

RESPUESTAS INTUITIVAS DE ADULTOS  
A PROBLEMAS DE PROBABILIDAD.  
ALGUNAS APORTACIONES  
METODOLÓGICAS.



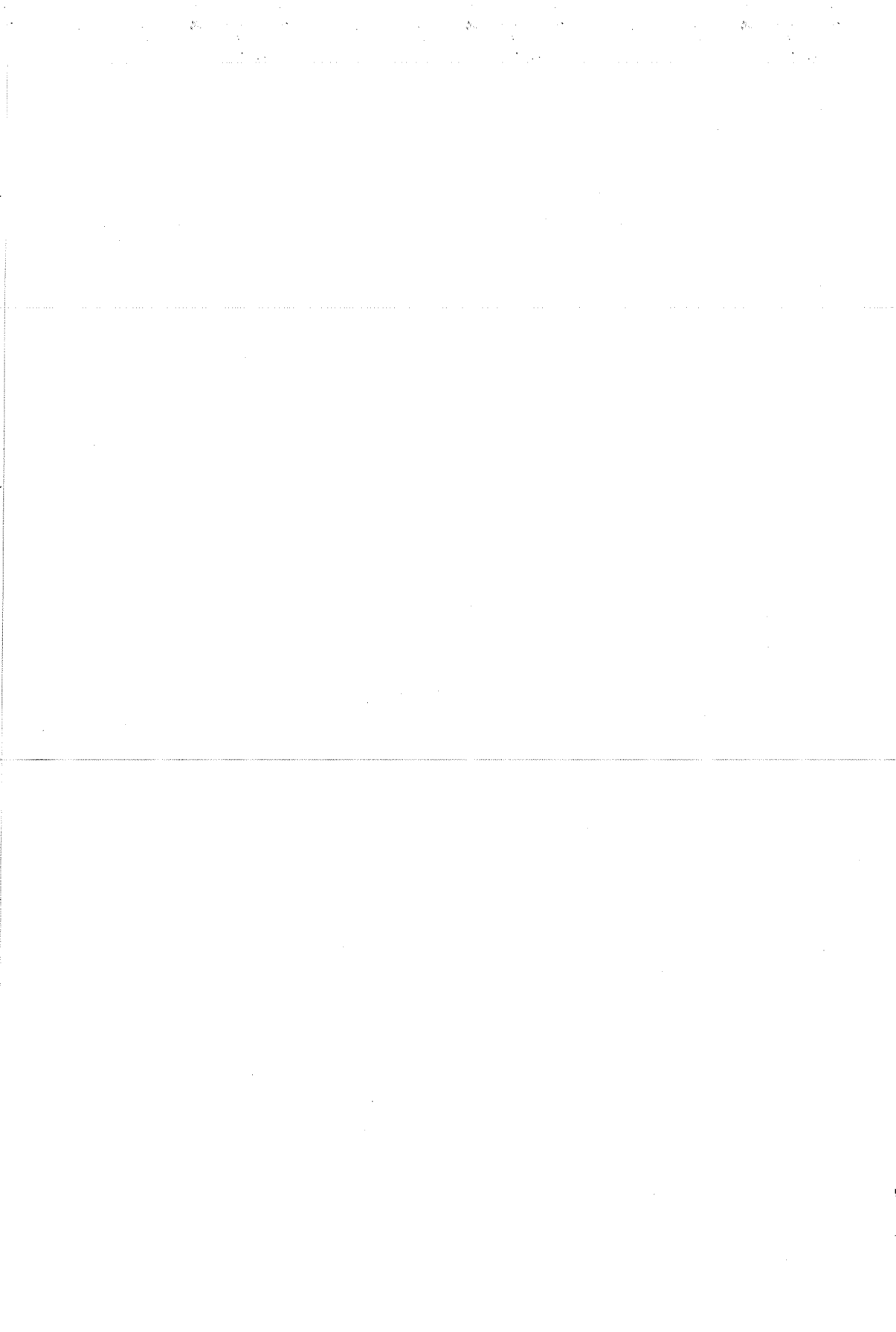
**T E S I S**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
MAESTRIA EN EDUCACION  
LINEA DE EDUCACION MATEMATICA  
P R E S E N T A :  
SILVIA ALATORRE FRENK

8290

124267

**INTEGRACION DEL JURADO:**

<b>Presidente:</b>	<b>Dr. Eugenio Filloy</b>
<b>Secretario:</b>	<b>Dr. Ignacio Méndez Ramírez</b>
<b>Vocal:</b>	<b>Mtra. Elsa Mendiola S.</b>
<b>Suplente:</b>	<b>Mtro. Tenoch Cedillo A.</b>
<b>Suplente:</b>	<b>Mtro. Héctor Santiago A.</b>



## SINOPSIS

En este trabajo se plantearon a sujetos adultos problemas de probabilidad de corte clásico (planteamiento de elección binaria en modo de previsión ante urnas con extracción simple). Se buscó hallar qué estrategias de solución utilizan de manera intuitiva adultos jóvenes (estudiantes universitarios) enfrentados a situaciones de diversos tipos.

Ante la imposibilidad de encontrar un marco teórico que dé plenamente cuenta del modo de utilización de los conocimientos intuitivos y formales por parte de los adultos, se partió de referentes teóricos y experimentales, y se construyó una metodología para responder a las interrogantes planteadas. Los principales referentes considerados son los trabajos de Piaget, Fischbein y Kahneman y Tversky, así como los de Maury, Noelting y Falk.

La construcción metodológica giró en torno a tres líneas: la de un sistema de categorías correspondientes a las preguntas, que se denominaron situaciones, la de un sistema de categorías correspondientes a las respuestas, que se denominaron estrategias, y la de métodos específicos para la interrogación y para el descifrado de las respuestas dadas por los sujetos. Las tres líneas interactuaron constantemente en el proceso de construcción.

Para la construcción de las situaciones se crearon varias familias de categorías dirigidas a estructurar diversos aspectos de la comparación entre dos espacios muestrales. Una de ellas se refiere a las diferentes combinaciones de relación de orden entre los casos favorables, desfavorables y posibles, así como entre las diferencias entre los dos primeros y los cocientes de favorables y posibles. Otra familia considera las ubicaciones respectivas de ambas probabilidades formales con respecto a la probabilidad  $\frac{1}{2}$  como punto central de referencia. Las demás familias, de importancia secundaria, abordan aspectos relacionados con la percepción global de una situación y con la facilidad con que se pueden detectar relaciones de multiplicidad entre los elementos definitorios del espacio.

Para la construcción de las estrategias se partió de algunas de las observadas por Piaget. Se llegó a la caracterización de dos tipos de estrategias simples: las de centración (que consideran una sola clase de elementos: totales, favorables o desfavorables) y las de relación (que consideran dos clases de elementos: son relaciones de equilibrio, sustractivas o de proporcionalidad). También se caracterizaron las estrategias compuestas a través de diversas operaciones de tipo lógico entre estrategias simples. Asimismo, se caracterizaron algunas estrategias y mecanismos primitivos.

Se utilizó el método de interrogatorio estandarizado en modalidad escrita y verbal, lo que permitió comparar la calidad de las respuestas obtenidas en ambas modalidades, así como establecer las dificultades con el lenguaje escrito de la primera y las interacciones entre sujetos de la segunda. Para el descifrado de las respuestas se utilizaron algunos métodos lingüísticos, que

por otra parte constituyeron una parte sustancial del análisis de los resultados.

Se realizó una experimentación con 64 sujetos, en la que se exploró, además de las variables experimentales ya mencionadas, los efectos del cambio de referente (tarjetas, canicas, etc), del cambio de tamaño (números chicos o grandes) y del cambio del planteamiento básico de decisión a uno llamado de equiparación. En varios de los cuestionarios utilizados se exploraron preguntas idénticas y similares, con el fin de detectar posibles inconsistencias de los sujetos. Se obtuvieron 1630 respuestas que fueron sometidas a un minucioso proceso de interpretación.

Entre los principales resultados se encuentran, amén de la propia construcción metodológica, los siguientes. Los problemas planteados en algunas combinaciones y ubicaciones resultan de más fácil solución que otros, lo que llevó a la definición de seis niveles de dificultad de las preguntas, mientras que las familias secundarias de perceptividad y multiplicidad no tuvieron un efecto tan marcado en las respuestas. Las estrategias utilizadas por los sujetos pudieron ser clasificadas según su reactividad (frecuencia de participación en estrategias compuestas), como medida de su satisfactoriedad, y según su dominancia (intervención en la elección final), como medida de su fuerza. A pesar de que los sujetos resultaron ser sumamente inconsistentes en su uso de estrategias, incluso en situaciones similares o idénticas, pudieron ser clasificados en categorías paralelas a los seis niveles de dificultad de las estrategias; destaca en particular que más de la mitad de los sujetos sólo pudieron resolver correctamente los problemas de los primeros dos niveles. Se plantean dos modelos explicativos para la inconsistencia de los sujetos.

Se comentan asimismo algunas posibles repercusiones pedagógicas y aplicaciones didácticas de los métodos utilizados.

**Respuestas intuitivas de adultos  
a problemas de probabilidad.**

**Algunas aportaciones metodológicas**

**Silvia Alatorre Frenk**



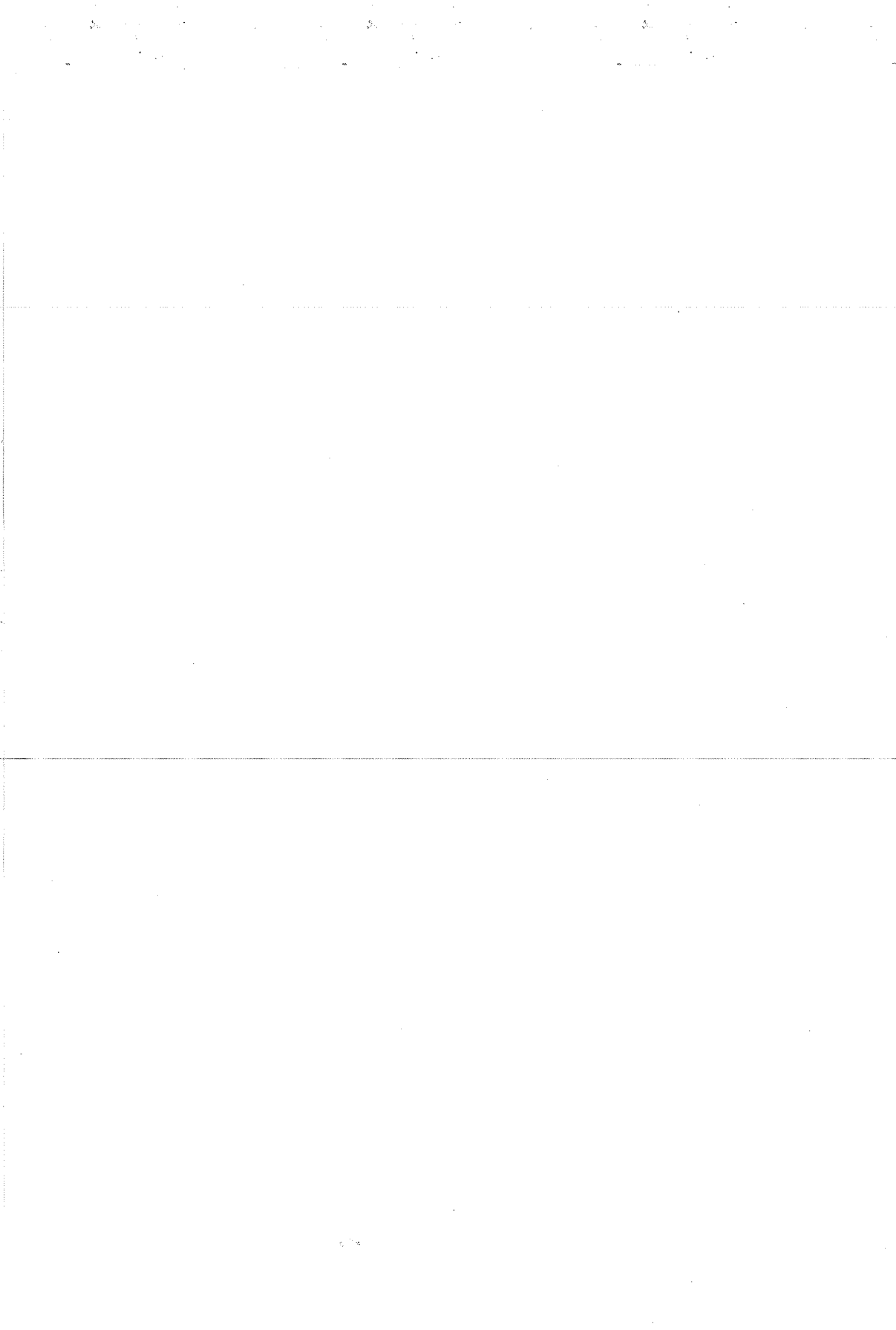


**Para**

**Alex**

**Emilio**

**Julio**



# INDICE

<b>PRESENTACION</b>	<b>xvii</b>
<b>PRIMERA PARTE: INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO 1. REFERENTES TEORICOS Y EXPERIMENTALES</b>	<b>3</b>
1.1. DEFINICIONES DE PROBABILIDAD	4
1.1.1. Probabilidades clásica y frecuencial.....	6
1.1.2. Probabilidades intuitiva y subjetiva.....	7
1.1.3. Del siglo XVIII a nuestros días.....	10
1.1.4. Una postura personal.....	12
1.2. TRES REFERENTES TEORICOS	13
1.2.1. Piaget: psicogénesis del conocimiento.....	13
1. Teoría piagetiana, 14; 2. Desarrollo del concepto de probabilidad, 17;	
3. Intuición, 22; 4. Otros, 23	
1.2.2. Fischbein: El estudio de la intuición.....	28
1. Intuición, 28;	
2. Intuición probabilística, 32	
1.2.3. Kahneman y Tversky: juicios bajo incertidumbre..	35
1. Intuición, 37; 2. Heurísticas y sus sesgos, 37; 3. Polémica, 41	
1.3. INTUICION PROBABILISTICA	43
1.3.1. Intuiciones incorrectas.....	45
1. Caracterización, 45; 2. Intuiciones, 48	
1.3.2. Intuiciones correctas: una polémica.....	51
1.3.3. Intuición probabilística en adolescentes y adultos.....	53
1.4. EDUCACION Y PROBABILIDAD	54
1.4.1. Posición de Fischbein acerca del papel de la escuela.....	54
1. Formación de intuiciones, 54;	
2. Intuiciones probabilísticas, 56	
1.4.2. Investigación básica en educación.....	57
1.4.3. Enseñanza de la probabilidad.....	60
1.5. REFERENTES EXPERIMENTALES	62
1.5.1. El planteamiento clásico piagetiano de "cuantificación de probabilidades" .....	62

1. Presentación, 62; 2. Variaciones, 64; 3. "Cuantificación", 67	
1.5.2. METODOLOGIA DE INTERROGACION .....	68
1. Entrevistas o cuestionarios, 68;	
2. Método clínico-crítico, 69;	
3. Modalidades en la interrogación, 70	
1.5.3. Problemas en el diagnóstico.....	71
1.5.4. Variables independientes.....	73
1.5.5. Estudios sobre probabilidad y proporcionalidad..	76
<b>CAPITULO 2. PANORAMA GENERAL DEL TRABAJO</b>	<b>79</b>
2.1. PRESENTACION DEL PROBLEMA	80
2.1.1. Objetivos.....	80
2.1.2. Forma experimental elegida.....	80
2.2. BREVE HISTORIA DEL TRABAJO EXPERIMENTAL	82
2.2.1. Primer experimento: indagaciones iniciales.....	84
1. Problemática, 84; 2. Experimentación, 84;	
3. Resultados, 86	
2.2.2. Segundo experimento: búsqueda metodológica.....	87
1. Problemática, 87; 2. Experimentación, 88;	
3. Resultados, 89	
2.2.3. Tercer experimento: construcción de categorías..	90
1. Problemática, 90; 2. Experimentación, 92;	
3. Resultados, 93	
2.2.4. Cuarto experimento: una aplicación didáctica....	94
1. Problemática, 94; 2. Experimentación, 94;	
3. Resultados, 95	
2.2.5. Quinto experimento: nuevas variables.....	96
1. Problemática, 96; 2. Experimentación, 97;	
3. Resultados, 98	
2.3. PLANTEAMIENTO METODOLOGICO	99
2.3.1. Entrelazado de las líneas metodológicas.....	99
2.3.2. Hipótesis.....	104
<b>SEGUNDA PARTE: METODOLOGIA</b>	<b>109</b>
<b>CAPITULO 3. CONSTRUCCION DE LAS SITUACIONES</b>	<b>111</b>
3.1. CATEGORIAS INICIALES	111
3.1.1. Categorías piagetianas.....	112
1. Preguntas, 112;	
2. Interpretación de las respuestas, 113	
3.1.2. Observaciones experimentales a las categorías piagetianas.....	113
1. Situaciones, 113;	
2. Interpretaciones, 115	

3.2. CONSTRUCCION DEL BANCO: SITUACIONES	116
3.2.1. Construcción conceptual.....	118
1. Notación general, 119; 2. Combinaciones, 120; 3. Ubicaciones, 124; 4. Perceptividad, 129; 5. Unos, 131; 6. Multiplicidad, 133;	
3.2.2. Construcción formal.....	136
1. Notación general, 136; 2. Combinaciones, 136; 3. Ubicaciones, 139; 4. Perceptividad, 141; 5. Unos, 142; 6. Multiplicidad, 145;	
3.2.3. Banco de preguntas.....	146
3.3. DISEÑO DE LOS CUESTIONARIOS	149
3.3.1. Diseño de C1 y C2.....	149
3.3.2. Diseño de C3.....	150
3.3.3. Diseño de C4.....	153
3.3.4. Diseño de C6.....	154
CAPITULO 4. CONSTRUCCION DE LAS CATEGORIAS PARA LA INTERPRETACION	159
4.1. EL TRABAJO DE INTERPRETACION	161
4.1.1. Formato de las respuestas.....	162
4.1.2. Aspectos que intervienen en la interpretación..	167
4.2. ESTRATEGIAS CON UNA CLASE DE ELEMENTOS: CENTRACIONES	168
4.2.1. Centraciones en los casos totales.....	171
1. {N-}, 170; 2. {N+}, 171; 3. {N=}, 172	
4.2.2. Centraciones en los casos favorables.....	173
1. {F+}, 173; 2. {F-} y {F1}, 174; 3. {F=}, 175	
4.2.3. Centraciones en los casos desfavorables.....	176
1. {D-}, 176; 2. {D+}, 178; 3. {D=}, 178	
4.3. ESTRATEGIAS CON DOS CLASES DE ELEMENTOS: RELACIONES	179
4.3.1. Relación de orden: estrategias de equilibrio...	182
1. {E<>}, 183; 2. {E<}, 184; 3. {E>}, 185; 4. {E=}, 186; 5. {E5}, 187	
4.3.2. Relación sustractiva: diferencias de favorables menos desfavorables.....	188
1. {R+}, 189; 2. {R-}, 191; 3. {R=}, 192	
4.3.3. Relación multiplicativa: estrategias con razonamiento proporcional.....	193
1. {P+}, 196; 2. {P=}, 199; 3. {P'}, 202	
4.4. ESTRATEGIAS COMPUESTAS	204
4.4.1. Composiciones de dos estrategias simples.....	205
1. Conjunción, 205; 2. Exclusión, 206 3. Compensación, 209; 4. Contrapeso, 213	
4.4.2. Composiciones múltiples.....	214
4.5. ESTRATEGIAS Y MECANISMOS PRIMITIVOS	215
4.5.1. estrategias primitivas.....	216

	1. {N+}, 216; 2. {F-}, {F1} y {D-}, 216; 3. {E5} y {R-}, 217	
4.5.2.	Otros mecanismos primitivos.....	218
	1. Atracción, 218; 2. Acomodo, 219; 3. Juntar lados, 221	
<b>CAPITULO 5. METODOS DE INTERROGACION Y DESCIFRADO</b>		<b>223</b>
5.1.	METODOLOGIA DE INTERROGACION	224
5.1.1.	Respuestas escritas o habladas.....	226
5.1.2.	Cuestionarios: respuestas individuales o de equipo.....	228
5.1.3.	Entrevistas: Respuestas individuales o de binomio.....	229
	1. Formas de hablar, 230; 2. Interacciones, 231; 3. Lectura paralela, 233; 4. Comenta- rios, 235	
5.1.4.	Forma de presentación de la información.....	237
5.2.	OBSERVACIONES ACERCA DEL USO DEL LENGUAJE	239
5.2.1.	Una incursión en la lingüística.....	241
5.2.2.	Conceptos y términos relacionados con la probabilidad.....	245
	1, 2. Sinonimia, 247, 251; 3, 4. Polisemia, 252, 257; 5. Precisión, 258	
5.2.3.	Usos polisémicos de conectivos del lenguaje común.....	261
	1. Composición, 261; 2. Comparación, 263	
5.2.4.	Expresiones relacionadas con la probabilidad y la obviedad.....	266
	1. Probabilidad intuitiva, 266; 2. Obviedad, 270	
5.3.	OBSERVACIONES ACERCA DEL USO DE LA ARITMETICA	272
5.3.1.	Expresiones de números.....	273
	1. Imposibilidad, "pierdo", "empato", "gano" y certeza, 273; 2. Cero, 276	
5.3.2.	Fraciones y porcentajes.....	276
	1. Fracciones, 277; 2. Porcentajes, 279	
<b>CAPITULO 6. INTEGRACION METODOLOGICA</b>		<b>285</b>
6.1.	CONSTRUCCION DE LA METODOLOGIA	285
6.1.1.	Situaciones.....	287
	1. Combinaciones, 287; 2. Ubicaciones, 289; 3. Perceptividad, 289; 4. Unos y multiplicidad, 290	
6.1.2.	Estrategias.....	290
	1. Centraciones, 291; 2. Relaciones, 292; 3. Primitivas, 295; 4. Compuestas, 295	
6.1.3.	Correspondencia entre situaciones y estrategias.....	296

1. Combinaciones, 297; 2. Ubicaciones, 298	
6.1.4. Métodos.....	299
6.1.5. El proceso de construcción en espiral.....	299
6.2. INTERRELACIONES ENTRE LAS LINEAS METODOLOGICAS	300
6.2.1. Interrelación entre preguntas y respuestas.....	301
6.2.2. Interrelación entre preguntas y métodos de interrogacion.....	304
6.2.3. Interrelación entre respuestas y métodos de descifrado.....	304
1. Dificultades, 305; 2. Respuestas interpretadas, 309; 3. Respuestas no interpretadas, 314; 4. Respuestas canceladas, 317; 5. Fogueo, 322	
6.3. METODOLOGIA PARA EL ANALISIS DE RESULTADOS	323
6.3.1. Clasificación de estrategias.....	323
1. Correctas, 324; 2. Situacionalmente correctas, 327; 3. Incorrectas, 329	
6.3.2. Expresiones incompletas de estrategias correctas.....	331
6.3.3. Categorías para el análisis.....	333
1. De situaciones, 333; 2. De estrategias, 335	
6.4. RECAPITULACION	335
6.4.1. Hipótesis general.....	335
6.4.2. Material de trabajo para el análisis de los resultados.....	338
<b>TERCERA PARTE: RESULTADOS</b>	<b>341</b>
<b>CAPITULO 7. ANALISIS DE LOS RESULTADOS</b>	<b>343</b>
7.1. ANALISIS POR SITUACIONES	345
7.1.1. Ubicaciones.....	347
1. Imposibilidades y certezas, 348; 2. Equilibrio, 354; 3. Análisis global, 362	
7.1.2. Combinaciones.....	364
1. No discriminantes, 366; 2. "De una variable", 369; 3. "De dos variables" sin proporcionalidad, 372; 4. "De dos variables" con proporcionalidad, 376; 5. Análisis global, 379	
7.1.3. Análisis conjunto de ubicaciones y combinaciones.....	385
7.1.4. Otras variables de situación.....	389
1. Perceptividad, 390; 2. Multiplicidad, 393	
7.2. ANALISIS POR ESTRATEGIAS	396
7.2.1. Distribución general .....	397

7.2.2. Estrategias compuestas.....	399
1. Reactividad, 400; 2. Dominancia, 401;	
3. Interpretación general, 402; 4. Estrate-	
gias de igualdad, 403; 5. Otras, 405	
7.2.3. Situaciones en que ocurren	
algunas estrategias.....	405
1. Estrategias correctas, 406;	
2. Situaciones específicas, 407	
7.3. ANALISIS POR INDIVIDUOS	410
7.3.1. Clasificación de los sujetos.....	416
7.3.2. Consistencia.....	417
7.3.3. Desarrollo a lo largo del cuestionario.....	421
1. Evolución, 421; 2. Fogueo, 423;	
3. Estrategias dominantes en C4, 424	
7.3.4. Analisis global del comportamiento individual..	425
7.4. ANALISIS DE OTRAS VARIABLES	427
7.4.1. Referentes.....	427
7.4.2. Planteamientos.....	428
7.4.3. Tamaños.....	429
<b>CAPITULO 8. DISCUSION</b>	<b>433</b>
8.1. REVISION DE LAS HIPOTESIS	433
8.1.1. H1 y H2: Hipótesis iniciales.....	433
8.1.2. H3 a H9: Categorías construidas .....	435
1. Construcción de categorías, 436; 2. Dife-	
rencias entre situaciones, 437; 3. Diferen-	
cias entre estrategias, 441	
8.1.3. H10: Efectos de las variables de situación.....	443
1. Variables, 444;	
2. Otras investigaciones, 447	
8.1.4. H11 a H13: Otras variables experimentales.....	448
8.1.5. H14 y H15: Desempeños individuales.....	449
1. Hipótesis, 450; 2. Dos modelos, 452	
8.1.6. H16 a H18: Métodos de interrogación.....	456
8.1.7. H19 y H20: Métodos de descifrado .....	458
8.1.8. H21 y H22: Aplicabilidad didáctica.....	460
8.1.9. H23: Hipótesis general.....	463
8.2. RECAPITULACION FINAL	465
8.2.1. Las principales fuentes.....	466
8.2.2. Algunas proposiciones para la	
siguiente etapa.....	467
8.2.3. A modo de conclusión.....	469



<b>INDICE</b>	<b>xvii</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>473</b>
<b>INDICE ANALITICO</b>	<b>481</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>VOL. 2</b>
ANEXO 1: BANCO DE ARREGLOS ORDENADOS HASTA N <sub>1</sub> -10	A / 3
ANEXO 2: BANCO DE ARREGLOS CLASIFICADOS POR SITUACION	A / 49
ANEXO 3: CUESTIONARIOS UTILIZADOS EN LA INVESTIGACION	A / 99
ANEXO 4: TRANSCRIPCION DE LAS ENTREVISTAS	A / 129
ANEXO 5: RESPUESTAS E INTERPRETACIONES	A / 195
ANEXO 6: INTERPRETACIONES CLASIFICADAS	A / 253
ANEXO 7: RESULTADOS POR SUJETO	A / 289



## P R E S E N T A C I O N

Este trabajo da cuenta de una investigación realizada a lo largo de varios años para indagar cómo responden algunos estudiantes universitarios a problemas simples de probabilidad.

Mi interés para efectuar la investigación surgió a raíz de la lectura de una porción del texto clásico de Jean Piaget intitulado "La génesis del concepto de azar en el niño". Ahí, Piaget afirma que los adolescentes responden a ejercicios de probabilidad de una manera que parecía contrastar singularmente con mi experiencia docente con estudiantes a nivel universitario. El primer objetivo de investigación fue, entonces, realizar los experimentos piagetianos con mis alumnos y verificar la impresión de que responderían "peor" que los adolescentes suizos estudiados por Piaget. Ese objetivo fue pronto cubierto, y entonces se abrió el campo para indagar acerca de los cómo y los por qué.

La investigación se intituló inicialmente "El concepto de azar en el adulto", y en un principio intentaba seguir, con sujetos adultos, la línea de trabajo seguida por Piaget. Sin embargo, muy pronto hubo que divergir de la línea piagetiana, pues ésta no lograba responder a las interrogantes planteadas específicamente con este tipo de sujetos.

Como en muchos procesos de investigación, el proyecto inicial hubo de ser simultáneamente ampliado y acotado. Ampliado, en cuanto a las posibles referencias teóricas: al no bastar la perspectiva piagetiana, inicié una búsqueda en pos de otras maneras de ver los procesos mentales de los adultos al resolver problemas probabilísticos. Acotado, en cuanto al tipo de adultos y el tipo de conceptos abordados: así, en vez de poder hablar del concepto de azar (en general) de los adultos (en general), me he limitado al estudio de las respuestas que dan algunos adultos (estudiantes de una única universidad) a cierto tipo específico de problemas de probabilidad (problemas "clásicos" de urnas).

La ampliación en busca de referentes teóricos produjo a la vez enriquecimiento y consternación. Por un lado, ensanché la visión de los procesos mentales en general y de las formas que tiene la gente de reaccionar a situaciones de incertidumbre; por otro lado, no hallé exactamente lo que buscaba: una teoría que explique las formas que tienen los adultos de utilizar sus conocimientos formales o intuitivos y los comportamientos derivados de ellas (me pregunto si esa teoría está aún por construirse). En general, la profusión de estudios acerca de los procesos cognitivos de los niños se revierte en escasez cuando se trata de adultos; tampoco abundan los estudios de los procedimientos relacionados con el azar o con la probabilidad.

La limitación a cierto tipo de adultos y cierto tipo de problemas de probabilidad permitió, por otra parte, estudiar bastante a fondo las soluciones encontradas por los sujetos. En esta exploración eché mano de recursos que, aunque me son ajenos desde el punto de vista de mi formación académica, me parecieron

importantes para la comprensión de los fenómenos que estaba estudiando: recurrí así a procedimientos pertenecientes a la lingüística y a la psicología, para lo cual fui excelentemente asesorada. Y ¿para qué echar mano de recursos tan ajenos y lejanos? La fragmentación del conocimiento nos ha hecho olvidar que el ser humano no está fragmentado, y que algo que parece tan sencillo y puntual como sus respuestas a problemas de probabilidad está impregnado de todos sus otros aspectos: su manera de hablar, su manera de relacionarse con los demás, su manera de relacionarse con su propio conocimiento, su manera de ver el mundo en general. No pretendo con esto ni hacer alarde de una formación tan global como para tener una visión global del ser humano, ni llegar a la conformación teórica de una interdisciplina que abarque todo. Simplemente, pretendo aprovechar los métodos a mi alcance para iluminar una visión de los comportamientos de los sujetos con los que trabajé: son recursos para una mejor comprensión de los sujetos.

Las ampliaciones y las limitaciones realizadas tuvieron un resultado común: fue necesario construir la metodología para el estudio de las respuestas de los sujetos a los problemas probabilísticos planteados.

He aquí, pues, el resultado de la investigación realizada. Aunque su principal aspecto es la construcción metodológica, no es el único: hubo también más de mil seiscientas respuestas que fueron estudiadas y analizadas.

El trabajo está dividido en ocho capítulos a su vez agrupados en tres partes. La primera parte, intitulada "Introducción", contiene dos capítulos iniciales. El primero da cuenta de la exploración realizada en búsqueda de referentes. El segundo hace un recuento de la historia experimental del trabajo y explica a grandes rasgos el proceso de construcción metodológica a que dio lugar; asimismo, enuncia las hipótesis de trabajo.

La segunda parte, denominada "Metodología", reporta la construcción metodológica. Las tres líneas metodológicas desarrolladas se plasman en sendos capítulos, y otro capítulo más (sexto del trabajo) explica la integración de las tres.

La tercera y última parte, "Resultados", consta de dos capítulos: uno para el análisis de los resultados experimentales obtenidos, y otro para una discusión final, donde se vuelven a considerar las hipótesis enunciadas en el segundo capítulo.

Acompaña al trabajo, en otro volumen, un conjunto de siete anexos generados por el trabajo experimental y el de construcción metodológica.

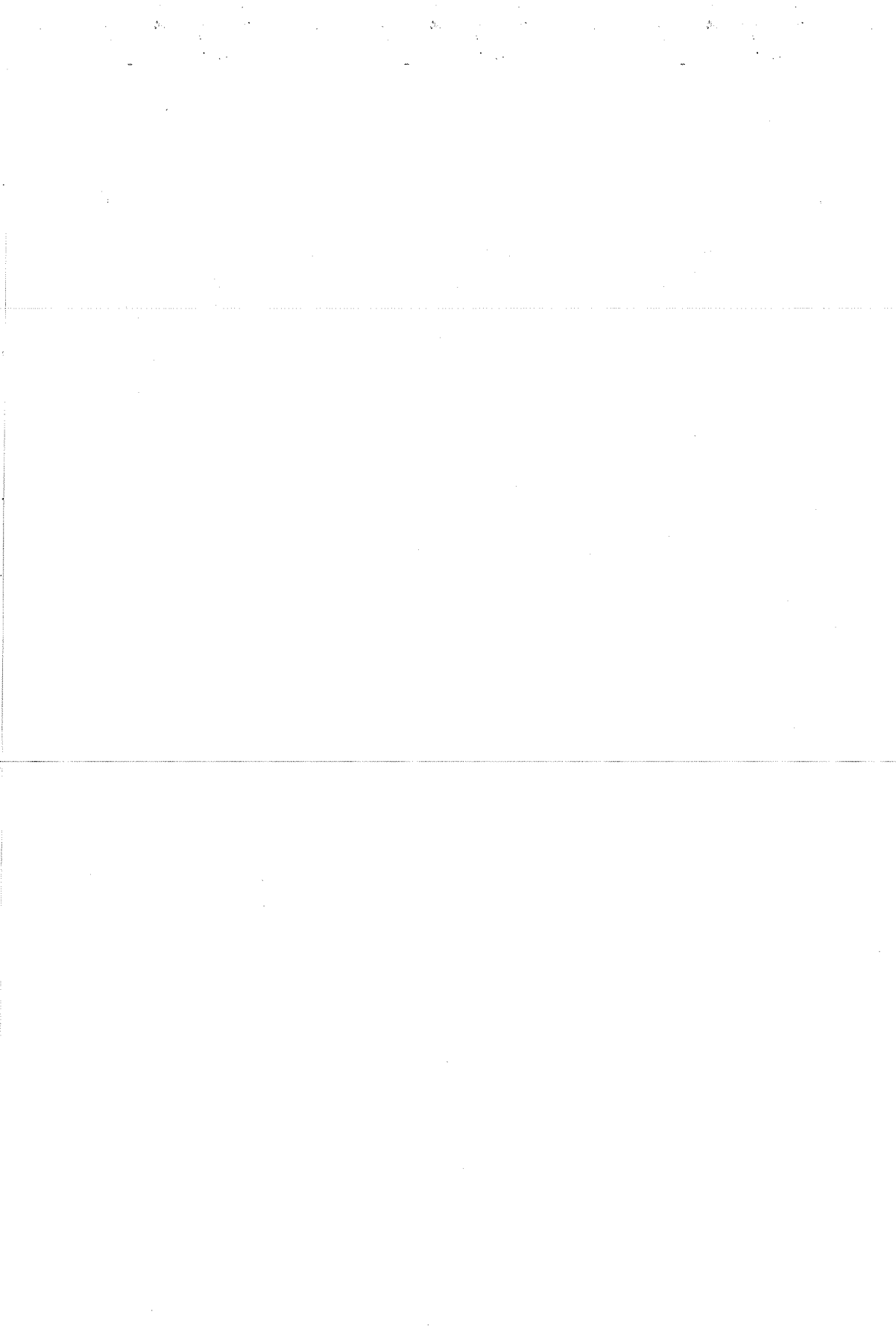
### **Agradecimientos**

La persona que merece mi mayor y más sincero agradecimiento es Elsa Mendiola, pues no sólo asesoró el trabajo realizado, sino que tuvo la paciencia de revisar las innumerables versiones previas del manuscrito, a través de los años y los continentes, así como la fina inteligencia para descubrir lagunas y señalar puntos importantes. Está por demás decir que es corresponsable sólo de

los aciertos; las fallas que pudiera tener este trabajo son de mi exclusiva responsabilidad.

Diversas personas hicieron revisiones parciales de versiones previas del manuscrito y asesoraron en diversos aspectos: Alicia Avila en algunos aspectos psicológicos, Margit Frenk en la parte lingüística, Estela Troya en la parte de interacciones entre sujetos, Marcela Santillán y Tenoch Cedillo en algunos aspectos matemáticos y metodológicos, Pilar Vallés en la redacción. Agradezco también a Javier Alfaro su ayuda en diversos aspectos computacionales (programas de cómputo para la evaluación de prospectos del cuestionario C3, organización de las bases de datos, creación de la primera versión del pre-banco).

Mi familia sufrió los avatares llamados "La Tesis". Alejandro Pisanty colaboró solidariamente en un rango que abarcó desde la asesoría en cuestiones bibliográficas y científicas hasta el mantenimiento de condiciones para la vida cotidiana. Emilio y Julio me dejaron trabajar... casi siempre. A ellos, además de mi agradecimiento, dedico con amor este trabajo.



*El corazón tiene sus razones  
que la razón no conoce*

**Blaise Pascal**

*La razón tiene sus razones  
que el corazón no conoce*

**Hans Freudenthal**

*La seguridad no importa  
porque no existe*

**Estela Troya**





P R I M E R A

P A R T E :

I N T R O D U C C I O N

Esta primera parte tiene como objetivo la presentación de los antecedentes de la investigación realizada, en dos aspectos.

Por una parte, el primer capítulo expondrá los referentes teóricos y experimentales en que se apoyó la investigación.

Por otra, el segundo capítulo expondrá la historia de la construcción metodológica y experimental, y explicará el origen de las tres líneas metodológicas que constituyen la segunda parte, central, del trabajo.

## 1. REFERENTES TEORICOS Y EXPERIMENTALES

La investigación acerca de las intuiciones probabilísticas de adultos que se presenta aquí no tiene un marco teórico en el sentido estricto del término: por su naturaleza, el problema que pretende resolver no puede inscribirse en ningún marco teórico que yo haya encontrado.

Así, este trabajo se refiere a la definición matemática de probabilidad, pero no es un trabajo matemático. Surgió a raíz de la lectura del trabajo de Piaget acerca del concepto de azar en el niño, pero no es un trabajo piagetiano. Utiliza métodos y resultados de investigadores conductistas, pero no es un trabajo conductista. Considera métodos y resultados de investigadores inmersos en la corriente que considera a la mente como un conocedor intuitivo de la estadística, pero no se adscribe a esa corriente. Utiliza algunos métodos de la lingüística, pero no es un trabajo lingüístico. Se preocupa por las repercusiones educativas, pero no es un trabajo pedagógico ni didáctico.

Más bien, el trabajo es un poco de todo ello. O es algo distinto que ha utilizado, de manera bastante ecléctica, todos estos enfoques (y algunos otros) como referentes. Los ha utilizado en la medida en que han sido útiles, en la medida en que han provisto modelos aplicables al problema que aborda.

Pero, desgraciadamente, la utilización de cada uno de ellos planteó problemas en algún punto crucial, en general por falta de aplicabilidad (o los sujetos estudiados en ellos eran radicalmente distintos de los considerados aquí, o el tema era distinto, o se indagaban resultados pero no intuiciones, o se indagaban intuiciones pero en otros contextos, etc.), aunque en algunos casos se han descubierto problemas metodológicos en las investigaciones abordadas.

Así, lo que se presentará en este capítulo no es el marco teórico en que se inscribe el trabajo, sino los materiales que sirvieron como referentes, tanto desde el punto de vista teórico como desde el de la realización experimental. Las referencias son: las diferentes maneras de conceptualizar la probabilidad, los resultados de tres investigaciones importantes (Piaget, Fischbein, Kahneman y Tversky), algunos hallazgos acerca de las intuiciones probabilísticas en niños y adultos, la importancia educativa de la probabilidad y, para finalizar, los métodos de investigación seguidos en algunos trabajos experimentales.

En este capítulo se hablará muy poco de los problemas de utilización recién mencionados. Sólo cuando se adelante en el trabajo será posible explicar por qué tal o cuál investigación planteaba un problema de aplicabilidad o un problema metodológico insondable; esto se hará, en particular, en el capítulo 6.

### 1.1. DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

El concepto de probabilidad ha estado y sigue estando sujeto a toda clase de contradicciones. La primera, tanto en la historia de la construcción del conocimiento formal, como en la del estudiante que aborda la materia por primera vez, se puede plantear en estos términos: "esto de la probabilidad, ¿es un conocimiento en serio, o no?". Pero incluso entre los estudiosos del tema se dan controversias que son, frecuentemente, insondables. Steinbring recoge cinco de ellas, en forma de parejas de afirmaciones contradictorias:

- «(1) "La probabilidad es una característica del sujeto epistémico que construye este concepto al adaptarse a su entorno" vs "La probabilidad es una propiedad de ciertos mecanismos objetivos que funcionan como generadores aleatorios";
- (2) "La probabilidad es un concepto de realidad observable; se interpreta como el límite de las frecuencias relativas" vs "La probabilidad es un concepto ideal; se constituye mediante algunas simetrías ideales";
- (3) "La probabilidad es un concepto auxiliar que el sujeto consulta cuando su conocimiento es incompleto; si hay conocimiento suficiente acerca de la situación en cuestión, la probabilidad es superflua" vs "Todo conocimiento acerca de la realidad está en última instancia sujeto a incertidumbres: por ende, el concepto de probabilidad es el concepto más fundamental de la conciencia científica";
- (4) "El concepto de probabilidad tiene sentido sólo en ciertos experimentos masivos; no puede aplicarse al caso individual" vs "La probabilidad es un concepto del conocimiento cotidiano, que es de uso inmediato y puede aplicarse a toda clase de situaciones";
- (5) "La probabilidad es un concepto teórico, su significado no puede inferirse directamente, resultará de la construcción de modelos estocásticos y su aplicación" vs "La probabilidad es un concepto empírico: su significado resulta de realizar y evaluar un experimento estadístico".» (Steinbring, 1985, pág. 67)

Así, la definición de probabilidad que dé cada quien está sujeta a la manera de adherirse a unas u otras de las afirmaciones anteriores:

«Quien interrogue a científicos acerca del significado del término "probabilidad" descubrirá una situación curiosa. Prácticamente todos le dirán que la probabilidad tiene un solo significado en su uso científico, pero cuando pregunte cuál es ese significado, obtendrá respuestas diversas.» (Carnap, 1953, pág. 128)

Efectivamente, la palabra "probabilidad" no tiene UN significado, sino una multiplicidad de ellos; no hay UN concepto de

probabilidad, sino muchos. Y cada uno de ellos depende del momento histórico, de la posición matemática e ideológica y de muchos otros factores en que se ubique quien habla de probabilidad: «Hay tipos de probabilidad axiomática, comparativa, frecuentista, clásica, lógica, de teoría de la información, de teorías de la complejidad, de evidencias subjetivas, etc.» (Steinbring, 1985, pág. 68)

Cualquier intento de clasificación de todas las significaciones de la probabilidad implica ya una toma de posición al respecto, y los hay más o menos parciales a favor de alguno de los significados.

Una de las clasificaciones que se pueden tomar es la de Hawkins y Kapadia, quienes señalan la importancia de conocer las definiciones de probabilidad presupuestas por los autores de los estudios de investigación psicológica y pedagógica para entender y sintetizar los hallazgos reportados. Ellos clasifican en cuatro grandes categorías las posibles definiciones:

«(1) Probabilidad "a priori": la probabilidad se obtiene haciendo una suposición de equiprobabilidad en el mismo espacio. También se le puede llamar probabilidad "teórica".

(2) Probabilidad frecuentista: la probabilidad se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas en los resultados de ensayos repetidos. Algunos autores la denominan probabilidad "empírica".

(3) Probabilidades subjetiva e intuitiva: en menor o mayor medida la probabilidad expresa una creencia o una percepción personal. Tales probabilidades pueden ser precursores embrionarios de la categoría (4).

(4) Probabilidad formal: la probabilidad se calcula de manera precisa, utilizando las leyes matemáticas de la probabilidad. Se conoce también como probabilidad "objetiva" o "normativa". La base matemática puede entre otras cosas reflejar las suposiciones hechas en (1) o en (2).» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 349)

Aquí destacaremos en particular la diferencia entre las probabilidades más "objetivas" (primera, segunda y cuarta de la lista) y las más "subjetivas" (tercera de la lista). Esta es una manera de ver esa diferencia:

«La diferencia fundamental entre lo "objetivo" y lo "subjetivo" en probabilidad, que suele ponerse en términos de frecuencia vs. creencia, es una diferencia entre modelar e inferir. Cuando modelamos procesos en términos de probabilidad, suponemos que hay alguna característica objetiva de las cosas que se comporta exactamente como, digamos, una urna de la que unas bolas de colores son extraídas con una frecuencia relativa estable. Cuando inferimos usando probabilidades estamos llegando a conclusiones acerca de cuya verdad no estamos totalmente seguros. Esto suele considerarse co-

mo subjetivo o por lo menos epistémico, relativo al conocimiento.» (Hacking, 1990, pág. 98)

Por otra parte, se puede plantear que de alguna manera las definiciones "objetiva" y "subjetiva" no difieren tanto como se pretende. En particular, cabe destacar que aún los más acérrimos defensores de la probabilidad "objetiva" están optando por la aplicación de la probabilidad en situaciones y con supuestos en que ésta es válida (ya sea garantizando la equiprobabilidad o ciertas condiciones de observación). Pero, como toda opción, ésta implica una elección subjetiva: así, pues, tampoco hay un "objetivo" absoluto.

### 1.1.1. PROBABILIDADES CLASICA Y FRECUENCIAL

La llamada probabilidad "a priori" recibe también el nombre de probabilidad "clásica". De acuerdo con ella, la probabilidad de un evento es el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles (o totales). Esta definición cumple las condiciones de la probabilidad "formal" o "matemática" (en particular, cumple con los tres axiomas fundamentales de la teoría matemática de la probabilidad), siempre y cuando se satisfaga la condición de que los eventos elementales sean equiprobables. Esta redundancia o tautología es considerada uno de los obstáculos filosóficos para la aceptación plena de la definición clásica de la probabilidad.

La definición frecuencial ("frecuentista" o "empírica") define la probabilidad como el número al que tienden las frecuencias relativas de ocurrencia de un evento a medida que aumenta el número de observaciones del evento. Aunque la existencia de tal límite está matemáticamente garantizada, no se llega generalmente a conocer, puesto que el número de observaciones reales de cada evento es acotado. Con esta definición también se llega a una probabilidad en el sentido matemático del término.

Estas dos posiciones suelen considerarse antagónicas. Sin embargo, están ligadas por medio de la ley de los grandes números, y pueden considerarse como mutuamente complementarias. Ambas van con las direcciones fundamentales del pensamiento científico; ambas son "objetivas", en el sentido de que el juicio probabilístico es la manifestación de una habilidad cognitiva. Maury liga a estas dos definiciones bajo el nombre de la corriente "objetivista" en la interpretación de los fundamentos de la probabilidad, en contraposición a la corriente "subjetivista", según la cual la probabilidad subjetiva tiene que ver con un estado de ánimo del individuo, con sus convicciones y con su grado subjetivo de confianza en los eventos: es decir, las probabilidades que Hawkins y Kapadia denominan "subjetiva" e "intuitiva".

Otro aspecto de esta matematización que comparten la definición "clásica" y la definición "frecuencial" es que desmoronan al azar: «la eliminación del azar se efectúa mediante el cálculo de probabilidades, un instrumento poderoso pero peligroso...» (Edge-

worth, citado por Stigler, 1986, pág. 363). Steinbring coincide con ello:

«El concepto de probabilidad tiene una propiedad curiosa: en cuanto uno trata de caracterizarlo sin ambigüedades mediante una definición matemática precisa, no queda ya nada estocástico. Ya no es cuestión de azar. Sólo quedan ciertos hechos matemáticos y cálculos bien determinados: teoría de conjuntos, cálculo de fracciones o porcentajes, reglas de combinatoria y métodos de conteo, aspectos de geometría elemental, algoritmos simples, etc.» (Steinbring, 1985, pág. 66)

### 1.1.2. PROBABILIDADES INTUITIVA Y SUBJETIVA

Al intentar describir estas maneras de conceptualizar la probabilidad, lo primero que se pregunta uno es cuál es la diferencia entre ellas. Aunque hay algunos intentos de separar los conceptos asociados a los términos "probabilidad intuitiva", y "probabilidad subjetiva", no han prosperado: «algunos autores consideran que estas probabilidades son distintas y otros no, y los que las consideran distintas difieren en sus ideas acerca de la naturaleza de lo que las distingue» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 349). Al respecto ha habido mucha controversia y ambigüedad, sobre todo acerca del concepto de "solución correcta": algunos opinan que la "probabilidad intuitiva" tiende a la "solución correcta", es decir a lo que concuerda con la probabilidad formal o teórica, y que la "probabilidad subjetiva" tiene que ver con sopesar una evidencia cuando no hay un enfoque formal, por lo que no cabe la idea de "solución correcta" (1).

Sin embargo, no hay acuerdo al respecto; Hawkins y Kapadia (1984, pág. 350) se pronuncian por no reconocer una línea divisoria entre las dos probabilidades: «preferimos pensar que los juicios probabilísticos subjetivos e intuitivos son manifestaciones de opiniones personales que se basan en fuentes diversas de evidencia y en métodos o habilidades diversos de procesar la información». Yo adopto la misma posición: manejaré los términos "probabilidad subjetiva" y "probabilidad intuitiva" como prácticamente sinónimos. En cualquier caso se trata de expresar estimaciones a partir de creencias personales; se pueden enmarcar dentro de la afirmación de Cobb (1986, pág. 2) en el sentido de que «las creencias son un aspecto esencial de la conformación del significado

---

1. Maury (1986, pág. 23) propone usar el término de "probabilidad subjetiva" en el sentido de L. Jonathan Cohen de rechazo a la norma y el término "probabilidad intuitiva" en el sentido de John Cohen y de Kahneman y Tversky de buscar las correspondencias o los sesgos que se alejan de la norma, pero por una parte esto no correspondería con los términos usados por los propios autores, y por otra tampoco es muy claro que la separación se deba hacer así.

en general y de la conformación del significado matemático en particular».

Entre los adherentes a la probabilidad subjetiva, destacan John Cohen, Fischbein y la pareja de investigadores norteamericanos Kahneman y Tversky. Ellos dan las siguientes definiciones (2).

John Cohen habla de la probabilidad subjetiva como una "medida de estados de incertidumbre":

«Por probabilidad subjetiva entendemos una medida de estados mentales de incertidumbre que van desde la incertidumbre total en un extremo hasta la certeza total en el otro. Estos estados son implícitos en todo comportamiento humano.» (John Cohen et al., 1957b, pág. 271)

Para Fischbein la probabilidad subjetiva es

«el grado de creencia que una persona dada tiene con respecto a una afirmación dada sobre las bases de una evidencia dada [...] Esta caracterización da pie a una serie de problemas con implicaciones psicológicas directas, tales como la consistencia o coherencia de la creencia, la relación entre hipótesis y datos (con respecto a la fórmula de Bayes), las estimaciones intuitivas de las probabilidades y de la forma de las distribuciones, etc.» (Fischbein, 1975, pág. 2)

Por su parte, Kahneman y Tversky amplían aún más el campo, hablando de "estimaciones" en general, y sólo diferenciando la probabilidad subjetiva de la "formal" (según la terminología de Hawkins y Kapadia):

«Usamos el término "probabilidad subjetiva" para denotar cualquier estimación de la probabilidad de un evento que sea dada por un sujeto o inferida a partir de su comportamiento. No se exige que estas estimaciones satisfagan axiomas o requerimientos de consistencia. Usamos el término "probabilidad objetiva" para denotar valores calculados, sobre la base de suposiciones explícitas, de acuerdo a las leyes del cálculo de probabilidades. Debe ser obvio que esta terminología elude cualquier compromiso con respecto a cualquier enfoque filosófico de la probabilidad.» (Kahneman y Tversky, 1972, pág. 32)

Con su definición, Kahneman y Tversky no sólo se deslindan de enfoques filosóficos, sino también de las posiciones, dentro de la probabilidad subjetiva, que exigen que las estimaciones satisfagan mínimamente unos requisitos de coherencia. La coherencia

2. Hay una cuarta manera de ver la probabilidad subjetiva, de L. Jonathan Cohen. Lo que él plantea es una teoría de la probabilidad inductiva, que es Baconiana y rechaza la norma, contra la Pascaliana en que se mueven Kahneman y Tversky (Jonathan Cohen, 1980).



es una condición establecida por DeFinetti acerca del tipo de apuestas a que debe llevar una estimación subjetiva, y define un sistema en el que las probabilidades dependen de cada individuo pero satisfacen los axiomas de la probabilidad matemática. Aunque Kahneman y Tversky conceden que esta definición tiene la ventaja de ser «una interpretación subjetiva rigurosa de la probabilidad», se deslindan de ella porque es artificial: por una parte, la coherencia implica que la probabilidad subjetiva se derive de las preferencias entre apuestas, cuando lo que realmente suele ocurrir es lo contrario; por otra parte, lo que habría que buscar es una coherencia con las otras creencias del individuo, pero ellos muestran que «un conjunto internamente consistente de probabilidades subjetivas puede ser incompatible con otras creencias del individuo [...] Desafortunadamente, no puede haber un procedimiento formal sencillo para evaluar la compatibilidad de un conjunto de juicios probabilísticos con el sistema total de creencias de cada quien.» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 19)

Por otra parte, Gigerenzer et al. señalan que en estas definiciones de probabilidad se busca siempre partir de situaciones de la vida cotidiana y llegar a estimaciones de probabilidad en expresiones numéricas, pero que esto no es necesariamente lo que ocurre en la vida real: «los sujetos expresan la incertidumbre de otros modos».

«Como ejemplo, considérese una mujer ansiosa acerca de si está embarazada o no. ¿Tiene sentido suponer que su incertidumbre está representada numéricamente, digamos por una probabilidad subjetiva de 35% de que está embarazada? Su sensación de incertidumbre puede no estar representada como una probabilidad numérica fija. Más bien puede alternar estados de certeza, donde sólo las fases de transición contienen incertidumbre. A ratos puede creer que definitivamente está embarazada, luego puede cambiar a creer que definitivamente no lo está, y puede seguir alternando así. Tal incertidumbre puede estar representada por probabilidades de transición, como las frecuencias relativas de cambiar de un estado de certeza a otro, más que por un valor subjetivo entre 0 y 1.» (Gigerenzer et al., 1989, pág. 225)

Curiosamente, la respuesta a la "probabilidad sin números" solicitada por Gigerenzer en 1989 había sido dada cincuenta años antes por un matemático de nombre Koopman. Koopman realizó un interesante experimento matemático, consistente en la elaboración formal de una axiomática y un álgebra de la probabilidad intuitiva. Lo que me parece importante resaltar de este experimento, es que Koopman definió como elementos básicos de su construcción formal no las probabilidades numéricas, sino una "comparación de probabilidad", sobre la cual construyó un álgebra booleana con operaciones lógicas y una relación de orden parcial (Koopman, 1939).

Muchos de los trabajos insertos en el marco de la probabilidad subjetiva tienen como meta la comparación entre las estima-

ciones subjetivas y lo que prescribe la probabilidad formal, objetiva o matemática (John Cohen, 1957a). Y, con algunas excepciones, llegan a la conclusión de que la probabilidad subjetiva no se ajusta a las leyes de la objetiva, sino que tiene las suyas (psicológicas) propias:

«La gente no sigue los principios de la teoría de probabilidad al juzgar la probabilidad de eventos inciertos. Esta conclusión no es sorprendente, porque las leyes del azar no son ni aparentes intuitivamente ni fáciles de aplicar. En cambio, resulta menos obvio el hecho de que la probabilidad subjetiva parece desviarse de la probabilidad objetiva de una manera confiable, sistemática y difícil de eliminar. Aparentemente, la gente reemplaza las leyes del azar por heurísticas que a veces dan estimaciones razonables y con mucha frecuencia no.» (Kahneman y Tversky, 1972, pág. 32)

Asimismo, Bell afirma que

«en muchos casos el comportamiento humano se aparta significativamente de lo que podría predecirse a partir de un modelo del Hombre basado en una probabilidad matemática; por ejemplo los eventos equiprobables no son tratados como tales, los eventos independientes pueden ser tratados como relacionados, se pueden expresar preferencias donde no hay ninguna justificación matemática, y pueden interferir conceptos como la esperanza, el pesimismo o la justicia.» (Bell, 1979, citado por Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 356)

De hecho, para investigar en sus raíces los impulsos que llevan a los individuos a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, habría que escarbar no sólo en las matemáticas y la psicología, sino también en el psicoanálisis, la antropología y la sociología: se podría empezar por pedir a cada una de esas disciplinas una explicación de lo que es "tener suerte".

### 1.1.3. DEL SIGLO XVIII A NUESTROS DIAS

La historia de la probabilidad es la historia de cómo la humanidad fue arrancando al azar del dominio de lo desconocido. Desde un principio se presentó la terna de definiciones de probabilidad que hoy conocemos como la "clásica", la "frecuencial" y la "subjetiva":

«los matemáticos que emprendieron el intento de medir las probabilidades llegaron al menos a tres métodos: posibilidades iguales basadas en simetría física, frecuencias observadas de eventos, y grados de certeza subjetiva o creencia; el primero se adaptaba a los juegos y en particular a los dados, pero no a otros contextos; el segundo dependía de la colección de estadísticas y suposiciones de estabilidad a largo plazo, y el

tercero hacia eco de la práctica legal de darle grados de certeza a la evidencia». (Gigerenzer et al., 1989, pág. 7)

Las tres maneras de abordar la probabilidad estuvieron intrínsecamente ligadas durante muchos años. Se establecía una diferencia entre los aspectos subjetivos y objetivos de la probabilidad mediante el uso de términos distintos: Laplace, Poisson y Cournot utilizaron los términos *probabilité* (noción subjetiva relativa a nuestro conocimiento y nuestra ignorancia, o bien grado de creencia razonable) y *facilité* o *chance* (frecuencia o propensión objetiva) (Hacking, 1990, pág. 96). Pero, a pesar de la distinción de términos, no eran más que aspectos diferentes del mismo concepto.

Para los probabilistas clásicos, la probabilidad matemática consistía en una confluencia productiva de los sentidos subjetivo y objetivo de la probabilidad, en el marco de un determinismo a ultranza que negó firmemente la existencia de la suerte <sup>(3)</sup> (Gigerenzer et al., 1989, pág. 18). Todavía hasta 1800 la teoría de la probabilidad era a la vez una descripción formal de las intuiciones de un hombre racional y una prescripción para el resto de la humanidad. Cada evento podía ser explicado por una sucesión de condiciones; el "azar" era una palabra sin más significado que lo vulgar, lo carente de leyes, la suerte; era «un enredo sin interés por sí mismo» (Piaget, 1950, pág. 150), indigno de que las personas educadas le concedieran atención. Pero en el siglo XIX hubo una gran revolución del pensamiento: en un solo siglo se pasó del determinismo ardiente a un indeterminismo igualmente extremo. La probabilidad y la estadística se convirtieron en las herramientas descriptivas por excelencia; «el azar hizo que el mundo pareciera menos caprichoso: fue legitimado porque extrajo orden del caos» (Hacking, 1990, pág. vii). El azar dejó de ser la esencia de la falta de leyes para convertirse en el centro de todas las leyes de la naturaleza y la sociedad, y en el de toda inferencia inductiva racional: fue, como dice Hacking, domado.

Pero en esta evolución, ha salido perdiendo el aspecto subjetivo de la probabilidad. El determinismo mantenía cohesionadas a la "subjetividad" y la "objetividad", y al desaparecer el determinismo fue la "objetividad" quien ocupó todo el lugar, con sus cálculos y estadísticas. La probabilidad subjetiva, que era parte intrínseca de la (única) probabilidad, quedó reducida a los juicios personales de probabilidad, cuya existencia nadie niega pero que son materia de estudio de la psicología.

Así, el concepto de probabilidad ha ido evolucionando a la par que el concepto de azar, siempre simultáneamente sobre los ejes del determinismo y el indeterminismo, de lo objetivo y lo subjetivo, de lo descriptivo y lo normativo, de la teoría y las

3. Por ejemplo, Laplace sostenía que «las probabilidades miden la ignorancia humana, no el azar genuino, que Dios no necesitaba probabilidades, que todos los eventos estaban gobernados por causas necesarias, por muy ocultas que estuvieran»: era «in-corrregiblemente subjetivo y un determinista ardiente» (Gigerenzer et al., 1989, pág. 12)

aplicaciones. Gigerenzer et al. (1989) señalan un punto importante. Cuando nosotros vemos esta historia la vemos con nuestros propios ojos de gente formada en el siglo XX, y por ende lo que nos parece natural es marcar las distinciones: por una parte lo teórico, por otra lo frecuencial, por otra lo subjetivo, y separando muy en particular los dos primeros significados "objetivos" del último, que corresponde a estados de la mente.

Aunque tal vez la distinción sea mucho más fuerte, e importante, para la gente más formada (en probabilidad) que para la gente "normal": yo creo que la mayoría de la gente "normal" se vería en aprietos para distinguir la probabilidad subjetiva de la objetiva. La afirmación de Gigerenzer et al. parece sugerir una cultura probabilística masiva que, al menos en este país, no existe: aunque el azar es asunto de todos, la probabilidad es cocto de unos cuantos (lo que se manifiesta, entre otras cosas en la probabilidad convertida en producto comercial, en libros y revistas que invitan al lector-comprador a que "domine las probabilidades de la vida cotidiana y las ponga a su favor" (McGervey, 1986), o que le brindan una "orientación al apostador" basada en intuiciones incorrectas burdas pero populares <sup>4</sup>).

#### 1.1.4. UNA POSTURA PERSONAL

Yo soy, evidentemente, una de esas personas "formadas en el siglo XX" a que se refiere Gigerenzer. Puedo aceptar una discusión entre la definición clásica y la frecuencial, pero como a fin de cuentas hay un puente (formal) entre ambas, la discusión no me parece fundamental. De todos modos me adhiero a la corriente "objetivista", incluso bajo la premisa de optar "subjetivamente" por las condiciones en que ésta es válida. Pienso que ante una situación en la que quepa un cálculo de probabilidades éstas dan pie a una única probabilidad correcta, y en lo sucesivo hablaré de resultados mejores o peores según se acerquen o se alejen de ella.

Sin embargo, esa adhesión no me impedirá ni reconocer el interés que puedan tener cualesquiera otras estimaciones, ni utilizar resultados de la corriente subjetivista, en particular porque «si deseamos interesarnos en las concepciones probabilísticas de los alumnos es necesario tomar ciertas precauciones fundamentales en la construcción de las situaciones que se les propongan a los sujetos» Maury (1986, pág. 45).

---

4. Tal es el caso del folletín *Tiempo de azar* (Sabau, 1992), editado durante algún tiempo como suplemento de la revista *Tiempo libre*, y que se basaba principalmente en la conocida falacia del apostador. Es de lamentarse que folletines como éste, que deseducan a la gente, tengan circulación.

## 1.2. TRES REFERENTES TEORICOS

Muchos autores y sus investigaciones fueron revisados durante la realización de este trabajo; mucho de lo revisado contribuyó, en un aspecto o en otro, a guiar, modular, matizar, encauzar el trabajo experimental o su análisis. Entre todos los autores, cuatro destacan por su importancia en la construcción conceptual.

En primar lugar está Jean Piaget, cuya lectura motivó la realización del trabajo. Con ello no quiero decir que se deba considerar que el trabajo es piagetiano, o que corresponde a una perspectiva o a un marco piagetiano, sino que surgió de una discusión acerca de algunas afirmaciones que hace Piaget sobre el concepto de probabilidad en niños. Aunque el trabajo luego creció por caminos muy diversos de los que señalaba su origen piagetiano, entre otros aspectos porque se realizó con adultos y los adultos nunca fueron preocupación de Piaget, es importante reportar las afirmaciones de Piaget acerca de la probabilidad, y ubicarlas, así sea someramente, dentro del marco de la teoría piagetiana.

En segundo lugar está Efraim Fischbein, gran estudioso de la intuición en general y, en particular, de la intuición probabilística en niños. Aunque a mi modo de ver Fischbein se acerca demasiado a una perspectiva conductista, su claridad para ver, comprender y explicar los fenómenos intuitivos ha sido fundamental.

Los últimos autores de esta reducida lista son Daniel Kahneman y Amos Tversky, cuyos trabajos en las concepciones erróneas que pueden tener los adultos en situaciones azarosas también marcaron el mío.

Estos tres referentes serán abordados en sendos apartados de esta sección.

### 1.2.1. PIAGET: PSICOGENESIS DEL CONOCIMIENTO

El epistemólogo suizo Jean Piaget ha sido uno de los grandes hacedores de luz en la comprensión de la inteligencia humana y de su desarrollo; entre sus grandes méritos está el abordaje de los problemas de la epistemología desde una perspectiva científica y con un método experimental.

Se ha escrito mucho acerca de Piaget; éste no es el lugar adecuado para una descripción detallada ni para una discusión amplia de sus hallazgos. Intentaré sólo resumir muy breve y esquemáticamente algunos de los puntos sobresalientes de la teoría piagetiana en general y de sus aplicaciones en la adquisición de los conceptos relativos al azar y la probabilidad.

El último párrafo se referirá principalmente a una visión autocrítica que escribió Piaget a finales de su vida y a una serie de trabajos desarrollados por otros investigadores a partir

de ella, en particular con adultos, lo que resulta de gran interés para este trabajo.

#### 1.2.1.1. ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORIA PIAGETIANA

En este apartado me ocuparé de algunos conceptos fundamentales de la epistemología genética piagetiana y de su principal instrumento, la psicología genética. Aunque se mencionará aquí al método experimental utilizado por Piaget, éste se desarrollará cuando se expongan los referentes experimentales (§1.5.2.2).

##### a) Epistemología genética

El interés principal de Piaget fue encontrar un modelo general explicativo del pasaje de un estado de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento. Para ello, un fundamento básico es el método adoptado, que le permitió «formular hipótesis y construir una teoría compatible con todos los resultados experimentales» (Ferreiro y García, 1975, pág. 12/169): una teoría para interpretar y explicar los resultados experimentales dentro de un marco conceptual adecuado.

Piaget propone un modelo de construcción recíproca entre el sujeto y el objeto epistémico, según el cual la acción es la única fuente de conocimiento. La inteligencia, que hunde sus raíces en lo biológico, es la adaptación del sujeto en esta interacción. Dos aspectos fundamentales de la adaptación son la asimilación y la acomodación; la asimilación es el proceso mediante el cual un dato externo es incorporado a la estructura interna cognitiva y queda integrado a ella, mientras que la acomodación es el proceso de ajuste de la estructura una vez que un nuevo dato ha sido asimilado. Así, se van sucediendo mecanismos de desequilibración y de reequilibración, que conforman un equilibrio dinámico. Cada estado de equilibrio es un paso adelante, y en cada paso se van construyendo y reconstruyendo dialécticamente las estructuras cognitivas del sujeto. En los procesos de desequilibración, las estructuras son las que asimilan, y funcionan como órganos de conocimiento; en los procesos de reequilibración, se construyen nuevas estructuras con la participación de la abstracción y la generalización. Un postulado básico piagetiano es que «la estructura puede modificarse por influjo del medio, sin destruirse como estructura. Todo conocimiento es asimilación de un dato exterior a las estructuras del sujeto» (Ferreiro, 1971, citada por Saal, 1975, pág. 286/215).

La psicogénesis del conocimiento, que he descrito aquí a muy grandes rasgos, es una de las tres vertientes de la epistemología genética; las otras dos son el método histórico-crítico y la colaboración interdisciplinaria.

Aunque la popularidad de Piaget se debe mucho menos a los avances logrados en la epistemología genética que a sus éxitos como "psicólogo educativo para niños", debe resaltarse que su interés no se centró jamás ni en la psicología, ni en la educación, ni en los niños por sí mismos. La preocupación de Piaget giraba en torno al problema de la construcción de una epistemología

científica que diera cuenta de las transformaciones de los estados de conocimiento. Para ello, decidió trabajar con niños, pero «el niño tampoco le interesa como niño en sí, sino como un sujeto epistémico ideal. Ideal porque es espontáneo en su razonamiento y se pueden estudiar sus mecanismos mentales con toda facilidad, en comparación con el adulto que ha perdido gran parte de la espontaneidad cognitiva» (Guajardo, 1984a, pág. 20).

Así, el niño como sujeto en desarrollo permite estudiar el pasaje de un estado de conocimiento a otro de mayor conocimiento de una manera pura. Pero para trabajar con niños, era necesario contar con una herramienta que permitiera el estudio del niño. Piaget creó así la psicología genética, no como una meta en sí, sino como un método que permitiera arribar al objetivo epistemológico. Aunque en la construcción del puro método Piaget invirtió 27 de los 62 años de su vida productiva, trabajó siempre con miras a la construcción de la epistemología.

#### b) Psicología genética

Las sucesivas etapas de reequilibración y transformación de estructuras cognitivas fueron denominadas por Piaget "estadios". A partir del trabajo experimental que desarrollaron Piaget y sus colaboradores, llegaron a la tipificación de tres estadios del desarrollo cognitivo del individuo<sup>(5)</sup>.

En el primer estadio (2 a 7 años), el egocentrismo inicial (que es una asimilación deformada de lo real al yo) se va sustituyendo poco a poco por el pensamiento verbal, caracterizado por el finalismo, el animismo y el artificialismo, así como por una idea de causalidad fincada en la imposición externa de conductas a las que está sometido el niño. Después se va desarrollando la intuición, como simple interiorización de las percepciones y los movimientos bajo la forma de imágenes representativas y de "experiencias mentales".

En el segundo estadio (7 a 12 años) el sujeto empieza a reflexionar sobre lo concreto. La representación y la explicación del mundo dan un primer paso hacia una forma de asimilación más racional, y surgen las primeras nociones de conservación. La intuición da lugar a las operaciones concretas, que son acciones reversibles y que constituyen la marca más importante de este estadio, porque estructuran la realidad clasificando los objetos o estableciendo relaciones entre ellos. No aparecen nunca aisladas, sino integradas a sistemas de operaciones del mismo tipo, como las relaciones de orden, las relaciones simétricas, y el sistema de operaciones que da lugar a la construcción de conceptos o "clases". Las operaciones concretas implican el proceso de encajamiento de las partes en el todo y su inverso, la extracción de

---

5. Estos tres estadios van precedidos del periodo correspondiente al recién nacido y el lactante, en el que el sujeto emprende la construcción de las categorías de objeto, espacio, causalidad y tiempo, aunque todo se realiza con egocentrismo. Un excelente resumen de las características de los estadios fue hecho por Lema y Morfín (1981).

las partes en función del todo; es por ello que sólo en esta etapa es posible la construcción cognitiva del número.

El último estadio del desarrollo cognitivo tiene lugar en la adolescencia. Lo más importante aquí es el surgimiento de las operaciones formales, con cuatro características:

- «1) El pensamiento formal no se limita a estructurar lo dado sino que es capaz de una combinatoria, que le permite considerar todas esas posibilidades y trabajar sobre ellas. Es hipotético-deductivo: trabaja ahora sobre proposiciones, extrayendo de ellas conclusiones.
- 2) A la lógica de clases y relaciones adquirida en la etapa anterior se agrega la lógica de proposiciones.
- 3) Las operaciones lógicas constituyen un sistema de operaciones a la segunda potencia, en la medida en que se refieren a proposiciones obtenidas en base a operaciones concretas.
- 4) Son diferentes las estructuras del pensamiento concreto y el pensamiento formal [...]. Esto le permite al adolescente reunir en un solo sistema las dos formas de reversibilidad: la reciprocidad y la inversión». (Lema y Morfín, 1981, pág. 15)

Tres elementos se conjugan para el pasaje de las estructuras de las operaciones concretas a las formales: una maduración neurológica, la acción de la sociedad, y la experiencia y la acción del individuo.

El orden de los estadios sucesivos es constante, y cada uno se caracteriza por una estructura operatoria de conjunto: al primer estadio se le conoce frecuentemente como preoperatorio, al segundo como el de las operaciones concretas y al tercero como el de las operaciones formales. Además, hay una explicación para el paso de un estadio al siguiente, por lo que en cada uno sólo ciertos problemas tienen verdadera significancia y llevan a un cambio en el esquema que se aplica para resolverlos (Noelting, 1980).

Un punto que es particularmente importante para el trabajo que se presenta aquí es el de la secuencia necesaria de los estadios. Al respecto, Piaget afirma que:

«no sólo los estadios sucesivos de la construcción de las diferentes formas del saber son secuenciales [...], sino, además, cada nuevo estadio comienza por una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los precedentes». (Piaget y García, 1980, pág. 9)

Así, según la escuela ginebrina (6), «cada estadio integra al anterior y prepara al siguiente en una secuencia necesaria e ineluctable». Además, esta evolución tiene un fin: «el punto de

6. Se conoce bajo este nombre al conjunto de seguidores de Piaget, agrupados en el Centro Internacional de Epistemología Genética en Ginebra, Suiza.



llegada en la evolución intelectual, es la posibilidad del pensamiento formal y abstracto que se alcanza aproximadamente en la época de la adolescencia» (Saal, 1975, pág. 283/213).

### 1.2.1.2. DESARROLLO DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Para Piaget, la idea de azar se va generando muy gradualmente en el niño. La dificultad inicial de la idea de azar está estrechamente relacionada con la dificultad de la idea de mezcla aleatoria, porque ésta constituye lo opuesto de lo operatorio. Esta dificultad se va venciendo con la adquisición cognoscitiva de lo reversible: en un principio, el niño tiene formas de acción y de pensar que son irreversibles, y por ende «incapaces de aprehender en la práctica o de representarse las formas de la realidad irreversibles como ellas» (Piaget, 1950, pág. 142), pero al surgir las formas reversibles de pensar se pueden ya crear los conceptos de mezcla, del azar y de lo aleatorio: «las realidades físicas irreversibles se reducen así a fenómenos de mezcla y, por ende, de azar» (Piaget, 1950, pág. 153).

Así, la adquisición de las operaciones reversibles marca un parteaguas en la génesis del concepto de azar: antes de ella, el niño busca para todo una causa, pero en la medida en que las operaciones reversibles se van desarrollando, va reconociendo en la ausencia de causalidad y orden la intervención del azar. La idea de azar se va adquiriendo mediante dos procesos paralelos; por una parte, mediante el contacto, a través de la acción, con los fenómenos irreversibles e indeterminables; por otra, junto con las operaciones, hasta llegar a los mecanismos combinatorios y la asimilación probabilística del azar a ellos (o, más bien, a la zaga de las operaciones, porque el azar les resiste).

Otro aspecto importante es la polaridad azar-necesidad. Hay una estrecha relación entre tres fenómenos: el razonamiento disyuntivo por una parte, la diferenciación entre lo posible, lo real y lo necesario por otra, y la comprensión de lo fortuito y lo probable por otra (Piaget e Inhelder, 1951). Los tres se desarrollan a la par, y ninguno lo puede hacer sin el desarrollo de los otros; «una de las tareas esenciales del razonamiento experimental o de la inducción consiste precisamente en disociar lo deducible de lo fortuito» (Inhelder y Piaget, 1955, pág. 190).

#### a) La génesis de la idea de azar en el niño

Piaget y su cercana colaboradora Bärbel Inhelder trabajaron ampliamente la relación cognoscitiva del niño con el azar y escribieron al respecto varios materiales (Piaget, 1950; Piaget e Inhelder, 1951; Inhelder y Piaget, 1955). De ellos, el más importante es el libro de 1951, *La génesis de la idea de azar en el niño*, en donde plasmaron los resultados de varias series de experimentos realizados con niños. El libro plantea una doble hipótesis de trabajo: por una parte, el descubrimiento de la idea de azar, es decir la comprensión misma de la irreversibilidad, debe esperar al nivel en el que se completan las operaciones re-

versibles; por otra, la probabilidad constituye una especie de desquite de las operaciones mismas, o sea una asimilación del azar a las operaciones combinatorias.

