unidad SEAD 082

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA



# MATEMATICAS Y SU METODOLOGIA III
# LEPEP

Olga Evangelina Samaniego Jaramillo 943
Virginia Reynoso Quiñones 941
Norma Leticia Moreno López 942

OBRA BASICA PRESENTADA PARA OPTAR POR EL TITULO DE LICENCIADO EN EDUCACION PRIMARIA

Cd. Juárez, Chih.

# P R E S E N T A C I O N

Como estudiantes de Licenciatura en Educación Primaria, hemos realizado una serie de actividades académicas señaladas por el plan de estudios (LEPEP-75) y dentro de ellas, el seminario de titulación, en donde se nos ofrecieron las siguientes cinco - alternativas para el desarrollo de este trabajo:

- Investigación documental
- Tesina
- Memoria
- Obra básica
- Investigación de campo

La alternativa que elegimos fue la de elaboración en equipo de una obra básica.

Esta elección fue hecha por considerarla la más adecuada para el desarrollo de el programa de matemáticas de tercero de Li-- cenciatura de Educación Primaria y Pre-escolar (LEPEP).

El deseo de elaborar una obra básica para tercer año de LEPEP obedece a las siguientes razones:

- No existía, hasta el momento, un libro que ofreciera al estudiante de una manera general y accesible el desarrollo de los contenidos del programa de matemáticas III.

- El grado de dificultad que tuvimos al estudiar dichos contenidos y que una vez superados, quisimos evitarles a los que después de nosotros los deberían tratar.

- El interés de los temas, que para nosotros despertó, el haber logrado entenderlos.

Nuestro trabajo se inició, después de la asesoría que recibi-- mos en seminario de titulación en el año 1978, con el fin de llegar a la última fase del proceso señalado en el plan de estudios de la Licenciatura de Educación Primaria (LEPEP -75).

Sin ser especialistas en matemáticas, recurrimos a fuentes -- bibliográficas y asesoría, para tratar de desarrollar el pro-- grama ya citado y en vigencia. Su estructura se presenta en unidades:

- PRIMERA UNIDAD - Geometría de transformaciones.

- SEGUNDA UNIDAD - Probabilidad

- TERCERA UNIDAD - Estadística

En cada una de las unidades se desarrollan los objetivos particulares y específicos del propio programa.

En la primera unidad - Geometría de transformaciones - se abordan entre otros, las principales características y los conceptos de isometrías y homotecias, así como las propiedades de las transformaciones topológicas.

En la segunda - Probabilidad - se orienta principalmente hacia los principios básicos de conteo: factorial, permutaciones, -- combinaciones.

En la tercera - Estadística - se enfoca el estudio a la estadística descriptiva, analizando medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda; y medidas de dispersión: rango desviación media, rango semi-intercuartílico, varianza y desviación estándar.

NOTA.- Para efectos de verificación, anexamos:

- Plan general de Seminario de Titulación de la Dirección General - de Capacitación y Mejoramiento Profesional del Magisterio.

- Programa de tercer grado de Matemáticas y su metodología.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA.
SUBSECRETARIA DE EDUCACION BASICA.
DIRECCION GENERAL DE CAPACITACION Y MEJORAMIENTO PROFESIONAL DEL MAGISTERIO.
DIRECCION DE LICENCIATURAS PARA PROFESORES EN SERVICIO
LICENCIATURA EN EDUCACION PRIMARIA.

# SEMINARIO DE TITULACION

## PLAN GENERAL

Con el fin de que la titulación de los alumnos de las diferentes licenciaturas, sea en atención a diversas necesidades de intereses de los mismos, el seminario que llevaba el nombre de "Seminario de Tesis", cambia su nombre a "SEMINARIO DE TITULACION", al efecto, dicho seminario se ofrece en dos partes fundamentales:

1. En curso semiescolarizado; un seminario sobre la ciencia y sus métodos de investigación. En este curso, el alumno contará con un programa y una guía de autoinstrucción, donde encontrará; algunas síntesis de los contenidos programados, indicaciones específicas de bibliografía básica y exámenes de autoevaluación, así como bibliografía complementaria para cada unidad.

2. En curso directo; un taller de elaboración de su trabajo de titulación. En este curso, el alumno contará con 5 programas alternativos para desarrollar este trabajo, consistentes en:

a) Trabajo de Investigación documental (individual).
b) Trabajo de Tesina, con examen recepcional sobre conocimientos generales (individual).
c) Memoria de un año de servicio (individual).
d) Elaboración en equipo de una obra básica para su licenciatura o para algún curso perteneciente al plan de estudios de capacitación.
e) Elaboración en equipo de una investigación de campo.

Las condiciones para desarrollar cada una de dichas alternativas, se especifican en los programas respectivos.

A continuación detallamos el programa para el curso semiescolarizado de seminario de ciencia y sus métodos de investigación.

## CURSO SEMIESCOLARIZADO.

OBJETIVOS GENERALES:
Al término del estudio de este curso, el alumno:

— Anilzará los conceptos de "ciencia" de las corrientes filosóficas actuales, y su origen histórico.
— Explicará las clasificacoines actuales de la ciencia.
— Describirá en qué consiste la investigación científica, así como sus modalidades más importantes.
— Señalará en qué consisten los elementos de la investigación científica,

UNIDADES:
1. El concepto de ciencia
2. Clasificación de la ciencia
3. La metodología científica
4. Elementos de la investigación.

### UNIDAD 1. EL CONCEPTO DE CIENCIA.

OBJETIVOS PARTICULARES: Al término del estudio de esta unidad, el alumno:

1.1 Describirá el desarrollo historico del concepto de ciencia.
1.2 Analizará las concepciones filosóficas actuales de la ciencia.

L 1s-2IIIp (1-5)

# SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA.

## SUBSECRETARIA DE EDUCACION BASICA.

## DIRECCION GENERAL DE CAPACITACION Y MEJORAMIENTO PROFESIONAL DEL MAGISTERIO.

## LICENCIATURA PARA MAESTROS DE EDUCACION PRIMARIA.

CURSO SEMIESCOLARIZADO.

TERCER GRADO

MATEMATICAS Y SU METODOLOGIA III

PROGRAMA

OBJETIVOS GENERALES:

— Manejar conceptos geométricos a través del estudio de las transformaciones.
— Emplear como herramientas la probabilidad y la estadística, en la solución de problemas.

UNIDADES:

UNIDAD 1. GEOMETRIA DE TRANSFORMACIONES
UNIDAD 2. PROBABILIDAD
UNIDAD 3. ESTADISTICA

### UNIDAD 1 GEOMETRIA DE TRANSFORMACIONES.

OBJETIVOS PARTICULARES: Al término de la Unidad, el profesor-alumno:

1.1 Interpretará las principales características de las isometrías.
1.2 Manejará el concepto de homotecia.
1.3 Analizará las propiedades de las transformaciones topológicas.
1.4 Aplicará los conocimientos sobre isometrías y homotecias en el análisis de los programas de educación primaria.

OBJETIVOS ESPECIFICOS: Como resultado de las actividades realizadas :

1.1.1 Enunciará qué es una transformación.
1.1.2 Definirá qué es reflexión.
1.1.3 Describirá las principales características de la reflexión.
1.1.4 Definirá la rotación como producto de dos reflexiones con ejes concurrentes.
1.1.5 Identificará las principales características de la rotación.
1.1.6 Definirá la traslación a partir del producto de dos reflexiones con ejes paralelos.
1.1.7 Expresará las principales características de la traslación.
1.1.8 Definirá lo que es una isometría.
1.1.9 Ubicará conceptos geométricos a partir de los conocimientos anteriores.
1.2.1 Definirá qué es una homotecia.
1.2.2 Demostrará el concepto de semejanza a través de la homotecia.
1.2.3 Ejemplificará casos particulares de la homotecia.
1.2.4 Utilizará los conocimientos anteriores sobre homotecias en el manejo de conceptos geométricos.
1.3.1 Ejemplificará transformaciones topológicas a través de la operación con modelos físicos.
1.3.2 Determinará las características de las transformaciones topológicas.
1.4.1 Identificará los objetivos específicos de cada uno de los grados de educación primaria que se refieran a transformaciones geométricas.
1.4.2 Aplicará secuencias didácticas por lo menos para uno de los objetivos seleccionados de cada grado.

### UNIDAD 2 PROBABILIDAD.

OBJETIVOS PARTICULARES: Al término de la Unidad, el profesor-alumno:

2.1 Aplicará los principios teóricos de la probabilidad en la solución de problemas prácticos.

# UNIDAD I

## GEOMETRIA DE TRANSFORMACIONES

### OBJETIVOS PARTICULARES:

1.1. Interpretará las principales características de - las isometrías.

1.2. Manejará el concepto de homotecia.

1.3. Analizará las propiedades de las transformaciones topológicas.

1.4. Aplicará los concimientos sobre isometrías y homotecias en el análisis de los programas de educación primaria.

### OBJETIVOS ESPECIFICOS:

1.1.1. Enunciará que es una transformación.

1.1.2. Definirá que es reflexión.

1.1.3. Describirá las principales características de la reflexión.

1.1.4. Definirá la rotación como producto de dos reflexiones - con ejes concurrentes.

1.1.5. Identificará las principales características de la rotación.

1.1.6. Definirá la translación a partir del producto de dos reflexiones con ejes paralelos.

1.1.7. Expresará las principales características de la translación.

1.1.8. Definirá lo que es una isometría.

1.1.9. Ubicará conceptos geométricos a partir de los conocimientos anteriores.

1.2.1. Definirá que es una homotecia.

1.2.2. Demostrará el concepto de semejanza a través de la homotecia.

1.2.3. Ejemplificará casos particulares de la homotecia.

1.2.4. Utilizará los conocimientos anteriores sobre homotecias en el manejo de conceptos geométricos.

1.3.1. Ejemplificará transformaciones topológicas a través de la operación con modelos físicos.

1.3.2. Determinará las características de las transformaciones topológicas.

1.4.1. Identificará los objetivos específicos de cada uno de los grados de educación primaria que se refieran a transformaciones geométricas.

1.4.2. Aplicará secuencias didácticas por lo menos para uno de los objetivos seleccionados de cada grado.

# INTRODUCCION

La Geometría es el estudio de las propiedades de los sólidos, de las superficies, de las líneas y de los puntos, así como las relaciones entre estas propiedades.

Los egipcios fueron los primeros en utilizar la Geometría como una importante herramienta práctica en la solución de sus problemas, tales como la construcción de sus pirámides y medición de las tierras; de ahí que no se preocuparan por las deducciones o pruebas de fórmulas.

La Geometría griega, un tanto diferente y de más alcance que la de los egipcios, se inició supuestamente con el trabajo de Tales de Mileto, alrededor del año 600 A.C. Tales estudió por un tiempo en Egipto y más tarde introdujo la Geometría a Grecia, en donde intentó aplicar los principios de la lógica griega a sus nuevos temas aprendidos. Fue el primero en ensayar los teoremas de la Geometría.

Posteriormente Pitágoras (¿572-500 A.C.?) quien también estudió en Egipto y regresó a Crotona, ciudad griega del sur de Italia, fundó la escuela de los pitagóricos, especie de escuela y fraternidad semi-religiosa. En mucho contribuyeron los pitagóricos al enriquecimiento de las Matemáticas; fueron los primeros en probar teoremas a través de una secuencia de pasos, cada uno de los cuales seguía lógicamente ciertas suposiciones básicas. Se hizo práctica común entre los matemáticos griegos el distinguir entre axiomas y postulados.

La mayor parte de la entonces conocida Matemática griega común fue resumida y sistematizada por Euclides (300 A.C. aproximadamente). La Geometría sistematizada por Euclides, (llamada Sintética o Euclideana) se consideró en la época de los pintores del Renacimiento como la única Geometría. Estos artistas encabezados por Leonardo Da Vinci y Alberto Durero, necesitaron hacer sus pinturas lo más realistas posibles. Una razón de que los viejos pintores no parezcan realistas fue su carencia de perspectiva. Una pintura es plana mientras que el mundo es tridimensional. En un esfuerzo por adaptar el mundo tridimensional a los cuadros planos, estos artistas comenzaron el estudio de la Geometría Proyectiva.

Cuando astrónomos como Copérnico y Kepler intentaron describir el mundo físico, el método sintético de Euclides resultó ser inadecuado. La Geometría Analítica, que emplea el álgebra para describir figuras geométricas y propiedades, fue desarrollada para ayudar a llenar esta necesidad de herramientas que pudie-- ran describir adecuadamente el universo observado.

Otras ramas de la Geometría llegaron más tarde, como la Geome-- tría no Euclideana (que data de alrededor de 1800) fue desarro- llada como un intento, matemático para llenar ciertos vacios ló- gicos en el trabajo de Euclídes. La Geometría Diferencial ana- liza la razón de cambio de curvas y superficies. La Topología, una rama relativamente nueva de la Geometría, examina, entre - otras, las formas en que una figura geométrica puede deformarse y alargarse (sin romperse), así como cubrir otra.

Las ideas de otra nueva rama de la Geometría, La Geometría Trans formacional, estan bajo investigación activa en la época presen te. Una figura geométrica puede ser transformada en otra (en - diversas formas). Las transformaciones son tal vez más comun-- mente usadas en unión de la Geometría Euclidiana. La enseñanza de la Geometría Euclidiana, basada principalmente en el texto - de Euclides, "Los Elementos", cambió un poco durante el siglo XIX e incluso hasta mediados de este siglo, la Geometría fue el tema menos afectado por la "nueva matemática" de los últimos -- años. Sin embargo, una considerable atención ha empezado ahora a darse a la enseñanza de la Geometría y los especialistas en planes de estudios, dirigen gran parte de la atención hacia las transformaciones.

Quienes recomiendan la enseñanza de la Geometría Euclidiana, me diante el empleo de las ideas transformacionales, sostienen que es ventajoso porque:

a). Si el material se presenta adecuadamente, resulta accesi-- ble a los estudiantes con cierto promedio de habilidad en matemáticas. Las pruebas de los teoremas son especialmen- te difíciles para la mayor parte de los estudiantes, pero en la Geometría Transformacional, el estudiante puede ser capaz de reflejar figuras, de girarlas y cambiar su medida, hechos que no son tan difíciles como probar teoremas.

b). La idea de una transformación, sirve como lazo de unión - para los temas de Geometría presentados. La Geometría apa rece muy a menudo como un cuerpo de hechos aislados, sin embargo, con las transformaciones, el estudiante observa los teoremas como el resultado de un relativamente pequeño número de transformaciones.

c). Todos los temas normales de la Geometría Euclidiana pueden incluírse en un curso presentado desde un punto de vista transformacional.

La Geometría es el estudio del espacio sin embargo no es posi-- ble estudiar el espacio completo porque es demasiado vasto te-- nemos pues que disponer de medios para delimitar este espacio con el fin de poderlo estudiar.

Los sólidos que nos rodean definen la partición más corriente del espacio. Nos desplazamos y hacemos cambiar la posición de los objetos en el espacio. Podemos modificar estos objetos, estirándolos o doblándolos por ejemplo. Las propiedades de las transformaciones son una rama de la Geometría. Consideremos, para poner un ejemplo, nuestra sombra. Observamos así una transformación de nosotros mismos sobre el suelo. Una cierta forma corresponde a nuestra cabeza, otra a nuestros brazos, a nuestras piernas, etc. Naturalmente, resulta posible colocarse de tal forma que una pierna esconda a la otra. Esto demuestra que esta transformación depende del ángulo con el cual nos llegan los rayos del sol.

Existen transformaciones más sencillas. Desplazar un objeto por ejemplo. Esta transformación modifica la posición del objeto conservando muchas de las propiedades del mismo. También podemos girar el objeto alrededor de un punto fijo. Tal transformación se llama rotación. También es posible girar el objeto alrededor de un eje fijo. Es el caso de una rueda que gira alrededor de su eje sin rodar. Todos los puntos de la rueda cambian de posición salvo los del eje. Naturalmente, se pueden modificar las posiciones de los puntos del eje haciendo rodar la rueda sobre el suelo.

Existen transformaciones que conservan las distancias y los ángulos: si cierto segmento mide 3 cms., el segmento correspondiente de la figura transformada mide también 3 cms.; de igual forma si dos rectas de la figura inicial forman un ángulo de 60°; las rectas correspondiente de la figura transformada, forman un ángulo de 60°, etc.

Todas las transformaciones que conservan las distancias y los ángulos se llaman isometrías. Es evidente que el ejemplo antes mencionado de nosotros mismos sobre el suelo, no es una isometría. Una sombra es más pequeña a medio día que a cualquier otra hora del día; la distancia entre dos puntos de nuestro cuerpo no se conserva en nuestra sombra. De hecho esta distancia varía en función de la posición del sol. De todo ello resulta que esta transformación no es una isometría.

Existen transformaciones más generales que no conservan ni las distancias ni los ángulos. Tomemos por ejemplo un aro de alambre. Doblemos el alambre sin romperlo. Puntos del alambre que estaban próximos antes de realizar tal transformación lo siguen estando después. Una transformación de este tipo se llama continua. Resulta inoportuno dar en este momento una definición de Geometría continua, porque ello implicaría las nociones de "proximidad y límite".

Existe, sin embargo, una transformación inversa de la transformación anterior: es la transformación que hace desaparecer el doblez y vuelve al aro a su forma inicial. En esta transformación inversa los puntos próximos se transforman en puntos próximos. De este modo la transformación es bicontinua.

La Topología es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes al aplicarles transformaciones bicontinuas. Tales -- transformaciones se llaman transformaciones topológicas. Consideremos una esfera hueca, una pelota, por ejemplo; hagamos un - hueco en esta pelota sin hacer agujero. Esta transformación es una transformación topológica. ¿Cuáles son las propiedades invariantes en esta transformación? Se conserva el interior y el exterior. En efecto, es imposible pasar del interior de la pelota al exterior sin atravesar su superficie. Esta propiedad se conserva en la anterior transformación. De este modo, interior y - exterior son propiedades topológicas. Por el contrario, si hacemos un orificio en la pelota ya no se conserva el interior; de hecho ya no existe interior ni exterior. Pero hacer un orificio en una pelota, no es una transformación continua. Puntos que - antes estaban próximos ya no lo estarán y ello, en particular para dos puntos a uno y otro lado del orificio. "Hacer orificios" no es una transformación continua, y por tanto, tampoco lo es topológica.

Cada vez más se considera que la Geometría en general es el estudio de las propiedades invariantes de las figuras al surgir - "cualquier tipo de transformación".

La Geometría topológica está dedicada al estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes ante transformaciones bicontinuas, como los estiramientos, las torciones y todas las deformaciones que no lleguen a razgar o romper la figura.

La Geometría PROYECTIVA estudia las propiedades de las figuras que permanecen invariantes ante proyecciones puntuales y comprende en particular el estudio de la perspectiva.

Un caso particular pero importante, lo constituye el estudio de las "semejanzas"; en efecto, la proyección, a partir de una fuente puntual, de una figura, sobre dos planos paralelos, conduce a una semejanza.

La Geometría Euclidiana estudia las propiedades de las figuras - que permanecen invariantes en un desplazamiento de tales figuras en el espacio, de modo que se conservan las posiciones relativas de los puntos, líneas y superficies de las figuras. (Isometrías).

La Geometría Euclidiana comprende:

a). Estudio de las simetrías (reflexiones).

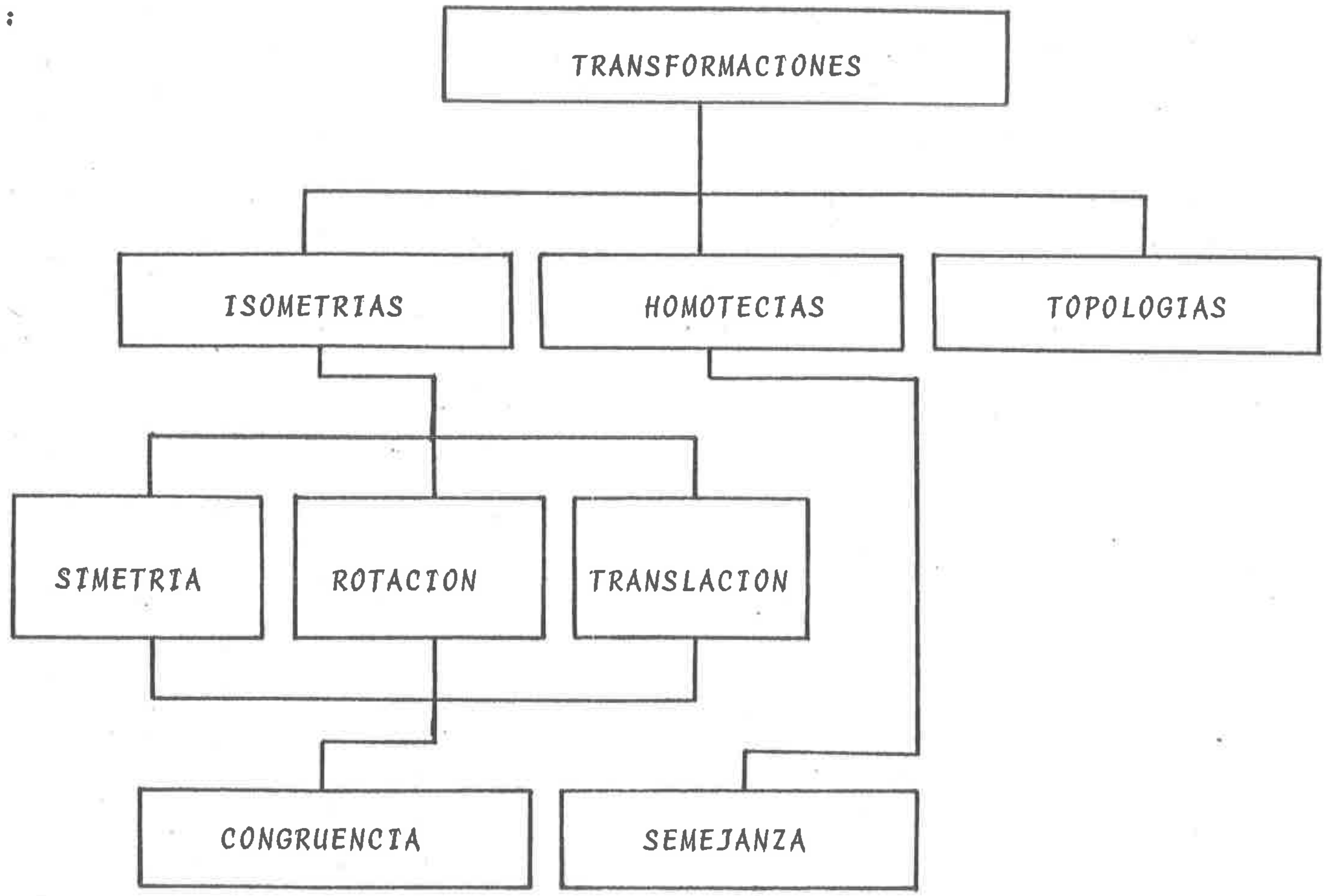
b). Estudio de las rotaciones.

c). Estudio de las translaciones.

UNIDAD I

GEOMETRIA DE TRANSFORMACIONES

CONTENIDOS:



CONCEPTO GENERAL DE TRANSFORMACION. - Es la - aplicación de un espacio sobre otro, o sea, la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos. Consideremos tres tipos de transformaciones:

1.1.1. TRANSFORMACIONES

a). ISOMETRIAS.
b). HOMOTECIAS.
c). TOPOLOGIAS.

¿QUE ES UNA TRANSFORMACION ISOMETRICA?
Se llama "transformación punto por punto" (T) una operación geométrica que hace corresponder a un punto M, arbitrariamente elegido en un plano en un punto M', llamado homólogo o transformado de M.

