permite considerar que “tienen asignado un aspecto de ‘operador’ (interpretar el 60% de 35) y, por otra parte, se le puede entender como el establecimiento de ‘relación’ entre conjuntos (razones); existe una relación de ‘15 es a 100’” (p. 72). Para Llinares y Sánchez, los porcentajes generan “relaciones” entre cantidades en ejemplos establecidos con rebajas (aumentos, descuentos) sobre precios, los cuales se ven de manera cotidiana.

Por su parte, Godino y Batanero (2002) hacen un manual para que los docentes de primaria minimicen o radiquen las dificultades que se le presentan a los estudiantes al resolver problemas sobre proporcionalidad y porcentajes. Guían con explicaciones conceptuales como razón, la diferencia con las fracciones; proporcionalidad (directa e inversa); y porcentajes, además incluyen ejercicios donde se pide identifiquen los tipos de problemas y su dificultad, grafiquen (circulares y tablas), ejemplifiquen y expliquen. Ellos afirman que la noción de porcentaje no sólo se utiliza para establecer comparaciones en valor relativo entre dos números pues una vez que se fija un porcentaje se puede aplicar a distintos números, se obtiene de este modo series de números proporcionales. Por esta razón, ellos hacen hincapié en el análisis de problemas escolares sobre proporcionalidad y porcentajes en primaria.

Flores (2008) considera el aprendizaje del porcentaje en estudiantes de quinto de primaria, relacionándolo con conocimientos previos al aprendizaje del porcentaje y su relación con otros contenidos como son la división, la fracción y las proporciones. Hace una propuesta, en la que se pide “jugar” con el concepto del porcentaje, a través de un programa computacional realizado por el mismo autor, este es llamado “Aprende, comprende y entiende los porcentajes”, en él se pueden practicar la

aplicación del porcentaje en distintos contextos: descuentos y aumentos de precios; comparación entre figuras; variables entre sí.

Hay que mencionar, además, Mendoza y Block (2010) analizan el concepto de porcentaje y el uso que estudiantes de secundaria de primer y segundo grado hacen de las razones, las fracciones y los decimales para resolver situaciones de porcentaje. Se pone de manifiesto la importancia de la noción de razón en la comprensión del porcentaje. Estos autores destacan dos tipos de usos del porcentaje: “una relación proporcional entre dos conjuntos de cantidades [...] y cuando se quiere hacer accesible una relación entre dos cantidades a través de una escala” (p. 178).

Por otra parte, Reséndiz (2010) se enfoca en el aprendizaje del tanto por ciento en adultos mayores. Diseña un programa innovador, realizando actividades y ejercicios de resolución de problemas de fracciones y del tanto por ciento. “Los alumnos conocen y usan nuevas estrategias para identificar, usar y resolver problemas matemáticos relacionados a las fracciones y los porcentajes” (p. 100). Ella aplica diez actividades, primero centrándose en las fracciones, con material didáctico (rompecabezas, recortes), situándose en contextos diferentes, sacándolos de su cotidianidad, los alumnos muestran intereses distintos y aprendizajes significativos sobre estos temas. Con los porcentajes, se fija que sean problemas reales, dentro del entorno del estudiante, y que previamente hayan comprendido la noción de fracción. Sus resultados muestran un aprendizaje en los estudiantes, acreditando el módulo de matemáticas avanzado, cuestión que era un problema evidente por la alta reprobación.

Silva (2014) se centra en una comparación didáctica curricular de la enseñanza en sexto de primaria, del tanto por ciento en 1993 y 2011. A partir de esto, encontró que el enfoque de la enseñanza es distinto; variables didácticas y técnicas promovidas son diferentes. Los libros de texto (su estructuración, las lecciones y los programas de estudio) de estos años son variados. En su estudio se concentra en visualizar los principales impactos que en la reforma educativa mexicana de 1993 y 2011 se dan, particularmente con el tema de los porcentajes; los tipos de problemas

(valor faltante y comparación de razones), las técnicas (regla de tres, conservación de razones internas, razón externa constante y *building up*) y el material curricular. Enfocado en el cálculo de descuentos dados en porcentajes; cálculo del 10% de una cantidad y la noción del porcentaje como una razón. Él propone en cada lección y en cada problema presentado en estos libros de texto, la técnica o procedimiento para que el estudiante logre una mejor comprensión y para que el docente implemente una mejor enseñanza sobre este tema.

Como se muestra anteriormente, algunos autores consideran que el trabajo previo y comprensión de las fracciones es central para abordar los porcentajes (Navarrete; Linares y Sánchez; Reséndiz). Además sugieren estrategias didácticas que partan de la comprensión de otros conceptos: la razón, equivalencia, números decimales, procesos de cambio, proporcionalidad, gráficas; y apunten hacia la comprensión y aplicación del porcentaje en contextos reales y sociales (Valenzuela; Chaidez, Leyva y Villegas; Godino y Batanero; Flores; Mendoza y Block; Whipkey, Whipkey. y Conway). Todos coinciden que es un concepto complejo y necesario aprender a partir del quinto grado de primaria, reforzando en sexto grado y primero de secundaria.

1.2. Planteamiento del problema

“El pensamiento matemático está en centro de habilidades académicas [...] la enseñanza del pensamiento matemático de ninguna manera es suficiente.” (Isoda y Katagiri, 2014, p. 55). Además, “la educación secundaria juega un papel fundamental en nuestro país, pues es el nivel máximo al que acceden muchos mexicanos” (Eudave, 2013, p. 75). Por ello, es imprescindible que el alumno comprenda que en este campo matemático, se le ofrecen herramientas para resolver problemas presentados de su realidad, pese a que en ocasiones estos problemas son mostrados de manera aislada y trivial, ajenos al contexto del estudiante, “se propicia una acción material por sobre una intelectual, que en muchos casos se limita a una utilización, generalmente algoritmizada, de reglas” (Lia, *et al.*, 2006, p. 14) y mecánica, sin pasar por una comprensión real y significativa para el estudiante.

El porcentaje es una noción matemática de uso social y, para muchas personas difícil de comprender (Lembke y Reys, 1994). Resulta necesario analizar lo que ocurre con estudiantes de primer grado de secundaria al momento de resolver problemas o ejercicios, cuando se les presenta situaciones en las que varían el contexto (precios – dinero, población, recetas de cocina, peso – cantidad, distancia, tiempo, transportes públicos, objetos, descarga de archivos e internet y sus derivados), tipo de representación (verbal, gráfica circular, gráfica de barras, tablas, plano cartesiano, figuras) y tipos de problema (aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje; la determinación de un tanto por ciento y la determinación de la base).

Mendoza y Block (2010) explican que el porcentaje podría ser difícil por su amplia cobertura en otros temas de la aritmética básica: el uso de la razón, fracción, decimales no sólo en términos de su aprendizaje, sino también debido a la enseñanza.

[Por] su complejidad conceptual: se trata de una noción multifacética vinculada con algunas de las nociones más complejas de la aritmética básica, las de razón, fracción y operador multiplicativo decimal, de las cuales hereda las problemáticas didácticas. Por otro lado, existe una fuente importante de dificultades relativas a la enseñanza, no solamente del porcentaje sino, sobre todo, de las nociones vinculadas a éste (p. 178).

Para entender el concepto de porcentaje y su aplicación, es necesario que “un alumno [reconozca] qué problemas permite resolver, en qué problemas resulta insuficiente, en qué problemas facilita la resolución y la hace más simple, qué dificultades permite superar” (Lia, *et al.*, 2006, p. 14); es decir, el estudiante tiene que saber diferenciar entre “el tanto por ciento (o tasa), la cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento y la cantidad final que resulta (el porcentaje)” (SEP, 2017, párr. 4); ya sea en contexto de aritmética como en estadística. Por esto, este proyecto se centrará en los procesos de resolución de problemas que involucren “el tanto por ciento, %”, desde logros, dificultades y errores que el alumno de secundaria muestre.

1.3. Preguntas del estudio

- ¿Cómo es el proceso de resolución de problemas del tanto por ciento en los alumnos de primero de una secundaria técnica?
- ¿Cuáles son los principales logros y errores de alumnos de primero de secundaria al resolver problemas de porcentajes (contexto, representación, tipos de problemas) que se presentan?
- ¿Qué tipos de errores son contrastables con el tipo de problemas propuestos en el libro de texto gratuito que se usa en el 2018-2020 y con los desafíos del mismo?

1.4. Objetivos

Objetivo general

- Analizar el proceso de resolución de problemas de porcentajes que el alumno de primero de secundaria hace, centrándose en el contexto, representación y tipos de problemas.

Objetivos específicos

- Identificar los errores de alumnos de primero de secundaria en la resolución de problemas de porcentajes.
- Comparar los tipos de errores con el tipo de problemas propuestos en el libro de texto gratuito que se usa en una escuela secundaria técnica, en primer grado y desafíos matemáticos (2018-2020).

1.5. Supuesto de investigación

Los estudiantes de primero de secundaria tienen mayores logros en la interpretación y análisis de información (gráficas circulares); mientras que en la resolución de problemas de tanto por ciento que les impliquen el cálculo de porcentaje, la

determinación de un por ciento y en la determinación de la base mostrarán mayores dificultades y errores.

1.6. Justificación

De manera personal, las razones para realizar este trabajo se basan en que las matemáticas son frecuentemente vistas como “difíciles”, sin contexto para su uso en la vida cotidiana, fáciles de reprobar y con procedimientos mecánicos para llegar a un resultado. En secundaria, el aprendizaje de los alumnos es importante ya que, siendo obligatoria y gratuita la educación básica, los estudiantes conocen, comprenden y analizan conocimientos básicos que llevará a lo largo de toda su vida escolar.

El aprendizaje “de la matemática suele justificarse porque permite resolver diversidad de problemas pertenecientes al mundo social, económico, de las ciencias naturales” (Lia, *et al.*, 2006, p. 9). Para ser específica, los porcentajes son importantes en la vida cotidiana, no solo en el comercio o para saber sobre el costo de una prenda al momento de estar en rebaja; como comúnmente está relacionado este tema. Los porcentajes y su aprendizaje está basado en otras esferas como son en las encuestas, en concursos, descargas de archivos, facturas electrónicas, el cálculo del IVA, etcétera; todo en la vida conlleva un razonamiento lógico y vale la pena profundizar en este tema. Un mundo ajeno al concepto de porcentaje, no permitiría hacer proporciones ni equivalencias entre cantidades o valores, no tendríamos la oportunidad de manejar la información de una mejor manera, más organizada y fácil de utilizar.

Existen estudios que hablan del aprendizaje del porcentaje (estudiantes), la cuestión es que la mayoría están centrados en primaria (Navarrete; Valenzuela; Chaidez, Leyva y Villegas; Flores; Silva), propuestas de mejora con estrategias didácticas para los docentes de primaria (Godino y Batanero). Por ello, la presente investigación se centra en los logros y errores que tienen los estudiantes a nivel secundaria, al resolver problemas de porcentaje; puesto que hay pocas investigaciones en este nivel educativo.

Capítulo 2. El porcentaje: definición, tipos de problemas, dificultades y representaciones

El aprendizaje del porcentaje se vincula con algunos conceptos matemáticos como son la fracción, la razón, la equivalencia. Puede estar presente en distintas situaciones, debido a su cotidianidad y utilidad para comprender nuestro entorno. En el actual sistema educativo nacional, los estudiantes de secundaria resuelven problemas de tanto por ciento; “el tanto por ciento (o tasa), la cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento y la cantidad final que resulta (el porcentaje)”.

Este capítulo se desarrolla en tres apartados. En el primero se aborda la definición del porcentaje o tanto por ciento, a partir de lo referido por autores desde 1997 y documentos oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 1993, 2006 y 2017). En el segundo apartado se muestran los diferentes tipos de interpretación en torno al tema: *tasa* - la aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje; *cantidad base* - la determinación de la base y *porcentaje* - la determinación de un por ciento. Se contrastan lo comunicado en tres documentos oficiales que la SEP ha emitido (1993, 2006 y 2017). Asimismo, se muestra cómo se abordan estas interpretaciones en un libro de texto de primero de secundaria; en la literatura especializada en Educación Matemática y señalo algunas dificultades en el aprendizaje del porcentaje. En el tercer apartado desgloso las características principales en torno a las representaciones matemáticas para el porcentaje: Registros semióticos de representación y transformaciones entre registros: conversiones y tratamientos y manejo de la información en torno al porcentaje.

2.1. ¿Cómo se define el porcentaje?

En este apartado se presentan algunas definiciones del porcentaje. Se abordan autores como Baldor (1998) quien lo expresa como fracción; Llinares y Sánchez

(1997) y Trigueros, Lozano, Sandoval, Cortés, Jinich y Schulmaister (2019) se centran en el tanto por ciento como una proporción o razón; mientras que Mendoza y Block (2010) lo abordan como un concepto complejo con vínculos entre las nociones de razón, fracción y operador decimal.

Para Baldor (1998) el porcentaje es una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir un número, es decir, una o varias centésimas partes de un número. En otras palabras, se considera una parte de un todo; una equivalencia de una fracción.

Llinares y Sánchez (1997) definen al porcentaje como la relación de proporcionalidad que se establece entre un número y 100 (ó 1000).

los porcentajes se pueden entender como el establecimiento de “relaciones” entre conjunto (razones), estableciéndose subconjuntos de cien partes. Por ejemplo cuando se establecen las rebajas del 15%, estamos estableciendo una relación “de 15 es a 100” (p. 72).

Asimismo, Trigueros, *et al.* (2019) describe al porcentaje como “...una razón entre dos cantidades, en la que una de ellas siempre es 100” (p. 69).

En este mismo sentido, Mendoza y Block (2010) mencionan que el porcentaje tiene complejidad conceptual, puede ser entendido como una razón en el momento de que se hace una relación multiplicativa entre dos cantidades. Por ejemplo: El 50% de \$300.

Sin embargo, también puede ser comprendido como una fracción

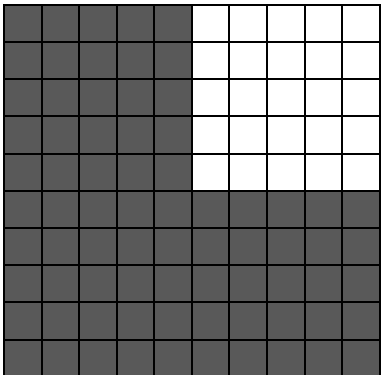
20% es “ $\frac{20}{100}$ de”. Esto permite una comprensión más profunda del porcentaje, al hacer explícito el hecho de que cada elemento de uno de los dos conjuntos representa una misma parte del elemento que le corresponde en el otro conjunto (p. 179).

Cuando se alude al porcentaje o tanto por ciento (tanto de cien) comúnmente se relaciona con el símbolo “%”, que matemáticamente equivale al factor 0.01 y que se debe escribir después del número al que se refiere, como lo señalan Mendoza y Block (2010).

El porcentaje, como estos autores lo han reportado, es un concepto complejo que involucra otros como son la razón, proporción, equivalencia, fracción, y número decimal. Es útil porque cuando se calcula o aplica el tanto por ciento se puede relacionar una cantidad con otra y representar datos usando gráficas.

Los autores coinciden en señalar al porcentaje como una relación proporcional entre cantidades. Trigueros *et al.* (2017, p. 69), lo definen como “la representación de una razón entre dos cantidades en las que una de ellas siempre es 100”. Por su parte, Sánchez, Hoyos y Saiz (2018, p. 156) mencionan que “el porcentaje es la parte de un total expresada en centésimos”. Es decir, puede definirse como la representación de las centésimas partes de cualquier cantidad y escribirse de diferentes maneras como se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 2.1. Diferentes representaciones de un porcentaje.

Porcentaje	Fracción	Decimal	Gráficas
75%	$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	0.75	 <p>75 cuadrados de una rejilla de 100 cuadrados</p>

2.2. Tipos de situaciones o problemas relacionados con el porcentaje

A continuación, se describen tipos de problemas o situaciones que se pueden encontrar al hablar de porcentajes. En un primer momento, con una mirada hacia los tipos de problemas según libros de primer grado de matemática de educación

secundaria (SEP, 1993, 2006, 2017)¹ se describen cómo han sido trabajados. Después se muestra cómo han sido abordados en secuencias didácticas donde se trabajan los porcentajes, en el libro de texto de Trigueros, *et al.* (2019). Posteriormente, se menciona a Mendoza y Block (2010) y EcuRed (2019) quienes tienen otra mirada sobre los tipos de problemas a los que los estudiantes se pueden enfrentar. Por último, se muestran las dificultades en el aprendizaje de los porcentajes.