El libro está dividido en tres partes. En la primera, los autores abordan el estudio de las reacciones del niño ante situaciones físicas de la experiencia cotidiana que pueden promover la construcción de la idea de azar. La segunda parte emprende el análisis de las actividades del sujeto referentes al azar, o sea en las diferentes formas de sorteo. La tercera parte del libro está dedicada a las operaciones combinatorias.

La segunda parte es la que está más relacionada con el trabajo que aquí presento. En ella, Piaget e Inhelder estudian las reacciones de los niños de distintas edades ante juegos de volados, sorteos al azar con urnas y "cuantificación de probabilidades" en los sorteos al azar; algunos de los juegos incluyen "milagros" controlados a voluntad por el investigador. A continuación referiré brevemente los principales experimentos:

- A) Los niños sacan canicas azules y rojas de una bolsa. En algún momento el investigador sustituye la bolsa por otra con sólo azules. Posteriormente hay una aclaración y el experimento de que adivine de qué bolsa se está sacando.
- B) Los niños juegan volados con fichas marcadas con una cruz de un lado y una bola del otro; predicen resultados. En algún momento el investigador sustituye la bolsa de las fichas por una de fichas que tienen una cruz de ambos lados.
- C) El investigador pone números decrecientes de fichas de cuatro colores en una bolsa, dejando una colección igual sobre la mesa, revuelve la bolsa y le pide al niño que saque dos fichas, prediciendo de qué colores van a salir. Después de la extracción se repite lo mismo, poniendo sobre la mesa el resultado de las extracciones previas.
- D) Se le presenta al niño una sola bolsa que contiene fichas blancas y negras, y se le pide que prediga cuál tiene más oportunidad de salir.
- E) Se le presentan al niño dos colecciones de fichas blancas, con o sin una cruz en el anverso. Después que el niño las observa, se voltean y se revuelven; el niño debe decidir en cuál de los dos conjuntos tiene más oportunidades de encontrar a la primera una cruz. Cada vez se cambian las composiciones de fichas con o sin cruz en ambos conjuntos, y se definen diez tipos de problemas, a su vez clasificables en tres categorías:
  - ) problemas con imposibilidades (sólo fichas sin cruz en un conjunto) y/o certezas (sólo fichas con cruz en un conjunto), y problemas con composiciones idénticas (la misma composición en ambos conjuntos);
  - ) problemas "de una variable: en ambos conjuntos hay fichas con y sin cruces, y hay el mismo número de cruces o el mismo número de fichas;
  - ) problemas "de dos variables: en ambos conjuntos hay un número distinto de cruces y de fichas; a su vez pueden ser con o sin proporcionalidad;

Este último experimento es el que provocó, en su inicio, la realización de mi trabajo; de él hablaré con más detalle en la parte de este capítulo consagrada a los referentes experimentales.

A continuación intentaré revisar brevemente el desarrollo del concepto de probabilidad a través de los diferentes estadios del desarrollo intelectual, con las reacciones de los sujetos a los ejercicios recién expuestos (7). En general, se puede adelantar que lo típico en el estadio I son las respuestas de carácter perceptual y egocéntrico, en el estadio II las centraciones y en el estadio III el razonamiento proporcional.

#### b) Estadio I: preoperatorio

El niño de este nivel (aproximadamente entre los 4 y los 7 años) niega el azar, espera que los fenómenos se repitan de forma igual o similar, y niega la conservación de las cantidades. Le adjudica al azar poderes surgidos de su propia afectividad egocéntrica: habla de "buena suerte" o "mala suerte", de intenciones ocultas bajo las apariencias fortuitas, etc. No distingue los fenómenos regulares de los inesperados, ni lo necesario de lo posible, y no entiende la naturaleza de la mezcla aleatoria. El niño en este estadio tiene un concepto del azar dominado por intuiciones perceptuales, que son a la vez fenomenistas, porque se basan en nociones muy empíricas de frecuencia y de rareza, y egocéntricas, por la subjetividad implicada en la idea de compensación. Estas intuiciones lo llevan por una parte a aceptar cualquier resultado, y, por otra, a pretender que puede dominar la revoltura (Piaget e Inhelder, 1951).

La irreversibilidad del pensamiento que caracteriza a esta etapa se manifiesta en que el niño no comprende la reciprocidad necesaria de las operaciones de reunión y de partición; «es esta misma carencia general de reversibilidad operatoria la que les impide a los sujetos del estadio I comprender la irreversibilidad propia a la mezcla y por ello la noción de azar» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 137). En este estadio, el niño no tiene un criterio sistemático ni homogéneo para resolver los problemas que se le plantean; en general, sobre todo en el inicio del estadio, hay una despreocupación por las cantidades en juego y, cuando cabría, por establecer comparaciones lógico-aritméticas.

Ante los ejercicios de "cuantificación de probabilidad", el niño del estadio preoperatorio sólo resuelve bien algunas de las preguntas con imposibilidades y/o certezas, pero no las demás. Algunos niños eligen persistentemente el lado en que hay una sola cruz, despreciando el resto de la información (es más fácil en-

7. En el libro, Piaget e Inhelder identifican los mismos estadios del desarrollo intelectual para cada uno de los ejercicios planteados, pero observan que los niños llegan a distintas edades a los estadios identificados para los distintos ejercicios. Es decir, algunos son más fáciles que otros; por ejemplo, entre los dos últimos ejercicios planteados, es más difícil el de una sola bolsa que el de dos. Por otra parte, aunque los estadios son los mismos, las manifestaciones pueden variar dependiendo de la naturaleza del ejercicio. Yo me detendré más en las reacciones al último ejercicio, por ser el relacionado con mi trabajo.

contrar una sola cruz que muchas, aunque del otro lado sólo haya cruces); también es frecuente que elijan el lado en que hay más fichas. En general, «el niño suele ocuparse sólo de los casos favorables como si tuvieran un valor absoluto, muy poco de los posibles y prácticamente nunca de los dos al mismo tiempo». Hacia el final del estadio algunos niños llegan a una intuición que marca un progreso certero: mientras más fichas haya, hay más posibilidades, y por lo tanto menos oportunidades de encontrar los casos favorables a la primera» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 140).

### c) Estadio II: operaciones concretas

En este estadio (entre los 7 y los 11 años) surgen las operaciones intelectuales, y, con ellas, las bases del concepto de probabilidad. El niño primero «se desorienta ante lo fortuito, vale decir ante aquello que resiste a sus operaciones nacientes» pero luego intenta «encontrar causas sistemáticas de las fluctuaciones». Ya entiende la diferencia entre lo posible y lo necesario; sin embargo, no hay todavía una disociación metódica de los factores que pueden intervenir en las fluctuaciones. En el nivel de las operaciones concretas el niño sólo logra resolver situaciones probabilísticas muy sencillas, es decir en los casos elementales en que sólo intervienen desigualdades simples, pero no las más complicadas en que deba intervenir un conjunto de combinaciones variadas. Se trata de un "probabilismo naciente" (Piaget, 1950, pág. 147).

El surgimiento de la noción de azar está ligado a las operaciones concretas, que son componibles y reversibles, porque las operaciones debidas al azar se reconocen como no componibles e irreversibles. La idea de mezcla aleatoria se adquiere ya, de manera global. El niño disminuye sus predicciones egocéntricas, y empieza a distinguir entre regularidades y distribuciones fortuitas. Aunque tiene todavía dificultades con la comprensión de la ley de los grandes números, comienza a tomar en cuenta las cantidades en juego; por ejemplo, en el ejercicio con una sola bolsa (D), el niño ya busca relaciones cuantitativas, «lo que muestra bien que concibe la mezcla como tal y comprende que la mano metida en la bolsa tiene tantas más oportunidades de encontrarse un elemento de una categoría mientras más numerosa sea ésta» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 121). Pero la incapacidad de reconocer todos los casos posibles impide establecer la relación entre favorables y posibles de una manera sistemática.

Con respecto a la "cuantificación de las probabilidades", este estadio se caracteriza por un éxito general de las comparaciones con una sola variable, a través de un mecanismo que Piaget denomina "centración", y que consiste en que el sujeto enfoca su atención hacia una sola de las cantidades en juego. Por ejemplo, si en ambas colecciones hay cuatro fichas, pero una tiene dos cruces y la otra tiene tres cruces, la concentración en los casos favorables lleva a elegir la segunda, con lo que se resuelve correctamente el problema. En los problemas de dos variables esta concentración lleva a un fracaso sistemático (cuando el niño «por una suerte de "décalage" (corrimiento) o simplemente de falsa ge-

neralización, se queda en el método que le funciona en la solución de los problemas de una sola variable»), aunque algunos niños de este estadio ya intentan tomar en cuenta simultáneamente los casos favorables, los casos desfavorables y los casos posibles en su totalidad; frecuentemente lo hacen comparando la diferencia de favorables menos desfavorables en las dos partes. Sólo hacia el final del estadio de las operaciones concretas el niño comienza a descubrir algunos casos de proporcionalidad, cuando son fácilmente perceptibles, o bien cuando se le hace ver la equivalencia disponiendo físicamente las colecciones en subconjuntos comparables (sin embargo, no tiene todavía las herramientas para establecer una generalización, y al volver a juntar los subconjuntos el niño deja de reconocer las relaciones recién descubiertas, como si no se conservaran»: Piaget e Inhelder, 1951, pág. 147).

#### d) Estadio III: operaciones formales

En este estadio (entre los 11 y los 15 años), el niño ya puede entender «la naturaleza de la mezcla como sistema de interferencias fortuitas» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 116), y «quiere alcanzar las leyes a través de una disociación precisa de los factores» (Inhelder y Piaget, 1955, pág. 195). No sólo distingue los casos favorables y los desfavorables (las partes en el todo), sino que ve «la necesidad de decidir si pesan más los primeros que los segundos» (*ibid*, pág. 196). Los dos grandes progresos de este estadio son la comprensión de la ley de los grandes números y la concepción de la probabilidad de los casos aislados como una función del todo. «Los juicios de probabilidad son ciertamente una síntesis entre azar y operaciones: las operaciones llevan a la determinación de todos los casos posibles, que el azar sólo realiza de manera desordenada e incompleta» (Lema y Morfín, 1981, pág. 34). «La probabilidad, en lugar de quedarse global como en el estadio II o, por así decirlo, toda de una pieza, se desgaja en juicios graduados, que denotan la existencia de una cuantificación implícita» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 106).

El manejo de las cantidades en juego es ya sistemático en todos los ejercicios planteados. En cuanto a los ejercicios de "cuantificación de las probabilidades", el niño ya puede resolver de manera sistemática los problemas de dos variables. Al principio del estadio, «determina las razones dobles por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o las desproporciones no son visibles». Con esto, «se completan, por una serie de relaciones multiplicativas, el encajonamiento de las partes en las totalidades, fuente de disyunciones, y la cuantificación de las probabilidades engendradas gracias a este mecanismo disyuntivo» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 149). Al final del estadio, el sujeto resuelve el problema mediante cálculo de fracciones.

#### e) Algunas implicaciones

Una de las conclusiones generales de Piaget e Inhelder acerca del desarrollo de la noción de probabilidad se refiere a la

necesariedad de las operaciones formales para que la noción se adquiriera plenamente. Los autores explican esto así:

«La razón esencial es que las operaciones formales son, psicológicamente, operaciones de segunda potencia, u operaciones que a su vez actúan sobre otras operaciones previas (que son las operaciones concretas). Como son de segunda potencia, son en primer lugar más abstractas que las operaciones sobre las que actúan y adquieren así un poder hipotético-deductivo ajeno a las operaciones concretas. Es por ello que su adquisición es necesaria para engendrar la modalidad de lo posible puro, condición de la elaboración de lo probable y de las diferentes relaciones (disyunción, etc) indispensables a la conformación lógica y a la cuantificación de la probabilidad». (Piaget e Inhelder, 1951)

Dos de las operaciones formales son cruciales para el concepto de probabilidad. Por una parte, la proporcionalidad, que es por excelencia una "operación sobre una operación" puesto que implica una comparación entre dos razones. Por otra, las operaciones combinatorias. La composición combinatoria va más allá de la composición aditiva y por ende permite la plena comprensión de lo posible. Con las operaciones combinatorias,

«el azar mismo queda asimilado o reducido, por así decirlo, por las operaciones: [...] deja de estar revestido de poderes surgidos de la afectividad egocéntrica para volverse transparente a la razón». (Piaget, 1950, pág. 147)

Según Piaget, esto permite ver la historia del probabilismo en el pensamiento precientífico y científico a la luz de la necesidad de las operaciones formales para la comprensión de la idea de azar: ésta «explicará, primero, el carácter tardío del reconocimiento del propio azar y, segundo, el carácter aún mucho más tardío de la constitución de una teoría de las probabilidades físicas» (Piaget, 1950, pág. 148).

### 1.2.1.3. EL CONCEPTO DE INTUICION SEGUN PIAGET

El concepto de intuición no es un punto fundamental dentro de la teoría piagetiana, sino uno que será de particular interés para este trabajo.

Para Piaget, la intuición opera solamente a nivel perceptual, como «simple interiorización de las percepciones y los movimientos bajo la forma de imágenes representativas y de experiencias mentales» (Lema y Morfín, 1981, pág. 9). Algunas citas pueden apoyar esta afirmación:

- «sólo hay un mundo de intuiciones perceptivas y subjetivas» (pág. 119);
- «simple intuición de lo frecuente y lo raro» (pág. 99);

- soluciones fundadas «simplemente en regulaciones intuitivas: el niño comprende, gracias a esquemas perceptivos» (pág. 139);

- «sólo que esto no es más que una intuición, o sea que se apoya esencialmente en la configuración perceptiva» (pág. 140) (Piaget e Inhelder, 1951).

Piaget afirma asimismo que toda intuición preoperatoria es «a la vez fenomenista y egocéntrica» (*ibid*, pág. 101).

Por su parte, Noeiting (1980), que trabaja en el marco de la escuela ginebrina, maneja "nivel intuitivo" como sinónimo de "nivel preoperatorio".

#### 1.2.1.4. OTRAS VISIONES DEL TRABAJO DE PIAGET

##### a) Críticas a Piaget

Según Guajardo (1984b), las críticas más fuertes a Piaget en su tiempo provinieron de Vigotsky, Wallon y Chomsky. La crítica de Vigotsky se refiere en parte al término "egocentrismo cognitivo", pero, según reconoció Piaget después, hubiera sido mejor hablar simplemente de "centrismo" para no confundir el concepto con el de individualismo. Wallon centra su atención en el pasaje continuo de lo biológico a lo psíquico y considera que Piaget subestima los factores sociales, mientras que Chomsky centra la suya en la adquisición del lenguaje y argumenta que Piaget subestima los factores biológicos.

En cuanto a las críticas posteriores, van mucho más en el sentido de las críticas de Wallon que en el de las otras: se le reprocha a Piaget la escasa consideración de lo ambiental y de lo social, en particular de la escuela. Así, por ejemplo, uno de los más importantes especialistas en didáctica de las matemáticas, Vergnaud (1981), aunque considera a Piaget la principal referencia de origen, se deslinda de él, por su falta de consideración de los conocimientos escolares, por su mayor interés en las estructuras que en la evolución adaptativa, por la separación que hace de los conocimientos matemático y de la realidad física, y porque pone un énfasis mayor en las operaciones y las estructuras que en los contenidos.

A pesar de ello, algunos seguidores de Piaget consideran que sólo hay que tener en cuenta, para los efectos de generalización, que «Piaget elabora su teoría en relación a una sociedad particular, y dentro de ella, a ciertos sectores sociales» (Lema y Morfin, 1981, pág. 2), mientras que otros afirman que es un mito que Piaget le dé más importancia a la maduración que a los aspectos ambientales, puesto que habla de una "dimensión ontogenética y una dimensión social", puesto que considera que el desarrollo de las estructuras mentales depende de tres factores principales: la maduración del sistema nervioso, la experiencia adquirida en interacción con el entorno físico y la influencia del medio social, y puesto que incluso afirma que la influencia del medio aumenta con la edad (McCrary y Long, 1980).

### b) Revisión autocrítica de Piaget

En la parte más conocida de su trabajo, Piaget afirma que el estadio de las operaciones formales es el último bastión en el desarrollo cognitivo, que todas las personas llegan a él, y que esto ocurre a más tardar a los 15 años. Cuando sus experimentos se empezaron a repetir en el resto del mundo, empezaron a surgir contradicciones, sobre todo en lo que respecta a las edades de acceso a los diferentes estadios. Piaget mismo reconoció esto en un artículo, escrito para una conferencia en 1970, y publicado en inglés en 1972. Desgraciadamente, este artículo es menos conocido de lo que debería, porque en él plantea cotas y precisiones a sus trabajos, y en una autocrítica poco común reconoce errores y omisiones.

En el artículo, intitulado "Evolución intelectual desde la adolescencia hasta el estado de adulto", Piaget acepta que las edades de acceso a los estadios cambian, sobre todo en diferentes culturas o sociedades, pero no así la sucesión de los estadios. Asimismo, reconoce que el hecho de que sus investigaciones hayan sido realizadas con niños tomados de las mejores escuelas de Ginebra sesgó parcialmente los resultados porque se trataba de una "población privilegiada", y acepta los resultados de otros investigadores, que "han mostrado que sujetos de otros tipos de escuelas o entornos sociales diferentes pueden dar resultados que difieren en menor o mayor medida de las normas indicadas": menciona en particular trabajos sobre adultos franceses y adolescentes neoyorkinos con resultados distintos a los suyos, aunque habla también de que sus resultados han sido confirmados en muchos casos. Piaget plantea tres hipótesis posibles para explicar las discrepancias.

La primera hipótesis implica diferencias en la velocidad de desarrollo (sin modificaciones en el orden de sucesión de estadios), posiblemente debidas a la calidad y frecuencia de la estimulación intelectual recibida. Si ésta es escasa, puede ir acumulando retrasos de tal modo que la edad de acceso al pensamiento formal sea entre los 15 y los 20 años, y no entre los 11 y los 15. Incluso, en condiciones extremadamente desventajosas, puede ocurrir que tal tipo de pensamiento nunca se conforme en realidad o que se desarrolle sólo en aquellos individuos que cambian su entorno mientras el desarrollo todavía es posible". De acuerdo con esta hipótesis, «en principio todos los individuos normales son capaces de alcanzar el nivel de las estructuras formales bajo la condición de que el entorno social y la experiencia adquirida le aporten al sujeto el alimento cognitivo y la estimulación intelectual necesaria para tal construcción».

La segunda hipótesis es que "si las estructuras formales no aparecen en todos los niños de 14-15 años y muestran una distribución menos general que las estructuras concretas de los niños de 7 a 10 años de edad, esto podría deberse a la diversificación de aptitudes con la edad". Ello implicaría que sólo los sujetos con talento para áreas relacionadas con las matemáticas podrían construir las estructuras formales: el periodo de las operaciones formales ya no se caracterizaría «como un estadio en sentido estricto, sino que parecería ser ya un avance estructural en la dirección de la especialización».



La tercera hipótesis es un compromiso entre las dos anteriores, y permite reconciliar el concepto de estadios con la idea de aptitudes que se diferencian progresivamente: «todos los sujetos normales alcanzan el estadio de las operaciones formales o de la estructuración, si no a los 11-12, a los 14-15 años, y en cualquier caso entre los 15 y los 20 años. Sin embargo, alcanzan este estadio en diferentes áreas de acuerdo con sus aptitudes y sus especializaciones profesionales (estudios profesionales o formas de aprendizaje de los diversos oficios): la manera en la que estas estructuras formales se usan, sin embargo, no es necesariamente la misma en todos los casos». Esto haría entrar a carpinteros, cerrajeros y mecánicos en el pensamiento formal, cada uno en su campo particular. A este propósito, Piaget discute sus propias afirmaciones en el sentido de que, contrariamente a lo que ocurre en las operaciones concretas, el pensamiento formal es independiente del contenido, lo que parecería entrar en contradicción con los "campos particulares" recién mencionados. Sin embargo, «las operaciones formales están libres de contenido concreto, sí, pero debemos agregar que esto es cierto sólo a condición de que las situaciones impliquen aptitudes iguales o intereses vitales comparables para los sujetos».

En la última parte del artículo, Piaget vuelve a hablar de la vigencia del problema del paso de la adolescencia a la edad adulta, y especula acerca de la existencia de «estructuras cognitivas comunes a todos los individuos que se aplicarán o utilizarán de manera distinta por cada persona de acuerdo a sus actividades particulares» y acerca de si esas estructuras «bastan para la organización de muchos campos variados de actividad pero con diferencias en la forma de aplicación, o si aparecerán estructuras nuevas y especiales, aún por descubrir y estudiar». Concluye:

«Desafortunadamente, el estudio de adultos jóvenes es mucho más difícil que el de los niños pequeños porque son menos creativos y ya forman parte de una sociedad organizada que no sólo los limita y los frena, sino que a veces incluso los lleva a rebelarse». (Piaget, 1970, pág. 11).

### c) Trabajos con adultos: los estudios del grupo de Long

En el marco del artículo recién reseñado de Piaget, un grupo de investigadores canadienses, dirigidos por Huey B. Long, publicó en 1980 una serie de estudios en desarrollo cognitivo realizados sobre adultos, en un número monográfico del *Journal of Research and Development in Education*.

A pesar de que ha habido muy pocos estudios cognitivos sobre adultos (Long, 1980), ya antes del artículo de Piaget de 1970 había algunos educadores de adultos y gerontólogos interesados en aplicar los conceptos piagetianos a adultos, y críticos de la posición teórica acerca del estadio de las operaciones formales. Las principales oposiciones se presentaban en torno a la necesidad, la finalidad y el mantenimiento del estadio de las operaciones formales. Hay investigaciones que encuentran en grupos de adolescentes tardíos y de adultos porcentajes muy bajos de perso-

nas con pensamiento formal, lo que parece indicar que muchas personas no necesariamente alcanzan o mantienen el nivel de las operaciones formales en esas edades. Pero por otra parte, hay autores que afirman que el estadio de las operaciones formales no es el último, sino que hay al menos uno posterior (cf. Long y Mirza, 1980); un investigador sugiere que puede haber un estadio de "creación de problemas" que sería superior al de "resolución de problemas" ("*problem-finding*" vs "*problem-solving*"), mientras que otro propone un quinto estadio para el tipo de pensamiento creativo y divergente, y lo llama "de las operaciones dialécticas" (Long et al., 1980). Uno de los problemas a que se enfrentan estos investigadores es el de las herramientas de diagnóstico. Los tests existentes fueron diseñados para niños, y no son adecuados (Long, 1980; Rehmann, 1980).

Estos investigadores afirman que los educadores de adultos deben trabajar con cuatro tipos de adultos: «(a) adultos que han funcionado en el nivel de las operaciones formales durante años, que tienen altos niveles cualitativos de operaciones formales, (b) adultos con niveles cualitativos menores de pensamiento formal, que nunca han llegado al estadio de las operaciones formales, (c) adultos que han llegado al estadio en algunas áreas de la vida, y (d) adultos que pueden estar experimentando un *décalage horizontal reversivo*» (Long et al., 1980, pág. 19). Y, según lo que ellos mismos reportan, el tipo (a) podría a su vez repartirse entre los que tienen el nivel y los que lo superan.

Así, hay gran variedad en el estado de desarrollo cognitivo de los adultos, incluso entre los que son alumnos de educación básica (Rehmann, 1980). Pero lo que a todos los investigadores les parece más grave no es el extremo de quienes rebasan las operaciones formales, sino el de quienes se ven rebasados por ellas. Varios trabajos, basados en estudios realizados con estudiantes universitarios, muestran que las operaciones formales no necesariamente son alcanzadas o mantenidas en la adolescencia tardía. Estos estudios hablan de porcentajes de estudiantes universitarios con pensamiento formal que van desde 25% hasta 70%. Pero no sólo se han realizado trabajos con estudiantes universitarios: hay estudios que hablan de 47% de maestros con pensamiento formal, de 60% de mujeres entre 45 y 68 años con pensamiento formal, etc. (Long et al., 1980).

Algunas investigaciones se centran en torno a la influencia de aspectos de tipo cultural en el acceso al estadio de las operaciones formales. Dentro de una misma cultura, hay diferencias entre sujetos: «una carencia cultural severa, diferencias culturales, problemas emocionales e incapacidades físicas y mentales pueden retrasar el desarrollo cognitivo, al menos hasta la etapa adulta temprana» (Rehmann, 1980, pág. 44). Otros estudios muestran diferencias trans-culturales. Una conclusión general de estas investigaciones es que aunque hay adultos que no rebasan las operaciones concretas, todos parecen llegar ahí, y que el paso a las operaciones formales se da tanto mejor cuanto mayor sea el contacto con los «valores cognitivos occidentales» (McCrary y Long, 1980, pág. 34).

Por otra parte, hay una polémica acerca de qué pasa con la edad. Algunos autores encuentran que la inteligencia es función

creciente de la edad, otros que es función decreciente, otros que tiene un máximo (Long, 1980; Long et al., 1980). Otros estudios separan componentes; por ejemplo, algunos «sugieren que la disponibilidad intelectual de los adultos en áreas como la comprensión, la inteligencia y la aptitud verbal podrían ser resistentes a la edad; el desempeño en estas áreas podría incluso mejorar hasta la edad de 60» (Long, 1980, pág. 4). Entre estos esfuerzos, están Cattell y Horn, quienes proponen dos tipos de inteligencia: la "fluida" y la "cristalizada". La inteligencia fluida «se conceptualiza como la habilidad de percibir relaciones complejas, utilizar la memoria de corto plazo, formar conceptos y emprender razonamientos abstractos», mientras que la inteligencia cristalizada «depende fuertemente de factores socioculturales como la escolarización, y se conceptualiza como la habilidad para percibir relaciones y emprender razonamientos y abstracciones formales basados en una familiaridad con la información o el conocimiento de la herencia intelectual y cultural de la sociedad» (Long, 1980, pág. 5). El comportamiento de estas dos formas de inteligencia con el tiempo es claro: ambas crecen durante la adolescencia, luego la fluida empieza a decaer mientras que la cristalizada sigue creciendo. Sin embargo, lo que no es claro es si las operaciones formales pertenecen a la fluida o a la cristalizada (McCrary y Long, 1980).

Otros estudios indagan la relación entre el nivel de las operaciones formales y otras variables, encontradas típicamente entre adultos. Ackerman (1980) encuentra que el estadio piagetiano de desarrollo en que se encuentra un individuo no tiene relación con el nivel de dogmatismo ni con el nivel educativo, y Thibodeau busca la definición de un "estilo cognitivo". Otros estudios buscan establecer categorías distintas dentro del nivel de las operaciones formales. Así, Flavell propone un componente de "competencia" y otro de "rendimiento" (citado por Long y Mirza, 1980). Mirza distingue cuatro subniveles, el último de los cuales supera al más alto nivel de las pruebas piagetianas (*ibid*).

Una de las aplicaciones más interesantes de este tipo de estudios es la que se refiere al problema de la educación de adultos. Al respecto, Rehmann (1980) comenta que la educación de adultos parece estar diseñada para adultos "normales" que han llegado a las operaciones formales pero que no han tenido oportunidad de estudiar, y que los resultados muestran que la gente así es muy escasa. Concluye: «si el desarrollo cognitivo continúa hasta el estado adulto, eso podría significar que algunas personas que no pudieron aprender durante los años escolares usuales podrían beneficiarse de la educación a una edad mayor» (Rehmann, 1980, pág. 51).

#### d) Otros estudios

Los investigadores del grupo de Long no han sido los únicos en reportar este tipo de resultados. Son numerosas las referencias en la literatura al hecho de que los adolescentes de 15 años no alcanzan el nivel de las operaciones formales:

«La mayoría de los alumnos no llega al nivel de las operaciones formales en el quinto año (edad 15-16), y

se puede pensar que dejan la escuela en el nivel de las operaciones concretas» (Green, 1983, pág. 40)  
 «Tal vez tanto como la mitad de los estudiantes de preparatoria no pueden pensar en un nivel de operaciones formales» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 50)

Esto también ocurre en nuestro país (Chalini, 1979; Lema y Morfín, 1981; Ojeda, 1987).

Por otra parte, Nassefat y Longeot habían también propuesto la definición de un estadio "preformal", a partir de trabajos con adolescentes (reportado por Maury, 1986).

Por último, quisiera mencionar aquí un estudio que, aunque significó un esfuerzo aislado en muchos sentidos, se acerca bastante al de los realizados bajo la guía de Long. Se trata del que realizó Páez (1981) con sujetos adultos venezolanos sobre el grafismo y el desarrollo de la representación mental del espacio, basándose en pruebas de tipo piagetiano. Ella encontró, en una población de adultos poco o nada escolarizados, todas las diferentes etapas descritas por Piaget. En su discusión plantea dos posibles interpretaciones de esto: o bien la mayoría de esos adultos están efectivamente en una etapa pre-concreta o concreta de su desarrollo mental, lo que invalidaría la aplicación a adultos de los criterios que se derivan de las teorías de Piaget, o bien los resultados se deben al gran efecto de los procesos de escolarización en el grafismo, por lo que éste no puede tomarse como evidencia del grado de desarrollo del individuo.

### 1.2.2. FISCHBEIN: EL ESTUDIO DE LA INTUICION

Efraim Fischbein es, sin lugar a dudas, la persona que más ha estudiado los procesos intuitivos. En su primera serie de trabajos, publicados en 1975, Fischbein se interesó precisamente en los procesos intuitivos relacionados con la probabilidad; posteriormente, amplió su campo de estudio para incluir las intuiciones acerca del conocimiento científico en general (1987). Aunque este psicólogo se ha interesado principalmente en los procesos intuitivos manifestados por niños y adolescentes, muchas de sus conclusiones se aplican también a adultos.

#### 1.2.2.1. EL CONCEPTO DE INTUICION SEGUN FISCHBEIN

##### a) Características generales

A la intuición se le atribuyen significados variados: puede ser comprendida como una fuente de conocimiento, un método, una facultad para la comprensión de los objetos, un conocimiento que se comprende sin necesidad de justificaciones, un conocimiento elemental de sentido común, popular y primitivo, un conocimiento intelectual, un conocimiento sensorial, una forma de apre-

ciar lo moral, lo estético, lo religioso, lo profesional (Fischbein, 1987, pág. 3). A lo largo de la historia de la ciencia, se ha tomado sucesivamente a la intuición como fuente de verdades, y como fuente de mentiras.

Para Fischbein, la intuición será más bien un conocimiento intuitivo, que define de la siguiente manera:

«El conocimiento intuitivo es conocimiento inmediato; esto es, una forma de conocimiento que parece presentarse a una persona como obvia.» (Fischbein, 1987, pág. 6)

Fischbein da una explicación casi biológica al origen de las intuiciones: afirma que responden a una de las necesidades más intrínsecas del ser humano, que es la necesidad de la acción. Para poder ser llevada a cabo, cualquier acción (mental o práctica) necesita dos tipos de bases: una sensorial, que es provista por la percepción, y una cognitiva, que es provista por la intuición<sup>8</sup>). La intuición satisface las necesidades de la acción, que son la continuidad, la fluidez y la rapidez. Pero, aún por encima de esas necesidades, que caracterizan a una conducta activa adaptativa, la acción se basa en una profunda necesidad de nuestro comportamiento mental, que es la necesidad humana de certeza.

Es a la luz de estas necesidades de índole biológico-epistemológica que Fischbein explica las características de la intuición; entre otras, su confiabilidad y su estabilidad.

La confiabilidad de las intuiciones es una condición indispensable para una actividad eficiente: las intuiciones nos parecen autoconsistentes y obvias porque necesitamos confiar en ellas. La confiabilidad es un corolario de dos grandes necesidades de la acción; la necesidad de inmediatez y la de certeza, de "señales absolutas". Es por ello que la intuición conlleva una certeza intrínseca: toda intuición es acompañada por una sensación de convicción, de obviedad consistente, autoevidente y hasta coercitiva. La intuición es una evaluación o predicción global y sintética, que permite hacer extrapolaciones, suplir la insuficiencia de información, y producir interpretaciones conductualmente significativas. Algunos conocimientos intuitivos alcanzan tal nivel de confiabilidad que, «como resultado de su constante relevancia en la actividad de razonamiento, pueden acceder al status de axiomas, postulados, principios o simplemente ideas preconcebidas» (Fischbein, 1987, pág. 37).

Por otra parte, las intuiciones son estables, y su gran estabilidad se sigue de su estructuralidad: obedeciendo a la necesidad de certeza, las intuiciones organizan la información, aglutinando toda clase de datos (completos, incompletos, incluso absurdos) «en estructuras aparentemente coherentes, consistentes,

8. Frecuentemente se asocia lo intuitivo con la visualización. Sin embargo, la intuición puede ir acompañada de una visualización o no. La visualización sólo «se vuelve una intuición en la medida en que constituye un programa de acción, motriz o cognitiva» (Fischbein, 1975, pág. 7).

compactas, intrínsecamente creíbles», es decir, conductualmente significativas (Fischbein, 1987, pág. 8). Estas estructuras, sin embargo, no son rígidas, sino flexibles y creativas: «la intuición es el mecanismo mediante el cual una adquisición estructural puede ser involucrada en una nueva acción» (Fischbein, 1975, pág. 15). Así, la estabilidad es una de las condiciones para la existencia de intuiciones, pero la estabilidad, con todas sus ventajas en aras de la acción, es una de las dos caras de una moneda. La otra cara implica que las intuiciones son perseverantes, difícilmente cuestionables, resistentes («representan el componente fuerte, el más resistente y estable de nuestro sistema cognitivo»: Fischbein, 1987, pág. 37), resistentes incluso a ultranza (defender nuestras intuiciones «se vuelve un problema de prestigio personal»: Fischbein, 1987, pág. 197).

De manera análoga, el hecho de que las intuiciones respondan a la necesidad de poder tomar una decisión firme (que es una necesidad «más importante que la necesidad de saber»: Fischbein, 1987, pág. 196), es una de las dos caras de una moneda. La otra cara es la calidad de firmeza, de inevitabilidad, de coerción que tienen las intuiciones. Asimismo, el hecho de que las intuiciones respondan a la doble necesidad de inmediatez y confiabilidad tiene como contraparte el hecho de que aunque muchas ideas intuitivas son correctas, «muchas están desviadas o son totalmente incorrectas» (Fischbein, 1987, pág. 37).

Otra característica importante que Fischbein les atribuye a las intuiciones es que son fenómenos evolutivos, y su estructura cambia con la experiencia y el desarrollo intelectual general; se adapta a las reglas implícitas sobre las que se basan las decisiones del sujeto. Aunque la herencia y el medio ambiente pueden contribuir al desarrollo de la intuición, uno de los principales componentes de «la articulación consistente que caracteriza a la intuición» es la experiencia individual (Fischbein, 1975, pág. 7). En efecto, Fischbein considera que la fuente básica de los conocimientos intuitivos es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes, y que esta experiencia puede ser la común a la experiencia humana, la determinada por el entorno geográfico-cultural, o la determinada por la práctica del individuo en diferentes dominios (Fischbein, 1987, pág. 85). Así, la intuición «denota la existencia de mecanismos ampliamente verificados, estabilizados por la experiencia» (Fischbein, 1975, pág. 7), lo que contradice una idea común acerca de la intuición, a saber que es de una espontaneidad absoluta. Sin embargo, esta flexibilidad evolutiva sólo se presenta durante los primeros años de vida de un individuo: «los últimos cambios fundamentales que ocurren espontáneamente en nuestra base intuitiva se dan en el período de las operaciones formales pero muchas intuiciones se estabilizan mucho antes de ello» (Fischbein, 1987, pág. 38).

Otro de los factores del desarrollo de la intuición es la inteligencia; es más, «las intuiciones no son otra cosa que la inteligencia. Son componentes de la inteligencia en acción. Se desarrollan junto con el individuo; sufren cambios y modificacio-

nes a través del contacto con la realidad, a la que de otro modo no podría hacérsele frente.» (Fischbein, 1975, pág. 14) (9).

En su estudio de las intuiciones, Fischbein establece una compleja serie de clasificaciones: las intuiciones pueden ser primarias (que se forman antes de un proceso educativo) o secundarias (que son intuiciones "educadas"). Además, pueden ser afirmativas o conjeturales, anticipativas o conclusivas, preoperatorias, operatorias o postoperatorias.

En resumen, para Fischbein los conocimientos intuitivos son formas de conocimiento inmediato y proveedores de certeza que una persona va afinando a lo largo de la vida. Estos conocimientos dan una respuesta a la necesidad de la acción y a los requerimientos de ésta: inmediatez, continuidad, flexibilidad, firmeza, eficiencia. Son confiables y conforman estructuras coherentes, verificadas por la experiencia, que les dan estabilidad y credibilidad; ayudan a resumir la información, a suplir sus insuficiencias y a interpretarla de manera conductualmente significativa. Estos conocimientos son obvios, autoevidentes, globales, sintéticos y compactos, consistentes, implícitos. Son perseverantes, coercitivos, resistentes, difícilmente cuestionables; no son necesariamente espontáneos. Conllevan una sensación intrínseca de convicción, de certeza. Tienen status de teoría, aunque no necesariamente son correctos, y se pueden extrapolar. Están basados de manera evolutiva en procedimientos mentales automatizados, estabilizados e integradores, así como en la experiencia individual y en la inteligencia.

#### b) Errores intuitivos

Pero hay veces en que la intuición falla. Como dice Fischbein, la intuición «es una fuente potencial de error porque no representa un duplicado simple de las condiciones prácticas dadas» (Fischbein, 1987, pág. 12). Esto es, con frecuencia los elementos de la realidad que deberían irse incorporando al proceso de conformación del conocimiento intuitivo no se incorporan, o se incorporan insuficiente o deficientemente. A pesar de ello, las intuiciones incorrectas guían las reacciones intuitivas del sujeto (y por ende sus acciones), con la misma sensación de certeza que la que tiene cualquier otra intuición:

«Estamos inclinados a admitir, con una sensación de certeza absoluta, afirmaciones que objetivamente sólo están apoyadas muy débilmente por datos empíricos o argumentos lógicos.» (Fischbein, 1987, pág. 29)

Aunque haya evidencia en contra de estos errores, persisten porque «la necesidad de la racionalización, la necesidad de la predicción, y la necesidad que tienen los seres humanos de confiar en la regularidad los llevan al uso de un procedimiento deductivo inapropiado» (Fischbein, 1975, pág. 61).

9. Esta posición de Fischbein con respecto a la inteligencia contradice la de Bergson, según la cual la intuición y la inteligencia son funciones radicalmente distintas.

Esta tendencia a racionalizar se hace cada vez más fuerte con la edad del sujeto: «Las intuiciones mismas se vuelven más "racionales" con la edad, en el sentido de que adoptan estrategias y soluciones que están basadas en fundamentos racionales» (Fischbein, 1975, pág. 65), lo cual puede deberse a alguna característica relacionada con el proceso biológico de crecimiento y maduración, o a un efecto del sistema de enseñanza en nuestra cultura, que tiende a buscar efectos determinísticos en todo lo estudiado. Los adultos tienden a buscar procedimientos que les permitan 100% de predicciones correctas, mucho más que los jóvenes.

Con base en evidencia experimental recopilada por él y sus colaboradores, Fischbein afirma que «los sesgos intuitivos no desaparecen, ni con la edad ni con la falta de uso. Permanecen fuertemente anclados en nuestros esquemas mentales, continúan siendo activos e influyentes, y tanto los niños como los adultos experimentamos su impacto sobre nuestras estrategias de pensamiento». (Fischbein, 1987, pág. 38).

#### 1.2.2.2. LA INTUICION PROBABILISTICA Y SU DESARROLLO

El libro publicado por Fischbein en 1975 tiene como tema central el estudio de las intuiciones. Pero no es un estudio puramente teórico, sino que se basa, de manera muy particular, en el tema de la probabilidad. Las razones por las que elige justamente la probabilidad como tema son sumamente interesantes para el estudio de las intuiciones probabilísticas: la probabilidad requiere actitudes cognitivas que en gran medida son "contranaturales", está estrechamente ligada a la acción, y el propio comportamiento humano es probabilístico. Cuando se trata de eventos aleatorios,

«las respuestas de un individuo no pueden reducirse a estereotipos preconstruidos, como los instintos, ni adquiridos, como los reflejos condicionados. La complejidad de las circunstancias frecuentemente lleva al individuo a responder con base en una estimación global intuitiva de las posibilidades. Estas intuiciones estadísticas son un rasgo intrínseco del comportamiento.» (Fischbein, 1975, pág. 17)

Fischbein, que trabaja dentro del marco de la escuela ginebrina, estudia el desarrollo de las intuiciones relacionadas con la probabilidad, a lo largo de los tres principales estadios del desarrollo cognitivo: el preoperatorio, el de las operaciones concretas y el de las operaciones formales. Estudia lo que ocurre en ese proceso con la intuición del azar (y, en particular, compara sus resultados con los de Piaget), con la intuición de la frecuencia relativa, con la estimación de proporciones y con la instrucción, en particular si ésta puede promover una mejoría en las intuiciones básicas. El cuadro de la siguiente página resume sus conclusiones (en el cuadro, JP se refiere a Jean Piaget) (Fischbein, 1975, págs. 66 y 117).



Aunque Fischbein se mueve dentro de muchos de los esquemas y conceptos establecidos por Piaget, mantiene algunas diferencias importantes con él. Para empezar, le discute que restrinja al pensamiento "representacional" (perceptual) la "intuición" o "pensamiento intuitivo", y al nivel pre-operatorio la conexión entre intuición y acción, que para Fischbein ocurre constantemente (Fischbein, 1975, pág. 14).

Con respecto al desarrollo del concepto de probabilidad, Fischbein considera que los investigadores de la escuela ginebrina «trabajan casi exclusivamente con los estadios de la organización lógica de los conceptos de azar y probabilidad. Las predisposiciones interpretativas, explicativas y de resolución de problemas generadas por la base intuitiva aparecen sólo de manera esporádica en su reporte» (Fischbein, 1975, pág. 6).

La principal diferencia al respecto es acerca del momento en que se forman las ideas relevantes para el concepto de probabilidad. Piaget e Inhelder (1951) afirman que la idea de azar se forma sólo después del establecimiento de las operaciones concretas, pero Fischbein discrepa, principalmente por las siguientes cuatro razones: 1) no es lo mismo un resultado azaroso que uno con poca probabilidad; 2) es incorrecto plantear experimentos en «los que la respuesta a un problema de probabilidad dependa de la resolución correcta o al menos intuitiva de un problema de permutaciones» (las permutaciones sólo se pueden calcular con el pensamiento formal, y aún así se tiende siempre a subestimar el número de permutaciones); 3) Piaget tiene una escasa consideración de la polaridad azar-necesidad; 4) Piaget no distingue entre la intuición primaria del azar y el concepto de azar: «La comprensión del concepto de azar claramente presupone un sistema conceptual desarrollado (...), así como cierto grado de familiaridad con las nociones de necesidad, leyes, causalidad, etc. Sin embargo, si estamos considerando, no el concepto científico de azar, sino la intuición de azar, en el sentido en que el niño llega a la distinción entre fenómenos estocásticos y determinísticos, la situación es bastante diferente» (Fischbein, 1975, págs. 70, 117).

	PREOPERATORIO (PREESCOLAR)	OPERACIONES CONCRETAS	OPERACIONES FORMALES
<u>intuición del azar</u>	Subjetivismo, inducción pasiva, control del experimento. Diferencia inestable entre lo aleatorio y lo necesario. Hay una intuición (según JP, no).	Estructura específica, organizada y conceptual. Hay aún más intuición que la de preescolar (para JP aquí empieza apenas, y poco a poco)	La intuición primaria existe antes, pero aquí hay mucha confusión, debida al determinismo implantado por la escuela. (Según, JP, sólo aquí surge)
<u>intuición de la frecuencia relativa</u>	Se puede ver en experimentos de aprendizaje y "correspondencia" probabilísticos <sup>(10)</sup>	Mejor pero persisten errores: estereotipos, efectos de anterioridad inmediata, secuencia	Ya existe
<u>estimación de proporciones</u>	Los niños hacen estimaciones basados en lo que perciben, pero no es claro si lo que estiman son los tamaños o las proporciones	Sólo con igualdad en los numeradores o en los denominadores, (salvo con instrucción). Proporción de elementos discretos: igual que en preescolar. Configuraciones geométricas: baja con la edad	Aumenta en general, conservando las dificultades en el caso de las configuraciones geométricas
<u>efectos de la instrucción</u>	mejora mucho	mejora bastante	mejora muy poco

En un trabajo anterior, Fischbein había afirmado que «la evolución mental no hace en realidad más que preparar una serie de potencialidades, que sólo pueden adquirir valor de manera efectiva por medio de un ejercicio sistemático, a largo plazo, que se vaya realizando en el transcurso de los estadios de la evolución intelectual» (Fischbein et al., 1969, pág. 15). Esto podría explicar por qué no es cierto lo que se desprendería de Piaget, en el sentido de que las dificultades con el concepto de probabilidad deberían atenuarse en los adolescentes y los adultos, sino que persisten (Mauray, 1986, pág. 47).

<sup>10</sup>.Se refiere a "probability learning" y "probability matching": ver la nota de la pág. 52.

En todo caso, hay mucha gente que opina que «los seguidores de Piaget tienden a suponer que no tiene sentido enseñarles a los niños nada acerca de la probabilidad puesto que aparentemente (de acuerdo con Piaget) no adquieren las habilidades cognitivas necesarias sino hasta más tarde» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 353), mientras que los seguidores de Fischbein insisten en la necesidad de empezar la enseñanza de los conceptos probabilísticos a más tardar en el estadio de las operaciones concretas.

Las diferencias entre ambos investigadores son diferencias de fondo. Piaget estudia lo que el niño *no puede hacer*, mientras que Fischbein estudia lo que el niño *sí puede hacer*: «en algún sentido, Fischbein está buscando la existencia de conceptos probabilísticos parcialmente formados mientras que Piaget está observando la carencia de conceptos completamente formados» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 352). Fischbein y Piaget difieren en enfoques, en modelos de desarrollo cognitivo, en terminología, en el énfasis que le da cada uno a la espontaneidad o a la mediación social en la formación de conceptos. Además, discrepan, como tantos otros, en la definición del conocimiento probabilístico. Piaget no niega que ocurran las "intuiciones probabilísticas" que detecta Fischbein en el estadio de las operaciones concretas y hasta en el preoperatorio, sino que para él esas "intuiciones" no tienen nada que ver con la probabilidad puesto que para él el énfasis está en los conceptos formales y el razonamiento proporcional. Piaget tiene un acercamiento estructural y estudia los conceptos acabados que son desarrollados espontáneamente por los niños, mientras que Fischbein se interesa por el aspecto funcional del conocimiento, y por los conceptos en vía de formación. El primero no tiene ningún interés didáctico; el segundo sí (Maury, 1986, pág. 47).

### 1.2.3. KAHNEMAN Y TVERSKY: JUICIOS BAJO INCERTIDUMBRE

Alrededor de 1970 dos investigadores de universidades californianas, Daniel Kahneman y Amos Tversky, emprendieron una serie de estudios conocida bajo el nombre de *Judgment under uncertainty*: juicios bajo incertidumbre, que consiste básicamente en plantear a la gente preguntas del tipo de los problemas de corte clásico en probabilidad pero, en vez de que se traten de urnas y bolas, o de fichas o de barajas, estos problemas están planteados como problemas "del mundo real". «El programa de investigación acerca de los juicios bajo incertidumbre se centra alrededor de dos preguntas principales. La primera es dónde violan las personas las leyes de la teoría de la probabilidad, y la segunda es cómo podemos derivar las leyes del pensamiento humano a partir de estas violaciones» (Gigerenzer et al., 1989, pág. 221).

Kahneman y Tversky trabajan con adultos y, eventualmente, con estudiantes de nivel medio superior o superior. A veces tienen muestras de personas dedicadas a una ocupación específica, o de profesionales (incluso estadísticos, probabilistas, psicólogos y científicos), a veces simplemente tienen "adultos" en general.

Ellos sostienen que «la gente usa un número limitado de principios heurísticos para simplificar las tareas complejas de estimar probabilidades y predecir valores, reduciéndolas a unas operaciones de juicio que son más sencillas. En general, estos recursos heurísticos son bastante útiles, pero con frecuencia llevan a errores graves y sistemáticos» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 3). De acuerdo con ello, su trabajo consiste en identificar las susodichas heurísticas y los errores sistemáticos derivados de ellas.

El método de Kahneman y Tversky consiste en plantear problemas modelo, que pronto quedan identificados en la literatura científica por los nombres de pila de los personajes o por la situación que los caracteriza. Cada problema está planteado de manera de identificar uno o varios de los posibles errores a que puede dar lugar alguna heurística. Aquí plantearemos, a modo de ejemplo, algunos de los problemas que se han hecho más populares; más adelante comentaremos las heurísticas y los errores que han identificado estos autores.

«Abogados e ingenieros: Se da a los sujetos unas descripciones breves de individuos tomados supuestamente al azar de un grupo de 100 ingenieros y abogados, como "Dick tiene 30 años. Es casado y no tiene hijos. Es un hombre hábil y con mucha motivación, y promete ser muy exitoso en su campo. Sus colegas lo aprecian mucho." Luego se les pide que indiquen si Dick es más probablemente ingeniero o abogado. En una de las condiciones experimentales, se dice a los sujetos que los individuos descritos venían de un grupo con 70 ingenieros y 30 abogados; en otra, que el grupo tenía 30 ingenieros y 70 abogados» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 5)

«Linda: "Linda tiene 31 años. Es soltera, extrovertida y muy brillante. Estudió filosofía. Cuando era estudiante, se preocupaba activamente por problemas de discriminación y justicia social, y también participó en demostraciones antinucleares" (11), y luego vienen ocho afirmaciones que el sujeto debe ordenar por su probabilidad, entre ellas que es Linda feminista, que es cajera en un banco y que es feminista y cajera en un banco.» (Tversky y Kahneman, 1982a, pág. 92)

«Taxis: En una ciudad 85% de los taxis son verdes y 15% son azules. Hubo un taxi involucrado en un accidente, y un testigo lo identificó como azul; se probó su confiabilidad con 50% de taxis verdes y 50% azules, y acertó en 80% de los casos. ¿Cuál es la probabilidad de que el

11. Si tradujéramos el caso de Linda al contexto mexicano de 1994, la descripción sería: "Linda tiene 43 años. Es divorciada y tiene una hija de 5 años inscrita en una escuela activa. Linda es extrovertida y muy brillante. Cuando estudiaba antropología, participó en campañas de alfabetización en zonas marginadas. Ha participado en demostraciones antinucleares y, últimamente, en actividades de concientización de la situación en Chiapas."

taxi del accidente sea azul?» (Tversky y Kahneman, 1982b, pág. 156).

#### 1.2.3.1. EL CONCEPTO DE INTUICION SEGUN KAHNEMAN Y TVERSKY

Para esos autores, el concepto de intuición es sumamente importante, aunque no centran su atención en él como lo hace Fischbein. Kahneman y Tversky distinguen tres sentidos de los términos *intuición* e *intuitivo*:

«1) Un juicio es intuitivo si se llega a él por un modo de razonamiento informal y no estructurado, sin usar métodos analíticos o cálculos deliberados.

2) Una regla formal o un hecho de la naturaleza se llama intuitivo si es compatible con nuestro modelo del mundo.

3) Se dice que una regla o un procedimiento es parte de nuestro repertorio de intuiciones si aplicamos la regla o seguimos el procedimiento en nuestra conducta normal.» (Kahneman y Tversky, 1982, pág. 494)

#### 1.2.3.2. HEURISTICAS Y SUS SEGOS

Kahneman y Tversky han encontrado que cuando la gente se enfrenta a problemas en los que hay que emitir un juicio (una opinión, una decisión, etc.) en una situación de incertidumbre, usa ciertas estrategias para resolverlos. Estas estrategias, que ellos llaman heurísticas, son en general correctas: es decir, permiten juicios de probabilidad subjetiva que llevan a la misma solución que indicaría la teoría matemática de la probabilidad.

Sin embargo, hay ocasiones en las que las heurísticas llevan a errores, y la gente comete esos errores de manera sistemática. Estos errores cognitivos son cometidos por toda clase de gente, desde los menos educados hasta los mismos expertos en probabilidad. Los investigadores resaltan que esto no se debe a que la vida diaria carezca de ocasiones en que los errores puedan ser manifiestos y en que se pueda corregir la intuición incorrecta, sino a que «los principios estadísticos no se aprenden de la experiencia diaria porque los ejemplos relevantes no son codificados apropiadamente» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 18). Así, la gente no puede inferir, a partir de la experiencia de toda la vida, reglas estadísticas tan elementales como la regresión a la media o el efecto del tamaño muestral en la variabilidad muestral; así también, la gente no puede detectar en general los errores que comete en sus juicios de probabilidad. Los errores, que ellos llaman sesgos (*biases*) son auténticos errores cognitivos surgidos de una excesiva confianza en las heurísticas utilizadas para emitir juicios.

El trabajo de estos investigadores ha consistido en identificar las heurísticas y los sesgos a los que pueden dar lugar. Ellos identifican tres tipos principales de heurística, que son, en orden decreciente de importancia, la heurística de representatividad, la de disponibilidad y la de ajuste y anclaje. Aquí iré

presentando cada una de ellas, junto con los sesgos a los que puede dar lugar.

#### a) Representatividad

La representatividad es la medida en que un evento es similar en propiedades esenciales a la población de la que proviene, y refleja los rasgos más característicos del proceso que lo generó (Kahneman y Tversky, 1972, pág. 33). Es decir, la representatividad es el proceso mediante el cual la gente transforma un problema probabilístico en un problema de similaridad. Si la pregunta es "¿Cuál es la probabilidad de que el objeto A pertenezca a la clase B?", o "¿cuál es la probabilidad de que el evento A se origine de proceso B?", o "¿cuál es la probabilidad de que el proceso B genere el evento A?", la respuesta no se busca en términos probabilísticos, sino en el grado en el que A es representativo de B o el grado en el que A se parece a B (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 4).

La heurística es exitosa en muchas ocasiones; por ejemplo, la probabilidad de que Pilar sea de izquierda se ve en términos del grado en que se pueda considerar a Pilar como representante de la clase de las mujeres de izquierda, y la probabilidad de que Pilar venda cosméticos, en el grado en que se la pueda considerar como representante de las vendedoras de cosméticos. En general, las inferencias que logramos con este tipo de procedimientos mentales son correctas, y a veces dan lugar a errores. Esto es común a todas las inferencias probabilísticas: pueden llevarnos a cometer, con una probabilidad pequeña, errores en nuestras afirmaciones. Sin embargo, la heurística de representatividad da lugar a errores sistemáticos, que difieren de los probabilísticos recién mencionados. Y estos sesgos, de los que hablaré más adelante, son sistemáticos y predecibles porque la representatividad tiene su propia lógica, distinta de la de la probabilidad; sin embargo, la gente utiliza mucho la heurística de representatividad porque es accesible y frecuentemente está correlacionada con la probabilidad, y porque la gente sobreestima esa correlación.

Los autores identifican tres situaciones típicas en las que entra en operación la heurística de representatividad. La primera situación es el parecido de la muestra a la población; la segunda está en la búsqueda de reflejos de la aleatoriedad, y muy particularmente en la búsqueda de la irregularidad<sup>(12)</sup>; la última situación es la representatividad local; por ejemplo, cuando se le pide a la gente que simule un proceso aleatorio tal como una serie de volados, produce secuencias que son localmente representativas, con demasiadas rachas cortas.

Las heurísticas de representatividad pueden dar lugar a sesgos de seis tipos: insensibilidad a probabilidades previas, insensibilidad al tamaño muestral, conceptos erróneos del azar, insensibilidad a la predicibilidad, ilusión de la validez, y con-

<sup>12</sup>. Por ejemplo, si se reparten 20 canicas entre cinco niños, se percibirá que la distribución 4-4-4-4-4 no es aleatoria mientras que la distribución 4-4-5-4-3 sí lo es.

ceptos erróneos de regresión (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 4). Aquí intentaré presentar brevemente algunos de ellos.

Las probabilidades previas, que no afectan la similaridad pero sí la probabilidad, se manifiestan, por ejemplo, en el problema de los ingenieros y abogados (donde la gente suele asignar las mismas probabilidades bajo la distribución 30-70 y bajo la distribución 70-30) y en el de los taxis (donde la mediana de respuestas es el doble de lo que da el cálculo correcto); además, «la gente responde de manera diferente cuando no se le da información y cuando se le da información intrascendente. En el primer caso sí considera correctamente las probabilidades previas, en el segundo las ignora» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 5).

Los conceptos erróneos del azar que puede tener la gente se manifiestan por ejemplo cuando ésta «espera que una secuencia de eventos generada por un proceso aleatorio represente las características esenciales del proceso, incluso si la secuencia es corta»; en volados, por ejemplo, «la gente considera que la secuencia A-S-A-S-S-A es más verosímil que la secuencia A-A-A-S-S-S, que no parece aleatoria, y también más verosímil que la secuencia A-A-A-A-S-A, que no representa la legalidad de la moneda» (Tversky y Kahneman, *ibid*, pág. 7) <sup>(13)</sup>.

Los conceptos erróneos de regresión ocurren porque la gente no suele esperar que haya correlaciones en los contextos en que se mueve, pero cuando las reconoce les asigna explicaciones causales espurias; «el fenómeno de la regresión sigue siendo elusivo porque es incompatible con la creencia de que el resultado final debe ser máximamente representativo de la información inicial y, por ende, el valor final debe ser tan extremo como lo sea el valor inicial» (Tversky y Kahneman, *ibid*, pág. 10).

El contraste más agudo entre la probabilidad y la representatividad se da en la evaluación de eventos compuestos. Aquí hay un efecto de conjunción, que se puede ver por ejemplo en el problema de Linda, en el que 85% de los sujetos más educados consideran que "es feminista" es más probable que "es feminista y cajera", y que este último evento, es a su vez más probable que "es cajera", lo que contradice la regla formal de conjunción, según la cual  $P(A \cap B) \leq P(B)$  (Tversky y Kahneman, 1982a, pág. 93) <sup>(14)</sup>.

<sup>13</sup>. Al respecto, Fischbein opina que no se trata de una búsqueda de representatividad, sino de la manera en que se registra la información: «la memoria guarda los eventos por trozos, sin fijarse en el orden, y por eso se piensa que en seis volados A-S-A-S-A-S es más frecuente que A-A-A-A-A-A» (Fischbein, 1975, pág. 60).

<sup>14</sup>. El problema de Linda ha sido uno de los más polémicos del acervo de Kahneman y Tversky. Yo he argumentado que la imagen de Linda como cajera es tan inverosímil que lo que evalúan los sujetos no es la probabilidad de que Linda sea feminista y cajera, sino la de que sea feminista si acaso es cajera, lo que es perfectamente compatible con la formalidad:  $P(A|B)$  sí puede ser mayor que  $P(B)$  (Alatorre, 1991, pág. 55). Pero puede ser que lo polémico del problema de Linda se deba a que muchos de los polemistas "cayeron en la trampa" la primera vez que abordaron el problema...

«La mayoría de los sujetos se encuentran dispuestos a aceptar la regla de conjunción en una forma abstracta, aunque casi todos ellos la violan en la práctica cuando entra en conflicto con la intuición de la representatividad» (*ibid*, pág. 97).

#### b) Disponibilidad

La heurística de disponibilidad consiste en evaluar la probabilidad de un evento mediante la disponibilidad, en la memoria, de ejemplos del evento, esto es, mediante la facilidad con la que se pueden evocar los ejemplos. La heurística funciona adecuadamente en general porque esta facilidad está correlacionada con la frecuencia: uno suele pensar más fácilmente en ejemplos de conjuntos más numerosos que en los de conjuntos menos numerosos: la vida nos ha enseñado que, en general, los ejemplos de clases numerosas se recuerdan mejor y más rápidamente que los de clases menos numerosas, que eventos que pueden ocurrir más frecuentemente son más fáciles de imaginar que los inverosímiles y que las conexiones asociativas entre eventos se fortalecen cuando los eventos co-ocurren frecuentemente. Como resultado de ello, «el hombre cuenta con la heurística de la disponibilidad para estimar el tamaño de una clase, la verosimilitud de un evento o la frecuencia de co-ocurrencias» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 11). Por ejemplo, uno tiene tendencia a pensar que hay más palabras que empiezan con una letra determinada que palabras cuya tercera letra es ésa, porque es más fácil imaginar palabras que empiezan con esa letra que palabras que la contienen en su tercer lugar.

Las heurísticas de disponibilidad pueden dar lugar a sesgos de cuatro tipos: errores debidos a la facilidad de recuperación, errores debidos a la efectividad de un mecanismo de búsqueda, errores debidos a la facilidad en imaginar ejemplos, y correlación ilusoria (Tversky y Kahneman, *ibid*).

Un ejemplo de error debido a la facilidad de recuperación es el que cometen los sujetos que afirman que hay más hombres que mujeres en una lista de nombres de personalidades conocidas en la que hay tantos hombres como mujeres pero en la que los hombres son mucho más conocidos que las mujeres (o vice-versa). Los factores que afectan más comúnmente la recuperabilidad de los ejemplos son, además de la familiaridad, lo reciente y lo impactante de una vivencia similar (Tversky y Kahneman, *ibid*).

Una de las situaciones típicas de error debido a la facilidad en imaginar ejemplos es en las evaluaciones de riesgos: se sobreestiman los desastres fáciles de imaginar como incendios y accidentes de aviación y se subestiman posibles peligros que son difíciles de aviginar, como la descompostura de un aparato de seguridad (Tversky y Kahneman, *ibid*).

#### c) Ajuste y anclaje

Según Tversky y Kahneman (1974, pág. 14), «en muchas situaciones, la gente hace estimaciones empezando con un valor inicial que se ajusta para dar la respuesta final. El valor inicial, o punto de partida, puede ser sugerido por la formulación del pro-



blema, o puede ser el resultado de un cálculo parcial. En cualquier caso, es típico que los ajustes resulten insuficientes. Esto es, puntos de partida diferentes dan estimaciones diferentes, que resultan sesgadas hacia los valores iniciales. A este fenómeno lo llamamos anclaje.»

Las heurísticas de ajuste y anclaje pueden dar lugar a sesgos de tres tipos: ajuste insuficiente, errores en la evaluación de eventos conjuntivos y disyuntivos, y anclaje en la estimación de distribuciones de probabilidad subjetiva (Tversky y Kahneman, *ibid*).

Un ejemplo curioso de ajuste insuficiente es el siguiente: dos grupos de secundaria debían estimar en 5 segundos el resultado de una operación que vieron escrita en el pizarrón, que para un grupo era  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ , y para el otro  $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . El resultado correcto es 40,320, pero por ajuste insuficiente ambos grupos subestimaron el resultado; además, como muchos de los sujetos realizaron unos pasos del cálculo y estimaron el resultado por extrapolación, su resultado dependió del orden en que estaban planteadas las multiplicaciones: las medianas de las estimaciones de ambos grupos fueron 512 y 2,250 respectivamente.

Los errores en la evaluación de eventos conjuntivos y disyuntivos tienen una amplia generalidad: la gente tiende a sobreestimar la probabilidad de eventos conjuntivos y a subestimar la probabilidad de eventos disyuntivos. Más adelante abundaré sobre este tema (pág. (?)).

### 1.2.3.3. LA POLEMICA EN TORNO A KAHNEMAN Y TVERSKY

Como lo mencioné previamente, los trabajos de Kahneman y Tversky han merecido manifestaciones encontradas. Hay quienes los aprecian y alaban, y hay quienes los someten a duras críticas.

Entre los partidarios está Fischbein, quien ve en las heurísticas de representatividad y de disponibilidad una confirmación de la tendencia del sujeto a interpretar la aleatoriedad como si estuviera gobernada racionalmente: «todas las desviaciones de la intuición de la frecuencia relativa se pueden explicar como causadas por el esfuerzo de la inteligencia humana de hacer más razonable lo aleatorio, en la ausencia de un conocimiento matemático suficiente» (Fischbein, 1975, pág. 64). Otro partidario es Shaughnessy, quien en un experimento didáctico evalúa en pre y post-test tanto al grupo experimental como al control con problemas tomados de Kahneman y Tversky, y concluye: «este estudio apoya a Kahneman y Tversky en su observación de que los estudiantes sin formación se basan en esas heurísticas» (Shaughnessy, 1977, pág. 314). Entre la lista de los partidarios merecen un lugar particular los israelitas Beyth-Marom y Dekel (1985), quienes emprendieron la tarea de elaborar un libro de texto basado en las investigaciones de juicios bajo incertidumbre, con miras a que sustituya la enseñanza tradicional de la probabilidad.

Entre las posiciones críticas, Maury (1986, pág. 44) considera que Kahneman y Tversky han realizado un trabajo importante,

pero que merece ser acotado. Las situaciones construidas son, según ella, forzadas, ambiguas, "zancadillas": «verdaderas invitaciones al error», lo que se manifiesta en el planteamiento, en la presentación, etc. Menciona también la crítica bayesiana a la interpretación de Kahneman y Tversky de que los individuos no son buenos estimadores bayesianos: esta crítica afirma que las probabilidades previas no tienen por qué basarse en la información que da el enunciado del problema sino que, justamente, son subjetivas.

Garfield y Ahlgren coinciden en la posición de, sin negarla, acotar la importancia de los trabajos de Kahneman y Tversky: «por llamativas que sean desde el punto de vista lógico estas categorías, queda por demostrarse si son válidas para describir el pensamiento» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 55).

Pero la crítica más severa que me ha caído en las manos proviene de Gigerenzer et al. Ellos ven los trabajos de Kahneman y Tversky en el marco del acceso que tuvieron entre los años 50 y 60 los psicólogos norteamericanos a la probabilidad y la estadística como herramientas de análisis, y que los llevó a concebir la propia mente como un estadístico intuitivo. Según esta corriente, la mente «extrae muestras aleatorias de la información que le llega, calcula probabilidades, establece criterios de decisión, y lleva a cabo pruebas de hipótesis» (Gigerenzer et al., 1989, pág. 212). La corriente no tuvo mucho éxito, pues pronto resultó que el "estadígrafo intuitivo" se equivoca con bastante frecuencia, pero fue un punto de partida que tiñó todo el trabajo de Kahneman y Tversky de un exagerado "probabilismo". A fin de cuentas, afirman Gigerenzer et al., la "explicación" que dan Kahneman y Tversky de los fenómenos que observan no es más que una mera descripción de los fenómenos.

Por otra parte, según Gigerenzer et al., Kahneman y Tversky incurren en el común error Fisheriano de considerar que la única manera de hacer inferencia inductiva es con la visión normativa de "respuesta única" de la inferencia estadística. Pero la estadística no puede proporcionar una respuesta correcta única a los problemas planteados por Kahneman y Tversky; tanto menos cuanto que «mientras más contenido se les ponga a las urnas y bolas, más importante se vuelve el razonamiento que depende del contenido, además de las fórmulas» (Gigerenzer et al., *ibid*, pág. 228). Asimismo, plantean la posibilidad de utilizar una concepción de probabilidad subjetiva que no implique necesariamente estimaciones numéricas <sup>(15)</sup>.

Un par de ejemplos pueden ilustrar las críticas de Gigerenzer a los problemas planteados por Kahneman y Tversky. La deducción de la no consideración de las probabilidades previas en el problema de los ingenieros y abogados deja de ser válida cuando los sujetos saben que la muestra es al azar (por ejemplo sacando ellos mismos las descripciones de unas urnas). En el problema de los taxis, Gigerenzer propone aplicar la teoría probabilística de

<sup>15</sup>. Ver al respecto el ejemplo de la mujer que se pregunta si está embarazada, pág. 9.

Neyman-Pearson: con ella se encuentran resultados parecidos a lo que dice la gente.

A fin de cuentas, lo que más severamente parecen criticarle Gigerenzer et al. a Kahneman y Tversky es la búsqueda retorcida de fallas en el sentido común de la gente. Comparan la actitud de los probabilistas del siglo XVIII, que ante la paradoja de San Petersburgo <sup>(16)</sup> estuvieron «dispuestos a remendar definiciones y postulados fundamentales para realinear sus cálculos con el buen sentido» (*ibid*, pág. 16), con la de los psicólogos del siglo XX que «más bien insisten en que el sentido común se transforme para ajustarse a las matemáticas» (*ibid*, pág. 226).

### 1.3. INTUICION PROBABILISTICA

Entre los referentes teóricos de importancia para este trabajo, están, evidentemente, todos los estudios acerca de las intuiciones probabilísticas, ya sea en niños o adultos, con una perspectiva de psicología del desarrollo o con la de Kahneman y Tversky, interesados en los mecanismos psicológicos o en las repercusiones educativas, etc. Uno de los principales estudiosos de las intuiciones probabilísticas es Fischbein (en particular en su libro *Las fuentes intuitivas del pensamiento probabilístico en niños*: Fischbein, 1975), y algunas de sus reflexiones ya han sido reproducidas en el apartado §1.2.2. Pero no es el único; aquí se revisarán otras opiniones.

La variedad de opiniones empieza por lo que se entiende por intuición probabilística. Para quienes conciben la probabilidad como una intuición (probabilidad "intuitiva" o "subjetiva"), cada intuición probabilística es una evaluación probabilística. Para quienes como yo se adhieren a las concepciones más "objetivistas", las intuiciones de probabilidad son formas intuitivas de acercarse a la probabilidad formal: la intuición probabilística es la manera subjetiva que tienen los individuos para estimar (de manera no formal) la probabilidad objetiva (formal). De todos modos, la división no es tajante; por ejemplo, Kahneman y Tversky consideran que los juicios de la probabilidad vienen de impresiones subjetivas, pero se ocupan de interpretar las discrepancias con la probabilidad formal (en particular, como la traducción de intuiciones). En todo caso, es posible que todos estén de acuerdo en que

«la evaluación de la probabilidad de un evento incierto o la predicción de una cantidad desconocida es un proceso complejo, que comprende interpretar el problema,

<sup>16</sup>. Se trata de una apuesta según la cual se juegan volados y Pedro le paga a Pablo \$2n si aparece la primera cruz en el n-ésimo tiro. La esperanza es infinita, pero nadie en su sano juicio lo juega.

buscar la información relevante y elegir una respuesta adecuada.» (Tversky y Kahneman, 1982a, pág. 88)

Lo primero que destaca acerca de las intuiciones probabilísticas es que son sumamente problemáticas: la probabilidad es, básicamente, contraintuitiva.

Para la mayoría de los investigadores, «las nociones intuitivas de probabilidad son típicamente subjetivas e incoherentes» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 374). Incluso Fischbein, aunque reconoce la existencia de una intuición primaria preoperatoria acerca del azar, complementaria a la intuición de necesidad, dice que el substrato intuitivo en el dominio de la probabilidad es inconsistente, ambiguo y muy magro (Fischbein, 1975, pág. 4).

Esta pobreza intuitiva se manifiesta desde los niños en edad escolar (estudiados por ejemplo por Fischbein, 1975; Green, 1983; Piaget e Inhelder, 1951), hasta los estudiantes preuniversitarios, universitarios y adultos (estudiados por ejemplo por Lecoutre, 1984; Maury, 1984 y 1986; Tversky y Kahneman, 1982a). En una amplia revisión acerca del tema, Garfield y Ahlgren (1988) afirman que las dificultades para desarrollar una intuición correcta acerca de las ideas fundamentales de la probabilidad que tienen los sujetos de cualquier nivel educativo, se deben por lo menos a tres razones:

«En primer lugar, muchos estudiantes tienen una dificultad básica con los conceptos de números racionales y razonamiento proporcional, que se usan al calcular, reportar e interpretar probabilidades [...] Las dificultades para traducir planteamientos verbales de problemas invaden la estocástica tanto como el resto de las matemáticas escolares. En segundo lugar, las ideas de probabilidad suelen entrar en conflicto aparente con las experiencias de los estudiantes y con su visión del mundo [...]. En tercer lugar, muchos estudiantes ya han desarrollado un disgusto por la probabilidad a través de la exposición a su estudio en un modo altamente abstracto y formal. Por esta razón, Freudenthal (1973) advirtió en contra de la enseñanza de las técnicas de "estadística matemática" incluso a estudiantes de los primeros años de una carrera universitaria.» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 47)

En diversos intentos de aislar las dificultades inherentes a esta intuición, algunos autores hablan de algunas intuiciones específicas relacionadas con la intuición probabilística.

Por ejemplo, Falk et al. (1980) reportan que muchos niños de 4 a 11 años piensan que lo que les falta para dominar al azar es tiempo: al hablar de cómo les iría a niños más grandes que ellos, dicen que mejor porque "ha tenido mucho tiempo de jugar", o porque "es más fuerte", o porque "es más lista".

Fischbein coincide con Piaget en la doble calidad operativa de las proporciones: «el obstáculo consiste en la dificultad intuitiva de comparar la "parte" con el "todo", una operación que requiere el acto de considerar dos veces una parte de los elementos» (Fischbein, 1987, pág. 93) y le confiere particular atención

a la "intuición de frecuencia relativa", por ser la que podría reflejar alguna raíz intuitiva común entre los esquemas de probabilidad y de proporción, aunque «ambas formas de razonamiento tienen grupos de intuiciones y procedimientos técnicos que los diferencian» (Fischbein y Gazit, 1984, pág. 23). La intuición de frecuencia relativa, según Fischbein (1975, pág. 58), «se desarrolla naturalmente durante la ontogénesis del comportamiento (...), con la edad, pero el mayor desarrollo ha ocurrido a la edad de 14-15 años, o antes».

Asimismo, Fischbein y Gazit (1984) encuentran entre niños de 10 a 13 años una relación estrecha entre las intuiciones incorrectas acerca de azar y lo que conocemos como supersticiones: por ejemplo, la noción de "elección con suerte" o la creencia en la posibilidad de influenciar el curso de los eventos mediante alguna conducta particular. Estas creencias existen también entre adultos: todos conocemos a alguien que para no tener "mala suerte" evita pasar debajo de una escalera, o pasar el salero "de mano", o abrir un paraguas dentro de un recinto, etc.....

### 1.3.1. INTUICIONES INCORRECTAS

Vale la pena preguntarse, si hay una sola respuesta "correcta" a las preguntas de probabilidad, ¿por qué tantas personas se van por otros caminos? ¿por qué hay tantos argumentos que no son "correctos" pero sí parecen convincentes, incluso evidentes?

Estas preguntas son más difíciles de contestar. Tienen que ver con los procesos intuitivos de las personas.

#### 1.3.1.1. CARACTERIZACION

Numerosos autores refieren la existencia de errores en las intuiciones acerca de los fenómenos aleatorios y de la probabilidad. Son muchas las maneras diferentes que utilizan para referirse a ellos; algunas de ellas son "pensamiento falaz" (Green, 1983), "conceptos erróneos" ("misconceptions" en inglés: Shaughnessy, 1977; Mevarech, 1983; Hawkins y Kapadia, 1984; Garfield y Ahlgren, 1988), "resultados incorrectos" (Falk et al., 1980; Lema y Morfin, 1981), "errores cognitivos" (Tversky y Kahneman, 1974), "errores de razonamiento, errores de aplicación o de comprensión, errores de juicio (*judgment*)" (Kahneman y Tversky, 1982), "sesgos" ("biases" en inglés: Kahneman y Tversky, 1982; o en francés: Lecoutre y Durand, 1988), "conceptos incorrectos de base intuitiva" (Fischbein y Gazit, 1984), "interpretaciones intuitivas incorrectas" (Fischbein, 1975), "modelos no pertinentes" (Lecoutre y Durand, 1988), "concepciones alternativas" (Hewson y Hewson, 1983).

La terminología utilizada depende, evidentemente, del concepto que se tenga. Aunque son pocos los autores que definen ex-

presamente el concepto a que se refieren, éstos cubren una gama que va desde considerar a las intuiciones incorrectas como verdaderas equivocaciones en el sentido de "desviaciones semánticamente significativas de un procedimiento correcto" (Brown y Burton, 1978, citados por Mevarech, 1983, pág. 415), hasta evitar la confrontación con el concepto de error, buscando interpretarlos como "otras maneras" de abordar los problemas. Además, a su vez el concepto de error en una respuesta probabilística depende, como lo señalaron Hoemann y Ross (1971, pág. 325) de «lo que se define como conocimiento probabilístico»: así, por ejemplo, cuando para unos el hecho de hacer meras comparaciones perceptuales (como contar los casos favorables) es un error, para otros es cuando mucho sólo un precursor de la noción de probabilidad, y para otros más es ya un concepto probabilístico genuino.