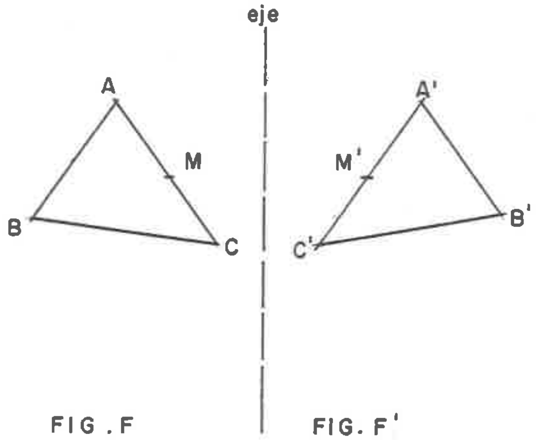



FIGURA No. 1

Todos los puntos de la figura (F') transformados de la figura (F), se llaman puntos homólogos o transformados de (F) y dan como resultado una figura homóloga.
Las transformaciones ISOMETRICAS tienen la característica común de conservar la medida de los segmentos y la medida de los ángulos. Esto significa, que una figura bajo estas transformaciones tiene como imagen una figura congruente.

ISOMETRIAS

Son transformaciones Isométricas:
1. Reflexión (Simetría axial)
2. Translación (Deslizamiento)
3. Rotación (Giro)

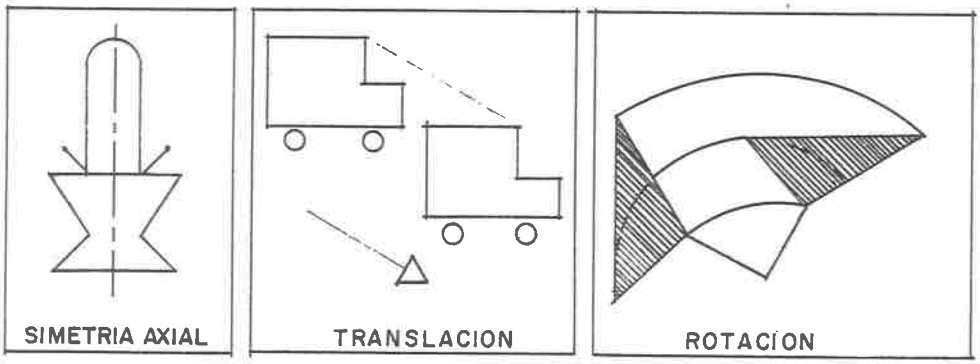



FIGURA No. 2

## 1.1.2. REFLEXION

El punto M de la figura (F) puede transformarse en el punto M' de la figura (F') a través de una SIMETRIA. La simetría puede ser con relación a un punto o simetría con relación a una recta (REFLEXION).

Simetría con relación a un punto:

FIGURA No. 3


Dos puntos A y A' se llaman <u>simétricos</u> con respecto a otro punto O, si éste es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$

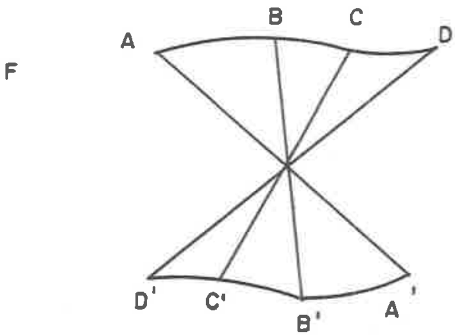



FIGURA No 4

Para determinar el punto A' simétrico de A con relación a O se prolonga el segmento AO a partir de O una longitud igual. El extremo del segmento obtenido es el punto buscado (A').

Construyendo los simétricos de los diversos puntos de la figura (F) con respecto a 0 (B, C, D], se forma una nueva figura (F') que se llama simétrica de (F) con respecto a 0.

SIMETRIA CENTRAL

Inversamente la figura (F) es simétrica de la figura (F'). El punto 0 se llama CENTRO DE SIMETRIA. A la simetría con relación a un punto se le llama también simetría central.

Simetría con relación a una recta. Enfocaremos nuestra atención exclusivamente al estudio de SIMETRIA AXIAL también conocida como REFLEXION.

REFLEXION O SIMETRIA AXIAL

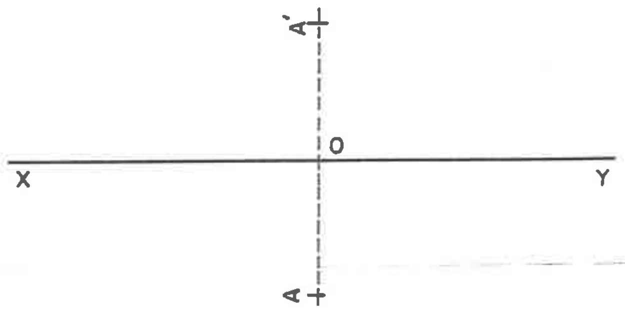



FIGURA No. 5

En esta figura la recta X Y es perpendicular a A A' en el punto medio de esta (0). El punto A se llama símétrico de A' e inversamente el punto A' es símétrico de A con respecto a la recta X Y. Se dice que dos puntos A y A' son simétricos con respecto a una recta cuando ésta es perpendicular al segmento A A' que los une y pasa por el punto medio de este segmento. Esta recta se llama también MEDIATRIZ del segmento A A', o también EJE DE SIMETRIA. Todo punto del eje de simetría es simétrico de sí mismo.

EJE DE SIMETRIA

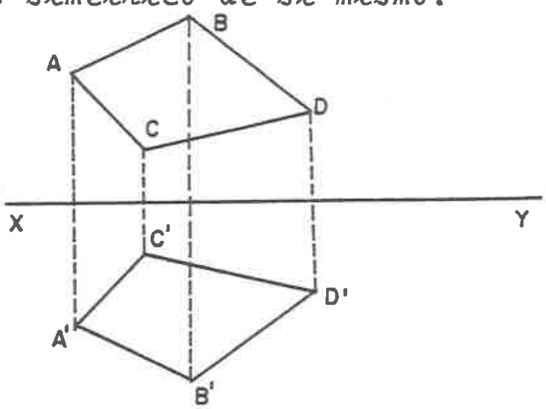



FIGURA No 6

La figura A'B'C'D' está formada por el conjunto de los puntos simétricos de la figura ABCD con respecto al eje X Y. Se dice que las dos figuras son simétricas con respecto al eje X Y.

Doblando el plano por X Y, la figura ABCD vendrá coincidiendo con A'B'C'D'. Dos figuras simétricas son iguales.

Notémos que las dos figuras no pueden coincidir más que por un giro alrededor del eje. Se dice que ABCD y A'B'C'D' son inversamente iguales o que son figuras inversas.

REFLEXION. Es una transformación del plano en sí mismo, en la cual todos los puntos del plano se transforman, incluyendo los puntos del eje, donde cada punto original coincide con su imagen.

1.1.3. CARACTERISTICAS DE LA REFLEXION

Las principales características de la Reflexión son:

1. Hay exactamente una recta de puntos fijos - llamada EJE DE REFLEXION o EJE DE SIMETRIA.
2. El eje bisecta y es perpendicular al segmento que une un punto P con su imagen P'.

En la transformación de todos los puntos del plano mediante una reflexión, quedan sin modificar ciertas relaciones. A estas relaciones se les llama INVARIANTES.

INVARIANTES DE LA REFLEXION

Las INVARIANTES en una REFLEXION son:

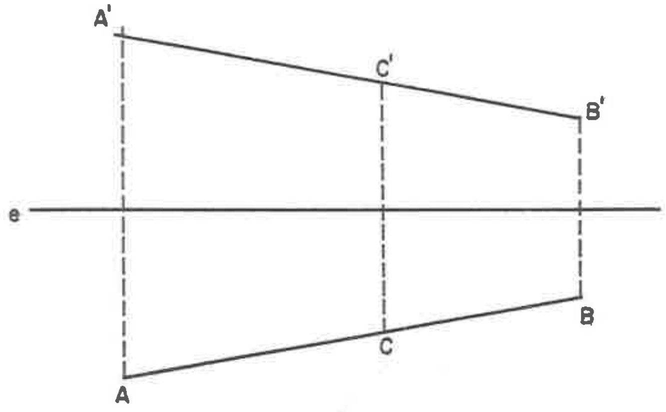



FIGURA No. 7

*Considerando (e) como eje de relfexión.*

a) *Longitud de segmentos* $(\overline{AB} = \overline{A'B'})$
b) *Colinealidad de puntos* $(C \in \overline{A\ B}$ *de la misma manera* $C' \in' \overline{A'B'})$. *Todos los puntos contenidos en un segmento son colineales.*
c) *Relación esta entre dos puntos.* (*Si C esta entre los puntos AB entonces C' esta entre los puntos A'B'.*
d) *Razón entre segmentos.* (*Si* $\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = 1/2$, *entonces*

$$\frac{\overline{C'B'}}{\overline{A'B'}} = 1/2)$$

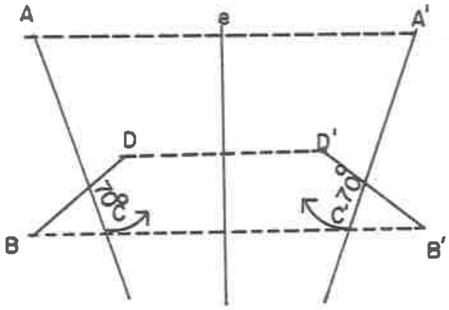



FIGURA No. 8

e) *Concurrencia de rectas.- Si las rectas A y B concurren o cortan en un punto, las rec-- tas A'B' también serán concurrentes.*
f) *Medida de los ángulos.* $\angle C = \angle C'$
g) *Paralelismo de rectas. - Si A y B son paralelas entonces A' y B' también serán paralelas.*

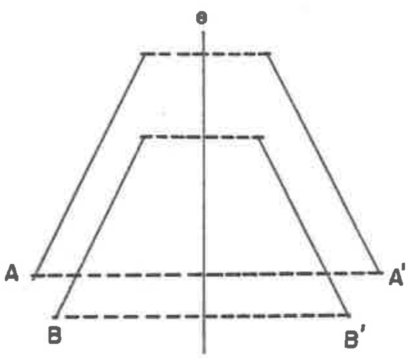



FIGURA No. 9

Observa la siguiente figura

1.1.4.

ROTACION COMO PRODUCTO DE DOS REFLEXIONES CON EJES CONCURRENTES

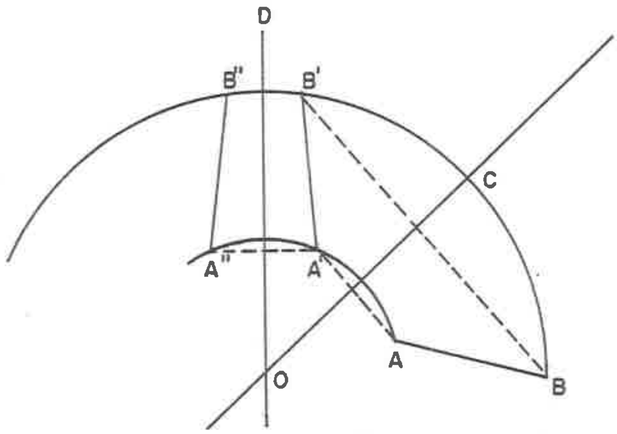



FIGURA No, 10

Veámos que el segmento A'B' es una transforma-ción por reflexión del segmento AB; así como el segmento A"B" es también la transformación por reflexión del segmento A'B'. Se comprueba que las transformaciones anteriores cumplen con las características e invariantes de toda reflexión (Véase reflexión anterior).

Al hecho de efectuar dos reflexiones sucesivas se le denomina producto de dos reflexiones. En el caso particular del producto anterior observe que los dos ejes de reflexión son concurrentes.

Este tipo de transformación recibe el nombre de ROTACION en el sentido de C hacia D con centro en O.

1.1.5.

CARACTERISTICAS DE LA ROTACION

Una rotación es una transformación del plano en sí mismo con las siguientes características:

1. Existe un centro de rotación, amplitud de giro y sentido del mismo.
2. Cada punto B y su imagen B' son puntos de una circunferencia cuyo centro es O.
3. Los radios BO y B'O determinan siempre el mismo ángulo con respecto al eje.

Analizando la primera característica:

Centro de rotación "O".
Sentido de rotación: derecha a izquierda.

El giro del segmento AB con respecto al eje C tiene la misma amplitud que el giro del segmento A'B' con respecto al mismo eje.

Analizando la segunda característica:

El radio OB hará coincidir en una circunferencia todos los puntos homólogos de B así como el radio OA hará coincidir en una circunferencia todos los puntos homólogos de A.

Analizando la tercera característica:

El ángulo BOC es igual al ángulo B'OC.

En la transformación de todos los puntos del plano, mediante una rotación, quedan sin modificar ciertas relaciones. A estas relaciones se les llaman INVARIANTES y son:

INVARIANTES DE UNA ROTACION

1. La longitud de segmentos.
2. La colinealidad de puntos.
3. El paralelismo de rectas.
4. La concurrencia de rectas.
5. La relación "estar entre" dos puntos.
6. Las razones entre segmentos.
7. La medida de los ángulos.
8. El sentido de los ángulos.

Si la rotación ES EL PRODUCTO DE UNA DOBLE REFLEXION, por consecuencia las invariantes de una rotación serán las mismas que las de la reflexión, agregando solamente EL SENTIDO DE LOS ANGULOS, que se describen al reflejar la figura doblemente.

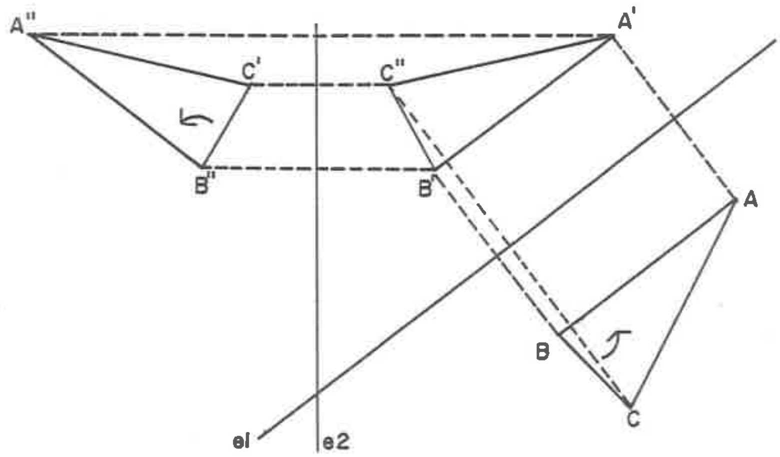



FIGURA No. 11

Observemos que en la figura anterior el triángulo ABC al transformarse en A"B"C" como producto de una doble reflexión con ejes concurrentes, no perdió el sentido de sus ángulos.

Hasta aquí hemos definido a las rotaciones como la composición de dos reflexiones con respecto a ejes de reflexión no paralelas (concurrentes). Podríamos definir una rotación especificando su centro, el ángulo de rotación y la dirección de la rotación como se muestra en el siguiente ejemplo:

Encuentre la imagen de un punto P bajo la transformación de la rotación teniendo por centro a un punto Q y una magnitud de 135° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Esto es convencional. Solución:

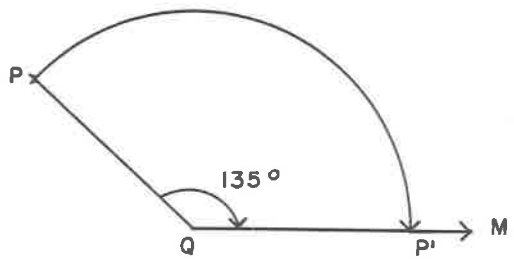



FIGURA No. 12

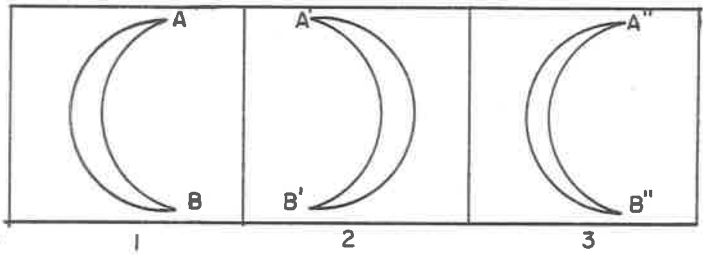
Para encontrar P', la imagen de P, primero trazamos el $\angle$ PQM teniendo por medida 135°; luego trazamos un arco de una circunferencia con centro en Q y radio PQ; el punto en donde este arco corta al lado QM es P'.

Magnitud de rotación es la medida del ángulo que forman las rectas que pasan por el punto prototipo, el centro de rotación y la imagen de ese punto.

El sentido de una rotación puede ser: sentido positivo, contrario a las manecillas del reloj; sentido negativo, como las manecillas del reloj. Esto es convencional.

De igual manera podríamos girar la figura original de tal forma que su imagen la cubriera; este sería el caso de una rotación de magnitud de 360° llamada rotación idéntica. Así mismo una rotación de 0° dejaría invariantes todos los puntos de la figura y por tanto también sería una ROTACION IDENTICA.

### 1.1.6. TRANSLACION COMO PRODUCTO DE DOS REFLEXIONES CON EJES PARALELOS




FIGURAS No. 13 - 14 - 15

| 1 | 2 |
|---|---|
| A | A' |
| B | B' |

SIMETRIA 1

| 2 | 3 |
|---|---|
| A' | A'' |
| B' | B'' |

SIMETRIA 2

| 1 | 3 |
|---|---|
| A | A'' |
| B | B'' |

TRASLACION

Al aplicar la simetría $S_1$ a la figura 1, obtenemos la figura 2; y al aplicar la simetría $S_2$ a la figura 2, obtenemos la figura 3.

La transformación ISOMETRICA que resulta del producto de dos reflexiones con ejes paralelos recibe el nombre de TRANSLACION.

Dado el triángulo ABC y el eje reflexión $E_1$ localizamos A'B'C'.

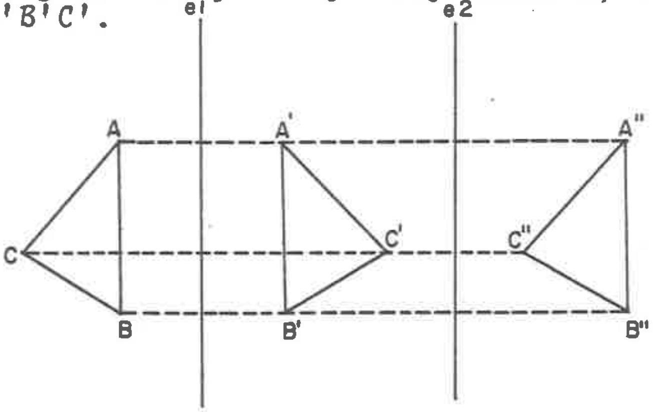



FIGURA No. 16

Una vez localizados los puntos A'B'C' a través de una reflexión $E_1$, localizamos los puntos - A"B"C" por otra reflexión con eje $E_2$; y de esta manera el triángulo ABC quedó transformado por medio de una TRANSLACION con ejes paralelos en la figura A"B"C".

**TRANSLACION DEFINIDA POR UNA DIRECTRIZ**

Veamos ahora el caso de una translación definida por una DIRECTRIZ, que define la dirección, el sentido y la magnitud de una translación.

La directriz esta representada por un vector - que tiene dirección, sentido y módulo (longitud del vector), ejemplo: Transladar el siguiente polígono respecto a la directriz indicada:

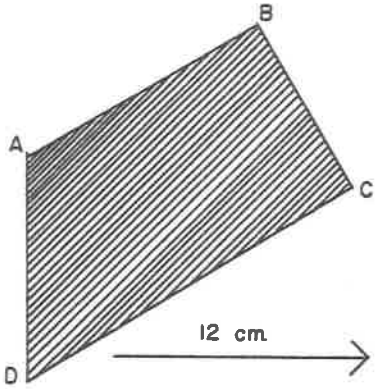



FIGURA No. 17

1er. paso: se transladan los vértices del polígono (trazando segmentos paralelos a la directriz) con la magnitud indicada.

2o. paso: localizamos los puntos homólogos y a los lados correspondientes los - llamaremos homólogos.

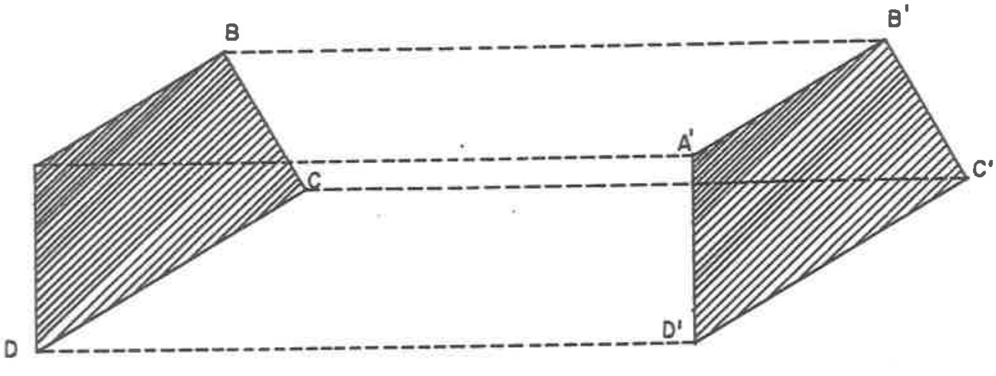



FIGURA No. 18

Lados homólogos:

$\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

$\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$

$\overline{CD}$ y $\overline{C'D'}$

$\overline{DA}$ y $\overline{D'A'}$

Una translación es una transformación del plano en sí mismo con las siguientes características:

1.1.7. CARACTERISTICAS DE LA TRANSLACION

1. No hay punto fijo (excepto en el caso de la transformación idéntica)
2. Los segmentos que unen un punto con su imagen, son todos paralelos y de sentido y longitud iguales.

Las invariantes de una translación son:

1. La longitud de segmentos.
2. La colinealidad de puntos.
3. El paralelismo de rectas.
4. La concurrencia de rectas.
5. La relación estar entre dos puntos.
6. Las razones entre segmentos.
7. La medida de los ángulos.
8. El sentido de los ángulos.
9. Dirección de las rectas.

INVARIANTES DE LA TRANSLACION

Observa que en el segmento AB de la figura anterior es paralela al segmento A"B"; que el segmento AC es paralelo al segmento A"C" y que CD es paralelo a C"D".

Esta invariable (dirección de rectas) la encontramos solamente en las transformaciones ISOMETRICAS llamadas TRANSLACIONES y no así en las reflexiones ni en las rotaciones. Una translación de magnitud cero deja a todo punto del plano sin cambio y por tanto se llama TRANSLACION IDENTICA. Una translación de magnitud K seguida por una translación semejante de magnitud K, pero en dirección opuesta, regresa un punto a su posición original y de esta manera estas dos translaciones se llaman inversas una de la otra.

TRANSLACION DE IDENTIDAD

TRANSLACION INVERSA

Isometría es una transformación del plano en sí mismo, en donde se conserva la medida de los segmentos y la medida de los ángulos.

1.1.8 ISOMETRIA

Esto significa, que una figura bajo estas trans formaciones tiene como imagen una figura congru ente.

Consideramos aquí tres tipos de Isometrías:

REFLEXION

ROTACION

TRANSLACION

*Veámos otro tipo de transformación:* 1.2.1.