2.2.1. Revisión de documentos oficiales

La SEP (1993, p. 123) identifica 3 tipos de casos para resolver problemas de porcentaje:

La aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje, por ejemplo, obtener el 10%, o el 15%, o el 25% [...] de una cantidad dada.

La determinación de un por ciento, es decir, qué porcentaje representa una cantidad de otra. Por ejemplo: ¿Qué porcentaje representa 240 de 380?

La determinación de una base cuando se conoce el porcentaje que representa una cantidad de otra; por ejemplo, si el 35% de una cantidad es 175, ¿cuál es la cantidad?

Mientras que la SEP (2006, p. 45) muestra 4 situaciones en las que se puede desarrollar los problemas del tanto por ciento:

- Aplicar el porcentaje a una cantidad: ¿Cuánto es el 12% (12/100) de 25?
- Determinar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra: ¿Qué porcentaje es 12 de 25?
- Determinar la base de un porcentaje (desglosar el IVA): Si 575 es el total a pagar, incluido el 15% de IVA, ¿cuál es la cantidad sin IVA?
- Es conveniente plantear problemas en los que el porcentaje es mayor que 100, como el siguiente:

Un productor de piña vende cosecha al distribuidor en \$0.75 el kilogramo. En el supermercado se vende a \$4.50 el kilogramo. ¿En qué porcentaje se incrementa el precio?

¹ Estos libros refieren a documentos oficiales de la SEP en los que se describen los contenidos a abordarse en para la educación básica. Sin embargo, el análisis se focalizó en primer grado de secundaria.

Y la SEP (2017, párr. 4), retoma nuevamente los tres tipos de problemas ya planteados en 1993, aunque varía el título. Se retoman los nuevos títulos y se usan los ejemplos de 1993.

- “El tanto por ciento (o tasa)” (SEP, 2017). Por ejemplo, “obtener el 10%, o el 15%, o el 25% [...] de una cantidad dada” (SEP, 1993, p. 123)
- “La cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento” (SEP, 2017). Por ejemplo, “si el 35% de una cantidad es 175, ¿cuál es la cantidad?” (SEP, 1993, p. 123)
- “La cantidad final que resulta (el porcentaje)” (SEP, 2017). “¿Qué porcentaje representa 240 de 380?” (SEP, 1993, p. 123).

La SEP señala dos tipos de problemas equivalentes en las tres reformas educativas, nombrándolas de diferente forma. En el caso de “aplicar el porcentaje a una cantidad” se menciona un determinado porcentaje (entre 0 y 100) para calcularlo en cierta cantidad. Dentro de la “determinación de un por ciento” se busca que los estudiantes calculen el porcentaje, conociendo la relación entre dos cantidades y una de ellas representa el cien por ciento, cobrando relevancia la palabra “de”, “¿Qué porcentaje representa 240 **de** 380?” (SEP, 1993, p. 123) Y que no es lo mismo si se escribe ¿Qué porcentaje representa 380 **de** 240?

Ahora bien, en la reforma de 1993 se busca que los alumnos determinen una base cuando se conoce el porcentaje, es decir, se conoce el porcentaje y a cuánto equivale respecto a la cantidad total, y se desconoce la cantidad total, que se busca calcular.

En los cambios realizados en el 2006 se sitúa el concepto de IVA (Impuesto del Valor Agregado). En los problemas propuestos se conoce el total, y se pide calcular la cantidad antes de incluirle el IVA. Además, se plantean problemas donde el porcentaje es mayor a 100.

En estas tres reformas educativas para el contenido de porcentajes los cambios han sido menores, se han agregado conceptos, relaciones con otros temas (fracción, razón, decimal); en todas ellas se ha sugerido el uso de la calculadora.

2.2.2. Revisión de libros de texto

En relación a los libros de texto de los estudiantes de primero de secundaria, nos encontramos que, en el nivel educativo, la institución (escuela) y el profesor a cargo de la asignatura son quienes deciden qué libro trabajar a lo largo del ciclo escolar.

Para darnos una idea de los contenidos; dónde, cómo y qué tipos de casos o problemas se abordan en el marco de los porcentajes en los libros de texto. Se muestran los libros de *Matemáticas 1. Interacciones* y *Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral*.

El primero, se divide en tres periodos y un total de 22 lecciones; el porcentaje se aborda en dos periodos, las lecciones 5, 12 y 15 (véase tabla 2.2).

Tabla 2.2. Primero de secundaria. Lecciones que se relacionan con el porcentaje en el libro de texto *Matemáticas 1. Interacciones*.

Periodo	Eje/Tema	Lección	Aprendizaje esperado
1	Número, álgebra y variación/Proporcionalidad	Lección 5	Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación).
2	Número, álgebra y variación/Proporcionalidad	Lección 12	Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, del tanto por ciento y de la cantidad base.
2	Análisis de datos/Estadística	Lección 15	Construcción, lectura e interpretación de información dada en gráficas circulares.

Mientras que el segundo libro, posee 40 secuencias didácticas, las secuencias 7, 8, 9, 10, 11 y 15 tienen mayor desarrollo en torno a los porcentajes; previo a ello, se observan secuencias sobre fracciones y decimales; multiplicación y división de fracciones y decimales (véase tabla 2.3).

Tabla 2.3. Primero de secundaria. Lecciones que se relacionan con el porcentaje en el libro de texto Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral.

Secuencia didáctica	Aprendizaje esperado	Lecciones relacionadas
Secuencia didáctica 7: Proporciones y no proporcionales	Identificas situaciones proporcionales y no proporcionales. Usas constantes de proporcionalidad fraccionarias o decimales (con fracciones o decimales mayores, menores e igual a uno).	Lección 1. Relaciones de proporcionalidad Lección 2. Valor unitario Lección 3. Proporcionalidad y multiplicación de fracciones
Secuencia didáctica 8: Valor faltante y proporcionalidad	Resuelves problemas de proporcionalidad en los que se calcula el valor unitario y del tipo valor faltante, a través de las propiedades de la proporcionalidad (razones externas e internas). Usas tablas y gráficas de proporcionalidad directa.	Lección 1. Propiedades de la proporcionalidad Lección 2. Uso del valor unitario para resolver problemas Lección 3. Tablas y gráficas de proporcionalidad
Secuencia didáctica 9: Regla de tres	Comprendes y usas la regla de tres en problemas diversos.	Lección 1. Proporcionalidad y valor unitario Lección 2. La regla de tres y valor unitario
Secuencia didáctica 10: Porcentaje como proporcionalidad	Identificas el porcentaje como un caso particular de la proporcionalidad.	Lección 1. Significado del porcentaje Lección 2. Propiedades de la proporcionalidad y porcentaje
Secuencia didáctica 11: Problemas de porcentaje	Resuelves problemas que implican calcular el porcentaje, el tanto por ciento o la cantidad base.	Lección 1. Distintas representaciones de un porcentaje Lección 2. Cantidad base Lección 3. Cálculo de la cantidad base
Secuencia didáctica 15: Gráficas circulares	Lees e interpretas datos en gráficas circulares. Construyes gráficas circulares.	Lección 1. Hacer un pastel diferente Lección 2. Guía para construir una gráfica circular Lección 3. Construcción de gráficas

Al mostrarse estos dos libros de texto del estudiante se puede observar que en el primero, el porcentaje se aborda de manera más breve, sólo en tres lecciones y se trabajan en dos ejes que la SEP (2017) señala *Número, álgebra y variación y Análisis de datos*. Mientras que, en el segundo, se presentan más secuencias didácticas en torno al tanto por ciento.

En ambos libros se entiende que, para comprender a los porcentajes, primero se necesita abordar las fracciones y los decimales; los porcentajes se trabajan como una proporción. Asimismo, con el manejo de la información, los porcentajes pueden estar representados en gráficas circulares o de pastel.

Se contrasta la idea de que, al buscar los tipos de casos o situaciones al resolver problemas del porcentaje, en el primer libro, se desarrolla sólo en una lección; en el segundo en tres lecciones (una secuencia didáctica).

2.2.3. Revisión de la literatura

En este apartado se desarrollan diferentes tipos de situaciones donde podemos resolver problemas del tanto por ciento. Autores como Mendoza y Block (2010) clasifican el concepto en dos situaciones enfocándose en el porcentaje como razón. EcuRed (2019) se centra en dos aplicaciones: aumentos y descuentos. Whipkey, *et al.* (1982) abordan ocho situaciones en las que el porcentaje puede estar presente.

Mendoza y Block (2010) mencionan que el porcentaje se utiliza en dos situaciones:

- a) Cuando interesa fijar o describir una relación proporcional entre dos conjuntos de cantidades. Por ejemplo, cuando en una tienda se ofrecen todos los productos al 50% de descuento.
- b) Cuando se quiere hacer accesible una relación entre dos cantidades a través de una escala. Por ejemplo, “el 23.6% de la población mexicana es rural” (p. 178).

Para estos autores, en ambos casos el porcentaje es una razón (relación multiplicativa entre dos cantidades o conjuntos de cantidades) pues mencionan que los niños tienden a centrarse en una sola variable, olvidando la relación existente. La primera situación señala la relación entre dos cantidades (descuentos), se

compara un porcentaje (cantidad proporcional) con una cantidad total. La segunda esta determinada por “escala”, es decir, un fragmento que forma parte de un total poblacional.

Se entiende la respectiva relación de un número (parte) con otro (el total), la proporción entre dos cantidades. Además de la cotidianidad del tema, logramos encontrarlo en productos y para una cuestión mayor, medir una parte de un total de la población.

Por otro lado, EcuRed (2019) identifican dos de las aplicaciones de los porcentajes: rebajas o aumentos. El autor utiliza dos incógnitas X para expresar el total y Y para señalar el porcentaje a calcular.

Rebajas o descuentos: Aplicar a una cantidad X una rebaja o descuento del Y% es restar a la cantidad X su Y%. Esta cantidad es el $(100-Y)\%$ de X.

Ejemplo: si se aplica una rebaja del 10% sobre un precio de 200 dólares, éste disminuye a 180 dólares (ya que el 10% de 200 dólares son 20 dólares). El precio 180 dólares es el 80% del precio inicial.

Aumentos o incrementos: Aplicar a una cantidad X un aumento o incremento del Y% es sumar a la cantidad X su Y%. Esta cantidad es el $(100+Y)\%$ de X.

Ejemplo: si se aplica un incremento del 10% sobre un salario de 900 dólares, este aumenta a 990 dólares (ya que el 10% de 900 dólares son 90 dólares). El salario de 990 dólares es el 110% del salario inicial (párr. 5).

Whipkey, *et al.* (1982, p. 315) abordan ocho posibles situaciones en las que puede usarse el porcentaje, proponen ejemplos de actividades y algunos procedimientos para su resolución:

- Por cientos mayores que 100 y menores que 1: Es común resolver problemas donde se sabe que el total es cien, sin embargo, el estudiante se puede enfrentar con problemas con un porcentaje mayor a 100 o menor a 1. Por ejemplo: Obtener el 0.0001% de 500.
- Por ciento y decimales: Se busca que los estudiantes resuelvan problemas entendiendo que el porcentaje puede ser representado como decimal o como fracción. Por ejemplo: Escribir $25\frac{1}{2}\%$ en forma decimal. La solución es convertir $25\frac{1}{2}\%$ a decimal, es decir, se obtiene

25.5%, después se escribe como fracción, con denominador 100. Se calcula $\frac{25.5}{100}$. El resultado es 0.255

- Cómo encontrar el por ciento de un número: Se basa en el cálculo del porcentaje en determinada cantidad.

- Por medio de ecuación [en este caso, establecer una razón]: Obtener el 15% de 60.

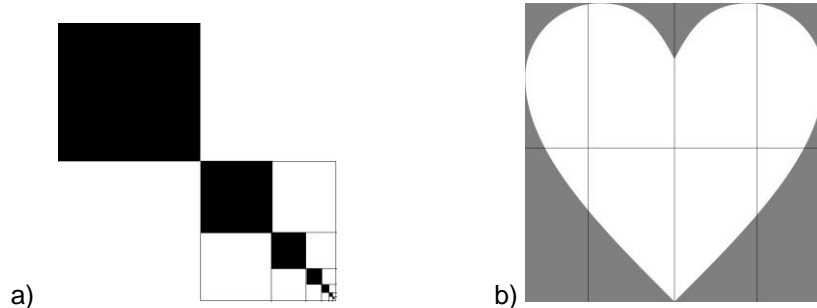
1.- $\frac{15}{100} = \frac{x}{60}$

2.- $\frac{(60)(x)}{60} = \frac{(15)(60)}{100}$ Se multiplica por 60.

$$x = \frac{(15)(60)}{100}$$

3.- $x = 9$; es decir, el 15% de 60 es 9

- Estimar el por ciento de lo sombreado de cada recuadro



- Cómo encontrar qué por ciento es un número de otro: Se solicita calcular el tanto por ciento, cuando se tienen dos cantidades. Por ejemplo: ¿Qué por ciento es 24 de 120?
- Cómo encontrar un número cuando se conoce un por ciento: Se pide que el estudiante calcule el total de una cantidad, teniendo el porcentaje y lo que se ha restado/sumado de la cantidad. Por ejemplo: ¿15 es el 25% de qué número?
- Por ciento de aumento y disminución: Para encontrar el por ciento de aumento o disminución se pide:

- Primero resta para encontrar la cantidad del aumento o de la disminución.
- Luego, encuentra qué por ciento del valor original es esa cantidad.

Ejemplo: Encuentra el por ciento de aumento: cantidad original= \$500; cantidad nueva= \$520.

- Descuento, precio de venta y comisión: Cuando se compra un artículo, en ocasiones tienen rebajas o descuentos.

El descuento es la cantidad que resta al precio regular. El precio de venta de un artículo es el precio regular menos el descuento. La comisión es la cantidad que recibe el vendedor por hacer la venta y constituye, por lo regular, un por ciento del precio de venta.

Descuento: 25% de \$7500, se puede encontrar el descuento si multiplicas el precio original por el por ciento de descuento

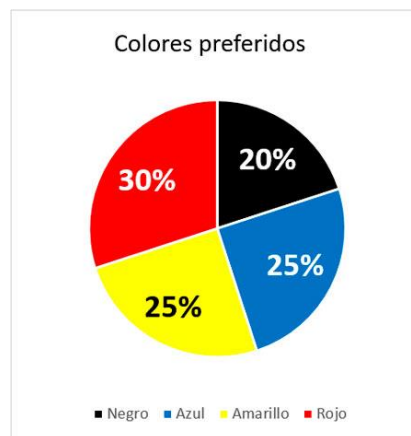
Solución: $(0.25)(7500) = 1875$

Precio de venta: $\$7500 - \$1875 = \$5625$

Comisión: 1.5 %; entonces se multiplica 0.015 (por ciento de la comisión) por el precio de venta.

Solución: La comisión equivale a \$84.37

- Cómo hacer gráficas circulares: La gráfica circular permite ilustrar la cantidad total que se divide en partes. El alumno puede identificar los grados [considerando que el 100% es 360°] o bien, calcular (aproximar) qué porcentaje representa una parte de la gráfica. Por ejemplo:



Cada uno de los autores mencionados en este apartado, destacan diferentes formas de expresar el porcentaje, diversos problemas que los estudiantes pueden resolver y algunos procedimientos. En general, coinciden en que el concepto está estrechamente relacionado con la proporcionalidad, y permite establecer relación entre cantidades, calcular aumentos y descuentos, y representarlo en diferentes registros de representación como gráficas circulares, entre otras.