Por mi parte, yo me inclino por una posición intermedia: aunque no creo que se trate de equivocaciones, sí me importa destacar que las intuiciones incorrectas tampoco son aciertos, sino errores asociados a intuiciones inadecuadas. Y son errores porque no corresponden con la realidad, interpretada a través de la visión frecuentista de la probabilidad: no son correctas porque no son "aceptadas por la comunidad científica contemporánea" (Fischbein, 1987, pág. 37). Por ello, en el ejemplo recién citado de Hoemann y Ross yo me adhiero, como los autores, a la posición intermedia.

De manera natural, surge la pregunta acerca del origen de las intuiciones incorrectas. Según Garfield y Ahlgren, no se trata de

«errores aislados de información o hábitos arbitrarios de pensamiento. Más bien, parece que (...) son parte de una manera de pensar acerca de los eventos, que está fuertemente enraizada en la mayoría de la gente.» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 58)

Según estos autores, esta manera de pensar puede corresponder a «funciones cerebrales que surgieron de la selección natural en tiempos más simples», por lo que puede buscarse por medio de la antropología social lo que podrían haber sido modos útiles de pensamiento en los ambientes prehistóricos (*ibid.*).

Otro tipo de explicaciones son de carácter más bien psicológico (Shaughnessy, 1977). Hay autores que las atribuyen a una tendencia de los sujetos a deshacerse de lo aleatorio cada vez que pueden (Maury, 1986). Otros intentan explicar los errores como violaciones a reglas; por ejemplo, Kahneman y Tversky (1982, pág. 495) identifican violaciones de dos tipos: los "errores de aplicación", que ocurren cuando la gente conoce y acepta una regla pero no la aplica, y los "errores de comprensión", que ocurre cuando la gente no reconoce la validez de la regla que violó. Y Piaget e Inhelder (1951) los ven como parte del proceso de desarrollo cognitivo del individuo.

Hay quien menciona que los conceptos erróneos son, al menos parcialmente, de índole matemática, como «el resultado de la in-experiencia de una persona con las leyes matemáticas de la probabilidad» (Shaughnessy, 1977, pág. 295) o por «las dificultades en

el pensamiento cuantitativo en general y en el razonamiento hipotético» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 58).

Otro tipo de investigaciones buscan en lo social o lo cultural el origen de las incorrecciones (Garfield y Ahlgren, 1988). Por ejemplo Hawkins y Kapadia (1984, pág. 358) lo buscan en lo educativo: «de algún lugar tendrían que surgir estas heurísticas y estrategias, y pueden ser el resultado de una enseñanza inadecuada u omitida en el área».

Finalmente, hay algunos autores que emprenden una búsqueda múltiple y simultánea en todos estos terrenos. Por ejemplo, Fischbein escarba con la imaginación los "ambientes prehistóricos" mencionados por Garfield y Ahlgren (1988), y concluye que ahí surgieron las necesidades humanas de racionalización, predicción y seguridad (Fischbein, 1975, pág. 61). Pero también busca en lo humano, tanto a nivel psicológico como a nivel social. En lo psicológico, señala que el sujeto «organiza la información en la memoria bajo la forma de estructuras o configuraciones que facilitan la estimación», y que a partir de ellas realiza extrapolaciones falaces que causan las interpretaciones incorrectas (Fischbein, 1975, pág. 60). En lo social, indica que hay una «tendencia hacia la racionalización de los eventos [que] aumenta con la edad [y] es fomentada por la escuela y por todo el entorno social en el que ocurre el desarrollo humano en la sociedad moderna» (Fischbein, 1975, pág. 61)

Quienes se han interesado por estudiar y conocer los mecanismos que llevan a los seres humanos a incurrir en estas intuiciones incorrectas han partido de motivaciones de índole psicológica o de índole educativa.

Los psicólogos que investigan los errores sistemáticos lo hacen, según Kahneman y Tversky, por tres razones:

«Hay tres razones para estudiar los errores sistemáticos: 1) exponen algunas de nuestras limitaciones intelectuales y sugieren maneras de mejorar la calidad de nuestro pensamiento; 2) revelan los procesos psicológicos y los procedimientos heurísticos que gobiernan el juicio y la inferencia; 3) ayudan a conocer las intuiciones humanas indicando qué principios de la estadística o la lógica son no intuitivos o contraintuitivos.» (Kahneman y Tversky, 1982, pág. 494)

Además, afirman que «el análisis empírico de los errores cognitivos tiene implicaciones hacia el papel teórico y aplicado de la probabilidad subjetiva» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 19).

Garfield y Ahlgren, quienes revisan la literatura científica en búsqueda de estudios que permitan apoyar al docente en su labor, mencionan también una serie de investigaciones «que estudian en particular la persistencia de las preconcepciones a pesar de la instrucción, la falta de correspondencia entre comprender un tema y creer en él, los estadios de desarrollo de la comprensión de conceptos, así como algunos intentos de cambiar los conceptos erróneos» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 51). Sin embargo, apuntan que estas investigaciones son insuficientes en cantidad, al-

cance y profundidad, y que hay pocos estudios que intentan comprender cómo piensan los estudiantes.

Así, el estudio de las intuiciones incorrectas nos puede llevar no sólo a la comprensión de las dificultades a que se enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística, sino también a la comprensión de las características intuitivas de estos escurridizos conceptos. Kahneman y Tversky (1982, pág. 493) señalan que «los errores de razonamiento son únicos en dos aspectos significativos: son algo embarazosos y parecen evitables», y me parece que todos podemos identificar la simultaneidad de ambas sensaciones. Pero estos errores también tienen el carácter de lo forzoso, obvio, coercitivo e inevitable que tienen todas las intuiciones. Muchos de los conceptos de la probabilidad no sólo son contraintuitivos, sino que hacen entrar en contradicciones a la idea misma de intuición.

### 1.3.1.2. ALGUNAS INTUICIONES INCORRECTAS ESPECIFICAS

Aquí intentaré ofrecer un pequeño muestrario del tipo de errores que suelen ocurrir en las intuiciones probabilísticas. Algunos de ellos ya fueron mencionados cuando se habló de las heurísticas identificadas por Kahneman y Tversky; otros se expondrán en seguida.

#### a) La falacia del jugador

De entre todas las intuiciones incorrectas sobre el azar y la probabilidad, la más conocida es, sin lugar a dudas, la llamada "falacia del jugador", que consiste en creer que si un evento no se ha presentado en sucesivas repeticiones, aumenta la probabilidad de que ocurra.

Fischbein (1975, pág. 59), considera a la falacia del jugador como una de las dos posibilidades de los "efectos de anterioridad inmediata" (en inglés, *recency effects*: "efectos de recientez"), que define como «los efectos en las respuestas del sujeto que tiene la repetición del mismo resultado en varios ensayos». Las dos posibilidades son la positiva (mientras más frecuente haya resultado el evento, más probable es) y la negativa (mientras menos frecuente haya resultado el evento, más probable es). Fischbein apunta que el efecto positivo es el primero en aparecer, en niños muy pequeños; el negativo es el más común en adultos, aunque aparece alrededor de los 6 años.

Para John Cohen (1957a) el jugador que cae en la falacia del jugador piensa que la "buena suerte" es como un objeto material que puede ser almacenado y utilizado para pronósticos exitosos. Por su parte, Kahneman y Tversky (1972, pág. 37) consideran a la falacia del jugador como un sesgo de la heurística de representatividad: los sujetos buscan que en un ámbito local (las experiencias recientes y la próxima) quede representada una concepción del azar «como un proceso auto-correctivo en el que una desviación en una dirección induce una desviación en la dirección con-



traría para restaurar el equilibrio» (Tversky y Kahneman, 1974, pág. 7) (17).

Debe observarse que los efectos de anterioridad inmediata (y, sobre todo, los negativos) tienen, aún para adultos educados, la calidad de convicción fuerte típica de las intuiciones. Son también unas de las intuiciones incorrectas más difíciles de erradicar.

#### b) Eventos conjuntivos y disyuntivos

Varios autores observan que la gente prefiere un evento conjuntivo a uno simple, y uno simple a uno disyuntivo. Por ejemplo, Bar-Hillel encuentra que la gente asigna probabilidades decrecientes a los siguientes tres eventos:

- siete extracciones con reemplazo consecutivas de canica roja de una bolsa con 90% de canicas rojas y 10% de canicas blancas (evento conjuntivo, cuya probabilidad formal es .48);
- la extracción de una canica roja de una bolsa con 50% de canicas rojas y 50% de canicas blancas (evento simple, cuya probabilidad formal es .50);
- la extracción de una canica roja en al menos uno de siete intentos sucesivos, con reemplazo, de una bolsa con 10% de canicas rojas y 90% de canicas blancas (evento disyuntivo, cuya probabilidad formal es de .52) (referido por Tversky y Kahneman, 1974, pág. 6).

Kahneman y Tversky interpretan estos errores como efectos del anclaje: el punto de partida en todos los casos es, de manera natural, la probabilidad enunciada del evento elemental (respectivamente .9, .5 y .1) (*ibid*).

Un efecto similar es observado por John Cohen (1957a), quien menciona que en una rifa, la gente parece tener este orden de preferencia entre las siguientes posibilidades, aunque en todos la probabilidad es .10:

- diez extracciones de 10 cajas con 100 boletos (99 malos + 1 premiado);
- una extracción de 1 caja con 10 boletos (9 malos + 1 premiado);
- diez extracciones con remplazo de 1 caja con 100 boletos (99 malos + 1 premiado).

Cohen afirma que «existe efectivamente un tipo de mentalidad que considera que dos oportunidades son preferibles a una en cualquier circunstancia».

En un experimento similar, Konold dice que la mayoría de los estudiantes entrevistados predice que van a salir 6 negras en 6 extracciones con reemplazo de una bolsa con 5 negras y una blanca, de donde deduce que «los estudiantes suelen tener un modelo de probabilidad "orientado al resultado" que puede ser más funda-

17. El equilibrio, de hecho, sí tiende a establecerse, pero porque las desviaciones se diluyen, no porque se contrarresten unas a otras de manera causal.

mental que el modelo de representatividad» (citado por Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 56) (18).

### c) Equiprobabilidad

Algunos experimentos en que se investiga acerca de las intuiciones sobre la equiprobabilidad señalan la existencia de respuestas en que los sujetos no identifican como tales las situaciones con equiprobabilidad.

Por ejemplo, Fischbein et al. (1967) realizaron un experimento con tableros con canales bifurcados, y, en los casos de equiprobabilidad, concluyeron que los porcentajes de respuestas correctas disminuyen con la edad (mientras que en los de probabilidad desigual, éstos aumentan con la edad). Por otra parte, trabajando con planteamientos de tipo a posteriori Alarcón (1982) concluye lo opuesto: él encuentra mejores resultados en preguntas con equiprobabilidad con niños de 13 a 14 años que con los de 12 a 13 años. Hoemann y Ross (1971), trabajando con niños de 4 a 13 años, encuentran mejores resultados en situaciones de equiprobabilidad que en situaciones de probabilidades desiguales, aunque añaden que eso no implica necesariamente que mejoren sus resultados de juicios de probabilidad.

Lecoutre (1984 y 1988) busca, por el contrario, las respuestas en que los sujetos identifican como equiprobables situaciones que no lo son. Encuentra que cerca de la mitad de los estudiantes con quienes trabajó tienen tendencia a identificar falsos equiprobables; 44% de esos sujetos justificaron su respuesta con afirmaciones del estilo de que "los resultados aleatorios son equiprobables por naturaleza". A raíz de ello, Lecoutre y Durand (1988) hablan incluso de un "sesgo de equiprobabilidad" a la par de los sesgos producidos por las heurísticas identificadas por Kahneman y Tversky.

### d) Otras intuiciones incorrectas

Otras intuiciones incorrectas aparecen en contextos específicos, por ejemplo al tratar con eventos independientes o en el marco de la teoría de la decisión.

El concepto de independencia estocástica es uno de los conceptos más difíciles y contraintuitivos de los contenidos usuales de los cursos de probabilidad y estadística. Los conceptos erróneos relacionados con la independencia han sido estudiados por investigadores como Zaleska (1974), Steinbring (1986) y Zaki (1990).

Unas de las situaciones que más frecuentemente dan lugar a incorrecciones son las que tienen que ver con la toma de decisiones. Con muchas de ellas ocurre, por ejemplo, que distintas posiciones teóricas llevan a soluciones antagónicas de los problemas. Slovic (1987) encuentra que la gente a veces subestima los riesgos y a veces los sobreestima, pero que cuando tiene opiniones

<sup>18</sup>. Yo he planteado la pregunta de Konold a profesores de nivel superior, algunos de ellos profesores de estadística, y la mayoría han dado la misma respuesta que la reportada por Konold.

fuertes acerca de algo, no las cambia ni cuando se le presenta evidencia en contra de ellas. Hay muchos trabajos en esta línea; algunos se pueden consultar en el número de la revista *Science* dedicado al estudio del riesgo, editado por Slovic (1987); otros son el de Pitz (1980) y el de Jeffrey (1987).

### 1.3.2. INTUICIONES CORRECTAS: UNA POLEMICA

«El concepto de probabilidad, que es una síntesis de azar y necesidad, de lo aleatorio y lo determinístico, involucra a veces confrontaciones dramáticas en el intelecto en desarrollo.» (Fischbein, 1975, pág. 19)

Uno de los puntos de más discusión polémica en la literatura científica acerca del tema es el relacionado con el momento, en la vida de un individuo, en que se puede hablar de una intuición probabilística (Fischbein, 1967; Hoemann y Ross, 1971; Alarcón, 1982; Gigerenzer, 1989).

Piaget e Inhelder (1951, 1955) afirman que la comprensión de la probabilidad se empieza a adquirir en el estadio de las operaciones concretas, y sólo se concluye efectivamente con la llegada a las estructuras de pensamiento formal. Aunque algunos investigadores como Hoemann y Ross (1971) coinciden con esta opinión, hay quienes afirman que existe una intuición probabilística desde antes del estadio de las operaciones formales, incluso desde el preoperatorio (Fischbein, 1975; Hawkins y Kapadia, 1984), mientras que otros como John Cohen et al. (1957b) posponen el límite incluso más allá de los 16 años (antes de lo cual las decisiones se basan sólo en preferencias subjetivas como la superstición). Otra serie de autores, con Kahneman y Tversky a la cabeza, se cuestionan la validez y la corrección de las intuiciones probabilísticas en juicios bajo incertidumbre que tienen los adultos, y observan que éstas están mucho menos desarrolladas que el razonamiento probabilístico que Piaget e Inhelder atribuyen a los niños (Gigerenzer et al., 1989).

Aunque hay puntos de la controversia que efectivamente ameritan discusión, en gran parte la polémica obedece a grandes diferencias conceptuales que colocan a los contendientes en puntos tan distintos que no cabe discusión alguna entre ellos. Una de esas diferencias es la que señalaron Hoemann y Ross (1971), y que mencioné previamente, acerca de la definición del conocimiento probabilístico y de cómo, según la posición, un conteo de casos favorables se puede considerar como un error, o como un precursor de la noción de probabilidad, o como un concepto probabilístico genuino. Uno de los sostenedores de esta última posición es Fischbein:

«El hecho de que los sujetos respondan bien a problemas cuya formulación implica la estimación de posibilidades nos parece que constituye la prueba de que están operando con el concepto de azar, incluso si la estimación

se lleva a cabo con base en comparaciones perceptuales simples.» (Fischbein, 1975, pág. 89)

Esta posición de Fischbein lo lleva por ejemplo a afirmar, a partir de un experimento realizado sobre procesos de conteo con adolescentes, que la probabilidad como una medida del azar no es contraintuitiva, sino que la intuición es compatible con el concepto de azar y con la cuantificación del azar como la relación entre el número de resultados favorables y posibles, con 1 como la representación del evento seguro y 0 como la representación de la probabilidad de un evento imposible (Fischbein et al., 1971).

Más extremos en esa posición son los investigadores que trabajan bajo el paradigma del "probability learning" (19). Todos ellos, como consideran que el conteo de casos favorables o de casos posibles es ya un concepto probabilístico, plantean experimentos en los que los resultados de estos conteos coinciden con el cociente de casos favorables sobre casos posibles que define a la probabilidad formal. Y, consecuentemente con ello, muchos encuentran que los niños más pequeños «sí tienen alguna comprensión de la probabilidad»; una buena revisión bibliográfica de esta corriente se encuentra en Fischbein (1975).

Para Hawkins y Kapadia (1984, pág. 355), muchas de las diferencias con respecto a la posición piagetiana de los investigadores que encuentran que «los niños sí usan la inferencia probabilística» se explican por el énfasis de Piaget «en los conceptos de la probabilidad formal más que en la capacidad de procesar la información probabilística de manera significativa y útil». Efectivamente, para Piaget no hay más probabilidad que la definida mediante un cociente de casos favorables sobre casos posibles.

Otra de las diferencias entre los campos conceptuales en que se ubican los investigadores del tema es, según Gigerenzer et al., la consideración de que no es lo mismo resolver un problema

19. El paradigma de "probability learning", que se puede denominar de "aprendizaje predictivo" (Maury, 1986), «se refiere a una situación en la que las respuestas del sujeto no están reforzadas constantemente, como en un condicionamiento ordinario, sino de manera intermitente y aleatoria, con una frecuencia relativa particular» (Fischbein, 1975, pág. 26). Los sujetos sometidos a estos experimentos (niños o adultos) van prediciendo la ocurrencia de eventos y se afirma que con ello van adquiriendo una intuición del azar y la probabilidad. El modelo experimental más clásico es el de un tablero con focos de diversos colores que se prenden aleatoriamente con frecuencias relativas predeterminadas, y en el que el sujeto debe apretar una manivela debajo del foco que, según su predicción, se encenderá la próxima vez. Muchos de los estudios concluyen que existe un fenómeno de "probability matching" ("correspondencia probabilística"), según el cual el sujeto poco a poco va ajustando la frecuencia con la que pulsa cada manivela a la frecuencia con la que el foco respectivo se enciende. Algunos trabajos en este paradigma son los de Jones y Liverant (1960), Weir (1964), Hoemann y Ross (1971), Zaleska (1974) y Brainerd (1981).

planteado "como en libro de texto" que uno en que sí se haga un simulacro de la realidad. Esta diferencia «también puede ayudar a reconciliar la contradicción aparente entre las "ilusiones cognitivas" reportadas en la investigación sobre juicios bajo incertidumbre [de Kahnemann y Tversky] y la investigación de Jean Piaget y Bärbel Inhelder en razonamiento probabilístico» (Gigerenzer et al., 1989, pág. 231).

### 1.3.3. INTUICION PROBABILISTICA EN ADOLESCENTES Y ADULTOS

Los adolescentes y los adultos no tienen un desempeño mejor, en general, del de los niños. Kahneman y Tversky muestran ampliamente los sesgos que ocurren en el uso de las heurísticas que identifican. Algunos investigadores han observado que los adultos fallan también ante otro tipo de problemas.

Al respecto, Weir (1964) comenta que los adultos tienden a hacer los problemas que se les plantean más complejos de lo que realmente son: buscan el gato encerrado. Asimismo, Hawkins y Karpada (1984, pág. 372) sostienen que «los adultos son notablemente incoherentes al asignar probabilidades» (por ejemplo, asignan probabilidades subjetivas cuyo total excede a 1).

Fischbein atribuye estos errores al descuido escolar sobre lo aleatorio: «el pensamiento lógico-científico del adolescente se construye sin tomar en cuenta la intuición del azar, y por ende sin la totalidad de las estructuras formales que podrían ser capaces de traducir lo posible en términos de construcciones racionales» (Fischbein, 1975, pág. 127). Por ello, el adolescente no posee estas intuiciones. Aunque puede adquirirlas todavía, durante su desarrollo en el estadio de las operaciones formales, después de ese periodo, la base intuitiva permanece sin cambios <sup>(20)</sup>.

«De hecho, nos ha resultado más difícil lograr que los maestros entiendan los conceptos de probabilidad, que lograr que sus alumnos los entiendan (...). Esto demuestra la pérdida con la edad de algunas facultades intuitivas. Un adolescente tiene más oportunidades de reconstruir una estructura intuitiva que un adulto.» (Fischbein, 1975, pág. 96)

<sup>20</sup>. En algunos casos, Fischbein concede que podría haber cambios después de ello, mediante el uso de "procedimientos instructivos específicos". Sin embargo, su posición general es que la base intuitiva del individuo no cambia después de la adolescencia.

## 1.4. EDUCACION Y PROBABILIDAD

### 1.4.1. POSICION DE FISCHBEIN ACERCA DEL PAPEL DE LA ESCUELA

Como hemos visto, Fischbein opina que después del periodo de las operaciones formales las intuiciones son prácticamente inamovibles; incluso desde antes tienen una fuerte resistencia al cambio. Esto lleva a Fischbein a ocuparse activamente del papel que debe tener la educación en la formación y el desarrollo de intuiciones secundarias correctas. Aquí nos ocuparemos de ver algunas propuestas que plantea él para la formación escolar de intuiciones en general, y cómo diagnostica un papel pernicioso que está teniendo la educación escolar en la adquisición de intuiciones probabilísticas.

#### **1.4.1.1. FORMACION DE INTUICIONES**

Fischbein afirma que la información y los hábitos mentales específicos de los cuerpos de conocimiento de que se ocupa la enseñanza escolar interactúan constantemente con las preferencias intuitivas de los alumnos. «La compatibilidad entre estas preferencias intuitivas y la estructura lógica del conocimiento es un componente esencial de la comprensión, y una precondition para el uso independiente y efectivo de este conocimiento en circunstancias variadas» (Fischbein et al., 1971, pág. 139). Pero las intuiciones no son meros síntomas aislados sino manifestaciones de estructuras sumamente articuladas y complejas, por lo que en estas interacciones «son inevitables las contradicciones entre las estructuras conceptuales correctas y las representaciones intuitivas» (Fischbein, 1987, pág. 38).

Esta posición lleva a Fischbein a hacer una propuesta general sobre el uso de la intuición en la educación. Aborda el problema considerando tres situaciones principales posibles con respecto a la existencia de intuiciones durante un proceso de enseñanza: 1º) puede ocurrir que la información transmitida durante el proceso de enseñanza se tope con un sesgo intuitivo compatible; 2º) puede ocurrir que la intuición sea contradictoria, o sea que la preferencia intuitiva no sea compatible o correcta y que haya una contradicción entre la intuición primaria y la verdad objetiva y demostrable; 3º) puede ocurrir que haya una ausencia de preferencias intuitivas previas que sean relevantes a la información enseñada.

Fischbein indica cómo manejar las intuiciones en cada una de estas tres situaciones. En el primer caso el docente debe procurar sacar provecho de la compatibilidad, usando el substrato directamente en la enseñanza. En el segundo caso es necesario que el sujeto aprenda a desconfiar de su primer impulso, y a desarro-

llar mecanismos de verificación. En el tercer caso, puede intentarse la formación de una intuición correcta.

De las tres situaciones posibles señaladas, la que más atención merece es, indudablemente, la segunda. Esta ocurre cuando el sujeto se enfrenta a una realidad contraintuitiva: cuando se ha construido una forma de conocimiento inmediato que no corresponde correctamente con la realidad. En ocasiones, el proceso educativo puede transformar una intuición incorrecta en una correcta. Pero esto no es lo más frecuente, y es menos posible hacerlo mientras mayor sea la edad del educando. En general, lo que es pertinente es enseñar al individuo a desconfiar de su intuición: que sepa que puede estar equivocado aunque esté convencido de lo contrario, que aprenda procedimientos para verificar resultados, que sea cuidadoso con las conclusiones, que aprenda a analizar las fuentes sistemáticas de error, y a desarrollar mecanismos de alarma que reconozcan cuándo está en campos intuitivos potencialmente erróneos: entra en funciones una especie de señal de alerta que indica que lo que se está sintiendo como intuitivo puede ser incorrecto.

El individuo que aprende esto desarrolla un metaconocimiento destinado a protegerlo de la renuencia a admitir alternativas que manifiestan las intuiciones como una de sus principales características (Fischbein, 1987, pág. 37). Esta renuencia se ve apoyada además por el efecto de primacía: «el solo hecho de que se trata del primero (la primera impresión, la primera interpretación, etc.) influye sobre la perseverancia de la actitud inicial del sujeto» (Fischbein, 1987, pág. 194).

Todos tenemos incorporadas señales de alerta en este sentido: por ejemplo, cuando haciendo operaciones aritméticas nos encontramos con un cero, o cuando vemos los movimientos del sol, la luna y la tierra para entender un eclipse, etcétera. Lo que distingue a los científicos del resto de la gente no es sólo que han trascendido sus intuiciones primarias sino que han aprendido a desconfiar de las intuiciones que no pueden trascender.

De hecho, después de buscar en las raíces intuitivas las fundamentaciones para la axiomatización, la tendencia actual de los científicos es la de desconfiar fuertemente de sus propias intuiciones. A pesar de ello, «la confianza en sí mismo del individuo puede estar en peligro si aprende que incluso sus creencias más profundas pueden llevarlo a errores» (Fischbein, 1987, pág. xi), y el individuo se protege contra ese peligro, recurriendo siempre, en última instancia, a la seguridad que confieren la inmediatez y la confiabilidad de las intuiciones.

Para que el aprendizaje de las señales de alerta no socave la confianza interna del individuo, «es necesaria una teoría que abarque las raíces conductuales y las funciones adaptativas de las intuiciones» (Fischbein, 1987, pág. xi). Esta teoría es la que él propone, y de ella deduce las siguientes siete reglas generales para el manejo educativo de las intuiciones:

- «1) Enseñar a vivir con las intuiciones y a controlarlas;
- 2) enseñar a analizar y a formalizar las adquisiciones intuitivas primarias del sujeto;

- 3) enseñar a reconocer las contradicciones entre las interpretaciones intuitiva y formal de algunos conceptos;
- 4) aprovechar correctamente el efecto de primacia;
- 5) desarrollar la capacidad de distinguir entre sensaciones intuitivas, creencias intuitivas y convicciones apoyadas formalmente;
- 6) aprovechar y desarrollar las intuiciones anticipatorias;
- 7) usar las intuiciones, reconocerlas, desarrollar nuevas, junto con el desarrollo de las estructuras formales.» (Fischbein, 1987, págs. 206-211)

#### 1.4.1.2. FORMACION (Y DEFORMACION) DE LAS INTUICIONES PROBABILISTICAS

Para Fischbein, hay en el niño una intuición básica hacia la probabilidad, que es «una intuición primaria preoperatoria construida desde la experiencia diaria del niño y complementaria a la intuición de necesidad» (Fischbein, 1975, pág. 71). Esta intuición no está basada en operaciones sino en consideraciones subjetivas o perceptuales. Cuando el niño llega al estadio de las operaciones concretas una tendencia a las respuestas unívocas lo lleva no a un compromiso entre las interpretaciones de azar y de necesidad sino a alternar entre ellas. Pero, según Fischbein, esta tendencia a las respuestas unívocas no surge de manera natural por el desarrollo cognitivo del individuo: «no se genera por la estructura operatoria del pensamiento, sino por la influencia del entorno social, en particular el escolar», porque «la escuela inculca la noción de determinismo unívoco» (Fischbein, 1975, pág. 73).

Fischbein sugiere que por naturaleza el ser humano llegaría, como fruto de su desarrollo y de su experiencia, a adquirir las intuiciones de azar, de frecuencia relativa y de probabilidad, para manejar lo posible. Pero el hecho de que no lo logre se debe a una influencia perniciosa de la escuela, que enfatiza en lo necesario, lo determinístico, lo unívoco, la hiper-racionalización.

Así, la escuela no sólo no promueve el desarrollo natural de las intuiciones correctas acerca del azar y la probabilidad, sino



que lo obstaculiza, mientras que sí promueve el desarrollo de otras funciones intelectuales <sup>(21)</sup>:

«Es por ello que la intuición del azar queda fuera del desarrollo intelectual, y no se beneficia lo suficiente del desarrollo de los esquemas operacionales del pensamiento, que se arman exclusivamente al servicio del razonamiento deductivo.» (Fischbein, 1975, pág. 73)

Para Fischbein, la enseñanza de la probabilidad puede empezarse desde el nivel de las operaciones concretas, o a más tardar en el periodo de la organización de las operaciones formales, por un sustrato intuitivo básico cuya existencia él demuestra en experimentos (Fischbein, 1970, 1971, 1975). Pero esta enseñanza no sólo puede empezarse desde muy pronto en la educación básica, sino que debe hacerse así, porque «Las probabilidades y la estadística representan no sólo un capítulo de las matemáticas sino también un modo de pensamiento complementario del modo estrictamente determinístico» (Fischbein et al., 1969, pág. 16). Es decir, el sustrato intuitivo es magro, y debe ser desarrollado.

Fischbein atribuye la inexistencia de respuestas correctas en los sujetos de operaciones concretas en los experimentos de Piaget e Inhelder a que ellos buscaban "respuestas espontáneas", mientras que él busca la factibilidad de la enseñanza. Sin embargo, como lo señalé anteriormente, las diferencias también radican en una diferencia conceptual acerca de la noción de probabilidad. Así, por ejemplo, Fischbein reconoce como una respuesta correcta el que un niño reconozca que dos conjuntos son proporcionalmente equivalentes cuando ambos se acomodan en paquetitos iguales (Fischbein et al., 1970), y no le preocupa que el niño deje de reconocer la proporcionalidad si se revuelve cada conjunto.

#### 1.4.2. INVESTIGACION BASICA EN EDUCACION

Muchos autores señalan la escasez de estudios teóricos y experimentales tanto acerca de los enfoques educativos y pedagógicos en el desarrollo del razonamiento estadístico y probabilístico

21. Este efecto de la escuela diagnosticado por Fischbein podría ser la explicación de un fenómeno interesante ocurrido en un estudio a gran escala de la Assessment Performance Unit inglesa, en el que se plantearon algunos problemas de probabilidad en tres etapas: predicción, experimentos reales, y reconsideración de la predicción. Los niños tuvieron una tendencia a contestar correctamente las primeras preguntas de predicción, pero al enfrentarse a la evidencia obtenida en la etapa de experimentación, la mayoría se desdijo de su predicción, algunos negaron la evidencia y se aferraron a la explicación teórica, pero casi no hubo niños que juntaran las dos cosas (Hawkins y Kapadia, 1984).

co como acerca de los diferentes métodos de enseñanza (Garfield y Ahlgren, 1988; Hawkins y Kapadia, 1984):

«estamos rodeados por ocurrencias aleatorias todos y cada uno de los días de nuestras vidas. ¿Puede ser razonable tratar tan a la ligera una propiedad de nuestro mundo que es tan penetrante?» (Green, 1983, pág. 41)

En su profunda revisión psicológica y pedagógica acerca de los conceptos de probabilidad que tienen los niños, Hawkins y Kapadia identifican las siguientes preguntas fundamentales a las que debe responder la investigación, que según mi punto de vista pueden aplicarse a las investigaciones sobre la enseñanza de la probabilidad en general (no sólo a niños):

«(1) ¿Qué conceptos de la probabilidad tienen los niños de diferentes edades?; (2) ¿Cómo podrían cambiarse estos conceptos?; (3) ¿Qué relación hay entre los conceptos intuitivos o subjetivos y los conceptos que están mediados socialmente en el aula y que constituyen el conocimiento de la probabilidad formal?; (4) ¿Hay una edad óptima para introducir a un niño a la probabilidad formal?; (5) ¿Existen técnicas óptimas de enseñanza y de aprendizaje que tomen en cuenta los conceptos espontáneos que tienen los niños acerca de las nociones probabilísticas durante el desarrollo de su comprensión de la probabilidad formal?» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 351)

Así, el primer punto es la necesidad de comprender cómo la gente comprende y aprende los conceptos probabilísticos (Garfield y Ahlgren, 1988). Hay algunos estudios que abordan ya este tema, y en particular los conceptos probabilísticos erróneos; Hawkins y Kapadia (1984, pág. 359) señalan que las investigaciones más importantes al respecto son la de Shaughnessy (1977), la de Falk et al. (1980), y la de Fischbein y Gazit (1984), aunque después cuestionan la aplicabilidad de los tres estudios en el aula.

Myers distingue tres dimensiones para la comprensión de la probabilidad:

«La primera es una conexión externa, que corresponde a la relación entre el material a enseñar y el conocimiento del mundo real que poseen los estudiantes. La segunda se denomina conexión interna, y es el grado en el que están explícitamente desarrolladas las relaciones entre las fórmulas y los conceptos, mientras que la tercera dimensión es la explicación, o el razonamiento expuesto para fórmulas particulares». (Myers, 1983, citado por Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 362)

La conexión externa es un punto en que muchos autores insisten (entre otros, Fischbein, 1975; Hewson y Hewson, 1983; Maury, 1986; Garfield y Ahlgren, 1988); su importancia radica en dos aspectos. Primero, hay que utilizarlos como punto de partida; segundo, para poder comprender las dificultades del aprendizaje de la probabilidad es necesario comprender qué funciones cumplen

esos conceptos previos (Heitele, 1975), de dónde surgen y cómo entran en conflicto con las ideas que se impartirán en la enseñanza (Garfield y Ahlgren, 1988):

«Los estudiantes que han construido creencias instrumentales acerca de las matemáticas, piensan que sus futuras experiencias en clase de matemáticas van a encajar en esas creencias». (Cobb, 1986, pág. 4)

Estas creencias están particularmente apegadas al contexto y a la forma de presentación de los problemas:

«El razonamiento probabilístico, al menos en sujetos ingenuos, parece estar fuertemente determinado por la manera en que se presenta la información crucial. [...] El juicio de niños y adultos no está condicionado tanto por la estructura de un problema - como lo desearían las diferentes visiones normativas - sino por el contenido, el contexto y la presentación de la información - que sería irrelevante de acuerdo con la mayoría de los modelos normativos». (Gigerenzer et al., 1989, pág. 232)

Varios autores coinciden con este punto de vista, y encuentran resultados experimentales de acuerdo con él (Zaleska, 1974; Thornton y Fuller, 1981; Lecoutre y Durand, 1988). Como lo indica Maury (1986), problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico no lo son necesariamente en el plano cognitivo. Asimismo, hay observaciones acerca de la pertinencia de ciertos tipos de lenguaje en ciertos tipos de contextos (Walkerline, 1982; Alatorre, 1991), y observaciones en el sentido de aumentar en el aula el tratamiento de problemas: «la actividad cognitiva implicada en la resolución de un problema depende fuertemente de factores distintos de los que están directamente ligados a su estructura matemática» (Maury, 1984, pág. 188); Maury señala también que esta dimensión es una de las grandes ausentes en los trabajos estructuralistas (pero no en los de gente como Vergnaud, Brousseau y Halbwachs).

Por otra parte, una de las mayores dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de cualquier nivel en la formación de conceptos probabilísticos correctos es «una dificultad básica con los conceptos de números racionales y razonamiento proporcional, que se usan al calcular, reportar e interpretar probabilidades»; esta dificultad está relacionada con una dificultad general para el manejo de abstracciones (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 47). Pero estas dificultades se refieren no sólo al manejo matemático, sino a la relación entre éste y el mismo concepto de probabilidad:

«La diferencia entre la caracterización matemática de la probabilidad y su muy particular significado estocástico es la razón de muchas de las dificultades didácticas que surgen en esta insólita materia en la escuela [...] El concepto matemático no es idéntico a su definición; además, es distinto del objeto de aprendizaje». (Steinbring, 1985, págs. 67 y 76)

De todos modos, la enseñanza de la probabilidad está mucho mejor estudiada en los niveles básicos que en los más avanzados. Son pocos los investigadores que se ocupan de ver cómo son, para estudiantes preuniversitarios, estudiantes universitarios y adultos en general, los puntos identificados por Hawkins y Kapadia (1984): los conceptos previos de probabilidad, cómo podrían cambiarse, su relación con la probabilidad formal, la edad al emprender el aprendizaje y las técnicas óptimas para la enseñanza:

«Disponemos de muy pocos resultados acerca de la elaboración de conocimientos en este dominio en el adolescente y el joven adulto escolarizados, cuando es precisamente esta población a la que se dirige la enseñanza de la estadística y de las probabilidades» (Maury, 1986, pág. 18)

Algunos de los investigadores que trabajan los conceptos probabilísticos de sujetos mayores de 15 años son John Cohen (1957a), Weir (1964), Kahneman y Tversky (1972, 1982; Tversky y Kahneman, 1974, 1982a), Heitele (1975), Shaughnessy (1977), Maury (1984, 1986), Lecoutre (1984; Lecoutre y Durand, 1988), Ojeda (1987) y Zaki (1990). Hay también trabajos acerca de la proporcionalidad: Long y Mirza (1980), Thornton y Fuller (1981) y Maloney (1983).

Por último, no hay que excluir de entre las dificultades el hecho de que «muchos estudiantes ya han desarrollado un disgusto por la probabilidad a través de la exposición a su estudio en un modo altamente abstracto y formal» (Garfield y Ahlgren, 1988, pág. 47).

### 1.4.3. ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Muchos autores concuerdan con Fischbein (Hawkins y Kapadia, 1984) en la necesidad de abordar la enseñanza de la probabilidad desde muy temprano en la formación escolar. Sin embargo, hay quienes, como Freudenthal (1973, pág. 611), desrecomiendan la enseñanza a niveles anteriores al medio superior, por temor (justificado, a mi ver) de que los maestros caigan en la tentación de incurrir en formalismos y en las técnicas de la estadística matemática.

La discusión acerca de la edad óptima para el aprendizaje de la probabilidad es una discusión de fondo. No sólo es cuestión de si los niños pueden o no pueden aprender los conceptos probabilísticos antes o durante el periodo de las operaciones formales, sino de si esta capacidad permanece después de ese periodo. Fischbein opina al respecto que los cambios en las intuiciones se pueden lograr a más tardar en el periodo de las operaciones formales (y tanto mejor mientras más pronto se aborden), y que hay pocas esperanzas para quienes ya rebasaron ese periodo. Esta, sin embargo, no es una opinión universalmente compartida. Por un lado hay quienes piensan que los conceptos y/o estructuras adquiridos durante el desarrollo garantizan que estos estudiantes tienen ca-

## REFERENTES TEORICOS Y EXPERIMENTALES

pacidades para el aprendizaje de la probabilidad (Heitele, 1975; Ojeda, 1987; Zaki, 1990). Por otro lado, hay quienes piensan que no es necesario haber adquirido esos conceptos y/o estructuras, y que podría ocurrir que el desarrollo cognitivo continúe hasta el estado adulto (Rehmann, 1980).

Aunque la discusión no se ha zanjado, el hecho es que en las últimas décadas la probabilidad ha ido ingresando al currículum educativo en los niveles básicos y avanzados. Esta incorporación puede obedecer a varias razones: por ejemplo, la probabilidad es un modelo matemático interesante, la probabilidad contiene los ejemplos más convincentes del significado real de las matemáticas (Freudenthal, 1973, pág. 583), la probabilidad es por excelencia la matemática aplicada, la probabilidad es indispensable para comprender la estadística y ésta ayuda a comprender la realidad (Maury, 1986, pág. 57). Aunque las razones para incorporar la probabilidad al currículum no siempre han sido claras y explícitas, ciertamente tienen muchos de los aspectos de la incorporación: el nivel en que se enseña la probabilidad, los contenidos específicos, las formas de enseñanza.

Sin embargo, aunque sin duda este auge educativo de la probabilidad se debe en buena parte a Fischbein, creo que sigue vigente su crítica principal: los alumnos son formados para buscar la regla inequívoca que permite encontrar una respuesta única en cada problema, y el azar es, como para los científicos del pasado, un obstáculo que hay que tratar como si no estuviera ahí. La crítica de Fischbein no se refiere a la enseñanza de las matemáticas en particular, sino a la educación en general, y ha sido apoyada por múltiples autores (entre otros, Falk et al., 1980; Green, 1983; Hawkins y Kapadia, 1984). Y muchos de los vicios que él señaló desde 1975 siguen ocurriendo.

Por ejemplo, hablando de las matemáticas escolares del nivel medio básico, Steinbring (1985) apunta que son un tipo muy especial de matemáticas puras. Adjudica parte de la responsabilidad de ello a Bourbaki por el lado de matemáticas y a Bruner y Piaget por el de educación, pero también a quienes la formalidad matemática les parece un medio satisfactorio para evitar la zona controvertida acerca del significado de la probabilidad, y una manera cómoda en la que la comunicación entre maestros y alumnos se vuelve simple e inequívoca: todos los conceptos tienen un significado fijo, las lecciones siguen el curso prescrito de manera ordenada, y el tema es fácilmente evaluable con preguntas cuyas respuestas son correctas o incorrectas. También Freudenthal (1973) critica severamente dos maneras de enseñar la probabilidad: la que la considera como un sistema abstracto recortado de la realidad, y la que la considera como un sistema de fórmulas y patrones de cálculos que deben ser llenados por datos numéricos.

### 1.5. REFERENTES EXPERIMENTALES

En la literatura relacionada con el estudio psicológico de los conceptos probabilísticos se pueden encontrar toda suerte de experimentos. Aquí intentaré resumir muy brevemente los tipos más comunes de experimentos relacionados con los modelos clásicos de rifas, apuestas y juegos. No plantearé los experimentos relacionados con problemas más "realistas" que los modelos clásicos (básicamente los trabajos de Kahneman y Tversky).

Lo primero que resalta es la gran cantidad y variedad de experimentos diferentes que se pueden encontrar en la literatura. Esto no sólo obedece al diferente capricho de los autores, sino que, como lo expresa Maury,

«Varios autores (...) han demostrado, con interpretaciones que dependen del marco teórico en el que se mueven, que problemas isomorfos desde el punto de vista de la estructura pueden dar lugar, según el contexto en que se presentan, a diferentes dificultades (y) procedimientos de resolución variados.» (Maury, 1986, pág. 65)

#### 1.5.1. EL PLANTEAMIENTO CLASICO PIAGETIANO DE "CUANTIFICACION DE PROBABILIDADES"

Los experimentos realizados en este trabajo corresponden al planteamiento que Piaget e Inhelder denominaron "de cuantificación de probabilidades". Así, las principales referencias de carácter experimental son las que utilizan este planteamiento y sus múltiples variaciones: es lo que se presentará en este apartado. El último párrafo es la explicación del uso entrecomillado que hago siempre del término "cuantificación": es, a mi modo de ver, un término poco afortunado.

##### 1.5.1.1. PRESENTACION GENERAL

He aquí cómo hacen Piaget e Inhelder el planteamiento: ellos le presentan al niño

«dos pequeñas colecciones formadas cada una de muy pocos elementos, de manera que se puedan seguir paso a paso las relaciones construidas. Se le presentan dos colecciones de fichas blancas, con o sin una cruz en el anverso. El sujeto observa la composición exacta de las dos colecciones, después de los cual se las revuelve, cada una por su parte, se las pone sobre la mesa, de tal manera que la parte visible de cada ficha sea el reverso, y el niño debe decidir en cuál de los dos conjuntos tiene más oportunidades de encontrar una cruz a la primera.» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 127)

Piaget e Inhelder cuentan con un "banco" de problemas, clasificados en diez tipos, y a cada niño le plantean preguntas de varias de los tipos. Estos diez tipos son:

- P1. *Doble imposibilidad*: las dos colecciones son de dos o tres elementos cada una, pero ninguna contiene una cruz
- P2. *Doble certeza*: Los casos favorables de 2 sobre 2 o de 4 sobre 4 (lo que escribiremos  $2/2$  o  $4/4$ ), es decir que todos los elementos contienen la cruz
- P3. *Imposibilidad-certeza*: una de las dos colecciones contiene tantas cruces como elementos, por ejemplo  $2/2$ , y la otra ninguna cruz sobre un número igual de elementos, por ejemplo  $0/2$
- P4. *Posibilidad-certeza*: una colección contiene un caso favorable de dos ( $1/2$ ) y la otra uno de uno ( $1/1$ ), o  $1/2$  y  $2/2$ , etc.
- P5. *Posibilidad-imposibilidad*: Por ejemplo,  $1/2$  y  $0/2$ .
- P6. *Conjuntos idénticos o composiciones idénticas* de las dos colecciones, por ejemplo  $1/2$  y  $1/2$ .
- P7. *Proporcionalidad*: una de las dos colecciones contiene una cruz de dos elementos, y la otra dos de cuatro, o  $1/3$  y  $2/6$ , etc.
- P8. *Desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles*: por ejemplo  $1/4$  y  $2/4$ .
- P9. *Igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles*, por ejemplo  $1/2$  y  $1/3$ .
- P10. *Desigualdades respectivas de los casos favorables y de los casos posibles, sin proporcionalidad*, por ejemplo  $1/2$  y  $2/3$ .

Como mencioné previamente, los diez tipos a su vez están clasificados en tres categorías, que corresponden aproximadamente al grado de dificultad que conllevan:

- .) problemas con imposibilidades: P1, P2, P3, P4 y P5, y problemas con conjuntos idénticos: P6
- .) problemas de una variable: P8 y P9
- .) problemas de dos variables: P7 y P10

Los niños más pequeños pueden resolver los problemas de la primera categoría, en especial la P1, la P3 y la P5, que son consideradas por Piaget e Inhelder como "controles", los niños en el estadio de las operaciones concretas pueden resolver los problemas de una variable, y no es sino hasta el tercer estadio (de las operaciones formales) cuando los niños logran resolver adecuadamente los de la última categoría.

Cabe observar que el modelo no es idea original de Piaget e Inhelder, sino que se trata de un problema conocido desde siglos antes por los probabilistas. Sin embargo, fueron estos autores quienes le dieron al modelo su popularidad en los estudios de corte más psicológico. Los experimentos de Piaget e Inhelder han sido reproducidos de manera prácticamente idéntica por muchos autores (entre otros, Fischbein et al., 1970; Falk et al., 1980; Lecoutre, 1984; Maury, 1984); para el trabajo que presentaré son particularmente interesantes las réplicas realizadas en México

(Chalini, 1979; Lema y Morfín, 1981) y las realizadas con estudiantes universitarios (Maury, 1986).

### 1.5.1.2. VARIACIONES

#### a) En planteamientos

Algunos autores marcan una diferencia clara entre los planteamientos de "previsión" (en que se le pide al sujeto que prediga el resultado) y los de "toma de decisiones" (en que se le pide además que decida con base en su previsión). Asocian la previsión con la predicción, por ejemplo del color de una ficha de una bolsa con fichas de dos colores en diferentes números; y asocian la decisión (también llamada decisión binaria) con la elección de uno de dos grupos de fichas en que cierto color está desigualmente representado. Estos autores llaman "piagetiano" al primer planteamiento (el de previsión), a pesar de que varios de los experimentos clásicos piagetianos involucran una decisión. Por otro lado, muchos autores usan indistintamente los términos "previsión" o "decisión" para los experimentos clásicos piagetianos (22).

En general, cuando se habla de previsión es cuando no hay también una decisión involucrada, lo que ocurre típicamente cuando se trabaja con un solo conjunto. El planteamiento básico es que el sujeto debe predecir una o varias extracciones (23) de una urna o bolsa que contiene fichas o bolas de dos o más colores. Hay varias variaciones a este planteamiento básico; tres de ellas son los ejercicios piagetianos A, C y D presentados en la pág. 18. Varios autores afirman que es más difícil resolver el problema con un solo conjunto que con dos (Piaget e Inhelder, 1951; Hoemann y Ross, 1971; Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein, 1987), pero otros encuentran que el problema con un solo conjunto es mucho más fácil que el de dos (Lema y Morfín, 1981). Una variación interesante al problema de un solo conjunto es el de Wilkening y Anderson (1982): para eludir por completo cualquier aspecto de "decisión" en el planteamiento, se le presenta al sujeto un solo plato con canicas, y se le pide que evalúe las posibilidades de sacar una canica azul mediante una "happiness scale" (barra con una carita alegre en un extremo y una triste en el otro).

22. La distinción no es, por cierto, crucial, sobre todo si se tiene en cuenta que aunque la mayoría de los experimentos son de decisión en modo de previsión, se le puede pedir al sujeto que prediga sin elegir (previsión pura) o que elija sin predecir (por ejemplo en los planteamientos a posteriori: ver más adelante).

23. La extracción de una urna es la acción de sacar una de las piezas que contienen las urnas, de manera aleatoria: no eligiendo la pieza sino tomando la primera que se toque ("sin ver").



Se pueden encontrar numerosas variaciones al planteamiento de decisión en urnas. En vez de urnas se pueden utilizar bolsas o cajas. Las piezas pequeñas y similares que contienen las urnas pueden ser canicas, bolas, boletos o tarjetas. La característica que las separe en dos o más tipos puede ser el color o la existencia o no de una marca (Piaget usa una cruz). Las urnas pueden ser "cerradas" o "abiertas": si son "cerradas" ambos recipientes son cerrados y se le pide al sujeto que prediga en cuál metería la mano para, sin ver, sacar un objeto; si son "abiertas" se trata de platos o de regiones diferentes de una mesa y se le pregunta al sujeto de cuál escogería para, con los ojos cerrados, sacar un objeto. Las extracciones pueden ser simples (se extrae una sola pieza) o múltiples (se extraen varias piezas, lo que puede efectuarse con o sin remplazo de la pieza anterior).

Otra serie de variaciones la constituyen los planteamientos de decisión a posteriori: en ellos se le presenta al sujeto una o varias urnas con contenido conocido, y se le da la información de una serie de extracciones ya realizadas; el sujeto debe decir de cuál de las urnas se hicieron las extracciones (24). Otras variaciones al respecto: adivinar la composición de una bolsa con cinco bolas después de una serie de extracciones con remplazo, o al trabajar con dos urnas, tener una de las dos con contenido conocido y la otra con contenido desconocido (Alarcón, 1982).

El planteamiento de "cuantificación" de probabilidades, que es un planteamiento de decisión binaria en modo de previsión, ha recibido algunas críticas. Hawkins y Kapadia (1984, pág. 365) señalan que lleva «a mucha confusión acerca de qué es exactamente lo que se está evaluando: las frecuencias relativas, las fracciones, los números, los volúmenes, la percepción o las preferencias de color, etc.». Alarcón (1982, pág. 4) coincide con esto y señala además que la situación de previsión conlleva una doble incertidumbre (no sólo es la incertidumbre del resultado de la extracción sino, en consecuencia, también la de la elección de la bolsa) y además tres universos de posibilidades (el de la posibilidad misma de elegir, el de las dos bolsas, que es hacia el que se dirige la pregunta, y el de las extracciones posibles, que es al que se refiere el resultado de la extracción). Por su parte, Hoemann y Ross (1971) opinan que cuando se trabaja con ruletas el problema equivalente al planteamiento de "cuantificación", no interviene el concepto de probabilidad sino solamente el de proporcionalidad.

Sin embargo, como señala Green, «se puede debatir si tales problemas tienen mucho que ver con la probabilidad, pero ciertamente representan la probabilidad en muchos libros de tex-

24. Este planteamiento tiene la ventaja sobre la decisión a priori que sólo trabaja con un universo de incertidumbre, el de la urna de donde se hizo la extracción, y elimina el de los resultados de las extracciones, puesto que éstas son conocidas (Alarcón, 1982). Sin embargo, implica la necesidad de hacer varias extracciones y por ende la intervención de cálculos combinatorios, lo que aumenta el grado de dificultad del problema planteado.

to» (Green, 1983, pág. 38). Maury (1986, pág. 331) dice que los problemas que ella construye, sobre el mismo planteamiento, para estudiantes de preparatoria y universidad «invitan al alumno a ejercer sus capacidades cognitivas», aunque también permiten que se ejerzan en ellos las intuiciones de los sujetos.

#### b) En referentes

En este trabajo, llamaré referente al material en que se basa un experimento de probabilidad. Así, las urnas son el referente con el que se trabajó en los experimentos reportados hasta ahora. Sin embargo, hay otras posibilidades de referente, de las que daré cuenta ahora: monedas, fichas, dados, ruletas y otros más.

Los experimentos más comunes realizados con monedas, fichas o dados implican un número variable de tiros de dados o monedas (ver por ejemplo Shaughnessy, 1977), y la observación de eventos aparentemente equiprobables, (como un 5 y un 6 versus dos 6 en el tiro de dos dados (Lecoutre, 1985; Lecoutre y Durand, 1988; Tversky y Kahneman, 1974). Dos variaciones interesantes a estos referentes son el ejercicio piagetiano de volados con "trampas" (ejercicio B de la pág. 18) y un experimento de lanzamientos triples de tachuelas (dos caras no equiprobables) realizado por Shaughnessy (1977).

La ruleta es el conocido disco pintado por sectores de dos o más colores. A pesar de que la ruleta comparte con las urnas y con los dados y volados la historia de los juegos y las apuestas y la de los orígenes de la Teoría de la Probabilidad, se realizan pocos experimentos con ella. Esto es lamentable, porque el planteamiento de la ruleta difiere de las urnas y los dados y volados en dos aspectos importantes: es más geométrico que numérico, y además es continuo y no discreto. Sin embargo, hay algunas excepciones a este hueco en el estudio de la probabilidad. Particularmente notables me parecen cuatro estudios en los que se comparan los resultados obtenidos con planteamientos basados en ruletas y en urnas: los de Hoemann y Ross (1971), Falk et al. (1980), Green (1983) y Maury (1984, 1986); esta última hace las comparaciones más exhaustivas entre ambos referentes <sup>(25)</sup>, a través de los resultados obtenidos por estudiantes de nivel medio superior y superior con ruletas y urnas (bolas en una bolsa).

Los modelos anteriormente mencionados son los más comunes (con mucho) en la literatura de experimentos relacionados con la definición "clásica" de probabilidad. No son, sin embargo, los únicos. Algunos investigadores construyen dispositivos especiales: cajas con canicas de diversos colores cuya parte central reposa sobre una cuña (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 14), tableros con canales que tienen bifurcaciones en esquemas diferentes, y por los que se echan a rodar canicas (Fischbein et al., 1967, pág. 159), tubos metálicos verticales que desembocan en esferas de las que salen a su vez tubos repitiendo el mecanismo con núme-

<sup>25</sup>. En vez de "referente", Maury usa el término "contexto", que yo he reservado para otro significado.

## REFERENTES TEORICOS Y EXPERIMENTALES

ros distintos ("pagoda" de Fischbein et al., 1967, pág. 161). Algunos investigadores trabajan hasta con tres referentes distintos, construidos ex profeso (Zaleska, 1974).

Aquí merece una especial mención Noelting (1980), quien diseñó un ingenioso referente para trabajar problemas de proporcionalidad que tienen la misma estructura que los de decisión binaria: el juego de naranja. El planteamiento consiste en lo siguiente: se le propone al sujeto la existencia de dos jarras, cada una acompañada por recipientes iguales que contienen o bien agua simple o bien extracto concentrado de jugo de naranja (el extracto es bien conocido por sus sujetos, que son canadienses). Las composiciones de agua y extracto varían, y al sujeto se le pide que indique en cuál de las dos jarras la mezcla de agua y extracto tendrá más sabor a naranja. El mérito del material radica en varios aspectos: es muy fácil para los sujetos comprender cualitativamente el papel que tiene cada uno de los componentes el total: el jugo de naranja aumenta el sabor, el agua lo reduce; cada una de las partes tiene no sólo un significado específico sino una contribución activa en el resultado final; finalmente, sólo mide el manejo que tiene el sujeto de la proporcionalidad, y no el de áreas o probabilidades.

## 1.5.1.3. DISCUSION ACERCA DEL TERMINO "CUANTIFICACION"

El planteamiento de Piaget e Inhelder corresponde a sus experimentos sobre "cuantificación" de la probabilidad. Sin embargo, la actividad que realiza el sujeto en ellos dista mucho de ser una cuantificación: en realidad, lo que hace es sólo una comparación entre las dos situaciones. Puede discutirse si lo que está comparando el sujeto son las probabilidades, o las proporciones, o sólo las situaciones a través de una percepción global de ellas, pero no se trata en ningún caso de una cuantificación sistemática. El sujeto tendría que realizar una cuantificación si por ejemplo se le pidiera que indicara cuánto más prefiere una situación que otra, o que hiciera una apuesta indicando lo que estaría dispuesto a pagar por su elección, o incluso que calculara directamente las probabilidades (como en un experimento reportado por Fischbein, 1987), pero la instrucción que se le da se refiere solamente a una elección o preferencia.

A mi modo de ver, esto no le resta validez al planteamiento general de Piaget e Inhelder, sino sólo al nombre que le ponen. En efecto, este planteamiento que lleva a comparaciones y decisiones permite poner en evidencia las estrategias de los sujetos, desde lo que Piaget e Inhelder llaman una "percepción intuitiva", hasta las más finas consideraciones proporcionales, que por cierto pueden eventualmente implicar una cuantificación y una operatividad aritmética reales.

En particular, me parece que las comparaciones son mucho más intuitivas que las cuantificaciones. Eso mismo afirma Koopman (1939, pág. 270) en su artículo sobre axiomas y álgebra de la probabilidad intuitiva, en el que toma como elementos básicos de la construcción no las probabilidades numéricas, sino la compara-

ción entre probabilidades, porque es más intuitivo hablar de comparaciones de probabilidad que de probabilidades numéricas.

### 1.5.2. METODOLOGIA DE INTERROGACION

La siguiente familia de referencias experimentales se refiere a la manera en que los diversos investigadores recopilan la información, en particular si lo hacen mediante entrevistas verbales con los sujetos o si les aplican cuestionarios para que ellos los respondan por escrito; una de las opciones al respecto lo constituye el método clínico-crítico de Piaget, que se considerará en un párrafo aparte. Posteriormente se analizarán algunas variantes en las modalidades de interrogación

#### 1.5.2.1. ENTREVISTAS O CUESTIONARIOS

Entre los autores que estudian las respuestas a problemas de probabilidad, se pueden encontrar muchas maneras distintas de plantear las preguntas. Básicamente, estas maneras se pueden clasificar según dos aspectos: si la forma de interrogación es oral o por escrito, y si el interés primordial es la respuesta (por ejemplo, una probabilidad numérica o una elección entre dos urnas) o las razones que llevaron al sujeto a ella. En general, los cuestionarios diseñados para obtener respuestas escritas permiten una sistematización de los resultados, lo cual es más difícil de llevar a cabo en entrevistas verbales, que suelen ser más libres y ágiles; además, las respuestas por escrito son mucho más fáciles de analizar, mientras que las orales implican más trabajo pero llevan a un análisis más profundo.

Son frecuentes los experimentos en que la interrogación se realiza por escrito y no se le pide al sujeto que explique las razones de sus respuestas. En algunos casos esto se debe a que el interés está centrado en otro aspecto (Green, 1983; Lecoutre y Durand, 1988; Kahneman y Tversky, 1972). Esto ocurre también incluso cuando los sujetos están disponibles en entrevistas y la interrogación es oral (Hoemann y Ross, 1971). Sin embargo, como plantean Garfield y Ahlgren (1988, pág. 55), «es posible que muchas investigaciones, al centrarse en si las respuestas son o no correctas, han dejado de ver la percepción de los sujetos acerca de la naturaleza de la pregunta, y por ende han estimado incorrectamente el razonamiento del sujeto».

Hay algunos estudios que combinan la sistematización que permite una interrogación por escrito con la indagación acerca de las razones que llevan al sujeto a una u otra respuesta. Tal es el caso, en particular, de los trabajos de Maury (1984, 1986); ella afirma que «tomar en cuenta la argumentación de los alumnos parece ser un elemento particularmente importante» (Maury, 1986, pág. 78), y en los cuestionarios que da a los sujetos (adolescentes o adultos jóvenes) les pide que acompañen sus respuestas con una justificación por escrito. Otros experimentadores combinan

las respuestas por escrito de muchos individuos con entrevistas a profundidad realizadas con pocos (Noelting, 1980 <sup>26</sup>; Lecoutre, 1984), o las respuestas por escrito a muchas preguntas con las respuestas orales a unas cuantas preguntas (Alarcón, 1982).

Otros investigadores realizan entrevistas a profundidad con los sujetos. Entre ellos, el más popular es el método clínico-crítico de Piaget, que expondré en el siguiente párrafo. Una variante interesante al método, utilizada frecuentemente en Francia, es la realización de la entrevista a dos sujetos simultáneamente (un "binomio") (por ejemplo, Zaki, 1990).

#### 1.5.2.2. METODO CLINICO-CRITICO

Uno de los métodos más fructíferos para la interrogación es el bien conocido método clínico o clínico-crítico de Piaget. Piaget desarrolló el método después de intentar utilizar cuestionarios y encontrarse con que éstos falsean la intención del niño, su "orientación espiritual". Concluyó que «el único modo de evitar estas dificultades consiste en variar las preguntas, en hacer contra-sugerencias, en una palabra, en renunciar a todo cuestionario fijo» (Piaget, 1926, pág. 267). Para la construcción del método, Piaget echó mano del llamado método clínico utilizado por psiquiatras, así como de conversaciones con niños y la observación de sus propios hijos (Coll y Gilliéron, 1981; Inhelder et al., 1974).

El punto central del método radica en «no limitarse a registrar la respuesta que da el niño a la pregunta que se le ha formulado, sino en dejar que converse» (Claparède, 1923, citado por Vinh-Bang, 1966, pág. 41), planteando cada vez nuevas preguntas, procurando ir al fondo, sin abandonar la partida cuando el niño da una respuesta incomprensible o contradictoria. El término "crítico" corresponde a una formalización del método: el método es crítico «por la sistemática controversia de las afirmaciones del sujeto, no para medir la solidez de sus convicciones, sino para captar su actividad lógica profunda» (Vinh-Bang, 1966, pág. 46).

El método clínico-crítico "desbroza" un campo nuevo y por ende «sus procedimientos se dejan orientar por las conductas originales imprevista» (Inhelder et al., 1974, pág. 40). Además, las preguntas se va planteando cada vez el experimentador corresponden a hipótesis que se hace sobre los significados cognoscitivos de las respuestas que va observando. Para Inhelder, el

<sup>26</sup>.Un aspecto notable de Noelting es su doble formación: él se asume piagetiano (participó personalmente en trabajos con Piaget y con Inhelder), pero después tuvo una evolución diferente de la del resto de la escuela ginebrina, a partir de su contacto con la tradición empírica norteamericana. Esta doble formación tiene repercusiones (favorables) en su metodología, puesto que toma de ambas escuelas lo mejor: la visión profunda del método clínico y la visión amplia y de controles estrictos de los experimentalistas norteamericanos.

método clínico-crítico es el prelude necesario para tomar un método de interrogación más sistemático, porque es el que permite tener un catálogo completo de las reacciones posibles de los niños a los problemas planteados, y sólo después de tener el catálogo se puede aspirar a

«una planificación experimental eligiendo las situaciones y los tipos de preguntas y de contraargumentos que se habían revelado como los más valiosos y pertinentes en las exploraciones previas.» (Inhelder et al., 1974, pág. 44)

El método no es fácil de aplicar. Piaget mismo confiesa que «es difícil y laborioso, y que necesita un golpe de vista que supone, por lo menos, uno o dos años de entrenamiento» (Piaget, 1926, pág. 266). El "golpe de vista" implica una habilidad para reconocer cuándo una respuesta puede estar provocada por dos o más representaciones, y para plantear la siguiente pregunta de modo que la alternativa quede dilucidada. Pero entonces, el experimentador debe moverse en arenas movedizas, evitando la sistematización cuando tiene ideas preconcebidas, la incoherencia cuando no las tiene y evitando sobre todo poner en la boca del niño lo que quisiera oír. No hay, además, reglas definidas para que un experimentador novel incursione en el método; Lema y Morfín (1981, pág. 37) hablan así de las dificultades del método clínico crítico: «fue necesario buscar de antemano, con cuidado, las formulaciones verbales que pudieran resultar más adecuadas al nivel de entendimiento del sujeto y que influyeran lo menos posible en sus reacciones».

Por otra parte, el método clínico comparte con cualquier otro método en que se pida al sujeto que enuncie razones o argumentos de sus decisiones el siguiente problema general: puede ocurrir que «los argumentos por los que los sujetos justifiquen sus respuestas sean meras racionalizaciones, más que enunciados de reglas que realmente guíen sus decisiones» (Evans y Wason, citados por Kahneman y Tversky, 1982, pág. 497).

Sin embargo, a pesar de la dificultad del método clínico, de su falta de sistematización y del riesgo de obtener racionalizaciones en vez de razones, son muchos los investigadores que lo utilizan (ver, por ejemplo, Falk et al., 1980; Fischbein et al., 1970).

### 1.5.2.3. MODALIDADES EN LA INTERROGACION

En los experimentos correspondientes al planteamiento de decisión binaria en situación de previsión, se encuentran múltiples variantes en cuanto a las modalidades en que se efectúa la recopilación de la información.

Algunos autores plantean la decisión exclusivamente entre las dos urnas (Hoemann y Ross, 1971; Falk et al., 1980; Maury, 1984, 1986), mientras que otros plantean una tercera opción: "da igual escoger una o la otra": tal es el caso entre otros de Alarcón (1982), Green (1983) y Lecoutre (1984) (el último abre

además una cuarta opción: "A y B no son comparables"). Entre los primeros, Maury (1986, pág. 102) reconoce como un error la formulación de la pregunta sin opción "da igual", porque «incita a una elección exclusiva».

Por otra parte, en algunos estudios se le pide al sujeto que sólo haga la predicción, en otros se le pide que además realice físicamente la extracción. En ambos casos se puede tratar de una o de varias extracciones (Cohen, 1957; Tversky y Kahneman, 1974; Alarcón, 1982). Cuando se trata de más de una, las extracciones pueden ser con o sin remplazo (Fischbein, 1987). Cuando se realizan extracciones en situación de previsión, el contenido de las urnas puede ser conocido o desconocido (Fischbein, 1975; Edwards referido por Gigerenzer et al., 1989).

Cuando después de haber hecho sus predicciones el sujeto realiza físicamente una o más extracciones, el investigador puede tomar la posición de simplemente observar las reacciones del sujeto a los resultados obtenidos, o bien de "premiar" los resultados. Quienes premian los resultados (Fischbein et al., 1967; Fischbein, 1975; Hoemann y Ross, 1971; Falk et al., 1980) lo hacen para involucrar emotivamente al sujeto en el experimento; el "premio" puede ser un objeto físico (un juguete, un dulce), o un halago verbal. Otros opinan que cuando se dan recompensas se hace que los experimentos se vuelvan conductistas, lo que puede sesgar los resultados que se obtengan (Brainerd, 1981; Maury 1984, 1986). Otra crítica a las recompensas está en que es discutible, desde el punto de vista pedagógico, que se premien resultados correctos surgidos de estrategias incorrectas, a lo cual Falk et al. (1980, pág. 201) contestan "¡así es la vida!", e incluso proponen que se utilice este tipo de recompensas como parte de una estrategia didáctica, porque «puede brindar una ocasión para que el docente aclare la diferencia entre una elección correcta y un resultado favorable».

Por otra parte, una práctica común entre los investigadores, es el hecho de plantear unas cuantas preguntas "de ensayo" antes de abordar las preguntas que constituyen formalmente el experimento (Falk et al., 1980; Hoemann y Ross, 1971; Noelting, 1980); algunos inclusive agregan extracciones "de práctica". En general, los autores no reportan las respuestas de los sujetos a estas situaciones "de fogueo", aunque hay algunas excepciones (Maury, 1984, 1986). Otros experimentadores no reportan el planteamiento de preguntas de práctica (Fischbein et al., 1970; Green, 1983; Lecoutre, 1984).

Por último, otra variación consiste en cambiar cada vez el color considerado como "favorable" (Falk et al., 1980; Maury, 1984 y 1986).

### 1.5.3. PROBLEMAS EN EL DIAGNOSTICO

Un problema grave que es poco atendido en la literatura acerca del tema es el problema del diagnóstico. Como ya lo he comentado, algunos autores ("intuicionistas") consideran como res-

puesta positiva en un planteamiento de decisión binaria la elección de la urna con 5 bolas "favorables" y 3 "desfavorables" contra la urna con 2 bolas "favorables" y 4 "desfavorables" sea cual sea la razón que llevó a la elección. Para otros autores, la respuesta sólo es correcta si esa elección corresponde a un razonamiento del tipo "cinco de ocho es más probable que dos de seis, porque  $5/8 > 2/6$ " (27). Estos últimos considerarían como un error de diagnóstico el calificar de correcta la elección de esa urna por razonamientos del estilo de "hay más favorables, porque  $5 > 2$ " o "hay menos desfavorables, porque  $3 > 4$ ": se trataría de diagnósticos falsos positivos. Evidentemente, estos autores no cometerían esos falsos positivos en el diagnóstico, pero eso no los libra de cometer eventualmente otros: podría ocurrir, por ejemplo, que un sujeto realice la doble comparación  $5 > 2$  y  $8 > 6$  y la exprese como "es más probable cinco de ocho que dos de seis", lo que podría hacer pensar al investigador que el razonamiento es proporcional con lo que al calificar la respuesta de correcta caería en un falso positivo.

Inversamente, también pueden ocurrir falsos negativos: por ejemplo podría ocurrir que un sujeto estuviera efectivamente tuviera el concepto de probabilidad y el razonamiento proporcional pero no lo expresara debidamente: si acompaña a su elección con una justificación del estilo de "es más probable con cinco y tres que con dos y cuatro", un investigador no intuicionista podría calificar de incorrecta la respuesta y caer en un falso negativo.

Así, cuando se califica de correcta una respuesta esto puede corresponder a que efectivamente el sujeto tiene el concepto o a que se incurrió en un falso positivo, y cuando se la califica de incorrecta puede ocurrir que efectivamente el sujeto no tiene el concepto o que se incurrió en un falso positivo. Sin embargo, el investigador no puede saber cuándo está incurriendo en uno de los dos errores de diagnóstico.

Uno de los pocos autores que consideran este problema es Brainerd (1981, pág. 465), quien dice que para conocer la probabilidad de una respuesta correcta hay que tener en cuenta tres probabilidades: que el sujeto tenga el concepto (a), la de falso negativo (b) y la de falso positivo (c). La observación de Brainerd se puede traducir al siguiente esquema:

	EL SUJETO TIENE EL CONCEPTO (a)	EL SUJETO NO TIENE EL CONCEPTO
Respuesta correcta	no falso negativo	FALSO POSITIVO (c)
Respuesta incorrecta	FALSO NEGATIVO (b)	no falso positivo

A la luz de esta observación, Brainerd agrega que uno de los problemas de Piaget es que, por ser demasiado estricto o conser-

27. Como ya lo he comentado, la diferencia no es metodológica sino conceptual: depende de cómo se defina la posesión del concepto de probabilidad.



vador, corre el riesgo de tener altos niveles de falsos negativos. Yo agregaría que otros investigadores como Fischbein, por ser demasiado laxos o liberales, corren en riesgo de tener altos niveles de falsos positivos.

Otros autores que abordan el problema son Kahneman y Tversky, quienes afirman que:

«no toda respuesta que parece contradecir un hecho establecido o una regla aceptada es un error de juicio. La contradicción también podría surgir de una comprensión equivocada de la pregunta por parte del sujeto o de una interpretación equivocada de la respuesta por parte del investigador [...] El estudioso del juicio debe evitar tanto las interpretaciones demasiado estrictas, que tachan a respuestas razonables de errores, como las demasiado caritativas, que tratan de racionalizar cada respuesta». (Kahneman y Tversky, 1982, pág. 493)

#### 1.5.4. VARIABLES INDEPENDIENTES

En este apartado revisaré muy brevemente algunas de las variables que los investigadores que he revisado consideran en sus estudios.

##### a) Sexo

En general, los investigadores que comparan los resultados entre hombres y mujeres no reportan diferencias entre unos y otras, ni entre niños (Fischbein et al., 1970), ni entre universitarios (Lecoutre y Durand, 1988), aunque no deja de llamar la atención que en su estudio con miles de alumnos británicos de 11 a 16 años, Green (1983, pág. 40) haya observado mejores resultados en niños que en niñas.

##### b) Edad

Son muchos los autores que, con uno u otro enfoque, ven el efecto de la edad en los resultados alcanzados en problemas probabilísticos. Muchas de estas investigaciones abarcan las edades de la infancia (Falk et al., 1980; Brainerd, 1981) o de la infancia y la adolescencia (Piaget e Inhelder, 1951; John Cohen, 1957b; Fischbein et al., 1970; Hoemann y Ross, 1971; Noelting, 1980; Fischbein y Gazit, 1984). Por otra parte, hay algunos trabajos enfocados a la adolescencia (Fischbein et al., 1971; Kahneman y Tversky, 1972; Shaughnessy, 1977; Alarcón, 1982; Green, 1983; Maury, 1984; Ojeda, 1987); entre ellos, unos cuantos estudios abarcan también a estudiantes universitarios (Maury, 1986; Lecoutre y Durand, 1988; Zaki, 1990). Finalmente, el equipo de Long en Canadá trabaja con el nivel de las operaciones formales en adultos (Akerman, 1980; Long et al., 1980; Long,

1980; McCrary y Long, 1980; Long y Mirza, 1980; Rehmann, 1980; Thibodeau, 1980), pero solamente Kahneman y Tversky trabajan sistemáticamente las respuestas de adultos (universitarios o no) a problemas probabilísticos (Kahneman y Tversky, 1972, 1982; Tversky y Kahneman, 1974, 1982a).

Todas estas investigaciones son poco comparables entre sí porque no están realizadas con el mismo marco teórico. Hay muy pocas investigaciones que analicen, desde una misma perspectiva teórica, los resultados obtenidos por sujetos de un rango amplio de edades. En general, sin embargo, se puede decir que muchas de las investigaciones encuentran mejores resultados en las respuestas a problemas probabilísticos a medida que aumenta la edad de los sujetos, sobre todo en rangos grandes de edad, por lo menos hasta los estudiantes universitarios (Piaget e Inhelder, 1951; Fischbein et al., 1970; Hoemann y Ross, 1971; Falk et al., 1980; Alarcón, 1982; Green, 1983; etc.), con la excepción de los resultados que tienen que ver con la acción de la intuición, donde parece encontrarse la relación inversa en niños con varios años de escolaridad (Fischbein, 1975). Sin embargo, no hay ningún acuerdo ni en el rango de edades ni en el rango de resultados en que es válida la afirmación "a mayor edad, mejores resultados".

En el otro extremo, quienes buscan resultados correctos (es decir, concordantes con la probabilidad formal) los han buscado a edades crecientes y en todas las edades estudiadas han encontrado sujetos que no alcanzan el mejor resultado posible. Uno de los estudios notables en este sentido es el de Green (1983), realizado con casi 3000 alumnos de 11 a 16 años. Ante problemas de dos variables con o sin proporcionalidad, en la clasificación piagetiana, Maury (1986, págs. 29 a 36) reporta que Nassefat encontró 30% de respuestas correctas entre niños de 13 años, Longeot 25% en niños de 15 años, y ella misma 60% en estudiantes de 19 años.

Más bien, lo que puede decirse a nivel general es que faltan estudios de respuestas a problemas probabilísticos de adolescentes tardíos, adultos jóvenes y adultos en general.

### c) Nivel escolar y variables relacionadas

McCrary y Long (1980) reportan una discusión acerca de la relación entre el nivel escolar y el hecho de alcanzar el nivel de las operaciones formales. En resumen, no hay nada concluyente; sólo una tendencia a observar alguna correlación entre logros en las pruebas relacionadas con las operaciones formales y años de escolaridad o nivel educativo. En parte, la ambigüedad de estas observaciones está relacionada con la ambigüedad en el término educación o escolaridad; se necesita especificar además la naturaleza de la experiencia educativa.

Maury (1986) está entre quienes encuentran diferencias en las respuestas a las preguntas probabilísticas de decisión binaria que ella plantea; estas diferencias radican más en el tipo de justificaciones que en los niveles de rendimiento.