HOMOTECIA

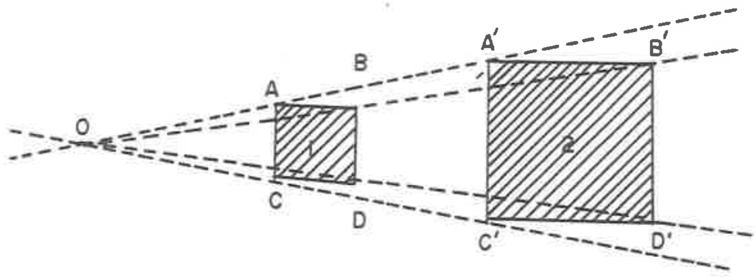



FIGURA No. 19

*La imagen de A es A'*

*La imagen de B es B'*

*Observa que esta transformación es diferente a cualquiera de las transformaciones isométricas vistas anteriormente. La imagen de la figura 1 es la figura 2.*

*La figura ABCD no es congruente a la figura A'B' C'D' porque no tiene las mismas medidas en cada uno de sus lados. Se aprecia en la función geo métrica (transformación) representada, que la figura 1 no tiene como imagen una figura congru ente.*

*Esta transformación recibe el nombre de HOMOTE- CIA y se obtiene a partir de un punto escogido arbitrariamente, llamado CENTRO DE HOMOTECIA (O).*

*Por ejemplo: Dada la figura M obtengamos la fi- gura M'.*

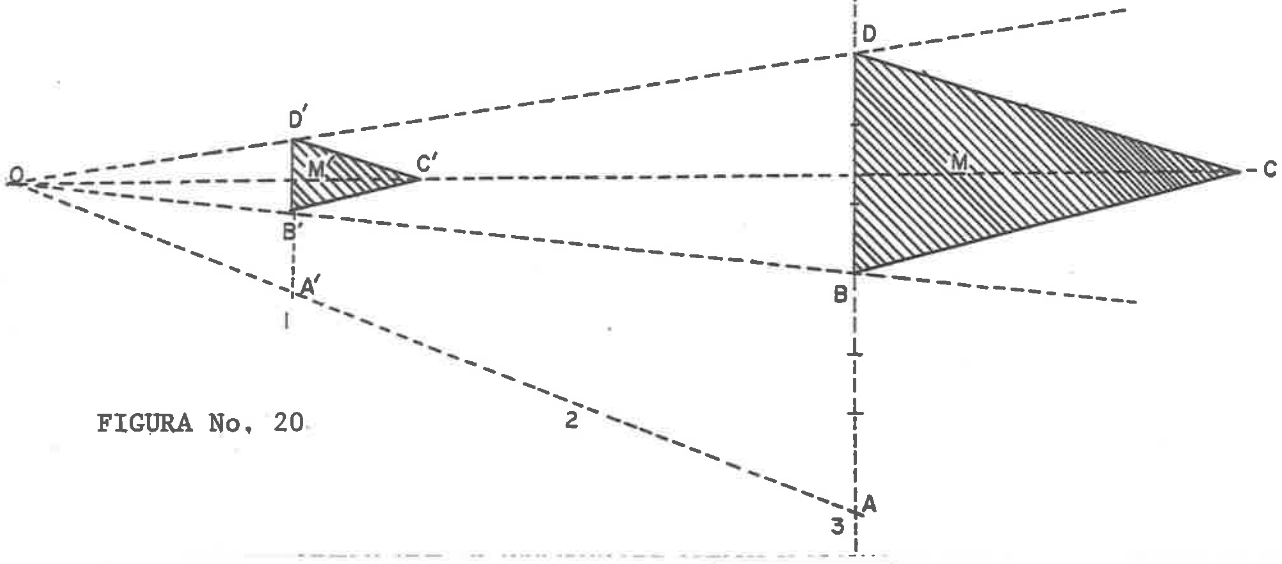



FIGURA No. 20

La escala utilizada en la figura M a M' es 3:1, es decir que la imagen M' tiene sus dimensiones 1/3 más pequeña que las de M, esto es:3 cms. de M representan 1 cm. de M'. Veámos las medidas:

| M<br>Medida del segmento | M'<br>Medida del segmento |
|---|---|
| AD = 6 | A'D' = 2 |
| BC = 4.5 | B'C' = 1.5 |
| DC = 4.5 | D'C' = 1.5 |
| DB = 3 | D'B' = 1 |
| BA = 3 | B'A' = 1 |

Si dividimos la medida de cada imagen de la transformación entre su elemento correspondiente:

$$\frac{A'D'}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{1.5}{4.5} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{D'C'}{DB} = \frac{1.5}{4.5} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{D'B'}{DB} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{B'A'}{BA} = \frac{1}{3}$$

Se obtiene un cociente constante: 1/3

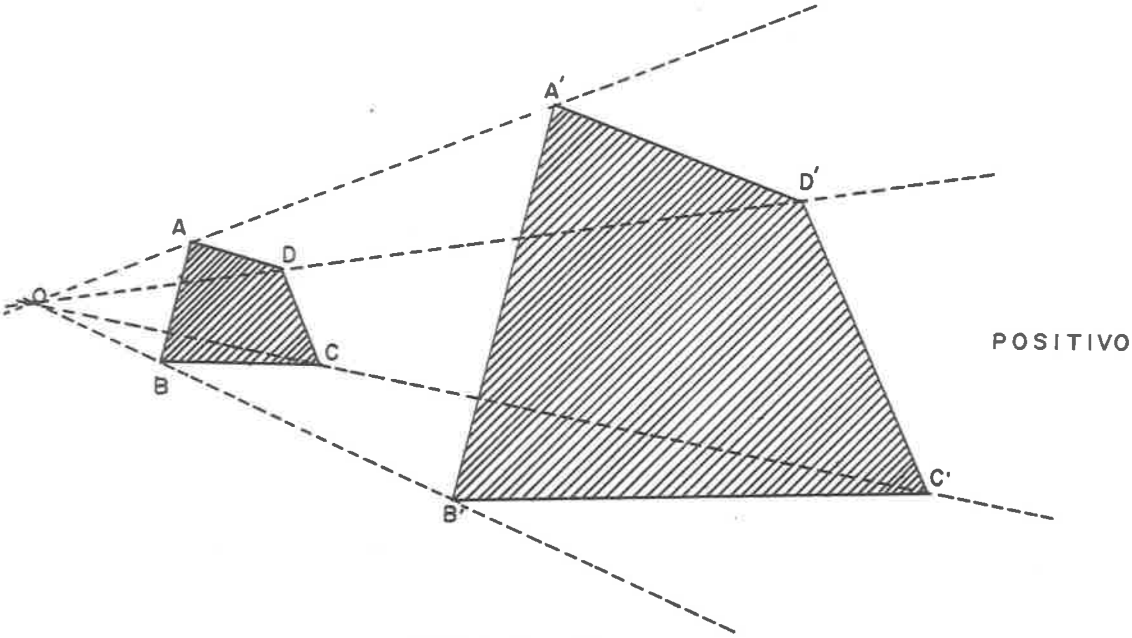



FIGURA No. 21

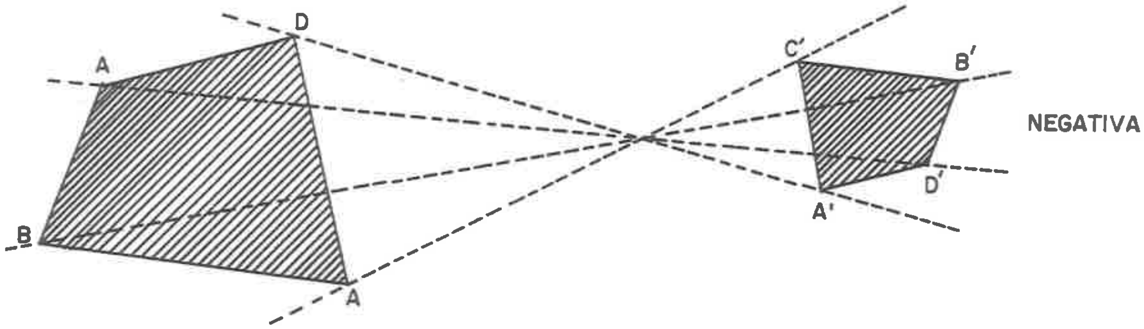



FIGURA No. 22

*Nótese que en la homotecia negativa, la imagen de la figura transformada queda invertida.*

1.2.2. DEMOSTRACION DE SEMEJANZA A TRAVES DE LA HOMOTECIA

Se pueden efectuar dos o más transformaciones y el resultado es el producto de dichas transformaciones. Observa el producto de una composición de isometrías.

La HOMOTECIA se define por medio de un punto en el plano y una constante que no sea cero; el punto y la constante reciben el nombre de: PUNTO DE HOMOTECIA Y CONSTANTE DE HOMOTECIA.

Hasta el momento hemos visto figuras transformadas por homotecia y cómo sus imágenes no son congruentes, pero ¿cómo realizar una transformación homotética?

Veámos la figura anterior:

Tenemos A). Un punto 0 (centro de homotecia) escogido arbitrariamente.
B). Una constante de homotecia =1/3
C). La figura M que será la transformada.

El punto A' estará localizado en la 1/3 parte del segmento 0A; de la misma manera el punto C' estará localizado a la 1/3 parte del segmento 0C; y así sucesivamente hasta encontrar la imagen de todos los puntos de M.

PROPIEDADES DE LA HOMOTECIA

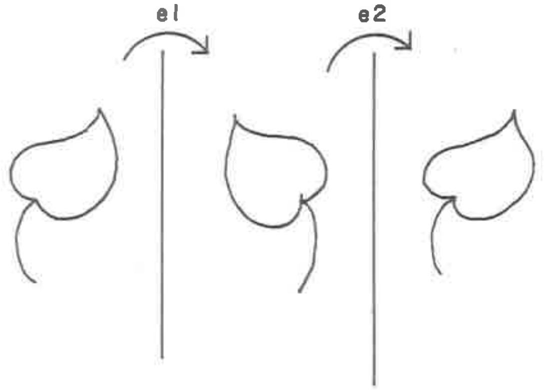
Las propiedades de la homotecia son:

1. La imagen de una figura transformada por homotecia es una figura homóloga.
2. Los ángulos de las figuras transformadas por homotecia, son congruentes; esto es, tienen la misma medida.
3. En una homotecia, los segmentos homólogos son paralelos.
4. Las dimensiones de dos figuras homotéticas son directamente proporcionales y la razón entre las longitudes de sus lados es igual a la constante de homotecia.

1.2.3 CASOS PARTICULARES DE LA HOMOTECIA

Hay dos casos de transformacion homotética:

A). El centro de homotecia es exterior al segmento que une a dos puntos homólogos, considerándose el valor de la razón como "positivo".
B). El centro de homotecia es interior al segmento que une dos puntos homólogos, considerándose el valor de la razón como "negativo".



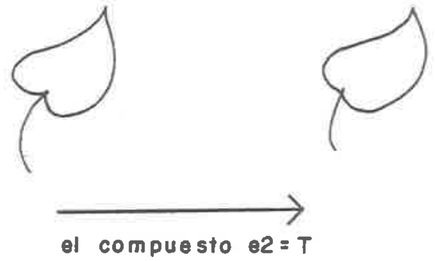




FIGURA No. 23

FIGURA No, 24

*El producto de dos simetrías axiales con ejes paralelos es una translación.*

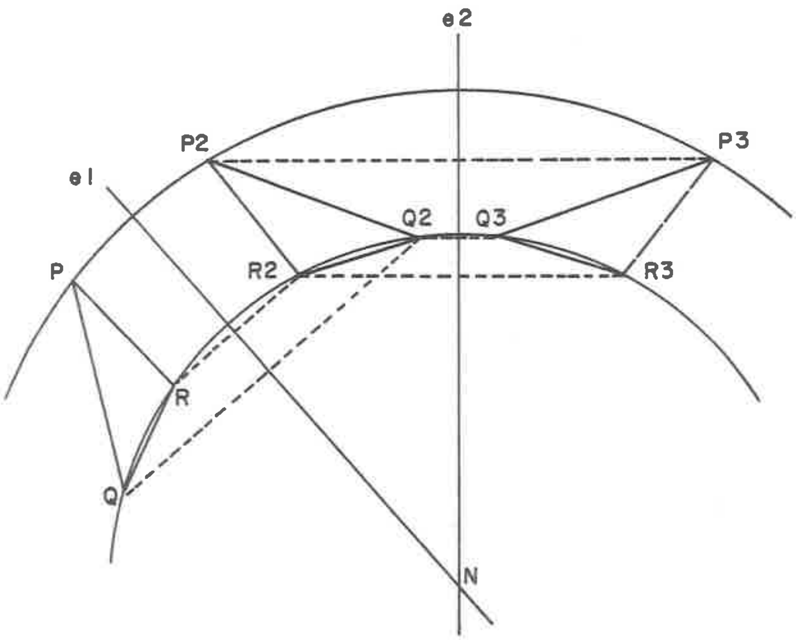



FIGURA No, 25

*La composición de dos simetrías axiales con ejes no paralelos es una rotación.*

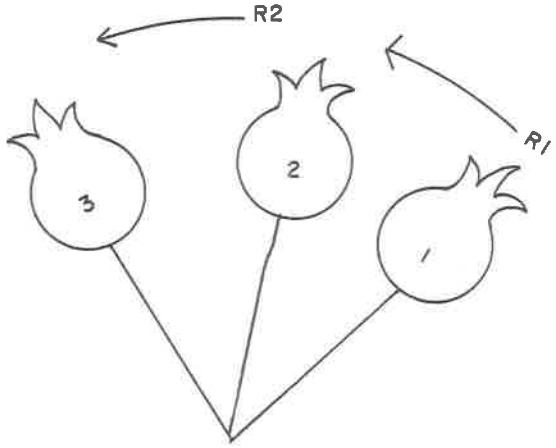



FIGURA No. 26

*La composición de dos rotaciones es otra rota-ción.*

*También podemos efectuar la composición de una ISOMETRIA (simetría, rotación, translación) con una HOMOTECIA. Ejemplo:*

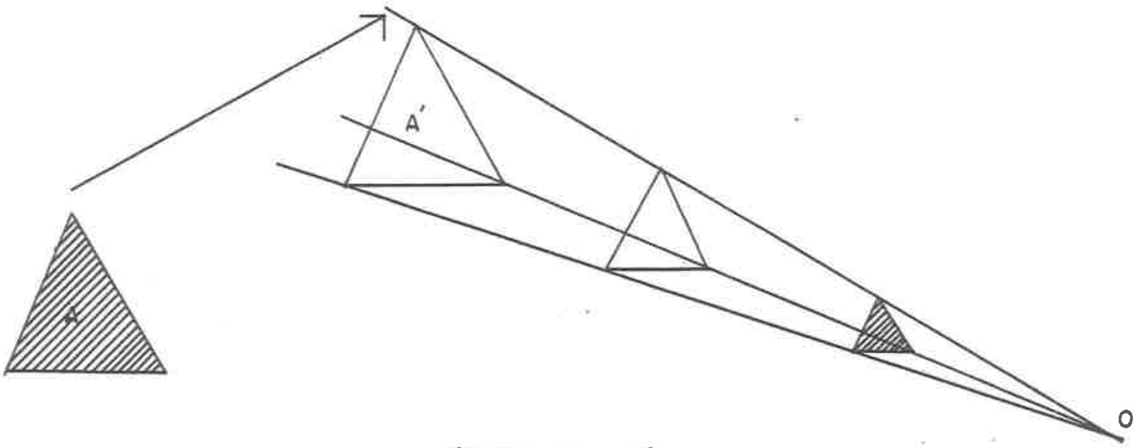



FIGURA No. 27

*Observa que A' es imagen de A por translación y que A" es imagen de A' por homotecia; pero A" es la imagen de A por una composición de translación (isometría) con la homotecia (0, 1/3); se dice que A" es imagen de A por SEMEJANZA; es decir, A y A" son figuras SEMEJANTES.*

*Otro ejemplo con una simetría axial aplicada a la figura M para obtener M' y después una homotecia (0,2):*

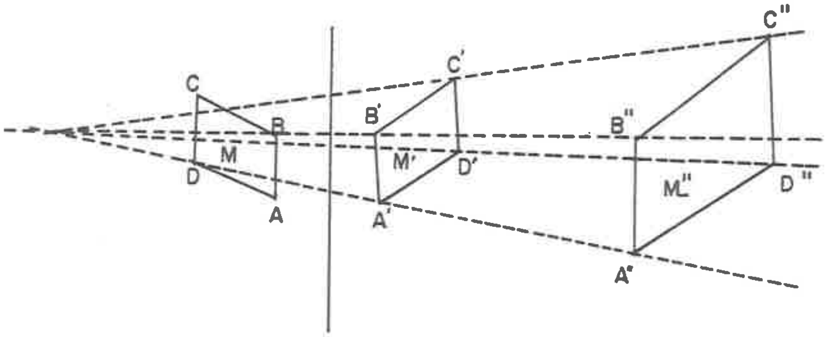



FIGURA No. 28

*M' es la imagen de M por reflexión; M" es la imagen de M' por homotecia; M" es la imagen de M por SEMEJANZA.*

SEMEJANZA

LA COMPOSICION DE UNA ISOMETRIA (*reflexión, rotación o translación*) CON UNA HOMOTECIA, RECIBE EL NOMBRE DE SEMEJANZA.

*Las figuras semejantes tienen la misma forma.*

*El símbolo que indica que dos figuras son semejantes es:* ∼ *Observa las siguientes figuras:*

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS SEMEJANTES

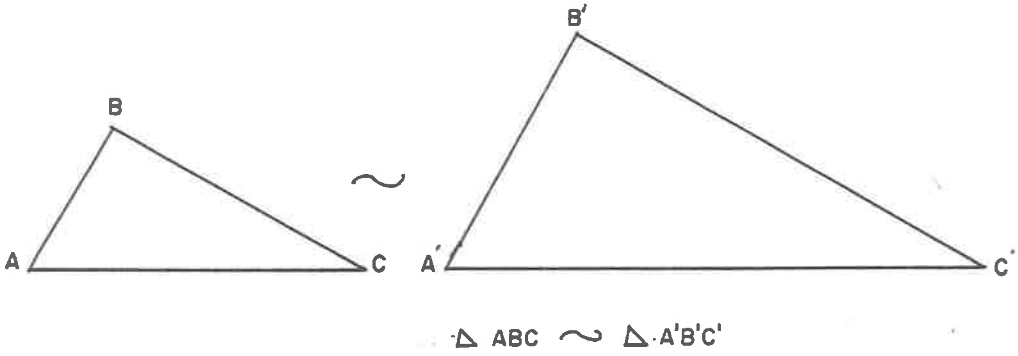



FIGURA No. 29

*Si mides sus ángulos comprobarás que son congru entes (miden lo mismo)*

$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B'$$

$$\angle C = \angle C'$$

*Si medimos dos lados de los triángulos semejantes encontraremos que todos los lados del triángulo* A'B'C' *miden el doble de los lados homólogos del triángulo* ABC, *es decir:*

$A'B' = 2AB$; $B'C' = 2BC$; $C'A' = 2CA$

*o lo que es lo mismo*

$\frac{A'B'}{AB} = 2$; $\frac{B'C'}{BC} = 2$; $\frac{C'A'}{CA} = 2$ *o bien:*

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$; $\frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$

*Esto nos hace pensar que la* RAZON *que existe entre los lados homólogos de dos polígonos semejantes es constante.*

DOS FIGURAS SON SEMEJANTES CUANDO SUS ANGULOS SON CONGRUENTES RESPECTIVAMENTE Y LAS MEDIDAS DE LOS LADOS CORRESPONDIENTES SON PROPORCIONALES.

*También dos figuras son semejantes si una de ellas es un modelo a escala de la otra.*

*A la razón que existe entre los lados homólogos de los polígonos semejantes le llamaremos:* CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD *o* ESCALA.

1.3.1. TRANSFORMACIONES TOPOLOGICAS

A mediados del siglo X1X comenzó un desarrollo enteramente nuevo de la Geometría, que pronto - se convirtió en una de las fuerzas más potentes de la Matemática moderna. La nueva disciplina, llamada ANALISIS-SITUS o TOPOLOGIA, estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aún si esas figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas.

Etimológicamente TOPOLOGIA deriva del griego y significa "tratado de lugar". Topología es la parte de la Matemática que estudia la noción de proximidad. El concepto de proximidad esta íntimamente ligado al de distancia y éste al de entorno. Los puntos A y B se consideran más - próximos entre sí que los puntos A y C, si hay un entorno de A que contiene a B y no contiene a C.

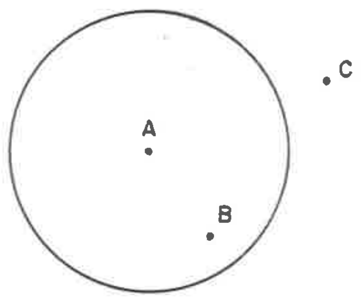



FIGURA No. 30

Uno de los grandes geómetras de esa época fue A. F. MOEBIUS (1790 - 1868) hombre cuya falta de seguridad en sí mismo le lleva al puesto de insignificante astronómo de un observatorio de importancia secundaria de Alemania. A la edad de 68 años sometió a la Academia de París una memoria sobre superficies de este nuevo tipo de geometría. Al igual que otras importantes contribuciones anteriores, su trabajo permaneció sepultado varios años en las archivos de la Academia, hasta que al fin lo publicó su - autor. Independiente a MOEBIUS el astrónomo J. B. LISTING (1808 - 1822?), de Gotinga hizo descubrimientos análogos y a sugerencia de -- GAUSS, publicó en 1847 un pequeño libro, - - - VORSTUDIEN ZUR TOPOLOGIE.

Sin embargo, el PADRE DE LA TOPOLOGIA, tal como se entiende actualmente, fue el gran matemático alemán RIEMANN (1826 - 1866). Cuando

Berhard Riemann, llegó a Gotinga como estudiante, encontró la atmósfera matemática de esa ciudad universitaria llena de ancioso interés por estas nuevas y extrañas ideas geométricas. Pronto se dió cuenta de que allí estaba la clave para comprender las propiedades más profundas de las funciones analíticas de una variable completa. Nada quizá, ha dado más ímpetu al posterior desarrollo de la Topología que la formidable estructura de la Teoría de Funciones de Riemann, en la cual los conceptos topològicos son abundantemente fundamentales.

La Geometría es la exploración del espacio. Un niño desde su nacimiento explora el espacio. Al principio lo observa, después extiende sus miembros en él, luego se desplaza. Le hace falta un tiempo bastante largo para desarrollar las ideas de perspectiva, de distancia, de profundidad, para adquirir nociones tales como "debate", "fuera", "delante y detrás", "antes y después", etc. Cuando el niño llega a la escuela, algunos de estos procesos de desarrollo ya están incluidos, sólo falta animarlos y ampliarlos, multiplicando las experiencias ofrecidas a los niños. Pero, previamente el maestro tendrá que esforzarse en descubrir a qué nivel ha llegado cada niño, dotado individualmente y qué conceptos ha adquirido ya. Recordemos que los conceptos no se enseñan, sino que han de formarse a través de la presentación de situaciones y experiencias. Es en los primeros años de la vida escolar del niño, donde adquiere mayor relevancia la formación de conceptos y no la mayor adquisición de éstos.

Las primeras nociones de Geometría, no tienen nada que ver con la medida. A un niño le preocupa muy poco la distancia exacta entre los objetos, su desplazamiento o el ángulo bajo el cual se ven las cosas. Todo esto lo observan, en cierto sentido, implícitamente. Lo que le interesa principalmente es procurarse las cosas, desplazarse en el espacio para hacer lo que desea. Lo que cuenta es que si hay ciertas cosas, por ejemplo caramelos en una caja, hay que abrir esta caja para poder cogerlos, es, por tanto, un descubrimiento importante para él, saber que hay cajas abiertas y otras con tapadera. Las puertas están unas veces abiertas, otras veces cerradas y él se da cuenta que no puede entrar ni salir de una habitación si no es por la puerta o por la ventana abierta. Por esto los --

conceptos de "agujero" o de "atravesar" resul-- tan importantes.

Entre los conceptos de orden está el del "reverso" de las cosas. Desde pequeño se interesa -- por averiguar lo que hay al otro lado de la -- puerta abierta, y, más tarde, cuando ha terminado de dibujar en una cara del papel, descubre que puede darle la vuelta y dibujar también en la otra cara. De la misma manera se interesa - por lo que hay "dentro" y "fuera", por los "agujeros", por lo de "delante", "detrás", etc.