2.2.4. Algunas dificultades en el aprendizaje de los porcentajes

En esta tesis se precisa que dificultades y errores nos son sinónimos. Una dificultad es algo que impide el logro de algo, mientras que los errores son un indicador de la comprensión respecto a un determinado contenido, tema o tópico. Las dificultades pueden estar asociadas a la naturaleza de las matemáticas, al desarrollo cognitivo de quien aprende, a las estrategias de enseñanza mientras que los errores dan

cuenta de alguna dificultad y son una fuente de información sobre el proceso de aprendizaje como se mostrará más adelante (Socas, 2007; Aponte y Rivera, 2017).

En este apartado se describen los errores y dificultades que los estudiantes tienen en la materia de matemáticas con autores como Radatz (1980), Bazán y Chalini (2004) y García (2010) y sus clasificaciones por tipo de errores. En un segundo momento, se muestra la investigación sobre las dificultades y errores al resolver problemas de porcentajes (Venezky, 1988). En esta revisión sólo se retoman los errores señalados por los autores sin las explicaciones que ellos dan.

Radatz (1980) señala cinco diferentes errores que los estudiantes pueden presentar cuando aprenden matemáticas y son:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje, que consiste en el uso inadecuado de símbolos y términos matemáticos, a causa de un aprendizaje inadecuado.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, que consiste en la producción de imágenes espaciales inadecuadas en tareas matemáticas.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de los prerrequisitos que consiste en los errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos en las tareas matemáticas.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, este tipo de error consiste en la incapacidad del pensamiento para ser flexible y adaptarse a situaciones nuevas del cual se desprenden 4 subtipos: por perseveración; de asociación; de interferencia; de asimilación.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, consiste en la aplicación de reglas en contenidos diferentes (pp. 3-14).

Además, Bazán y Chalini (2004, pp. 14-36) agrupan los errores, producto de la revisión de literatura que ellos hicieron y su experiencia en un estudio sobre solución de problemas.

1. Manejo de la información relativa al enunciado del problema
 - Se añaden datos que no se establecen en el enunciado ni se derivan de ellos
 - Se establecen requerimientos no demandados por el enunciado
 - Uso incorrecto de los datos
 - Omisión de la información necesaria

- Omisión de condiciones del problema
 - Utilización no articulada del conjunto de condiciones
 - Uso de las condiciones de forma incorrecta
 - No utilización de condiciones
2. Interpretación del problema
 - Interpretación incorrecta de expresiones del lenguaje común al lenguaje matemático
 - Interpretación equivocada de conceptos del enunciado
 3. Dominio operativo de datos y relaciones
 - Se cometen errores aritméticos
 - Se cometen errores algebraicos
 4. Errores en el registro de la solución que el alumno da al problema
 - La solución que se da es imparcial o incorrecta
 - La solución se dimensiona incorrectamente
 - La solución no se dimensiona
 5. Cualidades de expresión y validez de la solución
 - Verificación de la solución en un conjunto parcial de las condiciones del problema
 - No verificación de la solución en las condiciones del problema
 6. Errores de consistencia de los procedimientos de solución
 - El procedimiento carece de sentido para resolver el problema
 - Procedimiento incompleto
 - La solución no se desprende del procedimiento seguido
 7. Resultados sin sustanciación
 - Postula un resultado sin justificarlo
 - Postula un resultado intermedio sin justificarlo
 - Postula un resultado y verifica las condiciones
 - Postula un resultado y verifica parcialmente las condiciones
 - Postula un resultado y no verifica las condiciones

Además, en el proceso de resolución de problemas matemáticos Davis y Werner citado por García (2010, p. 25) señalan cuatro vías en las que se pueden presentar los errores

- Como resultado de concepciones incorrectas acerca de principios básicos de las matemáticas.
- Cuando los alumnos recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

- Por la aplicación correcta y sistematizada de procedimientos imperfectos fácilmente reconocidos por el profesor.
- Al aplicarse por parte del alumno procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas no reconocidas por el profesor.

Hasta ahora, se han mostrado diversas categorías de los errores posibles durante el aprendizaje de las matemáticas. A continuación, se presenta el estudio de Venezky (1988) quien detalla los errores y dificultades que los alumnos de primaria y universitarios manifestaron en un estudio en el que se evaluó el conocimiento básico de porcentajes. Para ello, aplicó una prueba para la identificación y cálculo de un porcentaje determinado, conversión de una forma numérica a una verbal, conversión de una forma numérica o decimal al tanto por ciento, conversión del porcentaje a decimal, solución de una ecuación simple y la resolución de problemas de palabras simples (enunciado verbal) que implica el tanto por ciento de un número.

Los universitarios presentaron resultados como:

- Replanteamiento del problema
- Comprobación de la verosimilitud de los cálculos
- Desarrollo de planes de solución
- Uso de diagramas

Los errores que tuvieron fueron:

- Plan de solución incorrecta
- Uso incorrecto de las ecuaciones

Con respecto a los estudiantes de primaria, los aspectos positivos que mostraron fueron:

- En algunos casos se presenta a comprobación de la verosimilitud de la solución
- Desarrollo de planes de solución, generaron y resolvieron ecuaciones simples

Los errores manifestados:

- Aplicación incorrecta de la ecuación proporcional
- Plan de solución incorrecto, impulsividad como un plan de solución basado en multiplicar o dividir las cantidades del problema
- Interpretación incorrecta (errores de lectura)
- Conocimiento incompleto, procedimientos que no entienden completamente (pp. 111-134).

Venezky considera que, entre las características de los estudiantes de primaria, existe competitividad dentro del aula, así que responden más rápido, aunque la respuesta sea incorrecta. Mientras que, con los estudiantes universitarios, muestran mayor dominio y experiencia en resolver problemas de palabras y reconocen los tipos de problemas a los que se enfrentan.

Para comprender algunos de los errores que los estudiantes cometen en el porcentaje, la revisión de literatura ha identificado algunos errores derivados de una mala interpretación del problema, falta de conocimientos previos o incluso procedimientos incompletos. Además, es posible que los estudiantes no anoten bien el problema al reinscribirlo a su libreta.

2.3. Representaciones semióticas y el aprendizaje conceptual en matemáticas

Se reconoce que los estudiantes llegan a tener dificultades en su aprendizaje de las matemáticas por múltiples factores. Sin embargo, para que los alumnos aprendan es necesario procesar información (esquemas, gráficas, etcétera) y tener oportunidades con actividades que permitan explorar diversos tipos de problemas, ejercicios o situaciones en los que se pongan en juego lo previamente aprendido y se construyan nuevos conocimientos. Aprender el lenguaje propio de las matemáticas requiere de construir significados pues hay expresiones con distintas interpretaciones en matemáticas (por ejemplo, la palabra “grado”, interpretar “x” como variable, como incógnita, o como multiplicación).

Con el fin de comunicar la información de una representación, Duval (2004) menciona que el aprendizaje de las matemáticas requiere procesos cognitivos determinados como son la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Aprender los contenidos en matemáticas requiere de diferentes representaciones como, por ejemplo, lenguaje natural, gráfico, numérico, tabular, simbólico para comunicar la información, haciendo uso de distintos registros de representación.

2.3.1. Registros semióticos de representación. ¿Qué son? ¿Cómo se caracterizan? ¿En qué se diferencian?

Para Duval (2006) un sistema semiótico de representación permite realizar procesos matemáticos, ya que estos siempre implican la sustitución de alguna representación semiótica en otra. Es decir, el papel de las representaciones no sólo es comunicar o designar objetos matemáticos, sino también trabajar con ellos.

Los objetos matemáticos no son reales, en otras palabras, no puede accederse a ellos directamente; por ello, la comprensión y el manejo para su estudio radica en las representaciones semióticas. Menciona Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) que “las representaciones semióticas no deben confundirse con las representaciones mentales es decir con el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener acerca de un objeto, una situación y sobre todo lo asociado al mismo” (p. 30).

La representación sucede cuando se indican las características que distinguen a un objeto. Duval (2006) menciona que la importancia de las representaciones semióticas es su capacidad intrínseca para ser transformadas en otras representaciones semióticas. Además, cada sistema semiótico permite transformaciones. Hay dos clases de transformaciones: la conversión y el tratamiento.

2.3.2. Transformaciones entre registros: conversiones y tratamiento. Ejemplos con porcentaje

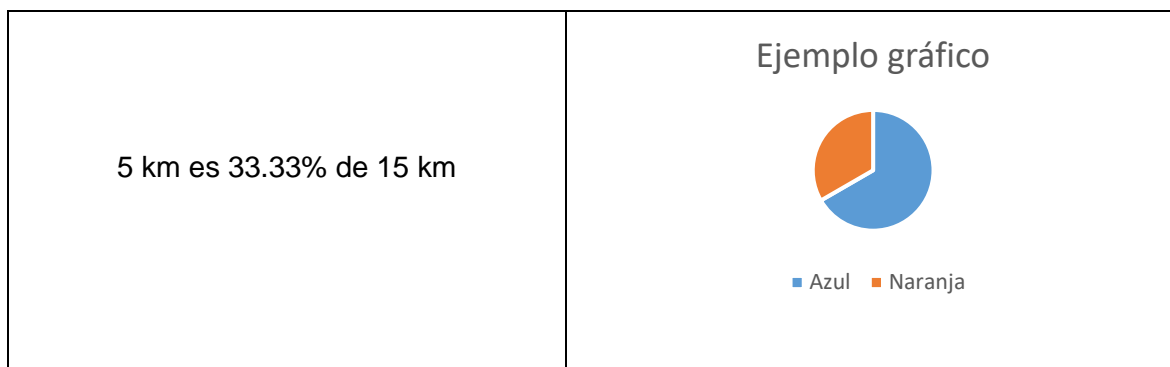
Duval (2006) menciona dos posibles transformaciones entre registros. Los tratamientos en los que se transforma una representación a otra dentro del mismo registro (por ejemplo, cuando se efectúan operaciones aritméticas); mientras que la conversión es cuando se transforma la representación en otro registro distinto. Pasar de un porcentaje numérico a su representación gráfica.

Para ejemplificar la conversión de registros, es importante recalcar que los porcentajes tienen cierta complejidad conceptual, debido a los conceptos inmerso

en este: fracción, decimal, razón, proporción, equivalencia. Algunos errores se pueden identificar tanto en los tratamientos como en las conversiones.

Una situación problemática que se puede proponer a los estudiantes es la siguiente: Para Juan, un corredor profesional, es necesario correr 15 kilómetros diarios; Marlén corre sólo 5 kilómetros diarios. Determina qué porcentaje representa la distancia que corre Marlén respecto a la de Juan. Exprésalo tanto numérica como gráficamente. En este caso, el 100% equivale a 15 kilómetros y es necesario determinar que Marlén recorre $\frac{1}{3}$ de lo que corre Juan (tratamiento entre registro numérico), como se visualiza en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4. Ejemplo de la situación problemática expresada numérica y gráficamente.



A menudo ambas transformaciones en la representación semiótica (tratamiento – conversión) están entrelazados en el mismo proceso de resolución de un problema.

2.3.3. Ejemplos de libros de texto de secundaria: Tipos de problema y diferentes representaciones

Para este apartado, mostraré la organización de los diferentes tipos de problemas de porcentajes y sus diversas representaciones en dos libros de texto a nivel secundaria. *Matemáticas 1. Interacciones* y *Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral*.

Como se muestra en la tabla 2.5 en el primer libro de texto (Mancera y Basurto, 2018) se logra visualizar que, en el eje *Número, álgebra y variación*, los estudiantes

trabajan con tres diferentes tipos de problemas del porcentaje y con varias representaciones; y en el eje *Análisis de datos* se pide que el estudiante recolecte, registre y lea datos de gráficas circulares, pictogramas y tablas. Mientras que en el otro libro de texto (Trigueros, *et al.*, 2019) se desarrollan lecciones por tema y no por eje. Se centra en la resolución de problemas, con diferentes tipos de problemas y en la interpretación y construcción de gráficas.

Tabla 2.5. *Primero de secundaria. Lecciones que se relacionan con el porcentaje: tipo de problemas y sus representaciones en dos libros de texto para el estudiante.*

Eje/Tema		Tipo de problema	Representación en Mancera y Basurto (2018)	Representación en Trigueros, <i>et al.</i> (2019)
Número, álgebra y variación/ Porcentaje como proporcionalidad	Problemas de porcentaje	Cálculo de porcentaje	Verbal, numérica (fracción, decimal), gráfica (cuadrícula), tabular	Verbal, numérica (fracción, decimal), gráfica (cuadrícula), tabular
		Tanto por ciento	Verbal, numérica (fracción, decimal), gráfica (cuadrícula), tabular	Verbal, numérica (fracción, decimal), gráfica (cuadrícula)
		Cantidad base	Verbal, numérica (fracción, decimal), gráfica (cuadrícula), tabular	Verbal, tabular, gráfica (cuadrícula)
Análisis de datos/ Gráficas circulares		Recolecta, registra y lee datos	Gráficas (circulares, pictogramas), tabular	Verbal, tabular, gráfica circular
		Lee e interpreta datos. Construye gráficas		

La diferencia entre estos libros de texto para el estudiante radica en dónde y cuáles representaciones se manejan. En el primero los autores presentan el tema de los porcentajes por ejes (*Número, álgebra y variación; Análisis de datos*), en el primer eje se trabaja por tipo de problema, en cada uno de estos las representaciones son las mismas, desde lo verbal, numérica (fracción, decimal), gráfica (cuadrícula), tabular; mientras que en el segundo eje se trabajan con gráficas (circulares, pictogramas) y tablas. En el segundo libro de texto, los autores lo desarrollan por temas, y estos a su vez, por tipos de problemas. Es así como en los temas de “Porcentaje como proporcionalidad” y “Problemas de porcentaje” se encuentran las representaciones verbales, numéricas (fracción, decimal), gráficas (cuadrícula), tabulares; en el tema de gráficas circulares las representaciones son verbales, gráficas circulares y tablas.

En este capítulo se da a conocer cómo se entiende el porcentaje, con definiciones de diversos autores a partir de 1997 y como lo señala la SEP (1993, 2006, 2017). Desde la literatura se retoman las ideas de Llinares y Sánchez (1997) y Trigueros, *et al.* (2019) quienes se centran en el tanto por ciento como una razón o proporción; de Baldor (1998) quien lo plantea como fracción; y Mendoza y Block (2010) autores que engloban todos los anteriores.

También se describen los diferentes tipos de problemas, algunas de las dificultades que los estudiantes tienen en la asignatura de matemáticas, específicamente, con la resolución de problemas de porcentajes. Por último, se presentan los registros semióticos de representación y su relación con los porcentajes, cómo aparecen en los libros de texto para el estudiante de secundaria, primer grado y las distintas transformaciones a realizarse en la resolución de ciertos problemas.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se describe la manera cómo se llevó a cabo esta indagación. Está organizado en cuatro apartados. En el primero se menciona el tipo de estudio realizado y sus características, en el segundo, se describe el contexto y los sujetos participantes. En un tercer apartado se muestran los aspectos considerados para el diseño de los instrumentos, así como el proceso seguido para su aplicación. Por último, en el cuarto apartado se explica el procesamiento y análisis de la información obtenida, la organización de las respuestas y las categorías de análisis.

3.1. Tipo de estudio

La naturaleza del objeto de estudio es investigar el proceso de resolver problemas de porcentajes que alumnos de primero de secundaria realizan, centrándonos en las representaciones, contextos y tipo de problemas que generaron mayores éxitos o dificultades. Por ello, se recolectaron datos en un determinado tiempo enfocando el análisis en los alumnos y contrastando la opinión de su profesor respecto a dificultades y logros, que él ha identificado en su experiencia docente entorno al tema. Por lo anterior, este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo, usando estudios de caso.

La investigación cualitativa permite realizar descripciones detalladas de situaciones, hechos, sujetos, relaciones y comportamientos, de un grupo, comunidad o persona. Por ello, se delimitó que los sujetos participantes fuesen estudiantes de primero de secundaria del ciclo escolar 2020-2021; con la intencionalidad de seleccionar, a manera de ejemplos, diferentes casos que ilustran dificultades o éxitos en la resolución de este tipo de problemas.

Como método, el estudio de caso se emplea para realizar investigaciones en diversos procesos. Álvarez y Álvarez (2018) mencionan que tiene la característica

valorada de la subjetividad, “por lo que resulta una manera distinta de pensar la explicación, la intervención y la teorización de los procesos sociales y educativos” (párr. 10).