En otros estudios se busca una correlación, no con el nivel educativo general, sino con la habilidad matemática. Fischbein et al. (1971) la encuentran, aunque no significativamente. Por otra parte, Lecoutre y Durand (1988) no encuentran una correlación

fuerte, por lo menos en lo que respecta a la frecuencia de respuestas incorrectas del tipo "da igual".

Otra variable, a su vez relacionada con las anteriores, es el nivel intelectual. Green (1983) trabajó con esta variable (medida con una prueba general de matemáticas) en alumnos de 11 a 16 años, y encontró mejores resultados con mejor que con peor nivel intelectual.

#### d) Cultura

Una gran cantidad de los estudios que he ido mencionando están realizados en una diversidad de países y culturas. Aparte de las muchas investigaciones realizadas en los Estados Unidos de Norteamérica, también las hay realizadas con sujetos canadienses (Noelting, 1980; así como todos los trabajos del grupo de Long, 1980), ingleses (Green, 1983), suizos (Piaget e Inhelder, 1951), rumanos (Fischbein et al., 1970), franceses (Maury, 1984, 1986; Lecoutre, 1984; Lecoutre y Durand, 1988; Zaki, 1990), israelíes (Kahneman y Tversky, 1972), y hasta hijos de inmigrantes españoles en Francia (Alarcón, 1982). Sin embargo, éstos no son estudios trans-culturales, por lo que no se pueden establecer a partir de ellos conclusiones acerca de las diferencias asociadas con la cultura en las respuestas a problemas probabilísticos (podría incluso cuestionarse si los estudios son comparables, por estar realizados en culturas distintas).

Hay pocos estudios realizados trans-culturalmente, y ninguno, a mi entender, en problemas probabilísticos. Kishta (1979) hace una comparación entre dos estudios realizados por él mismo sobre razonamiento proporcional y combinatorio: uno en EEUU y otro en Jordania. Encontró mejores resultados en los urbanos que en los rurales, pero no encontró diferencias sistemáticas entre los norteamericanos y los jordanos. Rehmann señala que «hay grandes diferencias en el desarrollo cognitivo entre sociedades industrializadas y no industrializadas» (Rehmann, 1980, pág. 45).

De particular interés para este trabajo son las comparaciones establecidas entre sujetos mexicanos y otros. Los únicos experimentos realizados en México acerca de respuestas a problemas probabilísticos de tipo piagetiano son los de Chalini (1979) y Lema y Morfín (1981), ambos planteados como la repetición de problemas planteados en el libro clásico de Piaget e Inhelder (1951) y ambos realizados en el marco de la Sección de Matemática Educativa del IPN. Una diferencia interesante entre ellos es el nivel socioeconómico de los sujetos: Chalini trabajó con niños de clase baja (en el barrio de la Merced), mientras que Lema y Morfín lo hicieron con niños de clase media alta (de la escuela Decroly y el Centro Activo Freire). A pesar de esas diferencias, ambos estudios coinciden en el siguiente resultado general: encuentran los mismos estadios descritos por Piaget e Inhelder para los problemas planteados, pero con un desfase de edades.

Es también interesante el trabajo de Ojeda (1987) con estudiantes del nivel medio superior en México, donde ella afirma que «no es posible garantizar que al finalizar el nivel medio superior, el estudiante haya adquirido una cultura básica en los conceptos de Probabilidad y Estadística».

### e) Otras variables

En estudios intra-culturales acerca de las capacidades cognitivas, no hay evidencia clara acerca del efecto del medio socioeconómico (McCrary y Long, (1980).

Lecoutre (1984, 1988) estudió los efectos de la formación en probabilidad y la práctica de juegos de azar en estudiantes universitarios, y encontró resultados interesantes: mientras que la formación, por lo menos la no profunda, tiene un efecto negativo, la práctica de juegos de azar tiene un efecto positivo, sobre todo cuando es muy frecuente.

En su estudio acerca de las estrategias utilizadas por alumnos de preparatoria, Maury (1984, 1986) utiliza dos lenguajes distintos, el "común" y el "técnico", buscando interferencias entre los diferentes significados de un mismo término (en particular significados comunes y técnicos diferentes), lo que implicaría interferencias en el proceso de aprendizaje. Observa que el vocabulario tiene efecto en los resultados finales, pero no en el tipo de argumentaciones expuestas por los alumnos.

### 1.5.5. ESTUDIOS SOBRE PROBABILIDAD Y PROPORCIONALIDAD

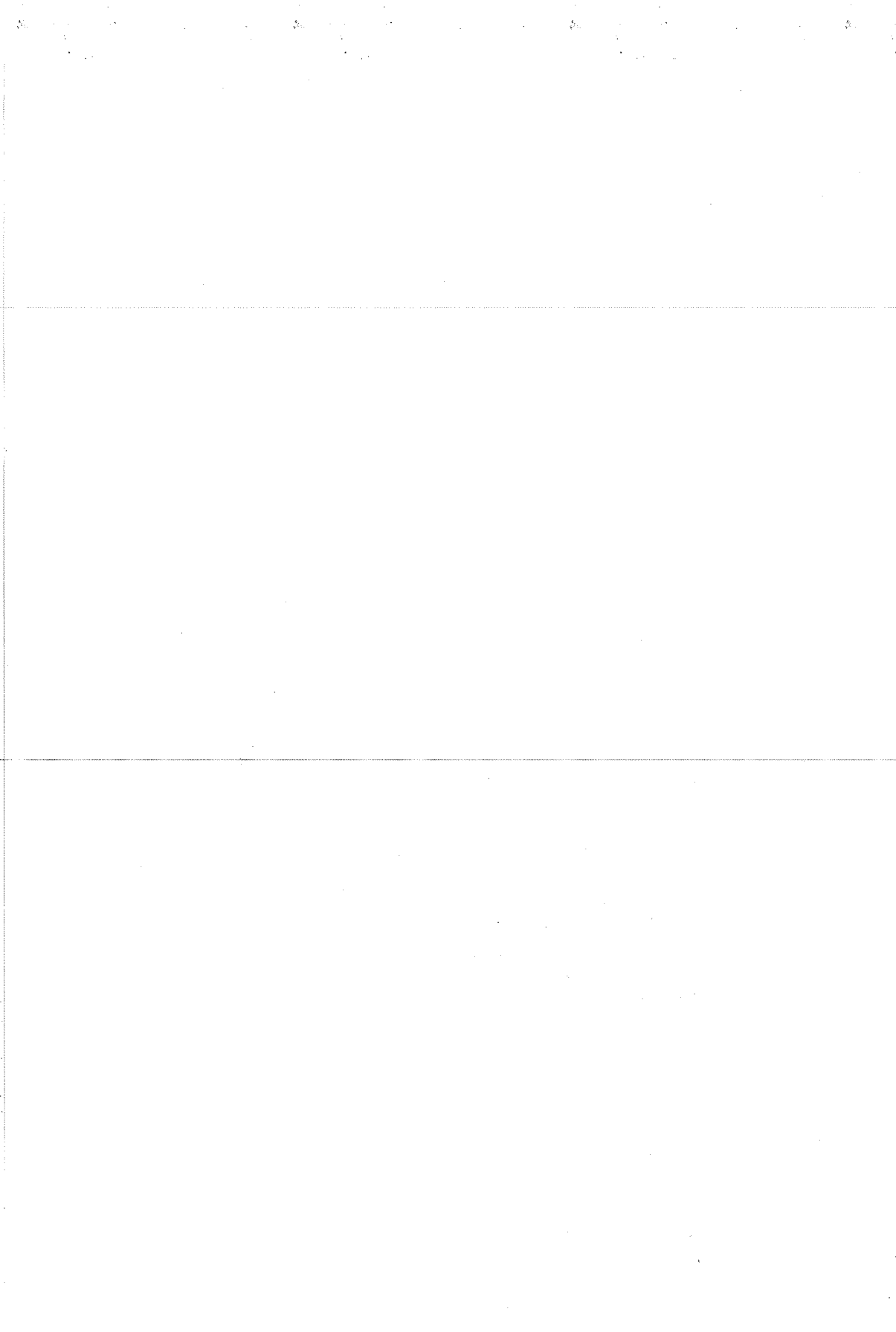
El concepto de probabilidad está íntimamente relacionado con el concepto de proporcionalidad. En parte, se puede decir que «la probabilidad se compone de dos subconceptos: el azar y la proporción» (Falk et al., 1980, pág. 183). Pero además ocurre que el concepto de probabilidad es muy difícilmente distinguible del de proporcionalidad. Por un lado, «la habilidad para calcular proporciones como tal no significa necesariamente una comprensión de la probabilidad» (*ibid*), y además «el hecho de que un sujeto llegue a los mejores resultados en proporcionalidad no implica necesariamente que mejoren sus resultados de juicios de probabilidad» (Hoemann y Ross, 1971, pág. 228). Por otro lado, cuando un sujeto responde correctamente a una pregunta de probabilidad, puede caer la duda de si los mecanismos que están entrando en acción son los relacionados con la probabilidad o los que implican exclusivamente la proporcionalidad.

Muchos investigadores han estudiado las respuestas de sujetos a problemas de proporcionalidad en los que no hay situaciones aleatorias involucradas, sino áreas, balanzas, sustancias químicas, péndulos, varillas, etc. (Lawson, 1979; Kishta, 1979; Thornton y Fuller, 1981; Wilkening y Anderson, 1982; Maloney, 1983); entre ellos destaca el estudio de Noelting (1980) con los problemas de jugo de naranja del que hablé anteriormente. Los resultados obtenidos por algunos de estos estudios son congruentes con los ya mencionados acerca de probabilidad.

Sin embargo, muy pocos esfuerzos se han realizado a nivel experimental para distinguir entre sí los conceptos de probabilidad y de proporcionalidad. El más conocido es tal vez el de Hoemann y Ross (1971), quienes intentaron discriminar un concepto de otro, mediante urnas y ruletas, en cuatro experimentos realizados con niños de 4 a 13 años. En los experimentos con una y dos rule-

tas, plantearon preguntas referentes exclusivamente al concepto de proporcionalidad y preguntas que implicaban también una situación aleatoria. Encontraron resultados similares en los planteamientos de proporcionalidad y probabilidad en el experimento con dos ruletas, pero en el de una ruleta encontraron para cada edad mejores resultados en proporcionalidad que en probabilidad. A pesar de que los experimentos muestran resultados muy interesantes, tienen desde mi punto de vista algunos errores de diseño que los acotan fuertemente: nunca se consideran por separado los errores específicos de proporcionalidad, que por otra parte se achacan a errores de cálculo y nunca de concepto; nunca se considera la posibilidad de que los niños estén operando por conteo, lo que en particular da "resultados correctos" cuando, como en el experimento con dos ruletas, hay el mismo número total de sectores en ambas ruletas; por último, introducen una recompensa en el planteamiento de probabilidad (un reconocimiento verbal cuando el resultado ocurre según lo predicho por el sujeto) pero no en el de proporcionalidad, lo que le resta comparabilidad.

Otro intento de distinguir entre sí los conceptos de proporcionalidad y de probabilidad fue realizado por Alarcón (1982, pág. 199), quien distingue entre tres tipos de razonamientos: el eventista, el probabilístico y el proporcional. La diferencia entre los dos primeros se puede ver ante una situación en la que se va a extraer una bola de una bolsa con cinco blancas y una negra: una persona con razonamiento eventista dirá algo del tipo "parece difícil sacar una negra de una bolsa con tantas blancas", y si se le pide que experimente para verificar su elección hará una sola extracción, mientras que una persona con razonamiento probabilístico dirá algo del tipo "si se hace un número suficiente de extracciones con reemplazo, en la mayoría de ellas saldrá blanca", y experimentará con muchas extracciones. La diferencia entre los dos últimos se puede ver en una situación *a posteriori* en la que se quiere saber de cuál de dos urnas se han hecho tres extracciones con reemplazo; las extracciones fueron dos bolas negras y una blanca, y una de las urnas tiene 12 negras y 1 blanca, mientras que la otra tiene 4 negras y 9 blancas: el razonamiento probabilístico, que utiliza combinatoria, da el mismo resultado para las dos urnas ( $432/2197$ ); mientras que el razonamiento proporcional encuentra que el resultado está más cerca de la primera urna porque compara  $2/3$  de la extracción contra  $12/13$  de una urna y contra  $4/13$  de la otra.



## 2. PANORAMA GENERAL DEL TRABAJO

En este capítulo haré una presentación general de la labor experimental que realicé: el problema abordado, sus objetivos e hipótesis, la sucesión de experimentos efectuados, la metodología. Sin embargo, antes de entrar en materia pueden ser pertinentes algunas observaciones acerca de la gestación del trabajo.

El interés inicial en el tema provino de la lectura de un capítulo del texto clásico de Piaget e Inhelder (1951): el de la (así llamada) "cuantificación" de las probabilidades. Surgió de inmediato el interés por ver las respuestas de adultos jóvenes mexicanos a las preguntas que, según afirman Piaget e Inhelder en ese texto, pueden resolver los adolescentes del estadio de las operaciones formales. Claro está, no se trataba de un interés proveniente de especulaciones teóricas, sino surgido de varios años de práctica docente con la probabilidad y la estadística a nivel universitario.

A partir de ahí empecé a realizar experimentos y observaciones, reflexioné sobre las formas experimentales y los modelos que podría utilizar, planteé nuevos experimentos, discuti y analicé, y durante todo el tiempo estuve leyendo libros, artículos y reportes de investigación que enriquecían constantemente (y a veces complicaban notablemente) el panorama. Pero todo ello se fue entretejiendo: las preguntas iniciales, los experimentos mismos, las interpretaciones, las ideas, las lecturas, el proceso de construcción de los instrumentos. Las preguntas fueron variando y se fueron afinando a la par con las maneras de interpretar los resultados y con las hipótesis acerca de los mecanismos que entran en juego.

Este entretejido ocurre en cualquier estudio de tipo experimental; ocurre tanto más, cuanto más inexplorado sea el terreno que se pisa. Eso fue precisamente lo que ocurrió en mi caso: las estrategias que utilizan sujetos adultos jóvenes para resolver problemas probabilísticos clásicos es un área muy poco estudiada hasta la fecha. No había, pues, modelos que seguir, caminos prefabricados que recorrer, sino que me ví en el caso de quien, tanteando, "se hace camino al andar".

Por ello, me ha parecido importante hacer aquí un recuento de esos tanteos: después de una primera sección de presentación del problema, hago una historia de los experimentos realizados. Dedicaré la última sección a la parte metodológica del entretejido mencionado.

En este panorama general correré el riesgo de ser repetitiva: mucho de lo que mencione en este capítulo lo volveré a comentar en los de la segunda parte. Esto se debe a que me ha parecido importante partir de una perspectiva global para después ir, poco a poco, analizando los hilos que componen el entretejido. Así, cuando haga esto, se sabrá cada vez qué función tiene en el todo el hilo de que se trate y podré abordar sus aspectos más técnicos e incorporar las categorías conceptuales construidas previamente.

## 2.1. PRESENTACION DEL PROBLEMA

En esta sección presentaré los objetivos que persiguió este estudio, así como la forma experimental, común a todos los experimentos realizados, que elegí para ello.

### 2.1.1. OBJETIVOS

Este trabajo se planteó como objetivo principal indagar qué respuestas dan los estudiantes universitarios mexicanos a problemas probabilísticos de corte clásico. Como conjetura inicial, planteé que estos sujetos no pueden resolver los problemas que pueden resolver los adolescentes al final del estadio de las operaciones formales, según Piaget e Inhelder (1951) en su estudio clásico efectuado con escolares suizos.

De verificarse esta suposición inicial, el objetivo era indagar las estrategias que utilizan estos sujetos en sus respuestas intuitivas a problemas probabilísticos de corte clásico, y si estas estrategias varían según el tipo de problema que se les planteó.

Otro objetivo que planteé fue el de construir la metodología adecuada para la indagación mencionada, cuando no fuera posible utilizar la metodología utilizada por otros autores en trabajos similares a éste o cuando no la hubiera.

Por último, un objetivo de interés secundario era el de proporcionar elementos para abrir una línea de investigación sobre las posibles aplicaciones didácticas de la indagación emprendida.

Una aclaración es pertinente: en general, cuando hable de probabilidad me estaré refiriendo al concepto según su definición clásica. Sólo cuando me refiera a otra de sus modalidades lo indicaré explícitamente.

### 2.1.2. FORMA EXPERIMENTAL ELEGIDA

Para cubrir el objetivo planteado, debí elegir un género clásico de problemas probabilísticos. Elegí el modelo de urnas "abiertas": colecciones visibles de objetos de dos tipos, uno de los cuales se presenta como deseable. El planteamiento involucrado es el de decisión entre dos urnas con extracción simple: el sujeto debe elegir de cuál de dos urnas tomará, al azar, uno solo de los objetos que contiene. Esta decisión se realiza en modo de previsión, a priori: el sujeto debe tomar una decisión sobre la extracción, sin efectuarla.

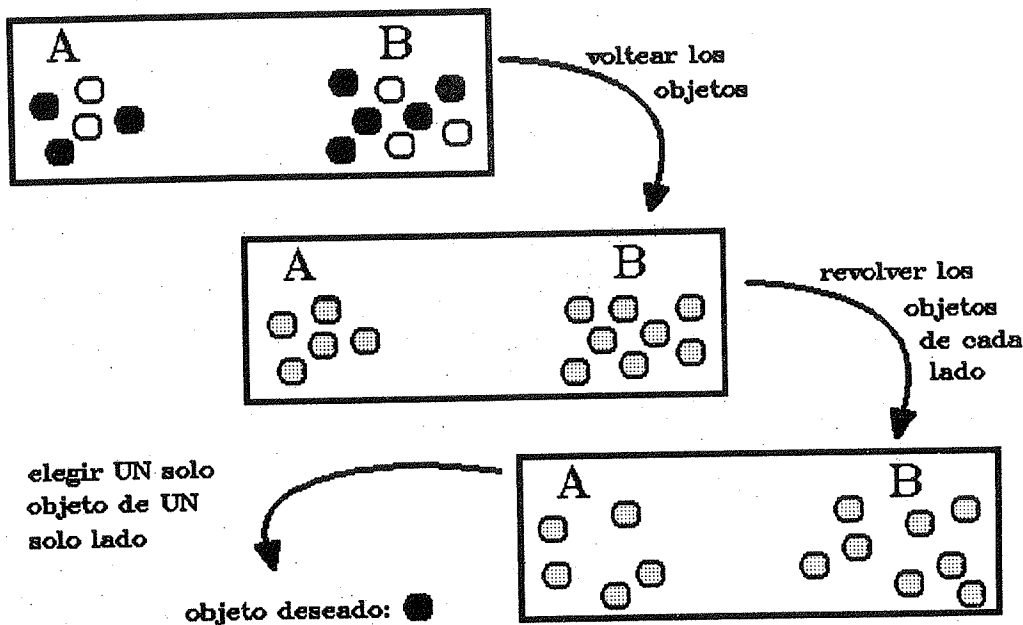
En resumen, el planteamiento de base utilizado en la mayor parte de este estudio es el de decisión binaria clásica en modo



de previsión (a priori), correspondiente al modelo de urnas "abiertas" con extracción simple.

La elección de esta forma experimental obedece a varias razones. Por una parte, de los modelos revisados es el que mejor permite hacer planteamientos relacionados con el concepto mismo de probabilidad. Las extracciones múltiples, las decisiones a posteriori, los dados y los volados permiten jugar con eventos conjuntivos y disyuntivos y con probabilidades condicionales, pero antes de entrar a estos conceptos más sofisticados importa tener una mejor imagen de lo que ocurre con los conceptos más básicos. Por otra parte, el modelo de decisión binaria es el modelo utilizado en el texto clásico del tema (Piaget e Inhelder, 1951); finalmente, su utilización permite una comparación al menos de tipo cualitativo con los hallazgos reportados por otros autores.

La forma general utilizada fue la siguiente.



A cada sujeto (1) le planteé varias preguntas. En cada pregunta le presentaba dos colecciones, ambas con objetos similares de dos tipos (en general dos colores) en cantidades diferentes (2). Cada colección aparecía en un lado distinto del lugar de trabajo (por lo que se hablaba de los lados A y B), y la composición de cada colección variaba de pregunta en pregunta. Una vez que el sujeto había observado con cuidado el contenido de las colecciones, cada una de ellas era revuelta por separado, y el sujeto ya no podía distinguir de qué tipo era cada objeto: sólo sabía cuántos objetos de cada tipo había en cada lado, pero no podía reconocer cuáles objetos eran de cada tipo. Se decía que podría extraer uno de los objetos, y se planteaba como deseable que el resultado de la extracción fuera un objeto de uno de los dos tipos (uno de los dos colores), para lo cual se suponía que ese tipo o color llevaba un premio.

Yo le decía entonces al sujeto que podría hacer una sola extracción de una sola colección, y le pedía que decidiera de cuál de las dos colecciones haría la extracción si ésta fuera a realizarse efectivamente; el sujeto debía expresar su decisión como una elección de una de las siguientes formas:

elijo del lado A  
 elijo del lado B  
 me da igual.

En distintos experimentos utilicé diferentes materiales de referencia para los objetos que componían las urnas: en unos hablaba de barajas, cartas o tarjetas de dos colores puestos en lados diferentes; en otros hablé del modelo más clásico de canicas de dos colores metidas en bolsas. En todos los casos el planteamiento fue teórico (verbal o escrito), pero en el caso de tarjetas hubo ocasiones en las que se manejó un material fabricado ex profeso (y a veces les permití a los sujetos experimentar con el material).

En la parte final del último experimento realizado para este estudio introduje una pequeña variación a este planteamiento de base, que expondré en su momento (pág. 97).

## 2.2. BREVE HISTORIA DEL TRABAJO EXPERIMENTAL

El trabajo experimental que acompañó a este estudio se desarrolló a lo largo de varias líneas de interés metodológico, que

1. Usaré el término "sujeto" en masculino, aunque la mayoría de los sujetos con los que trabajé sean mujeres, porque así lo indica el diccionario, y porque el uso del neutro "le sujete" desgraciadamente dificultaría la lectura. El sexismo está en la lengua, no en mi intención. También hablaré de "sujeto" en singular en el caso de los equipos del cuarto experimento.
2. Para utilizar una terminología más precisa, cada colección de objetos era una urna abierta.

plantearé en la segunda parte del documento. Sin embargo, antes de abordarlas, conviene presentar de manera muy global la historia de los experimentos realizados, lo que permitirá aclarar el origen de las líneas mencionadas.

Reportaré aquí cinco experimentos realizados entre 1988 y 1992 con estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional. Estos estudiantes cursaban materias de los primeros tres semestres de alguna de las carreras humanísticas y administrativas que imparte esta Universidad (3). En los primeros dos experimentos, que se pueden considerar como una especie de estudios exploratorios, apliqué cuestionarios por escrito a grupos enteros de estudiantes. Los resultados de ellos dieron pie para la formulación del cuestionario utilizado en los experimentos tercero (entrevistas de tipo clínico 4) y cuarto (resolución del cuestionario en equipos de trabajo en una situación didáctica). En el quinto y último experimento utilicé una versión refinada del cuestionario, en entrevistas de tipo clínico.

En esta sección describiré las características generales de los cinco experimentos. Para cada uno, resaltaré los siguientes aspectos: la problemática que intentaba resolver, la forma general de la experimentación realizada y los resultados obtenidos, en términos de las enseñanzas que sirvieron para la realización de los siguientes experimentos.

- 
3. No hay, a mi entender, un estudio sobre las características socio-económico-culturales de la población estudiantil de la UPN más reciente que el que realizaron Emmerich et al. (1986) sobre los egresados de la UPN, estudio que desgraciadamente resulta anacrónico ahora porque la Universidad ya no recibe el alto porcentaje de egresados de las escuelas normales (52%) que recibía en ese momento. Los estudiantes de 1988 a 1992 provenían esencialmente del Colegio de Bachilleres y de otros sistemas de Educación Media Superior, generalmente no de instituciones particulares. El nivel académico solía ser bajo, sobre todo en matemáticas y español. Las carreras que estudiaban eran: Psicología Educativa, Administración Educativa, Pedagogía, Educación Indígena y Sociología. A partir de la experiencia personal y de otros colegas, profesores de las materias de Estadística de alumnos de todas las carreras en sus primeros semestres, existe la impresión general de que no hay diferencias significativas entre ellos, ni a nivel de la Estadística y las Matemáticas, ni a nivel de las capacidades de lectura y de expresión verbal o escrita, con la posible excepción de los estudiantes de la carrera de Educación Indígena.
4. Las entrevistas de tipo clínico o clínico-crítico corresponden al método piagetiano del mismo nombre al que me referí en el capítulo 1 (§1.5.2.2).

### 2.2.1. PRIMER EXPERIMENTO: INDAGACIONES INICIALES

Para tener un acercamiento inicial al problema, diseñé el primer cuestionario (C1), con dieciseis preguntas. Como referente, pensé en utilizar un material que de alguna manera resultara familiar para los sujetos, y elegí naipes.

#### 2.2.1.1. PROBLEMÁTICA

El objetivo del primer experimento era ver si los estudiantes de la población de interés respondían correctamente a las preguntas piagetianas. Diseñé el cuestionario directamente a partir de las preguntas específicas reportadas por Piaget e Inhelder (1951) y agregando algunas preguntas similares de acuerdo con las diez categorías planteadas por ellos (doble imposibilidad, doble certeza, certeza-imposibilidad, posibilidad-certeza, posibilidad-imposibilidad, composiciones idénticas, proporcionalidad, desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles, igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles, y desigualdades respectivas de los casos favorables y de los casos posibles, sin proporcionalidad: ver en el capítulo 1 el §1.5.1.1).

#### 2.2.1.2. EXPERIMENTACIÓN

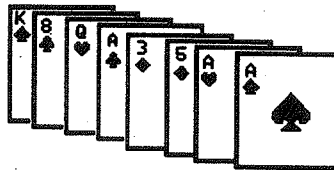
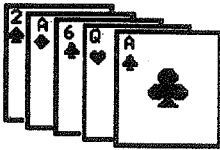
El cuestionario C1 fue planteado a un grupo de la materia Estadística I <sup>(5)</sup>, en dos etapas.

En la primera etapa el cuestionario fue aplicado de la siguiente manera: les presenté a los alumnos dos juegos gemelos de barajas de tipo americano, de reversos uno azul y otro verde, y para cada una de las dieciseis preguntas representé los dos conjuntos como "manos" de barajas, tomando para los elementos favorables la carta "As" y para los desfavorables todas las cartas diferentes del As (ver el ejemplo de la siguiente figura, en el que las cartas azules tienen dos elementos favorables y tres desfavorables, y las verdes tienen tres favorables y cinco desfavorables).

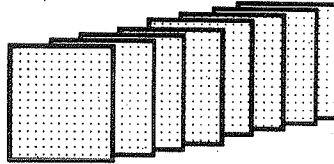
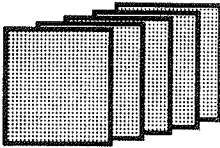
Cada vez mostré las dos "manos" o conjuntos de barajas por el anverso, luego los volteé y revolví por separado; la interrogante era: "Si quieres sacar un As, de qué color escoges tu carta: azul, verde, ninguno de los dos, o da igual?". Los estudiantes debían reportar por escrito su elección y la razón de ella en un par de renglones. Cuando habían terminado les planteaba otra pregunta con otra composición de barajas en cada "mano" y se repetía todo el procedimiento. Al final recogí las hojas de respuesta y no se hicieron comentarios.

---

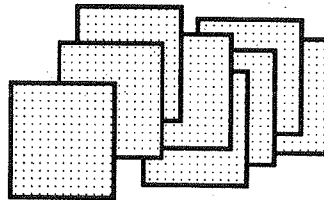
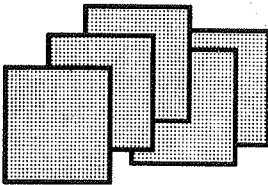
5. Cursaban el tercer semestre de la carrera de Administración Educativa (plan 79).



azules



verdes



Esta primera aplicación del cuestionario se realizó justo antes de entrar a la Unidad de Probabilidad, en la que se hace un acercamiento frecuencial al tema.

La segunda etapa consistió en volver a aplicar el cuestionario después de terminar la Unidad. En esta segunda aplicación repetí el experimento de manera similar pero con dos diferencias: cambié el orden de las dieciséis preguntas (en particular porque la primera pregunta causaba confusión por ser demasiado sencilla) y en vez de mostrar las barajas escribí en el pizarrón las "manos" o conjuntos que había que comparar. Una reproducción del aspecto que presentaba el pizarrón se reproduce en el Anexo 3.

En la primera etapa participaron treinta y un estudiantes, y en la segunda dieciocho; quince de los sujetos participaron en ambas partes (6). Para la interpretación y el análisis de los resultados me referiré a las preguntas de la primera etapa con los números 1 a 16 y a las de la segunda con los números 17 a 32; de este modo cada una de las preguntas 1 a 16 tiene un duplicado en

6. En ambos casos hubo estudiantes que llegaron tarde y no respondieron a las primeras preguntas. Uno de los sujetos (Pa1) repitió el curso y participó también en el segundo experimento (denominado ahí Pa2).

las preguntas 17 a 32, pero los duplicados aparecen en orden diferente al de la serie inicial.

Así, en este primer experimento se tuvo lo siguiente:

elementos favorables:	"As"
elementos desfavorables:	"no As"
lado A:	"color azul"
lado B:	"color verde".

Representaré a los sujetos que participaron en este experimento por tres caracteres (Agu, Ale, etc.); la transcripción de sus respuestas se encuentra en el Anexo 5.

### 2.2.1.3. RESULTADOS

Los resultados más notables de este primer experimento fueron los siguientes:

- Como sospechaba, no hubo una respuesta correcta masiva a los problemas, salvo, tal vez, los más sencillos de comparación de dos casos imposibles.
- A los alumnos les desconcertaban mucho las preguntas con certezas y con imposibilidades; lo mismo ocurrió con la pregunta de identidad. Cabe la hipótesis de que el desconcierto se debía a que no esperaban que se les plantearan preguntas tan obvias (7).
- El material utilizado como referente no resultó tan conocido para los alumnos como yo esperaba: hubo que presentarlo con cuidado y aún así algunos alumnos entendieron el planteamiento sólo después de que se plantearan varias preguntas; para algunos representó una dificultad la variedad de barajas distintas para los casos desfavorables (2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K) contra la unicidad de los favorables (A) (8).
- Una gran cantidad de las respuestas no pudo ser interpretada, porque la redacción no dejaba claro cómo estaba procediendo el sujeto para llegar a su elección. De éstas, la mayoría de los sujetos se limitaban a describir lo que veían en ambos lados; otros, aunque expresaban algunas comparaciones, dejaban oscura la estrategia seguida.

7. Lema y Morfín (1981, pág. 169) reportan que la primera pregunta que plantearon (de doble certeza) causó a los sujetos este mismo desconcierto, por lo que la cambiaron al tercer lugar.

8. Este desconocimiento del material resultó particularmente notorio con muchas de las estudiantes mujeres, para quienes el ejercicio significó el primer contacto de la vida con naipes de cualquier especie. Varias de ellas mostraron inclusive un cierto desconcierto y hasta escándalo de que en una "clase seria" de la Universidad se "jugara" con objetos asociados a modos reprobables de vida.

- En la mayoría de los alumnos no hubo diferencias notables entre los razonamientos utilizados en la primera y la segunda etapa (no las esperaba, por cierto, dado que el tipo de acercamiento al tema no promueve la reflexión acerca de la relación entre casos favorables y posibles). Tres alumnos le imprimieron a sus expresiones en la segunda etapa una sofisticación que no tenían en la primera, haciendo gala de términos como "evento", "evento vacío" y "probabilidad total" que no fueron utilizados por ellos en la primera etapa ni por otros sujetos de los experimentos subsiguientes. Sin embargo, esta sofisticación fue sólo en la terminología utilizada, no en los razonamientos seguidos.
- En muchas ocasiones, los sujetos respondieron de manera diferente a las preguntas de la primera etapa y a sus duplicados de la segunda etapa.
- También hubo diferencias en las respuestas de algunos sujetos a las preguntas que se habían planteado como similares de acuerdo con las diez categorías piagetianas, incluso a las de la misma etapa.

### 2.2.2. SEGUNDO EXPERIMENTO: BUSQUEDA METODOLOGICA

El segundo experimento fue similar al primero, tanto con respecto al cuestionario (C2) utilizado como a las condiciones generales de realización. Las diferencias significaron principalmente una búsqueda metodológica en tres direcciones.

#### 2.2.2.1. PROBLEMÁTICA

El experimento tenía la finalidad de observar con detalle tres aspectos: por una parte, la consistencia individual de las respuestas; por otra, las diferencias entre la calidad de la información proporcionada por escrito y lo que pudieran expresar verbalmente; finalmente, la posibilidad de una explotación didáctica.

El primer aspecto obedece a la duda que quedó después del primer experimento con respecto a las respuestas diferentes de muchos individuos ante las preguntas duplicadas y similares que había planteado. Como señalé, algunas de estas diferencias podían deberse al tiempo transcurrido entre una etapa y otra del primer experimento. Por eso importaba ahora ver con detalle si había mayor consistencia en las respuestas de los individuos sin el efecto del tiempo transcurrido, es decir, si los individuos respondían de la misma manera ante la misma pregunta planteada varias veces. Para ello marqué dos niveles distintos en los que se podría buscar una consistencia individual: el primer nivel es el de las preguntas duplicadas, es decir de dos versiones idénticas de una misma pregunta; el segundo nivel es el de preguntas diferentes pero que pertenecen a la misma situación (según la clasifica-

ción piagetiana de diez categorías): a estas preguntas las llamaré similares.

Así, para cubrir el aspecto de la consistencia individual, el cuestionario C2 tuvo las siguientes modificaciones con respecto al cuestionario C1: planteé dos veces una misma pregunta de manera idéntica, y planteé varias preguntas similares en cinco de las situaciones piagetianas (entre dos y cuatro preguntas para cada situación). Por lo demás, C2 fue básicamente una repetición de C1.

Para la observación del segundo aspecto (las diferencias entre la información proporcionada por escrito y verbalmente), inmediatamente después de la aplicación del cuestionario por escrito, procedí a una discusión de las preguntas que habían quedado descritas en el pizarrón, en equipos de cuatro a seis integrantes.

El tercer aspecto (la posibilidad de una explotación didáctica) fue abordado a través de esta misma discusión de equipos y a través de la puesta en común que llevé posteriormente a cabo ante todo el grupo: ambas sirvieron como recurso didáctico para tratar el tema de Probabilidad del curso.

#### 2.2.2.2. EXPERIMENTACION

Realicé el experimento con un grupo de dieciseis estudiantes de Estadística I <sup>(9)</sup>. El modo de aplicación de la primera fase (cuestionario escrito) fue similar al del primer experimento, con algunas diferencias: los casos favorables no estaban representados por la carta As sino por las cartas de color rojo, y los desfavorables por las de color negro; no hablé de mazos de dos colores sino, directamente en el pizarrón, de lados A y B, con las "manos" de cartas mostradas claramente en el lado respectivo; y apliqué el cuestionario en una sola ocasión, antes de empezar la Unidad de Probabilidad. Los sujetos debían reportar por escrito su elección y la razón de ella, y les pedí que no hicieran meramente una descripción de las cantidades de cartas rojas y negras sino que explicaran qué relaciones entre esas cantidades eran las que los habían llevado a la decisión.

En la segunda fase (discusión por equipos) la consigna era llegar entre todos a un acuerdo acerca de cómo resolver los problemas; yo me estuve moviendo de un equipo a otro, sin contestar preguntas más que con otras preguntas y planteando eventualmente nuevos problemas. Por las características del modo en que realicé la aplicación, no hay registro de esta segunda fase, más que las impresiones que recogí al final de la sesión.

Así, en el segundo experimento se tuvo lo siguiente:

elementos favorables:	"roja"
elementos desfavorables:	"negra"
lado A:	"lado A"
lado B:	"lado B"

<sup>9</sup>. Era también un grupo de tercer semestre de la carrera de Administración Educativa (plan 79), diferente del grupo del primer experimento salvo por el sujeto Pa2 mencionado en nota previa.



La transcripción de las respuestas de los estudiantes (también representados por tres caracteres: ADR, ALS, etc.) se encuentra en el Anexo 5.

### 2.2.2.3. RESULTADOS

En este experimento confirmé las observaciones iniciales del primero, y además vi que:

- Aunque el planteamiento fue más comprensible que en el primer experimento, siguió representando dificultades para los alumnos inexpertos en el manejo de naipes <sup>(10)</sup>.
- Nuevamente hubo individuos que daban diferentes respuestas ante problemas idénticos y, sobre todo, ante problemas clasificados como similares de acuerdo a las categorías piagetianas.
- La indicación de no hacer una mera descripción no ayudó gran cosa a la claridad de las respuestas; en muchos casos el trabajo de interpretación se siguió topando con respuestas puramente descriptivas o sin elementos para su clasificación.
- Se presentaron algunas estrategias que no habían sido vistas en el primer experimento, de índole aparentemente primitiva <sup>(11)</sup>.
- Las argumentaciones esgrimidas por los alumnos en su conversación con sus compañeros eran mucho más ricas que las que habían expresado por escrito, como había sospechado.
- En la segunda fase, empezaron a resaltar algunas de las estrategias reportadas en este trabajo: algún alumno tachó por parejas rojos y negros de ambos lados para comparar los residuos (estrategia de resta); uno de los alumnos (Ram), maestro de primaria, les explicó a sus compañeros de equipo las soluciones correctas a través de argumentaciones con razonamiento proporcional; en muchos equipos la discusión se centraba en torno a la posibilidad en cada caso de ganar o perder (estrategias de equilibrio), etc.
- En repetidas ocasiones resultó evidente que los sujetos esgrimían simultáneamente estrategias o argumentos distintos para resolver un solo problema.
- La puesta en común al final de la sesión permitió ver que este tipo de ejercicios puede proporcionar un recurso didáctico de gran riqueza, que merece mayor explotación.

10. Por ejemplo, las respuestas de una alumna debieron ser eliminadas del estudio porque al final explicó que había tomado como "rojo" todas las barajas que contenían en algún lugar un poco de color rojo, y como "negro" todas las que contenían en algún lugar algo de color negro. En particular todas las llamadas "figuras" (J,Q,K) contaron para ella como de color rojo y también como de color negro. Solamente al final entendió que el dibujito de la esquina era el que señalaba el "color": rojo para corazones o diamantes, negro para tréboles o espadas.

11. Todas las estrategias que menciono en este capítulo serán explicadas con detalle en el capítulo 4.

### 2.2.3. TERCER EXPERIMENTO: CONSTRUCCION DE CATEGORIAS

Después de los primeros experimentos que, como he mencionado, se pueden considerar como estudios exploratorios, fue necesario poner al día los conocimientos adquiridos a través de ellos y construir un aparato más formal para continuar con la indagación.

#### 2.2.3.1. PROBLEMÁTICA

Los primeros experimentos permitieron corroborar la hipótesis inicial acerca de que hay estudiantes universitarios mexicanos que no resuelven correctamente el tipo de problemas planteados. Ahora traté de indagar qué estrategias estaban utilizando los sujetos para llegar a esas "incorrecciones". Para ello, era necesario contar con un sistema de clasificación de las estrategias utilizadas por los sujetos que considerara tanto las estrategias de centración consideradas por Piaget (centraciones en los casos totales, en los favorables, en los desfavorables) como las que había observado en los dos experimentos anteriores, en particular las de resta, las de proporcionalidad<sup>12</sup> y las de equilibrio. Además, era necesario que el sistema permitiera considerar no sólo cada estrategia de manera aislada sino también el uso simultáneo de dos o más estrategias.

Por otro lado, el hecho de que muchos de los sujetos resolvieran de manera distinta problemas que corresponden a la misma categoría (según la clasificación piagetiana), planteó el reto de buscar una nueva clasificación de los problemas, a la luz de la cual se pudiera encontrar una mayor consistencia en las estrategias seguidas por cada sujeto.

Empecé entonces un proceso paralelo de construcción de categorías en dos líneas: buscaba obtener, por un lado, una clasificación de las respuestas que pudieran dar los sujetos a las preguntas planteadas y, por otro, una clasificación de las preguntas que se pudieran plantear. La finalidad de este proceso paralelo era el poder plantear y resolver la siguiente interrogante: "¿qué tipo de respuestas se obtienen ante qué tipo de preguntas?".

El primer nivel al que debía plantear la interrogante era el nivel del individuo: "¿qué tipo de respuestas da un sujeto a qué tipo de preguntas?". Pero para resolver esta interrogante era imprescindible tomar en cuenta una consideración más: las dificultades observadas de los sujetos con el lenguaje, y sobre todo con el lenguaje escrito. Para superar este obstáculo se hizo evidente la necesidad de efectuar entrevistas de corte clínico-crítico que permitieran explorar a fondo los razonamientos de los sujetos. Consideré adecuado utilizar la modalidad de binomios, es decir realizar las entrevistas a parejas de estudiantes.

12. Tanto las estrategias de resta como las de proporcionalidad han sido reportadas también por los mismos Piaget e Inhelder (1951) y por otros autores: cf. Noelting (1980) y Maury (1986) entre otros.

Por otra parte, fue en este momento cuando empecé a considerar como hipótesis colateral la posibilidad de diseñar un cuestionario de tal modo que la sucesión de elecciones que hiciera un individuo permitiera detectar su(s) estrategia(s) de preferencia (13) e hiciera prescindibles sus justificaciones. Para que un cuestionario funcione de esa manera, se requiere no sólo que esté diseñado con cuidado, sino que cada sujeto sea consistente en su utilización de estrategia(s). En el tercer experimento procuré entonces ahondar también en la investigación acerca de la consistencia de los sujetos.

Una vez construidas las categorías buscadas para la clasificación de preguntas y de respuestas, diseñé el cuestionario C3 para su aplicación en entrevistas. Este diseño incorporó además los siguientes aspectos:

- Para poder llegar a un buen nivel de generalidad en la respuesta a la interrogante planteada, el cuestionario debía cubrir una gama lo más amplia posible de los diversos problemas comprendidos en la nueva clasificación.
- A partir de este experimento prescindí del uso de los naipes como referente, debido a los problemas de falta de familiaridad con el material encontrados en los estudios exploratorios. Consideré conveniente incorporar como variable experimental el referente: una parte del cuestionario se refería a tarjetas de dos colores que los sujetos podían manipular directamente o mediante una representación gráfica, mientras que la otra se refería a bolsas con canicas de dos colores solamente presentes en una representación gráfica (en la que las cantidades de canicas estaban representadas por numerales). Ejemplos de ambas representaciones se encuentran en las figuras de la pág. 92.
- Realicé una prueba de la presentación diagramática para el referente de tarjetas. Para ello, elaboré un pequeño instrumento de sondeo con tres preguntas planteadas de cuatro formas gráficas distintas, que apliqué a algunos estudiantes. El análisis de los resultados llevó a la elección de una de las cuatro formas gráficas (14), que fue la utilizada para el cuestionario C3.
- Otra variable incorporada fue el tamaño, es decir la magnitud de los casos totales: hasta ahora ningún conjunto había sido mayor de 9 y para este experimento decidí comparar lo que pasa con tamaños "chicos" y "grandes". Para acotar rangos en cada una de esas dos categorías, me decidí por números menores de 8 para la primera y entre 20 y 30 para la segunda. Fischbein et al. (1970) incorporan también esta variable, pero ellos manejan como "números chicos" los menores de 15. Al respecto me parece más interesante la clasificación de los números en cuatro "dominios" establecida por Ermel (1980) para los niños de preesco-

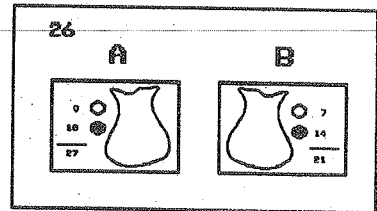
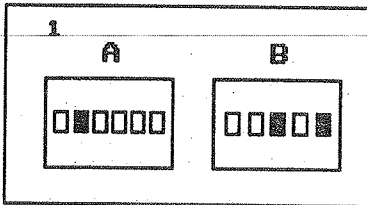
13. Esta hipótesis, que surgió inicialmente como colateral y luego adquirió una importancia mayor, será desarrollada más ampliamente en el capítulo 6.

14. Daré cuenta más detallada de esta prueba de la presentación diagramática en el capítulo 5 (§5.1.4).

lar: los números "visualizables" (hasta 4 ó 5, que permiten un reconocimiento rápido o global sin necesidad de recurrir al conteo), los "familiares" (hasta el 19, que tienen un uso social relativamente frecuente), los "frecuentados" (hasta 30 aproximadamente, donde los niños hacen sus primeras constataciones sobre las regularidades de la secuencia escrita de los números) y los "grandes" (mayores de 30). Para mi clasificación busqué que los números manejados como "pequeños" tuvieran la característica de los "visualizables" de ser reconocibles globalmente o con un conteo muy rápido; aunque se puede pensar que el rango de 4 ó 5 de estos números para los niños más pequeños se amplía para sujetos mayores, no es claro cuánto lo hace. Así, elegí el número 8 como máximo "pequeño" hipotetizando que éste es un número todavía "visualizable" para adultos jóvenes, pero además porque era el mínimo con que se podía obtener la variedad deseada de preguntas posibles. Por otro lado, para el rango de números "grandes" busqué números no "visualizables" ni demasiado "familiares" pero con los que los cálculos aritméticos resultaran relativamente simples para quien quisiera realizarlos incluso mentalmente.

- Incorporé también versiones duplicadas (idénticas) y similares de algunas de las preguntas, para seguir investigando acerca de la consistencia interna de los sujetos.

A continuación se muestran dos ejemplos de preguntas del cuestionario C3: la primera, con referente de tarjetas, y la número 26, con referente de bolsas de canicas:



### 2.2.3.2. EXPERIMENTACION

Apliqué el cuestionario C3 en dos entrevistas, realizadas ambas a parejas (binomios) de estudiantes que no habían cursado Estadística (<sup>15</sup>).

Para la aplicación de las primeras preguntas (con referente de tarjetas) contaba con las preguntas expresadas gráficamente en fichas de 5x8" (como las del modelo en la figura de la pág.

<sup>15</sup>. Cursaban el segundo semestre de la carrera de Psicología Educativa (plan 79).

92<sup>16</sup>). Además contaba con un material concreto consistente en tarjetas de 3x5" pintadas de blanco o negro en el anverso y rayadas en el reverso, que permitía reproducir las preguntas expresadas en las fichas con objetos manipulables y revolverlos, voltearlos etc. a voluntad; ocasionalmente, los sujetos no sólo reprodujeron las preguntas sino que efectuaron extracciones de manera experimental. Para la aplicación de la segunda parte (con referente de bolsas de canicas), contaba con las preguntas expresadas gráficamente en fichas del mismo tamaño (ver el modelo en la figura de la pág. 92).

La pregunta planteada cada vez era de qué lado escogía cada quien (A ó B ó "da igual"), sabiendo que si salía una tarjeta o una canica negra se ganaban un premio (un viaje hipotético), con la consigna de que si los dos miembros del binomio no estaban de acuerdo, tratarían de convencerse uno al otro.

Resumiendo, en el tercer experimento se tuvo:

elementos favorables:	"negra"
elementos desfavorables:	"blanca"
lado A:	"lado A"
lado B:	"lado B"

Realicé ambas entrevistas en un cubículo, en la presencia de dos observadoras. Representaré a los sujetos que participaron en este experimento M y J, y T y V; la transcripción de ambas entrevistas se encuentra en el Anexo 4.

### 2.2.3.3. RESULTADOS

Los principales aspectos que reveló este experimento fueron los siguientes:

- Aunque el cuestionario fue depurado de las preguntas de imposibilidad y certeza (sólo conservé una de cada una), algunas de las preguntas planteadas resultan sumamente sencillas y no aportan realmente información acerca de los mecanismos de resolución (<sup>17</sup>).
- La clasificación de situaciones diseñada permite efectivamente explicar las respuestas de los sujetos, de manera más completa de lo que se obtiene con la clasificación de Piaget.
- Aunque logré mayor consistencia con la nueva clasificación, encontré muchas respuestas distintas a preguntas que eran similares de acuerdo con la clasificación e incluso a preguntas idénticas.
- Observé todas las respuestas previstas en la clasificación; algunas de ellas parecían ser más dominantes que otras.
- Se volvieron a presentar respuestas primitivas, en particular ante la presencia de UN SOLO caso favorable.

16. La reproducción de todas las fichas del cuestionario C3 se encuentra al final del Anexo 3.

17. Esto era previsible a partir de la clasificación de situaciones; sin embargo no quise dar por sentado que la clasificación era correcta antes de someterla a prueba.

- Las primeras preguntas del cuestionario cumplen la función de "etapa de fogueo", en la que el sujeto va comprendiendo el planteamiento, aclarando dudas y explorando algunas estrategias.
- En algunas ocasiones, la forma de interrogación dio lugar al planteamiento de preguntas no previstas en el cuestionario que fueron dirigidas a "romper" estrategias inadecuadas.
- La formulación de la pregunta ("¿de qué lado escoges, para ganarte un premio?") es una presión en contra de la posibilidad de responder "me da igual".
- Detecté varios efectos de la interacción personal entre los dos integrantes de cada binomio, posiblemente debidos a que estaban constituidos por un hombre y una mujer (18).

#### 2.2.4. CUARTO EXPERIMENTO: UNA APLICACION DIDACTICA

En este experimento sustituí la intensa búsqueda metodológica del anterior por un intento de ahondar en varios de los cabos que habían quedado sueltos en los tres experimentos previos.

##### 2.2.4.1. PROBLEMÁTICA

Con este experimento perseguí los siguientes objetivos:

- Aplicar a más sujetos el cuestionario C3 o uno muy similar.
- Explorar más a fondo las posibilidades didácticas de la utilización de los cuestionarios que había empezado a explorar en la segunda fase del segundo experimento. Ahora decidí crear una situación didáctica de trabajo en equipos.
- Repetir una aplicación por escrito como las de los primeros dos experimentos, insistiéndoles a los sujetos en no describir las situaciones. Propuse una sola redacción por equipo.
- Indagar más acerca de la consistencia de sujetos y acerca de la posible mayor "fuerza" de unas estrategias que de otras. La finalidad de tener un solo reporte por equipo era ver si algunas de las estrategias dominaban a otras, es decir, si sus sustentantes convencían a los demás.

##### 2.2.4.2. EXPERIMENTACION

Para este experimento utilicé el cuestionario C4, que es una versión muy similar al C3 con la salvedad de que todas las preguntas se referían a tarjetas pero se plantearon con numerales (sin dibujos). El cuestionario fue planteado por escrito bajo la forma de ejercicio; di verbalmente la consigna ("Tienes unas tar-

18. Estos efectos serán tratados con mayor detalle en el capítulo 5.

jetas del lado A y unas del lado B; unas tienen una X y otras una O en el anverso, y todas son iguales por el reverso. De cada lado se voltean y se revuelven, y tú puedes sacar UNA sola tarjeta de UN solo lado; si tiene X te ganas un premio. ¿De cuál lado escoges: del A, del B, o te da igual?"

Apliqué este ejercicio a un grupo de estudiantes que cursaban la materia de Estadística Básica (19), y lo planteé como la entrada a la Unidad de Probabilidad. Contaban, para trabajar, con un material de apoyo que consistía en tarjetas cuadradas azules, en cuyo anverso unas tenían marcada una X y otras una O. Los estudiantes estaban organizados en seis equipos de unos tres integrantes, y les pedí que discutieran en el equipo cada una de las preguntas del cuestionario y cuando estuvieran de acuerdo escribieran de qué lado escogerían y por qué. Les insistí mucho en que no les pedía una descripción numérica sino una razón basada en las relaciones que hubieran discutido (es más: en tono de broma les "prohibí" el uso de números en las explicaciones); esto fue además complementado con constantes observaciones verbales mías.

El cuestionario C4 se reproduce en la parte final del Anexo 3.

Así, en el cuarto experimento se tuvo lo siguiente:

elementos favorables:	"X"
elementos desfavorables:	"O"
lado A:	"lado A"
lado B:	"lado B"

Los seis equipos de este experimento se denotarán Q1 hasta Q6, y sus respuestas se encuentran en el Anexo 5.

#### 2.2.4.3. RESULTADOS

Este experimento puso en evidencia, entre otros aspectos, lo siguiente:

- La principal riqueza observada desde el punto de vista didáctico fue la confrontación de las intuiciones de cada quien con las de los demás, lo que permitió que cada quien se aferrara menos a sus propias ideas previas. En ocasiones, la discusión realizada en cada equipo llevó a todos a utilizar las mismas estrategias parcial o totalmente correctas.
- Con la tenaz insistencia en que las respuestas no debían contener descripciones sino justificaciones, aunada a una supervisión constante y a indicaciones por parte mía, logré disminuir en gran medida el número de respuestas sin interpretación posible.
- Como lo sospechaba, algunas de las estrategias se presentaron más que otras en este tipo de aplicación, lo que es consistente con la hipótesis de que en la discusión de equipo sus sustentantes convencieron a los demás.

19. De primer semestre de la carrera de Psicología Educativa (plan 90).

- Nuevamente percibí inconsistencias, aunque ahora podían también deberse al hecho de que cada equipo estaba constituido por varios integrantes; en algunos equipos fue incluso evidente que no habían respetado la consigna de llegar a un acuerdo por medio de una discusión, sino que se fueron turnando las respuestas.
- Como corolario de los dos puntos recién mencionados, este experimento permitió conocer el resultado de alguna especie de interacción interpersonal, pero no las respuestas individuales ni el desarrollo de cada sujeto a lo largo del cuestionario, por lo que no se cubrió plenamente el objetivo de aplicar a más sujetos un cuestionario similar al C3.

### 2.2.5. QUINTO EXPERIMENTO: NUEVAS VARIABLES

El quinto experimento, último en realizarse para este trabajo, procuró resolver algunas de las interrogantes dejadas pendientes en los experimentos anteriores, así como afinar algunos de los métodos establecidos, tanto en la metodología de interrogación como en las categorías de preguntas y de respuestas. Para este experimento utilicé el cuestionario C6<sup>(20)</sup>, diseñado básicamente sobre el esquema del cuestionario C3, pero con algunos cambios.

#### 2.2.5.1. PROBLEMÁTICA

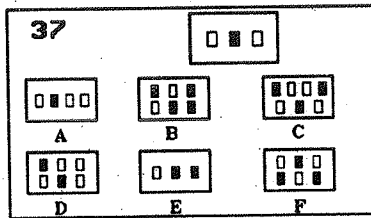
Con este experimento y el cuestionario en él aplicado intenté cubrir los siguientes objetivos:

- Prestar más atención a las categorías de preguntas que más respuestas diferentes habían recibido. A cambio de ello, no prestar tanta atención a las preguntas relacionadas con imposibilidades y certezas (salvo en la situación piagetiana de doble certeza, donde había observado diversidad de respuestas).
- Volver a plantear duplicados y similares, para la observación de la consistencia individual.
- Prestar particular atención a la observación de estrategias de carácter primitivo. En particular, plantear varias preguntas en las que hubiera un solo caso favorable.
- Repetir el modo de interrogación mediante entrevistas individuales de tipo clínico, con el doble fin de poder profundizar en la interpretación de las respuestas y de poder comparar la metodología en entrevistas individuales y de binomio. Además, como en el tercer experimento había detectado efectos de la interacción interpersonal entre hombres y mujeres de los binomios, importaba realizar al menos una entrevista con un binomio formado por dos personas del mismo sexo.

<sup>20</sup>. El cuestionario C5 se utilizó en un experimento no reportado en este trabajo.



- Intentar contrarrestar el efecto de presión en contra de la respuesta "me da igual", a través de un planteamiento distinto al de decisión (21). Para ello diseñé un planteamiento que denominé "de equiparación", en el que se plantea una colección de tarjetas o canicas que sirve "de referencia" y seis más a comparar (A, B, C, D, E, F) y se le pide al sujeto que identifique cuál (o cuáles) de las seis es (son) equivalente(s) a la de referencia: es decir, que dé igual escoger entre ellas y la de referencia. En la siguiente figura se reproduce una de las dos preguntas de equiparación con el referente de tarjetas; también planteé dos preguntas con el referente de canicas.



2.2.5.2. EXPERIMENTACION

Apliqué el cuestionario C6, en salas acondicionadas para grabación, a cinco estudiantes que no habían cursado Estadística (22): dos varones en entrevista de binomio y tres mujeres en entrevista individual (23). Para la realización contaba con un material similar a la del tercer experimento: el cuestionario puesto gráficamente en forma de fichas, y al alcance de la mano el material concreto de tarjetas pintadas de blanco o negro por el anverso y con el reverso blanco (con el que ocasionalmente experimentaron los sujetos). En una parte de las preguntas utilicé tarjetas como referente; en la segunda parte utilicé bolsas con canicas. La consigna, dada verbalmente, era similar a las anteriores (aquí hablé de un premio de un millón de dólares).

21. Una posibilidad para ello es la opción adoptada por Lema y Morfín (1981, pág. 170), quienes planteaban preguntas del siguiente estilo: "¿cuántos favorables hay que agregar a este conjunto para que (la probabilidad) sea igual que en el otro?". Sin embargo, este planteamiento puede sugerir ya la necesidad de un razonamiento proporcional, por lo que opté por otra forma.
22. Cursaban el segundo semestre de la carrera de Pedagogía (plan 90).
23. En el diseño inicial del experimento, contemplaba dos entrevistas individuales y dos de binomio, una a dos hombres y otra a dos mujeres; desgraciadamente en esta última no se presentó uno de los dos sujetos y entrevisté entonces de manera individual al otro (X).

Es decir, en el quinto experimento se tuvo lo mismo que en el tercero:

elementos favorables:	"negra"
elementos desfavorables:	"blanca"
lado A:	"lado A"
lado B:	"lado B"

Las fichas del cuestionario están reproducidas en la parte final del Anexo 3. Representaré a los dos sujetos que participaron en entrevista de binomio por W y Z, y a los tres sujetos entrevistados individualmente por O, I y X; las transcripciones de las entrevistas se encuentran en el Anexo 4.

### 2.2.5.3. RESULTADOS

Algunas de las más importantes enseñanzas extraídas del último experimento son las siguientes:

- Seguí observando inconsistencias en las respuestas de los individuos a preguntas similares e incluso, a veces, a preguntas idénticas. Con respecto a las similares, cabe la hipótesis de que a los ojos de un sujeto las preguntas catalogadas como "similares" no lo sean en absoluto, por la existencia de variables no previstas, en particular las relacionadas con la percepción global que tiene el sujeto de la pregunta. Esto dio pie a la consideración de nuevas variables <sup>(24)</sup>.
- Como había sospechado, encontré más respuestas primitivas, que dieron lugar a nuevas categorías en la clasificación de respuestas, las cuales a su vez permitieron la reinterpretación de muchas de las respuestas de los cuatro experimentos anteriores.
- Las preguntas de equiparación aparentemente revirtieron, como lo había hipotetizado, el efecto de presión en contra de la respuesta "me da igual", puesto que en ellas hubo muchas respuestas de ese estilo.
- La realización de las entrevistas individuales y de la de binomio con participantes del mismo sexo permitió hacer una comparación metodológica entre las diversas metodologías de interrogación.

24. Estas variables sólo se revelaron como posiblemente importantes al final del quinto experimento realizado, por lo que ya no fueron puestas a prueba de modo experimental. A pesar de ello, las incluiré en el capítulo 3 como parte del tratamiento de las variables de clasificación de las preguntas.

### 2.3. PLANTEAMIENTO METODOLOGICO

En la sección anterior expuse el desarrollo histórico de los cinco experimentos realizados, en el que busqué resaltar la sucesión de etapas de construcción de cuestionarios y de interpretación de respuestas. En esta sucesión se basa un complejo entretreído metodológico que intentaré describir en el primer apartado de esta sección. En el segundo apartado enunciaré específicamente las hipótesis que originaron este trabajo y las que fueron surgiendo a lo largo del proceso.

Con ello terminaré la primera parte del documento; la segunda se basará en el entretreído metodológico descrito en el primer apartado, y en la tercera trabajaré o concluiré acerca de las hipótesis recolectadas en el segundo apartado.

#### 2.3.1. ENTRELAZADO DE LAS LINEAS METODOLOGICAS

Mi principal finalidad era contestar una duda que pude haber planteado originalmente así: "¿Cómo responden los sujetos a diferentes preguntas?". Esta duda pasó después por formulaciones del siguiente estilo: "¿Qué tipo de respuestas da un sujeto a qué tipo de preguntas?"; "¿cómo interpretar las respuestas que dan los sujetos a preguntas de diferente tipo?". En su forma final, la duda es: "¿Qué estrategias de solución usan los sujetos en qué situaciones?"

Para contestar a esta pregunta se requiere tener dos sistemas de categorías: uno para las situaciones, a modo de "variable experimental", y uno para las estrategias, a modo de "variable de respuesta". El sistema de situaciones debe permitir plantear preguntas y conformar cuestionarios en los que el sujeto se enfrente a todas las posibilidades previstas, mientras que el sistema de estrategias debe permitir interpretar cualquier respuesta de cualquier sujeto a cualquiera de las preguntas planteadas.

Ambos sistemas son, pues, de índole diferente: uno plantea situaciones experimentales y el otro interpreta las respuestas a ellas; sin embargo, la construcción de cada uno de los sistemas está intrínsecamente ligada con la del otro. Para tener respuestas que interpretar hay que plantear preguntas, pero la construcción de las preguntas está guiada por las categorías con las que se pretende realizar la interpretación de las respuestas. Dicho de otro modo, para poder saber qué situaciones construir se necesita una previsión de algunas estrategias que puedan entrar en operación en ellas, pero para construir bien a bien un aparato para interpretar respuestas y asignarles estrategias se necesitan preguntas.

Como consecuencia, la construcción de los dos sistemas de categorías es un proceso en espiral doble: mientras en una hélice van surgiendo las categorías sobre las que se basan las preguntas (es decir, las situaciones), en la hélice gemela se van gestando,

simultánea y entrelazadamente, las categorías con las que se interpretarán las respuestas (es decir, las estrategias). Cada avance en una de las espirales provoca modificaciones y progresos en la otra, y ninguna puede desarrollarse sin el acompañamiento de la otra.

Por otro lado, ninguna de estas dos espirales podría avanzar si no se contara además con métodos para plantearles a los sujetos las preguntas y con métodos para descifrar sus respuestas. Tenemos aquí una tercera espiral que progresa a la par con las otras.

Cabe aclarar que ninguna de las tres espirales arrancó de cero en este trabajo: todas ellas partieron del trabajo realizado previamente por otros investigadores. Entre ellos, destaca la labor de Piaget en cada una de ellas: las diez categorías de preguntas, varias de las estrategias y el método clínico de interrogación (en más de un sentido, la propuesta metodológica que yo hago se deriva de los obstáculos encontrados al intentar aplicar la teoría piagetiana).

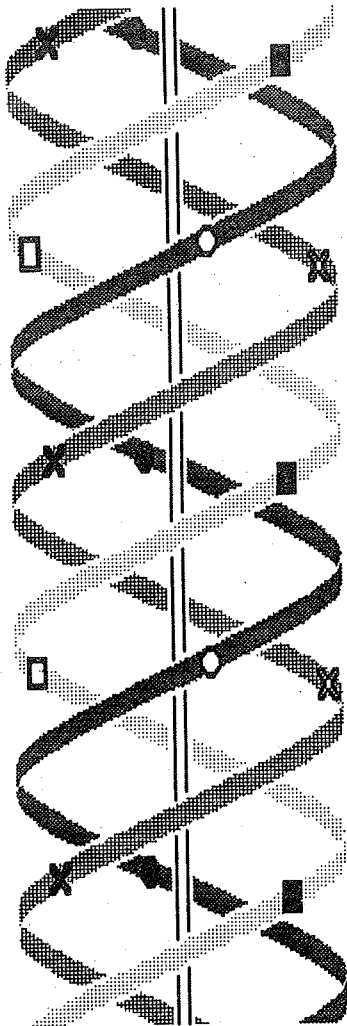
Estamos entonces hablando de tres líneas metodológicas. Las tres se fueron desarrollando simultáneamente a lo largo de todo el proceso, aunque en cada uno de los experimentos cada una tuvo una importancia relativa diferente. Estas tres líneas son:

- la línea de las preguntas, dirigida a encontrar un sistema para clasificar en situaciones las preguntas que pudiera plantear y a diseñar el conjunto de preguntas que conforman un cuestionario;
- la línea de las respuestas, dirigida a encontrar un sistema para interpretar las respuestas que los sujetos podían dar a las preguntas planteadas y a clasificar en estrategias estas interpretaciones;
- la línea de los métodos, dirigida a encontrar las mejores maneras de realizar la interrogación de los sujetos, por una parte, y la interpretación de sus respuestas, por otra.

A estas tres líneas entrelazadas hay que agregarles otra más: la línea de las hipótesis. Esta línea arrancó con las hipótesis iniciales y luego fue recorriendo las conjeturas que surgieron durante el proceso, que fueron conjeturas referentes tanto a la línea de las preguntas como a la de las respuestas como a la de los métodos; todas ellas serán planteadas en el siguiente apartado. Asimismo, se pueden incluir en esta línea las respuestas parciales o totales a las conjeturas. Esta línea conforma evidentemente la parte medular del tratamiento metodológico: es, por así decirlo, el motor que hace avanzar las otras tres líneas.

Para terminar este apartado, presentaré unos modelos del tratamiento metodológico seguido en este trabajo. Incluiré en ellos las líneas de preguntas, de respuestas y de métodos, pero no así la de hipótesis, porque complicaría los esquemas hasta volverlos incomprensibles.

El desarrollo paralelo de las tres líneas durante el proceso de experimentación se puede esquematizar como una triple hélice que se mueve a lo largo del eje del tiempo:



**LINEA DE LAS PREGUNTAS:**



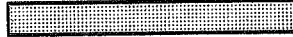
- X situaciones
- X cuestionario

**LINEA DE LAS RESPUESTAS:**



- estrategias
- interpretación

**LINEA DE LOS METODOS:**



- interrogación
- descifrado

**EJE DEL TIEMPO:**



La línea de las preguntas alterna dos procesos de construcción. Por un lado está la construcción de situaciones en las que se puedan detectar diferentes estrategias, es decir, diferentes formas de resolver un problema. La construcción de estas situaciones debe permitir además que cualquier pregunta que se pueda

hacer en el planteamiento de decisión binaria pueda ser clasificada en una situación. Por otro lado está la construcción de cuestionarios, es decir, la manera de plasmar esas situaciones en un conjunto de preguntas planteables a los sujetos. En el diseño de los cuestionarios se debe abarcar todas las situaciones previamente construidas, y se deben incluir también otras variables surgidas a nivel de hipótesis en las etapas anteriores. En esta alternancia de situaciones y cuestionarios, es evidente que las situaciones construidas tienen un efecto inmediato en el diseño de un cuestionario; sin embargo, también los resultados obtenidos en la aplicación de un cuestionario pueden modificar indirecta pero sustancialmente la reconstrucción del conjunto de situaciones en la siguiente etapa del proceso. He aquí un par de ejemplos: en el primer experimento partí de las situaciones construidas por Piaget e Inhelder (1951), es decir de las categorías de doble imposibilidad, doble certeza, etc., lo que dio pie al primer cuestionario con al menos una pregunta de cada categoría; en el tercer experimento reconstruí las situaciones a partir de la experiencia adquirida con los dos primeros cuestionarios.

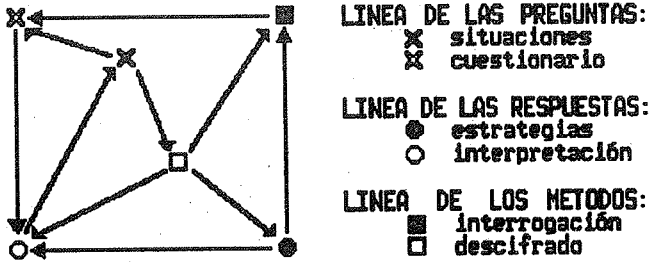
La línea de las respuestas alterna la construcción de categorías para la interpretación de las respuestas, es decir, de estrategias, con la interpretación misma de las respuestas de los sujetos. La meta es construir un sistema de categorías para la interpretación que permita que cualquier respuesta dada por un sujeto tenga una interpretación (¡y sólo una!) en el sistema, de modo que si el sistema es coherente la interpretación de las respuestas sea prácticamente automática. El camino hacia esa meta es por etapas; en cada una el sistema de estrategias guía la interpretación de las respuestas, pero también los problemas encontrados en el trabajo de interpretación contribuyen a la modificación del sistema en la siguiente etapa.

Por último, la línea de los métodos alterna la mejora progresiva de la captura de la información con la de su descifrado. Para la captura de la información procedí a aplicaciones escritas o verbales y a interrogaciones a individuos, parejas, equipos o grupos. El descifrado de las respuestas obtenidas, que pasó a través de un tamiz con enfoque lingüístico, estaba parcialmente determinado por la manera en que realicé cada vez la captura de la información, esto es, por los métodos de interrogación. A su vez, los problemas detectados en el descifrado fueron unos de los factores determinantes para la modificación de los métodos de interrogación en las siguientes etapas.

Las tres líneas estudiadas se interrelacionan constantemente a lo largo de todo el proceso. Puedo aquí mencionar algunas de estas interacciones, que a nivel esquemático se pueden representar como se muestra en la siguiente figura:

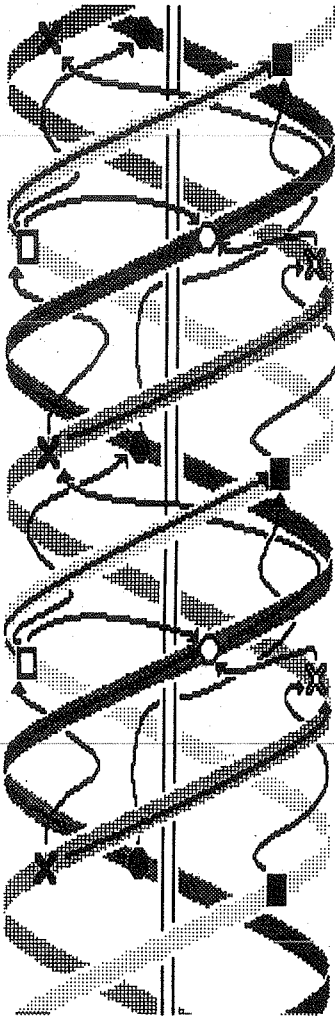
Esto es, en la reconstrucción de las situaciones intervienen los resultados de la interpretación de las respuestas; en el armado de los cuestionarios no sólo intervienen las situaciones construidas sino también los métodos de interrogación que se usarán. Para la construcción del sistema de estrategias se debe tener en cuenta el descifrado de las respuestas anteriores; en la interpretación de las respuestas interviene asimismo el descifra-

do, pero también lo hacen el sistema de interpretación en estrategias y el cuestionario con el que se trabaja. Los métodos de interrogación están parcialmente determinados por los problemas de descifrado encontrados anteriormente, y también por el sistema de estrategias en el que se basa el trabajo; en los métodos de descifrado de una pregunta interviene la situación a la que corresponde la pregunta. Repito que en estos modelos no estoy incluyendo la línea de las hipótesis; los seis elementos aquí presentados tienen relación con ella por ser fuente de planteamientos hipotéticos o por contribuir a sus soluciones parciales o totales.



Aunque presenta con alguna claridad las interacciones entre las tres líneas metodológicas, el esquema anterior no incorpora el eje temporal: no muestra cuándo una interrelación ocurre entre dos elementos de una misma etapa (como el efecto del descifrado en la interpretación) y cuándo ocurre entre elementos de etapas diferentes (como el efecto del trabajo de interpretación de respuestas en una etapa sobre la construcción de situaciones de la siguiente etapa). Conjugando el efecto de entretejido del primer modelo con el de las interrelaciones del segundo se obtiene un tercer modelo del proceso, que se ilustra en la siguiente figura.

Este modelo de madeja enmarañada ilustra un aspecto problemático que plantea la presentación por escrito del trabajo realizado: no hay orden lineal que pueda dar cuenta de toda la complejidad aquí retratada. Plasmé el orden lineal dado por el eje temporal en la sección dedicada al desarrollo histórico en este mismo capítulo, pero ese orden no puede describir los procesos de construcción metodológica ni de extracción de resultados. Por lo demás, para desenmarañar la madeja iré sacando hilo por hilo: a ello consagraré la segunda parte de este documento.


**LÍNEA DE LAS PREGUNTAS:**

- X situaciones
- X cuestionario

**LÍNEA DE LAS RESPUESTAS:**

- estrategias
- interpretación

**LÍNEA DE LOS METODOS:**

- interrogación
- descifrado

**EJE DEL TIEMPO:**

**2.3.2. HIPOTESIS**

La cuarta línea mencionada en el apartado anterior es la línea de las hipótesis. Esta línea incluye las hipótesis iniciales y las que fueron surgiendo a lo largo del proceso; se refieren tanto a las estrategias utilizadas por los sujetos en diver-



sas situaciones como a los aspectos metodológicos que he venido tratando.

A continuación presento todas las hipótesis, clasificadas según los diversos aspectos que cubren. Todas ellas serán reconsideradas en la tercera parte del documento.

#### **Hipótesis iniciales**

- H1: Los estudiantes universitarios mexicanos cometen errores en la resolución de problemas de decisión binaria en situaciones de azar.
- H2: Aunque los estudiantes no se ajusten a la descripción del estadio III (en particular, si no pueden resolver sistemáticamente las preguntas piagetianas de dos variables), se pueden clasificar de acuerdo con los otros estadios descritos en los trabajos de Piaget.

#### **Hipótesis para la construcción de categorías**

- H3: Se puede construir un sistema de categorías para la clasificación de preguntas (situaciones) que provea, para cada una de varias variables, una partición del conjunto de preguntas planteables y que esté sujeto a la hipótesis H5.
- H4: Se puede construir un sistema de categorías para la interpretación de las respuestas (estrategias) que permita que cualquier respuesta dada por un sujeto tenga una y sólo una interpretación en el sistema y que esté sujeto a la hipótesis H5.
- H5: Los sistemas de categorías mencionados en las hipótesis H3 y H4 se pueden construir de modo que haya alguna relación entre las interpretaciones dadas a las respuestas posibles a una pregunta y la situación a la que pertenezca la pregunta.

#### **Hipótesis de diferencias entre situaciones**

- H6: Se puede establecer un orden entre las situaciones, según la cantidad de estrategias diferentes que confluyen en una misma elección.
- H7: Se puede establecer un orden entre las situaciones, según el porcentaje de respuestas correctas que dan los sujetos ante ellas.

#### **Hipótesis de diferencias entre estrategias**

- H8: Se puede establecer un orden de complejidad entre las estrategias que siguen los sujetos, desde las estrategias que se pueden considerar como primitivas hasta las estrategias que toman adecuadamente en cuenta toda la información contenida en una pregunta.
- H9: Hay estrategias que son más dominantes que otras: son utilizadas preferentemente y, en una situación en la que lleven a una elección diferente de la de las dominadas, son las que marcan la elección.

**Hipótesis de efectos de las variables experimentales**

- H10: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones.
- H11: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante referentes distintos, y ante diferentes representaciones de los referentes; en particular, ante representaciones gráficas y con numerales.
- H12: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante preguntas con un número "pequeño" de casos totales ( $n \leq 8$ ) y preguntas con un número "grande" de casos totales ( $20 < n < 30$ ).
- H13: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante preguntas con planteamiento de decisión y preguntas con planteamiento de equiparación; en particular, el primero conlleva un efecto de presión en contra de la respuesta "me da igual" que el segundo no.

**Hipótesis sobre el desempeño individual**

El desempeño de cada sujeto ante un cuestionario da lugar a dos hipótesis: una hipótesis de consistencia individual (H14a) y, como una posible alternativa, una hipótesis de efecto del cuestionario (H14b):

- H14a: No hay diferencias en las estrategias utilizadas por los sujetos ante preguntas similares, i.e., clasificadas en la misma situación, ni ante preguntas idénticas.
- H14b: Hay una evolución del individuo a lo largo del cuestionario al que se somete, medible en una mayor complejidad en el tipo de estrategias que va utilizando a medida que avanza el cuestionario.