Es por estas nociones, llamadas en Geometría Topológicas por donde es preciso empezar.

### 1.3.2. CARACTERISTICAS DE LAS TRANSFORMACIONES TOPOLOGICAS

Topología es el estudio de las propiedades del espacio que no están afectadas por una deformación contínua. En consecuencia, si se quiere - permanecer en el campo de la Topología se tiene el derecho de curvar o distender las fronteras, o de cambiarlas de forma a voluntad, pero no - se pueden razgar ni romper, ni hacer un agujero en su superficie.

Consideraremos, por ejemplo, un globo inflado: se le puede inflar más o dejar que se escape - parte del aire. Al hacer esto, se permanece - dentro de los límites de la Topología. Mien--- tras se mantenga el agujero cerrado aún cuando se vacíe el volúmen de aire contenido, estare-- mos frente a una transformación topológica; no así en el momento en que las fronteras se rom-- pan (al soltar la cuerda que ata el globo o al hacerle un agujero).

Es pues, desde el punto de vista de la Topolo-- gía, idea muy importante, la noción de "frontera". Cuando un niño ha jugado en un jardín, -- rodeado por una valla, sabe que no puede salir de él sin pasar por encima de la valla. Es una experiencia bastante diferente de la que adquiere en una habitación provista de una puerta. Se puede saltar por encima de la valla sin si-- quiera abrir el portillo, y encontrarse fuera, mientras que es imposible hacerlo en una habitación, pues no se puede pasar por encima de las paredes ni la puerta. La cerca del jardín es - una frontera que encierra un espacio de dos dimensiones, es decir, una superficie, mientras - que las paredes, la puerta y la ventana son las fronteras de un espacio de tres dimensiones.

Las fronteras de un espacio de tres dimensiones tienen dos dimensiones: los tabiques y los suelos son superficies de dos dimensiones, y para delimitar un espacio de tres dimensiones (volúmen), hacen falta espacios de dos dimensiones (superficies). Pero para limitar un espacio de dos dimensiones, como el jardín, es suficiente un espacio de una sola dimensión (por ejemplo puede ser una línea más o menos curva, trazada alrededor para indicar dónde termina el jardín y dónde empiezan los jardínes (vecinos).

Aunque no haya cerca, existe una frontera y el niño sabe bien si se le dice que está prohibido franquearla para ir a la casa del vecino - sin pedir permiso. Dentro del jardín, puede - andar hacia delante, hacia atrás, de lado, diagonalmente y en todas direcciones; pero no puede de flotar en el aire. Una vez que estuviera en el aire, ya no estaría en el jardín.

Dentro de la habitación, por otra parte, aun-- que pudiera elevarse flotando en el aire hasta el techo, seguiría estando en la habitación. Para salir de la habitación tendría que pasar a través de las paredes, del techo, o de uno de los agujeros constituídos por la puerta o - la ventana. Hay una gran diferencia entre el espacio que forma la habitación y el formado por el jardín; y hay una diferencia no menor - entre las "fronteras" de estos dos espacios.

Resumiendo: los sólidos poseen fronteras que - son superficies; las superficies poseen fron-- teras que son líneas; y las líneas poseen fronteras que son puntos. Podemos empezar el estudio de la Geometría a través del de los sóli-- dos y sus fronteras que son las superficies; después de estudiar las líneas, fronteras de las superficies y, por último, los puntos fronteras de las líneas.

Existen numerosos juegos de los cuales el maestro puede hechar mano para formar en los niños conceptos topológicos tan importantes como: -- región, frontera, proximidad, distancia, etc.

Es necesario recalcar la importancia de ejecutar este tipo de juegos por medio de trazos en el suelo de la clase o en el patio y no sobre dibujos geométricos realizados a pequeña escala sobre una hoja de papel, pues no están to-- davía preparados mentalmente para semejante abstracción.

1.4.1.
OBJETIVOS ESPECIFICOS DE PRIMARIA REFERENTES A GEOMETRIA DE TRANSFORMACION

PRIMER AÑO

Unidad 4

Módulo 4

La gente hace cosas útiles.

4.8 Trazar recta - Que el alumno siga trayectorias y realice trazos que describan líneas rectas.

Unidad 5

Módulo 1

El campo y la ciudad.

1.10 La recta numérica - Utilizar la recta numérica para representar números.

- Represente números por medio de "caminatas" en una recta numérica.

Unidad 5

Módulo 3

Transformamos la naturaleza.

3.15 Cuadriláteros - Forme cuadriláteros. Señale sus "orillas" y que las nombre "lados" ayudado por su maestro.

Unidad 6

Módulo 3

En todas partes sale el sol.

3.9 Longitud de segmentos - Compare segmentos e indique cuál es de mayor y cuál es de menor longitud.

Unidad 6

Módulo 4

Aprendemos en todas partes.

4.10 Triángulos - Trazar triángulos empleando - diferentes recursos.

Unidad 7

Módulo 2

Nos comunicamos.

2.7 Medición de longitudes - Medir la longitud de objetos diversos manejando unidades arbitrarias.

Unidad 7

Módulo 4

México y otros países.

4.6 El círculo - Trazar círculos empleando diversos recursos.

SEGUNDO AÑO

1.4.1. Ubicará objetos en posiciones distintas, con referencia a él mismo y a un punto dado.

2.3.1. Describirá características geométricas de objetos propuestos.

2.3.2. Reconocerá y trazará diferentes clases de líneas.

3.4.1. Clasificará líneas: rectas y curvas; cerradas y no cerradas.

7.3.3. Dibujará una figura simétrica respecto a un eje.

8.4.1. Pintará simétricamente una figura dada.

8.4.2. Reconocerá superficies.

## TERCER AÑO

1.5.1. Dibujará formas geométricas elementales tomadas de objetos que lo rodean.

1.5.2. Pintará simétricamente una figura dada.

1.5.3. Reconocerá figuras simétricas y no simétricas.

1.5.4. Trazará el eje de simetría de algunas figuras dadas.

## CUARTO AÑO

1.5.1. Trazará ejes de simetrías de figuras - dadas a partir de observaciones.

1.5.2. Trazará rectas perpendiculares utili-- zando regla y compás.

1.5.3. Rotará figuras, buscando las posicion- es de las coincidencias.

1.5.4. Identificará simetrías de rotación de figuras dadas.

2.5.1. Clasificará triángulos y cuadriláteros según sus ejes de simetría.

2.5.5. Distinguirá el cuadrado del rectángulo, por sus simetrías de rotación.

3.5.3. Explicará porqué son paralelas o per-- pendiculares dos rectas dadas, a par-- tir del análisis de las propiedades de las paralelas.

3.5.5. Determinará el número de lados, vérti- ces y ejes de simetría de algunos po-- lígonos y el círculo.

4.5.1. Aplicará el concepto de simetría en el cálculo de perímetros.

4.5.4. Determinará la mayor, menor o igual - magnitud de los giros dados mediante rotaciones.

5.5.1. Comprobará la variación proporcional, según la escala entre las longitudes de una figura.

5.5.3. Determinará cuántas veces es mayor un giro a otro dado, mediante rotaciones.

5.5.4. Determinará cuántas veces es mayor un ángulo respecto a otro dado, mediante rotaciones.

6.5.1. Comprobará los giros que se requieren y dará una figura para que coincida consigo misma mediante rotaciones.

6.5.3. Clasificará polígonos mediante el número de simetrías de rotación.

6.5.4. Determinará el valor de un ángulo recto mediante rotaciones.

7.5.1. Medirá ángulos dados, utilizando el transportador.

7.5.2. Reproducirá figuras a escala previo el análisis de sus propiedades: paralelismo e igualdad de ángulos correspondientes.

8.5.3. Reproducirá figuras a escala en papel blanco.

8.5.4. Resolverá problemas en que aplique sus conocimientos sobre figuras a escala.

QUINTO AÑO

Los objetivos no se relacionan directamente con geometría de transformaciones.

SEXTO AÑO

2.6.1. Investigará el significado de la expresión "reproducción a escala".

2.6.2. Determinará la escala que relaciona las longitudes y las áreas de dos figuras dadas mediante mediciones.

2.6.3. Calculará la escala a la que está calculada una cierta reproducción.

2.6.4. Obtendrá las dimensiones reales de --

figuras dadas en fotografías, conocien do la escala a la que están reproducidas.

2.6.5. Reconocerá las figuras geométricas y las no simétricas.

2.6.6. Clasificará los triángulos por sus ejes de simetría.

2.6.9. Determinará las distancias mediante el manejo de escalas.

3.6.1. Medirá ángulos mediante el giro de seg mentos dados y utilizando el transportador.

# UNIDAD II

## PROBABILIDAD

### OBJETIVOS PARTICULARES:

2.1. Aplicará los principios téoricos de la probabilidad en la solución de problemas prácticos.

2.2. Aplicará los conocimientos sobre probabilidad en el análisis de los libros de Educación Primaria.

### OBJETIVOS ESPECIFICOS:

2.1.1. Utilizará el concepto de espacio muestral en el desarrollo de experimentos.

2.1.2. Utilizará el concepto de evento en el desarrollo de problemas específicos.

2.1.3. Empleará el concepto de probabilidad en el desarrollo de problemas específicos.

2.1.4. Describirá en qué consisten los principios básicos de conteo: factorial, permutaciones y combinaciones.

2.1.5. Identificará los eventos complementarios, exclusivos, independientes y condicionales.

2.1.6. Describirá cuál es el proceso de solución para problemas referidos a métodos de conteo y de probabilidad.

2.1.7. Explicará en qué consiste el uso de las leyes de probabilidad, denominadas de la adición y de la multiplicación en la resolución de problemas.

2.2.1. Identificará los objetivos específicos de cada uno de los grados de Educación Primaria que se refieren a la probabilidad.

2.2.2. Aplicará secuencias dadas por lo menos para cada uno de los objetivos seleccionados de cada grado.

# INTRODUCCION

La teoría de la probabilidad se originó en 1654 gracias a la correspondencia entre dos matemáticos franceses, Pierre de Fermat (1601 - 1665) y Blaise Pascal (1623-1662). En sus cartas discutieron un problema que había sido propuesto por Chevalier de Méré, un jugador y miembro de la aristocracia. Su pregunta era: supongamos que dos personas juegan un juego y son obligados a abandonarlo antes de que éste haya terminado. ¿Cómo debería dividirse la polla? Obviamente, el jugador con la mayor oportunidad o probabilidad de triunfo debería recibir la mayor participación; Pascal y Fermat formularon los métodos básicos para determinar la probabilidad u oportunidad de triunfo de cada jugador.

Pierre de Fermat fue un abogado y funcionario que estudió matemáticas como entretenimiento. Desarrolló algunas partes de la geometría analítica independientemente de Descartes y produjo algunas de las ideas básicas del cálculo antes que Newton. No obstante que coadyuvó al desarrollo de la teoría de la probabilidad, es tal vez más recordado por sus trabajos en la teoría de los números.

Por su parte, Blaise Pascal fue un niño prodigio en matemáticas, probó algunos teoremas de geometría antes de haber visto un libro de geometría. Antes de los 16 años había probado algo notable en la geometría proyectiva, algo que posteriormente se llamaría el Teorema de Pascal.

Otro matemático francés, involucrado posteriormente en el desarrollo de la teoría de la probabilidad, fue Pierre Simon de Laplace (1749-1827), quien presenta varios de sus más grandes esfuerzos en el volumen quinto de su trabajo "Mecánica de los Cielos".

Actualmente, las leyes de la probabilidad ayudan a hacer predicciones en un amplio conjunto de situaciones, incluyendo el juego, los seguros, la genética, la elección de resultados, la dirección de negocios, la medicina, y las físicas moleculares, atómica y nuclear.

En esta unidad desarrollaremos la definición de probabilidad, en base a los conceptos de conjuntos. Para poder aplicar esa definición es necesario aprender métodos de conteo; por lo tanto se presentan las ideas básicas de: espacio muestral, eventos (complementarios, exclusivos, independientes y condicionales), principios básicos de conteo: (factorial, permutaciones y combinaciones). Finalmente, analizamos dos leyes de probabilidad, la ley de la suma y la de la multiplicación, que nos permiten efectuar gran parte de las operaciones matemáticas de la probabilidad.

### 2.1.1. ESPACIO MUESTRAL o ESPACIO DE EVENTOS

En "Teoría de probabilidad" es costumbre llamar "experimento" a cualquier "proceso de observación". Por ejemplo un experimento consistirá en lanzar una moneda y observarla cara que queda hacia arriba.

Por otra parte, asociado a cada experimento exsiste siempre un conjunto de resultados posibles. En el ejemplo anterior, dicho conjunto es {cara, cruz} . El conjunto asociado al experimento consistente en lanzar un dado normal y observar el número que queda hacia arriba, sería: {1,2,3,4,5,6} , puesto que estos son todos los números que aparecen en las caras del dado.

"El conjunto asociado a un experimento, cuyos elementos son todos los diferentes resultados posibles de obtener, se llama espacio de eventos, espacio muestral o espacio probabilístico".

En lo sucesivo se usarán letras para denotar un espacio de eventos asociado a un experimento.

A continuación, algunos ejemplos que servirán para reafirmar los conceptos anteriores:

EJEMPLO 1

En cada caja hay 10 fichas marcadas con números dígitos sin repetirse. Sea el experimento "sacar una ficha", los posibles resultados son:

Sacamos una ficha marcada con 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, el espacio muestral o espacio de eventos es:

$$S = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

10 diferentes posibles resultados.

EJEMPLO 2

Sea el experimento lanzar dos dados normales. El conjunto de posibles resultados o "espacio de eventos" sería:

$$S = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (3,3) \\ (3,4) & (3,5) & (3,6) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,4) & (5,5) & (5,6) & (6,6) & & \end{array} \right\}$$

Algunas combinaciones como las subrayadas no se pueden distinguir y por lo tanto una de ellas debe eliminarse. Igualmente se eliminaron (2,1) (3,1) (3,2), etc. etc.

Por lo tanto, son 21 posibles resultados.

EJEMPLO 3

Sea el experimento: lanzar dos dados normales de diferente color, los posibles resultados son:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S = { (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | 6 | resultados |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | . . | 6 | " |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | . . . . . | | 6 | " |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | . . . . . . . . | | | 6 | " |
| (5,1) | (5,2) | . . . . . . . . . . . | | | | 6 | " |
| (6,1) | . . . . . . . . . . . . . | | | | (6,6) } | 6 | " |

Por lo tanto son 36 posibles resultados.

De acuerdo con el tipo de elementos que contienen, los espacios de eventos se clasifican en: DISCRETOS Y CONTINUOS. Un espacio de eventos es discreto si sus elementos pueden enumerarse, es decir, si pueden contarse.

ESPACIO DE EVENTOS: DISCRETOS Y CONTINUOS

Si los elementos del espacio muestral son susceptibles de medida y no así de enumeración o conteo, se dice que se trata de un espacio de eventos continuo.

Ejemplifiquemos:

EJEMPLO 1

En una familia el número N de hijos puede tomar cualquiera de los valores 0, 1, 2, 3 . . . . . . pero nunca podría ser 2.5 o 3.825; este es pues un espacio muestral discreto.

EJEMPLO 2

La altura H de un individuo puede ser 1.70m o 1.735m dependiendo de la exactitud de la escala de medición que se esté usando. Por lo tanto el espacio muestral asociado al experimento de medir la altura de una población determinada, sería un "espacio de eventos" <u>contínuo</u>.

En general, las medidas dan origen a espacios contínuos, mientras que las enumeraciones o conteos originan datos o espacios muestrales discretos.

Otros ejemplos:

1. Medición de la velocidad del sonido.
2. Conteo de granos de una mazorca.
3. Medición de la longitud de una espiga de trigo.
4. Medición del efecto de una vacuna en términos de éxito o fracaso.
5. Medición de la resistencia de un cable de acero.
6. Conteo del número de autos que transiten durante una hora por la calle.

2.1.2. CONCEPTO DE EVENTO

Se denomina <u>evento</u> a cualquier subconjunto del espacio muestral.

1. Sea el experimento lanzar una moneda, el espacio muestral de ese experimento sería el conjunto de posibles resultados: $S = \{cara, cruz\}$
   Todos los subconjuntos que resultan de ese conjunto constituyen los eventos asociados de ese experimento:

   $\emptyset$, $\{cara\}$ , $\{cruz\}$ , $\{cara, cruz\}$

   4 subconjuntos

   4 <u>eventos</u>.

2. En una caja hay bolas de colores diferentes; una blanca B; una roja R; una negra N.

   El experimento sacar una bola, tendría como espacio muestral:

   $$S = \{B, R, N\}$$

   Los subconjuntos de ese conjunto o eventos de ese espacio muestral serían:

   $\emptyset$, $\{R\}$ , $\{B\}$ , $\{N\}$ , $\{R, B, N\}$ , $\{B, R\}$, $\{B, N\}$, $\{R, N\}$

   8 subconjuntos - 8 eventos asociados a ese espacio muestral.

Por lo tanto podemos resumir diciendo que:

SUBCONJUNTOS DE UN CONJUNTO

"El total de subconjuntos (eventos) de un conjunto determinado (espacio muestral) está dado por:

$2^n$; en donde: 2 es una constante y n es el número de elementos del conjunto".

Un espacio muestral que tenga 10 diferentes posibles resultados tiene $2^{10} = 1\ 024$ eventos asociados a ese espacio muestral.

Los eventos ∅ y el que contiene a todos los elementos del espacio muestral, es decir, el propio conjunto, siempre se deben contar como eventos. La probabilidad del conjunto vacío ∅, que es un evento imposible, es cero y la del evento que tiene todos los elementos del espacio muestral, es decir, un evento seguro, es 1, que es la probabilidad máxima.

Por tanto:

$$0 \leq P\ (A) \leq 1$$

evento imposible        evento seguro

Esta expresión representa el rango de valores posibles para un evento de azar.

Por otro lado, si sabemos que S es el conjunto de eventos asociados a un experimento y cuya probabilidad se mueve entre cero y uno, podremos entender que:

$$P\ (S) = 1$$

o sea: la probabilidad del espacio muestral (evento seguro) es 1.

Es claro, sin embargo, que aunque un espacio muestral tenga 1024 o más eventos asociados, siempre nos interesa la probabilidad de uno de esos eventos asociados.

Lanzar un dado normal y observar el número que queda hacia arriba. El espacio muestral es:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y algunos eventos asociados son:

a) Que caiga 1

b) Que caiga 2

c) Que caiga par y primo

d) Que caiga menor que 3, etc.

De todos los eventos asociados de este ejemplo que son en total $2^6 = 64$ puede interesarnos sólo:

Evento $E_1$ = Que caiga par y primo $\{2,3\}$

OCURRENCIA DE UN EVENTO

Cabe aquí aclarar que al realizar un experimento se obtiene un dato que corresponde FORZOSAMENTE a un evento, es decir a uno de los subconjuntos resultantes del espacio muestral; si dicho evento es $E_1$, se dice que ocurrió o se verificó el evento $E_1$ .

Por ejemplo si el espacio de eventos es $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ se formulan eventos (subconjuntos) como $E_1 = \{2,3\}$, $E_2 = \{1,4,5,6\}$, al observar en el experimento el número 2, se dice que ocurrió o se verificó el evento $E_1$.

De la misma manera, para que ocurra o se verifique el evento $E_2$, basta con que al realizar el experimento de lanzar el dado, la observación sea 1,4,5 o 6.

EVENTOS SIMPLES

Los eventos constituídos por un sólo elemento se denominan eventos simples. Así, los diversos eventos simples de $S = \{a, e, i, o, u\}$ son: $\{a\}$, $\{e\}$, $\{i\}$, $\{o\}$, $\{u\}$ sin importar el orden en que se mencionen.

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

El complemento de un evento A, es otro evento que contiene todos los elementos que no están en A pero que sí están en el espacio de eventos correspondiente, S.

Es decir: Si $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $A = \{1,2,3\}$

El complemento de A es $\{4,5,6\}$ ya que los números 4,5,6 no están en A, pero sí son elementos de S.

El complemento del evento A se denota con $\bar{A}$ o $A'$.

Si S es el conjunto de todas las letras del idioma español, y F es el de las consonantes, el complemento de F, es decir, (F') será el conjunto de las vocales.

$$S = \{x/x \text{ letras alfabeto español}\}$$

$$F = \{x/x \text{ son consonantes}\}$$

$$F' = \{x/x \text{ son vocales}\}$$

Simbólicamente, el complemento del evento F se indicaría:

$$F' = \{x/x \in S \text{ y } x \notin F\}$$

El complemento de F es el conjunto de las x tales que x pertenezcan a S y x no pertenezcan a F.

2.1.3. CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Es frecuente, escuchar en nuestra vida cotidiana, expresiones como "probablemente apruebe el exámen", "tal vez mañana llueva", "quizá . . . . . ."; la incertidumbre acerca de la ocurrencia de tales sucesos se indica mediante expresiones "probablemente","tal vez", "quizá", etc. de acuerdo con la información que tengamos sobre dichos sucesos, es posible una manera más concreta de expresar estas suposiciones, por ejemplo, las posibilidades de éxito en el examen, me favorecen en la proporción 1 a 2, o la posibilidad de lluvia mañana es de un 80% etc. etc. Números como éstos, que cuantifican la incertidumbre, se obtienen aplicando la "Teoría de la Probabilidad".

La probabilidad de un evento es una medida del grado de confianza que se tiene de que dicho evento ocurra al realizar una vez el experimento correspondiente.

LIMITES DE LA PROBABILIDAD

Se ha convenido en cuantificar las probabilidades de acuerdo con una escala numérica de cero a uno, o lo que sería lo mismo de 0 a 100%. De tal manera que una probabilidad no puede ser menor que 0, ni mayor que 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

La tarea de asignar a un evento determinado, su probabilidad de ocurrencia en relación al espacio muestral al que pertenece, implica el cuidadoso manejo de una serie de conceptos que precisamente en este objetivo iremos desarrollando.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Si dos o más eventos "no pueden ocurrir simultáneamente" al realizar un experimento, se dice que éstos son "mutuamente exclusivos".

Así, si S = {cara, cruz}, al lanzar una moneda no se podrá observar al mismo tiempo cara y cruz, por lo tanto, los eventos simples {cara} y {cruz} son eventos "mutuamente exclusivos".

Para que en eventos que no son simples, es decir, que tienen más de un elemento, no haya posibilidad de ocurrencia simultánea, se requiere que éstos no tengan ningún elemento en común.

Sea A = {a, e, i} y B = {o, u},

resultan mutuamente exclusivos,

puesto que A y B no tienen ningún elemento en común. De ahí que podamos definir eventos mutuamente exclusivos de dos formas equivalentes:

1. Dos o más eventos son mutuamente exclusivos cuando no pueden ocurrir simultáneamente.

2. Dos o más eventos son mutuamente exclusivos cuando no tienen ningún elemento en común.

CALCULO DE PROBABILIDADES

Si un espacio muestral tiene N posibles resultados de un experimento y un evento asociado a este espacio, puede ocurrir de K maneras posibles, la PROBABILIDAD de dicho evento es:

$\frac{K}{N}$ es decir:

La probabilidad de un evento es igual al número de maneras posibles en que puede darse este evento entre el número posible de resultados del experimento.

En el espacio de eventos S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} cada uno de los eventos simples y mutuamente exclusivos tienen la misma probabilidad de ocurrir:

P (1) = 1/6, P (2) = 1/6, P (3) = 1/6

Todos son igualmente probables.

Si de ese mismo espacio de eventos S = 1,2,3,4, 5,6 cuyos elementos son igualmente probables - desprendemos algunos eventos asociados como:

$C = \{1,2\}$ y $D = \{3,4,5,6\}$, el evento D, tiene doble probabilidad de ocurrir con relación al evento C puesto que tiene el doble de elementos.