Stake (2005), por su parte, enfatiza que los estudios de casos son únicos, se estudian las particularidades de una situación, una persona, un grupo, etcétera; con el fin de tener una comprensión general de la realidad social. Además, él define diversos tipos de estudios de caso como son el intrínseco e instrumental. El primero refiere a los casos en los que necesitamos aprender sobre éstos en particular, ciertamente, no se elige al caso porque sea representativo de otros casos, sino porque tenemos un interés intrínseco en el caso. Mientras que el instrumental es cuando se enfoca en comprender más allá de un problema dado; el caso se examina para profundizar en un tema, para llegar a la formulación de afirmaciones sobre el objeto de estudio; y son casos que pretenden generalizar a partir de un conjunto de situaciones específicas (Stake, 2005). En esta tesis, el estudio de caso utilizado fue el instrumental.

A través de los casos seleccionados se logró identificar las dificultades y los logros que los estudiantes de primero de secundaria tienen al enfrentar distintos tipos de problemas, con diferentes contextos y representaciones; comprendiendo las razones de sus respuestas. Se eligieron cuatro tipos de casos para estudiarlos, que cumplen con las siguientes características:

- Mayores dificultades/errores en la resolución de problemas de *la aplicación de un por ciento*.
- Mayores dificultades/errores en la resolución de problemas de *la determinación de una base*.
- Mayores dificultades/errores en la resolución de problemas de *la determinación de un por ciento*.
- Mayores logros/aciertos en la resolución de problemas de todos los tipos de caso.

Los estudiantes seleccionados permiten describir sus casos, identificar donde radica su dificultad, si es en el contexto, en el tipo de problema o en la representación utilizada.

3.2. Contexto del estudio y sujetos participantes

Este estudio se realizó durante la situación de emergencia causada por la pandemia del brote del virus SARS-CoV-2 y la enfermedad que causa se denomina COVID-19. Lo anterior provocó que las escuelas y la sociedad, en general, estuvieran en confinamiento. Derivado de ello, la educación se impartió mediante la modalidad vía remota, a través del uso de diferentes tecnologías y plataformas digitales.

El brote fue mundial, reconociendo que el coronavirus SARS-CoV-2 es un nuevo tipo de coronavirus que puede afectar a las personas y que se detectó por primera vez en diciembre de 2019 en la ciudad de Wuhan, provincia de Hubei, en China. En México se implementaron medidas de salubridad, a partir de marzo 2020, como el uso de cubrebocas obligatorio para entrar a locales, tiendas; tener sana distancia (1.5 metros); uso de gel antibacterial; lavado de manos continuo y confinamiento, mantenerse en casa; así como limitaciones para traslados, únicamente destinados a actividades esenciales (salud, seguridad, entre otras).

Los participantes fueron un grupo de 28 alumnos de primero de secundaria de una escuela secundaria técnica, ubicada en la Alcaldía de Tlalpan, Ciudad de México, de los cuales 20 son alumnas y 8 alumnos, con edades aproximadas entre 11 y 13 años.

La institución tiene dos horarios, matutino y vespertino, con un total de cinco grupos de primeros años en donde hay un aproximado de 220 alumnos. Los estudiantes que participaron en este estudio cumplieron con los siguientes criterios:

- Que cursaran primero de secundaria.
- Que ya hubieran visto el tema sobre porcentaje, de ese grado.
- Acceso a la tecnología para responder el cuestionario y la entrevista.

- Disponibilidad para ser entrevistados, en caso de ser necesario.
- Tener interés en participar de manera voluntaria.

Que cursaran primero de secundaria. El interés del estudio está en este nivel educativo en el que el tema de porcentajes no era nuevo para ellos, sino más bien, se profundiza en otros aspectos como se mostró en el apartado 1.1. *Las matemáticas en el curriculum mexicano*, capítulo 1. Nos interesó caracterizar el conocimiento puesto en acción cuando los alumnos resuelven diferentes tipos de problemas, teniendo una variedad de contextos y representaciones.

Que ya hubieran visto el tema sobre porcentaje, de ese grado. El tema de los porcentajes en primero de secundaria profundiza en los distintos ejes: *Número, algebra y variación; Forma, espacio y medida; Análisis de datos*. Como se mostró en el primer capítulo de esta tesis, apartado 1.1. *Las matemáticas en el curriculum mexicano*. Los estudiantes en sexto de primaria estudian el contenido del tanto por ciento por primera vez centrado en los conceptos, procedimientos y problemas para su resolución: verbal, gráfica circular.

Acceso a la tecnología para responder el cuestionario y la entrevista. De no tener acceso a las tecnologías, al celular, al internet; estudiantes no podrían contestar el cuestionario, pues se encontraba en formato virtual.

Disponibilidad para ser entrevistados, en caso de ser necesario. La entrevista es una técnica que permite profundizar, a través de la reflexión y descripción de los estudiantes sobre algunos procedimientos y decisiones tomadas al momento de resolver un problema y escribir un resultado. Al analizar los resultados obtenidos de los alumnos que tuvieron mayores dificultades, logros en sus respuestas y procedimientos o bien, poco comprensibles o no prototípicos.

Tener interés en participar de manera voluntaria. El cuestionario de 11 preguntas no formó parte de la calificación de ninguna de sus materias por lo que fue indispensable el interés de los alumnos para involucrarse en las diferentes actividades solicitadas.

Las características anteriormente descritas fueron consideradas como prioritarias, dado que, con el contexto previamente mencionado, se debía tener disponibilidad, acceso al internet y conocimientos previos del tema para dar resultados que al mismo tiempo permitieran mostrar cómo resolvían problemas de porcentajes, identificando los procedimientos utilizados.

3.3. Recolección de datos: Diseño de instrumentos y proceso de recolección

Para la elaboración del instrumento se consideraron los contenidos, objetivos y propósitos que se plantean en los ejercicios presentados en cuatro libros de educación secundaria de matemáticas primer grado. “Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria” (SEP, 1993); “Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programa de estudio” (SEP, 2006); “Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica” (SEP, 2017); y el libro para el estudiante, “Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral” (Trigueros, *et al.*, 2019); todos dentro del apartado de los porcentajes y manejo de la información (véase Anexo 1). Además, la literatura previamente revisada (capítulo 1, apartado 1.1.2. *Desde la investigación. Estudios respecto a la enseñanza-aprendizaje del porcentaje*).

El libro para el maestro de 1993 aborda dos propósitos, el primero para iniciarse gradualmente en el razonamiento proporcional y sus aplicaciones; el segundo para conocer el uso de porcentajes, tablas, gráficas y otras formas usuales de organizar y presentar la información. En este documento oficial, se sugiere el uso de diferentes representaciones como verbales, gráficas circulares y tablas; en contextos de precios – dinero y población.

Mientras que años después, en el libro para el maestro 2006, se sugiere resolver problemas del tipo valor faltante; resolver problemas que impliquen el cálculo de porcentaje utilizando adecuadamente la expresión fraccionaria o decimal; interpretar información representada en gráficas de barras y circulares de frecuencia absoluta y relativa. También, se hace uso de representaciones verbales, gráficas circulares y tablas, con contextos de precios – dinero, población y peso – cantidad.

Los aprendizajes clave enmarcados por la SEP (2017), señalan que el estudiante deberá aprender a calcular valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación); resolver problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base; recolectar, registrar y leer datos en gráficas circulares. Se centra en contextos de precios – dinero y distancia y se usan representaciones verbales, gráficas circulares y tablas.

Por último, con el libro de texto gratuito para el estudiante “Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral” (Trigueros, *et al.*, 2019)², se pretende que el estudiante resuelva problemas de valor unitario y faltante, comprenda la regla de tres, analice al porcentaje como proporcionalidad; trabaje con los diferentes tipos de casos: Porcentaje, tanto por ciento y cantidad base; lea e interprete gráficas circulares. En la revisión del texto, se logró identificar representaciones verbales, gráficas circulares y de barras, tablas, figuras geométricas, y plano cartesiano. Con contextos de precios – dinero, población, peso, distancia, tiempo, transporte público, objetos diversos, descargas e internet.

En estos 4 libros, principalmente, se aborda el tema de los porcentajes en el contexto de precios – dinero, pero no en todos se trabaja con diversidad de representaciones. En el libro de texto gratuito “Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral” se expone mayor variedad de contextos, tipos de problemas y representaciones. Resultado de esta revisión, se consideró necesario incorporar en el cuestionario diferentes tipos de contexto y representaciones a fin de profundizar en la comprensión del concepto de porcentaje logrado en este grupo de estudiantes.

3.3.1. Instrumentos de recolección de datos: Cuestionario y entrevista

Los instrumentos que se utilizaron fueron un cuestionario y entrevistas. El primer instrumento pretende enfrentar a los estudiantes a una variedad de situaciones

² Libro de texto para el estudiante seleccionado por la institución y el profesor a cargo del grupo que imparte Matemáticas 1 en la secundaria donde se realizó el estudio.

diferenciados de porcentaje en cuanto al contexto, representación y los tipos problemas de manera que se puedan identificar, sus logros y errores. Mientras que las entrevistas fueron para aclarar sus procedimientos y detallar sus respuestas.

El cuestionario (véase Anexo 2) constó de 11 preguntas abiertas para la resolución de problemas en torno a los tipos de caso: El tanto por ciento (o tasa); la cantidad inicial (o cantidad base) a la que se aplica el tanto por ciento; la cantidad final que resulta (el porcentaje).

En el proceso de diseño se identificaron los contextos referidos para abordar este contenido tanto en plan y programas (SEP, 1993; 2006 y 2017) como en el libro de texto gratuito usado en la secundaria (Trigueros, *et al.*, 2019). Los contextos más comunes fueron el manejo de precios – dinero, población, peso – cantidad, distancia y tiempo; y menos comunes como los transportes públicos, objetos, descarga de archivos e internet. Contextos que se usaron en este instrumento. Además, se usaron diferentes formas de representación verbal, gráfica circular, tabla y figura. En cada problema se procuró que fueran diferentes los contextos, las representaciones y los tipos de problema para que el estudiante visualizara la importancia del porcentaje y la posibilidad de encontrarlo en diferentes actividades cotidianas. En la Tabla 3.1. se muestran estas características para cada una de las once preguntas.

Tabla 3.1. Estructura de las preguntas del instrumento sobre la resolución de problemas de porcentajes.

Pregunta	Representación	Tipo de caso	Contexto
1	Verbal	La aplicación de un por ciento	Precios
2	Verbal	La aplicación de un por ciento	Transporte público
3	Figura	La determinación de la base	Transporte público
4	Gráfica circular	La determinación de un por ciento	Distancia

5	Gráfica circular	La determinación de un por ciento	Distancia
6	Gráfica circular	La aplicación de un por ciento	Peso - Cantidad
7	Verbal	La determinación de la base	Descarga de archivos
8	Tabla	La determinación de un por ciento	Peso - Cantidad
9	Verbal	La aplicación de un por ciento	Precios
10	Verbal	La determinación de la base	Transportes públicos
11	Figura	La determinación de un por ciento	Población

El instrumento tiene 45.45% de representaciones verbales, esto quiere decir que poco más de la mitad de las preguntas requieren del uso del lenguaje natural para su resolución. El 18.18% tienen, además, una representación gráfica para que el estudiante interprete datos. El 27.27% tiene gráficas circulares y el 9.09% tablas. En relación al tipo de casos, el 36.36% está en torno a la aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje; el 27.27 a la determinación de la base y el otro 36.36 a la determinación de un por ciento.

Posteriormente, se realizaron dos tipos de entrevistas a fin de profundizar en los procedimientos, formas de comprender y resolver algunos problemas; donde se llegaron a presentar mayores dificultades. La primera entrevista se aplicó al profesor a cargo de impartir la materia de Matemáticas I (véase Anexo 3); con este instrumento, se indagó en la experiencia docente con este grupo de alumnos, su percepción respecto a qué se les facilitó comprender en torno a los porcentajes, sus dificultades y las razones que lo llevaban a dar tal afirmación.

Mientras que con la segunda entrevista nos adentramos a obtener más detalles, en aquellos alumnos que tuvieron mayores logros o errores en la resolución de los problemas planteados en el cuestionario. Para ello, se seleccionaron un total de 8 estudiantes; 2 que obtuvieron mayores dificultades en la resolución de problemas

de la aplicación de un por ciento; 2 alumnos que tuvieron mayores dificultades en la resolución de problemas de la determinación de una base; 2 que al resolver el cuestionario obtuvieron mayores errores en la resolución de problemas de la determinación de un por ciento y 2 estudiantes que tuvieron mayores logros en la resolución de problemas de todos los tipos de caso.

3.3.2. Proceso de recolección de datos

En un primer momento se recolectaron datos del cuestionario (véase Anexo 4), y posteriormente, se realizaron las entrevistas, tanto con el docente a cargo del grupo como a los alumnos con mayor y menor logros en la resolución de los problemas planteados.

Para recolectar las respuestas del cuestionario en el grupo de 28 alumnos, se pidió acceso a la directora de la institución, y se le envió la liga del cuestionario y fue ella, quien solicitó al docente a cargo del grupo compartirla con sus alumnos. Cabe señalar que los alumnos no tenían restricciones de tiempo para su resolución, uso de calculadora, apuntes del tema o consulta de internet.

El cuestionario se aplicó en octubre del 2020, en línea, mediante el servicio de correo electrónico “Gmail”, a los estudiantes se les brindó la liga³. Al dar clic, los alumnos tenían acceso para responder, sin restricciones por el tipo de correo electrónico personal (*Hotmail, Yahoo, Outlook*). Ellos contestaron solamente una vez el cuestionario sin obtener una calificación o valor en sus materias.

Por otra parte, para las entrevistas a los ocho estudiantes seleccionados se realizaron varias acciones. En un primer momento, se le notificó al profesor a cargo del grupo la posibilidad de entrevistar a estos estudiantes. Una vez autorizado, se estableció contacto con ellos por medio de correo electrónico “Gmail”, y se obtuvo respuesta de 6 de los estudiantes vía “WhatsApp”, para la realización de la

3

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScAaY_aqkOgPfJre_C5KNI7M7hp3eG5loOL3_6pMrYhWMHRDA/viewform?usp=sf_link

entrevista. Esta entrevista con cada uno de los estudiantes tuvo una duración aproximada de 20 minutos.

Las entrevistas fueron semi-estructuradas porque como menciona Díaz-Bravo (2013)

[Este tipo de entrevistas] presentan un grado mayor de flexibilidad que las estructuradas, debido a que parten de preguntas planeadas, que pueden ajustarse a los entrevistados. Su ventaja es la posibilidad de adaptarse a los sujetos con enormes posibilidades para motivar al interlocutor, aclarar términos, identificar ambigüedades y reducir formalismos (p. 163).

Con el objetivo de indagar el por qué de sus respuestas y sus procedimientos, la interacción con los estudiantes fue grabada con su consentimiento. Con dos de los estudiantes la interacción fue por medio de videollamada “WhatsApp”, mientras que con los otros cuatro alumnos fue por medio de mensajes instantáneos. En ambos casos, se les solicitó explicar sus procesos al resolver los problemas donde tuvieron errores y logros. Sus respuestas fueron de manera oral con audios y por escrito, vía mensajes instantáneos.

3.4. De los datos a los resultados. Procesamiento y análisis

En este apartado se describe el proceso en el que se organizaron los datos obtenidos del cuestionario y de las entrevistas realizadas.

Al tener las respuestas del cuestionario de los 28 alumnos, se generó una tabla en una hoja de cálculo, en la que se colocaron los datos para identificar por nombre y clasificar por tipos de caso los problemas planteados, esto permitió visualizar en primera instancia las respuestas correctas e incorrectas. Con las gráficas generadas por el software de encuesta de “Gmail”, se identificó la distribución de las puntuaciones totales y las tendencias por cada pregunta realizada en el cuestionario. Después, en otra hoja de cálculo, se agruparon las preguntas por cada tipo de problema (la aplicación de un por ciento o cálculo de un porcentaje; la determinación de la base; la determinación de un por ciento), se identificó por

alumno, su respuesta y se hizo una interpretación de un posible procedimiento seguido.