**Hipótesis de diferencias entre individuos**

- H15: Diferentes sujetos reaccionan de manera diferente a los problemas planteados:
- hay sujetos que utilizan una sola estrategia de manera consistente;
  - hay sujetos que alternan su uso de varias estrategias;
  - hay sujetos que utilizan un repertorio de muchas estrategias diferentes, con una gama que abarca desde las estrategias más primitivas hasta las más complejas.

**Hipótesis sobre los métodos de interrogación**

- H16: Hay una mejor calidad de la información contenida en las respuestas (esto es, en su "interpretabilidad") cuando se le piden en forma verbal que cuando se le piden por escrito.
- H17: Hay diferencias en la calidad de la información contenida en las respuestas (esto es, en su "interpretabilidad") según la cantidad de personas involucradas en una respuesta: un solo sujeto, una pareja de sujetos, un equipo de discusión.
- H18: En las entrevistas de binomio, hay interacciones interpersonales que producen efectos sobre la expresión y/o las es-

trategias utilizadas. Esto puede ocurrir en particular con dos individuos de sexos distintos.

**Hipótesis sobre los métodos de descifrado**

- H19: Un análisis de tipo lingüístico puede contribuir eficazmente al descifrado de las respuestas.  
H20: El descifrado de las respuestas dadas por los individuos puede estar sujeto a duda y a error.

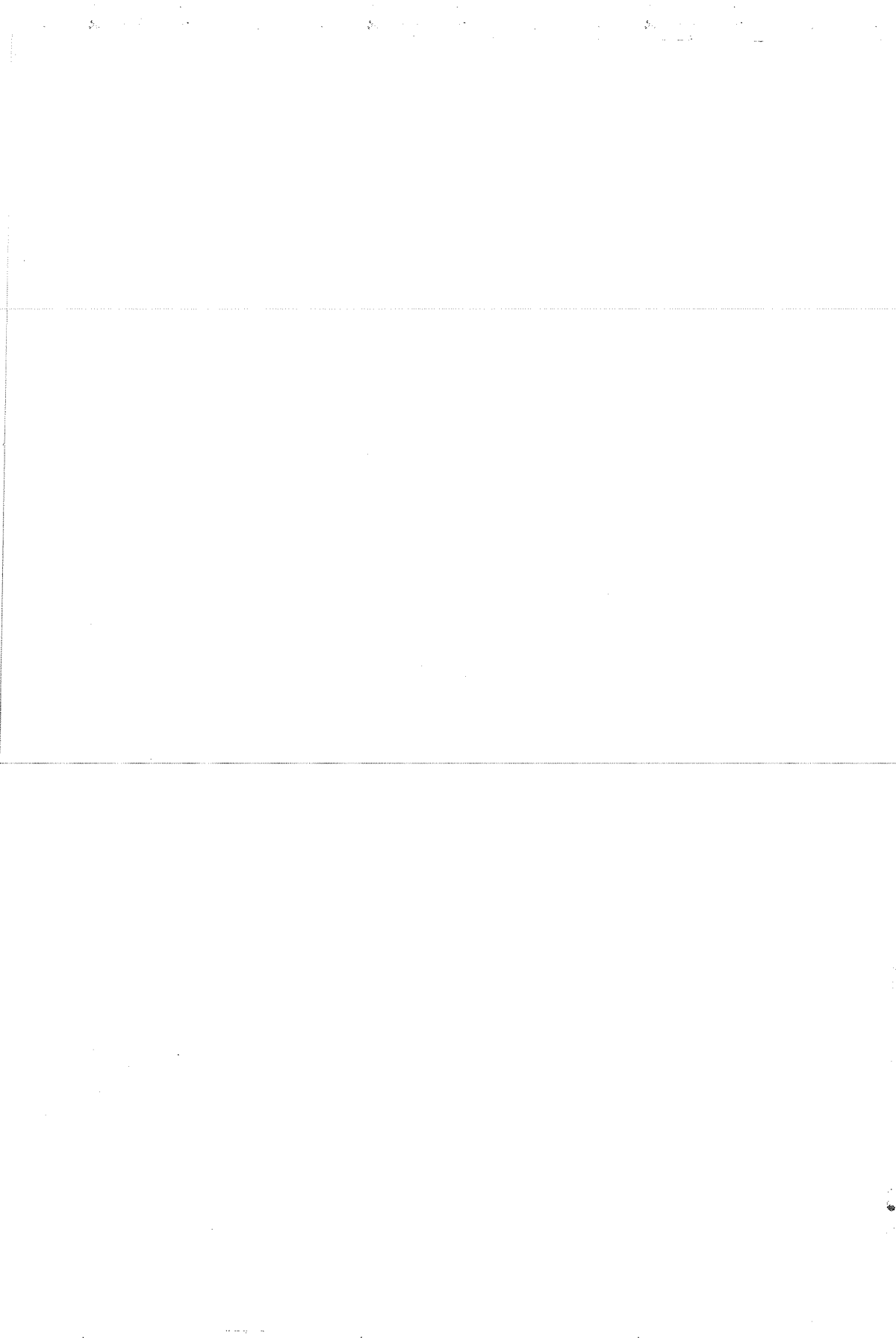
**Hipótesis de aplicabilidad didáctica**

- H21: La puesta en común de las estrategias de los alumnos de un grupo ante el planteamiento de este tipo de preguntas tiene posibilidades de explotación didáctica.  
H22: Cuando un sujeto manifiesta una estrategia inadecuada, es posible utilizar el sistema de situaciones para plantearle una sucesión de preguntas que lleven a "romper" la estrategia y le hagan ver la necesidad de recurrir a otra, más adecuada.

**Hipótesis general**

Las principales hipótesis recién enunciadas permiten plantear la siguiente, que abarca todos los aspectos:

- H23: Si se construyen adecuadamente los sistemas de categorías para las variables experimentales y de respuesta, si se plantean a los sujetos las preguntas adecuadas en el cuestionario adecuado y en la forma adecuada, si las respuestas obtenidas son adecuadamente descifradas e interpretadas, y si cada sujeto es consistente en su elección de estrategias, entonces habrá una buena correlación para cada sujeto entre situaciones y estrategias utilizadas. Si esto ocurre, puede diseñarse un cuestionario tal que el patrón de respuestas indique la estrategia que sigue el sujeto, sin necesidad de recurrir a la expresión de sus justificaciones.



**S E G U N D A**

**P A R T E :**

**M E T O D O L O G I A**

Esta segunda parte tiene como objetivo la presentación del trabajo metodológico. En ella iré extrayendo línea por línea de la triple hélice presentada en el capítulo 2: los Capítulos 3, 4 y 5 se ocuparán respectivamente de desenmadejar las líneas de preguntas, respuestas y métodos.

El capítulo 3 tratará con detalle la construcción del sistema de categorías para las situaciones y el diseño de los cuestionarios utilizados en los cinco experimentos.

En el capítulo 4 se expondrá el proceso de construcción del sistema de categorías de estrategias y la interpretación de respuestas.

El capítulo 5 versará sobre los problemas encontrados en los métodos de interrogación a los sujetos y en el descifrado de sus respuestas.

Cierra esta parte el capítulo 6, en el que se volverá a tratar el aspecto de interrelación de las líneas metodológicas, contando ahora con las categorías y con el lenguaje construidos para el efecto.

Es pertinente observar que en general, las categorías, la notación y la clasificación que utilizaré de ahora en adelante son el resultado de todo el proceso de trabajo, pero no son forzosamente las herramientas manejadas al principio del proceso o durante su ejecución: a la luz de ellas podría decirse, por ejemplo, que los instrumentos utilizados en los primeros experimentos son demasiado sencillos o hasta incorrectos, pero debe tenerse en cuenta que fueron precisamente esos experimentos los que permitieron la construcción de las herramientas más sofisticadas. Asimismo, las interpretaciones de las respuestas de los sujetos que manejaré en el capítulo 4 son el resultado de todo el proceso de construcción de categorías para la interpretación. En cada etapa volví a interpretar todas las respuestas habidas hasta el momento; en particular, una gran mayoría de las respuestas de los primeros dos experimentos no fueron inicialmente interpretadas como se presenta aquí, sino que fueron sucesivamente reinterpretadas hasta la última etapa.

Una vez presentados los diversos aspectos del proceso metodológico, pasaré a los productos del trabajo, no ya a nivel del proceso sino a nivel de los resultados del proceso: de ello se ocupará la tercera y última parte del trabajo.

### 3. CONSTRUCCION DE LAS SITUACIONES

«Lo que mostrará si el ejercicio - y su respectiva respuesta - involucra o no un juicio probabilístico es la naturaleza del problema» (Fischbein, 1975, pág. 88)

Este capítulo está dedicado a la línea de las preguntas tal y como fue presentada en la triple hélice del capítulo precedente. Se centrará en el proceso de construcción de las categorías situacionales y en el diseño de los cuestionarios que planteé a los sujetos en los diversos experimentos realizados.

Sin embargo, como quedó dicho en el capítulo 2, el proceso de construcción de las situaciones para plantear las preguntas está intrínsecamente ligado al de construcción de las estrategias con que interpretar las respuestas. No se puede, pues, empezar a construir desde cero las situaciones sin tener una idea de cuáles son las estrategias que se pueden esperar, ni construir las estrategias sin contar con preguntas que plantear dentro de un esquema de situaciones: las categorías de situaciones deben corresponder a las categorías de interpretación y viceversa.

Esto nos acorrala en la cuestión bizantina clásica de quién fue primero, si el huevo o la gallina: ¿qué se empieza a construir primero, la hélice de las preguntas o la hélice de las respuestas? No hay más remedio que partir de un punto arbitrario de arranque, que provea de categorías previas: a ello dedicaré la primera sección del capítulo.

Después viene la presentación de la línea de las preguntas propiamente dicha. En la segunda sección se abordará la construcción de categorías de situaciones desde el punto de vista conceptual y desde el punto de vista formal de la elaboración de modelos matemáticos, así como la elaboración de un banco de preguntas clasificadas según todas las variables consideradas. La tercera y última sección consiste en la presentación del diseño de los cuestionarios utilizados, tanto a partir del banco como a partir de la construcción de preguntas no incluidas en él, así como el resultado final del proceso de construcción: los cuestionarios mismos.

#### 3.1. CATEGORIAS INICIALES

Veré aquí el punto arbitrario de arranque elegido: las categorías de trabajo para los primeros ciclos de la triple hélice mencionada arriba, esto es, los sistemas de categorías con los

que a título tentativo planeaba que podría plantear las preguntas e interpretar las respuestas que obtuviera. Elegí un sistema de categorías de situación y un sistema de categorías de interpretación que existían ya al emprender el trabajo: los establecidos por Piaget e Inhelder en su obra clásica de 1951.

Con ellos trabajé en los primeros dos experimentos y, como se dijo en el capítulo 2, fue a partir de la experiencia adquirida ahí que pude afinar ambos sistemas, estableciendo un nuevo y más completo sistema de clasificación de situaciones para las preguntas y un nuevo sistema de interpretaciones de las respuestas.

Así, el capítulo iniciará justamente con lo que dio origen a mi trabajo: ambos sistemas piagetianos. El resto del capítulo se consagra a ver cómo afiné el sistema de categorías de preguntas, y el capítulo siguiente al de interpretación de respuestas. Sin embargo, como en buena medida la construcción de las categorías de preguntas está basada en la afinación conseguida en las categorías de interpretación de respuestas, en el segundo apartado de esta primera sección se esbozarán las transformaciones surgidas en ambas a raíz de los primeros trabajos experimentales: las preguntas abiertas en las categorías de preguntas, y las categorías de interpretación de respuestas para las que buscaba construir el sistema de categorías de preguntas (a reserva de ver esto último con mucho mayor detalle en el capítulo 4).

### 3.1.1. CATEGORIAS PIAGETIANAS

Estas categorías fueron ya presentadas en el capítulo 1; esto es un breve panorama general de ellas.

#### 3.1.1.1. CATEGORIAS PARA LAS PREGUNTAS

Las preguntas de los primeros cuestionarios fueron planteadas en las situaciones inicialmente exploradas por Piaget e Inhelder (1951, pág. 127). Estas son:

- P1. *Doble imposibilidad,*
- P2. *Doble certeza,*
- P3. *Imposibilidad-certeza,*
- P4. *Posibilidad-certeza,*
- P5. *Posibilidad-imposibilidad,*
- P6. *Conjuntos idénticos,*
- P7. *Proporcionalidad,*
- P8. *Desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles,*
- P9. *Igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles,*
- P10. *Desigualdades respectivas de los casos favorables y de los casos posibles, sin proporcionalidad.*



Para los autores mencionados, las categorías P1, P3 y P5 son controles, y reportan que los niños las manejan bien desde los cuatro o cinco años (principio del estadio I). Observan que en P4 y P8 es muy frecuente que los niños de esa edad escojan del lado en que hay un solo elemento favorable (1). Por otro lado, para los niños del estadio I (cuatro a siete años) las preguntas llamadas de "una variable" (P8 y P9) y las de "dos variables" (P7 y P10) son demasiado difíciles. Al pasar al estadio II, llamado de las operaciones concretas (siete a once años), se tiene que las preguntas de las categorías P1 a P6 son de solución "fácil", y que ya hay un éxito general de las comparaciones con una sola variable, pero no así con las de dos variables, aunque al final del estadio II suele haber un "décalage", es decir, la presencia simultánea de estrategias no exitosas de principios del estadio II y de estrategias exitosas del estadio III. Por último, las preguntas de dos variables sólo son resueltas sistemáticamente durante el estadio III, llamado de las operaciones formales (de once años en adelante), y al final de este estadio todos los sujetos las resuelven correctamente.

### 3.1.1.2. CATEGORIAS PARA LA INTERPRETACION DE LAS RESPUESTAS

Mediante el planteamiento de las diez situaciones arriba mencionadas, Piaget e Inhelder encuentran, para diferentes estadios, las siguientes estrategias:

- elección del lado en que hay más favorables,
- elección del lado en que hay menos elementos favorables,
- elección del lado en que hay un solo elemento favorable,
- elección del lado en que hay más elementos en total,
- elección del lado en que hay menos elementos en total,
- elección del lado en que es mayor la diferencia de favorables menos desfavorables,
- elección del lado en que la probabilidad es mayor.

### 3.1.2. OBSERVACIONES EXPERIMENTALES A LAS CATEGORIAS PIAGETIANAS

Los experimentos primero y segundo aportaron la primera experiencia y, con ella, las primeras observaciones críticas a la pareja de sistemas de categorización que estaba utilizando.

#### 3.1.2.1. OBSERVACIONES PARA LAS SITUACIONES

Desde los primeros experimentos me preguntaba si, en caso de que los estudiantes universitarios con los que trabajaba no se

1. Esta estrategia es tan característica de ese nivel de desarrollo que es tomada como elemento fundamental de diagnóstico del estadio I por los expertos en psicología genética.

ajustaran a la descripción que Piaget e Inhelder hacen del estadio de las operaciones formales, en particular si no podían resolver los problemas de dos variables, se podrían clasificar de acuerdo con los otros estadios descritos en el trabajo de estos autores.

Lo primero resultó cierto muy pronto: la gran mayoría de los estudiantes con los que estaba trabajando no podían resolver sistemáticamente los problemas de dos variables. Sin embargo, la clasificación deseada no fue posible. El *décalage* descrito por Piaget e Inhelder para los sujetos del final del estadio II se presentó también con otras estrategias: hubo incluso sujetos que mostraron tanto la estrategia de la elección del lado en que hay un solo elemento favorable como un razonamiento proporcional.

El primer análisis reveló lo siguiente. Las únicas coincidencias sistemáticas con el trabajo de Piaget e Inhelder ocurrieron con las siguientes preguntas:

- P1. *Doble imposibilidad*
- P3. *Imposibilidad-certeza*
- P5. *Posibilidad-imposibilidad*
- P6. *Conjuntos idénticos,*

que fueron resueltas correctamente de manera casi sistemática (2). Así, a raíz de las primeras aplicaciones quedó claro que las preguntas P1, P3, P5 y P6 son triviales para los sujetos con los que se realizó esta investigación (3). Las preguntas consideradas "fáciles"

- P2. *Doble certeza*
- P4. *Posibilidad-certeza*

no fueron resueltas de manera correcta por muchos sujetos, por lo que se revelaron pertinentes. Por último, se evidenció que las preguntas llamadas "de una variable"

- P8. *Desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles*
- P9. *Igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles*

y las llamadas "de dos variables"

- P7. *Proporcionalidad*
- P10. *Desigualdades respectivas de los casos favorables y de los casos posibles, sin proporcionalidad*

debían ser exploradas con mayor detalle. Efectivamente, muchos de los individuos daban respuestas a las preguntas del cuestionario (sobre todo, aunque no exclusivamente, a las preguntas de dos variables) que aparentaban venir de una elección azarosa entre las múltiples estrategias posibles: contestaban una pregunta por elección del lado con más favorables, otra por elección del lado con menos totales, etc. Cabía entonces la posibilidad de que esta apariencia azarosa se debiera a que las categorías de situaciones

2. Hay algunas respuestas "ilógicas" a estas preguntas en los cuestionarios C1 y C2, pero pueden achacarse al hecho de que las preguntas parecían tan obvias que los estudiantes pensaban que había un "gato encerrado": buscaban la trampa.

3. A pesar de ello, P3 y P5 se volvieron a plantear en el cuestionario C3, a la par con P2 y P4, como una medida de control del sistema de situaciones.

para el planteamiento de las preguntas no fueran suficientemente finas y que, dentro de una misma categoría piagetiana, pudiera definir subcategorías dentro de las que hubiera mayor homogeneidad en las estrategias utilizadas (véase la hipótesis H3 planteada en §2.3.2).

### 3.1.2.2. OBSERVACIONES PARA LAS INTERPRETACIONES

En la segunda fase del segundo experimento observé, además de las ya reportadas, las siguientes estrategias:

- Elección del lado en que hay menos elementos desfavorables.
- Elección del lado en que hay más elementos desfavorables.
- Algunos estudiantes guiaban su razonamiento por la posibilidad de ganar o perder, con argumentos de los siguientes estilos: "como en este lado gano y en el de allá pierdo, entonces escojo este lado", o "como en este lado pierdo y en el de allá empato, entonces escojo el de allá", o "como de los dos lados pierdo, me da igual", o incluso "como de este lado empato, es el que escojo (independientemente de lo que ocurra en el otro lado)". Todas estas estrategias se pueden considerar como pendientes de lo que ocurre con respecto a la probabilidad de .5, y por ello las he denominado estrategias de equilibrio.
- En muchos casos los estudiantes apelaban a varias de las estrategias reportadas por otros autores, como "escojo de este lado porque hay más negras que en el otro y además porque hay menos blancas y además porque si hago parejas de negras con blancas me quedan más negras solas que del otro lado", o bien "escojo de este lado porque hay más negras, a pesar de que haya menos en total" o bien "de los dos lados pierdo, pero escojo de este lado porque aquí hay más negras y menos blancas". En estos casos hablaré de composición de estrategias.

Es así como después de los primeros dos experimentos consideré que debía construir situaciones que permitieran detectar las siguientes estrategias, a las que marco aquí con el nombre que les daré en el resto del trabajo (4):

- centración en casos totales: elección del lado en que hay menos elementos en total (centración negativa) o más elementos en total (centración positiva);
- centración en casos favorables: elección del lado en que hay más favorables (centración positiva) o menos favorables (centración negativa);
- centración en casos desfavorables: elección del lado en que hay menos desfavorables (centración negativa) o más desfavorables (centración positiva);

---

4. Estas y otras categorías para la interpretación de las respuestas se abordarán exhaustivamente en el capítulo 4.

- estrategias de equilibrio: elección guiada por la combinación de posibilidades de perder, empatar o ganar que ofrecen ambos lados;
- estrategias de resta: basadas en las diferencias entre favorables y desfavorables;
- estrategias de proporcionalidad: basadas en razonamientos proporcionales;
- composiciones de estrategias.

### 3.2. CONSTRUCCION DEL BANCO: SITUACIONES

Una vez determinadas las estrategias a buscar, procedí a construir, a través de una serie de variables, un sistema que permitiera clasificar todas las posibles preguntas. Cada una de las variables y las categorías por ella definidas deben satisfacer dos criterios: por una parte, deben estar basadas justamente en alguna(s) de las estrategias a buscar; por otra deben definir una partición del conjunto de todas las posibles preguntas que se pueden plantear en la forma experimental elegida. Por ejemplo, las categorías piagetianas definen una partición de ese conjunto: cada una de las preguntas planteables pertenece a una de las categorías piagetianas y solamente a una (véanse los dos primeros cuadros de la figura de la pág. (?)).

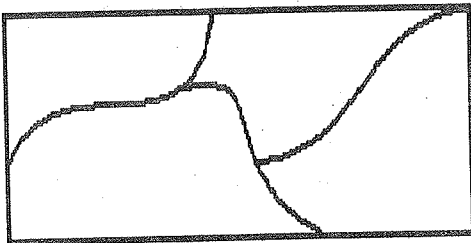
Lo que haré será definir varias particiones: una para cada una de las variables experimentales con las que trabaje. Cada variable definirá entonces un conjunto de categorías que conforman una partición. En el apartado siguiente se verá cómo construí las once variables experimentales de situación y, en el parágrafo §3.2.1.3c, cómo la unión de las dos primeras variables define una serie de categorías contenidas en las piagetianas, por lo que provee un sistema de clasificación más fino que el de las categorías piagetianas.

El siguiente esquema ilustra lo que acabo de decir. El primer cuadro ilustra el caso general de una partición (aquí, con cuatro categorías). El segundo muestra cómo "cubren" todas las posibilidades las categorías piagetianas (con la excepción de un tipo de preguntas), y los dos siguientes cómo es la construcción de la primera y la segunda variables; en estos tres cuadros he incluido los nombres de las categorías definidas por las variables (5). El quinto cuadro muestra la unión de las categorías de las dos primeras variables, y el sexto la unión de ellas con las categorías piagetianas; puede observarse que la unión de las dos variables define una nueva partición en algunas de las categorías piagetianas (véanse por ejemplo P5 y P10).

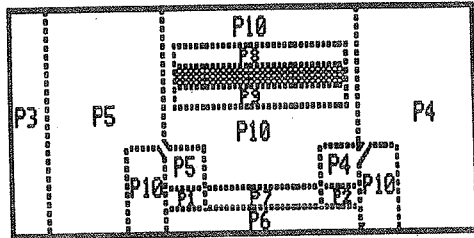
Otro aspecto que permite ver el siguiente esquema es la posibilidad que da el sistema de categorías de interpretar una res-

5. El significado de estos nombres se aclarará en el siguiente apartado.

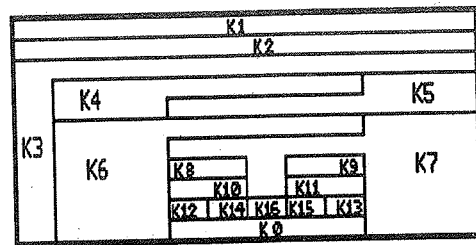
puesta como la utilización de varias estrategias a la vez: como cada variable corresponde a una estrategia, la superposición de las particiones categóricas de varias variables permite detectar el uso simultáneo de las estrategias correspondientes.



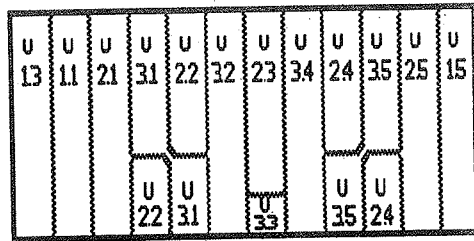
categorias de una variable cualquiera



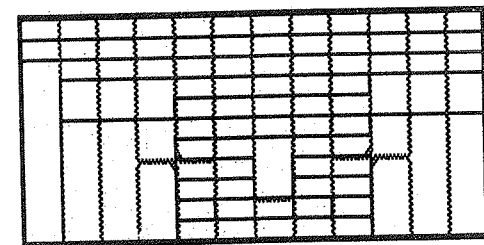
categorias piagetianas



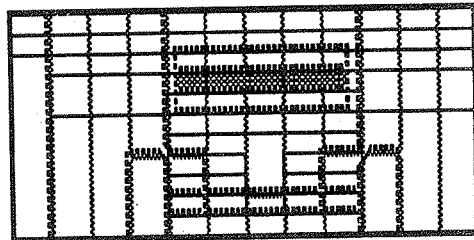
categorias de la primera variable



categorias de la segunda variable



categorias de las dos primeras v.



categorias piagetianas en las 2 v.

Después de definir las variables de clasificación de situaciones, procedí a establecer modelos matemáticos de ellas. Estos modelos de las situaciones permitieron a su vez plantear una clasificación general de todas las posibles preguntas correspon-

dientes a la forma experimental elegida; llevé a cabo la clasificación mediante computadora para las preguntas correspondientes a un número arbitrario de objetos en las urnas (hasta diez objetos en cada una). En seguida, procedí a conformar a partir de esa clasificación un banco de preguntas que permitiera un juego adecuado en el diseño de los cuestionarios.

Esta sección se dedica al proceso de construcción de las categorías y de sus modelos matemáticos, y finaliza con una descripción del banco de preguntas obtenido a partir de ellas; los resultados de esta trabajo (es decir, el banco de preguntas) se encuentran en los Anexos 1 y 2.

El proceso de construcción de las categorías está planteado en dos apartados diferentes: en el primero, que llamo de "construcción conceptual", planteo, para cada una de las categorías creadas, las nociones que la sustentan y las hipótesis a las que da pie, todo ello redactado en los términos menos formales que me ha sido posible hallar. El segundo, que llamo de "construcción formal", presenta los modelos matemáticos correspondientes a cada una de las categorías mencionadas en el anterior, así como las demostraciones de las afirmaciones que hago. Esta división en dos apartados obedece al interés de hacerle prescindible al lector no interesado en la exactitud del procedimiento matemático una parte del trabajo que le puede parecer pesada.

### 3.2.1. CONSTRUCCION CONCEPTUAL

A continuación, después de un primer párrafo destinado a la especificación de algunos elementos de la notación que uso en el resto del trabajo, se presentarán las categorías construidas para el sistema de situaciones. Para facilitar la lectura he utilizado un ejemplo de arreglo, que sigo a lo largo de todo el apartado para señalar en él la notación utilizada y las categorías correspondientes a cada una de las variables experimentales que iré presentando: combinaciones, ubicaciones, perceptividad, unos, multiplicidad.

En la presentación de cada una de las variables experimentales se destinará una parte a la presentación y la ejemplificación de las categorías y otra a la especificación (correspondiente a esa variable) de la hipótesis de efectos en las variables experimentales planteada en el capítulo anterior:

**H10:** Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones, incluyendo en ellas las variables de perceptividad, "unos" y multiplicidad.

Esta hipótesis se puede desglosar en las siguientes:

**H10.1:** Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes combinaciones;

- H10.2: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes ubicaciones;
- H10.3: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de perceptividad;
- H10.4: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de unos;
- H10.5: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de multiplicidad.

y su vez se irá desmenuzando cada una de ellas en el párrafo correspondiente.

### 3.2.1.1. NOTACION GENERAL

De acuerdo con la forma experimental elegida, cada pregunta plantea una decisión entre dos urnas o colecciones que contienen objetos de dos tipos en cantidades diferentes. Como las urnas son "abiertas", hablaré más bien de lados que de "urnas"; me referiré al contenido de cada urna como un espacio muestral y lo denotaré con la letra S. Me referiré a los objetos como cartas, tarjetas o canicas. El tipo de objetos deseados serán los de color negro y los no deseados de color blanco; me referiré a ellos respectivamente como los favorables y los desfavorables. Simbolizaré la cantidad de objetos favorables, también llamada los casos favorables, mediante la letra f y la cantidad de objetos desfavorables, también llamada los casos desfavorables, mediante la letra d.

Así, cada espacio muestral se puede representar por una pareja ordenada de números naturales (f,d) y el planteamiento de decisión está dado por dos espacios muestrales (dos parejas ordenadas de números naturales), que llamaré S1=(f<sub>1</sub>,d<sub>1</sub>) y S2=(f<sub>2</sub>,d<sub>2</sub>). Cuando exprese la comparación de los espacios muestrales S1 y S2 la denotaré simplemente: (f<sub>1</sub>,d<sub>1</sub>)(f<sub>2</sub>,d<sub>2</sub>), y diré que esta pareja de espacios muestrales es un arreglo. Esto es, una pregunta plantea una decisión entre los dos espacios muestrales de un arreglo.

Además de los elementos f<sub>1</sub>, d<sub>1</sub>, f<sub>2</sub> y d<sub>2</sub> así determinados, defino:

los casos totales:  $n_1 = f_1 + d_1$       y       $n_2 = f_2 + d_2$ ;  
 las restas:  $r_1 = f_1 - d_1$       y       $r_2 = f_2 - d_2$ ;  
 las probabilidades:  $p_1 = f_1 / n_1$       y       $p_2 = f_2 / n_2$ .

Diré que los números f<sub>1</sub>, d<sub>1</sub>, n<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>, d<sub>2</sub>, n<sub>2</sub> son los elementos de un arreglo. Asimismo, cada pareja de elementos que definen casos del mismo estilo es una clase, por lo que hay tres clases: la pareja de casos totales {n<sub>1</sub>, n<sub>2</sub>}, la de favorables {f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>} y la de desfavorables {d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>}.

Por ejemplo, supongamos que del lado 1 se tienen una tarjeta negra y tres blancas, y del lado 2 se tienen dos negras y cinco blancas, como en el siguiente esquema. Entonces los espacios muestrales, el arreglo, los casos favorables, los desfavorables y los totales, las restas y las probabilidades son como indico en la tabla:

ESPACIO MUESTRAL S1	ESPACIO MUESTRAL S2	Arreglo:
$\square \blacksquare \square \square$	$\square \blacksquare \square \square \blacksquare \square \square$	$(1,3)(2,5)$
$f_1 = 1$ $d_1 = 3$ $S1 = (1,3)$ $n_1 = 1 + 3 = 4$ $r_1 = 1 - 3 = -2$ $p_1 = 1/4 = 0.25$	$f_2 = 2$ $d_2 = 5$ $S2 = (2,5)$ $n_2 = 2 + 5 = 7$ $r_2 = 2 - 5 = -3$ $p_2 = 2/7 = 0.29$	casos favorables c. desfavorables espacios muestrales casos totales restas probabilidades

Los elementos de la tabla son los números 1, 3, 4, 2, 5, 7; la clase de totales es {4,7}, la de favorables {1,2} y la de desfavorables {3,5}.

En la presentación formal de la construcción, definiré los espacios muestrales S1 y S2 de modo que siempre se tenga  $n_1 \leq n_2$ , y, cuando sean iguales  $n_1$  y  $n_2$ ,  $f_1 \leq f_2$ . De este modo cada pareja de espacios muestrales forma un solo arreglo, como ilustro en los siguientes ejemplos:

- el arreglo (1,3)(2,5) representa también a (2,5)(1,3), que no existe formalmente como arreglo porque  $n_1$  es mayor que  $n_2$  ( $7 > 4$ );
- el arreglo (1,3)(2,2) representa también a (2,2)(1,3), que no existe formalmente como arreglo porque aunque  $n_1$  no es mayor que  $n_2$  ( $4=4$ ),  $f_1$  es mayor que  $f_2$  ( $2 > 1$ ).

Entre los arreglos que consideraré estarán incluidos los espacios muestrales sin casos favorables ( $f_1 = 0$  ó  $f_2 = 0$ ), los espacios muestrales sin casos desfavorables ( $d_1 = 0$  ó  $d_2 = 0$ ) y los arreglos de identidad (en los que  $f_1 = f_2$  y  $d_1 = d_2$ ) (6).

### 3.2.1.2. COMBINACIONES

Entre los principales objetivos estaba el de contar con un sistema de situaciones en las que se pudieran observar por separado cada una de las estrategias de centración posibles (centración en los casos totales, en los favorables y en los desfavorables), así como las estrategias de restas y de probabilidad. Las respuestas obtenidas con cada una de estas estrategias variarán además con la relación de orden que guarden entre sí los elemen-

6. En ocasiones trabajaré sin arreglos de identidad; cuando esto ocurra lo señalaré explícitamente.



tos del arreglo: por ejemplo, una estrategia de centración en los casos favorables podrá llevar a la elección de S2 en el arreglo (1,3)(2,5) pero a la respuesta "da igual" en el arreglo (2,3)(2,5).

Entonces, para poder observar cada una de estas estrategias y las posibles combinaciones de ellas, caractericé a cada arreglo posible mediante una combinación (en el sentido en que usa el término un cerrajero).

a) Categorías

Una combinación es una sucesión de cinco dígitos que valen 0, 1 ó 2. El primer dígito se refiere a la relación que guardan entre sí los dos casos totales (n), el segundo se refiere a la de los dos casos favorables (f), el tercero a la de los desfavorables (d), el cuarto a la de los residuos o restas (r) y el quinto a la de las dos probabilidades (p). En cada una de estas comparaciones los dígitos 0, 1, 2 representan:

- 0: ambos elementos a comparar son iguales,
- 1: el primer elemento es menor que el segundo, y
- 2: el primer elemento es mayor que el segundo.

La combinación es entonces una sucesión de ceros, unos y doses, o sea un número que denoto así:  $K=nfdrp$ .

Así, si recuperamos nuestro ejemplo con (1,3)(2,5), tenemos que la combinación que caracteriza a este arreglo es  $K=11121$ :

S1	S2	Combinación:
□ ■ □ □	□ ■ □ □ ■ □ □	$K = 11121$
$n_1 = 4$ $f_1 = 1$ $d_1 = 3$ $r_1 = -2$ $p_1 = 0.25$	$n_2 = 7$ $f_2 = 2$ $d_2 = 5$ $r_2 = -3$ $p_2 = 0.29$	$n = 1$ $f = 1$ $d = 1$ $r = 2$ $p = 1$

Demstraré que sólo hay diecisiete combinaciones posibles, que son las siguientes:

00000	11011	11110	11121
01211	11100	11111	11122
10120	11101	11112	11211
10122	11102	11120	12122
11010			

De estas combinaciones, unas son más discriminantes que otras: diré que una pregunta o su combinación es discriminante si ante ella sujetos que siguen diferentes estrategias llegan a diferentes elecciones.

Veamos por ejemplo cómo responden a dos combinaciones distintas sujetos con diferentes estrategias. Consideremos primero la última de la lista, la combinación K=12122.

En ella:  $n=1, f=2, d=1, r=2, y, p=2,$   
 por lo que:  $n_1 < n_2, f_1 > f_2, d_1 < d_2, r_1 > r_2, y, p_1 > p_2.$

De ahí que un sujeto atraído por:

- la menor cantidad de casos totales, elige: S1;
- la mayor cantidad de casos favorables, elige: S1;
- la menor cantidad de casos desfavorables, elige: S1;
- la mayor resta  $r = f - d$ , elige: S1;
- un razonamiento proporcional correcto, elige: S1.

Así, sea cual sea la estrategia que siga un individuo, responderá a cualquier arreglo que corresponda a la combinación K=12122 eligiendo S1. Análogamente, la mayoría de las estrategias llevan a la elección de S2 en la combinación K=11211. Ni K=12122 ni K=11211 son combinaciones discriminantes. Tampoco lo es la combinación K=00000, en la que todas las estrategias consideradas llevan a la elección de "da igual".

Por otro lado, tomemos la combinación K=11110:

En ella:  $n=1, f=1, d=1, r=1, y, p=0,$   
 por lo que:  $n_1 < n_2, f_1 < f_2, d_1 < d_2, r_1 < r_2, y, p_1 = p_2.$

De ahí que un sujeto atraído por:

- la menor cantidad de casos totales, elige: S1;
- la mayor cantidad de casos favorables, elige: S2;
- la menor cantidad de casos desfavorables, elige: S1;
- la mayor resta  $r=f-d$ , elige: S2;
- un razonamiento proporcional correcto, elige "da igual".

Es decir, K=11110 es una combinación más discriminante que las anteriores, puesto que la elección sí depende de la estrategia seguida (y, en particular, todas las estrategias incorrectas llevan a una elección incorrecta).

A partir de la consideración de discriminación he establecido un orden entre las diecisiete combinaciones posibles, desde las dos combinaciones que no discriminan hasta las que más discriminan. El orden se va graduando de acuerdo con la cantidad de números  $n, f, d, r, p$  que difieren de los de las combinaciones no discriminantes: se obtiene así una numeración de las combinaciones, desde K0 hasta K16. Es lo que se muestra en la siguiente tabla.

combinación K= nfdrp	descripción
K0=00000	arreglos de identidad
K1=11211 K2=12122	sin discriminación
K3=01211	igualdad de casos totales
K4=11011 K5=10122	igualdad de casos desfavorables o favorables
K6=11111 K7=11122	coincidencia de r y p: causan la misma elección
K8=11121 K9=11112	discrepancia de r y p: causan diferente elección
K10=11101 K11=11102	igualdad de resta de favo- rables menos desfavorables
K12=10120 K13=11010	proporcionalidad con $p = 0$ y $p = 1$
K14=11120 K15=11110	proporcionalidad con $p < .5$ y $p > .5$
K16=11100	proporcionalidad con $p = .5$

**b) Hipótesis**

Desglosemos nuevamente la hipótesis relacionada con las combinaciones:

H10.1: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes combinaciones.

en las dos siguientes:

H10.1.1: Hay diferencias en las elecciones hechas y las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes combinaciones: los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a las combinaciones con numeración baja que a las de numeración alta, salvo, tal vez, por las combinaciones de proporcionalidad, que no necesariamente resultarán las de menores cantidades de respuestas correctas;

H10.1.2: Hay aproximadamente la misma tendencia a resolver correctamente las preguntas correspondientes a las siguientes parejas de combinaciones: K1 y K2, K4 y K5, K6 y K7, K8 y K9, K10 y K11, K12 y K13, K14 y K15.

3.2.1.3. UBICACIONES

Para prever las estrategias de equilibrio, es necesario considerar todas las mezclas de "ganancia", "empate" y "pérdida", esto es todas las posibilidades de localización de las probabilidades  $p_1$  y  $p_2$  con respecto a las probabilidades extremas 0 y 1 y a la probabilidad central  $\frac{1}{2}$ .

a) Categorías

Para cada probabilidad existen las siguientes alternativas, que denomino como se indica:

- $p = 0$ : situación extremosa de "pierdo"
- $0 < p < .5$ : "pierdo"
- $p = .5$ : "empato"
- $.5 < p < 1$ : "gano"
- $p = 1$ : situación extremosa de "gano"

Cuando se combinan estas alternativas para cada una de las dos probabilidades  $p_1$  y  $p_2$ , se obtienen diecisiete posibilidades; he agrupado algunas para definir y clasificar un total de trece ubicaciones, que ilustro gráficamente en el siguiente esquema. Aclararé posteriormente la razón de la agrupación.

En el esquema, el intervalo  $[0,1]$  está representado por  $[\text{-----}| \text{-----}]$ ,

donde los valores extremos 0 y 1 están representados respectivamente por corchetes, y el valor .5 por una raya vertical. En cada uno de los subintervalos  $[\text{-----}|$  y  $|\text{-----}]$  la colocación de  $p_1$  y  $p_2$  (representadas por sendas cruces x) no pretende ser proporcional a su valor. Los casos en que  $p_1 = p_2$  se representan con un asterisco.

tres ubicaciones extremosas del tipo "pierdo-gano"	U1.1: x----- ---x--] U1.3: x----- -----x U1.5: [---x-- -----x
dos ubicaciones del tipo "pierdo-empato", una no extremosa del tipo "pierdo-gano" y dos del tipo "gano-empato"	U2.1: x-----x-----] U2.2: [---x--x-----] U2.3: [---x-- ---x--] U2.4: [-----x-x--] U2.5: [-----x-----x
dos del tipo "pierdo-pierdo" (una extremosa), una del tipo "empato-empato", y dos del tipo "gano-gano" (una extremosa)	U3.1: x--x-- -----] y *----- -----] U3.2: [-x-x- -----] y [---*--- -----] U3.3: [----- -----] y [-----*-----] U3.4: [----- ---x-x-] y [----- ---*---] U3.5: [----- ---x--x] y [----- -----*]

Así, el ejemplo (1,3)(2,5) con el que hemos venido trabajando corresponde a la ubicación U3.2, porque tanto  $p_1$  como  $p_2$  están entre 0 y .5:

S1	S2	Ubicación:
□ ■ □ □	□ ■ □ □ ■ □ □	U3.2
$P_1 = 0.25 < .5$	$P_2 = 0.29 < .5$	$\begin{matrix} [---x-x--- -----] \\ 0 & .5 & 1 \\ P_1 & P_2 \end{matrix}$

**b) Hipótesis**

La hipótesis relacionada con las ubicaciones:

H10.2: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes ubicaciones

se puede ahora desglosar en las siguientes:

- H10.2.1: Los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a ubicaciones extremosas de "pierdo" (U1.1, U1.3, U2.1, U3.1) o de "gano" (U1.3, U1.5, U2.5, U3.5) que las correspondientes a las demás;
- H10.2.2: Los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a ubicaciones de "pierdo-gano" (U1.1, U1.3, U1.5, U2.3) que las correspondientes a las demás no extremosas (U2.2, U2.4, U3.2, U3.3, U3.4);
- H10.2.3: Los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a ubicaciones de "pierdo-empato" (U2.1, U2.2) o de "empato-gano" (U2.4, U2.5) que las correspondientes a las demás no extremosas ni de "pierdo-gano" (U3.2, U3.4).

**c) Relación entre ubicaciones y combinaciones**

No todas las ubicaciones existen en todas las combinaciones definidas en el párrafo anterior. Esto será demostrado más adelante (§3.2.2.3), pero aquí lo presentaré gráficamente en la tabla de la siguiente página, en la que las situaciones de combinación y ubicación que no existen están representadas por tres puntos (...). En las demás situaciones he marcado a qué categoría piagetiana corresponden, lo que comentaré en seguida.

Antes de hacer la comparación de las categorías piagetianas y las que he construido para este trabajo, utilizaré la tabla para aclarar por qué agruparé dos situaciones en cada una de las ubicaciones U3.1, U3.2, U3.4 y U3.5.

La ubicación U3.1 incluye las situaciones

x--x--|-----]      y      \*-----|-----],

que son dos situaciones de "pierdo-pierdo"; una de ellas no es de proporcionalidad y la otra sí ( $p_1=p_2=0$ ). La separación de estas situaciones es importante, pero no es necesario hacerla en las ubicaciones, porque la de proporcionalidad sólo ocurre en una combinación en la que  $p=0$ , es decir, en K12. Así, cuando U3.1

ocurre en las combinaciones K1, K2, K3, K4, K6, K8 y K10 es obvio que se trata de la situación

x--x--|-----],

mientras que cuando ocurre en la combinación K12 se trata de

\*-----|-----].

Algo análogo ocurre con las demás ubicaciones. En resumen, cada una de las ubicaciones de la forma 3.j se expresa así:

- U3.1: x--x--|-----] en K1, K2, K3, K4, K6, K8 y K10  
\*-----|-----] en K12;
- U3.2: [-x-x-|-----] en K1, K2, K3, K4, K5, K6, K7, K8 y K10  
[--\*--|-----] en K14;
- U3.3: [-----\*-----] en K16;
- U3.4: [-----|-x-x-] en K1, K2, K3, K4, K5, K6, K7, K9 y K11  
[-----|---\*---] en K15;
- U3.5: [-----|--x--x] en K1, K2, K3, K5, K6, K9 y K11  
[-----|-----\*] en K13.

combi- nacio- nes:	U			ubicaciones					U				
	1.1	1.3	1.5	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
K0	...	...	...	...	...	...	...	...	P6	P6	P6	P6	P6
K1	P5	P3	P4	P5	P10	P10	P10	P4	P5	P10	...	P10	P4
K2	P5	P3	P4	P5	P10	P10	P10	P4	P5	P10	...	P10	P4
K3	P5	P3	P4	P5	P8	P8	P8	P4	P5	P8	...	P8	P4
K4	P5	...	...	P5	P9'	P9'	P9'	...	P5	P9'	...	P9'	...
K5	...	...	P4	...	P9	P9	P9	P4	...	P9	...	P9	P4
K6	P5	...	...	P5	P10	P10	P10	...	P5	P10	...	P10	...
K7	...	...	P4	...	P10	P10	P10	P4	...	P10	...	P10	P4
K8	...	...	...	...	...	...	...	...	P5	P10	...	...	...
K9	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	P10	P4
K10	...	...	...	...	...	...	...	...	P5	P10	...	...	...
K11	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	P10	P4
K12	...	...	...	...	...	...	...	...	P1	...	...	...	...
K13	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	P2
K14	...	...	...	...	...	...	...	...	...	P7	...	...	...
K15	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	P7	...
K16	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	P7	...	...

## INSTRUCCION DE LAS SITUACIONES

### Comparación de las categorías piagetianas con combinaciones y ubicaciones

Por otra parte, cada una de las situaciones definidas por combinación y ubicación corresponde a una de las diez categorías piagetianas (salvo en algunas ubicaciones de K4), como mostré en la tabla de la pág. 126.

La tabla permite ver que hay categorías piagetianas equivalentes a las aquí construidas (categorías que corresponden a una combinación o a una ubicación):

- P1 (Doble imposibilidad) es equivalente a U3.1 (que sólo ocurre en K12).
- P2 (Doble certeza) es equivalente a U3.5 (que sólo ocurre en K13).
- P3 (Imposibilidad-certeza) es equivalente a U1.3 (que sólo ocurre en K1, K2 y K3).
- P6 (Conjuntos idénticos) es equivalente a K0 (que sólo ocurre en U3.1, U3.2, U3.3, U3.4 y U3.5).

Asimismo, hay categorías piagetianas que quedan incluidas en algunas de las ubicaciones de una sola combinación:

- P8 (Desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles) es equivalente a K3 cuando ocurre en U2.2, U2.3, U2.4, U3.2 ó U3.4 (esto es, excluyendo las ubicaciones "extremosas" U1.3, U1.5, U2.5, U3.5, U1.1, U2.1 y U3.1, que corresponden a P3, P4 y P5).
- P9 (Igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles) es equivalente a K5 cuando ocurre en U2.2, U2.3, U2.4, U3.2 ó U3.4 (esto es, excluyendo las ubicaciones "extremosas" U1.5, U2.5 y U3.5, que corresponden a P4).

En este mismo caso está una categoría piagetiana "de una variable" que no está incluida en la lista de Piaget e Inhelder (1951), y que he denominado aquí P9' por su analogía con P9: P9' (Igualdad de los casos desfavorables y desigualdad de los casos posibles) es equivalente a K4 cuando ocurre en U2.2, U2.3, U2.4, U3.2 ó U3.4 (esto es, excluyendo las ubicaciones "extremosas" U1.1, U2.1 y U3.1, que corresponden a P5).

Cada una de las demás categorías piagetianas corresponde a varias de las aquí construidas:

- P7 (Proporcionalidad) se presenta en K14 (que sólo ocurre en U3.2), K15 (que sólo ocurre en U3.4) y K16 (que sólo ocurre en U3.3)
- P4 (Posibilidad-certeza) se presenta en U1.5, en U2.5 y en U3.5 (todas ellas ocurren en K1, K2, K3, K5 y K7; U3.5 ocurre además en K9 y K11)
- P5 (Posibilidad-imposibilidad) se presenta en U1.1, en U2.1 y en U3.1 (todas ellas ocurren en K1, K2, K3, K4 y K6; U3.1 ocurre además en K8 y K10)
- P10 (Desigualdades respectivas de los casos favorables y de los casos posibles, sin proporcionalidad) se presenta en K1, K2, K6 y K7 (cuando ocurren en U2.2, U2.3, U2.4, U3.2 y U3.4), en K8 y K9 (cuando ocurren en U3.2 y U3.4), en K10 (cuando ocurre en U3.2) y en K11 (cuando ocurre en U3.4).

Las diferencias entre ambas categorizaciones que acabo de describir implican que la que he construido aquí es más fina que la piagetiana. Salvo para las categorías piagetianas P1 y P2, que corresponden a una sola situación de combinación y ubicación, todas las demás quedan desglosadas en varias categorías de las aquí construidas.

La categoría piagetiana P3 corresponde a una sola ubicación, pero en tres combinaciones, una de ellas también descrita en la categoría P8 (igualdad de los casos posibles), mientras que la categoría P6 corresponde a una sola combinación, pero en cinco ubicaciones (que son las cinco de proporcionalidad).

En las "preguntas de una sola variable" de la construcción piagetiana no sólo he agregado una categoría (P9'), sino que he desglosado cada una de las tres (P8, P9 y P9') en cinco ubicaciones: esto permitirá descubrir si en ellas los sujetos se basan en las igualdades (de casos totales, favorables y desfavorables, respectivamente) o si consideran además las estrategias de equilibrio. La tabla permite ver además que en la categoría piagetiana de "igualdad de casos posibles y desigualdad de casos favorables", descrita por K3, quedan también incluidas las categorías con certezas e imposibilidades clasificadas en P3, P4 y P5; lo mismo ocurre en las igualdades de casos favorables y de casos desfavorables.

La categoría piagetiana de proporcionalidad, P7, queda repartida en tres situaciones de combinación-ubicación, que difieren según si ambas probabilidades son menores de .5 (K14-U3.2), mayores de .5 (K15-U3.4) ó iguales a .5 (K16-U3.3), lo que permitirá observar si en alguna de ellas es más fácil para los sujetos detectar la proporcionalidad que en las otras. Por cierto que las categorías piagetianas P1 y P2 son también, de hecho, categorías de proporcionalidad (en las que  $p_1=p_2=0$  y  $p_1=p_2=1$ , respectivamente).

Cada una de las categorías piagetianas P4 (posibilidad-certeza) y P5 (posibilidad-imposibilidad) quedan aquí caracterizadas por tres ubicaciones, que marcan tres alternativas para la "posibilidad", pero además quedan distribuidas en combinaciones nada discriminantes (K1 y K2), en combinaciones correspondientes con alguna igualdad de casos (K3 y K4 ó K5), en combinaciones sin igualdad de casos y sin discriminación entre r y p (K6 ó K7), en combinaciones sin igualdad de casos y con discriminación entre r y p (K8 ó K9) y en combinaciones sin igualdad de casos y con igualdad de r (K10 ó K11).

Finalmente, la categoría piagetiana "de dos variables, sin proporcionalidad", P10, queda repartida en situaciones que cubren casi todas las ubicaciones no extremas (U2.2: "pierdo-empato", U2.3: "pierdo-gano", U2.4: "empato-gano", U3.2: "pierdo-pierdo" y U3.4: "gano-gano") y en todas las ubicaciones sin igualdades de casos y sin proporcionalidad: las que no discriminan (K1 y K2), las que no discriminan entre r y p (K6 y K7), las que discriminan entre r y p (K8 y K9), las que tienen igualdad de r (K10 y K11). Esto permitirá ver si cuando no hay igualdades de casos los sujetos utilizan preferentemente estrategias de equilibrio, de resto o de proporcionalidad.



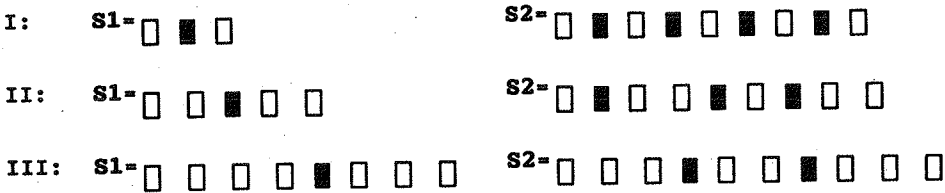
3.2.1.4. PERCEPTIVIDAD

Cuando a partir del tercer experimento vi que algunos sujetos solían dar respuestas distintas a preguntas que correspondían a la misma combinación y la misma ubicación, surgió la conjetura de que para el sujeto no eran equivalentes dos arreglos que de acuerdo con la categorización creada hasta aquí lo eran. La veracidad de esto sólo podría probarse si, al afinar todavía más el sistema de categorías de situaciones, se encontrara ahora que ya no había distintas respuestas a preguntas que resultaran equivalentes con el nuevo sistema. Para ello, creé (7) tres nuevas familias de categorías: las de perceptividad, las de unos y las de multiplicidad, que se verán en este parágrafo y los dos siguientes.

a) Categorías

Las categorías de perceptividad surgieron como un intento de afinar las categorías destinadas a las estrategias de equilibrio, en particular las de "pierdo-pierdo" (U3.2) y "gano-gano" (U3.4). Surgió ahí la hipótesis de que aún dentro de la misma combinación y ubicación, pudieran darse arreglos en las que fuera más o menos fácil percibir a simple vista una diferencia entre las probabilidades  $p_1$  y  $p_2$ , o bien en las que fuera más o menos fácil percibir que alguna de las dos probabilidades estaba muy cerca de la situación de "empato" o de alguna de las dos situaciones extremas ("pierdo" para U3.2, o "gano" para U3.4).

Comparemos por ejemplo los tres siguientes arreglos, todos correspondientes a la combinación K10 y la ubicación U3.2 ("pierdo-pierdo"): el arreglo I=(1,2)(4,5), el arreglo II=(1,4)(3,6) y el arreglo III=(1,7)(2,8), que podemos apreciar gráficamente como sigue:



En cada uno de ellos la elección correcta es S2, pero esto puede ser más o menos evidente para sujetos que tienden a distintos tipos de estrategias. Por ejemplo, un sujeto que tendiera a fijarse más en las probabilidades, encontraría mayor diferencia entre  $p_1$  y  $p_2$  en los arreglos I y II que en el arreglo III. Otro sujeto, que tendiera a estrategias de equilibrio, podría ver que aunque en todas estos espacios "pierde", en S2 del arreglo I está

7. Salvo en el caso de "unos en los casos favorables", estas nuevas familias fueron creadas sistemáticamente sólo al finalizar el quinto experimento, por lo que no fueron incluidas ex profeso en el diseño de ninguno de los cuestionarios.

más cerca de "empatar" que en ningún otro de los espacios, por lo que le resultaría más fácil llegar a elegir S2 en I que en II ó III. Otro sujeto más, que buscara dónde "pierde" menos, vería que en el espacio S1 de los arreglos II y III tiende a "perder" más que en S2, porque  $p_1$  está muy cerca de 0, lo que lo llevaría más fácilmente a reconocer una diferencia entre  $p_1$  y  $p_2$  en los arreglos II y III que en el arreglo I.

En casos como éste vale entonces distinguir, dentro de las situaciones de combinación-ubicación, los siguientes tipos de diferencias perceptibles:

- la diferencia entre las dos probabilidades, que denominaré  $\delta_p$ ;
- la diferencia entre  $\frac{1}{2}$  y la probabilidad más cercana a  $\frac{1}{2}$ , que denominaré  $\delta_s$ ;
- la diferencia entre 0 y la probabilidad más cercana a 0, que denominaré  $\delta_0$ ;

además, cuando la ubicación es U3.4 ("gano-gano") no interesará tanto conocer esta última diferencia sino:

- la diferencia entre 1 y la probabilidad más cercana a 1, que denominaré  $\delta_1$ ;

A las cuatro variables así definidas las denominaré perceptividad.

Como la perceptividad adquiere su mayor sentido en las ubicaciones U3.2 y U3.4, sólo vale la pena hablar de las diferencias menores de  $\frac{1}{2}$  (puesto que en las otras ubicaciones la localización con respecto a  $\frac{1}{2}$  de ambas probabilidades deja clara una elección por perceptividad). Por otro lado, como se trata de un fenómeno subjetivo, no tiene sentido hablar del valor exacto de esas diferencias, sino que las he separado arbitrariamente en cuatro categorías (<sup>8</sup>):

diferencias nulas (N):	iguales a cero
diferencias chicas (C):	entre cero y 0.1
diferencias medianas (M):	entre 0.1 y 0.3
diferencias grandes (G):	mayores de 0.3

En nuestro ejemplo con (1,3)(2,5), tenemos que  $\delta_p=C$ ,  $\delta_s=M$ ,  $\delta_0=M$  y  $\delta_1=G$ :

<sup>8</sup>. Cuando aquí hablo de "diferencias" me refiero al valor absoluto de las diferencias, esto es, las diferencias sin tomar en cuenta el signo.

S1	S2	Perceptividad:
□ ■ □ □	□ ■ □ □ ■ □ □	$\delta_p=C$ $\delta_5=M$ $\delta_0=M$ $\delta_1=G$
$p_1 = 0.25$ $ p_1 - .5  = 0.25$ $ p_1 - 0  = 0.25$ $ p_1 - 1  = 0.75$	$p_2 = 0.29$ $ p_2 - .5  = 0.21$ $ p_2 - 0  = 0.29$ $ p_2 - 1  = 0.71$	$ p_1 - p_2  = 0.04 \leq 0.1$ $0.1 <  p_2 - .5  \leq 0.3$ $0.1 <  p_1 - 0  \leq 0.3$ $ p_2 - 1  > 0.3$

**b) Hipótesis**

La hipótesis relacionada con la perceptividad:

H10.3: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de perceptividad

se desglosa como sigue:

- H10.3.1: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con mayor  $\delta_p$  que con menor  $\delta_p$ ;
- H10.3.2: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con menor  $\delta_5$  que con mayor  $\delta_5$ ;
- H10.3.3: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con menor  $\delta_0$  que con mayor  $\delta_0$ ;
- H10.3.4: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con menor  $\delta_1$  que con mayor  $\delta_1$ .

A nivel hipotético también quedaría la revisión de los límites 0.1 y 0.3, que hay sido puestos aquí de manera arbitraria:

H10.3.5: Después de una experimentación cuidadosa podrían cambiar los límites 0.1 y 0.3 a unos que estuvieran más correlacionados con un cambio de respuesta por parte de los sujetos.

**3.2.1.5. UNOS**

Otra estrategia, también relacionada con la perceptividad, es la que Piaget e Inhelder (1951) detectan como la elección del lado en que hay un solo elemento favorable. Aunque para la escuela ginebrina esto corresponde al estadio preoperatorio, lo detecté en la segunda fase del segundo experimento, y pensé que valía la pena plantear preguntas que permitieran detectar en experimentos futuros ésta y otras estrategias primitivas.

**a) Categorías**

Para poder detectar este tipo de estrategias, era necesario poder detectar, dadas la combinación, la ubicación y las variables de perceptividad que quisiera manejar, cuáles arreglos contenían un caso favorable igual a uno. Como en principio se podía

presentar también el caso en que un sujeto eligiera o dejara de elegir un lado por tener un solo elemento desfavorable, defini las siguientes variables de unos: anoté como  $U_f=1$  la existencia de un uno en algún caso favorable, y como  $U_d=1$  la existencia de un uno en algún caso desfavorable.

En nuestro ejemplo con (1,3)(2,5),  $U_f=1$  porque  $f_1 = 1$ , y  $U_d=0$  porque ningún caso desfavorable es igual a 1.

S1	S2	Unos:
□ ■ □ □	□ ■ □ □ ■ □ □	$U_f=1$ $U_d=0$
$f_1 = 1$ $d_1 = 3$	$f_2 = 2$ $d_2 = 5$	$f_1 = 1$ $d_1 > 1$ y $d_2 > 1$

Como demostraré más adelante, no hay unos en todas las combinaciones ni ubicaciones; por ejemplo, la ubicación  $U_{3.2}$  no tiene  $U_d=1$  ni la ubicación  $U_{3.4}$  tiene  $U_f=1$ .

#### b) Hipótesis

Para desglosar la hipótesis relacionada con los unos:

**H10.4:** Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de unos

hay dos hipótesis relacionadas con cada una de las categorías de unos; en cada caso una se refiere a una estrategia primitiva y otra a una centración común.

Con respecto a los unos en casos favorables, las dos hipótesis son:

- H10.4.1:** En las situaciones en que  $U_f=1$  se podrá detectar la estrategia primitiva que consiste en la elección de un lado porque tiene UN SOLO caso favorable (elección del lado en que  $f=1$ );
- H10.4.2:** En las situaciones en que  $U_f=1$  se verá con mayor frecuencia que cuando  $U_f=0$  la estrategia de centración en los casos favorables (elección del lado contrario al de  $f=1$ ).

Y, con respecto a los unos en casos desfavorables, las dos hipótesis son:

- H10.4.3:** En las situaciones en que  $U_d=1$  se podrá detectar la estrategia primitiva que consiste en la elección de un lado porque el otro tiene UN SOLO caso desfavorable (elección del lado contrario al de  $d=1$ );
- H10.4.4:** En las situaciones en que  $U_d=1$  se verá con mayor frecuencia que cuando  $U_d=0$  la estrategia de centración en los casos desfavorables (elección del lado en que  $d=1$ ).

3.2.1.6. MULTIPLICIDAD

La tercera familia de las categorías creadas con la finalidad de afinar el sistema de situaciones es una "medida de la facilidad" con la que se pueden detectar múltiplos entre los elementos de un espacio muestral, con la idea de que mientras más fácil le resulte a un sujeto esta detección, tenderá más a utilizar las estrategias de proporcionalidad.

a) Categorías

El referente teórico utilizado en esta construcción es el que planteó Noelting (1980, pág. 334) en su estudio del razonamiento proporcional (9). El distingue dos tipos de razonamiento proporcional que, en mi terminología, se definen así:

- un razonamiento proporcional DENTRO, que establece dos relaciones entre dos elementos (de clases diferentes) del mismo espacio muestral; cada relación se puede expresar con una pregunta del tipo "En este espacio muestral, ¿cuántos de esta clase hay por cada uno de la otra?";
- un razonamiento proporcional ENTRE, que establece dos relaciones entre dos elementos (de la misma clase) de espacios muestrales diferentes; cada relación se puede expresar con una pregunta del tipo "En esta clase, ¿cuántos de este espacio muestral hay por cada uno del otro?".

Ilustremos esto con un ejemplo. Pensemos que las dos clases son la de favorables y la de desfavorables, y que tenemos el arreglo con el que hemos estado trabajando:

S1	S2
□ ■ □ □	□ ■ □ □ ■ □ □

Un razonamiento de tipo DENTRO podría expresarse en términos como éstos:

- "En S1 tengo 3 blancas para cada negra; en S2 tengo sólo 2½ blancas para cada negra: hay proporcionalmente menos blancas en S2",

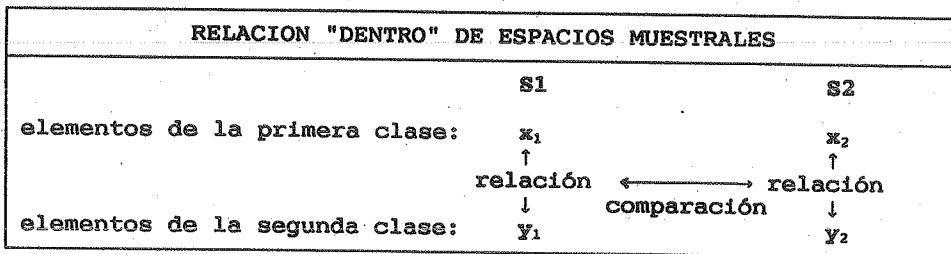
mientras que un razonamiento de tipo ENTRE podría ser algo así:

- "En las negras, para cada una de S1 tengo 2 de S2; en las blancas, para cada una de S1 tengo menos de 2 de S2: hay proporcionalmente más negras en S2".

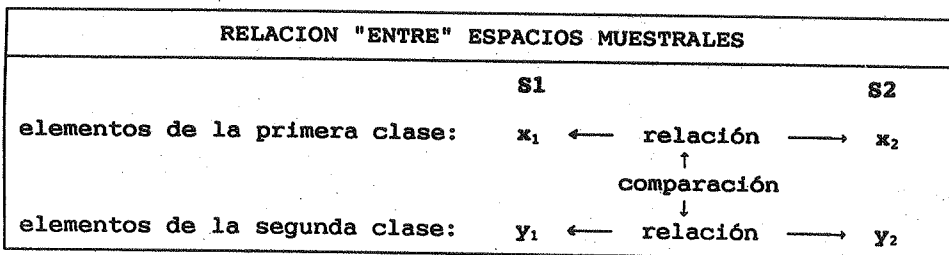
En general, si  $x_1$  y  $x_2$  son los dos elementos de una clase (que puede ser de favorables, desfavorables o totales) y si  $y_1$  y  $y_2$  son los dos elementos de otra clase (que puede ser de favorables, desfavorables o totales), entonces las estrategias DENTRO y ENTRE se pueden esquematizar como sigue. Una estrategia de tipo

9. Se trata del clásico estudio de Noelting conocido como del "jugo de naranja" (ver en el capítulo 1 el §1.5.1.2).

DENTRO establece dos relaciones "dentro", una en cada columna del esquema (en cada espacio muestral), y después compara los resultados:



Mientras que una estrategia de tipo ENTRE establece dos relaciones "entre", una en cada renglón del esquema, y después compara los resultados <sup>(10)</sup>:



Ahora bien, hay situaciones en las que es más fácil que en otras detectar las relaciones planteadas: a la medida de esta facilidad la denominaré multiplicidad. Pienso que las situaciones más fáciles son aquellas que satisfacen una de las siguientes condiciones:

- o bien hay unos (esto es,  $U_1=1$  ó  $U_2=1$  como quedó establecido en el párrafo anterior) y se puede razonar con argumentos del tipo "aquí hay tantas blancas por una negra...", como en el ejemplo recién presentado,
- o bien los elementos a comparar DENTRO o ENTRE son iguales (uno a uno, como dijeron varios sujetos).

A estas situaciones les asigno arbitrariamente el valor 1 de multiplicidad.

<sup>10</sup>. Al respecto, un buen ejemplo está en el trabajo de Maury (1986, pág. 145): en el ejercicio (2,3)(4,6) queda favorecida la comparación entre espacios muestrales, porque una bolsa es el doble de la otra, (y efectivamente 83% de los que usan argumentos proporcionales lo hacen así), mientras que en el ejercicio (2,6)(3,9) queda favorecida la comparación dentro de espacios muestrales porque en cada bolsa los desfavorables son el triple de los favorables (y efectivamente 83% de los que usan argumentos proporcionales lo hacen así).

En orden de dificultad vienen luego las situaciones en las que uno de los elementos a comparar DENTRO o ENTRE es múltiplo del otro: es el resultado de multiplicar al otro por un entero  $k$ . Esto es tanto más fácil de detectar mientras más pequeño sea el factor  $k$  (11), y a las situaciones que están en este caso les asigno arbitrariamente el valor de  $k$ . A las situaciones que no corresponden a ninguno de los casos señalados arriba les asigno el valor 0.

De este modo, si la multiplicidad DENTRO o ENTRE vale 0 es que la situación no permite fácilmente una comparación por estrategias de proporcionalidad, y para valores distintos de cero mientras menor sea la multiplicidad más fácil es la detección.

En nuestro ejemplo con (1,3)(2,5), ya vimos que podemos encontrar que hay el doble de negras en S2 que en S1 (ENTRE), y también que en S1 hay el triple de blancas que de negras (DENTRO). Como detectamos esas relaciones gracias a que  $U_f=1$ , asignamos los valores  $E=1$  y  $D=1$ .

S1	S2	Multiplicidad:
		$E = 1$ $D = 1$
$f_1 = 1$ $d_1 = 3$	$f_2 = 2$  $d_2 = 5$	$E: f_2=2(f_1) (U_f=1)$  $D: d_1=3(f_1) (U_f=1)$

**b) Hipótesis**

La hipótesis relacionada con la multiplicidad:

H10.5: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de multiplicidad

se convierte en dos, una para cada variable:

H10.5.1: Los sujetos tienden a resolver mejor y utilizando estrategias de proporcionalidad las preguntas en las que  $D=1$  que en las que  $D>1$ , y en éstas mejor que en las que  $D=0$ ;

H10.5.2: Los sujetos tienden a resolver mejor y utilizando estrategias de proporcionalidad las preguntas en las que  $E=1$  que en las que  $E>1$ , y en éstas mejor que en las que  $E=0$ .

11. Esta afirmación es válida sólo para valores muy pequeños de  $k$ , que son los manejados en este trabajo. Si se desea considerar el panorama en general, hay que considerar que es más fácil detectar múltiplos si a su vez  $k$  es múltiplo de 10 que si no; los múltiplos más difíciles de detectar son tal vez aquellos en los que  $k$  es un primo mayor de 5, y tanto más difíciles mientras mayor sea  $k$ .

### 3.2.2. CONSTRUCCION FORMAL

Este apartado, que tiene la misma estructura que el anterior, se dedica a la formalización de las categorías construidas para el sistema de situaciones, es decir, a los modelos matemáticos que las sustentan. Primero se presentarán algunas especificaciones formales de la notación utilizada, y después, para cada una de las variables experimentales de situación, se irán especificando los aspectos matemáticos de las definiciones y demostrando todas las afirmaciones de inexistencia proclamadas en los párrafos del apartado anterior y en los de éste mismo.

Le recuerdo al lector no matemático que si lo desea puede prescindir de la lectura de este apartado: aunque aquí está una parte de los fundamentos del trabajo desarrollado, se trata de la formalización matemática, mientras que la conceptual fue ya presentada en el apartado anterior.

#### 3.2.2.1. NOTACION GENERAL

Por construcción, tenemos:	
casos totales:	$0 < n_1 \leq n_2$
casos favorables:	$0 \leq f_j \leq n_j$ , y si $n_1 = n_2$ , $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq n_2$
casos desfavorables:	$d_j = n_j - f_j$
restas:	$r_j = f_j - d_j$
probabilidades:	$p_j = f_j / n_j$
espacios muestrales:	$S_j = (f_j, d_j)$
arreglo:	$S1, S2$
elementos:	$f_j, d_j, n_j$
clases:	$\{n_1, n_2\}, \{f_1, f_2\}, \{d_1, d_2\}$

Esta convención para los valores de  $n_j$  y de  $f_j$  permite determinar unívocamente los arreglos  $S1, S2$  (no se duplica ninguno), y no excluye las situaciones de identidad (puesto que cuando  $n_1 = n_2$ , puede ocurrir que  $f_1 = f_2$ ).

#### 3.2.2.2. COMBINACIONES

Para definir la combinación de un arreglo  $S1, S2$  definimos primero los números naturales  $n, f, d, r, p$ , como sigue:

$$\begin{array}{lll}
 n = 0 \text{ si } n_1 = n_2, & n = 1 \text{ si } n_1 < n_2; & \\
 f = 0 \text{ si } f_1 = f_2, & f = 1 \text{ si } f_1 < f_2, & f = 2 \text{ si } f_1 > f_2; \\
 d = 0 \text{ si } d_1 = d_2, & d = 1 \text{ si } d_1 < d_2, & d = 2 \text{ si } d_1 > d_2; \\
 r = 0 \text{ si } r_1 = r_2, & r = 1 \text{ si } r_1 < r_2, & r = 2 \text{ si } r_1 > r_2; \\
 p = 0 \text{ si } p_1 = p_2, & p = 1 \text{ si } p_1 < p_2, & p = 2 \text{ si } p_1 > p_2.
 \end{array}$$

A partir de ahí definimos la combinación de  $S1, S2$  como el número:

$$K = 10^4 n + 10^3 f + 10^2 d + 10 r + p$$

lo cual puede expresarse como  $K = nfdrp$ , abusando de la notación.



Aunque en principio podría haber tantas como  $2 \times 3^4 = 162$  combinaciones posibles, sólo hay diecisiete, que son las siguientes:

00000 (i)	11011 (iii)	11110 (vi)	11121 (vi)
01211 (i)	11100 (vi)	11111 (vi)	11122 (vi)
10120 (ii)	11101 (vi)	11112 (vi)	11211 (iv)
10122 (ii)	11102 (vi)	11120 (vi)	12122 (v)
11010 (iii)			

Los siguientes párrafos, numerados (i) a (vi) en referencia a lo marcado arriba, demuestran la afirmación anterior:

- (i) Si  $n=0$ ,  $n_1=n_2$ , entonces  $f_1=f_2$  o  $f_1 < f_2$ . Si  $f_1=f_2$ , entonces  $f=0$  y también  $d_1=n_1-f_1=n_2-f_2=d_2$  por lo que  $d=0$ ; además  $r_1=f_1-d_1=f_2-d_2=r_2$  por lo que  $r=0$ , y  $p_1=f_1/n_1=f_2/n_2=p_2$  por lo que  $p=0$ . Si  $f_1 < f_2$ , por lo que  $f=1$  y  $p_1 < p_2$  por lo que  $p=1$ . Como  $f_1 < f_2$  y  $n_1=n_2$ ,  $d_1 > d_2$ , por lo que  $d=2$ . Como  $f_1 < f_2$  y  $d_1 > d_2$ ,  $r_1 < r_2$  por lo que  $r=1$ . Por lo tanto, si  $n=0$ , entonces  $K=00000$  ó  $K=01211$ .
- (ii) Si  $n=1$  y  $f=0$ , entonces  $n_1 < n_2$  y  $f_1=f_2$  de donde  $d_1 < d_2$  por lo que  $d=1$ . Como  $f_1=f_2$  y  $d_1 < d_2$ ,  $r_1 > r_2$  por lo que  $r=2$ . Si  $f_1=f_2=0$ ,  $p_1=p_2$  por lo que  $p=0$ , y si  $f_1=f_2 > 0$ ,  $p_1 > p_2$  por lo que  $p=2$ . Por lo tanto, si  $n=1$  y  $f=0$ , entonces  $K=10120$  ó  $K=10122$ .
- (iii) Si  $n=1$ ,  $f=1$  y  $d=0$ , entonces  $n_1 < n_2$ ,  $f_1 < f_2$  y  $d_1=d_2$ . Como  $f_1 < f_2$  y  $d_1=d_2$ ,  $r_1 < r_2$  por lo que  $r=1$ . Si  $d_1=d_2=0$ ,  $p_1=p_2$  por lo que  $p=0$ , y si  $d_1=d_2 > 0$ ,  $p_1 < p_2$  por lo que  $p=1$ . Por lo tanto, si  $n=1$ ,  $f=1$  y  $d=0$ , entonces  $K=11010$  ó  $K=11011$ .
- (iv) Si  $n=1$ ,  $f=1$  y  $d=2$ , entonces  $n_1 < n_2$ ,  $f_1 < f_2$  y  $d_1 > d_2$ . Como  $n_1 < n_2$  y  $d_1 > d_2$ ,  $p_1 < p_2$  por lo que  $p=1$ . Como  $f_1 < f_2$  y  $d_1 > d_2$ ,  $r_1 < r_2$  por lo que  $r=1$ . Por lo tanto, si  $n=1$ ,  $f=1$  y  $d=2$ , entonces  $K=11211$ .
- (v) Si  $n=1$  y  $f=2$ , entonces  $n_1 < n_2$  y  $f_1 > f_2$  de donde  $d_1 < d_2$  por lo que  $d=1$  y de donde  $p_1 > p_2$  por lo que  $p=2$ . Como  $f_1 > f_2$  y  $d_1 < d_2$ ,  $r_1 > r_2$  por lo que  $r=2$ . Por lo tanto, si  $n=1$  y  $f=2$ , entonces  $K=12122$ .
- (vi) La última manera de combinar valores de  $n$ ,  $f$  y  $d$  está dada por  $n=1$ ,  $f=1$  y  $d=1$ , que no impone restricciones sobre  $r$  y  $p$ , por lo que pueden existir las  $3^2=9$  combinaciones restantes:  $K=11100$ ,  $K=11101$ ,  $K=11102$ ,  $K=11110$ ,  $K=11111$ ,  $K=11112$ ,  $K=11120$ ,  $K=11121$ ,  $K=11122$ .

La clasificación parcialmente ordenada de las diecisiete combinaciones posibles parte de las combinaciones que no discriminan:  $K=00000$ ,  $K=11211$  y  $K=12122$ , y luego se va graduando según la discrepancia con respecto a ellas. Se obtiene entonces:

\* Tres combinaciones sin discriminación:

- una combinación de identidad, que denomino  $K_0$ :  
 $K_0=00000$ , en la que todas las estrategias llevan a la elección de "da igual"
- dos combinaciones que llevan a la elección de uno de los dos espacios muestrales, a las que llamo  $K_1$  y  $K_2$ :  
 $K_1=11211$ , en la que todas las estrategias llevan a la elección de  $S_2$ ,  
 $K_2=12122$ , en la que (casi) todas las estrategias llevan a la elección de  $S_1$ .