Aplicando la regla de que "la probabilidad de un evento es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples que lo componen, tenemos que:

$$P(C) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = 1/6+1/6 = \boxed{1/3}$$

$$P(D) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6 = \boxed{2/3}$$

De acuerdo con la regla anterior si S = éxito, fracaso , y P ( éxito ) = P ( fracaso ), se - tiene que: P (S) = 1

$$P(S) = P(\text{éxito}) + P(\text{fracaso}) = 1/2 + 1/2 = 1,$$ es decir:

se cumple con el postulado de que P (S) = 1 (La probabilidad de ocurrencia del espacio de eventos es uno).

REGLA DE LA SUMA DE PROBABILIDADES

La regla para calcular la probabilidad de un - evento, sumando las probabilidades de los eventos simples que la componen, se denomina "regla de la suma de probabilidades".

Otros ejemplos aplicando la regla:

1. Se tienen en una caja 5 bolas negras N, 3 - bolas rojas R, y 2 bolas azules A.

   $S = \{N, N, N, N, N, R, R, R, A, A\}$

   Número total = 10

   Sacar una bola negra puede ocurrir de 5 formas.
   Sacar una bola roja puede ocurrir de 3 formas.
   Sacar una bola azúl puede ocurrir de 2 formas.

Por tanto:

$$P\ (N) + P\ (R) + P\ (A) = P\ \ (S)$$

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

2. Si se tienen bien barajados los 4 ases de un juego de naipes y se extrae uno de ellos al azar, encontremos la probabilidad de ocurrencia de los siguientes elementos:

$A = \{\text{as de diamantes}\} = \frac{1}{4}$

$B = \{\text{as de tréboles}\} = \frac{1}{4}$

$C = \{\text{as de diamantes, as de tréboles}\} =$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

En páginas anteriores, definimos "complemento de un evento" como otro evento que contiene todos los elementos que no están en A pero que sí están en el espacio de eventos correspondiente. Es decir:

$S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $A = \{2,\ 4\}$

El complemento de A es A' y estará formado por los elementos que no están en A pero sí en S:

$$A' = \{6,\ 8,\ 10\}$$

Hablando de probabilidad de esos eventos tenemos que:

Si (S) tiene 5 posibles resultados, todos igualmente probables y (A) tiene 2 de ellos:

$P\ (A) = \frac{2}{5}$ y por tanto $P\ (A') = \frac{3}{5}$

De donde obtenemos que:

$$P\ (A) + P\ (A') = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

RESUMIENDO: La ecuación $P\ (A) + P\ (A') = 1$ debe satisfacerse siempre, es decir, LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE UN EVENTO Y DE SU COMPLEMENTO ES SIEMPRE IGUAL A UNO.

UNION DE EVENTOS

La unión de dos eventos A y B es otro evento cuyos elementos son todos los de A o B.

Así si A = $\{2,3\}$ y B = $\{5, 6, 7\}$, su unión es el elemento C = $\{2,3,5,6,7\}$

En la unión de dos eventos "no puede haber repetición de eventos simples". Sea A = $\{a,e,i\}$ y B = $\{e, o, u\}$, al juntar (unir) los elementos se tiene a, e, i, ~~e~~, o, u; nótese que una e aparece tachada en la lista por estar repetida. Por lo tanto la unión de A y B es el evento:

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$$

Se denota la unión de dos conjuntos con el símbolo U. Así la unión de A y B se expresará en la forma ya citada:

$$A \cup B$$

Para eventos A y B, mutuamente exclusivos (no tienen ningún elemento en común) que pueden ocurrir de n(A) y n(B) maneras distintas, respectivamente, el evento AUB puede ocurrir de n(A) + n(B) maneras distintas. Por ejemplo, si:

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{1,3\}, \quad y \ D = A \cup B,$$

entonces n(A) = 3, n(B) = 2 y n(D) = 5

$$D = \{2,4,6,1,3\} \text{ (en cualquier orden)}$$

n(D) = 5 (resulta contando los elementos de D o sumando n(A) + n(B).)

PROBABILIDAD DE UNIONES DE EVENTOS

De acuerdo con lo anterior:

"La probabilidad de la unión de dos eventos mutuamente exclusivos es igual a la suma de las probabilidades de ambos"

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

donde E y F son eventos mutuamente exclusivos.

Apliquemos la fórmula a la solución de algunos problemas:

1. En una baraja hay 13 diamantes, 13 tréboles, 13 corazones y 13 espadas; se extraerá una carta al azar. Si:

$$A = \left\{ d / d \text{ es diamante} \right\}$$

$$B = \left\{ t / t \text{ es trébol} \right\} \quad \text{entonces}$$

$$D = A \cup B = \left\{ d,\ t / d \text{ es diamante; } t \text{ es trébol} \right\}$$

¿Cuál será el valor de $D = P\ (A \cup B)$?

Aplicando la fórmula:

$$P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B)$$

$$P\ (A) = \frac{n\ (A)}{N} = \frac{13}{52},$$

$$P\ (B) = \frac{n\ (B)}{N} = \frac{13}{52}$$

Entonces: $P\ (A) + P\ (B) = \dfrac{26}{52}$

Si $P\ (D) = P\ (A \cup B)$

$$P\ (D) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

2. En una urna hay tres bolas rojas, dos amarillas y cinco negras. Si se extrae una bola al azar, calculemos la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) Bola blanca (evento $H$)

   b) Bola amarilla (evento $K$)

   c) Bola negra (evento $L$)

   d) Bola amarilla o negra (evento $Q = K \cup L$)

   Considerando que:

$$N\ (S) = 10$$

   Tenemos:

$$n\ (H) = 0 \qquad P\ (H) = \frac{n\ (H)}{N} = \frac{0}{10}$$

$$n\ (K) = 2 \qquad P\ (K) = \frac{n\ (K)}{N} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$n(L) = 5 \qquad P(L) = \frac{n(L)}{N} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$n(Q) = 7 \qquad P(Q) = \frac{n(K)}{N} + \frac{n(L)}{N}$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

El concepto de <u>unión</u> se puede generalizar a más de 2 eventos.

Así la unión de A, B, C y D se denota en la forma siguiente:

$$A \cup B \cup C \cup D$$

y consiste en todos los elementos de A, B, C, D. Además si A, B, C y D son eventos <u>mutuamente exclusivos</u>, su probabilidad quedará <u>determinada por la fórmula</u>:

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

La intersección de dos eventos es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a ambos. Así, la intersección de $A=\{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, f, g\}$ es $C = \{c, d\}$ puesto que c, d son los elementos que pertenecen simultáneamente a A y B.

Para indicar la intersección de dos eventos se usará el símbolo $\cap$, así la intersección de A y B se expresa $A \cap B$.

INTERSECCION DE EVENTOS

<u>La intersección de dos eventos mutuamente exclusivos es el conjunto vacío $\emptyset$ ya que no tienen ningun elemento en común.</u> Puesto que B y B' son mutuamente exclusivos, se tiene que:

$$B \cap B' = \emptyset$$

El concepto de intersección de dos eventos puede generalizarse para el caso de 3 o más eventos; la intersección de A, B, C que se denota $A \cap B \cap C$, es el conjunto (evento) cuyos elementos pertenecen a A, B y C simultáneamente.

Consideremos ahora A y B eventos que no son mutuamente exclusivos, es decir, que sí tienen elementos en común.

Determinemos el número de elementos que tiene su unión D:

$$n(D) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Ya que al sumar todos los elementos de A y B, se están considerando dos veces los que ambos tienen en común.

Por ejemplo, si: $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,4,5\}$,

entonces $D = \{1,2,3,4,5\}$ y $n(D) = 4+3-2 = 5$

puesto que: $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(D)$

$$4 + 3 - 2 = 5$$

La fórmula anterior funciona tanto para la unión de eventos mutuamente exclusivos como para los que no lo son.

En general:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

y en eventos mutuamente exclusivos se reduce a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

puesto que la intersección de eventos mutuamente exclusivos es $\emptyset$.

## 2.1.4. PRINCIPIOS BASICOS DE CONTEO

Supongamos el conjunto $A_1 = \{a\}$. ¿Cuántos conjuntos ordenados podemos formar con ese elemento? Evidentemente sólo uno: (a), que coincide con el propio conjunto dado.

Sea ahora el conjunto $A_2 = \{a,b\}$. ¿Cuántos conjuntos ordenados podemos formar con estos elementos? En base a los dos elementos disponibles, se pueden formar dos conjuntos ordenados distintos a saber: $\{a,b\}$ y $\{b,a\}$.

Si el conjunto $A_3$ es igual a $\{a,b,c\}$ ¿serán tres los conjuntos ordenados que podemos formar? NO. Con tres elementos se pueden formar 6 conjuntos ordenados distintos, como sigue $\{a,b,c\}$, $\{a,c,b\}$, $\{b,a,c\}$, $\{b,c,a\}$, $\{c,a,b\}$, $\{c,b,a\}$. Con el conjunto $A_4 = \{a,b,c,d\}$ se pueden formar 24 conjuntos ordenados distintos.

Observamos que el número de conjuntos ordenados que se pueden formar con $n$ elementos, crece rápidamente a medida que aumenta el número de elementos del conjunto original.

PERMUTACION

Por lo tanto, es necesario disponer de una fórmula de carácter general para obtener de inmediato el número de conjuntos ordenados distintos que se pueden formar con n elementos. Para ello introducimos el concepto de "PERMUTACION".

"Se llama permutación de n elementos a cualquier conjunto ordenado de esos n elementos.

Cada permutación es una enumeración exhaustiva de los elementos de un conjunto, en que se asigna a cada uno de ellos un orden preciso: figura un elemento como "primero", otro como "segundo", etc. Todas las permutaciones están formadas por los n elementos del conjunto original. Una permutación difiere de otra "únicamente en el orden de sus elementos".

CALCULO DEL NUMERO DE PERMUTACIONES

Supongamos que tenemos n personas igualmente hábiles, n funciones que efectuar, y que debemos asignar una persona a cada función. Nos preguntamos ¿De cuántas formas diferentes se pueden efectuar esas asignaciones?

Tenemos n elementos y podemos elegir cualquiera de ellos para efectuar la primera función; por lo tanto, hay n formas diferentes de asignar a la primera persona. Hecho esto nos quedan n-1 personas disponibles, por lo que habrá n-1 formas de asignar a la segunda persona; y así sucesivamente.

Para la penúltima función quedarán dos personas disponibles, por lo que habrá dos formas de efectuar la asignación. Finalmente, para la última función no quedará más que una sola persona no asignada, por lo cual habrá una única forma de efectuar la asignación.

Aplicamos el principio fundamental del conteo, y se tiene que las n funciones se pueden asignar de $n(n-1)(n-2)....3.2.1$ formas distintas.

Cada una de esas asignaciones es una permutación de n elementos.

Existen diversas notaciones para simbolizar las permutaciones de n elementos. Aquí adoptaremos $_NP_n$ por lo tanto $_5P_5$ simbolizará las permutaciones de 5 elementos, $_{10}P_{10}$ las de 10 elementos, etc.

NOTACION FACTORIAL

Por otra parte, utilizando la notación factorial el producto $n(n-1)(n-2)...3.2.1$ se simboliza mediante n! El símbolo n! (n factorial) representa abreviadamente el producto de n números naturales consecutivos desde 1 hasta n.

$1 = 1!$ se lee uno factorial

$2 \times 1 = 2!$ se lee dos factorial

$3 \times 2 \times 1 = 3!$ se lee tres factorial

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ se lee cuatro factorial

De acuerdo con estos convenios, se simboliza la fórmula básica para el cálculo del número de permutaciones de n elementos sin elementos repetidos, como sigue:

$${}_{N}P_{n} = n!$$

$_{N}P_{n}$
PERMUTACION DE N OBJETOS EN n LUGARES

Consideremos los siguientes problemas:

- ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar tres personas en tres asientos?

  La respuesta es: en el primer sitio se puede sentar cualquiera de las tres personas, en el segundo cualquiera de las dos restantes; y en el tercero la última. Por lo tanto existen $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas distintas de acomodar a esas tres personas en los tres asientos. Esto equivale, aplicando la fórmula, a:

  $n! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

- Asignemos a cada persona una letra diferente: a, b, c

  Las permutaciones posibles son:

  a b c

  a c b

  b a c Espacio de eventos=6

  b c a

  c a b

  c b a

En base a los arreglos ordenados (permutaciones) obtenidos, podríamos preguntar:

PROBABILIDAD DE LAS PERMUTACIONES

1. ¿Cuál es la probabilidad de que los elementos a,c queden juntos en ese orden (evento A)

- Puesto que $P(A) = \frac{n(A)}{N}$, necesitamos calcular $n(A)$ y $N$.

$N$ - es el número de permutaciones posibles de las tres personas, es decir $n! = 3! = 6$

$n(A)$ - es el número de maneras igualmente probables en que las dos personas mencionadas puedan quedar juntas y en el orden que se pide (a,c) = 2, por tanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{2}{6}$$

Este ejemplo explica el caso de una ordenación de un conjunto de n objetos en un orden dado tomados todos a la vez. $_NP_n$

Veamos ahora una ordenación de un número $r$ de dichos objetos, $r \leq n$, en un orden dado. A esto le llamaremos una <u>permutación $r$</u> o una permutación de los n objetos tomados $r$ a la vez.

$_NP_r$
PERMUTACIONES DE N OBJETOS EN $r$ LUGARES

Ejemplos:

1. Consideremos el conjunto de las letras $\{a,b,c,d\}$ entonces:

a) bdca, deba, y acdb son algunas permutaciones de las 4 letras tomadas a la vez.

b) bad, adb, cbd, son algunas permutaciones de las 4 letras tomadas 3 a la vez.

c) ad, cb, da, son algunas permutaciones de las 4 letras tomadas 2 a la vez.

El número de permutaciones de n objetos tomados $r$ a la vez lo denotamos por:

$_N P_r$

2. Hallar el número de permutaciones de 6 objetos, a saber, a, b, c, d, e, f, tomados 3 a la vez. En otras palabras hallar el número de "palabras de tres letras diferentes" que pueden formarse con las 6 - letras mencionadas.

- Representemos las palabras de 3 letras por 3 cajas.

$$\boxed{\phantom{00}} \quad \boxed{\phantom{00}} \quad \boxed{\phantom{00}}$$

Ahora la primera letra puede escogerse de 6 formas diferentes. En seguida, la segunda letra se puede escoger de 5 formas diferentes; y después de esta la última letra se puede escoger de 4 formas diferentes.

- Escribimos cada número en su correspondiente caja como sigue:

$$\boxed{6} \quad \boxed{5} \quad \boxed{4}$$

Así por el principio fundamental de conteo, (principio multiplicativo), hay $6 \times 5 \times 4 = 120$ posibles palabras de - tres letras sin repetición, o hay 120 - permutaciones de 6 objetos tomados 3 a la vez, esto es: $_6P_3 = 120$

Aplicando la fórmula general para permutaciones de r en N objetos:

$$NPr = \frac{N!}{(N-r)!}$$

Tenemos: $$_6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} =$$

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

**OTROS CASOS DE PERMUTACION**

Hasta aquí, hemos visto dos casos de permutaciones: permutaciones de N objetos en N lugares ($_NP_N = \frac{N!}{(N-r)!}$) también llamada fórmula compacta.

Existen otros casos de permutación, que no serán objeto de estudio en este trabajo, tales - como:

- Permutaciones de N objetos en N lugares pero se admite repetición.

- Permutaciones de N objetos en r lugares pero se admite repetición.

- Permutaciones de N objetos en N lugares pero existen subgrupos de objetos iguales.

- Permutaciones circulates de N objetos en N - lugares.

COMBINACIONES

Ya hemos visto que una permutación es el arreglo de N objetos en cierto orden. Es conveniente recordar que el orden es importante; por ejemplo: a,b y b,a son dos permutaciones distintas.

Supongamos ahora que tenemos N objetos. Una combinación de orden r de esos N objetos es cualquier subconjunto del conjunto de N objetos, que tenga r elementos. Así por ejemplo, las combinaciones de los cuatro números 0,1,2, 3, (N=4) tomando 3 de ellos a la vez (r=3) son (0,1,2), (0,2,3), (1,2,3) y (0,1,3).

Todas las combinaciones que pueden hacerse con las letras a,e,i,o (N=4), tomando 3 a la vez - (r=3) son: aei, aio, aeo, eio.

Conviene hacer notar que en una combinación no es importante el orden de los elementos, a diferencia de lo que sucede en las permutaciones, en las cuales un orden diferente de los mismos elementos de una diferente permutación.

Por ejemplo, si los elementos son a,b,c, (N=3) la única combinación posible de orden 3 es abc (el orden)de las letras no importa), mientras que las permutaciones posibles son 6: abc, acb, bca, cab, cba.

Una combinación de orden r es un subconjunto de r elementos que pertenecen a un conjunto de N elementos.

Se puede demostrar que el número de combinaciones posibles de orden r es:

$$\frac{N!}{r!\cdot\ (N-r)!}$$

Por ejemplo, si N = 4 y r = 2, el total de combinaciones que pueden hacerse es:

$$\frac{4!}{2!\ (4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2! \times \cancel{2!}} =$$

$$\frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

Si N = 10 y r = 7 se pueden hacer:

$$\frac{10!}{7!\ (10-7)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{3! \times \cancel{7!}} = \frac{720}{6}$$

$$= 120 \text{ combinaciones}$$

Consideremos el siguiente problema: En un plantel de estudiantes hay 7 miembros distinguidos (N = 7), entre quienes se va a seleccionar, al azar, un comité de tres personas. Observe que cada grupo que se forme con tres personas es una combinación de orden 3 (r = 3) tomado de 7 elementos. El total de grupos que pueden formarse es, entonces:

PROCESO DE SOLUCION

$$\frac{N!}{r!\ (N-r)!} = \frac{7!}{3!\ (7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4}}{3! \times \cancel{4!}} =$$

$$\frac{210}{6} = 35$$

Por lo tanto podrán formarse 35 diferentes combinaciones de 3 personas seleccionadas de 7.

CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE COMBINACIONES

Puesto que 35 es el número posible de grupos de 3 personas formadas de un total de 7, ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro, Juan y Ramón constituyan dicho comité (evento A)? (recuerde que cada grupo está formado por 3 personas)

$$P\ (A) = \frac{1}{35} \quad \text{ya que } n\ (A) = 1 \text{ y } N = 35$$

Si se desea calcular la probabilidad de que, Pedro forme parte del comité (evento B), es necesario calcular el número n (B), de grupos que pueden formarse en los que se incluya a Pedro. Para hacer esto hay que considerar que en dichos grupos quedan 2 sitios vacantes para 2 de las 6 personas restantes, por lo cual n(B) es el número de combinaciones de orden 2 tomadas de 6 elementos; es decir:

$$n(B) = \frac{6!}{2!\ (6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4}!}{2! \times \cancel{4}!} = \frac{30}{2} = 15$$

Continuando con el problema anterior ¿Cuál es la probabilidad de que, Pedro sea miembro del comité evento B? (recuerde que el total de grupos es 35)

$$P(B) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \quad \text{ya que } N=35 \text{ y } n(B)=15$$

Veámos otro problema:

En una caja se tienen revueltos 15 focos, 5 de los cuales están fundidos (no encienden) si se sacan tres focos al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos esté fundido (evento K)?

Calculemos primero el total de las combinaciones N que se pueden hacer con 15 focos tomados 3 a la vez.

Si $n=15$ y $r = 3$, entonces $N = \dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$

PROCESO DE SOLUCION

por tanto:

$$\frac{15!}{3!\ (15-3)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times \cancel{12}!}{3! \times \cancel{12}!} = \frac{2730}{6} = 455$$

$N = 455$ (total de combinaciones de orden 3)

Ahora es necesario encontrar $n$ (K) que es el número de combinaciones posibles en donde tenemos que tomar en cuenta que ninguno de los 3 focos esté fundido; ($r = 3$), es decir debemos seleccionarlos de entre los diez que sí encienden ($n=10$) por tanto tenemos:

$$n(K) = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} = \frac{10!}{3!\ (10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7}!}{3! \times \cancel{7}!} = 120$$

Por tanto habrá 120 combinaciones de orden, tres tomadas de 10 elementos sin que haya ninguno - fundido.

Ahora bien si $P(K) = \dfrac{n(K)}{N}$ tenemos: $n(K)=120$ y

$N = 455$ entonces $P(K) = \dfrac{120}{455}$

Siguiendo con el problema anterior, calcule la probabilidad de que sólo uno de los tres focos extraídos esté fundido (evento L). Tome en cuenta que el foco fundido puede ser cualquiera de los 5 defectuosos (eventos) y que los otros dos deben resultar de las combinaciones de orden 2 de los 10 buenos (evento B), por lo cual n (L) = n(A) X n(B) (principio multiplicativo).

$$n(A) = \frac{5!}{1!\ (5-1)!} = 5$$

$$n(B) = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = 45$$

Por tanto:

$$n\ (L) = n\ (A)\ X\ n\ (B) = 5\ X\ 45 = 225$$

PROCESO DE SOLUCION

$$P\ (L) = \frac{n\ (A)\ X\ n\ (B)}{N} = \frac{5\ X\ 45}{455} = \frac{225}{455}$$

DE DONDE TENEMOS QUE LA PROBABILIDAD DE QUE SOLO UNO DE LOS TRES FOCOS EXTRAIDOS ESTE FUNDIDO (EVENTO L) RESULTE $= \frac{225}{455}$

Continuando con el mismo problema calcularemos las siguientes probabilidades:

1. Que dos focos estén fundidos, o sea, de que sólo haya uno bueno (evento M). (Tome en cuenta que el foco bueno puede ser cualquiera de los diez y los otros dos deben ser tomados de 5 defectuosos).

2. Que uno o dos focos estén fundidos (evento Q). (Principio aditivo).

Resolviendo el primer problema:

$$n\ (M) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}\ X\ \frac{10!}{1!\,(10-1)!} \quad \text{entonces:}$$

PROCESO DE SOLUCION

$$= \frac{5X4X\cancel{3}!}{2!\ X\cancel{3}!} = \frac{20}{2} = 10 \qquad y$$

$$\frac{10!}{1!\ (10-1)!} = \frac{10!}{1!\ (9)!} = \frac{10\ X\ \cancel{9}!}{1!\ X\ \cancel{9}!} = \frac{10}{1} = 10$$

por lo tanto $n\ (M) = 10\ X\ 10 = 100$

de donde $P\ (M) = \frac{n\ (M)}{N} = \frac{100}{455}$

$$P\ (M) = \frac{100}{455}$$

Resolviendo el segundo problema:

Observemos que anteriormente habíamos obtenido n (L) y n (M) que son los eventos que llenan los requisitos de este problema.

- Evento L (un foco fundido)

- Evento M (dos focos fundidos)

Si en el problema que nos ocupa se busca la probabilidad de que ocurra evento L o evento M, aplicamos el principio aditivo de la probabilidad y tendremos:

$$P\ (Q) = \frac{225}{455} + \frac{100}{455} = \frac{325}{455}$$

ya que $Q = L \cup M$ y

$$P\ (Q) = P\ (L) + P\ (M)$$

2.1.5. EVENTOS COMPLEMENTARIOS, EXCLUSIVOS, INDEPENDIENTES Y CONDICIONALES.

En el desarrollo de estos objetivos ha quedado ampliamente explicado en qué consisten los eventos complementarios y los mutuamente exclusivos y el cálculo de sus respectivas probabilidades, por lo que nos limitaremos a introducir el concepto de probabilidad condicional y el de eventos independientes.

La probabilidad que se calcula utilizando información adicional a la que nos proporciona la sola descripción de un experimento, se le llama PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Por ejemplo, si Pedro lanza un dado, y le pregunta a Juan por la probabilidad de que caiga el 6, la respuesta será $\frac{1}{6}$.

En cambio, si Pedro observa el número que quedó hacia arriba y después le informa que el número observado es mayor que tres, la probabilidad de que haya sido el 6 es 1/3, ya que el espacio de eventos se reduce a $\{4,5,6\}$, es decir a un espacio que tiene 3 elementos.