Con los resultados de la entrevista se contrastaron los procedimientos o justificaciones con las supuestas interpretaciones y se logró clarificar los procesos realizados los entrevistados. Los resultados se organizaron para un análisis global e individual (por caso). Para el análisis global, se incorporan los comentarios del profesor y se contrastó con lo realizado por el grupo de alumnos. Mientras que, para el análisis por caso, se trabajó con las respuestas previamente dadas por los estudiantes en el cuestionario así como con las aclaraciones y precisiones obtenidas en la entrevista.

Capítulo 4. Resolución de problemas de porcentaje. Una mirada con estudiantes de primero de secundaria

En este último capítulo de la tesis se presentan los resultados de la investigación. Se inicia con una descripción global de logros y dificultades identificados a partir de los cuestionarios aplicados; y después, se profundiza con algunos casos, a fin de comprender qué acciones de los alumnos los llevaron a obtener sus respuestas. Finalmente, se contrastan estos resultados con los estudios revisados a lo largo de esta tesis y presentados en los capítulos 1 y 2, específicamente los apartados *1.1.2. Desde la investigación. Estudios respecto a la enseñanza-aprendizaje del porcentaje* y *2.2.3. Revisión de la literatura*.

4.1. Resolución de problemas de porcentaje: Logros y dificultades

Los alumnos encuestados mostraron mayor éxito para resolver problemas en la aplicación de un por ciento (tasa), seguido por la determinación de un por ciento (porcentaje) y se reduce, considerablemente, en aquellos problemas que requieren determinar una base (cantidad base). Asunto que invita a reflexionar posibles causas para la integración de estas diferentes interpretaciones de un mismo concepto.

Algunos de los estudiantes mostraron mayores dificultades según los distintos tipos de problemas, a continuación, se detalla cada uno, contrastando los resultados obtenidos con la literatura mostrada en el capítulo 1 (apartado 1.1.2.)

4.1.1. *La aplicación de un por ciento. Un tipo de problema con mayor comprensión*

En la aplicación de un por ciento, el estudiante necesita calcular el porcentaje de una cantidad total dada. Por ejemplo, dado un porcentaje (10%, 15%, 50%, etcétera), se le brinda la cantidad total, el alumno debe considerar que el porcentaje

a calcular es un número proporcional respecto a otro (el total) que se considera dividido en cien partes.

Como se detalló en el capítulo 3, apartado 3.3.1. *Instrumentos de recolección de datos: Cuestionario y entrevista*, fueron cuatro las preguntas vinculadas con este tipo de problemas. A continuación, se describe lo realizado en cada caso.

Pregunta 1. Alicia tiene un total de \$500.00, gastó en comida el 30%. ¿Cuánto dinero gastó?

En este problema era necesario que los alumnos hicieran una conversión del lenguaje natural al numérico para luego, hacer un tratamiento en este último registro (operaciones aritméticas). Es decir, establecer la relación entre los números y considerar al porcentaje como una cantidad que representa la proporcionalidad de una parte respecto a un total que se considera el 100%.

El estudiante podía emplear diferentes estrategias para llegar al resultado, una regla de tres o convertir al porcentaje en número decimal. En este problema el total son los \$500 que tiene Alicia, la cuestión es calcular el dinero que gastó, equivalente al 30% de esta cantidad. En la siguiente tabla se presenta el tipo de respuestas que los alumnos contestaron.

Tabla 4.1. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la aplicación de un por ciento, pregunta número uno.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
22	\$150	1	\$16.666
		1	\$470
		1	\$435
		1	\$6
		1	\$130
		1	\$166
TOTAL: 78.57%		Total: 21.42%	

En este problema, el 78.57% de los estudiantes contestaron \$150.00, resultado de hacer un correcto procedimiento, al multiplicar 500 por 0.30 o bien, multiplicar 30 por 500 y el resultado dividirlo entre 100. Mientras que el resto de los estudiantes obtuvo respuestas diversas, entre ellas están:

- **\$16.666**, resultado de dividir 500 entre 30.
- **\$166**, el mismo procedimiento que el anterior, sin embargo, después se multiplicó por 10.
- **\$470**, el estudiante restó 30 a 500.
- **\$435**, por introducir de forma errónea los datos en la calculadora.
- **\$6**, resultado de multiplicar 30 por 100 y después dividirlo entre 500.
- **\$130**, el alumno dividió 500 entre 2, posteriormente, 250 entre 2 y como resultado obtuvo 125, a eso le sumo 5.

En este problema se puede inferir que la mayoría de los estudiantes pudo resolver el problema considerando al porcentaje como una parte de un total dado. Quienes presentaron los errores, se interpreta que no colocaron correctamente los datos, o no relacionaron que el porcentaje es proporcional a un total, y otros pocos, no regresaron al contexto del problema para verificar que los 500 pesos equivalían al 100%. En este problema se identifica que estos 5 estudiantes no han logrado construir relaciones entre porcentajes con otros conceptos. Por lo que se confirma lo señalado por Mendoza y Block (2010) que para la comprensión de los porcentajes se necesita enfocar en otros conceptos como son la razón, la proporcionalidad, la equivalencia, y la fracción. Sin esta relación, el estudiante se limita a acomodar los datos del problema y realizar un procedimiento que lo lleva a obtener un valor numérico erróneo.

Pregunta 2. Lee la información, responde. Supón que en el transporte público de tu ciudad promueven las siguientes ofertas en la semana. Oferta 1: 30% de descuento

en el total del pasaje; oferta 2: Un descuento único de \$3. Nota: El pasaje cuesta \$9. ¿Qué oferta te conviene escoger?

Para resolver este problema era necesario obtener el equivalente del 30% del total del pasaje, es decir, calcular el 30 por ciento de 9 y compararlo con la oferta dos. En ambas ofertas se observa un descuento, la cuestión era identificar en cuál de las dos se pagaba una cantidad menor, es decir, en cuál oferta el descuento favorecía al usuario. Situaciones de decisión que son muy comunes en la vida cotidiana en las que se pone en juego el conocimiento matemático de porcentaje. La siguiente tabla muestra los resultados globales.

Tabla 4.2. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la aplicación de un por ciento, pregunta número dos.

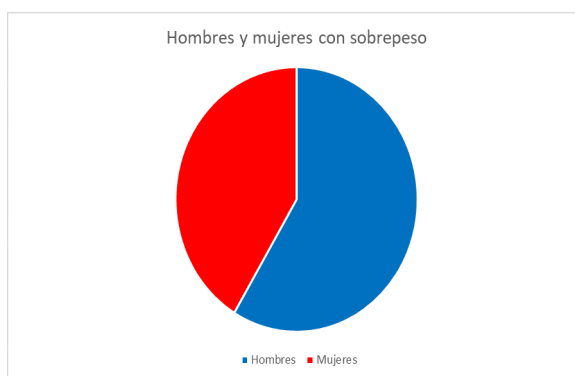
LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
14	Oferta 2 (C/J) ⁴	1	Oferta 1 (C/J) Paga 2.7 y 6
		1	Oferta 1 (C/J) Paga 2.7 y 6
		1	Oferta 1 (C/J)
		1	Oferta 1 (C/J)
		1	Oferta 1 (C/J)
		1	Oferta 1 (C/J)
		1	Oferta 1 (C/J)
		1	Oferta 1 (C/J)
1	Oferta 2 (S/J)	3	Oferta 1 (S/J)
1	Ambas ofertas, el alumno redondea 2.7 a 3		
Total: 57.14%		Total: 42.85%	

⁴ Los estudiantes respondieron de forma variada, algunos justificaron sus respuestas, explicando su procedimiento y algunos otros estudiantes no lo justificaron. Por lo que C/J significa con justificación y S/J sin justificación.

En este problema, poco más de la mitad de los estudiantes (el 57.14%) consideraron responder que la oferta 2 conviene más porque en la oferta 1, el 30% equivale a \$2.7 mientras que en la oferta dos son \$3 de descuento. Por otra parte, 42.85% de los estudiantes consideraron conveniente la oferta 1 sobre la 2. Para este grupo de estudiantes, el error radicó en restar 3 de 9 de manera que su decisión se basó en que en esta oferta se restaba, mientras que para la otra oferta consideraron que se pagarían sólo \$2.7.

Para Whipkey, *et al.* (1982) el *descuento* es una de las ocho posibles situaciones en las que se presenta el porcentaje; cuando se compra un artículo, en ocasiones tienen rebajas o descuentos, por lo que el precio final se obtiene de restar el por ciento de descuento a una cantidad total dada. Para encontrar el descuento, él recomienda, multiplicar el precio original por el por ciento de descuento. En el contexto de este problema implicaría operar $(0.30) (\$9) = \2.7 ; por lo que la oferta 1 no es conveniente para el usuario comparado con los \$3 de la oferta 2.

Pregunta 6. De la siguiente gráfica circular, anota el porcentaje aproximado, de cada color, según tu criterio



En este problema se requiere que el estudiante interprete los datos de la gráfica circular y estime un porcentaje. Por un lado, es necesario identificar el título que da cuenta de lo que se representa, los porcentajes de los hombres y mujeres con sobrepeso; y las convenciones de color, el rojo que indica la cantidad de mujeres con sobrepeso y el azul, lo correspondiente a los hombres.

Las explicaciones dadas en las respuestas de los estudiantes permiten afirmar que algunos estimaron los valores usando la información visual del color (azul – rojo) o por lo que cada color representaba, en este caso el género (hombre – mujer).

Ambas consideraciones eran correctas, lo que se evaluó fue que cada estudiante debía considerar que la suma de los porcentajes determinados debía ser 100%.

Tabla 4.3. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la aplicación de un por ciento, pregunta número seis.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
10	60 % Hombres; 40% Mujeres	1	55 y 70
7	60 % Azul; 40% Rojo		
2	60 y 40 (%)		
2	37.7% y mujeres 62.5% hombres		
2	45% Rojo; 55% Azul		
1	65% hombres y 35% mujeres		
1	55% hombres y 45% mujeres		
1	58% hombres y 42% mujeres		
1	63% hombres y 37% mujeres		
Total: 96.42%			

La mayoría de los estudiantes logra interpretar correctamente la gráfica circular y su significado en términos de porcentaje. Como se mostró previamente, el 57.14% de este total lo interpretó por género (mujer – hombre), el 32.14% desde los colores (rojo – azul) y un 7.13% como porcentajes. Solo un estudiante propuso dos números que no correspondían al cien por ciento del total; esto es, 55 y 70. Este error se podría explicar desde la comprensión conceptual, en términos de dificultades para realizar conversiones (Duval, 2006), transformar los datos asignados a cada color o a cada género en esta gráfica circular y el número que podría corresponder en términos del porcentaje que representa. Es decir, establecer correspondencia entre un registro gráfico y uno numérico.

Pregunta 9. Santiago adora los videojuegos, cuando fue a la tienda a comprar uno, encontró el que quería en \$1,000.00, había dos posibles ofertas en la tienda. Oferta

1: 30% de descuento del total. Oferta 2: \$200 de descuento del total de la compra.
¿Qué oferta le conviene tomar para gastar menos dinero?⁵

En este problema, nuevamente, se usa el descuento diferenciado por ofertas. En la oferta 1, el alumno debía considerar el porcentaje como una parte del total del videojuego, mientras que, en la segunda oferta, solamente era restar el descuento de \$200 al total del pago del videojuego. Al contrastar estas dos ofertas se podría identificar la que le convendría al comprador.

Tabla 4.4. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la aplicación de un por ciento, pregunta número nueve.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
19	Oferta 1 (C/J)	1	"La del 20%"
		1	"La segunda, ya que el descuento es de 30%" (parcialmente correcta, parece referirse a la primera oferta)
5	Oferta 1 (S/J)	1	"Las dos"
		1	"Oferta 2"
Total: 85.71%		Total: 14.28%	

En este problema, 24 de los estudiantes (85.71%) lograron resolverlo exitosamente y justificar sus resultados. En sus explicaciones, ellos afirmaron que les convendría la oferta 1 porque el 30% de 1,000 es \$300, mientras que en la oferta dos sólo se restarían \$200 del total del costo del videojuego. Los demás estudiantes consideraron que la oferta 2 tenía descuento mayor en su compra, es decir, parece que no compararon ambas ofertas, la de \$200 con la de \$300, y por ello afirmaron que para gastar menos dinero habría que tomar la oferta 2 y lo expresaron así: "La del 20%"; "Las dos"; "Oferta 2". Quizás esta respuesta se deba a que desde un

⁵ En este problema, el supuesto no explícito es que el total de la compra será \$1,000; y que la oferta es para ese videojuego.

principio no calcularon el 30% de \$1,000; o no comprendieron que en ambas ofertas se realizaría un descuento; y, por tanto, para decidir cuál era la mejor oferta debía analizarse entre las dos, aquella en la que se pagara menos. Para la respuesta “La segunda, ya que el descuento es de 30%” no queda claro si considera que es la segunda oferta o es la del 30%, por ello se considero como errónea y parcialmente correcta.

Autores como Radatz (1980) consideran que los errores pueden llegar a presentarse por un aprendizaje deficiente originados por carencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos en las tareas matemáticas. Sin embargo, el error también es parte del proceso de aprendizaje, es decir, permite conocer aquellos aspectos que los alumnos han logrado comprender y en aquellos donde aún les falta consolidar un aprendizaje. En este caso, este 14.28% aún no logra identificar el procedimiento adecuado para la resolución de problemas en los que se contrastan dos ofertas.

Como se puede observar, en estas tres preguntas de aplicación de un por ciento, se trabajó con contextos de dinero, transporte público y cantidad, contextos cercanos a las realidades del estudiante. En las preguntas 1, 2 y 9 resaltan las dificultades de los estudiantes a comparación de la pregunta 6, debido a que los estudiantes tenían que realizar un procedimiento específico para obtener la equivalencia del porcentaje con la cantidad total dada. Mientras que en la pregunta 6 era necesario interpretar y estimar un porcentaje según los datos presentados en una gráfica circular. Sin embargo, para algunos alumnos destaca las dificultades para resolver problemas que implican comparar ofertas y decidir la que es más conveniente, en este caso, para el comprador o usuario.

4.1.2. La determinación de un por ciento

Para este tipo de problema es necesario que el estudiante calcule el porcentaje, cuando cuenta con dos variables, una de ellas representa el tanto por ciento y la otra cantidad es el total. Por ejemplo, ¿Qué porcentaje es 14 de 55? Como se detalló en el capítulo 3, (apartado 3.3.1.) fueron cuatro las preguntas relacionadas con este

tipo de problemas. A continuación, se describe lo realizado por los estudiantes en cada pregunta.

Pregunta 4. Para Juan, un corredor profesional, es necesario correr 15 kilómetros diarios. Marlén corre sólo 5 kilómetros diarios. Determina qué porcentaje representa la distancia que corre Marlén respecto a la de Juan.

En este problema se requirió que los alumnos relacionaran dos cantidades, lo que corre Juan (15 km) con lo que corre Marlén (5 km). Considerándose equivalentes estas cantidades, los estudiantes calculan el porcentaje que determina una cantidad respecto a la otra. Para esta pregunta, el alumno debía considerar el 100% a lo que corre Juan y calcular la equivalencia con lo que corre Marlén.

Tabla 4.5. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la determinación de un por ciento, pregunta número cuatro.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
16	33.33%	1	30% María 70% Juan
		1	40%
		1	10%
5	30%	1	70%
		1	0.75
		2	1/3 (parcialmente correcta)
Total: 75%		Total: 25%	

El 57.14% de los estudiantes respondieron que Marlén corre el 33.33% a comparación con Juan, este porcentaje de estudiantes realizó una regla de tres por ello lo colocaron con mayor exactitud; sin embargo, el 17.86% hizo un cálculo mental buscando el valor faltante para obtener el total. La cuarta parte de los encuestados respondieron erróneamente. Ejemplos de estas respuestas y los posibles procedimientos son:

- 30% a María 70% a Juan, el estudiante no consideró que lo que corre Juan equivale al 100%;

- 0.75, resultado de multiplicar 15 (cantidad de kilómetros que corre Juan) por 5 (cantidad de kilómetros que corre Marlén) y dividirlo entre 100;
- 1/3, encontró la relación entre lo que corre Marlén respecto a lo que corre Juan, pero no calculó el porcentaje que corresponde dicha fracción. En este sentido se considera parcialmente correcta. Es necesario indagar por qué no concluyó.
- 40%; 10%; 70%; resultado de una errónea interpretación de la pregunta pues no es posible identificar el proceso realizado.