\* Cinco combinaciones que tienen una discrepancia con respecto a las combinaciones sin discriminación, en las cuales  $r$  y  $p$  coinciden (causan la misma elección):

- una combinación con igualdad de casos totales, que denomino K3:

K3=01211, discrepa de K1 en que  $n = 0$ ,

- dos combinaciones con igualdad de casos desfavorables o favorables, que denomino K4 y K5:

K4=11011, discrepa de K1 en que  $d = 0$ ,

K5=10122, discrepa de K2 en que  $f = 0$ ;

- dos combinaciones sin igualdades de casos totales, desfavorables o favorables, que denomino K6 y K7:

K6=11111, discrepa de K1 en que  $d = 1$ ,

K7=11122, discrepa de K2 en que  $f = 1$ .

\* Seis combinaciones que tienen dos discrepancias con respecto a las combinaciones sin discriminación, en las cuales  $r$  y  $p$  discrepan entre sí (causan diferente elección):

- dos combinaciones sin igualdades de casos totales, desfavorables o favorables, que denomino K8 y K9:

K8=11121, discrepa de K1 en que  $d = 1$  y  $r = 1$ ,

K9=11112, discrepa de K2 en que  $f = 1$  y  $r = 1$ ;

- dos combinaciones sin igualdades de casos totales, desfavorables o favorables y con igualdad de resta, que denomino K10 y K11:

K10=11101, discrepa de K1 en que  $d = 1$  y  $r = 0$ ,

K11=11102, discrepa de K2 en que  $f = 1$  y  $r = 0$ ;

- dos combinaciones con igualdad de casos favorables o desfavorables y con proporcionalidad, que denomino K12 y K13:

K12=10120, discrepa de K2 en que  $f = 0$  y  $p = 0$ ,

K13=11010, discrepa de K1 en que  $d = 0$  y  $p = 0$ .

\* Tres combinaciones que tienen tres discrepancias con respecto a las combinaciones sin discriminación, todas ellas de proporcionalidad:

- dos combinaciones de proporcionalidad, en las que  $r$  y  $p$  discrepan entre sí (causan diferente elección), que denomino K14 y K15:

K14=11120, discrepa de K1 en que  $d=1$ ,  $r=2$  y  $p=0$ , y discrepa de K2 en que  $f=1$  y  $p=0$ ,

K15=11110, discrepa de K1 en que  $d=1$ ,  $r=1$  y  $p=0$ , y discrepa de K2 en que  $f=1$ ,  $r=1$  y  $p=0$ ;

- una combinación de proporcionalidad, en las que  $r$  y  $p$  coinciden entre sí (causan la misma elección), que denomino K16:

K16=11100, discrepa de K1 en que  $d=1$ ,  $r=0$  y  $p=0$ , y discrepa de K2 en que  $f=1$ ,  $r=0$  y  $p=0$ .

### 3.2.2.3. UBICACIONES

En el siguiente cuadro página se hace la definición formal de las ubicaciones con una presentación gráfica.

Si $p_n = \min\{p_1, p_2\}$ y si $p_M = \max\{p_1, p_2\}$ , entonces:	
ubicación U1.1:	$p_n=0$ <span style="float:right"><math>.5 &lt; p_M &lt; 1</math></span>
ubicación U1.3:	$p_n=0$ <span style="float:right"><math>p_M=1</math></span>
ubicación U1.5:	$0 < p_n < .5$ <span style="float:right"><math>p_M=1</math></span>
ubicación U2.1:	$p_n=0$ $p_M=.5$
ubicación U2.2:	$0 < p_n < .5$ <span style="float:right"><math>p_M=.5</math></span>
ubicación U2.3:	$0 < p_n < .5$ <span style="float:right"><math>.5 &lt; p_M &lt; 1</math></span>
ubicación U2.4:	$p_n=.5$ <span style="float:right"><math>.5 &lt; p_M &lt; 1</math></span>
ubicación U2.5:	$p_n=.5$ <span style="float:right"><math>p_M=1</math></span>
ubicación U3.1:	$p_n=0$ ; $0 \leq p_M < .5$
ubicación U3.2:	$0 < p_n \leq p_M < .5$
ubicación U3.3:	$p_n=.5=p_M$
ubicación U3.4:	$.5 < p_n \leq p_M < 1$
ubicación U3.5:	$.5 < p_n \leq 1$ ; $p_M=1$
<div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%; border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"> <span>0</span> <span>0.5</span> <span>1</span> </div>	

Aunque hay arreglos para cada una de las trece ubicaciones definidas aquí, esto no ocurre para todas las combinaciones, sino que hay las siguientes restricciones (ver también la tabla de la pág. 126):

- la combinación K0 sólo tiene las ubicaciones U3.1, U3.2, U3.3, U3.4 y U3.5
- las combinaciones K1 a K3 pueden tener todas las ubicaciones menos U3.3;
- las combinaciones K4 y K6 pueden tener todas las ubicaciones menos U1.3, U1.5, U2.5, U3.5 (en las que  $p_M=1$ ) y U3.3;
- las combinaciones K5 y K7 pueden tener todas las ubicaciones menos U1.1, U1.3, U2.1, U3.1 (en las que  $p_n=0$ ) y U3.3;
- las combinaciones K8 y K10 sólo tienen las ubicaciones U3.1 y U3.2;
- las combinaciones K9 y K11 sólo tienen las ubicaciones U3.4 y U3.5;
- la combinación K12 sólo tiene la ubicación U3.1;
- la combinación K13 sólo tiene la ubicación U3.5;
- la combinación K14 sólo tiene la ubicación U3.2;
- la combinación K15 sólo tiene la ubicación U3.4;
- la combinación K16 sólo tiene la ubicación U3.3.

Los siguientes párrafos demuestran las afirmaciones anteriores:

En K0=00000 sólo existen las ubicaciones U3.1, U3.2, U3.3, U3.4 y U3.5, porque son en las que  $p_1=p_2$ , condición necesaria porque  $p=0$ .

En K4=11011 no existen las ubicaciones U1.5, U1.3, U2.5 y U3.5 (que tienen  $p_M=1$ ), porque si existieran, como  $p=1$ , se ten-

- dría  $p_2=p_n=1$  por lo que  $d_2=0$ ; y como  $d=0$  se tendría  $d_1=0$ , lo que haría que  $p_1=1$ ; pero esto contradice  $p=1$ .
- En K5=10122 no existen las ubicaciones U1.1, U1.3, U2.1 y U3.1 (que tienen  $p_n=0$ ), porque si existieran, como  $p=2$ , se tendría  $p_2=p_n=0$  por lo que  $f_2=0$ ; y como  $f=0$  se tendría  $f_1=0$ , lo que haría que  $p_1=0$ ; pero esto contradice  $p=2$ .
- En K6=11111 no existen las ubicaciones U1.5, U1.3, U2.5 y U3.5 (que tienen  $p_n=1$ ), porque si existieran, como  $p=1$ , se tendría  $p_2=p_n=1$  por lo que  $d_2=0$ ; y entonces se tendría  $d_1 \geq d_2$ , lo que contradice  $d=1$ .
- En K7=11122 no existen las ubicaciones U1.1, U1.3, U2.1 y U3.1 (que tienen  $p_n=0$ ), porque si existieran, como  $p=2$ , se tendría  $p_2=p_n=0$  por lo que  $f_2=0$ ; y entonces se tendría  $f_1 \geq f_2$ , lo que contradice  $f=1$ .

Para las combinaciones K8 a K16, consideremos la igualdad:

$$(f_1-f_2)d_2 - (d_1-d_2)f_2 = f_1d_2 - f_2d_1 \dots \dots \dots (*)$$

(Observación:  $f_1d_2 - f_2d_1$  es negativo cuando  $p=1$ , positivo cuando  $p=2$  y nulo cuando  $p=0$ ). Entonces:

- En K8=11121, tenemos de (\*) que  $d_2 = (d_1-d_2)f_2/(f_1-f_2) + (f_1d_2-f_2d_1)/(f_1-f_2)$ . Como  $f=1$ ,  $d=1$  y  $p=1$ ,  $(d_1-d_2)/(f_1-f_2) > 0$  y  $(f_1d_2-f_2d_1)/(f_1-f_2) > 0$ . De ahí que  $d_2 > f_2$ , de donde  $p_2 = \max\{p_1, p_2\} < .5$ , lo que sólo ocurre en las la ubicaciones U3.1 y U3.2.
- En K9=11112, tenemos de (\*) que  $f_2 = (f_1-f_2)d_2/(d_1-d_2) - (f_1d_2-f_2d_1)/(d_1-d_2)$ . Como  $f=1$ ,  $d=1$  y  $p=2$ ,  $(f_1-f_2)/(d_1-d_2) > 0$  y  $(f_1d_2-f_2d_1)/(d_1-d_2) < 0$  de donde  $-(f_1d_2-f_2d_1)/(d_1-d_2) > 0$ . De ahí que  $f_2 > d_2$ , de donde  $p_2 = \min\{p_1, p_2\} > .5$ , lo que sólo ocurre en las ubicaciones U3.4 y U3.5.
- En K10=11101, como  $r=0$ ,  $f_1-d_1=f_2-d_2$ , de donde  $f_1-f_2=d_1-d_2$ . Como  $p=1$ , de (\*) resulta  $(d_2-f_2)(f_1-f_2) < 0$  y como  $f=1$ ,  $f_1-f_2 < 0$ . Entonces  $d_2-f_2 > 0$ , o sea que  $d_2 > f_2$ , de donde  $p_2 = \max\{p_1, p_2\} < .5$ , lo que sólo ocurre en las la ubicaciones U3.1 y U3.2.
- En K11=11102, como  $r=0$ ,  $f_1-d_1=f_2-d_2$ , de donde  $f_1-f_2=d_1-d_2$ . Como  $p=2$ , de (\*) resulta  $(d_2-f_2)(f_1-f_2) > 0$  y como  $f=1$ ,  $f_1-f_2 < 0$ . Entonces  $d_2-f_2 < 0$ , o sea que  $d_2 < f_2$ , de donde  $p_2 = \min\{p_1, p_2\} > .5$ , lo que sólo ocurre en las ubicaciones U3.4 y U3.5.
- En K12=10120, como  $p=0$ , tenemos de (\*)  $(f_1-f_2)d_2 - (d_1-d_2)f_2 = 0$ , y como  $f=0$ ,  $(f_1-f_2)d_2 = (d_1-d_2)f_2 = 0$ . Como  $d=1$ ,  $d_1 < d_2$ , por lo que  $f_2 = f_1 = 0$  y  $p_2=p_1=0$ , lo que sólo ocurre en la ubicación U3.1 (se trata de la clase de equivalencia del número racional 0).
- En K13=11010, como  $p=0$ , tenemos de (\*)  $(f_1-f_2)d_2 - (d_1-d_2)f_2 = 0$ , y como  $d=0$ ,  $(f_1-f_2)d_2 = (d_1-d_2)f_2 = 0$ . Como  $f=1$ ,  $f_1 < f_2$ , por lo que  $d_2 = d_1 = 0$  y  $p_2=p_1=1$ , lo que sólo ocurre en la ubicación U3.5 (se trata de la clase de equivalencia del número racional 1).
- En K14=11120, como  $p=0$  tenemos de (\*)  $(f_1-f_2)d_2 = (d_1-d_2)f_2$ , de donde  $d_2 = (d_1-d_2)f_2/(f_1-f_2)$ . Como  $r=2$ ,  $f_1-d_1 > f_2-d_2$ , o sea que  $f_1-f_2 > d_1-d_2$ , y como  $f=1$ ,  $d_1-d_2 < f_1-f_2 < 0$ . Entonces  $(d_1-d_2)/(f_1-f_2) > 1$ , o sea que  $d_2 > f_2$ , de donde  $p_2=p_1 < .5$ , que es la

ubicación U3.2 (se trata del conjunto de todas las clases de equivalencia de los números racionales entre 0 y  $\frac{1}{2}$ ).

En K15=11110, como  $p=0$  tenemos de (\*)  $(f_1-f_2)d_2 = (d_1-d_2)f_2$ , de donde  $f_2 = (f_1-f_2)d_2/(d_1-d_2)$ . Como  $r=1$ ,  $f_1-d_1 < f_2-d_2$ , o sea que  $f_1-f_2 < d_1-d_2$ , y como  $d=1$ ,  $f_1-f_2 < d_1-d_2 < 0$ . Entonces  $(f_1-f_2)/(d_1-d_2) > 1$ , o sea que  $f_2 > d_2$ , de donde  $p_2=p_1 > .5$ , que es la ubicación U3.4 (se trata del conjunto de todas las clases de equivalencia de los números racionales entre  $\frac{1}{2}$  y 1).

En K16=11100, como  $p=0$  tenemos de (\*)  $(f_1-f_2)d_2 = (d_1-d_2)f_2$ . Además, como  $r=0$ ,  $f_1-d_1=f_2-d_2$ , o sea que  $f_1-f_2=d_1-d_2$ . Entonces  $d_2=f_2$ , de donde  $p_2=p_1=.5$ , que es la ubicación U3.3.

Recíprocamente, la ubicación U3.3 implica  $p_1=p_2$ , por lo que  $p=0$ . Como además  $p_1=p_2=.5$ , se tiene  $f_1=d_1$  y  $f_2=d_2$  de donde  $r_1=r_2$  por lo que  $r=0$ . Por lo tanto, la ubicación U3.3 sólo existe en las combinaciones K0=00000 y K16=11100 (se trata de la clase de equivalencia del número racional  $\frac{1}{2}$ ).

#### 3.2.2.4. PERCEPTIVIDAD

Formalmente, defino las variables de perceptividad  $\delta_p$ ,  $\delta_5$ ,  $\delta_0$  y  $\delta_1$  como sigue.

La diferencia entre las dos probabilidades,  $\delta_p$ , toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \delta_p &= N \text{ si } |p_1-p_2| = 0, \\ \delta_p &= C \text{ si } 0 < |p_1-p_2| \leq 0.1, \\ \delta_p &= M \text{ si } 0.1 < |p_1-p_2| < 0.3, \\ \delta_p &= G \text{ si } |p_1-p_2| \geq 0.3. \end{aligned}$$

La diferencia entre .5 y el más cercano a .5 de entre  $p_1$  y  $p_2$ ,  $\delta_5$ , toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \delta_5 &= N \text{ si } \min\{|p_1-.5|, |p_2-.5|\} = 0, \\ \delta_5 &= C \text{ si } 0 < \min\{|p_1-.5|, |p_2-.5|\} \leq 0.1, \\ \delta_5 &= M \text{ si } 0.1 < \min\{|p_1-.5|, |p_2-.5|\} < 0.3, \\ \delta_5 &= G \text{ si } \min\{|p_1-.5|, |p_2-.5|\} \geq 0.3. \end{aligned}$$

La diferencia entre 0 y el más cercano a 0 de entre  $p_1$  y  $p_2$ ,  $\delta_0$ , toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= N \text{ si } \min\{p_1, p_2\} = 0, \\ \delta_0 &= C \text{ si } 0 < \min\{p_1, p_2\} \leq 0.1, \\ \delta_0 &= M \text{ si } 0.1 < \min\{p_1, p_2\} < 0.3, \\ \delta_0 &= G \text{ si } \min\{p_1, p_2\} \geq 0.3. \end{aligned}$$

Por último, la diferencia entre 1 y el más cercano a 1 de entre  $p_1$  y  $p_2$ ,  $\delta_1$ , toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= N \text{ si } \min\{(1-p_1), (1-p_2)\} = 0, \\ \delta_1 &= C \text{ si } 0 < \min\{(1-p_1), (1-p_2)\} \leq 0.1, \\ \delta_1 &= M \text{ si } 0.1 < \min\{(1-p_1), (1-p_2)\} < 0.3, \\ \delta_1 &= G \text{ si } \min\{(1-p_1), (1-p_2)\} \geq 0.3. \end{aligned}$$

No tiene sentido estudiar en qué situaciones de combinación y ubicación ocurren los valores C, M y G de las variables  $\delta_p$ ,  $\delta_5$ ,  $\delta_0$  y  $\delta_1$ , puesto que todos ellos son categorías arbitrarias. En cuanto al valor N (nulas diferencias), tenemos que:

-  $\delta_p = N$  cuando  $p_1 = p_2$ , es decir en las combinaciones K0 y K12 a K16;

- $\delta_5 = N$  en las ubicaciones con al menos un "empato", es decir en U2.1, U2.2, U2.4, U2.5 y U3.3;
- $\delta_0 = N$  en las ubicaciones con al menos una situación extrema de "pierdo", es decir en U1.1, U1.3, U2.1 y U3.1;
- $\delta_1 = N$  en las ubicaciones con al menos una situación extrema de "gano", es decir en U1.3, U1.5, U2.5 y U3.5.

3.2.2.5. UNOS

Formalmente, defino los unos en casos favorables  $U_f$  y los unos en casos desfavorables  $U_d$  como sigue:

$U_f=1$  si  $f_1=1$  o  $f_2=1$ ;  $U_f=0$  si no;  
 $U_d=1$  si  $d_1=1$  o  $d_2=1$ ;  $U_d=0$  si no.

Las situaciones de combinación-ubicación en las que no existe alguna de las situaciones  $U_f=1$  ó  $U_d=1$  se muestran en la siguiente tabla:

ubicación	Combinaciones en las que no existen $U_f=1$ ó $U_d=1$	
	inexistencia de $U_f=1$	inexistencia de $U_d=1$
U1.1 U1.3 U1.5	ninguna combinación K1 -----	----- K2 ninguna combinación
U2.1 U2.2 U2.3 U2.4 U2.5	K1, K6 ----- K5, K7 K1, K2, K3, K5, K7 K2	K1 K1, K2, K3, K4, K6 K4, K6 ----- K2, K7
U3.1 U3.2 U3.3 U3.4 U3.5	K0, K1, K6, K12 ----- ----- ninguna combinación K1, K2, K3, K5, K7	K1, K2, K3, K4, K6 ninguna combinación ----- ----- K0, K2, K7, K13

A continuación demuestro las inexistencias señaladas:

U1.1: no existe la situación  $U_f=1$  porque si tuviéramos  $p_1=p_n$  entonces como  $p_n=p_1=0$  y  $.5 < p_n=p_2 < 1$ ,  $f_1=0$  y si ocurriera que  $f_2=1$  se tendría  $p_2 \leq .5$  o bien  $p_2=1$ , y si tuviéramos  $p_1=p_n$  entonces como  $p_n=p_2=0$  y  $.5 < p_n=p_1 < 1$ ,  $f_2=0$  y si ocurriera que  $f_1=1$  se tendría  $p_1 \leq .5$  o bien  $p_1=1$ ; todos estos casos son imposibles en U1.1. Análogamente, en U1.5 no existe la situación  $U_d=1$  porque si tuviéramos  $p_1=p_n$  entonces como  $0 < p_n=p_1 < .5$  y  $p_n=p_2=1$ ,  $d_2=0$  y si ocurriera que  $d_1=1$  se tendría  $p_1 \geq .5$  o bien  $p_1=0$ , y si tuviéramos  $p_1=p_n$  entonces como  $0 < p_n=p_2 < .5$  y  $p_n=p_1=1$ ,  $d_1=0$  y si ocurriera que  $d_2=1$  se tendría  $p_2 \geq .5$  o bien  $p_2=0$ ; todos estos casos son imposibles en U1.5.

- U1.3 de K1=11211: no existe la situación  $U_i=1$ , porque como  $p_n=p_1=0$  y  $p_n=p_2=1$ ,  $f_1=0$  y  $f_2=n_2$ ; si ocurriera que  $f_2=1$  se tendría  $n_2=1$  y como  $n=1$  se tendría  $n_1=0$ , lo que es imposible por construcción. Análogamente, en U1.3 de K2=12122 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $p_n=p_2=0$  y  $p_n=p_1=1$ ,  $d_2=n_2$  y  $d_1=0$ ; si ocurriera que  $d_2=1$  se tendría  $n_2=1$  y como  $n=1$  se tendría  $n_1=0$ , lo que es imposible por construcción.
- U2.1 de K1=11211 y de K6=11111: no existe la situación  $U_i=1$ , porque como  $p_n=p_1=0$  y  $p_n=p_2=0.5$ ,  $f_1=0$ ,  $d_1=n_1$  y  $f_2=d_2$ ; si ocurriera que  $f_2=1$  se tendría  $d_2=1$ , por lo que  $n_2=2$ , y como  $n=1$ ,  $n_1=1$  por lo que  $d_1=1$ , con lo que se tendría  $d=0$ , lo que es imposible en K1 y K6. Análogamente, en U2.5 de K2=12122 y de K7=11122 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $p_n=p_2=0.5$  y  $p_n=p_1=1$ ,  $f_2=d_2$ ,  $d_1=0$  y  $f_1=n_1$ ; si ocurriera que  $d_2=1$  se tendría  $f_2=1$ , por lo que  $n_2=2$ , y como  $n=1$ ,  $n_1=1$  por lo que  $d_1=1$ , con lo que se tendría  $d=0$ , lo que es imposible en K2 y K7.
- U2.3, U2.4, U3.4 y U3.5 de K5=10122: no existe la situación  $U_i=1$ , porque como  $f=0$ , si ocurriera que  $U_i=1$  se tendría que  $f_1=f_2=1$ , de donde o bien  $p_1=1$  y  $p_2=1$ , lo que contradice  $n=2$ , o bien  $p_1 \leq .5$  y  $p_2 > 0$ , o bien  $p_1=1$  y  $p_2 \leq .5$ ; ambos casos son imposibles en las ubicaciones mencionadas (en las que  $p_1=p_n > 0.5$  y  $p_2=p_n > 0$ , o  $p_1=p_n=1$  y  $p_2=p_n > 0.5$ ). Análogamente, en U2.2, U2.3, U3.1 y U3.2 de K4=11011 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=0$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría que  $d_1=d_2=1$ , de donde o bien  $p_1=0$  y  $p_2=0$ , lo que contradice  $n=1$ , o bien  $p_1 \geq .5$  y  $p_2 < 1$ , o bien  $p_1=0$  y  $p_2 \geq .5$ ; ambos casos son imposibles en las ubicaciones mencionadas (en las que  $p_1=p_n < .5$  y  $p_2=p_n < 1$ , o  $p_1=p_n=0$  y  $p_2=p_n < 0.5$ ).
- U2.3, U2.4 y U3.4 de K7=11122: no existe la situación  $U_i=1$ , porque como  $f=1$ , si ocurriera que  $U_i=1$  se tendría o bien  $f_1 < f_2=1$  de donde  $f_1=0$  y  $p_1=0$ ; o bien  $1-f_1 < f_2$ , de donde  $p_1 \leq .5$  y  $p_2 > 0$ , o  $p_1=1$ ; y todos estos casos son imposibles en las ubicaciones mencionadas (en las que  $0.5 < p_1=p_n < 1$  y  $p_2=p_n > 0$ ). Análogamente, en U2.2, U2.3 y U3.2 de K6=11111 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=1$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría o bien  $1-d_1 < d_2$ , de donde  $p_1 \geq .5$  y  $p_2 < 1$ , o  $p_1=0$ ; o bien  $d_1 < d_2=1$  de donde  $d_1=0$  y  $p_1=1$ ; y todos estos casos son imposibles en las ubicaciones mencionadas (en las que  $0 < p_1=p_n < .5$  y  $p_2=p_n < 1$ ).
- U2.4 de K1=11211 y K3=01211: no existe la situación  $U_i=1$ , porque como  $f=1$ , si ocurriera que  $U_i=1$  se tendría o bien  $f_1 < f_2=1$  de donde  $f_1=0$  y  $p_1=0$ ; o bien  $1-f_1 < f_2$ , pero como  $p_1=.5 < p_2$ , se tendría que  $d_1=f_1=1$ , y como  $d=2$ , se tendría  $d_2=0$  de donde  $p_2=1$ ; y ambos casos son imposibles en U2.4 (en la que  $p_1=p_n=0.5$  y  $0.5 < p_2=p_n < 1$ ). Análogamente, en U2.2 de K1=11211 y K3=01211 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=2$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría o bien  $d_2 < d_1=1$  de donde  $d_2=0$  y  $p_2=1$ ; o bien  $1-d_2 < d_1$ , pero como  $p_2=.5 > p_1$ , se tendría que  $d_2=f_2=1$ , y como  $f=1$ , se tendría  $f_1=0$  de donde  $p_1=0$ ; y ambos casos son imposibles en U2.4 (en la que  $0 < p_1=p_n < 0.5$  y  $p_2=p_n=0.5$ ).
- U2.4 de K2=12122: no existe la situación  $U_i=1$ , porque como  $f=2$ , si ocurriera que  $U_i=1$  se tendría o bien  $1-f_1 > f_2$  de donde

- $f_2=0$  y  $p_2=0$ ; o bien  $f_1>f_2=1$ , pero como  $p_2=.5<p_1$ , se tendría que  $d_2=f_2=1$ , y como  $d=1$ , se tendría  $d_1=0$  de donde  $p_1=1$ ; y ambos casos son imposibles en U2.4 (en la que  $p_2=p_n=0.5$  y  $0.5<p_1=p_n<1$ ). Análogamente, en U2.2 de K2=12122 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=1$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría o bien  $d_1<d_2=1$  de donde  $d_1=0$  y  $p_1=1$ ; o bien  $1=d_1<d_2$ , pero como  $p_1=.5>p_2$ , se tendría que  $d_1=f_1=1$ , y como  $d=1$ , se tendría  $f_1=0$  de donde  $p_1=0$ ; y ambos casos son imposibles en U2.2 (en la que  $0<p_2=p_n<0.5$  y  $p_1=p_n=0.5$ ).
- U2.5 de K2=12122: no existe la situación  $U_f=1$ , porque como  $f=2$ , si ocurriera que  $U_f=1$  se tendría o bien  $1=f_1>f_2$  de donde  $f_2=0$  y  $p_2=0$ , lo que es imposible en U2.5 (en la que  $p_2=p_n=0.5$  y  $p_1=p_n=1$ ); o bien  $f_1>f_2=1$ , pero como  $p_2=.5<p_1$ , se tendría que  $d_2=f_2=1$  por lo que  $n_2=2$ , y como  $d=1$  y  $n=1$ , se tendría  $d_1=0$  y  $n_1=1$  de donde  $f_1=1$  lo que contradice  $f=2$ . Análogamente, en U2.1 de K1=11211 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=2$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría o bien  $1=d_1>d_2$  de donde  $d_2=0$  y  $p_2=1$ , lo que es imposible en U2.1 (en la que  $p_1=p_n=0$  y  $p_2=p_n=0.5$ ); o bien  $d_1>d_2=1$ , pero como  $p_2=.5<p_1$ , se tendría que  $f_2=d_2=1$  por lo que  $n_2=2$ , y como  $f=1$  y  $n=1$ , se tendría  $f_1=0$  y  $n_1=1$  de donde  $d_1=1$  lo que contradice  $d=2$ .
- U3.1 de K0=00000: no existe la situación  $U_f=1$ , porque como  $f=0$ , si ocurriera que  $U_f=1$  se tendría  $f_1=f_2=1$  de donde  $p_1>0$  y  $p_2>0$ , lo que es imposible en U3.1 4(en la que  $p_1=0$  y  $p_2=0$ ). Análogamente, en U3.5 de K0=00000 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=0$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría  $d_1=d_2=1$  de donde  $p_1<1$  y  $p_2<1$ , lo que es imposible en U3.5 (en la que  $p_1=1$  y  $p_2=1$ ).
- U3.1 de K1=11211 y K6=11111: no existe la situación  $U_f=1$ , porque como  $f=1$ , si ocurriera que  $U_f=1$  se tendría o bien  $1=f_1<f_2$ , de donde  $p_1>0$ , lo que es imposible en U3.1 (en la que  $p_1=p_n=0$  y  $p_2=p_n<0.5$ ); o bien  $f_1<f_2=1$ , lo que implicaría que  $d_2=n_2-1$ ,  $f_1=0$  y  $d_1=n_1$ ; esto por un lado daría que como  $n=1$ ,  $d_1-1=n_1-1<n_2-1=d_2$ , y por otro lado daría que como  $r=1$ ,  $f_1-d_1<f_2-d_2$ , o sea  $0-d_1<1-d_2$  de donde  $d_2<d_1+1$ ; juntando los dos resultados se tendría que  $d_1-1<d_2<d_1+1$  por lo que  $d_2=d_1$ , por lo que  $d=0$ , lo que es imposible en K1 y K6. Análogamente, en U3.5 de K2=12122 y K7=11122 no existe  $U_d=1$ , porque como  $d=1$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría o bien  $1=d_1<d_2$ , de donde  $p_1<1$ , lo que es imposible en U3.5 (en la que  $p_2=p_n>0.5$  y  $p_1=p_n=1$ ); o bien  $d_1<d_2=1$ , lo que implicaría que  $f_2=n_2-1$ ,  $d_1=0$  y  $f_1=n_1$ ; esto por un lado daría que como  $n=1$ ,  $f_1-1=n_1-1<n_2-1=f_2$ , y por otro lado daría que como  $r=2$ ,  $f_1-d_1>f_2-d_2$ , o sea  $f_1-0>f_2-1$  de donde  $f_2<f_1+1$ ; juntando los dos resultados se tendría que  $f_1-1<f_2<f_1+1$  por lo que  $f_2=f_1$ , por lo que  $f=0$ , lo que es imposible en K2 y K7.
- U3.1 de K12=10120: no existe la situación  $U_f=1$ , porque como  $f=0$ , si ocurriera que  $U_f=1$  se tendría  $f_1=f_2=1$  de donde  $p_1>0$  y  $p_2>0$ , lo que es imposible en U3.1 de K12 (en la que  $p_1=p_n=0$  y  $p_2=p_n=0$ ). Análogamente, en U3.5 de K13=11010 no existe la situación  $U_d=1$ , porque como  $d=0$ , si ocurriera que  $U_d=1$  se tendría  $d_1=d_2=1$  de donde  $p_1<1$  y  $p_2<1$ , lo que es imposible en U3.5 de K13 (en la que  $p_1=p_n=1$  y  $p_2=p_n=1$ ).



- U3.4: no existe la situación  $U_2=1$ , porque si existiera  $j$  tal que  $f_j=1$  entonces se tendría o bien  $p_j \leq .5$ , o bien  $p_j=1$ ; ambos casos son imposibles en U3.4 (en la que  $0.5 < p_n < 1$  y  $0.5 < p_n < 1$ ). Análogamente, la situación  $U_3=1$  no existe en la ubicación U3.2 porque si existiera  $j$  tal que  $d_j=1$  entonces se tendría o bien  $p_j \geq .5$ , o bien  $p_j=0$ ; ambos casos son imposibles en U3.2 (en la que  $0 < p_n < 0.5$  y  $0 < p_n < 0.5$ ).
- U3.5 de  $K1=11211$  y  $K3=01211$ : no existe la situación  $U_2=1$ , porque como  $f=1$ , si ocurriera que  $U_2=1$  se tendría o bien  $1=f_1 < f_2$  de donde  $p_1 \leq 0.5$  o  $p_1=1$ ; o bien  $f_1 < f_2=1$  de donde  $f_1=0$  por lo que  $p_1=0$ ; todos estos casos son imposibles en U3.5 (en la que  $0.5 < p_1=p_n < 1$  y  $p_2=p_n=1$ ). Análogamente, en U3.1 de  $K1=11211$  y  $K3=01211$  no existe la situación  $U_4=1$ , porque como  $d=2$ , si ocurriera que  $U_4=1$  se tendría o bien  $1=d_2 < d_1$  de donde  $p_2 \geq 0.5$  o  $p_2=0$ ; o bien  $d_2 < d_1=1$  de donde  $d_2=0$  por lo que  $p_2=1$ ; todos estos casos son imposibles en U3.1 (en la que  $p_1=p_n=0$  y  $0 < p_2=p_n < 0.5$ ).
- U3.5 de  $K2=12122$ : no existe la situación  $U_2=1$ , porque como  $f=2$ , si ocurriera que  $U_2=1$  se tendría o bien  $1=f_2 < f_1$  de donde  $p_2 \leq 0.5$  o  $p_2=1$ ; o bien  $f_2 < f_1=1$  de donde  $f_2=0$  por lo que  $p_2=0$ ; todos estos casos son imposibles en U3.5 (en la que  $0.5 < p_2=p_n < 1$  y  $p_1=p_n=1$ ). Análogamente, en U3.5 de  $K2=12122$  no existe la situación  $U_4=1$ , porque como  $d=1$ , si ocurriera que  $U_4=1$  se tendría o bien  $1=d_1 < d_2$  de donde  $p_1 \geq 0.5$  o  $p_1=0$ ; o bien  $d_1 < d_2=1$  de donde  $d_1=0$  por lo que  $p_1=1$ ; todos estos casos son imposibles en U3.1 (en la que  $p_2=p_n=0$  y  $0 < p_1=p_n < 0.5$ ).
- U3.5 de  $K7=11122$ : no existe la situación  $U_2=1$ , porque como  $f=1$ , si ocurriera que  $U_2=1$  se tendría o bien  $f_1 < f_2=1$  de donde  $f_1=0$  y  $p_1=0$ ; o bien  $1=f_1 < f_2$ , de donde ó  $p_1 \leq .5$  y  $p_2 > 0$ , ó  $p_1=1$  de donde como  $r=2$ ,  $f_1-d_1=1-0=1 > f_2-d_2$  por lo que  $f_2 \leq d_2$  y  $p_2 \leq 0.5$ ; todos estos casos son imposibles en U3.5 (en la que  $0.5 < p_2=p_n < 1$  y  $p_1=p_n=1$ ). Análogamente, en U3.1 de  $K6=11111$  no existe la situación  $U_4=1$ , porque como  $d=1$ , si ocurriera que  $U_4=1$  se tendría o bien  $d_1 < d_2=1$  de donde  $d_1=0$  y  $p_1=1$ ; o bien  $1=d_1 < d_2$ , de donde ó  $p_1 \geq .5$  y  $p_2 < 1$ , ó  $p_1=0$  de donde como  $r=1$ ,  $f_1-d_1=0-1 < f_2-d_2$  por lo que  $d_2 \leq f_2$  y  $p_2 \geq 0.5$ ; todos estos casos son imposibles en U3.1 (en la que  $p_2=p_n=0$  y  $0 < p_1=p_n < 0.5$ ).

### 3.2.2.6. MULTIPLICIDAD

Desde el punto de vista formal, las categorías de multiplicidad son las siguientes:

Si  $D$  representa la multiplicidad DENTRO, entonces:

$D=1$  si hay unos, si  $f_1=d_1$  o si  $f_2=d_2$

$D=k$  con  $k$  entero y  $k>1$  si no hay unos y si  $f_1=kd_1$ ,  
 $d_1=kf_1$ ,  $f_2=kd_2$  ó  $d_2=kf_2$ ,

$D=0$  si no hay un entero  $k$  tal que  $f_1=kd_1$ ,  $d_1=kf_1$ ,  
 $f_2=kd_2$  ó  $d_2=kf_2$ ;

Y, si  $E$  representa la multiplicidad ENTRE, entonces:

$E=1$  si hay unos, si  $f_1=f_2$  o si  $d_1=d_2$ ,

$E=k$  con  $k$  entero y  $k>1$  si no hay unos y si  $f_1=kf_2$ ,  
 $f_2=kf_1$ ,  $d_1=kd_2$  ó  $d_2=kd_1$ ,

$E=0$  si no hay un entero  $k$  tal que  $f_1=kf_2$ ,  $f_2=kf_1$ ,  
 $d_1=kd_2$  ó  $d_2=kd_1$ .

Nota: cuando hay dos valores posibles de acuerdo con estas definiciones, se toma el menor no negativo de ambos. Por ejemplo en (2,2)(3,6) S1 da lugar a  $D=1$  y S2 a  $D=2$ , por lo que queda  $D=1$ ; los casos favorables dan lugar a  $E=0$  y los desfavorables a  $E=3$ , por lo que queda  $E=3$ .

No hay todos los valores de  $D$  y  $E$  en todas las combinaciones y ubicaciones:

Además de los casos en los que  $U_i=1$  ó  $U_a=1$ , el valor de multiplicidad DENTRO  $D=1$  puede ocurrir cuando  $f_1=d_1$  ó  $f_2=d_2$ , o sea cuando  $p_1=.5$  ó  $p_2=.5$ , lo que sólo ocurre en las ubicaciones U2.1, U2.2, U2.4, U2.5 y U3.3. Y recíprocamente, en las ubicaciones U2.1, U2.2, U2.4, U2.5 y U3.3 se tiene siempre  $D=1$ .

Además de los casos en los que  $U_i=1$  ó  $U_a=1$ , el valor de multiplicidad ENTRE  $E=1$  puede ocurrir cuando  $f_1=f_2$  ó  $d_1=d_2$ , o sea en las combinaciones K0, K5, K4, K12 y K13. Y recíprocamente, en las combinaciones K0, K5, K4, K12 y K13 se tiene siempre  $E=1$ .

### 3.2.3. BANCO DE PREGUNTAS

A partir de lo anterior, se puede catalogar a cualquier arreglo S1,S2 según su situación: según sus valores para las variables experimentales de combinación, ubicación, perceptividad, unos y multiplicidad. Esta labor de catalogación se encuentra en el Anexo 1, donde se indica la situación de todos los arreglos S1,S2 =  $(f_1,d_1)(f_2,d_2)$  con  $n_2 \leq 10$  ordenados según  $n_1$  y  $n_2$ , con la excepción de los arreglos de identidad (K0=0000) (12).

El banco propiamente dicho se encuentra en el Anexo 2, donde los mismos arreglos se encuentran clasificados por situaciones.

En los siguientes cuadros marco las cantidades de arreglos con  $n_2 \leq 10$  que hay para cada valor de las variables experimentales de situación.

Es particularmente interesante lo que ocurre con las cantidades existentes para las distintas combinaciones (véanse los to-

12. Esta exclusión es por ahorrar espacio y porque las categorías a las que pertenecen los arreglos de identidad son triviales: todos están en la combinación K0, en las ubicaciones U3.j, tienen  $\delta_p=N$  y  $\delta_s=N$  ó  $\delta_0=N$  ó  $\delta_1=N$  si están en U3.3, U3.1 ó U3.5. Pueden tener unos salvo  $U_i=1$  en U3.1 y  $U_a=1$  en U3.5, así como  $D=1$  en U3.3 y  $E=1$  en todos los casos.

tales del margen derecho en el primer cuadro <sup>13</sup>). Debe recordarse que la ordenación de las combinaciones fue realizada en función de la cantidad de discrepancias con respecto a las situaciones sin discrepancias. Lo interesante es que, salvo por la excepción de las combinaciones de proporcionalidad (K12 a K16), el orden de "discrepancias" coincide exactamente con el orden de frecuencias de los arreglos disponibles.

com bina cio nes:				ubicaciones										TO- TA- LES
	U 1.1	U 1.3	U 1.5	U 2.1	U 2.2	U 2.3	U 2.4	U 2.5	U 3.1	U 3.2	U 3.3	U 3.4	U 3.5	
K1	90	45	50	10	10	140	20	20	20	10	0	30	50	495
K2	50	45	90	20	20	140	10	10	50	30	0	10	20	495
K3	20	10	20	5	10	60	10	5	20	20	0	20	20	220
K4	20	0	0	5	10	20	20	0	20	20	0	50	0	165
K5	0	0	20	0	20	20	10	5	0	50	0	20	20	165
K6	20	0	0	10	10	10	20	0	20	10	0	12	0	112
K7	0	0	20	0	20	10	10	10	0	12	0	10	20	112
K8	0	0	0	0	0	0	0	0	50	12	0	0	0	62
K9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	50	62
K10	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	0	0	0	40
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	20	40
K12	0	0	0	0	0	0	0	0	45	0	0	0	0	45
K13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45	45
K14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	6
K15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	6
K16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	10
TOT	200	100	200	50	100	400	100	50	245	190	10	190	245	2080

13. Ninguno de estos cuadros incluye los arreglos de identidad.

ubicación	cantidad
U1.1: x----- --x--]	200
U1.3: x----- -----x	100
U1.5: [--x-- -----x	200
U2.1: x-----x-----]	50
U2.2: [--x--x-----]	100
U2.3: [--x-- --x--]	400
U2.4: [-----x--x--]	100
U2.5: [-----x-----x	50
U3.1: x--x-- -----] y *----- -----]	245
U3.2: [-x-x- -----] y [--*-- -----]	190
U3.3: [-----*-----]	10
U3.4: [----- --x-x-] y [----- ---*--]	190
U3.5: [----- --x--x] y [----- -----*]	245
<b>TOTAL</b>	<b>2080</b>

cantidades	perceptividad:			
	$\delta_p$	$\delta_s$	$\delta_o$	$\delta_1$
N	112	310	595	595
C	218	444	54	54
M	547	765	485	485
G	1203	561	946	946
<b>TOTALES</b>	<b>2080</b>	<b>2080</b>	<b>2080</b>	<b>2080</b>

cantidades	unos:	
	$U_f$	$U_d$
0	1485	1485
1	595	595
<b>TOTALES</b>	<b>2080</b>	<b>2080</b>

cantidades	multiplicidades:	
	D	E
0	561	605
1	1219	1212
2	158	159
3	73	63
4	69	25
5	0	16
<b>TOTALES</b>	<b>2080</b>	<b>2080</b>

Por qué ocurre esta coincidencia entre el orden de "discrepancias" y el orden de frecuencias de los arreglos disponibles es algo que aún queda por resolver (14).

14. Sin duda el cálculo de las cantidades se puede efectuar mediante técnicas de conteo y combinatoria, y además la cantidad decreciente debe estar también relacionada con la ausencia de algunos casos (ver el siguiente §parágrafo) en las estrategias K10 a K16. Pero lo que no deja de parecer una coincidencia demasiado curiosa es el hecho de que las combinaciones que más representadas están son justamente las menos "discriminantes" de acuerdo con las estrategias definidas, y el que las cantidades de las demás decrecen a medida que aumenta la cantidad (y calidad) de las discrepancias con respecto a esas primeras combinaciones.

### 3.3. DISEÑO DE LOS CUESTIONARIOS

En esta sección se explica cuál fue la lógica que guió la construcción de cada uno de los cinco cuestionarios utilizados. Es importante enfatizar de nuevo que la aplicación y sobre todo la interpretación de los resultados de cada uno dieron pie para el mejoramiento de las categorías con las que construí los siguientes. Así, realicé los primeros con las categorías piagetianas, y su análisis metodológico dio lugar a la creación del banco de preguntas, con combinaciones y ubicaciones, que a su vez fue la fuente para la construcción del tercer cuestionario. La interpretación de los resultados obtenidos con éste dio lugar entre otros aspectos a la consideración de las situaciones con o sin unos; la aplicación del cuarto cuestionario hizo ver la necesidad de planear cuidadosamente las repeticiones en idénticas y similares. Así, el mejor cuestionario de los aquí presentados es el último, C6, pero su análisis metodológico ha hecho ver la necesidad de considerar con más atención las variables como las de perceptividad y de multiplicidad, que aunque no dan lugar a estrategias en sí mismas, sí pueden hacer que una misma situación aparezca al sujeto como más o menos fácil. De seguirse la investigación, el cuestionario C7 deberá tomar en cuenta todos estos factores.

#### 3.3.1. DISEÑO DE C1 Y C2

En estos dos primeros cuestionarios cubrí ampliamente las categorías previstas por Piaget e Inhelder (1951). Aquí reporto la manera en que hice esto, pero la interpretación y el análisis de las respuestas no se referirá a las categorías piagetianas sino a las del resto de este trabajo (situaciones de combinación, ubicación, perceptividad, unos y multiplicidad).

Puede ser pertinente recordar que planteé dos veces cada una de las preguntas del cuestionario C1, con un intervalo de aproximadamente un mes. El cuestionario C2 repitió de manera idéntica varias de las preguntas del cuestionario C1, y además planteó una repetición idéntica de un mismo problema en el interior del cuestionario (preguntas 1 y 19).

En la siguiente tabla reporto las composiciones de los cuestionarios C1 y C2, de acuerdo con la clasificación piagetiana. Para cada categoría se señalan los números de las preguntas de ambos cuestionarios que corresponden a ella (dos números para C1, por la repetición mencionada) y el arreglo  $(f_1, d_1)(f_2, d_2)$  en que consiste la pregunta. Antes y después de  $(f_1, d_1)(f_2, d_2)$  hay dos letras A ó B: la primera indica de qué lado estaba el espacio muestral S1 y la segunda el lado de S2.

Las características de combinación, ubicación, etc. de cada una de las preguntas de estos cuestionarios se pueden encontrar en el Anexo 3.

Núm y Descripción	Preguntas de C1	Preguntas de C2
P1: Doble imposibilidad	1,26: B(0,2)(0,3)A	15: B(0,2)(0,3)A
P2: Doble certeza	12,29: A(2,0)(4,0)B	
P3: Certeza-imposibilidad	13,19: B(0,2)(2,0)A	13: A(0,2)(2,0)B
P4: Posibilidad-certeza	4,20: B(1,0)(1,1)A 6,22: A(1,1)(2,0)B	14: A(2,0)(4,1)B
P5: Posibilidad - imposibilidad	3,28: B(0,2)(2,2)A 5,30: B(0,2)(1,1)A	6: A(0,2)(1,1)B 11: A(1,1)(0,3)B
P6: Composiciones idénticas	7,32: A(1,1)(1,1)B	7: A(1,1)(1,1)B
P7: Proporcionalidad	2,18: A(2,2)(4,4)B 8,24: A(1,2)(2,4)B	4: B(2,1)(4,2)A 8: B(2,2)(4,4)A 10: A(1,2)(2,4)B 17: A(1,3)(2,6)B
P8: Desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles	9,23: A(1,3)(2,2)B	
s/n: Igualdad de los casos desfavorables y desigualdad de los casos posibles (P9')	11,21: A(1,1)(2,1)B 14,27: B(2,2)(4,2)A 15,17: B(2,1)(3,1)A	1: B(2,1)(3,1)A 19: A(2,1)(3,1)B 12: B(2,2)(3,2)A 18: B(1,1)(2,1)A
P9: Igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles	10,31: A(1,1)(1,2)B	2: B(2,1)(2,2)A 3: B(2,2)(2,3)A 16: A(1,1)(1,2)B
P10: Desigualdades respectivas de los casos favorables y de los posibles, sin proporcionalidad	16,25: A(2,1)(3,2)B	5: A(2,1)(3,2)B 9: A(2,3)(5,4)B 20: B(1,1)(3,2)A

### 3.3.2. DISEÑO DE C3

El cuestionario C3 ya fue diseñado utilizando las situaciones determinadas por combinaciones y ubicaciones. Reduce a cuatro las preguntas relacionadas con imposibilidades y certezas, e introduce además las siguientes variables:

- el referente (tarjetas <sup>(15)</sup> o bolsas de canicas) y su representación (gráfica ó con numerales);
- el tamaño: totales "chicos" ( $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq 8$ ), o "grandes" ( $20 \leq n_1 \leq n_2 \leq 30$ );
- preguntas idénticas y similares: triplicados de un mismo arreglo, así como preguntas similares (varios ejemplares de la misma situación), para control de la consistencia interna <sup>(16)</sup>.

Para ello procedí por etapas de la siguiente manera. En una primera etapa definí la estructura general del cuestionario: decidí que contuviera cuarenta preguntas, y que éstas se repartieran en seis grupos (I a VI) como indico a continuación:

- I: dieciseis preguntas extraídas del banco de preguntas, con referente de tarjetas y representación gráfica, y con dos n chicas, numeradas temporalmente L1 a L16;
- II: cuatro preguntas con controles de certezas e imposibilidades, con referente de tarjetas y representación gráfica, y con dos n chicas: L17 a L20;
- III: cinco preguntas de control de consistencia, con un arreglo por triplicado y un similar de cada uno de tres arreglos del grupo I, con referente de tarjetas y representación gráfica, y con dos n chicas: L21 a L25;
- IV: cuatro preguntas de control de consistencia ante el referente y su presentación gráfica, con un duplicado de cada uno de dos arreglos y un similar de cada uno de dos arreglos del grupo I (con dos n chicas), pero con referente de bolsas de canicas y representación con numerales: L26 a L29;
- V: cinco preguntas de tamaños mixtos, con referente de bolsas de canicas y representación con numerales, y con una n chica y una n grande, incluyendo un similar de cada uno de dos arreglos del grupo I: L30 a L34;
- VI: seis preguntas de tamaños grandes, con referente de bolsas de canicas y representación con numerales, y con dos n grandes, incluyendo un similar de cada uno de dos arreglos del grupo I: L35 a L40.

Para el grupo I (preguntas L1 a L16) construí varios prospectos que fueron evaluados mediante computadora para obtener el más discriminante (mayor número de respuestas distintas para respuestas basadas en las principales estrategias detectadas). Una vez elegido el mejor, elegí los arreglos de los grupos III y IV y construí las del grupo II procurando tener la siguiente distribución total de las n en el intervalo [2, 8]: pocas en los extremos ( $n=2$  ó  $n \geq 7$ ) y una distribución homogénea en la parte central

15. Como mencioné en el capítulo 2, a partir de este momento abandoné el uso de naipes como referentes.
16. Aunque varios investigadores plantean a los sujetos preguntas idénticas y/o similares, pocos lo hacen de manera sistemática y reportando los resultados: en este caso están, desafortunadamente, Piaget e Inhelder (1951). Una excepción es Maury (1984 y 1986), quien plantea una misma pregunta intercambiando favorables y desfavorables.

(3sns6). A continuación elegí las situaciones para los grupos V y VI, y elegí o construí los arreglos correspondientes.

Núm	Descripción	Combinación	Ubic	Pregunta de C3
L1		K1 = 11211	U3.4	16: A(3,2)(5,1)B
L2		K2 = 12122	U3.2	1: B(2,3)(1,5)A
L3		K3 = 01211	U2.3	21: A(3,4)(4,3)B
L4		K3 = 01211	U2.4	15: A(2,2)(3,1)B
L5		K4 = 11011	U2.3	17: B(1,2)(4,2)A
L6		K4 = 11011	U2.4	11: A(1,1)(3,1)B
L7		K5 = 10122	U2.3	3: B(2,1)(2,3)A
L8		K5 = 10122	U2.2	14: B(2,2)(2,3)A
L9		K6 = 11111	U2.2	2: A(1,2)(3,3)B
L10		K10= 11101	U3.2	5: B(1,2)(2,3)A
L11		K11= 11102	U3.4	18: B(2,1)(3,2)A
L12		K8 = 11121	U3.2	6: B(1,2)(3,5)A
L13		K9 = 11112	U3.4	9: A(3,1)(5,2)B
L14		K14= 11120	U3.2	4: B(1,3)(2,6)A
L15		K15= 11110	U3.4	8: A(3,1)(6,2)B
L16		K16= 11100	U3.3	24: A(2,2)(3,3)B
L17	posibil-impos	K2 = 12122	U1.1	13: A(3,1)(0,7)B
L18	certeza-impos	K2 = 12122	U1.3	23: B(2,0)(0,6)A
L19	posibil-certeza	K11= 11102	U3.5	10: B(4,0)(5,1)A
L20	doble certeza	K13= 11010	U3.5	19: A(2,0)(6,0)B
L21	idéntico a L12	K8 = 11121	U3.2	7: B(1,2)(3,5)A
L22	idéntico a L12	K8 = 11121	U3.2	25: A(1,2)(3,5)B
L23	similar a L6	K4 = 11011	U2.4	20: B(2,2)(3,2)A
L24	similar a L13	K9 = 11112	U3.4	22: B(4,1)(6,2)A
L25	similar a L14	K14= 11120	U3.2	12: A(1,2)(2,4)B
L26	idéntico a L1	K1 = 11211	U3.4	38: B(3,2)(5,1)A
L27	idéntico a L8	K5 = 10122	U2.2	32: A(2,2)(2,3)B
L28	similar a L3	K3 = 01211	U2.3	28: A(2,3)(3,2)B
L29	similar a L10	K10= 11101	U3.2	35: A(1,3)(2,4)B
L30	similar a L10	K10= 11101	U3.2	30: A(1,5)(10,12)B
L31	similar a L16	K16= 11100	U3.3	36: A(2,2)(11,11)B
L32		K2 = 12122	U2.2	27: A(3,3)(2,22)B
L33		K4 = 11011	U3.4	40: A(3,2)(18,2)B
L34		K6 = 11111	U2.3	33: A(1,2)(18,9)B
L35	similar a L11	K11= 11102	U3.4	29: A(13,7)(18,12)B
L36	similar a L15	K15= 11110	U3.4	26: B(14,7)(18,9)A
L37		K1 = 11211	U2.3	34: B(10,15)(18,9)A
L38		K3 = 01211	U2.2	39: B(10,16)(13,13)A
L39		K5 = 10122	U3.2	37: B(9,14)(9,20)A
L40		K2 = 12122	U2.3	31: A(12,8)(4,24)B



Seleccioné del banco todos los arreglos con n "chicas", y construí las mixtas o de n "grandes" para cumplir con los requisitos planteados.

Posteriormente reordené las preguntas: en una primera parte incluí las preguntas de los grupos I, II y III, con referente de representación de tarjetas, renumeradas del 1 al 25 y en la segunda las de los grupos IV, V y VI con referente de numerales con bolsas de canicas, renumeradas del 26 al 40. En cada parte la reordenación procuró que cada dos contiguas se parecieran lo menos posible, salvo por dos de los ejemplares del arreglo por triplicado, que dejé contiguos.

Por último le asigné a cada espacio muestral S1 ó S2 un lado (A ó B). La intención de esta asignación es doble: por una parte, evitar la asociación entre el espacio con el menor número de casos totales (que, por construcción, es siempre S1) y uno de los lados (que sería siempre A), ya que esta asociación podría estar favoreciendo o promoviendo las estrategias de centración en los casos totales; por otra, apoyar el objetivo de la reordenación recién mencionada, es decir, procurar diluir las semejanzas que el sujeto pudiera percibir de una pregunta a otra.

La tabla de la página anterior muestra esta construcción, señalando en particular los duplicados y similares. Las demás características del cuestionario C3 (perceptividad, unos, multiplicidad) pueden ser consultadas en el Anexo 3, donde están incorporadas también las variantes surgidas durante la realización de las entrevistas en que apliqué C3.

Recuerdo al lector que en el capítulo 2 se han incluido reproducciones de la primera pregunta con referente de tarjetas y de la primera con referente de bolsas de canicas, por lo que no he considerado necesario volver a hacerlo aquí.

### 3.3.3. DISEÑO DE C4

Construí el cuestionario C4 sobre el modelo de C3, pero sin las variables de referente y tamaño y con muchos más duplicados y similares. Para ello, partí de las preguntas L1 a L16 y L20 del cuestionario C3, y planteé además ocho preguntas idénticas a algunas de la serie L1-L16 (cuatro de estos duplicados ya habían sido planteados en C3, y cuatro no), y cinco preguntas de arreglos similares (misma combinación, misma ubicación) a las de la serie L1-L16 (cuatro tomadas directamente de C3, y una nueva). En la tabla siguiente se muestra cómo construí este cuestionario. Las demás características de los arreglos (perceptividad, unos y multiplicidad) pueden ser consultadas en el Anexo 3.

Núm	Descripción	Combinac.	Ubic.	Pregunta de C4
L1		K1 =11211	U3.4	4: A(3,2)(5,1)B
L2		K2 =12122	U3.2	2: A(2,3)(1,5)B
L3		K3 =01211	U2.3	3: A(3,4)(4,3)B
L4		K3 =01211	U2.4	1: A(2,2)(3,1)B
L5		K4 =11011	U2.3	12: A(1,2)(4,2)B
L6		K4 =11011	U2.4	10: A(1,1)(3,1)B
L7		K5 =10122	U2.3	8: A(2,1)(2,3)B
L8		K5 =10122	U2.2	6: A(2,2)(2,3)B
L9		K6 =11111	U2.2	14: A(1,2)(3,3)B
L10		K10=11101	U3.2	17: A(1,2)(2,3)B
L11		K11=11102	U3.4	16: A(2,1)(3,2)B
L12		K8 =11121	U3.2	24: A(1,2)(3,5)B
L13		K9 =11112	U3.4	9: A(3,1)(5,2)B
L14		K14=11120	U3.2	11: A(1,3)(2,6)B
L15		K15=11110	U3.4	13: A(3,1)(6,2)B
L16		K16=11100	U3.3	15: A(2,2)(3,3)B
L20		K13=11010	U3.5	5: A(2,0)(6,0)B
	idéntico a L1= L26	K1 =11211	U3.4	19: A(3,2)(5,1)B
	idéntico a L8= L27	K5 =10122	U2.2	23: A(2,2)(2,3)B
	idéntico a L12= L21	K8 =11121	U3.2	7: A(1,2)(3,5)B
	idéntico a L12= L22	K8 =11121	U3.2	29: A(1,2)(3,5)B
	idéntico a L2	K2 =12122	U3.2	26: A(2,3)(1,5)B
	idéntico a L11	K11=11102	U3.4	25: A(2,1)(3,2)B
	idéntico a L13	K9 =11112	U3.4	27: A(3,1)(5,2)B
	idéntico a L14	K14=11120	U3.2	30: A(1,3)(2,6)B
	similar a L6= L23	K4 =11011	U2.4	18: A(2,2)(3,2)B
	similar a L10= L29	K10=11101	U3.2	21: A(1,3)(2,4)B
	similar a L13= L24	K9 =11112	U3.4	22: A(4,1)(6,2)B
	similar a L14= L25	K14=11120	U3.2	20: A(1,2)(2,4)B
	similar a L11	K11=11102	U3.4	28: A(3,1)(5,3)B

### 3.3.4. DISEÑO DE C6

El cuestionario C6 fue construido por grupos de manera similar al C3 y al C4, con algunas diferencias:

- procuré incorporar más preguntas de las clasificadas originalmente por Piaget e Inhelder como "de dos variables": combinaciones K6 a K9;
- planteé más duplicados y similares que en C3;
- procuré tener más arreglos con la situación  $U_2=1$  (en particular a raíz de la estrategia {F1} detectada en una de las entrevistas con C3);

- abrí un nuevo grupo, al final del cuestionario, de cuatro preguntas en la que la instrucción cambiaba: ahora se proporcionaba un espacio muestral referencia y se le pedía al sujeto que identificara, de entre otros seis, aquel(los) que fuera(n) igual(es) al inicialmente planteado: hice esto con la finalidad de ver si una modificación en la forma de la instrucción repercutía en menos presión en contra de la opción "da igual". Denominé a éste "planteamiento de equiparación", en contraste con el planteado en todas las preguntas anteriores, denominado de "decisión".

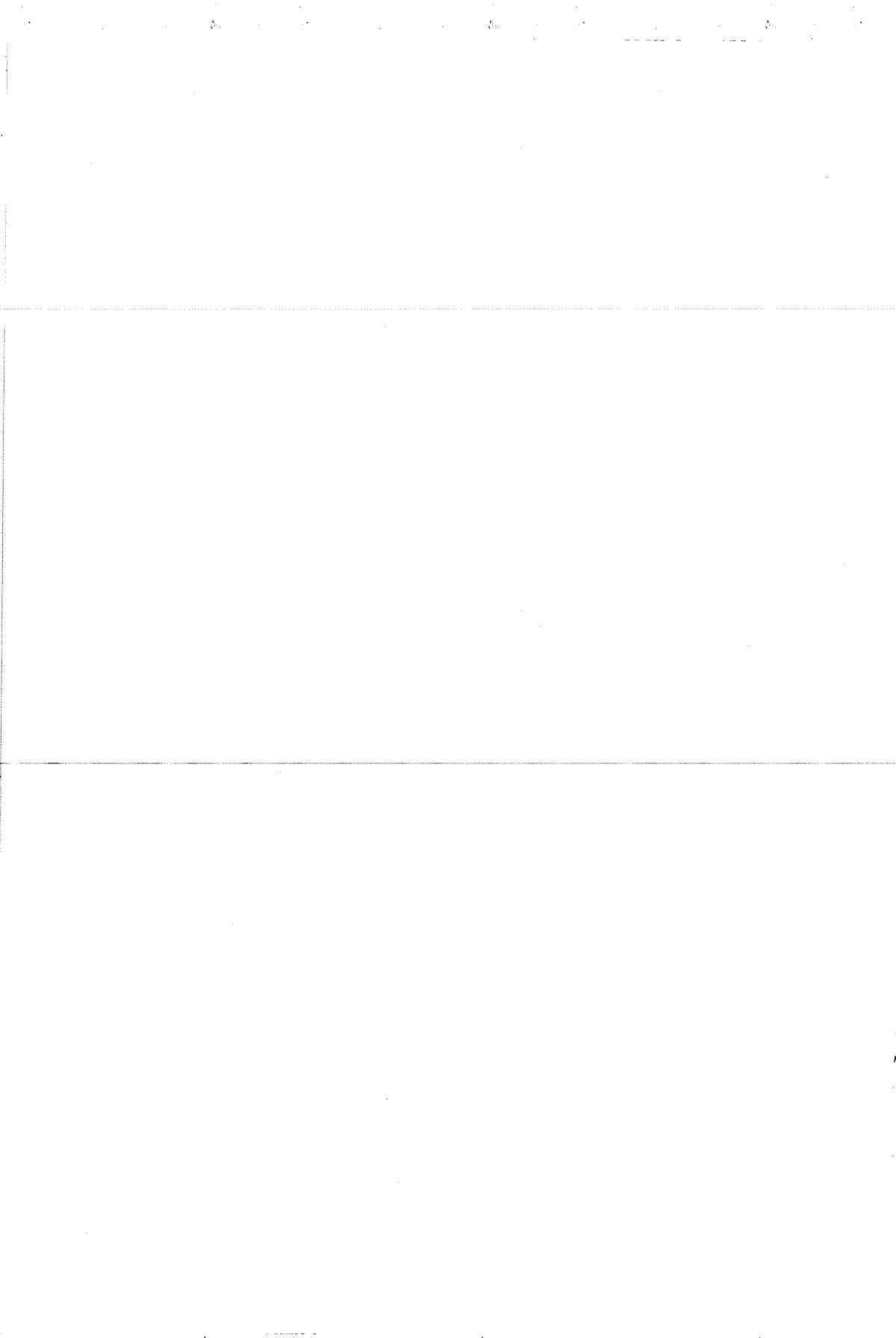
Así, los grupos del cuestionario C6 son:

- I: quince preguntas tomadas del banco, con referente de tarjetas y representación gráfica, y con dos n chicas, numeradas M1 a M15;
- II: una sola pregunta de doble certeza, con referente de tarjetas y representación gráfica, y con dos n chicas: M16;
- III: siete preguntas de control de consistencia, con tres duplicados y cuatro similares de arreglos del grupo I, con referente de tarjetas y representación gráfica, y con dos n chicas: M17 a M23;
- IV: cuatro preguntas de control para el referente, con dos duplicados y dos similares de arreglos del grupo I, con referente de bolsas de canicas y representación con numerales, y con dos n chicas: M24 a M27;
- V: cuatro preguntas de tamaños mixtos, con tres similares de arreglos del grupo I, con referente de bolsas de canicas y representación con numerales, y con una n chica y una n grande: M28 a M31;
- VI: cinco preguntas de tamaño grande, con una similar de arreglos del grupo I, con referente de bolsas de canicas y representación con numerales, y con dos n grandes: M32 a M36;
- VII: cuatro preguntas de equiparación, dos con referente de tarjetas con representación gráfica y dos de bolsas de canicas con representación con numerales, numeradas M37 a M40. En cada caso incluí entre las seis opciones varias de las resultantes de las estrategias de igualdad E-, F-, N-, D-, R-, P. Para efectos de la comparación con el resto de las preguntas, he manejado éstas como si fueran seis variantes de una pregunta inicial, en las que R es el espacio de referencia, y el otro espacio es A, B, C, D, E ó F.

La tabla siguiente muestra la construcción de C6 (nótese en particular la incorporación de una columna para  $U_2$ ). Las demás características de los arreglos (perceptividad,  $U_1$  y multiplicidad) pueden ser consultadas en el Anexo 3, en el que se han incorporado también las variantes surgidas durante la aplicación en entrevistas de este cuestionario.

Núm	Descr/Observac	Comb Ubic.	U <sub>2</sub>	Pregunta de C6
M1		K1 U3.2	1	12 : B( 1, 5)( 3, 4)A
M2		K3 U2.2	1	5 : B( 1, 5)( 3, 3)A
M3		K4 U2.4	1	6 : B( 1, 1)( 2, 1)A
M4		K4 U3.4	0	13 : A( 3, 1)( 4, 1)B
M5		K5 U2.3	0	2 : B( 3, 1)( 3, 4)A
M6		K5 U2.2	1	9 : A( 1, 1)( 1, 2)B
M7		K6 U3.4	0	3 : A( 3, 2)( 5, 3)B
M8		K7 U2.3	0	7 : B( 2, 1)( 3, 4)A
M9		K10 U3.2	0	10 : B( 2, 3)( 3, 4)A
M10		K11 U3.4	0	1 : A( 2, 1)( 3, 2)B
M11		K8 U3.2	1	22 : A( 1, 2)( 3, 5)B
M12		K9 U3.4	0	8 : A( 2, 1)( 5, 3)B
M13		K14 U3.2	1	4 : A( 1, 2)( 2, 4)B
M14		K15 U3.4	0	14 : B( 3, 1)( 6, 2)A
M15		K16 U3.3	0	11 : A( 3, 3)( 4, 4)B
M16		K13 U3.5	0	23 : B( 2, 0)( 6, 0)A
M17	idéntico a M6	K5 U2.2	1	19 : B( 1, 1)( 1, 2)A
M18	idéntico a M12	K9 U3.4	0	15 : A( 2, 1)( 5, 3)B
M19	idéntico a M13	K14 U3.2	1	18 : B( 1, 2)( 2, 4)A
M20	similar a M2	K3 U2.2	1	16 : A( 1, 7)( 4, 4)B
M21	similar a M3	K4 U2.4	0	21 : B( 2, 2)( 4, 2)A
M22	similar a M7	K6 U3.4	0	20 : A( 2, 1)( 5, 2)B
M23	similar a M12	K9 U3.4	0	17 : A( 3, 1)( 5, 2)B
M24	idéntico a M8	K7 U2.3	0	30 : A( 2, 1)( 3, 4)B
M25	idéntico a M11	K8 U3.2	1	24 : A( 1, 2)( 3, 5)B
M26	similar a M3	K4 U2.4	1	27 : A( 1, 1)( 3, 1)B
M27	similar a M14	K15 U3.4	0	32 : B( 2, 1)( 4, 2)A
M28	similar a M6	K5 U2.2	0	25 : B( 3, 3)( 3, 18)A
M29	similar a M9	K10 U3.2	1	33 : A( 1, 4)( 10, 13)B
M30	similar a M13	K14 U3.2	1	29 : B( 1, 4)( 5, 20)A
M31		K7 U2.4	0	34 : B( 3, 2)( 11, 11)A
M32	similar a M15	K16 U3.3	0	36 : B( 12, 12)( 14, 14)A
M33		K2 U3.2	0	35 : A( 9, 11)( 6, 23)B
M34		K4 U2.3	0	26 : B( 9, 12)( 15, 12)A
M35		K6 U3.2	0	28 : A( 8, 14)( 13, 15)B
M36		K7 U3.4	0	31 : A( 19, 3)( 20, 8)B

Núm	Descr/Observac	Comb Ubic.	U <sub>2</sub>	Pregunta de C6
M37	similar a M34, eq.	K3 U2.3	1	37.5: A( 1, 2)( 2, 1)B
		K4 U2.3	1	37.2: A( 1, 2)( 4, 2)B
		K5 U3.2	1	37.1: A( 1, 2)( 1, 3)B
		K6 U2.2	1	37.6: A( 1, 2)( 3, 3)B
M38	similar a M9, eq.	K10 U3.2	1	37.3: A( 1, 2)( 3, 4)B
	similar a M13, eq.	K14 U3.2	1	37.4: A( 1, 2)( 2, 4)B
	similar a M2, eq.	K3 U2.2	1	38.4: B( 1, 3)( 2, 2)A
	similar a M3, eq.	K4 U2.4	0	38.6: A( 2, 2)( 3, 2)B
	similar a M6, eq.	K5 U2.2	0	38.1: A( 2, 2)( 2, 3)B
			K5 U2.4	0
M39	similar a M15, eq.	K16 U3.3	1	38.3: B( 1, 1)( 2, 2)A
	similar a M15, eq.	K16 U3.3	0	38.5: A( 2, 2)( 4, 4)B
	similar a M37(5)	K3 U2.3	0	39.6: B( 1, 2)( 2, 1)A
	similar a M4, eq.	K4 U3.4	0	39.4: A( 2, 1)( 3, 1)B
	similar a M38(2)	K5 U2.4	0	39.3: A( 2, 1)( 2, 2)B
	similar a M31, eq.	K7 U2.4	0	39.5: A( 2, 1)( 3, 3)B
M40	similar a M10, eq.	K11 U3.4	0	39.2: A( 2, 1)( 3, 2)B
	similar a M14, eq.	K15 U3.4	0	39.1: A( 2, 1)( 4, 2)B
		K1 U2.2	0	40.3: A( 7, 14)( 12, 12)B
		K3 U3.2	0	40.1: B( 5, 16)( 7, 14)A
		K4 U3.2	0	40.2: A( 7, 14)( 9, 14)B
	similar a M37(1)	K5 U3.2	0	40.4: A( 7, 14)( 7, 19)B
	similar a M9, eq.	K10 U3.2	0	40.6: A( 7, 14)( 11, 18)B
	similar a M13, eq.	K14 U3.2	0	40.5: A( 7, 14)( 9, 18)B



#### **4. CONSTRUCCION DE LAS CATEGORIAS PARA LA INTERPRETACION**

Este capítulo está dedicado a la segunda línea de la triple hélice presentada en el capítulo 2: la línea de las respuestas. Así como en el capítulo 3 se presentó la línea de las preguntas, desde el proceso de construcción de las categorías (situaciones) hasta el diseño de los cuestionarios utilizados en cada uno de los cinco experimentos realizados, ahora se presentarán las categorías construidas para la interpretación de las respuestas (estrategias) y el proceso de interpretación mismo.

Este es, pues, un capítulo paralelo al anterior, del mismo modo en que la línea de las respuestas es paralela a la de las preguntas. Sin embargo, hay al menos un aspecto metodológico en que ambas líneas difieren. Como vi en el capítulo anterior, la línea de las respuestas consta de dos clases de trabajo: por una parte la construcción de las categorías para el planteamiento de las preguntas (situaciones); por otra, la aplicación de estas categorías en la elaboración de cuestionarios. Aunque la segunda es de naturaleza más práctica que la primera, ambas pueden construirse, en cada etapa del desarrollo helicoidal planteado en el capítulo 2, a partir de un trabajo puramente teórico.

En la línea de las respuestas también hay dos clases de trabajo estrechamente relacionados entre sí, pero éstas son de naturaleza diferente. Por una parte está la construcción teórica de las categorías para la interpretación de las respuestas (estrategias); por otra, la propia interpretación de las respuestas. La naturaleza de la primera labor es intrínsecamente teórica, mientras que la de la segunda está totalmente inmersa en la realidad de las respuestas dadas por los sujetos. Sin embargo, la construcción de las categorías para la interpretación no puede prescindir de la propia práctica de la interpretación, sino que debe retroalimentarse y modificarse continuamente a raíz de los resultados que se van obteniendo en la interpretación.

La diferencia metodológica que he visto entre las dos líneas marca también la estructura de los capítulos en los que las planteo: en el capítulo 3 la sección de construcción de las situaciones precede a la de diseño de los cuestionarios, mientras que en este capítulo la presentación de las categorías para la interpretación estará mezclada todo el tiempo con la propia interpretación de las respuestas. La única sección del capítulo en la que no habrá esta mezcla es la primera, que tratará exclusivamente de cómo resolví algunos de los problemas directamente relacionados con el trabajo de interpretación.

Las siguientes secciones estarán dedicadas a la presentación de las categorías para la interpretación: estrategias y algunos otros mecanismos de solución.

Aquí puede ser pertinente una pequeña digresión para abordar la siguiente pregunta: ¿qué son las estrategias? Muchos autores hablan simplemente de "estrategias" o de "estrategias de solución" sin explicitar a qué se refieren, y son pocos los que definen el concepto. Para Freudenthal (1973, pág. 589), las estrategias y las tácticas son "patrones generales de pensamiento" en matemáticas, que desarrollamos para facilitar las cosas y que solemos utilizar inconscientemente, aunque intentamos organizarlos axiomáticamente; se aprenden por redescubrimiento, por imitación, por el uso y explicándolos a otras personas. Kahneman y Tversky (1972) hablan de "heurísticas", y Lecoutre y Durand (1988) de "modelos cognitivos", mientras que Maloney (1983) las llama "comportamiento regido por reglas". Vergnaud las llama "procedimientos" y afirma que son «una cierta manera de interpretar y tratar informaciones en un problema dado» (Vergnaud, 1984, citado por Maury, 1986, pág. 132). Por su parte, esta última llama a las estrategias "argumentos", y dice que incluyen tanto al (o a los) procedimiento(s) que entra(n) en juego como a «los elementos que parecen importantes en cada caso para el análisis de la problemática» (Maury, 1986, pág. 133). Yo entiendo que una estrategia es un mecanismo de solución para cierta clase de problemas (utilizado consciente o inconscientemente por el sujeto), que tiene una cierta estructura o lógica y que es reproducible para otros problemas de la misma clase.

Entre las categorías de estrategias, distinguiré las simples y las compuestas: las estrategias simples son argumentos que se refieren a la observación de una clase de elementos del arreglo en que consiste la pregunta (centraciones) o a la observación de la relación entre los elementos de dos clases del arreglo (relaciones). Por su parte, las estrategias compuestas consisten en la yuxtaposición lógica de dos o más estrategias simples dentro de una misma argumentación. Las estrategias simples se clasificarán según el número de clases de elementos que entran en juego, mientras que las compuestas se clasificarán según el tipo de operación lógica que interviene en ellas.

Así, después de la primera sección del capítulo dedicada a la descripción del trabajo de interpretación, las siguientes se dedicarán a la presentación de las estrategias simples (en dos secciones: una para las estrategias de centración y otra para las de relación) y a la presentación de las estrategias compuestas, para terminar con una relación de las estrategias y otros mecanismos de solución que considero primitivos.

Dentro de cada sección he agrupado en apartados las estrategias basadas en una misma clase de elementos, en un mismo tipo de relación entre clases o en una misma manera de yuxtaponer dos argumentos diferentes. Las estrategias mismas se presentan en los párrafos de cada apartado.

En la presentación de cada estrategia he procurado destacar varios puntos importantes.



Por un lado está la definición y la descripción de la estrategia. Después se muestran varios ejemplos de respuestas dadas por los sujetos que participaron en los experimentos. Pienso que ésta es la mejor presentación de la estrategia: la que expresan los sujetos con sus propias palabras.

Además, indicaré para cada estrategia cuántas veces ocurrió entre las respuestas que se lograron interpretar; sin embargo, debe tenerse presente que cuando en este capítulo hable de la frecuencia con la que ocurrió cada estrategia, esto sólo pretenderá ser una parte de la descripción de la estrategia, y no de su análisis: éste se realizará, junto con otros elementos, en el capítulo 7.

Cierra la presentación de cada estrategia un párrafo dedicado a la "Representación", en el que pretendo esbozar una interpretación de los procesos psicológicos o de los mecanismos mentales de solución que entran en juego cuando un sujeto utiliza la estrategia: se trata de un intento de comprender la manera en que el sujeto comprende el problema que se le plantea, un modelo tentativo de la representación que el sujeto se hace de la situación.