Dicho de otra manera, la probabilidad condicional de un evento A es aquella que se calcula con el previo conocimiento de que al realizar el experimento correspondiente ocurrió el evento B.

Al hacer referencia a una probabilidad condicional se dice simplemente "la probabilidad de A dado que ocurrió B".

EVENTOS CONDICIONALES Y SU PROBABILIDAD

Así, la PROBABILIDAD CONDICIONAL de que al extraer al azar una carta de un juego de naipes ocurra A = {as tréboles} dado que ocurrió B = {t: donde t es trébol}, es 1/13 (el espacio de eventos se reduce precisamente a B). Recuerde que en un juego de naipes hay 13 tréboles, uno de los cuales es el as.

Al lanzar un dado, la probabilidad de que ocurra A = {2,6}, dado que la observación fue mayor de 3, debe calcularse teniendo presente que el evento que condiciona dicha probabilidad es el B = {4,5,6}, por lo que

$$(A/B) = \frac{1}{3}$$

Observe que el 1 del numerador corresponde a n (A ∩ B), y que A B = 6, y el 3 del denominador es precisamente n (B). En efecto, si n (B) 0, la probabilidad condicional P (A/B) se calcula con la fórmula:

$$P\ (A/B) = \frac{n\ (A \cap B)}{n\ (B)}$$

Sea el experimento consistente en lanzar dos dados de distinto color simultáneamente. Si en una tirada la suma es 6, calculemos la probabilidad de que en alguno de los dados aparezca el 5.

Las caras de los dados suman 6 si ocurre el evento

$$E = \{(1,5)\ ,\ (2,4)\ ,\ (3,3)\ ,\ (4,2)\ ,\ (5,1)\}$$

Si F = {el 5 aparece en alguno de los dados}, entonces F E = (1,5) , (5,1) , por lo que:

$$P\ (F/E) = \frac{n\ (F \cap E)}{n\ (E)} = \frac{2}{5}$$

EVENTOS INDEPENDIENTES Y SU PROPABILIDAD

Dos eventos A y B son independientes, si la ocurrencia de A no afecta la ocurrencia de B.

Para eventos independientes:

$$P\ (A \cap B) = P\ (A) \times P\ (B)$$

Es decir, la probabilidad de la intersección de dos eventos independientes es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos.

Si A y B son eventos independientes, y se sabe que P (A) = .5 y P (B) = .9, la probabilidad de que ocurra la intersección de A y B será:

$$P\ (A \cap B) = P\ (A) \times P\ (B) = .5 \times .8 = .4$$

Se lanzan simultáneamente un dado rojo y uno azúl. La probabilidad de que en el rojo quede hacia arriba un número par es P (R) = 3/6; la probabilidad de que en el azúl sea par es P (A) = 3/6 y finalmente, la probabilidad de que ambos caigan con un número par hacia arriba (evento $R \cap A$) = 9/36; es decir, que las 36 parejas distintas de observaciones posibles, solamente 9 tienen 2 números pares, por ejemplo: el (2,2), el (2,4), . . . . etc., o sea $n(R \cap A) = 9$.

### 2.1.6. PROCESO DE SOLUCION SOBRE METODOS DE CONTEO Y PROBABILIDAD

Para una mejor comprensión de las técnicas de conteo (permutaciones y combinaciones) planteamos problemas con su respectivo proceso de solución; por lo que consideramos ampliamente tratado este objetivo.

### 2.1.7. LEYES DE LA PROBABILIDAD ADITIVA Y MULTIPLICATIVA

Las aplicaciones de la probabilidad suelen referirse a varios eventos relacionados y no a uno en particular. Para mayor sencillez consideremos 2 de dichos eventos $A_1$, y $A_2$. Este evento combinado se representa con el símbolo ($A_1$ y $A_2$) y su probabilidad por $P\{A_1 \text{ y } A_2\}$.

Por otra parte, puede uno estar interesado en saber si al realizar el experimento ocurre por lo menos uno de los 2 eventos $A_1$ y $A_2$. Este evento se designa mediante el símbolo ($A_1$ o $A_2$) y su probabilidad mediante $P\{A_1 \text{ o } A_2\}$. Ocurrirá por lo menos uno de los 2 eventos si ocurre $A_1$ pero no $A_2$, o si ocurre $A_2$, pero no $A_1$, o bien si ocurren ambos $A_1$ y $A_2$. Según esto, aquí la palabra "o" quiere decir el uno, el otro o bien ambos. El propósito aquí es obtener una fórmula para $P\{A_1 \text{ o } A_2\}$.

Si los dos eventos $A_1$ y $A_2$ poseen la propiedad de que la ocurrencia de uno, evita la ocurrencia del otro, se les llama eventos mutuamente exclusivos. Por ejemplo, sea $A_1$ el evento de obtener un total de 7 al tirar 2 dados y $A_2$ la obtención de un total de 11; entonces $A_1$ y $A_2$ son eventos mutuamente exclusivos. Para este tipo de eventos no hay resultados que correspondan a la ocurrencia tanto de $A_1$ como de $A_2$; por consiguiente, los dos eventos no poseen ningún punto en común en el espacio de muestreo:

$A_1$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (2,1) | (3,1) | (4,1) | (5,1) | (6,1) | |
| (1,2) | (2,2) | (3,2) | (4,2) | (5,2) | (6,2) | |
| (1,3) | (2,3) | (3,3) | (4,3) | (5,3) | (6,3) | |
| (1,4) | (2,4) | (3,4) | (4,4) | (5,4) | (6,4) | $A_2$ |
| (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | (5,5) | (6,5) | |
| (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | (6,6) | |

En este diagrama los puntos colocados dentro de las 2 regiones designadas con $A_1$ y $A_2$, representan los eventos simples que componen los eventos compuestos $A_1$ y $A_2$ respectivamente. Si n de $A_1$ = 6 es decir $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ y n $(A_2)$ = 2 es decir $\{(5,6), (6,5)\}$, entonces el número de elementos asociados con la ocurrencia ya sea de $A_1$ o de $A_2$ es la suma de estos dos números; consecuentemente si N indica el número total de resultados en el espacio de muestreo (N = 36) se infiere que

$$P\left\{A_1 \text{ o } A_2\right\} = \frac{n\,(A_1) + n\,(A_2)}{N}$$

esto es igual a:

$$\frac{n\,(A_1)}{N} + \frac{n\,(A_2)}{N}$$

PRINCIPIO ADITIVO DE LA PROBABILIDAD

Dado que estas últimas 2 fracciones son precisamente los que hablamos antes definido como $P\{A_1\}$ y $P\{A_2\}$ este resultado da lugar a la fórmula de "adición" que buscabamos, lo cual puede expresarse como:

REGLA DE LA PROBABILIDAD DE LA ADICION:

Cuando $A_1$ y $A_2$ son eventos <u>mutuamente exclusivos</u>

$$P\left\{A_1 \cup A_2\right\} = P\left\{A_1\right\} + P\left\{A_2\right\}$$

Para más de dos eventos mutuamente exclusivos basta aplicar esta fórmula tantas veces como sea necesario.

Para eventos que no son mutuamente exclusivos, es decir, que tienen elementos en común basta restar a la fórmula anterior, los elementos que se repiten en ambos y por tanto han sido doblemente considerados. Para tal caso:

$$P\left\{A_1 \cup A_2\right\} = P\left\{A_1\right\} + P\left\{A_2\right\} - P\left\{A_1 \cap A_2\right\}$$

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO DE LA PROBABILIDAD

Si el resultado de un evento E es equivalente a la combinación de los resultados de dos o más eventos (llamados $E_1$, $E_2$ . . . . $E_n$), entonces la probabilidad de E puede encontrarse como el producto:

$$P(E) = P(E_1) \times P(E_2) \ldots P(E_n)$$

"En donde cada una de las probabilidades en este producto está calculada sobre la suposición de que los eventos previos fueron todos satisfactorios".

Sea el experimento de sacar una carta de una baraja ordinaria de 52 (evento E) y sean:

$E_1$ = El evento de que la carta sacada sea una espada (13)

$E_2$ = El evento de que la carta sacada sea un as (4)

encuentre:

$$P(E_1 \text{ y } E_2)$$

Considérese que la primera carta será reemplazada antes de que la segunda sea escogida, el resultado que $E_1$ tiene no afectará a la probabilidad de $E_2$.

Por tanto: $P(E_1) = \dfrac{13}{52}$

$P(E_2) = \dfrac{4}{52}$

Entonces el resultado de E = ($E_1$ y $E_2$) es equivalente a la combinación de los resultados de $E_1$ y $E_2$, por ello podemos usar el principio multiplicativo:

$$P(E) = P(E_1) \times P(E_2)$$

Sustituyendo $\dfrac{13}{52} \times \dfrac{4}{52}$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$$

## PRIMER AÑO

Unidad 7

Módulo 1

Lugares de México

1.4 Gráficas de barras - Elaborar una gráfica de barras con los datos del registro climático efectuado en los meses anteriores.

- Complete las gráficas.

2.2.1.

3.2.1.

OBJETIVOS ESPECIFICOS DE PRIMARIA REFERIDOS A PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

## SEGUNDO AÑO

2.4.1. Realizará e interpretará registros sencillos de condiciones climáticas.

3.5.1. Elaborará e interpretará registros de la asistencia diaria.

5.4.1. Elaborará e interpretará registros familiares.

6.4.1. Elaborará e interpretará registros de salud.

7.4.1. Elaborará e interpretará registros relativos a sus juegos.

## TERCER AÑO

1.6.1. Interpretará registros relativos a sus juegos.

2.6.1. Distinguirá los fenómenos deterministas de los de azar.

3.6.1. Interpretará los resultados de un juego de azar.

4.6.1. Ordenará datos recopilados en una investigación.

4.6.2. Interpretará un diagrama de barras elaborada con los datos recopilados en la investigación.

4.6.3. Elaborará gráficas localizando puntos en el plano cartesiano.

5.6.1. El alumno intuirá la probabilidad de algunos resultados de un experimento de azar.

5.6.2. El alumno determinará la mayor o menor probabilidad de algunos resultados de un experimento de azar.

6.6.1. El alumno interpretará gráficas elaboradas en un plano cartesiano.

8.6.1. Interpretará gráficas sobre preferencias.

8.6.2. Interpretará correctamente una gráfica de barras.

## CUARTO AÑO

1.6.1. Mediante prácticas y experimentos identificará los fenómenos azarosos de los deterministas.

3.6.1. Determinará la mayor, menor o igual probabilidad de un evento, en situaciones dadas.

4.6.1. Elaborará un diagrama de barras, con los datos de las investigaciones, realizadas.

6.6.1. Determinará la mayor, menor o igual probabilidad de un evento.

7.6.1. Obtendrá información del análisis de las frecuencias que se representen en un diagrama de barras.

7.6.2. Analizará un diagrama de barras en relación con los datos representados.

7.6.3. Identificará diferentes eventos, estableciendo los conjuntos correspondientes.

7.6.4. Determinará la mayor, menor o igual probabilidad de eventos dados, mediante el recuento de frecuencias.

8.6.1. Determinará la intersección de dos eventos dados utilizando el conectivo "y" en su descripción.

8.6.2. Determinará la unión de dos eventos dados, utilizando el conectivo "o" en su descripción.

8.6.3. Analizará diagramas de barras en relación con las frecuencias representadas.

8.6.4. Elaborará diagramas con figuras representativas de agrupamientos.

8.6.5. Determinará la mayor, menor o igual probabilidad de un evento dado.

8.6.6. Identificará uniones, intersecciones y complementos de eventos dados.

## QUINTO AÑO

1.6.1. Distinguirá los fenómenos deterministas de los de azar.

2.6.1. Determinará la mayor o menor probabilidad de un evento de azar.

3.6.1. Dibujará diagramas de barras y gráficas.

4.6.1. Determinará la mayor, igual o menor probabilidad de algunos sucesos.

5.6.1. Interpretará los datos que registre en un diagrama de barras.

6.6.1. Determinará las probabilidades de un suceso.

8.6.1. Interpretará un diagrama de barras, después de elaborarlo.

## SEXTO AÑO

1.7.1. Distinguirá entre los fenómenos deterministas y los azarosos, mediante experimentos.

3.7.1. Representará numéricamente la probabilidad del suceso (evento) que se le indique.

3.7.2. Determinará la probabilidad de uniones, intersecciones y complementos de eventos.

4.7.1. Calculará probabilidades, mediante la -

aplicación de las fracciones equivalen--
tes.

4.7.2. Calculará probabilidades, al aplicar la propiedad de las fracciones equivalentes.

4.7.3. Calculará la probabilidad teórica y empí rica de eventos dados, mediante experi- mentos.

5.7.1. Comprobará que el promedio realizado en informaciones estadísticas, no siempre - arroja una información positiva en relación con situaciones concretas.

6.7.1. Determinará la mayor o menor probabili-- dad de un evento, aplicando su conoci--- miento sobre áreas.

7.7.1 Realizará inferencias de tipo estadístico.

8.7.1. Comprenderá la importancia de las matemá ticas en la vida humana, mediante su aná lisis de situaciones concretas.

## UNIDAD III

## ESTADISTICA

OBJETIVOS PARTICULARES:

3.1. Utilizará conceptos de la estadística descriptiva en la solución de problemas prácticos.

3.2. Aplicará los conocimientos sobre estadística en el análisis de los libros de Educación Primaria.

OBJETIVOS ESPECIFICOS:

3.1.1. Identificará instrumentos y técnicas en la recopilación de datos en estadística.

3.1.2. Ilustrará mediante gráficas diferentes distribuciones de frecuencias.

3.1.3. Aplicará las medidas de tendencia central en la solución de problemas.

3.1.4. Empleará medidas de dispersión en la solución de proble mas.

3.1.5. Utilizará la curva normal en la solución de diversos - problemas.

3.2.1. Identificará lòs objetivos específicos de cada uno de - los grados de Educación Primaria que se refieren a es-- tadística.

3.2.2. Elaborará secuencias dadas por lo menos para cada uno - de los objetivos seleccionados en cada grado.

# INTRODUCCION

La Estadística o Métodos Estadísticos como a veces se llama, está desempeñando un papel ascendente en casi todas las facetas del quehacer humano.

Anteriormente sólo era aplicada a los asuntos del estado, de donde viene su nombre; pero ahora la influencia de la estadística se extiende a todos los campos de la ciencia y tecnología.

El uso de los métodos estadísticos se ha difundido notablemente en las últimas décadas, y han demostrado ser de gran utilidad en la toma, organización, recopilación, presentación y análisis, de los datos que han de servir para obtener conclusiones y adoptar decisiones razonables de acuerdo con tales análisis.

Debido a la gran variedad, y el peso de estos intereses, los métodos estadísticos se han desarrollado con rápidez y han llegado a ser mucho más complejos y diversificados; no obstante, muchas de las técnicas más importantes son simples e idénticas en todas las ramas de aplicación.

Cuando se realiza un trabajo de investigación estadística, es frecuente advertir que el factor "población", "universo" o "fuente de información" que ha de ser observado es tan extenso que, casi resulta imposible llevar a cabo dicha investigación.

Para resolver los problemas que plantea una población extensa, es necesario seleccionar una parte del grupo que represente los diversos datos de la totalidad, esta parte del grupo se le llama "muestra".

La parte de los métodos estadísticos concerniente a la recolección y resumen de los datos se le llama ESTADISTICA DESCRIPTIVA o ESTADISTICA DEDUCTIVA. La parte concerniente a la obtención de conclusiones respecto a la fuente de información de los datos recibe el nombre de ESTADISTICA INDUCTIVA o ESTADISTICA INFERENCIAL.

El objetivo último son las inferencias, es decir, la obtención de conclusiones y la parte descriptiva de la estadística, no es sino preliminar de aquella que es la parte medular.

En cumplimiento a los objetivos del programa que nos proponemos desarrollar, analizaremos únicamente los principios generales de la <u>estadística descriptiva</u>.

## 3.1.1. INSTRUMENTOS Y TECNICAS EN LA RECOPILACION DE DATOS

Recopilación de datos es la obtención de datos númericos, seleccionados de una "población", "universo" o "fuente de información" que es representativa de la misma. A esta selección de datos representativos le llamaremos "muestra". Veamos el siguiente ejemplo:

- Al investigar un problema X entre 300 personas de un estado de 350,000 habitantes:

  La población serán los 350,000 habitantes

  La muestra serán los 300 habitantes investigados.

Es importante señalar que, en la selección de los datos (muestra-s), se cumpla con la propiedad de ser la más representativa o fiel del universo que se desea investigar, con el fín de que en la obtención de resultados se llegue a estimaciones válidas.

Ante el problema de cómo ha de seleccionarse una muestra, en la población, de modo que puedan sacarse conclusiones válidas respecto a la población, partiendo de la muestra, se presentará y justificará un método de muestreo llamado MUESTREO ALEATORIO, el cual consiste en un procedimiento en donde todo miembro de una población tiene la misma oportunidad de ser escogido. Las técnicas usadas en los juegos de azar, se emplean frecuentemente para obtener una muestra semejante.

Una de las varias propiedades deseables de la muestra aleatoria, es su tendencia a representar fielmente a la población de origen en miniatura.

## TOMA DE DATOS

Es la obtención de una colección de los mismos que no han sido ordenados numéricamente. Un ejemplo es el de la siguiente tabla de datos en la que se registran los pesos de 40 estudiantes universitarios con aproximación de una libra.

## DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Construir una distribución de frecuencias:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 138 | 164 | 150 | 132 | 144 | 125 | 149 | 157 |
| 146 | 158 | 140 | 147 | 136 | 148 | 152 | 144 |
| 168 | 126 | 138 | 176 | 163 | 119 | 154 | 165 |
| 146 | 173 | 142 | 147 | 135 | 153 | 140 | 135 |
| 161 | 145 | 135 | 142 | 150 | 156 | 145 | 128 |

ORDENACION

Una vez tomados los datos numéricos se ordenan de mayor a menor o viceversa. La diferencia entre el mayor y menor de los números se llama RANGO o RECORRIDO de los datos. En la tabla anterior, por ejemplo, si el peso mayor de los 40 estudiantes es 176 libras y el menor es de 119 libras, el rango es 176 - 119 libras = 57 libras.

FIGURA No. 31

119 R A N G O 176

O R I G I N A L

Cuando se dispone de gran número de datos, es útil el distribuirlos en CLASES o CATEGORIAS y determinar el número de individuos pertenecientes a cada clase, que es la FRECUENCIA DE CLASE. Una ordenación tabular de los datos en clases y con las frecuencias correspondientes a cada una de ellas, se conoce como una DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS o TABLA DE FRECUENCIAS.

Para ello es necesario, una vez obtenido el rango, (57) dividirlo entre 2 o más números (C) a fin de escoger el cociente más próximo a 15. Este convencionalismo (de aceptar el cociente más próximo a 15) ha sido acordado en los Congresos Mundiales de Estadística.

$$\frac{R}{C} = K$$

en donde:

* En el cociente K se pasa al mayor entero, para obtener el RANGO NUEVO.

R = rango
C = tamaño de la clase
K = número de intervalos

Aplicando la fórmula citada, en el caso que nos ocupa, sería:

$\frac{57}{3} = 19$ (20 intervalos tamaño 3)

$\frac{57}{5} = 11$ (12 intervalos tamaño 5)

$\frac{57}{7} = 8$ ( 9 intervalos tamaño 7)

De lo anterior se desprende que el dato más adecuado es:

12 intervalos - tamaño 5.

RANGO NUEVO

Así llegamos a la obtención de un rango nuevo:

$$12 \times 5 = 60$$

Las 3 unidades agregadas serán distribuidas en partes iguales a un lado y otro del rango.

117.5 RANGO NUEVO 177.5

$$\frac{3}{2} = 1.5$$

FIGURA No. 32

Para algunos especialistas cuando el rango aumenta en un número par, ejemplo 4 unidades, la distribución sería:

4 → 1.5
4 → 2.5

INTERVALOS DE CLASE Y LIMITES DE CLASE

Un símbolo que define una clase tal como 176 - 172, del caso que nos ocupa, se conoce como INTERVALO DE CLASE. Los números extremos, 176 y 172, son los LIMITES DE CLASE; el número menor 172 es el límite inferior de la clase y el mayor 176 es el límite superior.

Con frecuencia los términos clase e intervalo se utilizan indistintamente, aunque el intervalo de clase es realmente un símbolo para la clase.

LIMITES REALES DE CLASE

Si los pesos de los estudiantes se registran con aproximación de libra, el intervalo de clase 176 - 172 de hecho incluye todos los pesos desde 171.500 . . . a 176.500 lbs.

Estos números representados brevemente por los números exactos 171.5 o 176.5 se conocen como LIMITES REALES DE CLASE o LIMITES VERDADEROS DE CLASE: el menor de ellos, es el límite real inferior y el mayor de ellos, es el límite real superior.

Prácticamente, los límites reales de clase se obtienen sumando al límite superior de un intervalo de clase, el límite inferior del intervalo de clase contiguo superior y dividiendo entre 2.

Los límites reales de clase pueden quedar determinados mediante la obtención del rango nuevo, según el procedimiento seguido anteriormente.

TAMAÑO DE UN INTERVALO DE CLASE

El tamaño de un intervalo de clase, es la diferencia entre los límites reales de clase que lo forman y se conoce como ANCHURA DE CLASE, TAMAÑO DE CLASE o LONGITUD DE CLASE.

Si todos los intervalos de clase de una distribución de frecuencia, tienen igual anchura, está anchura común se representa por C. En tal caso, C es igual a la diferencia entre dos sucesivos límites de clase inferiores o superiores. Para los datos, del caso que nos ocupa, por ejemplo el intervalo de clase C=177.5-172.5= 5 o bien 172.5-167.5 = 5.

MARCA DE CLASE

Se llama marca de clase al PUNTO MEDIO del intervalo de clase y se obtiene sumando los límites superior e inferior, de la clase y dividiendo entre 2. Así, la marca de clase del intervalo 177.5 - 172.5 es $\frac{(177.5 + 172.5)}{2} = 175$

La MARCA DE CLASE se llama también PUNTO MEDIO DE CLASE. En lo sucesivo, todas las observaciones pertenecientes a un intervalo de clase dado se suponen coincidentes con la marca de clase.

Así, todos los pesos en el intervalo de clase 177.5-172.5 libras se considerarán como 175 libras.

Resumiendo, los pasos generales para una distribución de frecuencias son:

1. Encontrar el rango o recorrido.

2. Dividir el rango entre un número conveniente de intervalos del mismo tamaño.

3. Obtención de un rango nuevo que nos permitirá llegar a los límites reales de clase.

4. Determinar el número de observaciones que caen dentro de cada intervalo de clase, es decir, encontrar las frecuencias de clase.

Como resultado de la aplicación de los pasos ya citados, de los pesos de 40 estudiantes universitarios obtenemos la siguiente tabla:

FIGURA No. 33

| LIMITES REALES | MARCAS DE CLASE | CONTEO | FRECUENCIAS | FRECUENCIAS RELATIVAS |
|---|---|---|---|---|
| 177.5 - 172.5 | 175 | // | 2 | 2/40= 5 % |
| 172.5 - 167.5 | 170 | / | 1 | 1/40= 2.5% |
| 167.5 - 162.5 | 165 | /// | 3 | 3/40= 7.5% |
| 162.5 - 157.5 | 160 | // | 2 | 2/40= 5 % |
| 157.5 - 152.5 | 155 | //// | 4 | 4/40= 10 % |
| 152.5 - 147.5 | 150 | ~~////~~ | 5 | 5/40= 12.5% |
| 147.5 - 142.5 | 145 | ~~////~~/// | 8 | 8/40= 20 % |
| 142.5 - 137.5 | 140 | ~~////~~/ | 6 | 6/40= 15 % |
| 137.5 - 132.5 | 135 | //// | 4 | 4/40= 10% % |
| 132.5 - 127.5 | 130 | // | 2 | 2/40= 5 % |
| 127.5 - 122.5 | 125 | // | 2 | 2/40= 5 % |
| 122.5 - 117.5 | 120 | / | 1 | 1/40= 2.5% |

$\Sigma$ n = 40 $\Sigma$ fr = 100%

HISTOGRAMA Y POLIGONO DE FRECUENCIAS

La graficación de la distribución de frecuencias puede hacerse por medio de un HISTOGRAMA o UN POLIGONO DE FRECUENCIAS.