Como se observa en esta comparación de logros y errores, más de la mitad de los estudiantes realizaron un procedimiento correcto. Sin embargo, como menciona Venezky (1988), algunos estudiantes pueden realizar un plan de solución incorrecto, derivado de multiplicar o dividir las cantidades del problema; en otros casos, puede acudir a aproximaciones o cálculos mentales sin usar los datos correctamente, al parecer, es un reflejo de falta de comprensión de lo que se les pide en la pregunta.

Pregunta 8. 10 kilogramos es el 20% de lo que pesa María, ¿cuánto es su peso?

Peso	Porcentaje	Cantidad base
n-desconocido	20%	10
Total		

Para resolver esta situación era necesario que los estudiantes buscaran el valor faltante en la tabla mostrada y la relacionaran con el enunciado, información equivalente. Como se muestra, ellos tenían disponible la cantidad del porcentaje y la cantidad base, y debían calcular el peso total de María, relacionando estos dos.

Tabla 4.6. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la determinación de un por ciento, pregunta número ocho.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumno	Respuesta
18	50 kg (C/J)	1	52 kg

		1	5 de base y 100
		1	55 kg
4	50 kg (S/J)	1	20 kg
		1	30 kg
		1	No entendió la pregunta
Total: 78.57%		Total: 21.42%	

22 alumnos contestaron que el peso de María es 50 kg, su procedimiento fue una regla de tres y en sus explicaciones describieron que al no tener el 100%, era necesario multiplicar 10 por 100 y el resultado dividirlo entre 20. En contraste, los demás encuestados (21.42%) respondió de manera diversa, por ejemplo, afirmaron que el peso de María es 52 kg; 55 kg; 20 kg; 30 kg; 5 de base y 100; y quien no entendió la pregunta.

En esta pregunta sólo el 64.28% explicó el procedimiento realizado para obtener las respuestas. Respecto a los que no lograron responder correctamente, dos de ellos estuvieron cerca del resultado, al parecer lo hicieron mental o con una aproximación del resultado, los otros 3 alumnos no comprendieron ni interpretaron el problema (la tabla), y el otro estudiante, quien respondió que María pesa 20 kg, quizás consideró que tanto el porcentaje (20%) como lo que pesa María eran lo mismo, por ello, no era necesario realizar un procedimiento.

Quizás la falta de éxito en este tipo de problema esté relacionada con lo que afirma Chaidez, Leyva y Villegas (1995), pues ellos se enfrentaron a la búsqueda de un dato no proporcionado en la tabla, es decir, y que requerían acudir a otros conceptos, más complejos y profundos como la interpretación de una razón, vinculado con proporcionalidad. Si el 20% es 10, el 40% cuánto sería, por ejemplo.

Pregunta 11. En la siguiente imagen se representan las entidades con mayor índice de divorcio en 2018. ¿Qué porcentaje, aproximado, tienen las entidades de mayor proporción de divorcios? ¿Y los de menor proporción?

Entidades con mayor y menor proporción de divorcios



Se les presenta a los estudiantes el mapa nacional mexicano, se identifican las entidades con mayor proporción de índice de divorcios, Chihuahua, Coahuila, Ciudad de México y Sinaloa de color rojo oscuro; mientras que Guerrero, Tlaxcala, Chiapas y Quintana Roo de color amarillo oscuro, señalando que son los estados con menor proporción. Se le solicita al estudiante indicar qué porcentaje representa cada proporción respectivamente. Para resolver este problema los alumnos deben identificar la simbología de colores. Aunque la imagen pudiera insinuar comparación estimada de superficies, solo era necesario establecer la relación del total de estados de todo el país. En caso de no recordar esta información, podía obtenerla por la división política que se mostraba en la imagen.

Tabla 4.7. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la determinación de un por ciento, pregunta número once.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
2	25% y 15% (por territorio)	2	60% y 40%
2	12.5% y 12.5% (por estados)	3	30% y 70%
1	20% y 20% (por estados)	1	70% y 30%
1	30% y 10% Aprox	1	35% y 65%
1	20% y 12% Aprox	2	20% y 80%

1	30% y 15% Aprox	1	9.375% y 12.5%
1	30% y 20% (por color)	1	60% y 30%
1	13% (regla de 3)	1	1/3 y 2/3
		1	¼ y 1/8*
		5	50% en adelante; 25%; 80%; 20%; 15%.
Total: 35.71%		Total: 64.28%	

En este problema, diez de los estudiantes consideraron responder que la mayor proporción de personas con índice de divorcio estaba entre 30% y 12% y para menor proporción entre 20% y 10%, los estudiantes relacionaron las proporciones por territorio y por número de estados. En contraste, el otro 64.28% de los alumnos llegaron a diferentes respuestas. Algunos consideraron a la mayor y menor proporción de divorcios como el 100%, sin analizar que algunos estados no estaban formando parte de estas dos categorías. Como se ilustra en la tabla anterior, este grupo de 17 alumnos que resolvieron incorrectamente la pregunta, no consideraron 100% al país, al parecer, tampoco identificaron las diferencias entre colores (rojo y amarillo oscuro) para las entidades de mayor y menor proporción ni interpretaron que el resto de las entidades no formaban parte de esta estadística.

En la determinación de un por ciento se presentaron contextos de distancia, cantidad y población, permitiéndose observar que son contextos poco usuales a lo comunes a comparación con el anterior tipo de problema. Además, en este tipo de problema, la representación incluyó además del lenguaje verbal, información en otros registros gráficas circulares, tablas y figura (país) que debía extraerse.

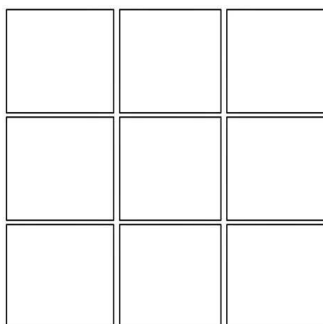
4.1.3. La determinación de una base. Un mayor reto para los alumnos

La determinación de una base se caracteriza cuando se conoce el porcentaje que representa una cantidad de otra, es decir, se le proporciona al estudiante un

porcentaje de una cantidad y se calcula la cantidad total que representa esta proporción. Por ejemplo, si el 54% de una cantidad es 195, ¿cuál es la cantidad?

Para este tipo de problemas se trabajó con 4 preguntas del cuestionario, como se detalló en el capítulo 3, apartado 3.3.1. Se detalla, a continuación, las respuestas obtenidas por los estudiantes en cada uno de estos cuatro problemas.

Pregunta 3. Visualiza el recuadro, menciona los cuadros que sombrarías de acuerdo con las ofertas de la pregunta dos*. ¿Para la oferta 1? ¿Para la oferta 2?



Para que el estudiante respondiera de forma correcta, era necesario convertir el lenguaje natural a uno geométrico. Primero, identificar que cada recuadro representa un peso, pues el pasaje era \$9. Después, representar la cantidad de la oferta uno (30% de 9) y de la oferta dos (pagar \$3). Con estas dos representaciones ya podían ambas ofertas y describir cuántos recuadros son los sombrarían para representar cada oferta, en la figura presentada.

Tabla 4.8. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la determinación de una base, pregunta número tres.

LOGROS		ERRORES		
Alumnos	Respuesta	Alumno	Respuesta	
3	2 7/10 y 3	1	Oferta 1	Oferta 2
			2 7/10	Todos
		1	2 y medio	3
		1	2 1/7	3
		1	6	6.70
1	2 y medio	medio		

		2	2	3
		1	3	2 y medio
		2	3	3
		1	2/7	6
2	2.7 y 3	2	1	1
		1	3	1
		1	5	4
		1	2.7	6
		1	123	456
		1	3	1
		5 alumnos sin especificaciones	"Los primeros 3"; "Cuatro"; "4"; "2".	
Total: 17.85%		Total: 82.14%		

Como se observa en la tabla anterior, tres estudiantes (10.71% del total) respondieron de manera fraccionaria, considerando respectivamente cada oferta como $2 \frac{7}{10}$ y 3, mientras que los otros dos alumnos contestaron que sombrarían 2.7 y 3 recuadros, según lo correspondiente. En esta pregunta es evidente la falta de éxito de los estudiantes pues el 82.14% tuvo errores al momento de responderla. A pesar de que este problema se relaciona con el anterior, al momento de cambiar la representación, de verbal a gráfica, se presentaron las dificultades (Duval, 2006). Este tipo de conversiones son menos usuales y poco favorecidas durante la enseñanza.

Pregunta 7. Pedro se encontraba descargando dos trabajos en línea y observó que llevaba solamente el 27% del total. Si ha tardado 15 minutos, ¿cuánto tiempo se estima que tardará para terminar la descarga de ambos archivos?

En este problema el estudiante debía calcular el tiempo total necesario para que los dos archivos terminarían de descargarse, infiriendo que el flujo de descarga era constante. Una estrategia posible era convertir el porcentaje en un número decimal, hacer una tabla de variación o bien, la regla de tres.

Tabla 4.9. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la determinación de una base, pregunta número tres.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuestas	Alumnos	Respuesta
7	55 min	4	50 min
		3	60 min
		2	30 min
		1	04.05
		1	42 min
3	55.55 min	1	1 h 48 min
		1	120
		1	180
		1	55.5%
		3	40 min, 40.55 min
Total: 46.42%		Total: 53.57%	

En este problema, el 46.42% de los estudiantes respondieron que Pedro tardaría en descargar ambos archivos en 55.55 minutos, realizando una regla de tres para obtener el resultado. Por otra parte, un poco más de la mitad de los encuestados no logró responder correctamente. Algunas posibilidades de como obtuvieron los resultados son los siguientes:

- Al parecer, el resultado de hacer cálculo mental aproximado fue lo que llevó a obtener resultados como 50 min; 60 min; 30 min; 40 min, 42 min; 1 h 48 min; 120; 180;
- 55.5%, en este caso, parece que hay confusión entre la representación del 55.5, minutos o porcentaje;
- 40.55 min fue el resultado de restar 55.55 menos 15;
- 4.05 min, es el resultado de restar 55.55 menos 15 entre 10.

Se interpreta que, en esta pregunta, poco más de la mitad de los estudiantes hizo cálculos mentales, no comprendieron el problema o no identificaron el

procedimiento a tratar para afirmar sus respuestas. Como afirma Lia *et al.* (2006), en muchos casos, la resolución de problemas de porcentaje se limita a una utilización, generalmente algoritmizada, de reglas y mecánica, sin pasar por una comprensión real y significativa para el estudiante.

Pregunta 10. 595,900 es 90% del total de los mexicanos que utilizan autobús como medio de transporte. Según este dato, ¿cuántas personas no usan autobús?

En este problema los alumnos debían calcular la cantidad de personas equivalente al 100%, partiendo de la información dada respecto al que el 90% era 595,900 personas.

Tabla 4.10. Logros y errores que presentaron los estudiantes con la determinación de una base, pregunta número diez.

LOGROS		ERRORES	
Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
6	10%	2	6621
		2	662111.11
		1	66210
		1	66221*
7	66211	1	67111
		2	536310
		1	59590
		1	662111
2	66211.11	1	53631
		1	50000
		1	5959
Total: 53.57%		Total: 46.42%	

En el problema, seis estudiantes respondiendo lo evidente, el total de las personas que no utilizan autobús como medio de transporte es 10%; mientras que nueve alumnos obtuvieron como resultado que las personas que no utilizan el autobús

como medio de transporte son 66,211; quienes realizaron un correcto cálculo de la determinación de la base. Mientras que el resto (46.42%) de los estudiantes obtuvo respuestas diversas que interpretamos de la siguiente manera.

- 6621, en este caso, el estudiante parece que dividió entre 1,000 en lugar de entre 100;
- 662,111.11, los estudiantes calcularon el 100% de los mexicanos que incluye los que usan autobús y los que no lo usan;
- 66,210, parece un error de redondeo;
- 66221*, el estudiante escribió mal el resultado, pues su explicación del procedimiento estuvo bien;
- 536,310, resultado de multiplicar 595,900 por 90 y después dividirlo entre 100, es decir, calculó el 90% del dato dado;
- 53,631 es el resultado de multiplicar 595,900 por 90 y dividirlo entre 1000. O bien, calculó el 90% de dato conocido y después, a ese resultado le calculó el 10%.
- 662111; el estudiante calculó el 100% de los mexicanos que incluye los que usan autobús y los que no lo usan; y solo consideró la parte entera;
- 67111 y 50000; se interpreta que hizo cálculos aproximados;
- 59590, considerando que lo faltante era el 10%, por lo que dividió 595,900 entre 10;
- 5,959 resultado de dividir 595,900 entre 100.

En este problema parece que las dificultades se derivaron de desconocer el total, en este caso, los alumnos no disponían de la cantidad de personas. Como se mostrará en el siguiente apartado, este tipo de preguntas es menos usual porque los datos que se les proporcionan pareciesen ser insuficientes. Ante dicha situación, es posible que ellos hicieran lo que señala Venezky (1988), diseñar un plan de solución incorrecto, con impulsividad al operar (multiplicando o dividiendo) con los datos proporcionados en la pregunta o incluso sin comprender lo que se les pide en la pregunta.

4.2. ¿Qué orientó algunas estrategias erróneas en la resolución de problemas de porcentaje? Voces de alumnos de primero de secundaria

En las entrevistas aplicadas a seis estudiantes quienes respondieron con mayores logros o errores es posible contrastar sus respuestas, sus explicaciones y sus procedimientos. Según sus propios comentarios, en cada tipo de problema se presentaron dificultades diferentes, no interfirieron los contextos empleados porque ellos mismos confirman que los porcentajes son comunes en la vida cotidiana y en distintos lugares. Aunque mencionan que, en el tipo de problema de la determinación de una base, las tres preguntas presentadas en el cuestionario, con contextos de transporte público y descarga de archivos, son menos usuales respecto a los otros dos tipos de problemas.


Las representaciones empleadas sí interfirieron en la resolución de problemas, aunque variaron en cada tipo de problema, permitió que el estudiante convirtiera, en muchos de los casos, un lenguaje natural a uno geométrico.

4.2.1. Entrevistas

Las entrevistas realizadas a los seis estudiantes se describen en este apartado, se organizan las respuestas que cada uno de los alumnos dio referente a los tres diferentes tipos de problemas planteados en el cuestionario, “la determinación de la base”, “la determinación de un por ciento” y “la aplicación de un por ciento”; véase tabla 4.11.

Tabla 4.11. Entrevistas realizadas a seis estudiantes de primero de secundaria.

Entrevistas						
Estudiante	Tipo de problema					Observaciones
	La aplicación de un por ciento		La determinación de la base		La determinación de un por ciento	
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 10	Problema 11	
#1	Ella explicó que para obtener el resultado restó el 30% a los \$500.00; sin recordar que el porcentaje no correspondía restarlo con el total.	Consideró que ambas ofertas eran iguales, porque en una se le restaba el 30% del total, mientras que en la otra se le restaba 3 pesos, ella expresó que era “como si le quitaras la mitad del nueve, por ende, son iguales las ofertas”.			Explicó que el porcentaje sería 50 – 50, pues considera que es igual sólo con diferente color.	Confesó que se le dificulta la manera de acomodar los datos proporcionados, y no cree que sean tan difíciles de entender. Además, comentó que al hacer compras los porcentajes están presentes. Ella hace uso de la calculadora para resolver problemas de porcentajes y regla de tres. Con los puede llegar a resolver un problema determinado.
#2	Dividió 500 entre 100 y como resultado obtuvo 5 y posteriormente lo multiplicó por 30.	Sacó el porcentaje de la oferta 1 y comparó que 2.7 puede ser redondeado a 3, por esto, ambas ofertas le convendrían.	Ella explicó que colorearía 3 recuadros para ambas ofertas.		Consideró que las entidades con mayor índice poblacional equivalen al 60% y el otro 40% al total de menor población con índice de divorcio.	Explicó que usó la calculadora y la regla de tres para resolver los problemas. Para ella, los porcentajes son como una manera de medir y definir una cierta cantidad, ya sea para un descuento o una parte para dividir un lugar. Pese a que sólo tuvo un error en sus respuestas, piensa que se le dificulta el tema porque se confunde al restar cantidades que representan el porcentaje y piensa que con la práctica no serían tan difíciles.