De este modo, en la estructura del capítulo se irán trenzando la construcción de las categorías para la interpretación de las respuestas con la propia interpretación, presentada a través de múltiples ejemplos. El producto final del proceso de construcción de las categorías se irá presentando sistemáticamente a lo largo del capítulo. El producto final del proceso de interpretación, es decir la clasificación de todas las respuestas interpretables en las categorías construidas, se encuentra en el Anexo 5.

#### 4.1. EL TRABAJO DE INTERPRETACION

En la línea de las respuestas trabajo con una materia prima: las respuestas dadas por los sujetos a las diferentes preguntas que les planteé. En este capítulo se considerarán como objeto de estudio las 1630 respuestas (1) obtenidas en los cinco experimentos. Cada una de ellas ha sido interpretada de acuerdo con las categorías que se expondrán en el capítulo, pero antes de que eso fuera posible debió ser preparada para que pudiera ser interpretada.

Esta preparación no es más que un proceso para uniformar (en el sentido más literal del término: darles forma única) las res-

1. El desglose de esta cantidad por experimentos es el siguiente: 729 respuestas de 34 sujetos en el primer experimento, 318 respuestas de 16 sujetos en el segundo, 193 respuestas de 4 sujetos (en dos binomios) en el tercero, 150 respuestas de 6 sujetos (6 equipos) en el cuarto y 240 respuestas de 5 sujetos (dos de ellos en binomio) en el quinto.

puestas que surgieron de cinco experimentos distintos, cada uno con modalidades distintas durante la experimentación y la recopilación de la información. Es decir, someto las respuestas a una preparación uniformante para poder después interpretarlas y compararlas como si las condiciones en las que se obtuvieron hubieran sido más homogéneas. No se trata, sin embargo, de una transformación de fondo de las respuestas, sino sólo de una traducción de ciertos términos y formas a un lenguaje común. A esta uniformación de las respuestas se dedicará el primer apartado.

Por otra parte, el segundo apartado de la sección expondrá brevemente algunos aspectos que intervienen en el proceso de interpretación de las respuestas, es decir, en el proceso de describir, a una de las categorías diseñadas para el efecto, las justificaciones dadas por los sujetos para las decisiones que toman en cada pregunta.

#### 4.1.1. FORMATO DE LAS RESPUESTAS

Aquí se explicará la forma en que manejo la materia prima para la interpretación: las respuestas de todos los sujetos a todas las preguntas de los cuestionarios que resolvieron.

Hubo muchas diferencias entre estas respuestas. Por un lado están dos tipos evidentes de diferencias: las debidas a las diferencias en los arreglos planteados y las de contenido. De hecho, una parte central de mi interés en este estudio es ver la relación que hay entre ambas.

Pero hay otras fuentes de variación que se deben a la variabilidad en condiciones experimentales y formas de recabar la información entre los cinco experimentos realizados. Estas diferencias radican en:

- a) los términos utilizados para referirse a los elementos favorables y desfavorables y a los espacios muestrales;
- b) el tipo de lenguaje utilizado; en particular entre las expresiones por escrito de algunos experimentos y las verbales de otros (2).

Estas diferencias fueron sometidas a un proceso de uniformación.

Además, resultó conveniente acordar algunas formas de abreviar tanto las expresiones de los sujetos como la información aledaña (nombres de los sujetos, números de los cuestionarios y las preguntas, etc), que reportaré en

- c) otras notaciones.

Con esta traducción a un formato común se evita el trabajo de estar recordando las condiciones experimentales específicas de cada uno de los cinco experimentos realizados y se obtienen las respuestas expresadas en una forma que permitirá interpretarlas y trabajar con ellas.

<sup>2</sup> Los efectos de estas diferencias serán analizados en el capítulo 5, §5.1.1.

a) Términos importantes

En los cinco experimentos realizados para este trabajo utilicé la misma forma experimental; sin embargo, en cada uno utilicé diferentes palabras para referirme a los términos del planteamiento general. El siguiente cuadro resume los términos utilizados:

	EXPERIMENTO					FORMATO
	primero	segundo	tercero	cuarto	quinto	COMUN
objetos favorables	naipes As	naipes roja	cartas negra	cartas X	cartas negra	cartas negra
desfavorables	no As	negra	blanca	O	blanca	blanca
lado A	azul	lado A	lado A	lado A	lado A	lado A
lado B	verde	lado B	lado B	lado B	lado B	lado B

La última columna del cuadro indica los términos que utilizaré de ahora en adelante. Así, en todos los experimentos hablaré de cartas (o canicas), los casos favorables corresponderán al color negro y los desfavorables al color blanco. Además, cuando deba referirme a la ubicación de los espacios muestrales a comparar, hablaré de dos lados, denominados A y B.

Por otra parte, recordemos que en el capítulo 3 definí los espacios muestrales de manera inequívoca: S1 es siempre el espacio que menos elementos tiene en total y, si ambos tienen el mismo número de elementos, S1 es el que menos elementos favorables tiene. Pero al plantearles a los sujetos las preguntas, los espacios S1 y S2 pueden estar respectivamente en los lados A y B, o bien al revés. En efecto, como ya lo había mencionado (3), hay una intención explícita de variabilidad al respecto, considerada en el diseño de cada cuestionario.

De este modo, las repeticiones de una misma pregunta pueden y suelen implicar una inversión de lados: por ejemplo, la pregunta (2,2)(2,3) fue planteada seis veces; en cuatro de ellas el espacio muestral S1=(2,2) estaba en el lado A y S2=(2,3) en el lado B (4), y en las dos restantes S1 estaba en el lado B y S2 en el lado A (5). Para poder trabajar a la par unas y otras, he traducido en las respuestas de los sujetos los lados A y B por S1 y S2 como corresponda.

Así, supongamos por ejemplo que diferentes sujetos de los experimentos segundo, tercero y cuarto expresaron que en la pregunta correspondiente al arreglo (2,2)(2,3) había tres elementos desfavorables en el espacio muestral S2. Pudieron haberlo expre-

3. Véase el capítulo 3, apartado §3.3.2

4. Ver en el Anexo 3 los cuestionarios: C3, pregunta 32; C4, preguntas 6 y 23; C6, pregunta 38.1.

5. Ver en el Anexo 3 los cuestionarios C2, pregunta 3; C3, pregunta 14.

sado originalmente como lo señalo en la siguiente tabla (6); todas las expresiones serían traducidas a la del último renglón:

experim.	preg	lado de S2	expresión
29	3	A	"hay tres naipes negros en el lado A"
39	32	B	"hay tres cartas blancas en el lado B"
39	14	A	"hay tres cartas blancas en el lado A"
49	6	B	"hay tres bolas en el lado B"
común		(2,2)(2,3)	"hay tres cartas blancas en S2"

Con esta traducción no altero el sentido original de las expresiones de los sujetos, pero podré trabajar simultáneamente con respuestas de los diversos experimentos.

#### b) Expresiones de los sujetos

En los experimentos primero, segundo y cuarto (7), las preguntas fueron las mismas para todos los sujetos (aunque algunos sujetos no contestaron todas las preguntas) y las respuestas fueron obtenidas por escrito.

Cada respuesta está compuesta por una elección y una justificación: la elección puede ser de cualquiera de estas formas: "el lado A", "el lado B", "ninguno de los dos lados" ó "da igual, cualquiera de los dos lados"; la justificación consiste en una o dos frases con las que el sujeto expresa el por qué de su elección. En algunos casos la respuesta consiste únicamente en una elección porque el sujeto no presenta justificación.

En los experimentos tercero y quinto, aunque el cuestionario de base era el mismo para todos los sujetos, hubo entrevistas en las que agregué variantes (8). La solución a cada pregunta puede ser tan breve como una simple elección por parte del sujeto o tan compleja como una amplia discusión entre los dos sujetos de un binomio, como se puede apreciar en las transcripciones de las entrevistas (Anexo 4). En estos casos he extraído de la discusión las expresiones que me han parecido más representativas del modo de pensar del sujeto, es decir, las que permiten obtener una interpretación; he obtenido así respuestas compuestas por una elección y una justificación en una o dos frases, comparables a las respuestas obtenidas por escrito.

En las transcripciones de las respuestas escritas he corregido la ortografía pero no la puntuación, porque la puntuación puede estar reflejando la estructura de un razonamiento o una ar-

6. Y si la pregunta hubiera sido planteada en el primer experimento como lo fue en el segundo, la expresión del sujeto hubiera sido algo equivalente a "hay tres naipes que no son As entre los naipes azules".

7. Ver la sección §2.2 del capítulo 2.

8. Esto se verá con detalle en el capítulo 5 (en particular, ver §5.1).

gumentación: al corregirla podría estar introduciendo un sesgo indeseable. En cuanto a la transcripción de las entrevistas, procuré que la puntuación reflejara de la manera más fiel las entonaciones y pausas registradas en la grabación.

#### c) Otras notaciones

Algunas transformaciones más para facilitar la lectura son las siguientes.

Para evitar sobrecargar el texto con menciones a S1 y S2, con frecuencia he sustituido como sigue:

- el espacio muestral elegido por:  
los adverbios "aquí" o "acá", o  
los pronombres "éste" o "éstas";
- el espacio no elegido por:  
los adverbios "ahí", "allí" o "allá", o  
los pronombres "ése" "aquél", "ésas" o "aquéllas".

Asimismo, he sustituido por literales muchos de los numerales utilizados, y he utilizado la diagonal "/" en vez de la raya horizontal usada comúnmente para fracciones.

He denotado a los sujetos con la clave mencionada ya en el capítulo 2: las claves de los sujetos de los experimentos primero y segundo (respuestas escritas individuales) constan de tres caracteres, las de los experimentos tercero y quinto (respuestas verbales) de uno, y las del cuarto (respuestas escritas por equipo) de dos caracteres.

Por último, he utilizado una notación para referirme a los números de las preguntas y, cuando las hay, las variantes surgidas en el curso de las entrevistas en los experimentos tercero y quinto. Asimismo, he señalado de una manera específica los casos en los que el mismo sujeto da sucesivamente varias respuestas distintas a la misma pregunta:

- los números de las preguntas de cada cuestionario están expresados como números naturales;
- los números de las variantes están expresados con naturales después de un punto decimal que sigue al número de la pregunta;
- cada una de las preguntas de "equiparación" del cuestionario C6, que a su vez contenía seis incisos, fue manejada como una pregunta con seis variantes;
- el número de respuesta de un sujeto a la misma pregunta (cuando hay más de una) se ha denotado después de una diagonal (/).

#### d) Formato de trabajo

Cada una de las respuestas que aparezcan en este capítulo y las siguientes será presentada con el siguiente formato: un cuadro (■) seguido de la expresión del sujeto, en caracteres itálicos. Esta expresión puede ser la justificación completa o sólo la porción que ilustre el punto que se está mencionando en el texto.

Después de la expresión del sujeto aparece entre corchetes el arreglo con la simbolización  $(f_1, d_1)(f_2, d_2)$  seguido de dos puntos y la opción elegida por el sujeto, representada por:

- S1 si la elección del sujeto fue "el lado (en que está el espacio muestral) S1",
- S2 si la elección del sujeto fue "el lado (en que está el espacio muestral) S2",
- n si la elección del sujeto fue "ninguno de los dos lados (espacios)",
- = si la elección del sujeto fue "da igual".

Finalmente aparece entre paréntesis la clave del sujeto seguida de un punto y coma, el cuestionario que contestó seguido de una coma y el número de la pregunta en ese cuestionario de que se trata; cuando así lo amerite siguen un punto decimal y el número de la variante, y/o una diagonal y el número de respuesta.

El siguiente cuadro resume lo que acabo de exponer:

FORMATO DE PRESENTACION DE LAS RESPUESTAS	
▪ justificación $[(f_1, d_1)(f_2, d_2):O]$ (Suj; Cn, np.v/rn)	
justificación:	justificación dada por el sujeto (con los cambios explicados arriba)
$(f_1, d_1)(f_2, d_2)$ :	arreglo planteado en la pregunta
0:	opción (S1, S2, = ó n) elegida por el sujeto
Suj:	clave del sujeto
Cn:	cuestionario a que respondió el sujeto
np:	número de la pregunta
v (opcional):	número de variante
rn (opcional):	número de respuesta

Veamos un par de ejemplos. En el ejemplo

▪ sólo hay una carta en blanco y hay dos cartas negras, allá se me dificultaría más saber cuál es la negra  $[(2,1)(3,2):S1]$  (Z; C6,1)

se debe leer que "en S1 sólo hay una carta en blanco y hay dos cartas negras, en S2 se me dificultaría más saber cuál es la negra" es (parte de) la justificación a la elección del lado en que está el espacio muestral S1 en una pregunta que planteaba la comparación entre dos negras y una blanca en el espacio S1 y tres negras y dos blancas en S2, y que esta respuesta fue dada por el sujeto Z a la pregunta 1 del cuestionario C6.

El hecho de que después del número 1 no aparezca ni punto decimal ni diagonal indica que la pregunta estaba originalmente planteada en el cuestionario y que el sujeto dio una única respuesta a esa pregunta.

Análogamente, en el ejemplo:

▪ mientras más negros haya, más fácil va a ser  $[(2,3)(4,5):S2]$  (M; C3,6.3/2)

se debe leer que "mientras más negros haya, más fácil va a ser" es (parte de) la justificación que dio el sujeto M a su elección de S2 como segunda respuesta en la tercera variante de la pregunta 6 del cuestionario C3, variante que planteaba la comparación de dos negras y tres blancas en el espacio S1 y cuatro negras y cinco blancas en el espacio S2.

El lector que desee ubicar en su contexto las expresiones así citadas puede remitirse al Anexo 4, donde se encuentran las entrevistas completas de los experimentos tercero y quinto, y al Anexo 5, donde se encuentran todas las respuestas de los sujetos a todas las preguntas. En el Anexo 5, cada respuesta va acompañada, además, de la interpretación que le he dado según las categorías que se expondrán en este capítulo y el siguiente.

#### 4.1.2. ASPECTOS QUE INTERVIENEN EN LA INTERPRETACION

Con las respuestas en el mismo formato, procedí al trabajo de interpretación de los mecanismos mentales seguidos por cada sujeto en cada pregunta. La meta en este trabajo es identificar la o las estrategias que un sujeto utilizó para llegar a su respuesta, lo que se logró en la gran mayoría de las respuestas.

Sin embargo, con mucha más frecuencia de la que hubiera deseado, la interpretación me ha resultado imposible porque el sujeto no presentó justificación a su elección o porque la expresión de su justificación no aporta evidencia suficiente a favor de una u otra forma de interpretarla.

También ha habido muchas respuestas en las que he debido hacer la interpretación con mucho cuidado, porque la justificación que da el sujeto puede interpretarse de más de una manera. Supongamos por ejemplo que un sujeto justifica con "hay más negras" su elección de S1 en el arreglo (3,1)(2,4): ¿se refiere a que en S1 hay más negras que en S2 o a que en S1 hay más negras que blancas? En general hay que consultar las respuestas del mismo sujeto a otras preguntas, e incluso las respuestas de otros sujetos a la misma pregunta. El resultado de este trabajo ha sido la interpretación de 1144 de las 1630 respuestas obtenidas en el proceso experimental (es decir, 70% de ellas).

El trabajo de interpretación consiste en la consideración simultánea de una serie de aspectos, que desgloso en seguida:

- la información contenida en el arreglo, esto es la composición  $(f_1, d_1)(f_2, d_2)$  de cartas negras y blancas de cada espacio muestral (por ejemplo: la justificación "hay más negras" a una elección de S1 en el arreglo (3,1)(2,1) se refiere evidentemente a que en S1 hay más negras que en S2, y la misma respuesta a una elección de S1 en el arreglo (3,1)(4,5) se refiere a que en S1 hay más negras que blancas);

- los elementos considerados en la justificación (recuérdese que entiendo por elemento cada uno de los números  $f_1, d_1, n_1, f_2, d_2, n_2$ );
- el hecho de que en la justificación se establezcan relaciones entre dos clases de elementos o números (recuérdese que una clase es la pareja de casos totales  $\{n_1, n_2\}$ , otra la de favorables  $\{f_1, f_2\}$ , otra más la de desfavorables  $\{d_1, d_2\}$ );
- las condiciones en que se realizó el experimento correspondiente (por ejemplo: una respuesta absurda puede deberse a que el sujeto vio mal la pregunta en el primer experimento pero no en el tercero, en el tercero y el quinto hay que tener en cuenta la interacción entre sujetos <sup>(9)</sup>, etc.);
- la forma de expresión determinada por el experimento (escrita o verbal);
- el uso del lenguaje que hace el sujeto: al interpretar las respuestas de los sujetos evidentemente se apela al lenguaje cotidiano y no a un lenguaje de sentidos estrictos como el matemático. Por ejemplo, la respuesta
  - es posible sacar más negras que en S1
  - [(1,1)(3,1):S2] (Q2; C4,10)
 no se entiende como que el sujeto está diciendo que de S2 puede extraer una mayor cantidad de cartas negras, sino como la paráfrasis "es más posible sacar negras (en S2) que en S1" <sup>(10)</sup>;
- el contexto, es decir las respuestas del mismo sujeto a otras preguntas del cuestionario, sobre todo a las preguntas inmediatamente anteriores y posteriores y a las preguntas con arreglos similares <sup>(11)</sup>.

#### 4.2. ESTRATEGIAS CON UNA CLASE DE ELEMENTOS: CENTRACIONES

Cuando un sujeto centra su atención en una clase de elementos y compara ambos números de esa clase, está utilizando una estrategia de centración. Puede tratarse de una centración en la cantidad total de objetos (cartas o canicas) de uno y otro lado, o en la cantidad de favorables (negros) o en la cantidad de desfavorables (blancos). Las estrategias de centración, que son bastante simples de aplicar, son también muy frecuentemente utiliza-



- 
9. Las interacciones entre sujetos serán tratadas en el capítulo 5 (ver §5.1.3.2).
  10. Los usos individuales del lenguaje serán estudiados en el capítulo 5.
  11. Como se ve, uso en este trabajo el término "contexto" en el sentido estricto de las respuestas del mismo individuo, y no en el amplio, social y de significados.



das: más de la mitad de las justificaciones obtenidas en este estudio son o contienen centraciones.

Llamaré positivas a las centraciones en las que se elige el espacio muestral con el mayor de los números de la clase y negativas a las centraciones en las que se elige el espacio muestral con el menor de ambos números.

Pensemos en el ejemplo (1,3)(2,5) trabajado en el capítulo 3:

ESPACIO MUESTRAL S1	ESPACIO MUESTRAL S2
	

Algunas estrategias de centración llevarían los siguientes argumentos:

- "elijo S1, porque sólo tiene cuatro cartas, mientras que S2 tiene siete" (centración negativa en los casos totales);
- "elijo S2 porque tiene dos negras, mientras que S1 sólo tiene una" (centración positiva en los casos favorables);
- "elijo S1 porque tiene sólo tres blancas, mientras que S2 tiene cinco" (centración negativa en los casos desfavorables).

Estas tres argumentaciones tienen en común que sólo se basan en una clase de números: los totales, los favorables o los desfavorables, sin intentar relacionarlos con números de otra clase.

Las estrategias que he ejemplificado son las centraciones más típicas pero no son las únicas posibles. Podrían también presentarse respuestas como las siguientes, que se pueden antojar contraintuitivas a algunos lectores:

- "elijo S2, porque tiene siete cartas, mientras que S1 sólo tiene cuatro" (centración positiva en los casos totales);
- "elijo S1 porque tiene menos negras", o incluso "elijo S1 porque tiene una sola negra, y entonces ésa es la que va a salir" (centraciones negativas en los favorables);
- "elijo S2 porque tiene más blancas" (centración positiva en los desfavorables)

Por otro lado, en otras situaciones se podrían manifestar estrategias de centración que reconocen igualdades. Ejemplos de ellas son:

- ante una pregunta como (1,3)(2,2) un sujeto podría decir "da igual elegir S1 ó S2, porque en ambos hay cuatro cartas" (centración de igualdad en los casos totales);
- ante una pregunta como (2,1)(2,4) un sujeto podría decir "da igual elegir S1 ó S2, porque en ambos hay dos cartas negras" (centración de igualdad en los casos favorables);
- ante una pregunta como (3,4)(5,4) un sujeto podría decir "da igual elegir S1 ó S2, porque en ambos hay cuatro cartas blancas" (centración de igualdad en los casos desfavorables).

Aunque estas estrategias de igualdad pueden considerarse como correlarias a las respectivas centraciones positivas o negativas, he decidido manejarlas como estrategias con identidad propia, porque ello facilitará el análisis posterior.

El término centración que utilizo es originalmente piagetiano; las estrategias correspondientes son observadas por Piaget e Inhelder (1951) desde el estadio preoperatorio pero consideradas como típicas del estadio de las operaciones concretas. Noelting (1980, pág. 225), heredero de la escuela ginebrina y para quien «la concentración existe cuando sólo dos términos son comparados de manera aditiva», las considera características del nivel "preoperatorio o intuitivo". Fischbein plantea algunas discrepancias, empezando por el uso del término: él prefiere el término anclaje <sup>(12)</sup>, y afirma que es una de las maneras de la globalización, que a su vez es parte de los juicios intuitivos y «se logra simplemente ignorando algunos de los componentes (y confiando sólo en algunos de ellos que pueden dar rápidamente una estructura aparentemente coherente), o bien organizando la mayoría de los componentes disponibles en algún tipo de estructura sintética, significativa, unitaria (principalmente a través de un proceso de jerarquización)» (Fischbein, 1987, pág. 111).

A continuación se muestran las estrategias de concentración, utilizando un apartado distinto para las estrategias de concentración en los casos totales, en los favorables, en los desfavorables. Cada vez se ilustrarán ampliamente las estrategias con justificaciones obtenidas en el estudio, por lo que es necesario hacer una pequeña advertencia preliminar: el lector no debe pensar que cuando un sujeto dice "probabilidad", "proporción", etc, se refiere necesariamente a estos términos en el sentido que les estoy dando en este documento. Dejemos ahora que los sujetos hablen por sí mismos.

#### 4.2.1. CENTRACIONES EN LOS CASOS TOTALES

Las estrategias de centración en los casos totales son aquellas que llevan a la elección de un espacio muestral porque tiene más o menos objetos (cartas o canicas) que el otro, sean del color que sean.

##### 4.2.1.1. CENTRACION NEGATIVA: {N-}

A la elección de un espacio muestral porque tiene menos cartas que el otro (es decir, el espacio con menor  $n_j$ ) la llamaré estrategia de concentración negativa en los casos totales y la denotaré {N-}.

<sup>12</sup>. Fischbein le da a este término (en inglés *anchoring*) un sentido distinto del que le otorgan Kahneman y Tversky.

## a) Ejemplos (13)

Esta es la más frecuente de las centraciones en los casos totales: 54 respuestas han sido clasificadas como {N-}. He aquí algunos ejemplos de su expresión:

- nada más hay tres [(1,2)(3,5):S1] (M; C3,6)
- son menos elementos... [(2,0)(6,0):S1] (O; C6,23)
- entre más cartas haya se te pone más difícil... entre menos cartas haya, más fácil es la elección, más fácil poderle atinar... entre menos cartas haya, independientemente de la proporción... [(1,2)(2,3):S1] (M; C3,5)
- si se desea saber la probabilidad de sacar una negra, uno trata de sacar la carta del grupo más pequeño (Jud; C1, observación al final de la segunda aplicación)

En ocasiones, la estrategia {N-} va acompañada de una verificación de que además de que hay menos cartas en total existe en el espacio muestral elegido al menos una favorable:

- hay menos posibilidad de fallar, puesto que sólo hay tres cartas de las cuales una es negra [(1,2)(2,4):S1] (Car; C1,8)
- hay menos número de cartas y se encuentra entre ellas lo que se desea [(1,1)(1,2):S1] (Flo; C2,16)

## b) Representación

Puede pensarse que las centraciones en los totales se ocupan de la cantidad de opciones para elegir. Un sujeto que tiene una centración negativa es atraído por el espacio muestral que menos opciones tenga para elegir, porque es donde se reduce la incertidumbre.

## 4.2.1.2. CENTRACION POSITIVA: {N+}

Ocasionalmente llega a presentarse la elección de un espacio muestral por el hecho de tener más cartas que el otro: la centración positiva en los casos totales. Es la elección de un espacio muestral porque tiene más cartas que el otro: el espacio con mayor  $n_j$ . A esta estrategia la denotaré {N+}.

## a) Ejemplos (14)

Sólo 6 de las respuestas fueron clasificadas como {N+}. Algunos de los pocos ejemplos de la expresión de esta estrategia son:

13. Estos son algunos ejemplos de la literatura científica: «es más fácil en el montón más chico» (dicho por un niño de cinco años y tres meses, lo que se simboliza así: 5;3), «porque hay menos» (edad: 6;1) (Piaget e Inhelder, 1951, págs. 130 y 138).
14. Un par de ejemplos de la literatura científica: «porque hay más fichas» (edad: 4;6), «(2,2) porque tiene cuatro» (1,1)(2,2) (edad: 6;6) (Piaget e Inhelder, 1951, págs. 129 y 138).

- hay más cartas y tengo más posibilidad de sacar la negra [(0,2)(0,3):S2] (Jud; C1,1)
- hay más probabilidad (mayor número de cartas) [(1,1)(1,2):S2] (Paz; C1,10)
- me gusta estar en suspens... lo juego a la suerte, aquí puedo sacar más cartas... me gusta buscarle y hacer de emoción las cosas [(1,2)(3,5):S2] (T; C3,7)

#### b) Representación

El último de los ejemplos citados podría sugerir que se trata de una inversión de las ideas que sustentan la estrategia {N-}: en este caso se trataría de aumentar la incertidumbre. En otros casos parecería tratarse simplemente de una atracción hacia el lado en que hay más opciones para elegir, como si eso solo implicara que entonces hay más opciones para ganar (es decir, que mientras más cartas haya, hay más opciones de acertar). Sea como fuere, es en estos sujetos una estrategia mucho menos común que {N-} (15), y la he considerado como una estrategia primitiva, por lo que se abordará nuevamente en la sección §4.5.

#### 4.2.1.3. CENTRACION {N=}

La tercera centración en los casos totales es la consideración de que da igual elegir un espacio muestral o el otro porque en ambos hay el mismo número de cartas:  $n_1 = n_2$ . Denotaré {N=} a esta estrategia; también la denominaré centración de igualdad en los casos totales.

#### a) Ejemplos

Aunque la mayor frecuencia con que se presentó esta estrategia fue en composición con otras estrategias, de manera aislada ocurrió en tres respuestas. Dos de ellas son:

- existe el mismo número de cartas por lo tanto la misma probabilidad de sacar una negra [(0,2)(1,1):=] (Bet; C2,6)
- hay la misma probabilidad en ambos de sacarlo (por tener dos cartas) [(1,1)(1,1):=] (Mar; C1,7)

#### b) Representación

Esta estrategia es la alternativa tanto a {N-} como a {N+} para las situaciones en que hay los mismos casos totales en ambos espacios muestrales: es decir, en la combinación K3. Podría ocurrir que un sujeto busque el espacio muestral en que se reduzca la incertidumbre (o sea, el espacio con menor  $n_j$ ) y al ver que en

15. Esto coincide con los hallazgos de otros autores, entre ellos John Cohen (1963, citado por Maury, 1986, pág. 155), pero discrepa de lo encontrado por Maury, quien halla por igual las estrategias "no pertinentes" {N-} y {N+}, sobre todo en lo que yo llamo compensaciones del tipo {N+ \* P=} (Maury, 1986) (ver §4.4.1.3).

ambos hay la misma, decide que da igual elegir uno u otro espacio. También podría ocurrir que un sujeto busque el espacio muestral con más opciones para elegir (o sea, el espacio con mayor  $n_j$ ) y llegue a la misma conclusión.

#### 4.2.2. CENTRACIONES EN LOS CASOS FAVORABLES

Las estrategias de centración en los casos favorables son las que llevan a la elección de un espacio muestral porque tiene más o menos elementos favorables, independientemente de cuántos desfavorables hay o de cuántos hay en total. Son las estrategias de concentración más frecuentes: tanto en usos simples como en estrategias compuestas, más de la mitad de las centraciones son en casos favorables.

##### 4.2.2.1. CENTRACION POSITIVA: {F+}

La más concurrida de las centraciones en favorables es sin lugar a dudas la centración positiva, es decir la estrategia que lleva a la elección de un espacio muestral porque tiene más cartas negras que el otro, o sea del espacio muestral con mayor  $f_j$ . A esta estrategia la denotaré {F+}.

##### a) Ejemplos <sup>(16)</sup>

En total hubo 235 respuestas clasificadas como {F+}, lo que hace de ella no sólo la concentración más frecuentemente utilizada, sino la que ocupa el primer lugar entre todas las estrategias simples del estudio. Algunos ejemplos de su expresión son:

- existe mayor número de canicas negras que en S1 [(2,1)(3,4):S2] (I; C6,30)
- ya habría más oportunidad aquí porque son dos cartas más [(7,14)(9,18):S2] (Z; C6,40.5)
- mientras más más negros haya, más fácil va a ser [(2,3)(4,5):S2] (M; C3,6.3/2)
- hay cuatro opciones de tener una negra [(2,0)(4,0):S2] (Con; C1,12)

También he clasificado como {F+} los argumentos relacionados con la existencia de negras en uno solo de los espacios muestrales.

<sup>16</sup>. En la literatura científica también abundan ejemplos de expresiones de la estrategia {F+}. He aquí algunos: «(2,1) porque aquí hay dos, acá una» (1,2)(2,1) (edad: 9;10) (Chalini, 1979, pág. 102); «escogí esta caja porque hay más canicas negras aquí que en la otra caja» (Fischbein et al., 1970, pág. 184); «(2,2) porque tiene más cruces» (1,1)(2,2) (edad: 6;2) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 138). Maury (1984, 1986) observa también este tipo de estrategias, y las considera "no pertinentes".

les, que es el elegido. Otras dos maneras de expresar esta situación son: que en el espacio muestral no elegido todas las cartas son blancas, o que no hay cartas negras (situaciones piagetianas de imposibilidad):

- hay negras, allá no  $[(1,1)(0,3):S1]$  (Map; C2,11)
- cuando menos existe una probabilidad  $[(1,1)(0,3):S1]$  (Als; C2,11)
- tienen el elemento que se busca  $[(0,2)(2,2):S2]$  (Art; C1,28)

#### b) Representación

En contraposición a la centración negativa en los casos totales, que, fijándose en la cantidad de opciones para elegir, busca que se reduzca la incertidumbre, la centración positiva en los casos favorables se fija en la cantidad de opciones para ganar: por ello es tanto mejor mientras más haya.

#### 4.2.2.2. CENTRACIONES NEGATIVAS: {F-} Y {F1}

Se trata de dos estrategias aún menos frecuentes que la centración positiva en los casos totales. Por una parte está la elección de un espacio muestral por el hecho de tener menos cartas negras (por ser el de menor  $f_j$ ): la centración negativa en los casos favorables, a la que he denotado {F-}. Por otra parte está un caso extremo de esta centración negativa, que ocurre con la elección de un espacio muestral cuando en él hay UNA SOLA carta negra (elección del espacio en que  $f_j=1$ ); a esta estrategia la he denotado {F1}.

#### a) Ejemplos

La centración {F-} fue manifestada por un solo sujeto (Adr, del segundo experimento), en seis de sus respuestas (17). La expresó por ejemplo así:

- hay mayor probabilidad puesto que hay menos negras que allá  $[(2,1)(3,2):S1]$  (Adr; C2,5)
- hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos que donde hay más  $[(2,3)(5,4):S1]$  (Adr; C2,9)

Aunque este modo de razonamiento pueda parecer extraño o contraintuitivo al lector, para este sujeto se trataba efectivamente de una estrategia tan legítima como lo es para otros la estrategia {F+}. En la segunda fase del experimento en que participó, el sujeto Adr defendió verbalmente su estrategia como obvia, incluso con sorpresa de que no todos pensarán del mismo modo.

17. En la literatura científica tampoco es muy frecuente {F-}. Un ejemplo de un sujeto ante una sola bolsa que tiene 2 bolas blancas, 5 rojas y 5 azules: «blanca porque no hay muchas y hay igual de rojas y azules» (edad: 6;6) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 115).

Una estrategia similar a {F-} que distinguí como una estrategia diferente (y no como un caso particular) es la elección del espacio muestral en que hay una sola negra. A esta estrategia, que se presentó en tres respuestas de diversos sujetos, la denotaré {F1}; ejemplos de su expresión son <sup>(18)</sup>:

- hay una negra [(1,2)(2,4):S1] (Con; C1,8)
- aquí son tres blancas con una negra, o sea de las cuatro bolas que echas, de éstas te puede salir la negra, definitivamente [(1,3)(2,4):S1] (T; C3,35)

#### b) Representación

Una posible explicación de ambas estrategias es una idea "mágica" que se podría expresar en términos como éstos: "al azar hay que decirle las cosas al revés".

Otra posible explicación o interpretación de {F-} estaría relacionada con la de {N+}: así como en {N+} hay una atracción hacia el espacio muestral en que hay más opciones para elegir (como si ello implicara automáticamente que entonces también hay más opciones para ganar), en {F-} podría haber una atracción hacia el espacio muestral en que hay menos opciones para ganar como si ello implicara automáticamente que hay menos opciones para elegir, y por ende menos incertidumbre. También puede tratarse de una atracción hacia el lado con menos opciones para ganar porque así hay menos "competencia" entre ellas, o porque hay menos incertidumbre entre ellas.

Esta última explicación podría llevarse al extremo de {F1}: la atracción hacia un espacio muestral en que hay UN solo elemento favorable porque permite que, al no tener que considerar otros posibles elementos favorables, la atención se fije en ese único elemento y lleve forzosamente a escogerlo, independientemente de cuántos elementos desfavorables haya.

En todas estas explicaciones hay un ingrediente de pensamiento mágico, sin el que no parece que pueda funcionar ninguna de las dos estrategias {F-} y {F1}. Sea como fuere, he catalogado a ambas estrategias como primitivas, por lo que serán consideradas nuevamente en la sección §4.5.

#### 4.2.2.3. CENTRACION {F=}

La tercera centración en los casos favorables es la consideración de que da igual elegir un espacio muestral o el otro porque en ambos hay el mismo número de cartas negras:  $f_1 = f_2$ . A esta estrategia la denotaré {F=}; también la denominaré centración de igualdad en los casos favorables.

18. Algunos ejemplos de la literatura científica: «porque yo la voy a agarrar» (edad: 7;0), «porque en ésta (1,1) tiene una estrella» (1,1)(2,0) (edad: 9;7) (Chalini, 1979, págs. 99 y 101); «es más fácil cuando sólo hay una cruz» (edad: 4;6) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 129).

## a) Ejemplos

La estrategia {F=} se presentó en 57 respuestas. He aquí unos ejemplos de ella:

- tanto en S1 como en S2 sólo hay una carta negra [(1,1)(1,2):=] (Bla; C2,16)
- tienen la misma cantidad de negras [(2,2)(2,3):=] (Q6; C4,6)

También he catalogado como {F=} los argumentos en que se constata que no hay elementos favorables en ninguno de los dos espacios muestrales ( $f_1 = f_2 = 0$ ). Otra manera de expresar esta situación es diciendo que en ambos espacios muestrales todas las cartas son blancas (situación piagetiana de doble imposibilidad):

- no existe ninguna negra en las cinco cartas [(0,2)(0,3):n] (Agu; C1,1)
- todas son blancas [(0,2)(0,3):n] (Maf; C2,15)

## b) Representación

Se trata de una alternativa a {F+} (aunque también podría serlo a {F-} y a {F1}) para las situaciones con el mismo número de casos favorables en ambos espacios muestrales: es decir, en las combinaciones K5 ó K12. Podría ocurrir que un sujeto busque el espacio muestral con más opciones para ganar y al ver que en ambos hay la misma, decide que da igual elegir uno u otro espacio. También podría ocurrir que un sujeto, atraído por el espacio con menos negras llegue a la misma conclusión, pero esto no ocurrió con el sujeto Adr, que utilizó otras estrategias en la combinación K5. Por último, podría ocurrir que un sujeto llegue a la elección de "da igual" en la combinación K5 siendo que su atracción inicial era del tipo {F1}.

#### 4.2.3. CENTRACIONES EN LOS CASOS DESFAVORABLES

Las estrategias de centración en los casos desfavorables son aquellas que llevan a la elección de un espacio muestral porque tiene más o menos elementos desfavorables, independientemente de cuántos favorables hay. Son menos frecuentes que las de concentración en los casos favorables.

##### 4.2.3.1. CENTRACION NEGATIVA: {D-}

La más común de las centraciones en desfavorables es la negativa, esto es, la elección de un espacio muestral porque tiene menos blancas, o sea del espacio muestral con menor  $d_j$ . A esta estrategia la denotaré {D-}.



## a) Ejemplos (19)

Esta estrategia ocurrió en 97 de las respuestas. Algunos ejemplos de su expresión son:

- sólo hay dos posibilidades de fallar [(2,2)(4,4):S1] (Car; C1,2)
- hay una sola oportunidad para equivocarme y en el otro lado dos [(2,1)(3,2):S1] (Rub; C1,16)
- hay más probabilidad porque sólo una carta es blanca [(2,1)(3,2):S1] (Edi; C1,16)

También son {D-} los argumentos relacionados con la existencia de blancas en uno solo de los espacios muestrales, que es el no elegido. Otras dos maneras de expresar esta situación son: que en el espacio muestral elegido todas las cartas son negras, o que no hay cartas blancas (situaciones piagetianas de certeza):

- ambas cartas son negras [(0,2)(2,0):S2] (Fau; C1,13)
- hay puras negras [(2,0)(4,1):S1] (Mal; C2,14)
- no existe la probabilidad de sacar blanca, sólo negra [(2,0)(4,1):S1] (Als; C2,14)
- no hay ninguna posibilidad de error como allá [(2,0)(4,1):S1] (Pa2; C2,14)

## b) Representación

Anteriormente vi que la centración negativa en los totales tiene una atracción hacia el menor número de opciones para elegir, y la centración positiva en los favorables tiene una atracción hacia la mayor cantidad de opciones para ganar. Por su parte, la centración en los desfavorables ve la cantidad de opciones para perder: tanto mejor mientras menos haya.

Falk et al. (1980, pág. 196) consideran que esta estrategia, aunque errónea, está un paso más adelante de {F+}, porque «el progreso logrado aquí es la conciencia de que también se debe considerar el otro color, aunque no haya una integración de ambos tipos de números». Sin embargo, eso implicaría que en la percepción global de la situación el sujeto le da más peso automáticamente a los casos favorables (y el progreso consistiría entonces en percibir también lo que tiene menos peso). Por cierto, también implicaría que las estrategias basadas en los casos totales son más avanzadas que las basadas en los favorables. Yo creo que las estrategias {F+}, {D-} y {N-} son paralelas, en el sentido de que cuando el sujeto percibe globalmente la situación, incorpora simultáneamente la información referente a los casos favorables, a los desfavorables y a los totales.

19. Algunos ejemplos de la literatura científica: «porque hay menos agua» (edad: 11;2) (Noelting, 1980, pág. 238); «(1,1) porque el otro tiene dos sin cruz» (1,1)(1,2) (edad: 7;8) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 142); «porque acá hay dos sin estrella y aquí hay una sin estrella» (1,1)(1,2) (edad: 9;10) (Chalini, 1979, pág. 102).

#### 4.2.3.2. CENTRACION POSITIVA: {D+}

La estrategia contraria a {D-} es la centración positiva en los casos desfavorables: se trata de la elección de un espacio muestral por ser el de mayor número de blancas (mayor  $d_1$ ); la denotaré {D+}.

##### a) Ejemplos

Esta es sin duda la menos frecuente de todas las estrategias de centración: fue expresada en sólo dos ocasiones, ambas por un solo sujeto: el mismo sujeto del segundo experimento que fue el único en usar la estrategia {F-}, ADr. Usó {D+} así:

- hay más cartas blancas y hay probabilidad de que salga una negra [(0,2)(0,3):S2] (Adr; C2,15)
- hay más blancas y lo más probable es que salga una negra [(1,3)(2,6):S2] (Adr; C2,17)

En la discusión verbal, ADr defendió la estrategia {D+} como contrario de su estrategia {F-}.

##### b) Representación

Desgraciadamente, lo único claro que dejan ambas expresiones de {D+} es que el sujeto comprendió bien el ejercicio y que efectivamente la estrategia que utilizó fue {D+}, pero no hay claridad con respecto a qué tipo de idea o de representación de la situación es la que tiene el sujeto que así se expresa. A nivel hipotético podría lanzar varias sugerencias, que están relacionadas con las posibles representaciones de {N+} y con las de {F-}: la idea mágica de "voltear al revés las cosas" en el azar, el asociar las opciones para perder con las opciones para ganar (y entonces buscar dónde hay más), la idea de que mientras más haya de un color más "compiten" entre sí o más incertidumbre provocan entre ellas (y entonces es "bueno" que haya muchas blancas que competirán entre sí)... Esta es otra de las estrategias primitivas que serán consideradas nuevamente en la sección §4.5.

#### 4.2.3.3. CENTRACION {D=}

La última centración que se verá es la centración en los casos desfavorables que lleva a la respuesta "da igual" cuando el número de blancas es igual en ambos espacios muestrales:  $d_1 = d_2$ . A esta estrategia la denotaré {D=}; también la denominaré centración de igualdad en los casos desfavorables.

##### a) Ejemplos

La estrategia {D=} se encontró en 33 casos; algunos de sus ejemplos se presentan enseguida:

- en las dos existe la misma posibilidad de fallar en una carta [(1,1)(2,1):=] (Car; C1,11)
- tengo la misma posibilidad de equivocarme dos veces [(2,2)(4,2):=] (Rub; C1,14)

- se encuentran las mismas probabilidades de sacar una negra puesto que sólo hay una blanca [(2,1)(3,1):=] (Als; C2,1)

También he catalogado como {D=} los argumentos en que se constata que no hay elementos desfavorables en ninguno de los dos espacios muestrales ( $d_1 = d_2 = 0$ ). Otra manera de expresar esta situación es diciendo que en ambos espacios muestrales todas las cartas son negras (situación piagetiana de doble certeza):

- la posibilidad es la misma ya que no hay ninguna blanca [(2,0)(6,0):=] (Q3; C4,5)
- en los dos lados las cartas son negras y no hay posibilidad de fallar [(2,0)(4,0):=] (Car; C1,12)

#### b) Representación

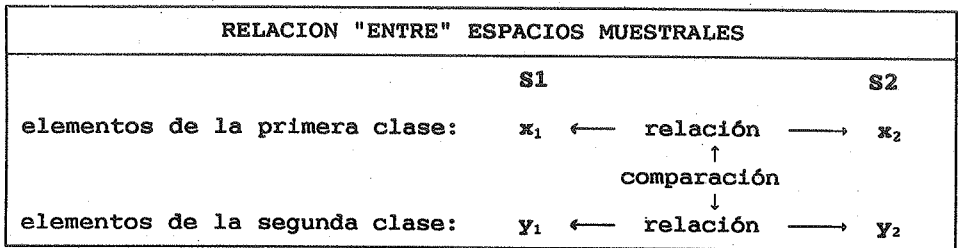
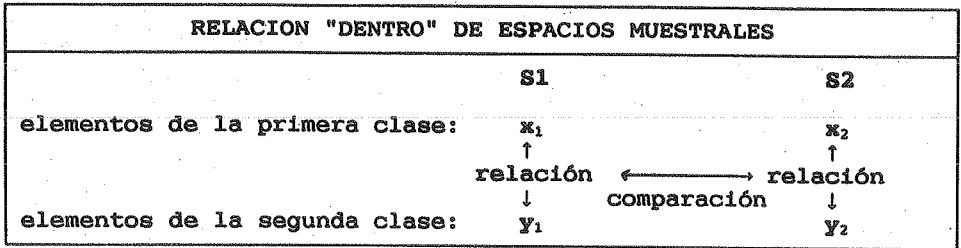
La estrategia {D=} es una alternativa a {D-} para las situaciones con el mismo número de casos desfavorables en ambos espacios muestrales: es decir, en las combinaciones K4 ó K13. Parece-ría ser que un sujeto atraído hacia el espacio muestral con menos opciones para perder decida que da igual elegir uno u otro espacio al ver que en ambos hay las mismas opciones para perder.

### 4.3. ESTRATEGIAS CON DOS CLASES DE ELEMENTOS: RELACIONES

Cuando un sujeto considera simultáneamente dos clases de elementos y después de establecer dos relaciones procede a comparar los resultados, está utilizando una estrategia de dos clases de elementos. Este proceso puede ser de dos tipos:

- la relación se establece entre ambos números (de clases distintas) de cada espacio muestral y después se comparan los resultados obtenidos en ambos espacios muestrales; como inicialmente se están relacionando números del mismo espacio, es una relación DENTRO de espacios muestrales;
- la relación se establece entre ambos números (de espacios muestrales distintos) de cada clase y después se comparan los resultados obtenidos en ambas clases; como inicialmente se están relacionando números de espacios diferentes, es una relación ENTRE espacios muestrales.

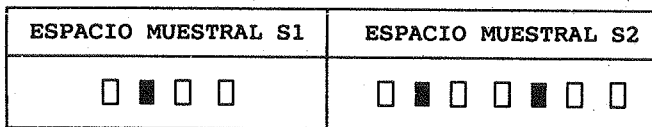
En el capítulo 3 ya se había mencionado esta distinción entre las estrategias DENTRO y las estrategias ENTRE. Aquí se repetirán los esquemas respectivos; en ellos  $x_1$  y  $x_2$  son los dos elementos de una clase (que puede ser de favorables, desfavorables o totales) y  $y_1$  y  $y_2$  son los dos elementos de otra clase (que a su vez puede ser de favorables, desfavorables o totales):



En el capítulo 3 había presentado las categorías DENTRO y ENTRE con respecto a las situaciones en las que se podrían estar utilizando razonamientos de tipo proporcional; por cierto, estas categorías fueron creadas por Noelting (1980) justamente para estudiar ese tipo de razonamientos. Sin embargo, se pueden ampliar estas categorías a otros tipos de razonamiento, en los que las relaciones establecidas entre los elementos de dos clases y dos espacios no sean forzosamente de carácter multiplicativo. Distingo los siguientes tipos de relación:

- una relación de orden;
- una relación de carácter aditivo o sustractivo;
- una relación de carácter multiplicativo o proporcional.

Se pueden ejemplificar estas relaciones en el arreglo con que se ha venido trabajando, (1,3)(2,5):



Una estrategia basada en una relación de orden llevaría un argumento semejante a alguno de éstos:

- "en S1 tengo menos negras que blancas, en S2 también, entonces da igual porque en ambos lados hay más posibilidades de perder que de ganar";
- "da igual porque en ambos lados tengo más opción de perder que de ganar".

En ambos casos se trata de estrategias DENTRO.

Para el mismo ejemplo de arreglo, una estrategia basada en una relación sustractiva podría argumentar en términos como éstos:

- "si quito una pareja de blanco con negro es como si no quitara nada; en S1 puedo quitar una pareja y quedan dos blancas, y en S2 puedo quitar dos parejas y quedan tres blancas: entonces elijo S1 porque ahí quedan menos blancas";
- "elijo S1 porque sólo hay dos blancas más que negras, mientras que en S2 hay tres blancas más que negras";
- "en S2 hay una negra más que en S1, y hay dos blancas más que en S1, entonces es mayor la diferencia de blancas: S2 está más cargada de blancas y elijo S1".

Los dos primeros ejemplos son de estrategias DENTRO, el tercero es ENTRE.

Siempre con el mismo arreglo de nuestro ejemplo, una estrategia basada en una relación multiplicativa tendría una argumentación como las siguientes:

- "en S1 tengo tres blancas para una negra; para que fuera igual S2 necesitaría tres blancas para cada una de las dos negras, pero faltaría una blanca: entonces elijo S2 porque tiene proporcionalmente menos blancas";
- "elijo S2 porque  $2/7 > 1/4$ , o sea porque  $.29 > .25$ ";
- "en S2 hay el doble de negras que en S1, pero menos del doble de blancas: entonces elijo S2 porque tiene proporcionalmente más negras";
- "elijo S2 porque tiene  $2/3 = 16/24$  de todas las negras, y sólo  $5/8 = 15/24$  de todas las blancas".

Los dos primeros ejemplos son de estrategias DENTRO, los dos últimos de estrategias ENTRE.

Los nueve ejemplos anteriores tienen en común que se basan en dos clases de números: los favorables y los desfavorables o los favorables y los totales. Son, por lo tanto, más sofisticadas que las estrategias de centración ejemplificadas en la sección anterior, porque aquéllas sólo toman en cuenta una clase de elementos (sólo los totales o sólo los favorables o sólo los desfavorables). Así, mientras que las estrategias de centración no consideran toda la información contenida en una pregunta, las de relación sí lo hacen, puesto que cuando se conocen los elementos de dos clases los de la tercera se pueden deducir inmediatamente (20).

A su vez, puede establecerse entre las estrategias de centración una jerarquía dada por la sofisticación del tipo de relación, según que sea de orden, sustractiva o multiplicativa:

- En las relaciones de orden sólo se efectúa una comparación entre los números de dos clases, sin asignarle una magnitud a la comparación: acerca de (1,3) se dice "hay más blancas que negras", pero no cuántas más. Implícitamente, entonces, se está comparando cada espacio muestral con un

20. Si se conocen  $f$  y  $n$ , entonces  $d=n-f$ ; si se conocen  $d$  y  $n$ , entonces  $f=n-d$ ; si se conocen  $f$  y  $d$ , entonces  $n=f+d$ .

- espacio ideal en el que hay tantas blancas como negras: el punto de equilibrio en el que  $p=0.5$ .
- En las relaciones sustractivas ya se asigna una magnitud, la diferencia aritmética entre negras y blancas  $r=f-d$ , pero no se toma en cuenta la cantidad basal: se dice "hay dos blancas más que negras" pero no se dice dos de cuántas en total, lo que equipararía las dos blancas sobrantes de (1,3) con las de (10,12) y con las de (1997,1999). Es una comparación de naturaleza aditiva, y por ende más sencilla que una comparación de naturaleza multiplicativa.
  - En las relaciones multiplicativas la magnitud asignada es el cociente entre negras y totales  $f/n$  o, equivalentemente, entre negras y blancas  $f/d$  o, equivalentemente, entre la diferencia de negras menos blancas y los totales  $r/n$  <sup>(21)</sup>: así, se puede decir que en (1,3) "la cuarta parte de las cartas son negras", o que "hay tantas negras como la tercera parte de las blancas", etc.

Hay dos aspectos generales de las estrategias de relación que llaman la atención y que pueden estar emparentados con la sofisticación arriba mencionada. El primero es que no es común que los sujetos recurran a ellas en las primeras respuestas del cuestionario: son mucho más comunes al principio las estrategias de centración que las de relación. El segundo aspecto es que en algunos sujetos ocurre que cuando llegan a una de ellas tienden a tenerla presente hasta el final del cuestionario, como estrategia única, dominante, o compensada en caso de igualdad (ver §4.4.1.3).

Veamos ahora los matices que adquieren en la realidad los tres diferentes tipos de estrategias de relación. Aunque en cada caso se harán explícitas las clases de elementos que involucra cada estrategia y si se trata de una de tipo DENTRO o ENTRE, se puede adelantar lo siguiente: en las respuestas obtenidas sólo hay estrategias de relación de tipo ENTRE en las que corresponden justamente al razonamiento proporcional; las de orden y las sustractivas fueron siempre DENTRO.

#### 4.3.1. RELACION DE ORDEN: ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO

Quando un sujeto establece una relación de orden de tipo DENTRO con las clases de favorables y desfavorables, y en la comparación de los resultados se basa en el punto de equilibrio en que hay igualdad de favorables y desfavorables, está usando una estrategia de equilibrio. Esto es, en las estrategias de

21. Hablo de equivalencia en este sentido: es fácil demostrar que el espacio muestral con mayor cociente  $f/n$  es forzosamente también el espacio muestral con mayor cociente  $f/d$  y el espacio muestral con mayor cociente  $r/n$ . También es el espacio muestral con menor cociente  $d/n$  y con menor cociente  $d/f$ .

equilibrio la atención del sujeto se ocupa de la ubicación de S1 y S2 con respecto al punto de equilibrio total, que se puede expresar de múltiples maneras:

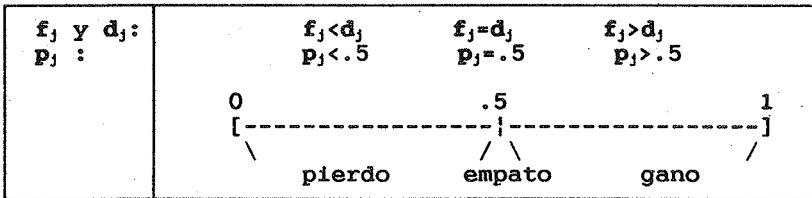
- hay tantas negras como blancas,
- la probabilidad es igual a  $\frac{1}{2}$ , a .5 ó a 50%,
- hay "empate" entre blancas y negras,
- hay tantas posibilidades de ganar como de perder.

Así, en las estrategias de equilibrio el sujeto hace comparaciones en dos etapas.

En la primera etapa el sujeto compara DENTRO de cada espacio muestral los casos favorables y los desfavorables. Utilizaré para denominar esta primera comparación unos términos rescatados de las respuestas de varios sujetos. Hablaré de:

- "pierdo" cuando hay menos negras que blancas ( $f_j < d_j$ ; es decir  $p_j < .5$ );
- "gano" cuando hay más negras que blancas ( $f_j > d_j$ ; es decir  $p_j > .5$ );
- "empato" cuando hay tantas negras como blancas ( $f_j = d_j$ ; es decir  $p_j = .5$ ).

El siguiente esquema ilustra lo anterior:



En la segunda etapa el sujeto compara los resultados anteriores, por lo que existen las siguientes posibilidades:

- pierdo-gano
- pierdo-empato
- empato-gano
- pierdo-pierdo
- gano-gano
- empato-empato

Las estrategias resultantes reciben justamente esos nombres.

4.3.1.1. ESTRATEGIA DE PIERDO-GANO: {E<>}

A la estrategia de equilibrio que lleva a la elección de un espacio muestral porque en él hay más posibilidades de ganar que de perder mientras que en el otro hay más posibilidades de perder que de ganar (ubicaciones U1.1, U1.3, U1.5 y U2.3) la he llamado de "pierdo-gano" y denotado {E<>}.

## a) Ejemplos (22)

La estrategia {E<} ocurrió en 22 respuestas. He aquí algunos ejemplos de ella:

- *aquí tengo más posibilidad de agarrar una negra que una blanca [(1,2)(18,9):S2] (V; C3,33)*
- *da igual sacar en S1 negras que en S2 blancas [(2,1)(2,3):S1] (Q5; C4,8)*
- *hay más negras, el número es más, es mayor que el de blancas [(3,1)(3,4):S1] (I; C6,2)*

## b) Representación

Cuando un sujeto utiliza esta estrategia está comparando implícitamente cada espacio muestral con respecto al punto de equilibrio (el "empate"); le resulta llamativo entonces que en un espacio muestral hay más elementos desfavorables que favorables (y por lo tanto que tiene mayor probabilidad de perder que de ganar) mientras que en el otro hay más elementos favorables que desfavorables (y tiene mayor probabilidad de ganar que de perder).

A muchos sujetos que han detectado esta diferencia les resulta obvio elegir el espacio en que hay más posibilidades de ganar que de perder, y no elegir el espacio con la situación inversa. Sin embargo, no es claro (23) en todos los sujetos que "pierdo" implique "tengo mayor probabilidad de perder que de ganar" y no "es seguro que si elijo este lado voy a perder". Lo mismo ocurre con "gano" (24).

Esta estrategia es correcta y simple: no hay necesidad de efectuar cálculos, y la comparación efectuada en cada espacio muestral conlleva una relación de orden que en general es aparente a simple vista.

## 4.3.1.2. ESTRATEGIA DE PIERDO-EMPATO: {E&lt;}

Hay una estrategia de equilibrio que lleva a la elección del espacio muestral en que  $p_j=0.5$ , porque ahí se "empata", o sea hay tantas posibilidades de ganar como de perder, mientras que en el otro espacio muestral hay más posibilidades de perder que de ga-

- 
22. Un ejemplo de la literatura científica: «*porque aquí hay dos y nada más una vacía y acá hay dos vacías y nada más una estrella; o sea, si saco aquí (2,1) tengo mayor posibilidad de sacar una, la que tenga estrella... y acá (1,2) no, porque son más pocas las que tienen estrella*» (1,2)(2,1) (edad: 10;7) (Chalini, 1979, pág. 103).
23. Esto es resultado de una serie de dificultades en la interpretación de las respuestas de los sujetos, que serán estudiadas en el capítulo 6.
24. Falk et al. (1980, pág. 201) reportan que los niños menores de 11 años suelen referirse a los espacios muestrales de los tipos "pierdo" y "gano" respectivamente con expresiones de los tipos "aquí estoy seguro de perder" y "aquí estoy seguro de ganar".



nar (ubicaciones U2.1 y U2.2). A esta estrategia la llamo de "pierdo-empato" y la denoto {E<}.

#### a) Ejemplos

La estrategia {E<} es, después de la estrategia de igualdad {E=} que se verá más adelante, la más frecuente de las estrategias de equilibrio: ocurrió en 48 respuestas. Estas son algunas de sus expresiones:

- *el cincuenta, el cincuenta,... una a una,... aquí compar-  
tes el riesgo, en cambio allá aumenta más el riesgo de que  
sea blanca [(2,2)(2,3):S1] (J; C3,14)*
- *tiene los mismos elementos blancos y negros, y allá tiene  
mucho más blancos... es más fácil que se perdieran las ne-  
gras [(3,3)(3,18):S1] (O; C6,25)*

#### b) Representación

El sujeto que utiliza esta estrategia está realizando el mismo tipo de comparación que en {E<>}, con la diferencia que aquí, además de un espacio con más elementos desfavorables que favorables, encuentra que en el otro hay el mismo número de favorables y de desfavorables: ahí "empata".

Aunque para algunos sujetos esta situación no es tan obvia como la anterior, porque aquí no hay ningún espacio que lo lleve a "ganar", hay también muchos para quienes resulta evidente que vale más tener tantas posibilidades de ganar como de perder, que tener más posibilidades de perder que de ganar. Tampoco es claro si "empato" significa "tengo la misma probabilidad de ganar que de perder" o algo como "si de aquí saco dos, es seguro que una es blanca y la otra negra".

Esta estrategia es, como la anterior, correcta y simple (no implica más que un par de comparaciones realizables con la mera observación de cada espacio).

#### 4.3.1.3. ESTRATEGIA DE EMPATO-GANO: {E>}

Otra estrategia de equilibrio es la que lleva a la elección del espacio muestral en que  $p_i$  no es igual a 0.5, porque ahí hay más posibilidades de ganar que de perder, mientras que en el otro espacio muestral se "empata", o sea hay tantas posibilidades de ganar como de perder (ubicaciones U2.4 y U2.5). A esta estrategia la llamo de "empato-gano" y la denoto {E>}.

## a) Ejemplos (25)

Esta estrategia se presentó en 29 respuestas; algunas de sus expresiones son:

- hay más de 50% de negras, mientras que allá sólo llega al 50% [(2,2)(4,2):S2] (Mig; C1,14)
- son dos cartas negras y una blanca y allá no, porque hay dos negras y dos blancas [(2,1)(2,2):S1] (S11; C2,2)
- hay probabilidad de dos en tres y allá hay uno a uno [(1,1)(2,1):S2] (Pa2; C2,18)

## b) Representación

Esta estrategia es la imagen en espejo de la anterior. Aquí hay un espacio con igual número de elementos favorables y desfavorables ("empato") y otro con mayor número de elementos favorables que de desfavorables ("gano"). Cuando un sujeto ha detectado esto, le resulta en general evidente que vale más la pena elegir el espacio muestral con más posibilidades de ganar que de perder que el que tiene las mismas posibilidades de ganar que de perder. Como en los casos anteriores, no siempre es claro qué implica para los individuos la situación de "empato" y la de "gano"; como en los casos anteriores, esta estrategia es correcta y simple.

## 4.3.1.4. ESTRATEGIAS DE PIERDO-PIERDO O GANO-GANO: {E=}

Otra familia de estrategias de equilibrio es aquella en la que se hace la consideración de que en ambos espacios muestrales hay más posibilidades de perder que de ganar (ubicación U3.2) o viceversa (ubicación U3.4). A estas estrategias las denoto {E=}.

## a) Ejemplos (26)

Esta es la estrategia más frecuentemente utilizada: hubo 66 respuestas clasificadas como {E=}.

La estrategia {E=} puede ser de pierdo-pierdo (ubicaciones U3.1 ó U3.2), como en los siguientes ejemplos:

- de todos modos voy a perder... puede haber más posibilidad en S1, pero en las dos voy a perder [(1,2)(3,5):=] (V; C3,25/1)
- ninguna de las dos, casi no hay probabilidad de 1 en cien [(1,2)(2,4):=] (Gab; C1,24)

25. Un par de ejemplos de la literatura científica: «aquí es más fácil tomar una blanca porque hay más blancas que negras, en comparación con la otra caja» (Fischbein et al., 1970, pág. 184); «aquí (2,1) hay más que tienen estrella que las que no tienen estrella; y acá (2,2) igual que las que tienen estrella y las que no tienen» (2,1)(2,2) (edad: 10;7) (Chalini, 1979, pág. 103).

26. Un ejemplo de la literatura científica: «la probabilidad es la misma porque en ambos conjuntos hay más estrellas que amarillas» (edad: 13;2) (Lema y Morfin, 1981, pág. 186).

- en ninguno de los dos porque en los dos casos hay mayor número de blancas [(1,2)(2,4):=] (Cl<sub>a</sub>; C<sub>2</sub>,10)

En las ubicaciones U3.4 ó U3.5 la estrategia {E=} es de ga-no-gano y se expresa así:

- hay un número suficiente de cartas negras tanto en S1 como en S2 [(2,1)(3,1):=] (Bl<sub>a</sub>; C<sub>2</sub>,19)
- en las dos abundan las negras [(2,1)(4,2):=] (Sl<sub>1</sub>; C<sub>2</sub>,4)
- hay la misma probabilidad porque hay más cartas negras que blancas [(2,1)(3,2):=] (Sl<sub>1</sub>; C<sub>2</sub>,5)

Se podría pensar en una estrategia del tipo {E=} en la ubicación U3.3 ("empato-empato"), pero las respuestas que podrían ser interpretadas de esa manera recibieron otra interpretación (27).

#### b) Representación

Estas estrategias son las corolarias de las anteriores: cuando un sujeto se ha lanzado a la comparación, dentro de cada espacio muestral, entre los casos favorables y desfavorables, y obtiene el mismo resultado en cada espacio, hay una tendencia a concluir automáticamente que entonces la decisión debe ser que da igual entre uno y otro: "de todos modos voy a perder" ó "de todos modos voy a ganar" (por cierto que en estas expresiones parece dominar la idea de seguridad sobre la de probabilidad). Estas estrategias son tan sencillas como las anteriores: sin necesidad de cálculo, con una simple observación comparativa, se puede saber si cada espacio corresponde a "pierdo" o a "gano". Sin embargo, en estas situaciones las estrategias de equilibrio son incorrectas: aunque en ambos espacios haya mayor probabilidad de perder que de ganar (o de ganar que de perder), eso no conlleva forzosa-mente que la situación sea exactamente la misma: puede haber en un espacio una probabilidad aún mayor de perder (o de ganar) que en el otro.

#### 4.3.1.5. ATRACCION AL PUNTO DE EQUILIBRIO: {E5}

Otro tipo de estrategia de equilibrio lleva a la elección del espacio muestral en que  $p_i=0.5$  por ese solo hecho.

Cuando esto ocurre en las ubicaciones U2.1 ó U2.2, se trata de pierdo-empato: {E<}. Sin embargo, también existe esta elección en las ubicaciones U2.4 ó U2.5; la denotaré {E5} (28).

27. Ver en el capítulo 6 el párrafo sobre estrategias que se confunden, §6.2.3.2c.

28. Como por lo expuesto arriba la estrategia {E5} sería indistinguible de la estrategia {E<} en la ubicación U2.2, he restringido {E5} a la ubicación U2.4. Ver en el capítulo 6 el párrafo sobre estrategias que se confunden, §6.2.3.2c.

## a) Ejemplos

La estrategia {E5} se presentó con muy poca frecuencia: sólo 6 respuestas fueron clasificadas así. Se expresa por ejemplo como se ilustra:

- es la misma probabilidad para negras o blancas [(2,2)(3,2):S1] (Flo; C2,12)
- es uno a uno [(1,1)(3,1):S1] (O; C6,27)
- hay igualdad de colores [(2,1)(2,2):S2] (Adr; C2,2)

## b) Representación

Aquí se trata de una atracción al punto de equilibrio de "empato" por el solo hecho de que tiene tal equilibrio, independientemente de lo que ocurra en el otro espacio muestral (incluso si en el otro hay un desequilibrio a favor de los favorables). Parece haber, para lo sujetos que eligen esta estrategia, un impulso a estar en una situación balanceada, sin movimientos hacia los favorables o los desfavorables. Esta es otra de las estrategias que he considerado primitivas, y la consideraré de nuevo en la sección §4.5.

#### 4.3.2. RELACION SUSTRACTIVA: DIFERENCIAS DE FAVORABLES MENOS DESFAVORABLES

Otra familia de estrategias de relación de tipo DENTRO son las que establecen la diferencia de favorables menos desfavorables en cada espacio muestral y posteriormente comparan los resultados. Esto puede adoptar varias formas:

- una de ellas consiste en considerar que cada carta blanca "cancela" a una negra del mismo espacio muestral, por lo que para la solución se pueden excluir las "parejas" <sup>(29)</sup> formadas por blanca-negra y considerar exclusivamente las cartas restantes;
- otra forma consiste en efectuar la operación aritmética de sustracción  $f_j - d_j$  en cada espacio muestral y comparar los residuos  $r_j$ ;
- otra más consiste en agregar (física o mentalmente) un número igual de blancas y de negras a uno de los dos espacios muestrales, hasta que las cartas de uno de los dos colores se igualen con las del otro espacio muestral y entonces ver cuantas "sobran" o "faltan" del otro color.

Para ejemplificar estas tres formas, consideremos nuevamente nuestro arreglo (1,3)(2,5):

29. Tomo el término del sujeto J del tercer experimento.

ESPACIO MUESTRAL S1	ESPACIO MUESTRAL S2
□ ■ □ □	□ ■ □ □ ■ □ □

- un sujeto que utilizara la primera forma diría: "En S1 quito la negra con una blanca, me quedan dos blancas, en S2 cada negra se va con su blanca y me quedan tres blancas; entonces hay más blancas en S2, prefiero elegir S1";
- un sujeto que utilizara la segunda forma diría: "En S1 tengo 3-1=2 blancas sobrantes, mientras que en S2 sobran 5-2=3; elijo del lado en que sobran menos blancas: S1";
- un sujeto que utilizara la tercera forma diría: "Si a S1 le agrego una negra y una blanca me quedan dos negras y cuatro blancas: igual número de negras que en S2 pero menos blancas, por lo que es preferible S1".

Estas maneras de razonar son consideradas por los integrantes de la escuela ginebrina como típicos del final del estadio de las operaciones concretas (Piaget e Inhelder, 1951; Noeltig, 1980; Lema y Morfin, 1981; Maury, 1986).

Distinguiré tres estrategias de diferencia, según la relación que tengan entre sí los residuos de uno y otro espacio muestral.

Un aspecto de las estrategias de diferencia merece particular atención: no son estrategias de fácil expresión. Esto podría deberse a que implican la comparación de dos diferencias, y que tanto las diferencias como la comparación entre ellas pueden resultar difíciles de expresar <sup>(30)</sup>.

#### 4.3.2.1. ESTRATEGIA DE RESTA MAYOR: {R+}

A la estrategia que consiste en la elección del espacio muestral en que después de hacer las "parejas" de cancelación o la operación aritmética quedan más negras "residuales" (o menos blancas), es decir del espacio muestral con mayor  $r_j$ , la he llamado estrategia de resta mayor y denotado {R+}.

<sup>30</sup>. Las dificultades en la expresión de las diferencias serán analizadas en el capítulo 5 (ver ahí los párrafos sobre sinonimias, §5.2.2.1 y §5.2.2.2); las dificultades en la comparación serán mencionadas de nuevo en el capítulo 6 (ver ahí §6.2.3.2b).

a) Ejemplos <sup>(31)</sup>

La estrategia {R+} es la más frecuente de las estrategias de resta: fue encontrada en 18 respuestas. He aquí ejemplos de cómo expresan {R+} algunos sujetos:

- hay más negras que blancas que en S1 [(3,2)(5,1):S2] (O1; C4,4)
- aquí hay pares y allá hay un par y sobra una blanca: más posibilidades porque allá son dos blancas contra una [(1,2)(3,3):S2] (J; C3,5.1)
- únicamente son dos de más de blancas, no es mucha la diferencia, y allá es un poquito más grande [(8,14)(13,15):S2] (O; C6,28)

## b) Representación

El sujeto que opta por una estrategia {R+} está no sólo comparando los casos favorables con los desfavorables en cada espacio muestral, sino que además está buscando de cuánto es la diferencia entre ambos.

Es decir, la estrategia de resta implica un progreso tanto con respecto a las centraciones como con respecto a las estrategias de equilibrio, puesto que el sujeto está integrando toda la información numérica del problema, sólo que la integración es aditiva y no multiplicativa (Falk et al., 1980; Maury, 1984, 1986); el hecho de que el argumento tenga un carácter integrador lo hace particularmente llamativo, satisfactorio y convincente a los ojos de muchos sujetos <sup>(32)</sup>.

Conviene observar que en las ubicaciones de la forma U1.j ó U2.j la estrategia de resta mayor {R+} lleva a la misma elección que las estrategias de equilibrio {E<>}, {E<} y {E>}. En efecto, en estas ubicaciones ambos tipos de estrategia se enfrentan a la comparación de dos de las siguientes tres situaciones:

- "pierdo" ( $p_j < 0.5$ ), donde hay menos negras que blancas ( $f_j < d_j$ , por lo que  $r_j < 0$ ), lo que se podría expresar como "sobran blancas" o como "faltan negras";
- "empato" ( $p_j = 0.5$ ), donde hay tantas negras como blancas ( $f_j = d_j$ , por lo que  $r_j = 0$ ), lo que se podría expresar como "no sobra nada";

- 
31. Un ejemplo de esta estrategia en el experimento del jugo de naranja: «(4,2) porque hay un vaso de jugo más que en (2,1)» (edad: 11;2) (Noelting, 1980, pág. 238)
32. También lo es la "estrategia de la adición" estudiada por Hart (1981, citada por Maury, 1986, pág. 149), que consiste, en ejercicios de agrandamiento de figuras, en sumar una diferencia a-b en vez de multiplicar por una razón a/b. Por otra parte, el carácter numérico de esta estrategia podría ser parte de la explicación de por qué Maury (1984, 1986) encuentra muchísimas menos expresiones de {R+} (considerada como una de las estrategias "no pertinentes") cuando los sujetos trabajan con ruletas (que es un medio continuo) que cuando trabajan con urnas (referente discreto y por ende propicio al conteo).

- y "gano" ( $p_j > 0.5$ ), donde hay más negras que blancas ( $f_j > d_j$ , por lo que  $r_j > 0$ ), lo que se podría expresar como "sobran negras".

Así, en estas ubicaciones se puede considerar que ambas estrategias son equivalentes: llevan siempre a la misma elección. La diferencia entre ambas consiste en que las de equilibrio sólo dirían si sobran cartas de algún color, mientras que las de resta mayor dirían cuántas sobran de ellas.

Esta equivalencia se rompe en las ubicaciones de la forma U3.j, en que la estrategia de equilibrio {E=} lleva a la respuesta "da igual" pero la estrategia de resta mayor lleva a la elección de uno u otro espacio muestral (33). En las ubicaciones U3.1 y U3.2 ("pierdo-pierdo"), {R+} lleva a la elección de espacio en que sobran menos blancas y en las ubicaciones U3.4 y U3.5 ("gano-gano") a la del espacio en que sobran más negras. Me parece que en estas ubicaciones {R+} corresponde a un intento de distinguir en qué espacio "se pierde menos" (U3.1 ó U3.2) o "se gana más" (U3.4 ó U3.5) ( ).

#### 4.3.2.2. ESTRATEGIA DE RESTA MENOR: {R-}

Se trata de la estrategia contraria a {R+}, es decir la estrategia que consiste en la elección del espacio muestral en que después de hacer las "parejas" de cancelación o la operación aritmética quedan menos negras "residuales" (o más blancas), es decir del espacio muestral con menor  $r_j$ . He denominado a esta excepcional estrategia estrategia de resta menor y la he denotado con {R-}.

##### a) Ejemplos

Esta estrategia fue expresada por un solo sujeto (I, del quinto experimento), que la manifestó en sólo dos ocasiones. He aquí ambas expresiones:

- hay diferencia de negras y blancas... no más existe una blanca y dos negras... allá sí hay mayor número de cartas también negras, pero la diferencia nada más es una... [(2,1)(5,3):S1] (I; C6,8)
- no es mucha la diferencia de blancas y negras... (S: tú dices que aquí hay una negra más) sí... allá hay dos negras más... para sacar el millón, en S1 [(2,1)(5,3):S1] (I; C6,15)

##### b) Representación

Cabe observar que se trata de dos respuestas distintas a la misma pregunta planteada en dos momentos distintos del cuestionario. La similitud de las expresiones no deja lugar a duda acerca de la legitimidad de la categoría {R-}. En mi opinión, {R-} es un intento de afinar y extender {E5} a la ubicación U3.4 eligiendo, a falta de  $p_j=0.5$ , el espacio en que el residuo  $r_j=f_j-d_j$  tiene el

33. Salvo en las combinaciones K10 y K11.

menor valor absoluto, o sea el espacio en que los números de blancas y negras se parecen lo más posible: en este sentido {R-} denotaría una atracción al punto de equilibrio medida en términos del valor absoluto de  $r_j$ . Como a la estrategia {E5}, considero a {R-} una estrategia primitiva y la trataré nuevamente en la sección §4.5.

#### 4.3.2.3. ESTRATEGIA DE RESTA IGUAL: {R=}

La otra estrategia de relación establecida con las diferencias entre favorables y desfavorables es la que lleva a la respuesta "da igual" porque de ambos espacios muestrales los residuales (blancas o negras) después de la operación de "cancelación" o de diferencia aritmética son iguales (combinaciones K10, K11 y K16). A esta estrategia la he denotado {R=}.

##### a) Ejemplos <sup>(34)</sup>

La estrategia {R=} ocurrió en 11 ocasiones. Algunas de sus expresiones son:

- son el mismo número que sobra de blancas en las dos [(13,7)(18,12):=] (M; C3,29)
- es lo mismo, no más que aumentadas las cartas: aquí tienes dos y una blanca, aumentale una negra y otra blanca, pues es lo mismo [(2,1)(3,2):=] (V; C3,18/2)

##### b) Representación

La estrategia {R=} es un corolario de {R+}: cuando un sujeto ha emprendido de manera directa o indirecta un cálculo de diferencias entre favorables y desfavorables en cada espacio muestral, parece bastante natural que al encontrar la misma diferencia en ambos espacios muestrales concluya que da igual elegir uno o el otro: "pues es lo mismo".

Por otra parte, el último de los ejemplos mostrados da pie para comentar que es frecuente que en las estrategias de resta los sujetos efectúen, concreta o mentalmente, operaciones de añadir o de quitar parejas de cartas (una negra y una blanca) <sup>(35)</sup>.

34. Ejemplos de {R=} con el juego de naranja: «en los dos hay un vaso de agua más que de jugo» (edad: 12;3), «si se restara el agua del jugo, quedaría un vaso de jugo en cada lado» (edad: 12;3), «da igual, porque en los dos lados hay un vaso más de jugo y el resto está dividido mitad y mitad entre agua y jugo» (edad: 13;0) (Noelting, 1980, págs. 240 y 243).