Para construir un histograma y un polígono de - frecuencias se siguen los siguientes pasos:

1. Se trazan los ejes de X (horizonal) y el Y (vertical).

2. El eje de las X se dividirá en tantas partes iguales como puntos medios o marcas de clase haya en la tabla (en el caso que nos ocupa son 12) dejando como se acostumbra, un espacio libre igual a cada extremo del eje con el objeto de poder cerrar e el polígono, en caso de que sea ésa la - forma en que se desea gráficar.

   En cada uno de estos puntos marcados se anota la marca de clase que le corresponde (en forma creciente).

3. El eje de las Y tambien se divide en partes iguales; en cada uno de los puntos marcados se anotarán las frecuencias empezando con 0 en la intersección de X y Y y continuando hacia arriba en forma - -

ascendente.

En el presente caso tenemos 8 frecuencias como máximo y 1 como mínimo.

4. Ya con los dos ejes marcados podemos graficar, con un histograma o con un polígono de frecuencias, las relaciones entre los puntos medios y sus frecuencias respectivas.

El HISTOGRAMA consiste en una serie de rectángulos que tienen sus bases sobre el eje horizontal (eje X) con centros en las marcas de clase y longitud igual al tamaño de los intervalos de clase, las alturas de los rectángulos (eje Y) son proporcionales a las frecuencias de clase.

El POLIGONO DE FRECUENCIAS es un gráfico de línea trazado sobre las marcas de clase. Puede obtenerse uniendo los puntos medios de los techos de los rectángulos en el histograma.

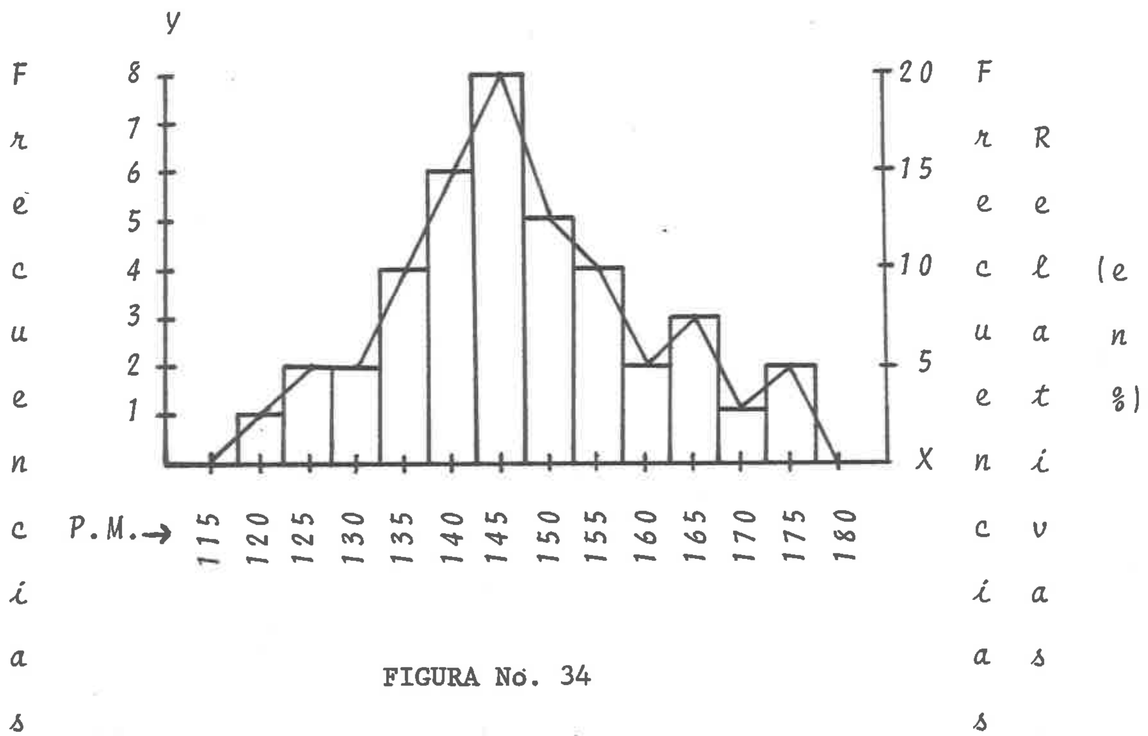



FIGURA No. 34

Nótese que la suma de las áreas de las barras es igual al área bajo el polígono y sobre el eje.

3.1.2. DIFERENTES DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

La FRECUENCIA RELATIVA de una clase se obtiene al dividir la frecuencia de la clase entre el total de frecuencias de todas las clases y se expresa generalmente como porcentaje. Por ejemplo la frecuencia relativa de la clase 177.5-172.5 de la tabla anterior es 2/40 = 5%. Lógicamente la suma de las frecuencias relativas de todas las clases es evidentemente 1 o 100%.

FRECUENCIAS RELATIVAS

Para graficar distribuciones de frecuencia relativa, basta agregar una escala vertical a la derecha del mismo histograma, anotando la frecuencia expresada en porcentaje. De esta manera las gráficas que resultan se llaman HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS RELATIVAS o HISTOGRAMAS PORCENTUALES o POLIGONOS DE FRECUENCIAS RELATIVAS o POLIGONOS PORCENTUALES.

FRECUENCIAS ACUMULADAS U OJIVAS

La frecuencia total de los valores que son menores al límite real superior de clase en un intervalo de clase dado, se conoce como FRECUENCIA ACUMULADA, hasta ese intervalo de clase inclusive. Para ejemplificar lo anterior veamos la siguiente tabla de distribución de frecuencia de un problema dado:

| INTERVALOS | | Punto | FRECUENCIAS | |
|---|---|---|---|---|
| Límites de clase | Límites Reales | Medio | De clase | Acumulada |
| 63 - 65 | 62.5 - 65.5 | 64 | 6 | 25 |
| 60 - 62 | 59.5 - 62.5 | 61 | 5 | 19 |
| 57 - 59 | 56.5 - 59.5 | 58 | 7 | 14 |
| 54 - 56 | 53.5 - 56.5 | 55 | 3 | 7 |
| 51 - 53 | 50.5 - 53.5 | 52 | 4 | 4 |
| | | | 25 | |

Para obtener la frecuencia acumulada hasta el intervalo de clase 59.5 - 62.5 inclusive, sumaríamos la frecuencia de los valores que son menores al límite real superior de clase de ese intervalo (incluyéndolo) y la suma nos dará la frecuencia acumulada:

$$4 + 3 + 7 + 5 = 19.$$

Lo cual significaría si se tratara de la calificación obtenida en una prueba por un grupo de estudiantes que 19 estudiantes sacaron una puntuación menor que 62.5

La tabla donde se representen las frecuencias acumuladas recibe el nombre de "Distribución de frecuencias acumuladas, Tabla de frecuencias acumuladas o simplemente Distribución acumulada!

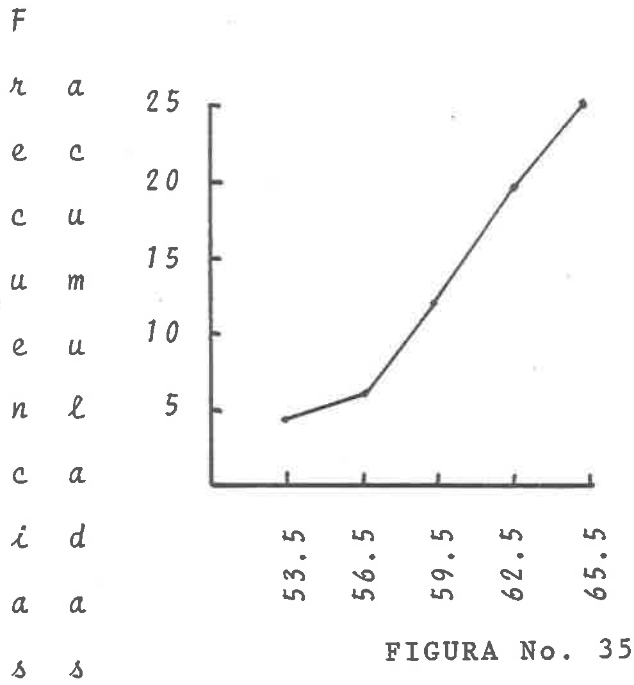



FIGURA No. 35

| Puntuaciones | Número de estudiantes |
|---|---|
| Menor que 53.5 | 4 |
| Menor que 56.5 | 7 |
| Menor que 59.5 | 14 |
| Menor que 62.5 | 19 |
| Menor que 65.5 | 25 |

El gráfico que muestra las frecuencias acumuladas menores que cualquier límite real superior de clase, trazado sobre los límites reales de clase (eje horizontal) se llama "POLIGONO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS" u "OJIVA" como se muestra en la figura anterior.

Si como en este caso se consideran los valores menores a cada uno de los límites reales superiores, la distribución de frecuencias acumuladas se denomina: Distribución acumulada "menor que" o si por el contrario consideramos los valores mayores o iguales a cada límite real inferior, la distribución se denomina: Distribución acumulada "a más".

Siempre que nos referimos a distribuciones acumuladas u ojivas sin especificar, se entenderá que son del tipo "menor que".

FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS. OJIVAS PORCENTUALES

La frecuencia relativa acumulada, también llamada frecuencia porcentual acumulada, es la frecuencia acumulada dividida entre la frecuencia total. Pongamos por ejemplo, obtener la frecuencia relativa acumulada o porcentual de puntuaciones menores que 59.5 = 14/25 = 56%, queriendo con ello decir que el 56% de los alumnos obtuvieron puntuaciones menores que 59.5.

| Límites de Clase | FRECUENCIA | | |
|---|---|---|---|
| | De clase | Acumulada | Acumulada en % |
| 62.5 - 65.5 | 6 | 25 | 100 |
| 59.5 - 62.5 | 5 | 19 | 76 |
| 56.5 - 59.5 | 7 | 14 | 56 |
| 53.5 - 56.5 | 3 | 7 | 28 |
| 50.5 - 53.5 | 4 | 4 | 16 |

En la última columna de la tabla anterior aparecen las frecuencias acumuladas representadas en porcentaje por lo que dicha tabla se denomina "Distribución de frecuencias relativas acumuladas o Distribuciones porcentuales acumuladas".

Veamos ahora la gráfica que representa dicha distribución de frecuencias.

(siguiente hoja)

Frecuencias acumuladas relativas (%)

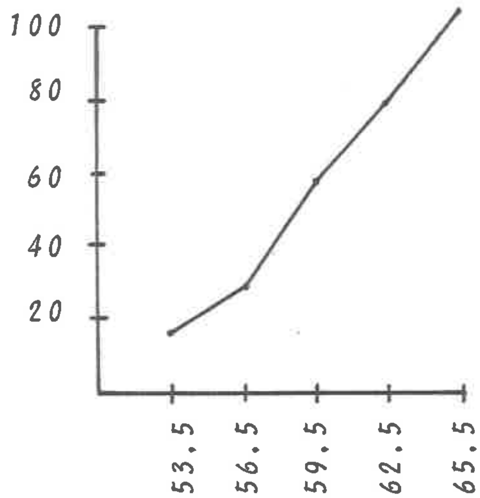



FIGURA No. 36

A esta gráfica se le llama polígono de frecuencias relativas acumuladas u ojivas porcentuales.

### 3.1.3. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Un promedio es un valor, que es típico o representativo de un conjunto de datos. Como tales valores tienden a situarse en el centro del conjunto de datos según su magnitud, los promedios se conocen también como medidas de centralización.

Existen diferentes medidas de centralización, las más comunes son la MEDIA ARITMETICA o simplemente MEDIA, la MEDIANA y la MODA.

Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, dependiendo la aplicación de una u otra de los resultados que se pretendan sacar de los datos.

**MEDIA ARITMETICA**

$\overline{X}$

La media aritmética es una medida de tendencia central, que tiene por objeto sacar un promedio aritmético de una serie de datos.

La media aritmética o media de un conjunto de N números $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots, X_n$ se representa por $\overline{X}$ (léase "X barra") y se define como:

$$(1) \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{\sum X}{N}$$

**METODO LARGO PARA CASOS SIN AGRUPAR**

Sean los valores 6, 9, 5, 12, 10:

$$\overline{X} = \frac{6 + 9 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{42}{5} = 8.4$$

La media aritmética o media de esos valores resulta ser 8.4. En la fórmula (1) se utilizó el símbolo $\sum_{j=1}^{N} X_j$ para indicar la suma de todas las $X_j$ desde $j=1$ a $j=N$, es decir, por definición:

$$\sum_{j=1}^{N} X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

Cabe aclarar que el símbolo $X_j$ (léase "X sub-índice j") denota cualquiera de los N valores $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$, que una variable puede tomar. La letra j en $X_j$ se llama índice o subíndice, e indistintamente podría utilizarse cualquier otra letra como i, k, p, etc.

Cuando el número de datos es muy grande, se agrupan los datos en una tabla de frecuencias en donde cada uno de los datos originales se reemplazan por el punto medio del intervalo de clase en que se encuentra.

Este punto medio es llamado la marca de clase del intervalo. Supongamos que se trate de los pesos de un grupo de estudiantes, tomemos de la tabla de frecuencias uno de los intervalos 118 - 126, la marca de clase de este intervalo es 122; de modo que todos los estudiantes cuyos pesos se encuentran en ese intervalo de clase, tendrán asignado el peso de 122 libras que es el punto medio del intervalo.

| PESOS | Marca de clase $X_j$ | Frecuencia $f_j$ | $X_j\ f_j$ |
|---|---|---|---|
| 118 - 126 | 122 | 3 | 366 |
| 127 - 135 | 131 | 5 | 655 |
| 136 - 144 | 140 | 9 | 1260 |
| 145 - 153 | 149 | 12 | 1788 |
| 154 - 162 | 158 | 5 | 790 |
| 163 - 171 | 167 | 4 | 668 |
| 172 - 180 | 176 | 2 | 352 |

$\Sigma f_j = 40 \qquad \Sigma X_j f_j = 5879$

Para calcular la media de los datos agrupados usando la fórmula (1) será suficiente sumar los valores agrupados tantas veces como ocurran. Por ejemplo: si $X_1 = 122$ se sumará 3 veces; así $X_2$ tendría que sumarse 5 veces, etc. En general, como $X_1$ ocurre $f_1$ veces se infiere que $X_1$ debe sumarse $f_1$ veces, lo que equivale a multiplicar $X_1$ por $f_1$. Lo mismo se puede decir de las otras marcas de clase. La suma de todas estas medidas en una tabla de datos agrupados será por tanto la suma de todos los productos semejantes a $X_1\ f_1$. La media para una tabla tal toma entonces la forma:

(2) $$\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k}{N}$$

La fórmula precedente puede escribirse en forma abreviada si adoptamos el símbolo (sigma griega): $\sum$

METODO LARGO PARA CASOS AGRUPADOS

(3) $$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{N}$$

Aplicando la fórmula (3) al problema anterior:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{N} = \frac{5879}{40} = 146.975$$

Hasta aquí hemos aplicado el método largo para la obtención de la media. Describiremos ahora un método corto, también para casos agrupados.

METODO CORTO

Si A es cualquier media aritmética supuesta tomada del punto medio (marca de clase) de cualquier intervalo y d=desviación es la diferencia entre la marca de clase y la media aritmética supuesta, entonces por el método corto:

(4) $$\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

| | Pesos | P.M. | f | d | f x d |
|---|---|---|---|---|---|
| | 118 - 126 | 122 | 3 | -27 | -81 |
| | 127 - 135 | 131 | 5 | -18 | -90 |
| | 136 - 144 | 140 | 9 | - 9 | -81 |
| A= | 145 - 153 | 149 | 12 | 0 | 0 |
| | 154 - 162 | 158 | 5 | 9 | 45 |
| | 163 - 171 | 167 | 4 | 18 | 72 |
| | 172 - 180 | 176 | 2 | 27 | 54 |
| | | | $\sum$= 40 | | $\sum$ = -81 |

A partir de la media supuesta (A = 149) escogida arbitrariamente se obtiene la desviación -- (d = X - A) nótese que cuando la marca de clase es menor que la media supuesta, la desviación - resulta negativa; haciendo lo mismo con cada - uno de los intervalos, obtuvimos la columna d. Al multiplicar la desviación de cada marca de clase por su frecuencia respectiva, habremos obtenido la columna f X d. Aplicando la fórmula (4):

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = 149 + \left(\frac{-81}{40}\right) = 149 + (-2.025)$$

$$\bar{X} = \underline{146.975}$$

METODO CLAVE

Si todos los intervalos de clase tienen igual tamaño c, y observando que todas las desviaciones resultan múltiplos de c, se infiere que, las desviaciones $d_j = X_j - A$ pueden expresarse como $cu_j$, donde $u_j$ puede ser números enteros - positivos o negativos o cero, es decir, - - - 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, $\pm$ 3 . . . . y entonces la fórmula (4) se convierte en:

$$(5) \qquad \bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right) c$$

Obsérvese que la columna d del cuadro anterior será sustituída por la columna u y la columna fd por la columna fu.

| | Pesos | P.M. | f | u | f u |
|---|---|---|---|---|---|
| | 118 - 126 | 122 | 3 | -3 | - 9 |
| | 127 - 135 | 131 | 5 | - 2 | -10 |
| | 136 - 144 | 140 | 9 | - 1 | - 9 |
| A = | 145 - 153 | <u>149</u> | 12 | 0 | 0 |
| | 154 - 162 | 158 | 5 | 1 | 5 |
| | 163 - 171 | 167 | 4 | 2 | 8 |
| | 172 - 180 | 176 | 2 | 3 | 6 |
| | | | $\Sigma$=40 | | $\Sigma fu$ = -9 |

Sustituyendo en la fórmula:

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right) c =$$

$$\bar{X} = 149 + \left(\frac{-9}{40}\right) 9 =$$

$$149 + (-0.225)\ 9 =$$

$$149 + (-2.205) = 146.975$$

$$\bar{X} = 146.975$$

CONCLUSION:

Hemos obtenido la Media Aritmética a través de distintos métodos, encontrando el mismo resultado:

METODO LARGO = $\bar{X} = \frac{\Sigma X_j f_j}{N} = \underline{146.975}$

METODO CORTO = $\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = \underline{146.975}$

METODO CLAVE = $\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right) c = \underline{146.975}$

MEDIANA $\tilde{X}$

La mediana de una colección de datos ordenados en orden de magnitud, es el valor medio o la media aritmética de los dos valores medios.

EJEMPLO 1: Sean los números:

3,4,4,5,<u>6</u>,8,8,8,10 que tienen de mediana 6.

EJEMPLO 2: Sean los números:

5,5,7,9,11,12,15,18; su mediana será

$$\frac{9 + 11}{2} = 10$$

MEDIANA CON DATOS AGRUPADOS

Para datos agrupados, la mediana se obtiene mediante la fórmula:

$$(6) \quad \tilde{X} = Li + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)_1}{f\ \text{mediana}}\right) c$$

donde:

$Li$ = Límite real inferior de la clase mediana (es decir, la clase que contiene la mediana).

$N$ = Número total de datos (es decir, frecuencia total).

$(\Sigma f)_1$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase mediana.

$f$ mediana = frecuencia de la clase mediana.

$c$ = tamaño del intervalo de la clase mediana.

A continuación se presenta una tabla de distribución de frecuencias sobre las estaturas de un grupo de estudiantes.

| Estaturas | P.M. | $f$ | | $L_i$ Real | |
|---|---|---|---|---|---|
| 149 - 154 | 151.5 | 6 | | | |
| 155 - 160 | 157.5 | 13 | CLASE MEDIANA | $\frac{155+154}{2}$ | 154.5 |
| 161 - 166 | 163.5 | 6 | | | |
| 167 - 172 | 169.5 | 6 | | | |
| 173 - 178 | 175.5 | 1 | | | |
| | | $\Sigma f = 32$ | | | |

Aplicando la fórmula:

$$\tilde{X} = Li + \left( \frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)_1}{f \text{ mediana}} \right) c$$

$$\tilde{X} = 154.5 + \left( \frac{\frac{32}{2} - 6}{13} \right) 6$$

$$154.5 + \left( \frac{16 - 6}{13} \right) 6$$

154.5 + 4.61

$\tilde{X}$ = 159.11

Geométricamente, la mediana es el valor de X - (abscisa) que corresponde a la vertical que divide un histograma en dos partes de igual área.

La moda de una serie de números es aquel valor que se presenta con la mayor frecuencia, es decir, es el valor que más se repite.

MODA $\hat{X}$

En la siguiente serie de datos no agrupados:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.732 | 0.729 | 0.732 | $\hat{X}$ = 0.732 |
| 0.728 | 0.739 | 0.743 | Es el valor que |
| 0.746 | 0.732 | 0.732 | aparece con mayor |
| 0.738 | 0.730 | 0.735 | frecuencia. |
| 0.732 | 0.738 | 0.738 | |

En algunas ocasiones no hay moda:

2, 3, 4, 6, 8, 11 no hay valor repetido.

En otras ocasiones el conjunto de datos es bimodal:

4, 4, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9 hay dos valores igualmente repetidos.

En una curva, la moda se reconoce como la abscisa de la parte más alta de la misma.

En un histograma la moda se reconoce porque es un valor de la barra más alta.

De una distribución de frecuencias o un histograma, la moda puede sacarse de la fórmula:

MODA CON DATOS AGRUPADOS.

$$\hat{X} = Li + \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$ donde:

Li = Límite real inferior de clase de la clase modal (es decir, la clase que contiene la moda).

$\Delta_1$ = Exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase contigua inferior.

$\Delta_2$ = Exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase contigua superior.

c = Tamaño del intervalo de clase modal

| Li | Ls | f | |
|---|---|---|---|
| 149 | 154 | 6 | |
| 155 | 160 | 13 | CLASE MODAL |
| 161 | 166 | 6 | |
| 167 | 172 | 6 | |
| 173 | 178 | 1 | |

Aplicando la fórmula:

$$\hat{X} = Li + \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

$$Li = 154.5$$

$$_1 = 7 = 13 - 6$$

$$_2 = 7 = 13 - 6$$

$$c = 6$$

$$\hat{X} = 154.5 + \left( \frac{7}{7 + 7} \right) 6$$

$$\hat{X} = 154.5 + 3$$

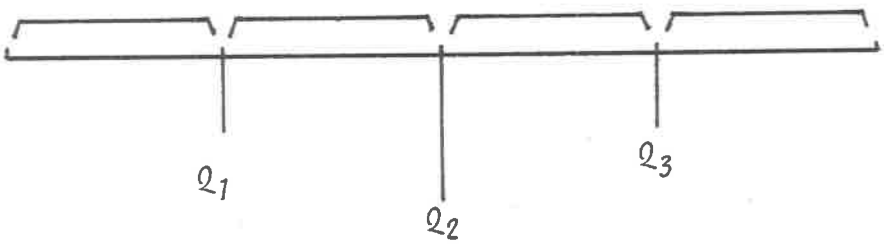
$$\hat{X} = \underline{157.5}$$

**CUARTILES DECILES Y PERCENTILES**

*Si una serie de datos se colocan en orden de magnitud, el valor medio (o la media aritmética de los dos valores medios) que divide al conjunto de datos en dos partes iguales es la mediana. Por extensión de esta idea, se puede pensar en aquellos valores que dividen a los datos en cuatro partes iguales. Estos valores, representados por $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, se llaman 1°, 2° y 3er. cuartil respectivamente; el valor de $Q_2$ es igual a la mediana.*

*La siguiente representación gráfica nos da una idea clara del concepto.*

$\tilde{X}$ FIGURA No. 37




*El cuartil inferior ($Q_1$) abarca la cuarta parte de las medidas, el segundo cuartil ($Q_2$) corresponde a la mediana, o sea la mitad de los valores y el cuartil superior ($Q_3$) representa las 3/4 partes de los valores.*

*Los valores se obtienen mediante las fórmulas:*

$$Q_1 \Rightarrow \frac{N}{4} \qquad Q_2 \Rightarrow \frac{2N}{4} \qquad Q_3 \Rightarrow \frac{3N}{4}$$

*Una vez obtenidos dichos valores, se aplica la siguiente fórmula:*

$$Q_N = Li + \frac{(\Sigma f)_1}{f Q_N} c$$

*en donde:*

*Li* = *Límite real inferior de la clase cuartilar. $Q_1$, $Q_2$, o $Q_3$*

$(\Sigma f)_1$ = *Suma de todas las frecuencias de las clases inferiores a la clase que contiene a $Q_1$, $Q_2$, o $Q_3$.*

$f_{Q_N}$ = Frecuencia de la clase que contiene a $Q_1$, $Q_2$ o $Q_3$.

c = Tamaño del intervalo de la clase que - contiene a $Q_1$, $Q_2$, o $Q_3$.