#3	<p>Primero acomodó los datos en la regla de 3, para multiplicar 500 por 30, el resultado que obtuvo fueron 15000, después hizo una división de 15000 entre 100 y así obtuvo que Alicia gastó \$150.</p>					
#4	<p>Multiplicó 30 por 100 y el resultado de esta operación lo dividió entre 500 y obtuvo 6.</p>	<p>Multiplicó 3 por 30 y como resultado obtuvo 90. Después, ese 90 lo dividió entre 9 y obtuvo 10. Para la oferta 2, multiplicó 30 por 100 y el resultado lo dividió entre 9 y ese resultado lo dividió entre 10, por ello, considero mejor la oferta 1.</p>				<p>Piensa que no se le dificultan los porcentajes, lo que se le dificulta es la regla de tres, pero procura utilizar este método. Sugiere que para el aprendizaje de los porcentajes es necesario implementar recursos como videos tutoriales.</p>
#5				<p>Ella considero 595900 como el 90% del total, así que esta</p>	<p>Dividió al país en tres partes, así podría interpretar los datos y considerar que el 30%</p>	<p>Ella consideró que no tuvo muchos errores, mencionó que se concentró y pensó que sería parte de su calificación. Además, utilizó</p>

				cantidad lo dividió entre 10 pues este 10% es lo que faltaría completar ($90 + 10 = 100$)	equivaldría a los estados con menor índice y 70% a los estados con mayor proporción de divorcios.	calculadora y como procedimiento general usó regla de tres. Mencionó que fueron sencillos los problemas porque son muy cotidianos. Ella relaciona los porcentajes con descuentos en tiendas de ropa y de comida. Señaló que los porcentajes ese estudian más en primaria que en secundaria.
#6	Para obtener 130, él calculó que para sacar el 30% de 500 necesitaba dividir 500 entre dos; ese resultado dividirlo de nuevo entre 2, equivalente al 25%, entonces faltaría sumar ese 5% faltante.	Él consideró un descuento mayor con la oferta 1, porque utilizó el procedimiento como el problema anterior, dividió 9 entre 2, ese resultado de nuevo entre 2, al obtener 2.25, sumó 5, pues el consideró que ese 5 es el 5% faltante para llegar al 30%. Comparando 7.25 menos 9, que es el total del pasaje y la oferta 2, \$3 menos \$9, por ello, la oferta 1 es más conveniente para él.		Mencionó que no lo respondió haciendo ningún procedimiento, pues no supo cómo hacerlo, al no tener un total con el cual trabajar.	Confesó olvidar que el país representa el 100%, por ello, para la mayor proporción él considera 30%, mientras que para la menor proporción 60%.	Él considera que es difícil la materia de matemáticas porque no le entiende bien, olvida cómo hacer los procedimientos y los temas, además de cómo sacar los resultados. Él se apoya en la calculadora. Agregó que la pandemia ha impactado para comprender muchos de los procedimientos de la asignatura.

Las entrevistas permitieron identificar los procedimientos de los estudiantes con más errores y logros. Hubo estudiantes que explicaron el ejercicio que consideraron más difícil, hubo quienes externaron los procedimientos que ellos consideraron estar correctos.

Se encuentran alumnos que creyeron no haber tenido muchos errores, aunque los resultados muestran lo contrario. La mayoría afirma utilizar la regla de tres como el procedimiento que más les funciona, sin embargo, se desconoce si comprenden lo que están haciendo atrás de este algoritmo (proporcionalidad). Lo que permite interpretar que sus procedimientos parecen ser más mecánicos, es decir, sólo intuyen acomodar los datos y los meten a la calculadora, sin comprender las características del problema.

El docente a cargo del grupo encuentra necesario abordar el tema de los porcentajes a lo largo de todo el ciclo escolar, permitiendo relacionarlos con otros conceptos como es la frecuencia y las fracciones. Sin embargo, los resultados nos permiten identificar que aun así hay estudiantes que no tienen dominio del tema.

Asimismo, los seis estudiantes señalan que el tanto por ciento se observa en diversos contextos, desde descuentos para cualquier artículo, división de algún lugar, empresas, casas, lotes, incluso de algún pastel o cualquier elemento que requiera de una división en específico. Recomiendan que, para un mejor aprendizaje del tema, de su comprensión, análisis y reflexión se podría relacionar con actividades dinámicas, del entorno e incorporando las tecnologías digitales.

4.3. A manera de cierre

Se puede concluir que los resultados previamente señalados se contrastan con la opinión del docente a cargo del grupo. Pese a que él abordó el tema de los porcentajes “casi todo el ciclo escolar”, este estudio arroja que los estudiantes aún tienen dificultades en la resolución de problemas que involucran este concepto; algunos consideran que se debe a que no dominan el tema, los procedimientos y tampoco comprenden las distintas formas de representar el porcentaje. Aunque el

profesor utiliza diversas estrategias y su experiencia lo ha llevado a aplicarles una encuesta a los estudiantes (en equipos) para que elijan temas de interés, preguntas y todo lo referente al contenido de los porcentajes.

El docente considera que los porcentajes son un tema complicado porque se vincula con otros conceptos, por ello, cuando él enseña el tema lo relaciona con otros como son las frecuencias y las fracciones. En palabras del profesor, los alumnos presentan mayor dificultad en la comprensión de los porcentajes cuando se trata de “convertir o sacar porcentaje, ya sea de decimal a fracción, o saber por cuánto multiplicar para saber qué tanto de porcentaje lleva”. Esto implica conversión de registros (Duval 2006) y con relación a los distintos tipos de problemas, “la aplicación de un por ciento”, “la determinación de un por ciento” y la “determinación de la base”; el docente afirma que los estudiantes no identifican que datos se necesitan multiplicar ni porqué organizar los datos de cierta manera para hallar los resultados.

Desde una mirada a la literatura, no encontramos referencia que mencione en cuál tipo de problema de porcentaje se presentan mayores dificultades. En esta tesis, los estudiantes de primer grado de la escuela secundaria técnica, mostraron mayor dificultad en el tipo de problema “La determinación de la base – cantidad base”, debido a que no identifican el total de la cantidad lo que les impide obtener un determinado porcentaje. De igual forma, se contrasta que el contexto no implica ningún reto para los estudiantes, pues para ellos los porcentajes están en todo momento y en muchas situaciones de su vida cotidiana.

Conclusiones y recomendaciones

Para concluir con esta tesis se entiende que las matemáticas son imprescindibles en la sociedad porque sus elementos están inmersos en nuestra realidad de manera cotidiana. Además, en el sistema educativo nacional se ha notificado la dificultad que tienen los estudiantes con la asignatura, muchos de estos problemas han sido trabajados como problemas de investigación.

En esta tesis se indagó la resolución de problemas de porcentajes con un grupo de estudiantes de primero de secundaria, focalizando la atención en sus logros y dificultades, relacionándolos con los procedimientos empleados. En los problemas propuestos se usaron distintos contextos, representaciones y tipos de problemas.

El supuesto de esta investigación se confirmó, pues los estudiantes tuvieron mayor éxito en la resolución de los problemas en cuanto a representación de gráficas circulares, con su interpretación y análisis de información. Además, los estudiantes también fueron capaces de resolver problemas que les implicaron el cálculo de porcentaje en representaciones verbales, figuras y tabulares, de obtención de la determinación de la base y de un por ciento, aspectos no contemplados en el supuesto inicial.

Asimismo, se concluye que los contextos presentados a los estudiantes en los distintos problemas no influyeron en su resolución, aunque con el contexto de precios – dinero los estudiantes se mostraron más familiarizados a diferencia de los de población, peso – cantidad, distancia, tiempo, transportes públicos, objetos, descarga de archivos e internet. La familiaridad con esta variedad de contextos se debe, según los datos de esta tesis, a que el tema de porcentajes está reconocido socialmente con el signo de “%” y es frecuente relacionarse con situaciones cotidianas en las que hay ofertas o descuentos, o bien, medir y fraccionar un terreno

o pastel. Por estas razones, se confirma que los porcentajes se encuentran día a día en el entorno cotidiano.

Los estudiantes mostraron mayores dificultades y errores al resolver problemas de que implicaban “determinación de la base” y mayores logros en la “aplicación de un por ciento”, es decir, que varía el nivel de desempeño según el tipo de problema a resolver. Encontramos que son dos las principales estrategias. La primera es el uso de la “regla de tres”. La segunda, según datos de los estudiantes con mayores logros, es que han comprendido que para el cálculo del porcentaje es necesario considerar una cantidad como parte de un todo que se considera el 100% mientras que, en la determinación de la base, el procedimiento cambia. Esto es, se conoce el porcentaje que representa una cantidad de otra, ese es el dato conocido y se debe calcular la cantidad total que representa esta proporción, es decir, se desconoce la cantidad equivalente al 100%.

Los errores identificados en las respuestas de los alumnos fueron principalmente porque los problemas fueron resueltos mecánicamente, según ellos, hacer cálculos con los números dados sin comprender el problema y reflexionar sobre la pregunta y procedimiento utilizado. Lo anterior lleva a suponer, que estos estudiantes no han logrado una comprensión profunda de la noción de porcentaje e identificar los distintos tipos de problemas y las implicaciones en términos de los procedimientos a utilizarse; tampoco logran identificar distintas formas de representar el porcentaje. Cabe señalar que los problemas del cuestionario tienen estrecha relación con los sugeridos en las recomendaciones didácticas oficiales (SEP, 1993; SEP, 2006; SEP, 2017) y propuestos en los libros de educación secundaria de matemáticas primer grado revisados en esta tesis (Mancera y Basurto, 2018); entre ellos, el libro de texto gratuito 2018-2020 que trabaja el grupo de estudiantes de primer grado en la escuela secundaria técnica (Trigueros, *et al.*, 2019).

Lo anterior muestra la relevancia del aprendizaje profundo del concepto de porcentaje puesto que está presente en una variedad de situaciones cotidianas, la necesidad de abordar problemas que permitan a los alumnos comprender su complejidad conceptual permitiéndoles explorar los tres tipos de problemas, así

como sus relaciones con otros temas como son los números (fraccionarios, decimales), equivalencias, proporciones y razón.

Limitaciones del estudio

Después de realizar esta tesis, se pueden identificar dos limitaciones. Por un lado, está relacionada con el impacto de la pandemia por un brote de la nueva enfermedad Covid-19 que llevó a la necesidad de no salir de casa. Como resultado de ello, la educación fue vía remota lo que limitó la comunicación con los participantes de este estudio, esto es, el director de la escuela secundaria técnica, con el docente a cargo del grupo y más aún, con los estudiantes.

Quizás algunos alumnos no tuvieron internet, computadora o celular en casa, lo que impactó la posibilidad de que el instrumento, en formato virtual, llegara al total de los estudiantes del grupo de primero. A pesar de ello, 28 estudiantes respondieron permitiendo hacer un análisis de sus respuestas. Respecto a las entrevistas, se restringieron en videollamadas o mensajes instantáneos, lo que imposibilitó observar el lenguaje corporal y reacciones de los estudiantes para compartir sus procedimientos.

Otra limitación es respecto al propio cuestionario (instrumento de recolección de datos). Para futuros estudios, se identificaron mejoras requeridas en términos de redacción, pues algunos estudiantes entrevistados consideraron confusa la pregunta 11 del cuestionario. Asimismo, es importante mencionar que se debe corregir la pregunta 5 del cuestionario, debido a que el inciso a) no corresponde el 33.33% ni se aproxima a este porcentaje, en términos de interpretación de datos; dado este error se descartó esta pregunta para el análisis.

Logros del estudio

En el cuestionario fue posible incluir todos los tipos de problema (aplicación de un por ciento, determinación de la base, determinación de un por ciento); considerar contextos relevantes para los estudiantes, pero poco abordados en las clases de

matemáticas; así como variedad de representaciones que se trabajan en distintos libros de educación secundaria de matemáticas primer grado.

Pese a las limitaciones, se logró entrevistar al docente y a los estudiantes con mayores dificultades presentadas en la resolución de los problemas. De esta manera, se obtuvo un acercamiento a esta problemática educativa con estudiantes de primero de secundaria, población en la que se identificaron pocos estudios.

Recomendaciones

Se sugiere contrastar los resultados obtenidos en esta tesis con estudiantes otros niveles educativos como bachillerato, universitarios o en adultos mayores, de esta manera, analizar qué procedimientos o estrategias utilizan para procesar la información, cómo comprenden los diferentes tipos de problema, analizar la influencia de los contextos utilizados y si reconocen distintas representaciones en los que se encuentra el porcentaje. Además, sería necesario complementar o contrastar los resultados de esta tesis con otros instrumentos como son la observación tanto del grupo, del docente y del ambiente escolar.

También se recomienda que el estudio de la resolución de los porcentajes no esté centrado en estudiantes, sino en las estrategias de enseñanza que el docente desarrolla para que los estudiantes aprendan el tema. En este caso, podría desarrollarse una propuesta pedagógica que atendiera a dificultades particulares de un grupo de estudiantes, identificadas a partir de un diagnóstico.

Como resultado de este trabajo de tesis, se sugiere a los docentes de matemáticas de secundaria, profundizar sus conocimientos sobre los distintos tipos de problemas de porcentaje y sus implicaciones para su enseñanza, identificar y adaptar a su enseñanza estrategias didácticas para favorecer los aprendizajes esperados en los alumnos, para la comprensión de los temas relacionados con el porcentaje, la proporcionalidad, la fracción, la razón, y la equivalencia. Además, variar los contextos en los problemas con otros de su entorno, y no sólo con los de precio – dinero (descuentos, aumentos, ofertas) así como sus representaciones (gráfica,

verbal, tabular) y transformaciones entre ellas. También se sugiere promover distintas maneras de calcular el porcentaje, por ejemplo, regla de tres, multiplicación de decimal, fraccionario.

Con respecto a la determinación de una base (tipo de problema con mayores dificultades) es necesario que el docente no sólo explique las características de los diferentes problemas, sino varios procedimientos para hallar los resultados, con actividades dinámicas (no solo ejercicios escritos, libro de texto) que permitan el aprendizaje significativo de este contenido, pues los porcentajes se encuentran en situaciones tanto de la vida cotidiana, escolar como en la profesional.

Referencias bibliográficas

- Álvarez, A. y Álvarez, V. (2018). Cómo organizar un estudio de caso. *Revista universitaria*, 23. Revista electrónica sin paginación.
- Aponte, P. y Rivera, M. (2017). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje. (Monografía de licenciatura). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Obtenida de <https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/12897/AponteBelloPaulaAndrea2018.pdf;jsessionid=404BAFF3739831E3CEC83B9DB437BAF4?sequence=2>
- Baldor, A. (1998). *Tanto por ciento. Aritmética*. Cuba: Cultural Centroamericana.
- Bazán, A. y Chalini, A. (2004). *Estrategias en la resolución de problemas de matemáticas utilizadas por alumnos de tercero de secundaria en el Distrito Federal*. México: UPN
- Chaidez, M., Leyva, O. y Villegas, R. (1995). *La aplicación del tanto por ciento en la solución de problemas que implican el cálculo de porcentajes en el tercer ciclo de educación primaria*. (tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/15028.pdf>
- Díaz-Bravo, L.; Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M.; Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *Revista Investigación educativa médica*, 2(7), pp. 162-167.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, 61, pp. 103-131.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME*, 9(1), pp. 143-168.
- Eudave, D. (2013). Investigaciones educativas en matemáticas. Educación Básica Secundaria. En Ávila, A., Carrasco, A., Gómez, A., Guerra M., López, G. y Ramírez, J. (coord.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México 2002-2011: matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras* (pp. 57-75). México: ANUIES y COMIE.
- Flores, D. (2008). *Propuesta educativa computacional para desarrollar el aprendizaje de los porcentajes en los alumnos de educación primaria*. (Tesina de diploma). Universidad Pedagógica Nacional, México. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/25914.pdf>
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. (Trabajo de fin de master). Universidad de Granada, Granada. Obtenida de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf
- Godino, J. y Batanero, C. (2002). *La proporcionalidad*. Granada: PID.
- Isoda, M. y Katagiri, S. (2014). *Pensamiento matemático. Cómo desarrollarlo en la sala de clases*. Chile: CIAE.
- Lembke, L. y Reys, B. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics education*, 25(3), 237-259.
- Lia, A., Grimaldi, V., Machiunas, M. (2006). *La Proporcionalidad*. Argentina: DGCyE.

- Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. España: Síntesis.
- Mancera, E. y Basurto, E. (2018). *Matemáticas 1. Interacciones*. México: Pearson.
- Mendoza, T. y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-1), pp. 177-190.
- Navarrete, S. (1993). *Estrategias didácticas para que los niños de sexto grado de educación primaria solucionen problemas de porcentajes desde la perspectiva de la pedagogía operatoria*. (Propuesta pedagógica licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/1519.pdf>
- Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 1(13), pp. 29-36.
- Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 18(1), pp.16-20.
- Reséndiz, A. (2010). *Estrategias para la enseñanza- aprendizaje de las fracciones y los porcentajes en el instituto nacional para la educación de los adultos*. (Proyecto de innovación pedagógica). Universidad Pedagógica Nacional, México. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/27768.pdf>
- Sánchez, E., Hoyos, V. y Saiz, M. (2018). *Matemáticas 1 Identidades secundaria*. México: Patria.
- SEP. (1993). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: Secretaría de Educación Pública.

- SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP. (2017). *Matemáticas. Secundaria 1o.* Página web. <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate1.html?fbclid=IwAR10qZnQLOJfvDagUaFjrn4rZ61TsRjMbHQvntHWVG G52H3SzgeXdj0mWCM> Visitada el 22 de junio 2020.
- Silva, E. (2014). *Una comparación didáctica de las propuestas curriculares de 1993 y 2011 para la enseñanza de porcentaje en sexto de primaria*. (Tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/30524.pdf>
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.). *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Stake, R. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Trigueros M., Lozano, M., Sandoval, I., Cortés, M., Jinich, E. e Inés, M. (2019). *Matemáticas 1. Aprendizajes clave para la Educación Integral*. México: Santillana.
- Valenzuela, J. (1993). *Propuesta pedagógica para propiciar en los alumnos de sexto grado el aprendizaje de cálculo de porcentajes*. (Propuesta pedagógica). Universidad Pedagógica Nacional, México. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/6570.pdf>
- Venezky, R. (1988). Different Levels of Ability in Solving Mathematical Word Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(2), pp. 111-134.
- Whipkey, K., Whipkey, M. y Conway, G. (1982). *El poder de las matemáticas. Aplicaciones en administración y ciencias sociales*. México: Limusa.

Anexos

Anexo 1. Cómo se presentan los porcentajes en diferentes libros de texto gratuitos: tipos de problemas, contexto y representación.

Años	Nombre de las lecciones	Tipo de casos			Contexto										Representación			
		Tasa	Cantidad base	Porcentaje	Comunes					Menos comunes					Verbal	Gráfica circular	Tabla	Otras
					Precios	Población	Peso	Distancia	Tiempo	Trasportes	Recetas	Objetos	Descargas	Internet				
1993	Razonamiento proporcional y aplicación				X													
	Organizar y presentar la información: porcentajes, tablas, gráficas					X									X	X	X	
2006	Valor faltante																	
	Porcentaje: fracción y decimal				X		X											
2017	Interpretar información: graficas de barras y circulares					X									X	X	X	
	Valor faltante: fracción y decimal							X										
	Porcentajes, tanto por ciento, cantidad base				X													
2019 – Santillana	Recolecta y registra datos en gráficas circulares														X	X	X	
	Valor unitario y faltante				X		X	X	X								X	Plano cartesiano, gráfica de barras
	Regla de tres				X		X		X			X	X		X		X	
	Porcentaje como proporcionalidad				X	X				X					X		X	
2019 – Santillana	Porcentaje, tanto por ciento y cantidad base	X	X	X	X	X						X			X		X	Figuras
	Leer e interpretar graficas circulares.						X					X		X	X	X	X	

Anexo 2. Cuestionario aplicado a los estudiantes

PORCENTAJES

¡Hola! Por favor responde el siguiente cuestionario.

El objetivo es identificar los logros y errores que presentan los estudiantes al resolver diferentes tipos de problemas de porcentajes.

A continuación, encontrarás 11 ejercicios sobre el tema de porcentajes. Lee cuidadosamente, resuelve y justifica tus respuestas.

Nombre: _____

Correo electrónico: _____

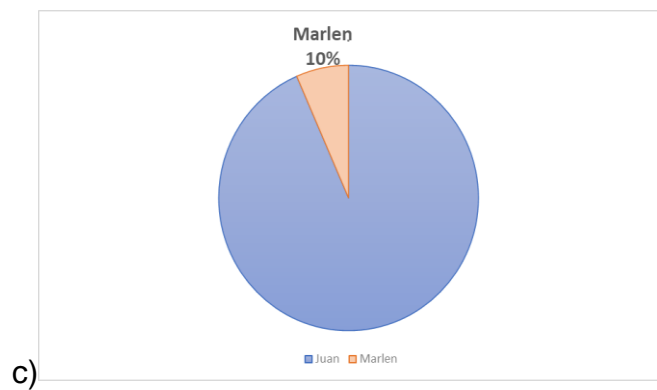
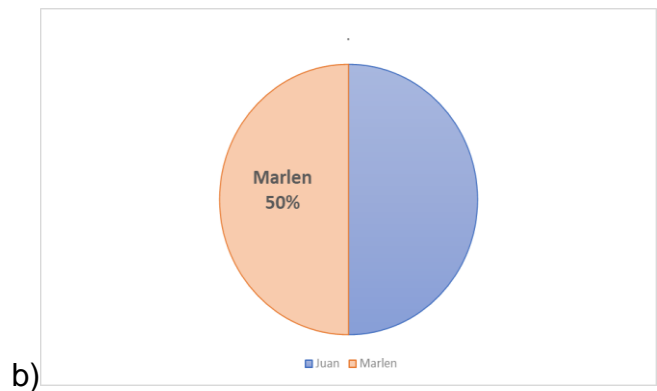
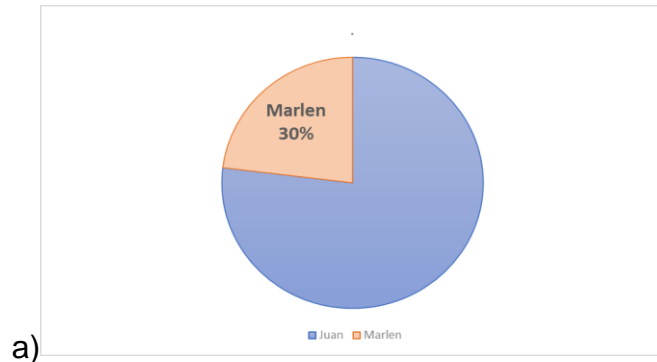
1.- Alicia tiene un total de \$500.00, gastó en comida el 30%. ¿Cuánto dinero gastó?

2.- Lee la información, responde. Supón que en el transporte público de tu ciudad promueven las siguientes ofertas en la semana. Oferta 1: 30% de descuento en el total del pasaje; oferta 2: Un descuento único de \$3. Nota: El pasaje cuesta \$9. ¿Qué oferta te conviene escoger? Justifica tu respuesta.

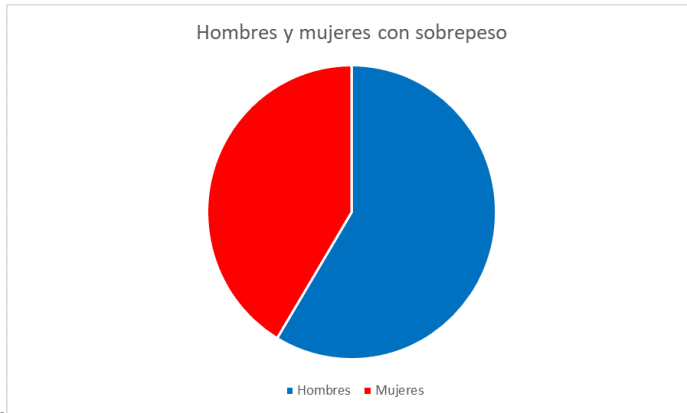
3.- Visualiza el recuadro, menciona los cuadros que sombrarías de acuerdo con las ofertas anteriores. ¿Para la oferta 1? ¿Para la oferta 2?

4.- Para Juan, un corredor profesional, es necesario correr 15 kilómetros diarios. Marlén corre sólo 5 kilómetros diarios. Determina qué porcentaje representa la distancia que corre Marlén con la de Juan.

5.- ¿Cuál de las siguientes gráficas representa el total de lo que corre Marlén, tomando como total de la gráfica los 15 kilómetros que recorre Juan diariamente?



6.- De la siguiente gráfica circular, anota el porcentaje aproximado, de cada color, según tu criterio



7.- Pedro se encontraba descargando dos trabajos en línea, observó que llevaba solamente el 27% del total. Si ha tardado 15 minutos. ¿Cuánto tiempo se estima que tardará para terminar de descargar ambos archivos? Explica tu procedimiento.

8.- 10 es el 20% de lo que pesa María. ¿Cuánto pesa? Explica tu procedimiento.

Peso	Porcentaje	Cantidad base
n-desconocido	20%	10
Total		

9.- Santiago adora los videojuegos, cuando fue a la tienda a comprar uno, encontró el que quería en \$1000, había dos posibles ofertas en la tienda. Oferta 1: 30% de descuento del total. Oferta 2: \$200 de descuento del total de la compra. ¿Qué oferta le conviene tomar para gastar menos dinero? Justifica tu respuesta.

10.- 595900 es 90% del total de los mexicanos que utilizan autobús como medio de transporte. Según este dato. ¿Cuántas personas no usan autobús? Explica tu procedimiento.

11.- En la siguiente imagen, se representan las entidades con mayor índice de divorcio en 2018. ¿Qué porcentaje, aproximado, tienen las entidades de mayor proporción de divorcios? ¿Y los de menor proporción? Justifica tu respuesta.

Entidades con mayor y menor proporción de divorcios



Anexo 3. Formulario para el profesor a cargo del grupo

El objetivo de este formulario es identificar cómo implementan la enseñanza de los porcentajes a los estudiantes de primer grado de secundaria.

Buen día, por favor responde lo que se te pide.

Nombre:

Correo electrónico:

1.- ¿Qué libro de texto utiliza para los estudiantes de primer grado de secundaria?



2.- ¿Por qué utiliza ese libro de texto para el estudiante?

3.- ¿Cómo aborda el tema de los porcentajes para que los estudiantes adquieran los conocimientos?

4.- Considera que es importante otros conceptos para la comprensión de los porcentajes. De ser así, ¿cuáles?

5.- ¿Cuánto tiempo (frente a grupo) aborda los porcentajes como contenido curricular?

6.- ¿Utiliza alguna estrategia, dinámica o método didáctico para que el aprendizaje de los porcentajes en los estudiantes sea adecuado? Mencionalos

7.- Desde su perspectiva y experiencia, ¿Dónde presentan mayor dificultad los estudiantes en el aprendizaje de los porcentajes?

8.- Desde su perspectiva, a los estudiantes, ¿Qué se les facilita más al resolver problemas de porcentajes?

Muchas gracias por responder este formulario, excelente día.

Anexo 4. Clasificación de logros y errores encontrados en la resolución de problemas del cuestionario aplicado

CLASIFICACIÓN						
Tipo de problema	Ejercicio	Logros		Errores		
La aplicación de un por ciento	1	Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta	
		22	\$150	1	\$16.666	
				1	\$470	
				1	\$435	
				1	\$6	
				1	\$130	
				1	\$166	
	Total: 78.57%			Total:21.42%		
	2	Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta	
		14	Oferta 2 (C/J)	1	Oferta 1 (C/J) Paga 2.7 y 6	
				1	Oferta 1 (C/J) Paga 2.7 y 6	
				1	Oferta 1 (C/J)	
				1	Oferta 1 (C/J)	
				1	Oferta 1 (C/J)	
				1	Oferta 1 (C/J)	
				1	Oferta 1 (C/J)	
1				Oferta 1 (C/J)		
1		Oferta 2 (S/J)	3	Oferta 1 (S/J)		
1	Ambas ofertas, el alumno redondea 2.7 a 3					
Total: 57.14%			Total: 42.85%			

		Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
	6	10	60 % Hombres; 40% Mujeres	1	55 y 70
		7	60 % Azul; 40% Rojo		
		2	60 y 40 (%)		
		2	37.7% y mujeres 62.5% hombres		
		2	45% Rojo; 55% Azul		
		1	65% hombres y 35% mujeres		
		1	55% hombres y 45% mujeres		
		1	58% hombres y 42% mujeres		
		1	63% hombres y 37% mujeres		
			Total: 96.42%		
	9	Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
		19	Oferta 1 (C/J)	1	"La del 20%"
		5	Oferta 1 (S/J)	1	"La segunda, ya que el descuento es de 30%"
				1	"Las dos"
				1	"Oferta 2"
		Total: 85.71%		Total: 14.28%	
	3	Alumnos	Respuesta	Alumno	Respuesta
		3	2 7/10 y 3		Oferta 1 Oferta 2

La determinación de una base				1	2 7/10	Todos
				1	2 y medio	3
				1	2 1/7	3
				1	6	6.70
				1	2 y medio	medio
				2	2	3
				1	3	2 y medio
				2	3	3
				1	2/7	6
				2	1	1
	2	2.7 y 3	1	3	1	
			1	5	4	
			1	2.7	6	
			1	123	456	
			1	3	1	
			5 alumnos sin especificaciones		"Los primeros 3"; "Cuatro"; "4"; "2".	
			Total: 17.85%		Total: 82.14%	
	7	Alumnos	Respuestas	Alumnos	Respuesta	
		7	55 min	4	50 min	
				3	60 min	
2				30 min		

				1	04.05
				1	42 min
		3	55.55 min	1	1 h 48 min
				1	120
				1	180
				1	55.5%
				3	40 min, 40.55 min
		Total: 46.42%		Total: 53.57%	
		Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
			10%	2	6621
		6		2	662111.11
				1	66210
				1	66221*
				1	67111
		7	66211	2	536310
				1	59590
				1	662111
				1	53631
		2	66211.11	1	50000
				1	5959
				1	
		Total: 53.57%		Total: 46.42%	
		Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
			33.33%	1	30% María 70% Juan
		16		1	40%
La determinación de un porcentaje	4	Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
			33.33%	1	30% María 70% Juan
		16		1	40%

				1	10%
		5	30%	1	70%
				1	.75
				2	1/3
		Total: 75%		Total: 25%	
		Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
	5	25	a)	1	b)
				2	c)
		Total: 89.28		Total: 10.71%	
		Alumnos	Respuesta	Alumno	Respuesta
				1	52 kg
		18	50 kg (C/J)	1	5 de base y 100
				1	55 kg
				1	20 kg
		4	50 kg (S/J)	1	30 kg
				1	No entendió la pregunta
		Total: 78.57%		Total: 21.42%	
		Alumnos	Respuesta	Alumnos	Respuesta
	11	2	25% y 15% (por territorio)	2	60% y 40%

		2	12.5% y 12.5% (por estados)	3	30% y 70%
		1	20% y 20% (por estados)	1	70% y 30%
		1	30% y 10% Aprox	1	35% y 65%
		1	20% y 12% Aprox	2	20% y 80%
		1	30% y 15% Aprox	1	9.375% y 12.5%
		1	30% y 20% (por color)	1	60% y 30%
		1	13% (regla de 3)	1	1/3 y 2/3
				1	¼ y 1/8*
				5	50% en adelante; 25%; 80%; 20%; 15%.
		Total: 35.71%		Total: 64.28%	