$Q_N$ = $Q_1$, $Q_2$, o $Q_3$.

| Intervalos | f |
|---|---|
| 149 - 154 | 6 |
| 155 - 160 | 13 |
| 161 - 166 | 6 |
| 167 - 172 | 6 |
| 173 - 178 | 1 |
| | $\Sigma = 32$ |

Mediante la fórmula obtengamos los valores de:

$$Q_1 \Longrightarrow \frac{32}{4} = 8$$

$$Q_1 = Li + \frac{\frac{N}{4} - (\Sigma f)_1}{f_{Q_1}} c$$

$$Q_1 = 154.5 + \left(\frac{8 - 6}{13}\right) 6 = 155.42$$

$$Q_1 = \underline{155.42}$$

De la misma manera para $Q_2$, tenemos:

$$Q_2 \Longrightarrow \frac{2N}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

$$Q_2 = Li + \frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)_1}{f_{Q_2}} c$$

$$Q_2 = 154.5 + \left(\frac{16 - 6}{13}\right) 6$$

$$Q_2 = 154.5 + 4.615 = 159.115$$

$$Q_2 = \underline{159.115}$$

Siguiendo la fórmula para el $Q_3$:

$$Q_3 \Longrightarrow \frac{3N}{4} = \frac{96}{4} = 24$$

$$Q_3 = Li + \frac{3\frac{N}{4} - (\Sigma f)_1}{f_{Q_3}} c$$

$$Q_3 = 160.5 + \frac{(24 - 19)}{6} 6$$

$$Q_3 = 160.5 + 5 = 165.5$$

$$Q_3 = \underline{165.5}$$

Es conveniente calcular este tipo de valores por las inferencias estadísticas que de ellos podemos obtener; así por ejemplo si la tabla anterior se refiriera a pesos de un grupo de personas, podríamos afirmar que: el 25% de ellos pesan 155.42 libras o menos. El 50% pesan 159.115 libras o menos y el 75% pesan 165.5 o menos.

Análogamente los valores que dividen los datos en <u>10</u> partes iguales se llaman <u>deciles</u> y se presentan por $D_1, D_2, D_3, \ldots D_9$, mientras que los valores que dividen en <u>100</u> partes iguales se llaman <u>percentiles</u> y se presentan por $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{99}$.

El conjunto, cuartiles, deciles, percentiles y otros valores obtenidos por divisiones análogas de los datos se llaman <u>cuantiles</u>.

## 3.1.4. MEDIDAS DE DISPERSION

El propósito de esta sección es el de introducir una cantidad que describa la medida en la cual los datos de un conjunto varían alrededor de su media. Al grado en que los datos numéricos tienden a extenderse alrededor de un valor medio, se le llama <u>variación o dispersión de los datos</u>.

Se utilizan distinatas medidas de dispersión o variación:

a). Rango.

b). Desviación media.

c). Rango semi intercuartílico.

d). Desviación típica o estándar.

e). Varianza, etc.

El rango es la más sencilla de las medidas de dispersión y consiste en la diferencia entre el número mayor y el menor de un conjunto de datos. RANGO

Sea el conjunto de números:

2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12

el rango será 12 - 2 = 10

A veces el rango se da por la simple anotación de los números mayor y menor. En el ejemplo anterior sería 12 - 2.

La desviación media también llamada promedio de desviación de una serie de N números $X_1$, $X_2$,. . . . $X_n$, viene definida por: DESVIACION MEDIA

Desviación media = D m =

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\left| X_j - \overline{X} \right|}{N} = \frac{\sum \left| X - \overline{X} \right|}{N} = \left| X - \overline{X} \right| \qquad (1)$$

donde:

$\overline{X}$ es la media aritmética de los números, $|X_j - \overline{X}|$ es el valor absoluto de las desviaciones de las diferentes $X_j$ de $\overline{X}$ (el valor absoluto de un número es el mismo sin asociarle signo alguno y se indica por dos barras verticales a ambos lados del número. Así, $|-4| = 4$, $|+3| = 3$, etc.

EJEMPLO: Hallar la desviación media de los números 2, 3, 6, 8, 11.

Media aritmética = $\overline{X} = \frac{2 + 3 + 6 + 8 + 11}{5} = 6$

Desviación media:

$$D\ M = \frac{|2 - 6| + |3 - 6| + |6 - 6| + |8 - 6| + |11 - 6|}{5} =$$

$$\frac{4 + 3 + 0 + 2 + 5}{5} = 2.8$$

DM = 2.8

Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$, se presentan con frecuencias $f_1, f_2, \ldots f_k$, respectivamente, la desviación media puede escribirse como:

$$DM = \frac{\sum_{j=1}^{k} f_j |X_j - \overline{X}|}{N} = \frac{\sum f |X - \overline{X}|}{N} = |X - \overline{X}| \quad (2)$$

Esta forma es útil para datos agrupados donde las diferentes $X_j$ representan las marcas de clase y las $f_j$, las correspondientes frecuencias de clase. Aplicaremos la fórmula (2) a la siguiente tabla de distribución de frecuencias considerando que la $\overline{X}$ de estos datos obtenida de antemano resultó ser 58.84.

| Marca de clase $X_j$ | $\lvert X - \overline{X} \rvert$ | frecuencias $f_j$ | $f \lvert X-\overline{X} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 64 | 5.16 | 6 | 30.96 |
| 61 | 2.16 | 5 | 10.8 |
| 58 | .84 | 7 | 5.88 |
| 55 | 3.84 | 3 | 11.52 |
| 52 | 6.84 | 4 | 27.36 |
| | | $N = 25$ | $86.52 = \sum f \lvert X-\overline{X} \rvert$ |

$$DM = \frac{\sum f \; X - \overline{X}}{N} = \frac{86.52}{25} = 3.46$$

Ocasionalmente la desviación media se define como desviaciones absolutas de la mediana u otro producto en lugar de la media. Cuando en lugar de la media se utiliza la mediana, la desviación media resulta mínima.

RANGO SEMI-INTERCUARTILICO O DESVIACION CUARTILICA Q

Anteriormente se describió el procedimiento para obtener los valores de los diferentes cuartiles de j eje X en un histograma.

Dichos cálculos se hacen ahora necesarios para obtener el rango semiintercuartílico o desviación cuartílica que es una más de las medidas de dispersión.

El rango semiintercuartílico de una serie de datos se define por la fórmula:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

en donde $Q_1$ y $Q_3$ son el primer y el tercer cuartil respectivamente.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION

Puesto que se ha elegido la media como medida de la localización de un conjunto de medidas, una medida de variación debería indicar qué tanto se desvían de su media las medidas de un conjunto. Para datos no clasificados correspondientes a la fórmula (1), las desviaciones son $X_1 - \overline{X}$, $X_2 - \overline{X}$, . . . . $X_n - \overline{X}$. Los valores de $\overline{X}$ originan desviaciones positivas, y los valores de X menores que $\overline{X}$ originan desviaciones negativas. Ya que sólo nos interesan distancias positivas desde la media, es necesario usar los valores absolutos de tales desviaciones o posiblemente sus cuadrados. (Ya que el cuadrado de cualquier número es siempre un número positivo). Los valores absolutos presentan dificultades aritméticas, por lo que se acostumbra tomar los cuadrados de las desviaciones y promediarlos. Así, una medida de la variación de un conjunto de medidas con respecto a su media está dada por:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}$$

Si un conjunto de medidas ha sido clasificado, entonces el promedio de los cuadrados de las desviaciones es:

VARIANZA $s^2$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i}{N}$$

La cantidad resultante se denota con $s^2$ y se llama varianza de muestra. Así para datos no agrupados:

(3)
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}$$

Y para datos clasificados:

(4)
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i}{N}$$

Puesto que la variación involucra los cuadrados de las desviaciones, es un número en unidades cuadradas. En algunos problemas resulta deseable que las cantidades que describen una distribución posean las mismas unidades que el conjunto de mediciones originales. La media satisface este requisito, pero la varianza no; sin embargo, tomando la raíz cuadrada positiva de la varianza, se obtiene el efecto deseado. La cantidad resultante que naturalmente está representada por $s$ se llama desviación estándar. Luego, por definición, la desviación estándar para datos no clasificados es:

DESVIACION ESTANDAR

(5)
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}}$$

Y para datos agrupados:

(6)
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i}{N}}$$

Ejemplificaremos aquí la desviación estándar, a partir de una distribución de frecuencias.

| Punto Medio $X_i$ | Frecuencias $f_i$ | $X_i f_i$ |
|---|---|---|
| 114.5 | 1 | 114.5 |
| 124.5 | 4 | 498.0 |
| 134.5 | 17 | 2286.5 |
| 144.5 | 28 | 4046.0 |
| 154.5 | 25 | 3862.5 |
| 164.5 | 18 | 2961.0 |
| 174.5 | 13 | 2268.5 |
| 184.5 | 6 | 1107.0 |
| 194.5 | 5 | 972.5 |
| 204.5 | 2 | 409.0 |
| 214.5 | 1 | 214.5 |
| | 120 | 18740.0 |

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(X_1 \; f_1)}{N} = \frac{18740}{120} = 156.2$$

$$\overline{X} = 156.2$$

Obsérvese que en la tabla siguiente se incluyó la media, dato necesario para la obtención de la desviación estándar o desviación típica.

DESVIACION ESTANDAR METODO LARGO

| Punto Medio $X_j$ | Frecuencia $F_i$ | $\overline{X}$ | $(X_i - \overline{X})$ | $(X_i - \overline{X})^2$ | $(X_i - \overline{X})^2 f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 114.5 | 1 | | -41.7 | 1738.89 | 1738.89 |
| 124.5 | 4 | | -31.7 | 1004.89 | 4019.56 |
| 134.5 | 17 | | -21.7 | 470.89 | 8005.13 |
| 144.5 | 28 | | -11.7 | 136.89 | 3832.92 |
| 154.5 | 25 | 156.2 | - 1.7 | 2.89 | 72.25 |
| 164.5 | 18 | | 8.3 | 68.89 | 1240.02 |
| 174.5 | 13 | | 18.3 | 334.89 | 4353.57 |
| 184.5 | 6 | | 28.3 | 800.89 | 4805.34 |
| 194.5 | 5 | | 38.3 | 1466.89 | 7334.45 |
| 204.5 | 2 | | 48.3 | 2332.89 | 4665.78 |
| 214.5 | 1 | | 58.3 | 3398.89 | 3398.89 |
| TOTALES = | 120 | | | | 43466.80 |

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X})^2 f_i}{N}}$$

$$s = \sqrt{\frac{43466.80}{120}}$$

$$= \sqrt{362.223}$$

$$s = \underline{19.03}$$

El método clave para la desviación estándar es más recomendable puesto que simplifica el manejo de los datos.

DESVIACION ESTANDARD METODO CLAVE

Son necesarios los siguientes datos:

| | Marca de Clase $X_j$ | Frecuencia $f_j$ | $u_j = \frac{X_j - A}{c}$ | $u_j f_i$ | $u_j^2$ | $u_j^2 f_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 114.5 | 1 | - 4 | - 4 | 16 | 16 |
| | 124.5 | 4 | - 3 | -12 | 9 | 36 |
| | 134.5 | 17 | - 2 | -34 | 4 | 68 |
| | 144.4 | 28 | - 1 | -28 | 1 | 28 |
| A = | 154.4 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 164.5 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 |
| | 174.5 | 13 | 2 | 26 | 4 | 52 |
| | 184.5 | 6 | 3 | 18 | 9 | 54 |
| | 194.5 | 5 | 4 | 20 | 16 | 80 |
| | 204.5 | 2 | 5 | 10 | 25 | 50 |
| | 214.5 | 1 | 6 | 6 | 36 | 36 |
| | TOTALES =120 | | | 20 | | 438 |

$$s = c\sqrt{\frac{\Sigma u_j^2 f_j}{N} - \left(\frac{\Sigma u_j f_j}{N}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{\frac{438}{120} - \left(\frac{20}{120}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{3.65 - .0277}$$

$$= 10\sqrt{3.6223}$$

$$= 10\ (1.9032) = 19.03$$

$$s = \underline{19.03}$$

## 3.1.5. CURVA NORMAL

Una curva normal de frecuencias es aquella donde se cumple con:

a). 68.27% de los casos están comprendidos entre $\overline{X} - s$ y $\overline{X} + s$ (Es decir, el valor de la desviación -- típica a ambos lados de la media).

b). El 95.45% de los casos están comprendidos entre

$$\overline{X} - 2s \text{ y } \overline{X} + 2s$$

(Es decir, el doble del valor de la des viación típica a ambos lados de la media)

c). El 99.73% de los casos están comprendidos entre $\overline{X} - 3s$ y $\overline{X} + 3s$. (Es decir, el triple del valor de la des viación típica a ambos lados de la me-- día)

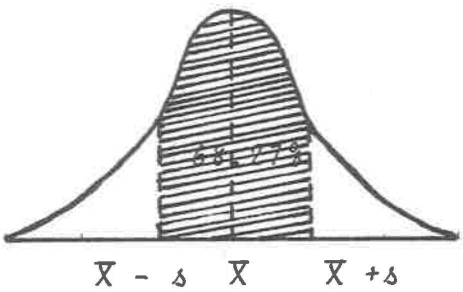



FIGURA No. 38

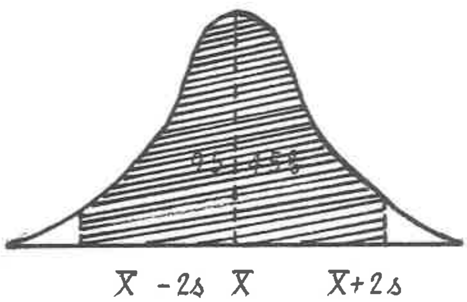



FIGURA No. 39

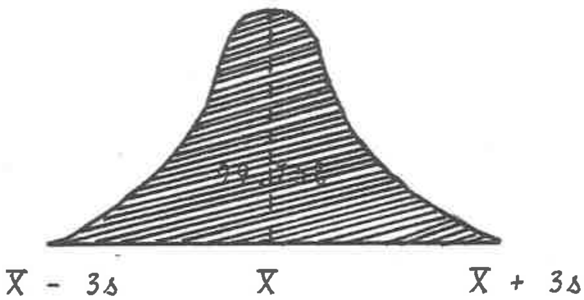



FIGURA No. 40

La siguiente tabla muestra el cociente de inteligencia (IQ) de 480 estudiantes de una escuela primaria. Se sabe que el conjunto de valores se apega a una distribución normal.

| Marca de clase (X) | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | 94 | 98 | 102 | 106 | 110 | 114 | 118 | 122 | 126 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia (f) | 4 | 9 | 16 | 28 | 45 | 66 | 85 | 72 | 54 | 38 | 27 | 18 | 11 | 5 | 2 |

Determinar el porcentaje de estudiantes cuyos cocientes de inteligencia caigan dentro del intervalo:

a) $\overline{X} \pm s$

b) $\overline{X} \pm 2s$

c) $\overline{X} \pm 3s$

Para lo cuál es necesario determinar:

a) La media ( $\overline{X}$ )

b) La desviación típica ( $s$ )

Si deseamos aplicar los métodos claves para la obtención de los valores anteriores ($\overline{X}$ y $s$), es necesario organizar el trabajo de la siguiente manera:

a) $$\overline{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right) c$$

b) $$s = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2}$$

Para facilitar el trabajo obtenemos de antemano datos como u, fu, $fu^2$, etc., etc. y los concentramos en una tabla como la que aparece a continuación.

| X | u | f | fu | $fu^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 70 | -6 | 4 | -24 | 144 |
| 74 | -5 | 9 | -45 | 225 |
| 78 | -4 | 16 | -64 | 256 |
| 82 | -3 | 28 | -84 | 252 |
| 86 | -2 | 45 | -90 | 180 |
| 90 | -1 | 66 | -66 | 66 |
| A = 94 | 0 | 85 | 0 | 0 |
| 98 | 1 | 72 | 72 | 72 |
| 102 | 2 | 54 | 108 | 216 |
| 106 | 3 | 38 | 114 | 342 |
| 110 | 4 | 27 | 108 | 432 |
| 114 | 5 | 18 | 90 | 450 |
| 118 | 6 | 11 | 66 | 396 |
| 122 | 7 | 5 | 35 | 245 |
| 126 | 8 | 2 | 16 | 128 |
| | | $N = \Sigma f = 480$ | $\Sigma fu = 236$ | $\Sigma fu^2 = 3404$ |

a) $\overline{X} = A + c \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right) = 94 + 4 \left(\frac{236}{480}\right) = 95.97$

b) $s = c\sqrt{\frac{fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 4\sqrt{\frac{3404}{480} - \left(\frac{236}{480}\right)^2}$

$= 4\sqrt{6.8499} = 10.47$

Una vez obtenidas la $\overline{X}$ y $s$, podemos determinar los porcentajes de alumnos que caen en cada uno de los intervalos requeridos:

a). $\overline{X} \pm s = 95.97 \pm 10.47$ da un intervalo de 85.5 a 106.4.

El número de cocientes de inteligencia en este intervalo es:

$$\frac{(88-85.5)(45)}{4}+66+85+72+54+\frac{(106.4-104)38}{4} = \boxed{327.9}$$

Expresado lo anterior en %:

$$\frac{327.9}{480} = \boxed{68.31\%}$$

Lo que significa que el 68.31% de los estudiantes tienen un cociente de inteligencia dentro del intervalo

85.5 - 106.4

b). $\overline{X} \pm 2s = 95.97 \pm 2(10.47)$ da el intervalo

75.0 - 116.9

El número de cocientes de inteligencia en este intervalo es:

$$\frac{(76-75)(9)}{4}+16+28+45+66+85+72+54+38+27+18+\frac{(116.9-116)\ 11}{4}$$

$$= \boxed{453.725}$$

Expresado en %:

$$\frac{453.725}{480} = 94.52\%$$

Esto significa que el 94.52% de los estudiantes tienen un cociente de inteligencia del intervalo

75 - 116.9

c) $\overline{X} \pm 3s = 95.97 \pm 3(10.47)$ da el intervalo

64.6 - 127.4

El número de cocientes de inteligencia es:

$$480 - \frac{(128-127.4)}{4} 2 = 479.7$$

*Expresado en %:*

$$\frac{479.7}{480} = 99.93\% \text{ (prácticamente el 100\%)}$$

*Esto significa que el 99.93% de los cocientes intelectuales de dichos - alumnos están dentro del intervalo*

64.6 - 127.4

*"Los porcentajes de (a), (b), y (c) están de - acuerdo con aquellos que cabría esperarse de - una distribución normal, es decir, 68.27%, - - 95.45%, y 99.73%, respectivamente".*

*Por tanto, podemos afirmar que la curva de distribución del problema anterior, corresponde a una CURVA NORMAL.*

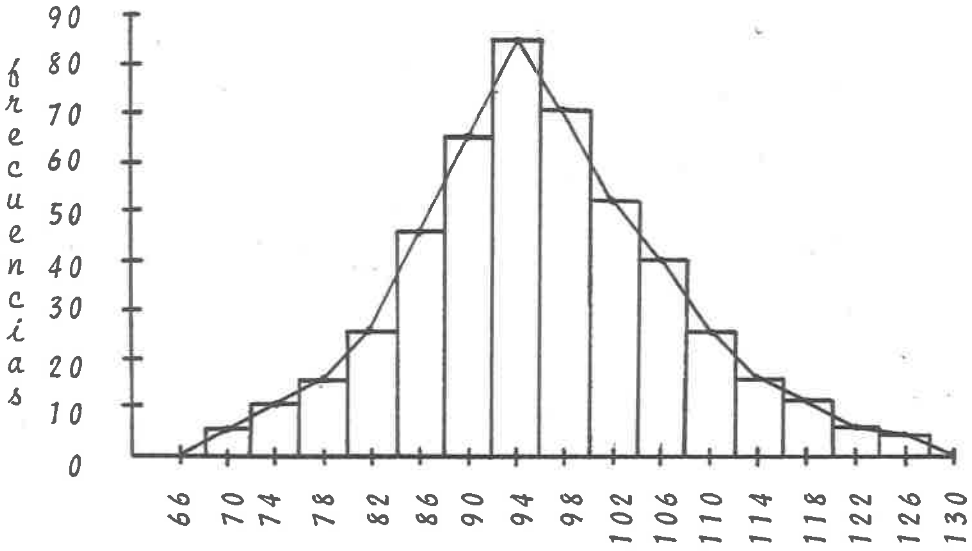



FIGURA No. 41

Una característica más de una CURVA NORMAL es que en ella deben coincidir MEDIA, MEDIANA y MODA; calculando dichas medidas en relación al problema anterior del polígono de frecuencias de cocientes intelectuales de los alumnos de una escuela, tenemos:

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right) c = 94 + \left(\frac{236}{480}\right) c = \boxed{95.97}$$

$$\tilde{X} = Li + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\Sigma f)_1}{f \text{ med.}}\right) c =$$

$$1.5 + \frac{\left(\frac{480}{2} - 168\right)}{85} 4 = \boxed{94.88}$$

$$X = Li + \left(\frac{1}{1 + 2}\right) c =$$

$$91.5 + \left(\frac{19}{19 + 13}\right) 4 = \boxed{93.87}$$

Obsérvese que en el polígono de frecuencias correspondiente han sido localizados dichos valores y que los tres coincidan en el mismo intervalo.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA:


DIENES, Z.P. Y GOLDING, E.W. "La geometría a travéz de las transformaciones". Topología (1), Geometría Euclideana (2) Barcelona Ed. Teide 1969.

HOEL, PAUL G. "Estadística Elemental". México, Co. Editorial Continental S.A. 1979.

KLEIMAN, ARIEL Y DE KLEIMAN, ELENA. "Conjuntos". Aplicaciones matemáticas a la Administración.

LIPSCHUTZ, Ph. D. "Teoría y problemas de probabilidad". México Ed. Mc Graw-Hill, 1979 (serie de compendios Schaum).

MILLER, CHARLES D. Y HEEREN, VERN E. "Introducción al pensamiento matemático." México Ed. Trillas, 1979.

MURRAY R. SPIEGEL, PH. D. "Estadística". Tr. José Luis Gómez y Alberto Losada, México, Ed. Mc Graw-Hill, 1979 (serie de compendios Schaum).

PEQUEÑO DICCIONARIO LAROUSSE TECNICO. Adap. por Tomás de Galiana Mingot. México, Ed. Larousse, 1979.

RASCON CH. OCTAVIO A. "Introducción a la teoría de las probabilidades". México, 1976. UNAM. Dirección General de Publicaciones, Textos programados.

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Dirección General de capacitación y mejoramiento profesional del magisterio. "Matemáticas y su metodología". Fascículo, México. 1978.

# INDICE GENERAL

Pags.