35. Véase también en el capítulo 5 el §5.1.4.



### 4.3.3. RELACION MULTIPLICATIVA: ESTRATEGIAS CON RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Cuando un sujeto establece una relación de tipo multiplicativo con elementos de dos clases en un espacio muestral (o de dos espacios muestrales en una clase) y después compara con lo que ocurre entre los elementos correspondientes del otro espacio muestral (o de la otra clase), utiliza un razonamiento proporcional.

Esto da origen a toda una familia de estrategias, según las clases de números que se estén considerando. Aunque en principio caben todas las maneras de combinar las clases de favorables, desfavorables y totales, lo que he encontrado es que una de las clases es siempre la de los favorables: esto es, las que se suelen considerar son la clase de los totales y la de los favorables o bien la clase de los favorables y la de los desfavorables. En todos los integrantes de la familia he podido reconocer estrategias en las que el razonamiento proporcional ocurre DENTRO de espacios muestrales; además, en algunos he podido reconocer estrategias en las que ocurre ENTRE espacios muestrales.

El primer paso para un razonamiento proporcional consiste en el establecimiento de una relación de tipo multiplicativo (lo que ocurre por ejemplo cuando se observa que un número es múltiplo del otro), y el segundo consiste en la comparación con lo que ocurre con los números semejantes del otro espacio muestral o de la otra clase. Tal vez la mejor manera de aclarar esto sea mediante un par ejemplos:

- Supongamos que se observa que  $f_1$  es un múltiplo de  $d_1$ :  $f_1 = kd_1$  (<sup>36</sup>). Entonces una estrategia de tipo DENTRO busca la comparación con lo que ocurre en S2: ¿es  $f_2$  igual a  $k$  veces  $d_2$ ? en ese caso ambos espacios muestrales son proporcionalmente equivalentes y da igual elegir uno u otro; ¿es  $f_2$  mayor que  $k$  veces  $d_2$ ? entonces la proporción de negras es mayor en S2; ¿es  $f_2$  menor que  $k$  veces  $d_2$ ? entonces la proporción de negras es mayor en S1.

Así, el sujeto Ram del segundo experimento explicaba en la segunda fase a sus compañeros de equipo el arreglo (3,1)(5,2) en términos como éstos: "en S1 tienes tres negras para una blanca; para que S2 fuera igual tendría que haber tres negras para cada blanca, pero si una de las dos blancas se lleva tres negras a la otra sólo le quedan dos, entonces a S2 le falta una negra para ser igual a S1, o sea que te conviene más elegir una carta de S1".

<sup>36</sup>. Aunque aquí hago el razonamiento a partir de la observación de que en un lado los favorables son múltiplos de los desfavorables, el mismo tipo de razonamiento se puede seguir si la primera observación se refiere a que los desfavorables son múltiplos de los favorables, o los totales de los favorables, o los totales de los desfavorables.

- Supongamos que se observa que  $d_2$  es múltiplo de  $d_1$ :  $d_2 = kd_1$  (37). Entonces una estrategia de tipo ENTRE procede por ejemplo a comparar con la relación entre  $f_2$  y  $f_1$ : ¿se repite la relación, o sea  $f_1 = kf_2$ ? entonces da igual; ¿es  $f_2$  menor que  $k$  veces  $f_1$ ? entonces hay proporcionalmente menos negras en S2; ¿es  $f_2$  mayor que  $k$  veces  $f_1$ ? entonces hay proporcionalmente más negras en S2.

Parafraseando a Ram en el ejemplo anterior, se podría proponer un razonamiento de tipo ENTRE para el arreglo (3,1)(5,2) en estos términos: "si ves las blancas, hay dos en S2 para una de S1; para que fueran iguales las negras a las blancas necesitaríamos dos en S2 para cada una de las de S1, pero si una de las negras de S1 se lleva dos de S2 y otra se lleva otras dos, a la tercera sólo le queda una, entonces falta una negra en S2 para que las negras sean iguales a las blancas, o sea que te conviene más elegir S1".

La distinción entre los dos tipos de estrategia fue establecida en 1980 por Noelting para sus experimentos de razonamiento proporcional con el juego de naranja (38). El afirma que «hay dos tipos de razones que hacen una proporción: las razones dentro de estados (*within-state*) y las razones entre estados (*between-state*) (...). En nuestro problema, una razón dentro de estados corresponde a la razón entre jugo de naranja y agua en cada bebida, y una razón entre estados corresponde a la razón entre el número de vasos de jugo de naranja (o agua) entre cada bebida. El concepto de proporción misma, con una razón que varía dentro de su clase de equivalencia, se interpreta primero como una multiplicación de una razón dentro de estados por un operador entre estados. Es pues la combinación de ambos tipos de razón. Esto constituye la "estrategia entre". Pero una proporción también se puede interpretar como dos cocientes, en los que primero se efectúa una división dentro de cada estado, y los dos cocientes se llevan a la referencia del término co-

37. El mismo tipo de razonamiento se puede seguir si la primera observación se refiere a que en un color o en el total de cartas los de S1 son múltiplos de los de S2 o los de S2 son múltiplos de S1.

38. Noelting relaciona sus categorías con las establecidas por Freudenthal: razones internas al sistema como razones entre términos del mismo tipo; razones externas al sistema como razones entre términos de diferentes tipos (Noelting, 1980, pág. 343). Por otra parte, un año después de la publicación de Noelting, Thornton y Fuller publicaron un artículo en el que distinguen un razonamiento de "fórmula del cociente", en el que el sujeto utiliza el razonamiento proporcional para plantear una ecuación y resolverla por despeje de la incógnita, de un razonamiento de "conversión", en el que el sujeto introduce una nueva cantidad como un factor de conversión y luego multiplica o divide" (Thornton y Fuller, 1981).

mún 1. Esto constituye una "estrategia dentro". Las estrategias entre son aquellas en las que los términos entre estados son los términos de una operación (llamada covariación). Las estrategias dentro son aquellas en las que los términos entre estados sirven de base para una operación (llamada división). Ambos tipos ocurren desde el principio del estadio II». (Noelting, 1980, pág. 334)

Esto es, una estrategia entre es una covariación seguida de una comparación, mientras que una estrategia dentro es una división seguida de una comparación. Además, afirma Noelting (1980, págs. 341 y 344), las estrategias entre llevan finalmente al algoritmo del común denominador, y las estrategias dentro llevan a los porcentajes (39).

Cuando hablo de relación de tipo multiplicativo me puedo estar refiriendo a situaciones en las que hay números que son múltiplos de otros, como en estos casos:

$$\begin{array}{llll} \text{(DENTRO):} & f_j = kd_j & d_j = kf_j & n_j = kf_j & n_j = kd_j \\ \text{(ENTRE):} & f_2 = kf_1 & f_1 = kf_2 & d_1 = kd_2 & d_2 = kd_1 \end{array}$$

Sin embargo, puedo también estar hablando de relaciones de tipo multiplicativo aunque no ocurra ninguna de las igualdades marcadas arriba: también se puede establecer por ejemplo una comparación entre los cocientes  $p_1 = f_1/n_1$  y  $p_2 = f_2/n_2$ , lo que por cierto hacen efectivamente una muy pequeña cantidad de los sujetos considerados en este trabajo (o una comparación entre los cocientes  $f_1/d_1$  y  $f_2/d_2$ , lo que nunca ocurrió).

Las estrategias de tipo multiplicativo son las estrategias más sofisticadas de las que cubro en este estudio: además, son siempre correctas, puesto que llevan a la comparación de los cocientes  $p_1 = f_1/n_1$  y  $p_2 = f_2/n_2$ , y éstos no son otras que las respectivas probabilidades. Para mantener la estructura de categorías que se han venido manejando, hablaremos por separado de los casos en los que los cocientes son distintos (y entonces se busca al mayor de los dos) y de aquellos en los que los cocientes son iguales. En cada caso se tendrá una familia de estrategias: cada estrategia está determinada por las clases de números que se toman en cuenta para establecer la relación multiplicativa.

Por otro lado, tanto en la detección de múltiplos y la comparación subsiguiente como en el cálculo de cocientes pueden y

39. Noelting explica esto así: en la estrategia entre, la razón dentro de estados queda estabilizada como un invariante, y la razón entre estados actúa como operador. Hemos denominado esta estrategia una covariación y culmina en el estadio IIIB en el algoritmo del común denominador. En la estrategia dentro, la razón dentro de estados brinda los términos de una división, y el término de referencia común 1 para los dos cocientes es el invariante. Esto lleva al método del factor unitario y culmina en el estadio IIIB en el algoritmo del porcentaje (Noelting, 1980, págs. 334 y 338).

suelen ocurrir errores de varias índoles distintas, que pueden conducir a elecciones equivocadas. Cuando esto ocurra hablaré de estrategias de proporcionalidad con error, con lo que intentaré indicar que en principio, la idea de la estrategia que se iba a utilizar parecía ser una estrategia de proporcionalidad, pero que fue mal manejada por un error en alguno de los pasos.

#### 4.3.3.1. ESTRATEGIAS DE COCIENTE MAYOR: {P+}

A las estrategias que consisten en la elección del espacio muestral en que hay el mayor cociente de la forma  $f/n$  o de la forma  $f/d$  (o el menor cociente de la forma  $d/n$ ) las he llamado estrategias de cociente mayor y las he denotado {P+}.

En estas estrategias se establece una relación de tipo multiplicativo entre dos clases de números de un espacio muestral, se compara con lo que ocurre entre los números de esas clases en el otro espacio muestral, y finalmente se elige el espacio en que la relación es más favorecedora.

##### a) Ejemplos

Esta es la estrategia de relación más frecuentemente utilizada: 134 respuestas fueron clasificadas como {P+}. De entre todas las estrategias simples, ésta ocupa el segundo lugar, después de la centración {F+}.

Se puede hablar de varias estrategias {P+}, según las clases que se consideran. Una de ellas es la que consiste en la comparación de los cocientes de la cantidad de cartas negras con respecto al total de cartas de cada espacio muestral (clases de favorables y de totales). Algunos ejemplos de su expresión son <sup>(40)</sup>:

- probabilidad de  $3/5 > 1/2$  [(1,1)(3,2):S2] (Ram; C2,20)
- la probabilidad de  $1/2$  es mayor que la probabilidad de  $1/4$  de los otros [(1,3)(2,2):S2] (Rub; C1,23)

Otra de las estrategias consiste en la comparación de los cocientes de la cantidad de negras con respecto a la de blancas

<sup>40</sup>. Algunos ejemplos de la literatura científica: «es más fácil (2,3) porque tiene dos oportunidades contra tres y ahí una contra dos. Se necesitaría que hubiera 4 sin cruces aquí para que sea igual. Entonces, como hay una menos, es más fácil» (1,2)(2,3) (edad: 12;5) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 148); «elijo (2,5) porque en (1,3) hay 3 veces más agua que jugo y en (2,5) falta un vaso de agua para tener la misma proporción» (1,3)(2,5) (edad: 14;11) (Noelting, 1980, pág. 244); «(2,5), porque hay  $2\frac{1}{2}$  vasos de agua para 1 vaso de jugo y en el otro (1,3) hay 3 vasos de agua para 1 vaso de jugo» (edad: 14;7) (Noelting, 1980, pág. 246); «a priori no lo sé: entonces calculo la razón de las bolas rojas y azules en cada bolsa y tomo la más grande  $S1=6/4=1.5$ ,  $S2=3/2=1.5$ . Las razones son iguales, mis posibilidades están en las dos bolsas» (Maury, 1984, pág. 198).

de cada espacio muestral (clases de favorables y de desfavorables), como en los siguientes ejemplos (41):

- (tras acomodar las cartas en paquetitos de negra, blanca, negra: uno en S1 y dos en S2), tendría estas dos probabilidades más aquí de que fuera negra [(2,1)(6,2):S2] (X; C6,20.1)
- la probabilidad de que sea negra es al doble a que no sea [(2,1)(3,2):S1] (Jai; C1,25)

No siempre son explícitas las clases en las que se basa la comparación; por ejemplo, la siguiente respuesta está basada en las clases de favorables y desfavorables pero sólo menciona a los favorables:

- ... fuera lo mismo si allí fueran cuatro negras y aquí la mitad de las negras [(2,1)(3,2):S1] (T; C3,18)

#### b) Representación

Todas las respuestas que fueron clasificadas como {P+} menos una corresponden a estrategias de tipo DENTRO. Así, por ejemplo, la respuesta de Jai citada en penúltimo lugar corresponde a un esquema de razonamiento de este estilo:

- dentro de S1,  $f_1=2d_1$  (la probabilidad de que sea negra es al doble a que no sea), mientras que dentro de S2,  $f_2 < 2d_2$ ; por lo tanto, conviene más elegir S1.

La única excepción la constituye el último de los ejemplos citados: éste es el único caso encontrado de una estrategia {P+} que es de tipo ENTRE (42). En ella, el esquema de razonamiento es de este estilo:

- entre S2 y S1 ocurre con las blancas que  $d_2=2d_1$  (o más bien  $d_1=\frac{1}{2}d_2$ : en S2 son dos blancas y en S1 la mitad de las blancas), mientras que con las negras ocurre que  $f_2 < 2f_1$  (o más bien  $f_1 > \frac{1}{2}f_2$ : fuera lo mismo si en S2 fueran cuatro negras y en S1 la mitad de las negras); por lo tanto, conviene más elegir S1.

(Obsérvese que los dos esquemas recién presentados corresponden a la misma elección en la misma pregunta: [(2,1)(3,2):S1]).

Con la única salvedad del ejemplo de T (C3, 18) recién mencionado, las estrategias de razonamiento proporcional {P+} son comparables a las estrategias de equilibrio {E<>}, {E<} y {E>} y a la estrategia de resta {R+} en el sentido de que todas son de tipo DENTRO. Recordemos que las estrategias de equilibrio buscan una respuesta a una pregunta del siguiente estilo:

41. Un par de ejemplos de tomados de Noelting (1980, pág. 341): « $4/6=16/24$ ,  $5/8=15/24$ . El primero es mayor» (4,2)(5,3); « $A=71+3/7\%$  [escrito como fracción compuesta] porque  $5/7$  de jugo.  $B=70\%$  porque  $7/10$  jugo» [porque al dividir  $500/7$  se tiene cociente 71 y residuo 3:  $500=71 \times 7 + 3$ ] (5,2)(7,3) (edad: 13;0)
42. Noelting (1980, págs. 340 y 341) cita otros, como los siguientes: «(2,3) porque (...) si hubieran sido el doble de agua, tendría que haber un vaso más de agua» (1,2)(2,3) (edad: 12;0); «en (3,4) hay  $3/7$  de jugo por  $4/7$  de agua, o sea  $15/35$  de jugo, mientras que en (2,3) sólo hay  $14/35$  de jugo» (2,3)(3,4) (edad: 14;0)

- ¿qué hay más, favorables o desfavorables?

Como la estrategia de resta, las estrategias de proporcionalidad son un paso más hacia la averiguación de cuánto más se gana o se pierde en un espacio muestral que en el otro cuando en ambos se gana o se pierde. Sin embargo, cuando en la estrategia de resta la forma de esta averiguación está basada en una pregunta de un estilo como los siguientes:

- ¿cuántos más favorables que desfavorables (o desfavorables que favorables) hay?
- ¿de cuánto es la diferencia entre favorables y desfavorables?

en las estrategias de razonamiento proporcional la pregunta es de un estilo como los siguientes:

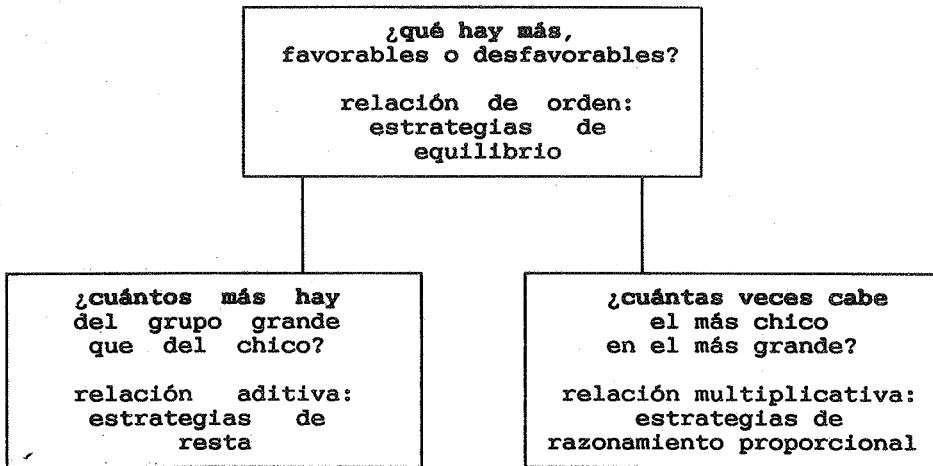
- ¿cuántas veces caben los favorables en los desfavorables (o viceversa)?
- ¿cuántos favorables hay por cada desfavorable (o viceversa)? <sup>(43)</sup>
- ¿cuántas veces caben los favorables en los totales?
- ¿cuál es la fracción de favorables con respecto al total?
- ¿cuánto vale el cociente de favorables sobre el total?
- ¿qué porcentaje (o parte) del total son los favorables?
- ¿en cuál de los dos espacios muestrales hay proporcionalmente más favorables?

Así, las estrategias de equilibrio pueden considerarse como precursoras tanto de las de resta como de las de razonamiento proporcional de tipo DENTRO. Ilustro esto en el siguiente esquema, en el que cada familia de estrategias está representada por una pregunta típica. Cabe aclarar que aquí no se utilizará el término "precursor" en el sentido temporal sino en un sentido lógico; tampoco le adjudico una connotación de necesidad, sino de posibilidad: esto es, pienso que algunos individuos pueden llegar a las estrategias de resta o de razonamiento proporcional como intento de respuesta a la pregunta "¿dónde pierdo (o gano) más si en ambos espacios pierdo (o gano)?", aunque también es posible que un sujeto llegue a alguna de estas dos familias de estrategias sin haber pasado por las de equilibrio.

Las estrategias de equilibrio y la de resta son estrategias correctas en algunas situaciones. En las ubicaciones en que las dos probabilidades no están "del mismo lado" que el punto de equilibrio 0.5 (es decir, en las ubicaciones de la forma U1.j y de la forma U2.j)). Pero cuando eso ocurre (ubicaciones de la forma U3.j), la estrategia de equilibrio aplicable es {E=} y lleva a la respuesta "da igual", que es consistentemente incorrecta salvo en las combinaciones K0 y K12 a K16. La estrategia de resta {R+} lleva a la elección correcta en las combinaciones K1 a K7, y a una elección incorrecta en las combinaciones K8, K9, K12 y K13; por su parte, la estrategia de resta {R=} lleva a la

43. Para responder a esta pregunta algunos sujetos proceden mediante una operación concreta o mental de acomodamiento de las cartas, como ilustro en el último de los ejemplos anteriores; esto se mencionará nuevamente en el capítulo 5 (§5.1.4).

respuesta "da igual" que es incorrecta en las combinaciones K10 y K11 y correcta en las combinaciones K0 y K16.



En cambio, las estrategias de razonamiento proporcional llevan a la respuesta correcta en todas las situaciones: {P+} en las combinaciones K1 a K11 y {P=}, que veremos en el siguiente párrafo, en las combinaciones K0 y K12 a K16. Sin embargo, aunque es la segunda estrategia simple más utilizada en el total de respuestas estudiadas, para la mayoría de los sujetos {P+} no es la estrategia utilizada preferentemente: muchos la utilizan sólo de manera ocasional, como utilizan ocasionalmente otras estrategias. Aparentemente, los argumentos de tipo multiplicativo no son necesariamente los que surgen inicialmente como respuesta espontánea a los problemas de la forma planteada (44).

#### 4.3.3.2. ESTRATEGIAS DE COCIENTE IGUAL: {P=}

La otra familia de estrategias de relación multiplicativa es la que lleva a la respuesta "da igual" porque en ambos espacios muestrales se establece la misma relación entre los números de dos clases. Las he denominado estrategias de cociente igual y simbolizado con {P=}.

En estas estrategias se establece una relación de tipo multiplicativo entre dos clases de números de un espacio muestral, y al comparar con lo que ocurre entre los números de esas clases en el otro espacio muestral se obtiene la misma relación.

44. En el capítulo 7 emprenderé un análisis más detallado del tipo de estrategias utilizadas preferentemente por los distintos sujetos ante distintas situaciones.

## a) Ejemplos

Esta estrategia es también ampliamente utilizada: 93 respuestas están clasificadas como {P=}.

Como para {P+}, la familia {P=} consta de varias estrategias distintas. En una de ellas, la comparación se establece entre los cocientes de las clases de favorables y totales:

- en los dos conjuntos la mitad son negras y la otra mitad no. Entonces hay la misma probabilidad de sacar una negra [(2,2)(4,4):=] (Ale; C1,2)
- están en la proporción de 3,1 [(1,2)(2,4):=] (Bra; C1,8)
- probabilidad de  $2/8 = 1/4$  [(1,3)(2,6):=] (Ram; C2,17)

Otra estrategia compara los cocientes de favorables y desfavorables <sup>(45)</sup>:

- es la mitad de cada uno... siempre hay el doble de negros [(14,7)(18,9):=] (M; C3,26)
- es el mismo número de negras y blancas en cada uno de los grupos [(2,2)(3,3):=] (Q4; C4,15)
- $7 \times 2 = 14$ ,  $9 \times 2 = 18$ , así es como saqué más o menos la probabilidad, como que es un múltiplo la que está abajo, es el mismo aumento, un porcentaje de posibilidades iguales, es su doble [(7,14)(9,18):=] (W; C6,40.5)
- es igual, bueno en probabilidad. En S2 a cada tres le corresponde una blanca, en S1 igual, a cada tres le corresponde una blanca: igual [(3,1)(6,2):=] (X; C6,14)

Los ejemplos recién citados son todos de tipo DENTRO. Sin embargo, ésta es la única estrategia en la que se presentan también, de manera distintiva, algunas respuestas de tipo ENTRE. Como con las otras, las estrategias ENTRE pueden considerar las clases de favorables y de totales:

- en S1 existen dos negras y cuatro cartas y en S2 es el doble de cartas y el doble de negras [(2,2)(4,4):=] (Flo; C2,8)

O las clases de favorables y de desfavorables <sup>(46)</sup>:

- ... se duplica la blanca y se duplica la negra... [(3,1)(6,2):=] (W; C6,14/2)

Aunque también hay casos en los que no se puede saber qué clases se están considerando (o si se están considerando las tres):

- S2 es lo doble que S1 [(1,3)(2,6):=] (Q4; C4,11)

45. Algunos ejemplos de la literatura científica: «aquí están una a una y aquí también» (edad: 16;8) (Lema y Morfín, 1981, pág. 194); «da igual, porque ahí hay dos de cada una y aquí hay una de cada una, y entonces se puede sacar una cruz, pero también se puede cada vez sacar una sin cruz» (1,1)(2,2) (edad: 10;2) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 145); «da igual, porque en uno 4 vasos de jugo por 2 vasos de agua es igual al otro en el que hay 6 vasos de jugo por 3 vasos de agua» (4,2)(6,3) (edad: 8;0) (Noelting, 1980, pág. 339).

46. Como en el siguiente ejemplo: «da igual, porque las dos proporciones, la de agua y la de jugo, están al doble» (1,2)(2,4) (edad: 11;0) (Noelting, 1980, pág. 339).



Por otra parte, hay muchas respuestas en las que es claro que en la respuesta está entrando en juego una estrategia de razonamiento proporcional, pero no se puede saber si es de tipo DENTRO o de tipo ENTRE, ni qué clases son las consideradas. Esto ocurre sobre todo cuando, como en el primero de los siguientes ejemplos, la relación entre favorables y desfavorables es la misma que la relación entre uno y otro espacios muestrales.

- es exactamente lo mismo, la mitad de esto [(1,2)(2,4):-] (V; C3,12)
- ... es la misma [probabilidad] porque son pares y múltiplos [(2,2)(4,4):-] (Mal; C2,8)
- hay equilibrio en ambos grupos [(3,1)(6,2):-] (Q1; C4,13)

#### b) Representación

Las estrategias {P=} que son de tipo DENTRO son la contraparte de las estrategias {P+} y pueden ser asociadas con las estrategias {E=} y {R=} como se mencionó en el párrafo anterior.

Pero las estrategias de tipo ENTRE no son fácilmente asociables con otras estrategias de relación. Parecen provenir de una simple percepción de la situación (i.e., de la multiplicidad ENTRE) por parte del sujeto, coordinada con una necesidad de aplicar alguna relación de carácter multiplicativo.

Es pertinente preguntarse por qué son menos utilizadas por los sujetos de este estudio las estrategias ENTRE que las estrategias DENTRO. Varias conjeturas son posibles: puede ser por ejemplo que este tipo de relaciones sean más difíciles de establecer que las relaciones DENTRO, o bien que los sujetos estudiados hayan sido entrenados, en su desarrollo escolar acerca de la proporcionalidad, más hacia una manera de comparar las cantidades por medio de cocientes y porcentajes que por medio de fracciones y denominadores comunes (<sup>47</sup>), o bien que en las situaciones planteadas como preguntas hayan tenido mejores valores de multiplicidad DENTRO que ENTRE.

Es interesante observar lo que ocurrió al final de la entrevista del binomio W-Z (quinto experimento), cuando enfrenté al sujeto W con el hecho de que en algunas preguntas había utilizado un razonamiento proporcional de tipo DENTRO y en otras uno de tipo ENTRE. Aquí reproduzco algunos trozos de esa conversación (<sup>48</sup>):

W: [40.5: R(7,14)(9,18)E] Aquí sería siete por dos, catorce; nueve por dos dieciocho. Es como yo más o menos saqué la probabilidad, como que es un múltiplo de la que está abajo (...) es su doble, ¿no? ({P=} de tipo DENTRO) (...)

<sup>47</sup>. En las notas previas de pie de página se puede ver, por ejemplo, que los sujetos canadienses con quienes trabajó Noelting están más acostumbrados a trabajar con fracciones y los sujetos franceses de Maury están más acostumbrados a calcular los cocientes: esto podría ser simplemente una diferencia debida al tipo de educación recibida.

<sup>48</sup>. Recuérdese que la transcripción completa de las entrevistas se encuentra en el Anexo 4.

S: O sea que tú dices que da igual. Porque fijate que en las otras, cuando decías que daba igual era porque estabas multiplicando del lado A al lado B, como en la 18 [18: B(1,2)(2,4)A]. Decías "se duplica", pero no estabas viendo la duplicación de negras a blancas dentro de A, sino de negras a negras, o sea de B a A ({P=} de tipo ENTRE)... En la 18 dijiste que da igual porque se duplica el número de negras: una negra de B, tengo dos en A; dos blancas en B, tengo cuatro en A. Entonces, estás multiplicando de B hacia A. Aquí en la 40 [40.5: R(7,14)(9,18)E] no estás multiplicando de la de referencia hacia la E, digamos de cuadrito a cuadrito, sino dentro del mismo cuadrito: [aquí: 40R: (7,14)] de negras a blancas y aquí [40E: (9,18)] de negras a blancas.

W: Ajá... ya, ya comprendí.

S: O sea que las dos veces multiplicaste, pero la operación fue distinta. Y yo quiero saber si piensas que se vale de los dos lados: ahora, ya enfrentado a que hay una diferencia...

(Silencio de 10 segundos, después de los cuales le pregunto a Z qué opina y Z dice que "no, no son iguales"; yo comento "ya te "desconvence" su multiplicación")

W: A mí también... Aquí [18] sigo en la misma posición... Pero aquí [40] sí ya no.

S: (...) pero fijate que lo puedes hacer: (...) en el 18 tienes una negra por dos, dan dos blancas, y dos negras por dos dan cuatro blancas ({P=} de tipo DENTRO). Yo te cuestioné [pero] estás pensando bien. O sea, se vale multiplicar de uno al otro, y también se vale que encuentres la misma multiplicación en cada uno. Lo que se dice es que tienes la misma proporción en ambos casos.

Aparentemente, W queda muy desconcertado cuando ve que ha estado razonando de dos maneras distintas, y concluye que forzosamente una de las dos debe estar equivocada. Es posible que haya concluido que la errónea era la 40 porque ahí los números eran más grandes, y que la situación más sencilla de la pregunta 18 le haya seguido pareciendo más obvia, más evidente. Lo que me ha interesado resaltar en este trozo de conversación es cómo, a un individuo que ha utilizado tanto las estrategias {P=} de tipo DENTRO como las de tipo ENTRE, no le resulta nada clara la equivalencia entre ambas.

#### 4.3.3.3. ESTRATEGIAS CON ERROR: {P'}

Con mucha frecuencia, es evidente que al intentar aplicar una estrategia de razonamiento proporcional, un sujeto cometa algún error en el proceso. El error puede estar en los cálculos involucrados o en la elección realizada o en ambos; en todos los casos hablaré de una estrategia de razonamiento proporcional en la que hubo algún error, y la denotaré {P'}.

## a) Ejemplos

De las respuestas obtenidas, 31 fueron clasificadas como {P'}. Como en el caso de {P+} y de {P=}, las estrategias {P'} son una familia de estrategias: se puede pensar que hay estrategias diferentes según si se ponen en juego las clases de favorables y de totales o las de favorables y desfavorables. Además de esta subclasificación, me interesa aquí también ubicar si se cometió un error en los cálculos involucrados, o en la elección a la que se llegó en el proceso de toma de decisión, o en ambos.

En algunos casos, la elección de espacio muestral es correcta pero hay un error en los cálculos; puede tratarse de una mera aproximación:

- hay un 50% en cambio allá hay un 30% [(1,1)(1,2):S1] (Als; C2,16)
- ...probabilidad de una negra al 70% [(2,2)(4,2):S2] (Paz; C1,14)

o bien de un cálculo erróneo en por lo menos uno de los dos espacios muestrales:

- 66% de probabilidad, mientras que allá 40% de probabilidad [(2,1)(3,2):S1] (Jua; C1,16)
- tiene 40% de probabilidad [(2,2)(4,2):S2] (May; C1,14)

También han sido clasificadas como {P'} respuestas con elección incorrecta pero con expresiones que apuntan hacia una estrategia de razonamiento proporcional. Estas respuestas pueden tener cálculos correctos (o tal vez lo correcto es sólo la expresión del cálculo):

- hay 2/4 de probabilidad [(2,2)(4,4):S1] (Ric; C1,18)
- hay  $p = 3/5$  [(2,1)(3,2):S2] (Ric; C1,25)

o bien pueden tener cálculos aproximados o erróneos:

- hay 35% de probabilidad [(1,2)(2,4):S2] (May; C1,8)
- en cinco cartas hay tres negras la probabilidad de que salga negra es al 60% aprox [(2,1)(3,2):S2] (Paz; C1,16)

Los cálculos erróneos (o las expresiones erróneas de cálculos) pueden corresponder a expresiones que apuntan hacia una estrategia {P+} como en los ejemplos de arriba o a una estrategia {P=}:

- en S2 hay un 75% de probabilidad y en S1 un 50% de probabilidad [(2,1)(3,2):-] (Gab; C1,16)
- 50% igual [(1,3)(2,2):-] (Jam; C1,9)

## b) Representación

La categoría {P'} no es en realidad una estrategia auténtica en el sentido definido en la pág. 160, puesto que no es un mecanismo de solución con estructura o lógica diferentes de las de {P+} ó {P=}, y en general no es reproducible para otros problemas de la misma clase.

Como lo muestran los ejemplos recién presentados, las "estrategias" {P'} abarcan un amplio rango de errores en los cálculos involucrados y en la toma de decisión. Estos errores son de naturaleza muy diversa, por lo que sería deseable contar con una categorización más fina en la que las categorías correspondieran al tipo de error cometido. Sin embargo, hay una gran cantidad de respuestas en cuyo proceso de interpretación es claro que el su-

jeto intentó aplicar  $\{P+\}$  o  $\{P=\}$  y cometió un error, pero en las que la naturaleza del error cometido no resulta nada clara (49). Esta es la razón por la que todos los errores posibles cometidos en la aplicación de una estrategia de razonamiento proporcional han sido clasificados en una sola categoría.

Por otra parte, las "estrategias"  $\{P'\}$  que apuntan hacia una  $\{P=\}$  corresponden a una estrategia de tipo DENTRO. Claro, nada impide que se cometan errores en la aplicación de las estrategias de tipo ENTRE; sin embargo, eso no ocurrió, lo que puede deberse a la cantidad comparativamente pequeña de estrategias observadas de tipo ENTRE, con respecto a las de tipo DENTRO: posiblemente si la muestra considerada fuese mayor se alcanzarían a detectar algunas "estrategias"  $\{P'\}$  de tipo ENTRE. También es posible pensar que si las estrategias de tipo ENTRE resultan más difíciles que las de tipo DENTRO, cuando un sujeto aborda una de ellas, lo hace desde una posición de mucho mayor dominio aritmético en la que no es susceptible de cometer simples errores de cálculo.

#### 4.4. ESTRATEGIAS COMPUESTAS

Es muy frecuente que una estrategia se presente asociada con otra u otras: es decir, que en la justificación a una elección un sujeto esgrima simultáneamente argumentos correspondientes a dos o más estrategias diferentes. A estas asociaciones las he llamado composiciones de estrategias; el resultado es una estrategia compuesta. En contraposición con ellas, todas las estrategias que he visto hasta ahora corresponden a estrategias simples: tanto las de centración como las de relación.

Las estrategias compuestas corresponden a una mayor complejidad que las estrategias simples, puesto que implican la simultaneidad de dos formas de considerar y sopesar la información contenida en el problema. Así, una estrategia de centración  $\{F+\}$  que se esgrime como único argumento es una manera incompleta de abordar el problema, y lo mismo ocurre con  $\{N-\}$ ; pero si un sujeto argumenta la elección de un espacio muestral porque en él hay más favorables y menos desfavorables que en el otro, está considerando toda la información y de una manera adecuada (equivalente a una estrategia de proporcionalidad  $\{P+\}$ ). Por otra parte, la yuxtaposición de dos estrategias no implica necesariamente que apunten hacia la misma elección, ni que ambas sean correctas o complementarias.

He separado en esta sección las estrategias compuestas por dos estrategias simples con las estrategias compuestas por más de dos estrategias simples.

49. Estos y otros tipos de dificultades en la interpretación de las respuestas serán tratados en el capítulo 6 (ver §6.2.3.1).

4.4.1. COMPOSICIONES DE DOS ESTRATEGIAS SIMPLES

He identificado cuatro tipos de estrategias compuestas por dos estrategias simples:

- la conjunción de dos estrategias  $E_1$  y  $E_2$ , que ocurre cuando ambas llevan a la misma decisión, por lo que se puede decir que se apoyan mutuamente;
- la exclusión de una estrategia  $E_2$  ante una estrategia  $E_1$ , que ocurre cuando  $E_1$  lleva a la elección de un espacio muestral (o a una decisión del tipo "da igual") y  $E_2$  a la elección del otro espacio, pero  $E_1$  domina (explícitamente) a  $E_2$ ;
- la compensación de una estrategia  $E_1$  por otra estrategia  $E_2$ , que ocurre cuando  $E_1$  lleva a una decisión del tipo "da igual" y  $E_2$  lleva a la elección de un espacio muestral, con lo que permite romper la "indecisión" provocada por  $E_1$ ;
- el contrapeso mutuo de dos estrategias  $E_1$  y  $E_2$ , que ocurre cuando cada una de  $E_1$  y  $E_2$  lleva a la elección de un espacio muestral (distinto del de la otra estrategia) pero se compensan mutuamente y el resultado es una decisión del tipo "da igual".

En cada una de estas composiciones he distinguido estrategias dominantes y estrategias dominadas. Diré que cuando la elección a la que se llega con una estrategia compuesta coincide con la de una de las estrategias que la componen, esta última es una estrategia dominante, y que una estrategia dominada es aquella cuya elección no coincide con la de la estrategia compuesta.

Conviene hacer notar que para la identificación de las estrategias compuestas hay que prestar mucha atención al uso del lenguaje que hace el sujeto. Por ejemplo, el conectivo "pero" puede estar ligando dos estrategias en una conjunción, en una exclusión, en una compensación o en un contrapeso (<sup>50</sup>).

A continuación se presentan ejemplos de cada una de estas composiciones. En cada caso se prestará atención al tipo de las dos estrategias que participan en la composición, en particular si se trata de centraciones o de relaciones.

4.4.1.1. CONJUNCION

Quando dos estrategias  $E_1$  y  $E_2$  llevan a la misma elección en un argumento del tipo " $E_1$  y  $E_2$ ", hay una conjunción de  $E_1$  y  $E_2$  y lo denoto  $\{E_1 \& E_2\}$ , lo que se lee " $E_1$  y  $E_2$ ".

Diré que  $E_1$  y  $E_2$  son estrategias conjugantes; como la elección final es la marcada por cada una de las estrategias conjugantes, ambas son estrategias dominantes. Para efectos de análisis, se considerarán equivalentes  $\{E_1 \& E_2\}$  y  $\{E_2 \& E_1\}$ .

<sup>50</sup>. Esto será analizado con mayor detalle en el capítulo 5. Véase en particular el párrafo sobre conectivos entre estrategias, §5.2.3.1.

## a) Ejemplos

En total, se encontraron en este estudio 48 conjunciones. Las más frecuentes son entre dos centraciones, como en los siguientes ejemplos:

- hay más negras y menos blancas que allá [(3,2)(5,1):S2] (Q4; C4,4): Conjunción {F+ & D-}
- aquí tengo las cinco blancas pero allá son catorce blancas... allá hay muchísimas cartas más, si es poca la posibilidad de que te llegues a sacar la negra, pero son más [(1,5)(10,14):S1] (T; C3,30): Conjunción {D- & N-}
- existe el mismo número de elementos y una negra por cada evento [(1,1)(1,1):=] (Raf; C1,32): Conjunción {N= & F=}

Con menor frecuencia que las anteriores ocurren las conjunciones entre una estrategia de centración y una de relación. Estos son algunos ejemplos:

- hay más negras que en S1 y hay menos blancas en S2 [(2,2)(3,2):S2] (Q4; C4,18): Conjunción {F+ & E>}
- son menos elementos... y nada más son dos de más de blancas, y allá son el triple de, de negras [(9,11)(6,23):S1] (O; C6,35): Conjunción {N- & R+}
- tiene las mismas blancas y tienes aquí también tres negras que te puedes sacar el premio luego luego y acá también tienes más [(3,2)(18,2):=] (T; C3,40): Conjunción {D= & E=}

Sólo hubo una respuesta de conjunción entre dos estrategias de relación:

- son el cincuenta el cincuenta los dos, mitad de cada uno o sea pues cincuenta, o sea en los dos predominan los negros [(14,7)(18,9):=] (J; C3,26): Conjunción {E= & P=}

## b) Representación

Cuando un sujeto utiliza una estrategia de conjunción, ha considerado cada una de las dos estrategias conjugantes y le ha parecido que cada una refuerza lo que indica la otra. No hay, pues, ninguna contradicción entre dos estrategias, sino dos estrategias que se apoyan mutuamente.

## 4.4.1.2. EXCLUSION

Cuando una estrategia  $E_2$  llevaría a la elección de uno de los espacios muestrales pero es cancelada por otra estrategia,  $E_1$ , que lleva a una decisión diferente, se produce un razonamiento que es del estilo " $E_1$  a pesar de  $E_2$ ", es decir "decido según lo que me indica  $E_1$ , a pesar de que  $E_2$  me llevaría a otra elec-

ción" (51). Diré que hay una exclusión de la estrategia  $E_2$  por la estrategia  $E_1$  y denotaré la exclusión con  $\{E_1 \neg E_2\}$ , lo que se lee " $E_1$  aunque  $E_2$ ", o bien " $E_1$  a pesar de  $E_2$ ", o bien " $E_1$  y no  $E_2$ ".

También diré que  $E_1$  es una estrategia excluyente y  $E_2$  una estrategia excluida. La elección final coincide con la de  $E_1$  y difiere de la de  $E_2$ : la estrategia excluyente  $E_1$  es una estrategia dominante, mientras que la excluida  $E_2$  es una estrategia dominada. Así, no es lo mismo  $\{E_1 \neg E_2\}$  que  $\{E_2 \neg E_1\}$ , aunque ambas pueden existir.

Es necesario observar que en esta definición de las estrategias de exclusión, la estrategia excluida nunca es una estrategia de igualdad, mientras que la estrategia excluyente puede o no ser de igualdad. Cuando una estrategia de igualdad sea dominada por otra, no hablaré de exclusión sino de compensación: de ello trataré el párrafo §4.4.1.3.

#### a) Ejemplos

De las respuestas obtenidas, hubo 38 clasificadas como exclusiones. Como en el caso de las conjunciones, las exclusiones más frecuentes son las de una centración por otra centración. A continuación presento algunos ejemplos:

- *hay menos cantidad de blancas, y aunque nada más es una la canica negra, allá son demasiadas blancas para tan pocas negras* [(1,4)(5,20):S1] (X; C6,29): Exclusión {D- - F+}
- *no me interesa que haya más negras allá, pero aquí nada más tengo una opción de perder, entonces tengo más, tengo un 90% de ganar* [(4,1)(6,2):S1] (V; C3,22): Exclusión {D- - F+}
- *(S: ¿aunque haya más chances de equivocarse?) pero tengo más opciones* [(2,2)(3,3):S2] (V; C3,24): Exclusión {F+ - D-}
- *aunque hay menos cartas negras, pero hay menos cartas por todas* [(2,3)(3,4):S1] (Z; C6,10/1): Exclusión {N- - F+}
- *aunque hay más cantidad de cartas, pero hay más posibilidad de sacar la negra porque hay dos cartas negras* [(1,2)(2,4):S2] (Z; C6,18): Exclusión {F+ - N-}
- *aquí tienes dos opciones, claro que son más cartas, pero tienes más posibilidad* [(1,3)(2,6):S2] (T; C3,4): Exclusión {F+ - N-}

51. Las oraciones construidas con "aunque" o "a pesar de" son «oraciones subordinadas concesivas [que] expresan una objeción o dificultad para el cumplimiento de lo que se dice en la oración principal; pero este obstáculo no impide su realización, [sino que] "la dificultad se rechaza por ineficaz» (Samuel Gili y Gayas. Curso Superior de Sintaxis Española, 8a edición; Barcelona, Spes, 1961, págs. 322-323; agradezco a Margit Frenk la referencia). He usado, para las estrategias que utilizan en este sentido estos términos u otros equivalentes, el término "exclusión" porque refleja tanto la idea de rechazo como la de negativa o repulsa.

Las exclusiones de una estrategia de centración por una de relación son mucho menos frecuentes. He aquí algunos ejemplos:

- es la misma proporción de blancas, a pesar de que varíe la cantidad de negras [(5,2)(6,2):-] (J; C3,9.1): Exclusión {E= - F+}
- da igual por la misma desproporción que existe... predominan las blancas, a pesar de que aquí son ocho [(1,2)(3,5):-] (J; C3,7): Exclusión {E= - N-}

Las exclusiones de una estrategia de relación por una de centración son menos frecuentes aún. He aquí un ejemplo:

- allá está a igual probabilidad, hay la misma cantidad de blancas que de negras, pero sin embargo es menor la cantidad de blancas aquí [(1,2)(4,4):S1] (X; C6,18.2): Exclusión {D- - E<}

Por último, se encontró un solo caso de exclusión de una estrategia de relación por otra del mismo tipo:

- tiene los mismos elementos blancos y negros. Y allá... también podría ser, tiene más negras, bueno una más, pero S2 [(3,2)(11,11):S2] (O; C6,34): Exclusión {E5 - E>}

#### b) Representación

Cuando un sujeto utiliza una estrategia de exclusión, ha considerado ambas estrategias, pero le ha parecido que una es más convincente que la otra. Aquí sí se puede decir que ambas estrategias resultan mutuamente contradictorias; han competido entre sí y una ha dominado a la otra.

Recuérdese que cuando fueron planteadas las estrategias de centración y de relación se mencionó que las primeras son menos sofisticadas que las segundas, puesto que las primeras consideran sólo una parte de la información mientras que las segundas consideran la totalidad de la información contenida en la pregunta. Una consecuencia de ello debería ser que, al ser puestas a competir, las estrategias de relación resultarían más favorecidas que las de centración, con lo que habría una respuesta a la hipótesis planteada en el capítulo 2:

- H9: Hay estrategias que son más dominantes que otras: son utilizadas preferentemente y, en una situación en la que llevan a una elección diferente de la de las dominadas, son las que marcan la elección.

Pues bien, esta afirmación es apoyada por las frecuencias con las que ocurren las exclusiones entre las estrategias de centración y las de relación: las centraciones prácticamente sólo dominan a otras centraciones, mientras que las relaciones dominan a centraciones con mayor frecuencia que las centraciones a relaciones<sup>52</sup>). Se puede entonces decir que las estrategias de centración resultan en general más "débiles" y las de relación más "fuertes". Esta hipótesis de jerarquías entre estrategias fuertes

52. Esta afirmación será considerada con mayor detalle en el capítulo 7 (§7.2.2).



y estrategias débiles explicaría por qué son tan poco frecuentes los casos en los que una relación es excluida por una centración: estos casos corresponden a la cancelación de una estrategia más fuerte (la de relación) en aras de una más débil (la de centración).

En esta jerarquización explicada en términos de las exclusiones no debe olvidarse que las estrategias dominadas no son de igualdad, sino que llevan a la elección de uno u otro espacio muestral.

La jerarquía no se puede establecer entre las diferentes centraciones ni entre las diferentes relaciones. Por ejemplo, cuando compiten entre sí dos centraciones, puede ocurrir indistintamente que una u otra resulte dominante. Son particularmente notables dos parejas de centraciones: por un lado la pareja {F+} y {D-}, y por otro lado la pareja {F+} y {N-}. En ambos casos ocurre que cuando entran en contradicción los dos elementos de la pareja, unos sujetos optan por uno y otros por el otro: inclusive el mismo sujeto puede en algunas ocasiones excluir una de las centraciones a favor de la otra y en otras razones exactamente al revés. De este modo, se presentan por igual las exclusiones

$$\{F+ \rightarrow D-\} \quad \text{y} \quad \{D- \rightarrow F+\}$$

y también las exclusiones

$$\{F+ \rightarrow N-\} \quad \text{y} \quad \{N- \rightarrow F+\},$$

como se puede ver en los ejemplos (V; C3,22) y (V; C3,24) de la pág. 207 y en los ejemplos (Z; C6,10/1) y (Z; C6,18) de la pág. 207.

#### 4.4.1.3. COMPENSACION

Cuando una estrategia  $E_2$  llevaría a una decisión del tipo "da igual" pero es cancelada por otra estrategia,  $E_1$ , que lleva a la elección de alguno de los dos espacios muestrales, se produce un razonamiento que es del estilo "elijo el espacio muestral que me indica  $E_1$ , a pesar de que  $E_2$  me llevaría a decir que da igual entre ambos espacios". Diré que hay una compensación de la estrategia  $E_2$  por la estrategia  $E_1$  y denotaré la exclusión con  $\{E_1 * E_2\}$ , lo que se lee " $E_1$  compensa a  $E_2$ ".

También diré que  $E_1$  es una estrategia compensante y  $E_2$  una estrategia compensada. La elección final coincide con la de  $E_1$  y difiere de la de  $E_2$ : la estrategia compensante  $E_1$  es una estrategia dominante, mientras que la compensada  $E_2$  es una estrategia dominada. Sólo una estrategia de igualdad puede ser compensada, y lo es siempre por una estrategia que lleva a la elección de un espacio muestral, por lo que si existe la compensación  $\{E_1 * E_2\}$ , no puede existir  $\{E_2 * E_1\}$ .

Así, la compensación es el resultante de una estrategia dominante y una dominada, como lo es la exclusión. La diferencia entre ambas radica en que cuando la estrategia dominada es una estrategia de igualdad ( $\{N=\}$ ,  $\{F=\}$ ,  $\{D=\}$ ,  $\{E=\}$ ,  $\{R=\}$  o  $\{P=\}$ ) se trata de una compensación, y cuando no lo es, se trata de una exclusión. En las exclusiones la dominada nunca es de igualdad, y

en las compensaciones la dominante nunca es de igualdad. La razón de esto quedará explicada en el párrafo de representación.

a) Ejemplos <sup>(53)</sup>

Esta es la forma más común de estrategias compuestas: 82 de las respuestas fueron así clasificadas. Contrariamente a lo que ocurre con las conjunciones y las exclusiones, las compensaciones de una centración por otra centración no son las más frecuentes de las compensaciones. He aquí algunos ejemplos:

- hay dos negras y allá hay una y son las mismas cartas (4) [(1,3)(2,2):S2] (Jae; C1,9): Compensación {F+ \* N=}
- en las dos había una sola negra pero aquí había menos cartas [(1,1)(1,2):S1] (Agu; C1,10): Compensación {N- \* F=}
- tienen un blanco cada uno, pero aquí son menos elementos [(3,1)(4,1):S1] (O; C6,13/2): Compensación {N- \* D=}
- allá son dos proporciones, más probabilidades de que me salga blanca, a pesar de que es la misma cantidad de negras, y aquí son sólo una [(4,1)(4,2):S1] (J; C3,22.3): Compensación {D- \* F=}

La categoría más común de compensaciones es la de una estrategia de relación por una de centración. De ellas, lo más frecuente es que la estrategia compensada sea {E=}

- aquí también predomina la blanca... pero no me daría igual, me definiría porque aquí tengo dos oportunidades de negra, contra una allí, en último de los casos me iría a S2 [(1,2)(2,4):S2] (M; C3,12/2): Compensación {F+ \* E=}
- la mayoría de las cartas es negra y sólo hay una blanca [(3,2)(5,1):S2] (Q3; C4,4): Compensación {D- \* E=}
- S2 tiene muchas más blancas que negras y S1 igual, pero tiene menos elementos [(1,2)(3,5):S1] (O; C6,24): Compensación {N- \* E=}

Pero también las estrategias de relación {P=} y {R=} pueden ser compensadas:

- en los dos está la misma situación: aquí hay tres, hay tres; allá hay cuatro, hay cuatro. Hay la misma posibilidad en porcentaje, pero más fácil aquí porque hay menos [(3,3)(4,4):S1] (W; C6,11): Compensación {N- \* P=}
- es muy parecida la probabilidad... una es a dos lo que dos son a cuatro... en S2 en cantidad pues es más difícil porque hay más blancas [(1,2)(2,4):S1] (X; C6,18): Compensación {D- \* P=}

53. Un par de ejemplos de compensación en la literatura científica: «porque aquí hay dos estrellas y una sin, y acá dos con estrella y dos sin estrella» (2,1)(2,2) ({D- \* F=}) (edad: 10;5) (Chalini, 1979, pág. 102); «da igual, pero es más seguro en (2,2) porque hay más cruces» (1,1)(2,2) ({F+ \* P=}) (edad: 9;9) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 145)

- *la posibilidad es igual en cuanto al número de blancas: son tres de diferencia. Sin embargo aquí hay más canicas negras que allá [(1,4)(10,13):S2] (X; C6,33): Compensación {F+ \* R=}*

La clase menos común de compensaciones es la de una estrategia de relación por otra estrategia de relación. Las tres respuestas obtenidas de esta clase son de la forma {R+ - E=}. He aquí una de ellas:

- *tiene más negras, son más elementos y tiene más... allá también, pero nada más es una de más de negras, y aquí son más negras que blancas [(2,1)(4,2):S2] (O; C6,32): Compensación {R+ \* E=}*

#### b) Representación

Como en el caso de la exclusión, un sujeto que utiliza una compensación ha considerado dos estrategias contradictorias entre sí, y como resultado de esta consideración simultánea hay una estrategia dominante y una dominada. Pero, como lo he indicado ya, la estrategia compensada es siempre una estrategia de igualdad, por lo que lleva a la decisión "da igual".

Esta diferencia con respecto a las estrategias de exclusión puede estar relacionada con la diferencia observada en las frecuencias con las que ocurren las compensaciones entre las estrategias de centración y las de relación: entre las estrategias que no son de igualdad, las centraciones son más fácilmente excluidas que las relaciones, pero entre las estrategias de igualdad, las relaciones son más fácilmente compensables que las centraciones. Esto es, las relaciones que llevan a la elección de uno de los espacios muestrales son "fuertes", mientras que las relaciones de igualdad son "débiles" porque suelen ser compensadas por estrategias de centración.

Por otro lado, las estrategias de compensación {E<sub>1</sub> \* E<sub>2</sub>} pueden originarse en tres tipos distintos de circunstancia.

En una de las posibilidades, E<sub>1</sub> tiene con respecto E<sub>2</sub> una función de apoyo: el sujeto opta por la elección marcada por E<sub>1</sub> porque, además, hay una igualdad detectada por E<sub>2</sub>. Algunos ejemplos de esta circunstancia son:

- *hay mayor probabilidad de que salga negra aquí. De cuatro, dos son negras y allá de cuatro una es negra [(1,3)(2,2):S2] (Ale; C1,9): {F+ \* N=}*
- *es pequeño el evento teniendo el mismo número de negras [(1,1)(1,2):S1] (Raf; C1,31): ({N- \* F=}*

Otra de las posibles circunstancias puede ser la de una exclusión en el sentido que sen abordó en el párrafo §4.4.1.2: dos estrategias, E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub>, surgen simultáneamente y compiten entre sí, a resultados de lo cual E<sub>1</sub> domina a E<sub>2</sub>. Esto es lo que ocurre en los siguientes ejemplos:

- *si me pongo a hacer multiplicaciones, divisiones y restas, podría sacar una igualdad, veinticinco es a cinco lo que cinco es a uno, pero yo hablo de rapidez, es más fácil que salga aquí [(1,4)(5,20):S1] (X; C6,29.5): {N- \* P=}*

- *allá existe mayor número de blancas y menor número de negras y aquí no es mucha la diferencia, aunque sí es mayor el número de blancas que de negras* [(2,3)(3,4):S1] (I; C6,10): {D- \* E=}

En la tercera circunstancia posible se diría que primero surge la estrategia de igualdad  $E_2$ , pero como no lleva a la elección de un espacio determinado sino a una decisión del tipo "da igual", se busca otra estrategia  $E_1$  que sí permita elegir alguno de los dos espacios muestrales. Este es el sentido más literal de la compensación, puesto que aquí  $E_1$  cumple la función de compensar y romper la indecisión a que lleva  $E_2$ . De ello son ejemplos los siguientes:

- *sólo compite con una, en cambio allá compite con dos* [(1,1)(1,2):S1] (Cl<sub>a</sub>; C2,16): {D- \* F=}
- *en cada lado ganan las negras, pero existe mayor posibilidad aquí porque hay mayor número de negras* [(3,2)(5,3):S2] (I; C6,3): {F+ \* E=}
- *mayores posibilidades: la mayoría son negras y hay más cartas* [(2,1)(3,2):S2] (Map; C2,5): {F+ \* E=}

Hay algunas respuestas que apoyan la conjetura de que en este tipo de circunstancia la estrategia de igualdad surge primero: en ellas se puede apreciar el surgimiento de la necesidad de una compensación:

- *indistintamente, tal vez S2* [(1,1)(1,1):=] (Jam; C1,32)
- *es lo mismo... por el tiempo, S1... bueno, no... es lo mismo* [(2,0)(6,0):=] (X; C6,23)
- *existe mayor número de negras que de blancas. En S2 podría existir la posibilidad... porque hay mayor número de negras, pero da igual* [(3,1)(6,2):=] (I; C6,14)

Las tres circunstancias señaladas corresponden a tres modos muy distintos de encarar un problema por parte de los sujetos. Por ello, sería deseable poderlas clasificar por separado, distinguiendo cada vez si se trata de un apoyo de  $E_2$  a  $E_1$ , o de una exclusión de  $E_2$  por  $E_1$ , o de una verdadera compensación de  $E_2$  por  $E_1$ . Sin embargo, son muy escasas las respuestas en las que es posible establecer a cuál de las circunstancias corresponden. La gran mayoría de las veces pueden caber dos o hasta tres de las interpretaciones posibles, como en los siguientes ejemplos:

- *son menos, la mayoría son negras* [(3,1)(6,2):S1] (W; C6,14/1): {N- \* E=}
- *estoy a una probabilidad de que no sea, allá estoy a dos probabilidades de que no sea... hablando de probabilidad de que sea negra, hay una (en cada lado), sin embargo ahí están las dos que no sea* [(1,1)(1,2):S1] (X; C6,9): {D- \* F=}
- *sólo hay dos cartas y una de ellas es negra* [(1,1)(1,2):S1] (Map; C2,16): {N- \* F=}

Es por esta razón que los tres tipos de estrategias compuestas en las que hay una dominada de igualdad y una dominante que no es de igualdad han sido clasificadas en una sola categoría: la compensación.

## 4.4.1.4. CONTRAPESO

Cuando dos estrategias  $E_1$  y  $E_2$  llevan a decisiones distintas pero se cancelan mutuamente, el resultado puede ser una decisión del tipo de "da igual". En estos casos diré que  $E_1$  y  $E_2$  se contrapesan mutuamente y lo denotaré  $\{E_1 \cancel{\vee} E_2\}$ , lo que se lee " $E_1$  en contrapeso con  $E_2$ ".

Diré también que  $E_1$  y  $E_2$  son contrapeso una de la otra. La elección final no coincide con ninguna de las dos estrategias: en estos casos tanto  $E_1$  como  $E_2$  son estrategias dominadas. Para efectos de análisis, se considerarán equivalentes  $\{E_1 \cancel{\vee} E_2\}$  y  $\{E_2 \cancel{\vee} E_1\}$ .

## a) Ejemplos

El contrapeso sólo ocurrió en nueve ocasiones. Salvo dos excepciones, se trató de un contrapeso entre dos centraciones, sobre todo el contrapeso  $\{N- \cancel{\vee} F+\}$ . Estas son algunas de las respuestas:

- en S1 son menos elementos pero nada más tiene uno negro, y en S2 más, y tiene dos negros [(1,2)(2,4):=] (O; C6,18): Contrapeso  $\{N- \cancel{\vee} F+\}$
- en S1 todas son negras y en S2 sólo hay una blanca entre cuatro negras [(2,0)(4,1):=] (Maf; C2,14): Contrapeso  $\{F+ \cancel{\vee} D-\}$

Las dos excepciones mencionadas son el contrapeso entre una estrategia de centración y una de relación:

- a pesar de que en S2 haya más (negras)... En S2 predominan más las blancas, sobran dos, allá una... me da igual [(1,2)(3,5):=] (J; C3,25): Contrapeso  $\{F+ \cancel{\vee} R+\}$
- (S: ¿cuántas negras le tengo que echar a S2 en la 29 para que sea igual a S1?) por lo menos unas cuarenta negras [(1,4)(40,20):=] (X; C6,29.7): Contrapeso  $\{N- \cancel{\vee} E<+\}$

## b) Representación

A pesar de la pequeña cantidad de composiciones de contrapeso, se puede decir que el hecho de que la mayoría de ellas ocurre entre dos centraciones apoya la afirmación de que no hay una jerarquía fuerte entre las diferentes centraciones (ver la Representación de las exclusiones, pág. 209). En efecto, me parece por ejemplo que dos manifestaciones diferentes de la no jerarquía entre  $\{N-\}$  y  $\{F+\}$  son, por un lado, el que se presenten por igual las exclusiones

$$\{N- \cancel{\vee} F+\} \quad \text{y} \quad \{F+ \cancel{\vee} N-\}$$

y, por otro, que ocurra el contrapeso  $\{N- \cancel{\vee} F+\}$ .

Este contrapeso resulta tal vez de que el atractivo del espacio muestral con pocas cartas se compensa mutuamente con el atractivo de muchas negras del otro y da por resultado la igualdad: ninguno de los dos atractivos domina al otro.

#### 4.4.2. COMPOSICIONES MULTIPLES

Once de las respuestas obtenidas tienen un razonamiento que incluye varias composiciones de estrategias, esto es, un razonamiento basado en una composición de estrategias, una de las cuales es a su vez una estrategia compuesta.

##### a) Ejemplos

En tres de los once casos la composición múltiple es una conjunción en la que uno de los dos conjugantes es una estrategia compuesta:

- *acá es más fácil, también ahí pero tiene dos blancas y acá sólo una, fuera lo mismo si allí fueran cuatro negras y aquí la mitad de las negras [(2,1)(3,2):S1] (T; C3,18):* Conjunción con una compensación:  $\{(D- * E-) \& P+\}$
- *son menos cartas, hay una posibilidad pero es más segura que ahí. Ahí tengo tres negras, sin en cambio cinco blancas, iría a la de pierde, tomaría una blanca [(1,2)(3,5):S1] (V; C3,7):* Conjunción con una exclusión:  $\{(N- \neg F+) \& D-\}$
- *hay mucho más canicas negras que blancas, allá hay muchas negras, pero también hay un poco más de canicas blancas [(19,3)(20,8):S1] (X; C6,31):* Conjunción con una exclusión:  $\{R+ \& (D- \neg F+)\}$

Otros cuatro casos son exclusiones; en tres de ellos hay una excluida compuesta y en el cuarto la estrategia compuesta es la excluyente:

- *a pesar de que ahí hay más negras, acá nada más hay una blanca... acá tengo una blanca menos, allá dos menos, pero en S2 veo más blancas [(2,1)(5,3):S1] (X; C6,15):* Exclusión de una conjunción:  $\{D- \neg (F+ \& R+)\}$
- *mientras más negras haya, más es la probabilidad, independientemente de la cantidad de blancas y de cartas [(2,3)(4,5):S2] (J; C3,6.3):* Exclusión de una conjunción:  $\{F+ \neg (D- \& N-)\}$
- *tengo tres posibilidades de negra, aunque haya más blancas, aunque hay más cartas [(1,2)(3,5):S2] (M; C3,25):* Exclusión de una conjunción  $\{F+ \neg (D- \& N-)\}$
- *tiene más elementos, pero también tiene más elementos negros, y ahí tiene más blancos [(1,5)(3,4):S2] (O; C6,12):* Exclusión por una conjunción:  $\{(F+ \& D-) \neg N-\}$

Los otros cuatro casos son compensaciones con una compensante compuesta:

- *hay más probabilidad aquí, ... porque hay más blancas, entonces posiblemente tome acá la negra porque hay menos cartas [(1,3)(2,6):S1] (V; C3,4/3):* Compensación por una conjunción:  $\{(D- \& N-) * E=\}$

- aunque nada más tiene un elemento, allá tiene más pero la mayoría son blancos igual que acá, pero aquí hay menos [(1,2)(3,5):S1] (O; C6,22): Compensación por una exclusión:  $\{(N- \neg F+) * E=\}$
- por lo menos son cuatro posibilidades de blancas, pero aquí hay más cantidad de negras, si se incrementa la cantidad de cartas, no importa la cantidad, pero entre más negras, más posibilidades [(1,5)(10,14):S2] (J; C3,30): Compensación por una exclusión:  $\{(F+ \neg N-) * R=\}$
- S2 en última instancia porque hay más negros, pero la misma cantidad sobran: están terminando 6 negros, está la misma proporción guardada, pero por la cantidad, puede ser S2, a pesar de que se incrementen las blancas [(13,7)(18,12):S2] (J; C3,29): Compensación por una exclusión:  $\{(F+ \neg D-) * R=\}$

#### b) Representación

Estableciendo una analogía con las estrategias compuestas entre dos estrategias simples, aquí se puede decir que cuando un sujeto utiliza una estrategia múltiple ha detectado más de dos estrategias y establecido una jerarquía entre ellas, de modo que unas de las estrategias involucradas resultan dominantes y otras dominadas.

### 4.5. ESTRATEGIAS Y MECANISMOS PRIMITIVOS

Algunas respuestas de algunos sujetos corresponden a mecanismos que Piaget e Inhelder (1951) asocian con el estadio preoperatorio. Algunos de estos mecanismos son, por ejemplo, los que se refieren al acomodo de las barajas o cartas en el planteamiento del problema, o a la existencia de un solo elemento favorable. Llamo primitivos a estos mecanismos por la asociación piagetiana mencionada con niños de menos de siete años de edad. Algunos de ellos son incluso considerados por especialistas de psicología genética como elementos de diagnóstico de los primeros estadios del desarrollo (54).

Entre esos mecanismos, he distinguido dos tipos: por una parte hablaré de estrategias propiamente dichas, es decir modos de solución que pueden llevar una regla implícita o hasta explícita para la solución de los problemas; por otra parte hablaré de mecanismos de solución como procesos mucho más laxos, para los que no se podría enunciar una regla o "receta" sino que parecen surgir en el momento preciso ante ciertos problemas por razones que no son evidentes ni para el propio sujeto.

54. Tal es, por ejemplo, el caso de la estrategia {F1}, que se presenta típicamente en sujetos del estadio preoperatorio (ver en el capítulo 1 el §1.2.1.2b).

En esta sección se abordarán primero de las estrategias primitivas y después de otros mecanismos de solución que son también primitivos. Las primeras han sido ya expuestas en el transcurso de las secciones §4.2 y §4.3 de este capítulo; los segundos serán tratados por primera vez aquí.

#### 4.5.1. ESTRATEGIAS PRIMITIVAS

Todas las estrategias que se vean en este apartado han sido ya presentadas con las centraciones o las relaciones con las que están emparentadas, por lo que no se presentarán ejemplos de ellas. Han sido agrupadas aquí con el fin de detectar lo que tienen en común y, en la medida de lo posible, interpretarlo.

En general, me parece que en estas estrategias interviene siempre un ingrediente de pensamiento mágico, que además de señalar una atracción hacia uno de los espacios muestrales la fija, volviéndola difícil de modificar. Como mencioné anteriormente, es posible que uno de los orígenes de este factor mágico sea una idea de que el azar es algo tan inaprensible y extraño que siempre hay que hacer las cosas al revés cuando uno se topa con él.

##### 4.5.1.1. ESTRATEGIA {N+}

Esta estrategia fue presentada en el párrafo §4.2.1.2 (pág. 171).

Una posible interpretación de este mecanismo de solución es que el sujeto asocia las opciones para elegir con las opciones para ganar. Si esto es cierto, entonces el sujeto busca el espacio muestral en el que haya más opciones para elegir, "puesto que" ello le "garantiza" que habrá más opciones para ganar. En este caso, el factor "mágico" radica en la asociación.

De las estrategias primitivas, ésta es la que apareció más frecuentemente en este estudio. La gran mayoría de las veces ocurrió como estrategia simple o como dominante en una composición.

##### 4.5.1.2. ESTRATEGIAS {F-}, {F1} Y {D-}

Estas estrategias fueron presentadas en los párrafos §4.2.2.2 y §4.2.3.2 (págs. 174 y 178).

En todas ellas se puede hablar de asociaciones "mágicas" como la mencionada en {N+}. En {F-} pueden estarse asociando las opciones para ganar con las opciones para elegir, lo que llevaría que al buscar el espacio muestral con menor incertidumbre y por ende menos opciones para elegir se elija el que tiene menos opciones para ganar. Un caso extremo de ello sería {F1}, que es siempre donde menos opciones hay para ganar (salvo, claro está, los casos aún más extremos de imposibilidades). En cuanto a {D+}, se podrían estar asociando las opciones para perder con las opciones para ganar, lo que llevaría que al buscar el espacio



muestral con más opciones para ganar se elija el que más opciones tiene para perder.

Sin embargo, en estas tres estrategias me parecen más convincentes unas interpretaciones relacionadas con dos aspectos sobre la incertidumbre causada por el azar: por un lado, la adjudicación de la incertidumbre al interior del conjunto de los elementos favorables, y, por otro, la búsqueda de la menor incertidumbre posible. En estas interpretaciones el factor "mágico" radica en la adjudicación de la incertidumbre a los favorables. Así, si se siente que la incertidumbre está localizada entre los elementos favorables, parece obvio que se elija el espacio muestral en el que hay menos favorables (porque hay menos incertidumbre), o sea {F-}; y mientras menos favorables haya esta atracción se vuelve más fuerte, hasta llegar a {F1} como caso extremo. Como corolario, si la incertidumbre está "localizada" entre los elementos favorables, podría ocurrir que la certidumbre esté localizada entre los elementos desfavorables, lo que llevaría a elegir el espacio muestral con mayor certeza: {D+}.

Esta adjudicación de la incertidumbre a una sola clase de elementos está relacionada con las dificultades en la comprensión de la noción de azar, que se analizarán con más detalle en el capítulo 5 (ver en particular el §5.2.4.1). A reserva de discutirlo más a fondo en ese momento, utilicemos el ejemplo del frasco de botones blancos y negros aportado por el sujeto J del tercer experimento. Con ese referente, el planteamiento de la forma experimental con la que trabajo pediría que eligiera, entre dos frascos, aquel en el que es más probable que al ELEGIR un botón AL AZAR salga uno negro. Sin embargo, el planteamiento es modificado: ahora se trata de BUSCAR un botón negro. La imagen asociada es entonces que mientras menos botones negros haya es más fácil encontrarlos, porque destacan más ({F-}), incluso si sólo hay un botón negro en un frasco de botones blancos es fácil imaginar que el botón negro es notorio inmediatamente ({F1}); además, mientras más botones blancos haya, más destacan los negros ({D+}). Pienso que la modificación del planteamiento se debe a una resistencia a la idea de mezcla aleatoria.

Estas estrategias no aparecen muy frecuentemente. {F-} y {D+} aparecen sólo como estrategias simples, emitidas por un mismo sujeto (y {D+} sólo en dos respuestas). En cuanto a {F1}, aparece también pocas veces como estrategia simple, y en un par de ocasiones en composiciones como estrategia dominada.

#### 4.5.1.3. ESTRATEGIAS {E5} Y {R-}

Estas estrategias habían sido presentadas en los párrafos §4.3.1.5 y §4.3.2.2 (págs. 187 y 191).

Como mencioné previamente, estas dos estrategias podrían ser dos versiones de una misma atracción hacia el equilibrio total, es decir hacia la situación en la que hay tantos favorables como desfavorables, el punto medio de balance en el que  $p=0.5$ . En este caso el factor "mágico" radica justamente en esta atracción hacia el equilibrio, independientemente de dónde haya mayor probabilidad de ocurrencia de favorables. La atracción hacia el equilibrio

se manifiesta en la ubicación U2.4 en la elección del espacio muestral en que se "empata" (aunque en el otro haya mayor probabilidad de "ganar" que de "perder"): {E5}. Se manifiesta en la ubicación U3.4 en la elección del espacio muestral en que los casos favorables y los desfavorables se parecen lo más posible, es decir en que es menor la diferencia entre favorables y desfavorables: {R-}.

De este modo, la estrategia {E5} podría ser considerada como un caso extremo de {R-}, así como {F1} puede ser considerada un caso extremo de {F-}. Esto es, si hay una atracción hacia el equilibrio medida en términos del valor absoluto de  $r$ , este valor absoluto alcanza su mínimo cuando es nulo, o sea cuando no hay ninguna diferencia entre los casos favorables y los desfavorables: el "empate" que busca {E5}.

La atracción hacia el punto central de equilibrio podría expresarse en general como la elección del espacio muestral en que es menor el valor absoluto de la diferencia entre los favorables y los desfavorables. Sin embargo, esta atracción nunca es distinguible de {E<} en la ubicación U2.2 ni de {E=} en U3.3, y tampoco lo es de {R+} en U3.2 bajo las combinaciones K1 a K7. Por ello, no se puede saber cuáles de las respuestas interpretadas según estas últimas estrategias corresponden verdaderamente a ellas y cuáles serían en realidad una mera atracción hacia el punto central de equilibrio.

La estrategia {E5} es la más frecuente de las estrategias primitivas, después de {N+}; la mayoría de las veces aparece como estrategia simple o como dominante en composiciones. Por su parte, la estrategia {R-} aparece sólo en un par de ocasiones como estrategia simple.

#### 4.5.2. OTROS MECANISMOS PRIMITIVOS

En este apartado he agrupado tres diferentes formas de mecanismos de solución que pueden ser considerados primitivos de acuerdo con los criterios enunciados más arriba; los he denominado mecanismo de atracción, de acomodo y de juntar lados.

##### 4.5.2.1. MECANISMO DE ATRACCION

He denominado atracción al mecanismo mediante el cual un sujeto es llevado a una decisión por razones que no puede explicar más que en términos de gusto o de "corazonada": tiene un fuerte componente emotivo. Este mecanismo ocurre frecuente pero no exclusivamente en las primeras preguntas de un cuestionario.

## a) Ejemplos (55)

Estas son tres de las ocho respuestas en las que se detectó el mecanismo de atracción:

- *se me hace más divertido estar aquí* [(2,3)(1,5):S1] (T; C3,1)
- *tuve una corazonada y fue al azar* [(1,1)(3,1):] (Q6; C4,10)
- *más blancos pero mismos negros... es más fácil que salga en S1 pero me gustaría agarrar de S2* [(3,1)(3,4):S2] (O; C6,2)

## b) Representación

El sujeto que utiliza un mecanismo de atracción está ubicando en sí mismo lo que lo hace tomar una u otra decisión: se trata de un gusto personal o de algo que le ocurre al sujeto ante una situación aleatoria. Este impulso personal puede incluso ser más fuerte que aspectos más objetivos de la situación que han sido percibidos por el sujeto, como lo muestra el último de los ejemplos citados.

## 4.5.2.2. MECANISMO DE ACOMODO

He denominado acomodo al mecanismo mediante el cual un sujeto atribuye su elección a la manera en que están acomodadas las cartas que le son mostradas. Las respuestas con este mecanismo fueron obtenidas exclusivamente en los experimentos primero y segundo, en los que trabajé con naipes.

## a) Ejemplos (56)

Se encontraron once respuestas con mecanismo de acomodo; aquí muestro tres de ellas.

- *la forma de acomodarse empieza con negro y termina en negro, en cambio allá empieza con blanco y termina...(?)* [(2,3)(5,4):S2] (Als; C2,9)
- [(2,1)(4,2):S1] (Bla; C2,4) *aunque se tienen menos cartas hay un rey de corazones*

55. Estos son algunos ejemplos de mecanismos de atracción que he detectado en la literatura científica: «*porque me gusta el rojo*» (edad: 5;1) (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 114); «*porque sí, porque me gusta*» (edad: 6;8) (Chalini, 1979, pág. 98); «*porque el amarillo es el color de mi equipo favorito de fútbol*» (Falk et al., 1980, pág. 197).
56. Ejemplos de la literatura científica: elegir siempre el conjunto de la derecha, o el de la izquierda («*porque soy zurda*»), o el que está más cerca del premio, o la ruleta cuya manecilla está en el color deseado antes de darle vuelta (Falk et al., 1980, págs. 196 y 197); «*aquí, porque del otro lado ya escogí muchas veces*» (edad: 4;9); en una sola bolsa predecir un color «*porque [esa bola] estaba en la esquina de la bolsa*» (edad: 5;1) (Piaget e Inhelder, 1951 págs. 130 y 114).

- el número de cartas son dos y la probabilidad  $A/2$  u  $8/2$  (sic: los numeradores son la representación de las barajas <sup>57</sup>) [(1,1)(1,2):S1] (Cri; C1,31)

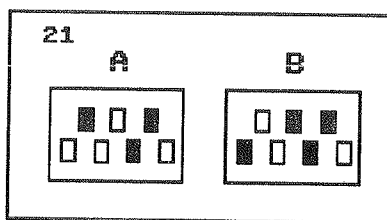
Otras cuatro tienen una peculiaridad: son respuestas muy similares de cuatro de los equipos del cuarto experimento a una misma pregunta:

- hay equilibrio en los dos grupos [(3,4)(4,3):=] (Q1; C4,3)
- misma posibilidad de sacar negra [(3,4)(4,3):=] (Q2; C4,3)
- la misma posibilidad para ambos [(3,4)(4,3):=] (Q5; C4,3)
- tienen la misma certeza [(3,4)(4,3):=] (Q6; C4,3)

Interpreto como mecanismo de acomodo estas respuestas porque lo que los sujetos veían tenía aproximadamente el siguiente aspecto (<sup>58</sup>):

	Lado A		Lado B	
	X	O	X	O
1.	2	2	3	1
2.	2	3	1	5
3.	3	4	4	3
4.	3	2	5	1
.				
.				

Es factible pensar que la simetría en el renglón 3 haya sugerido la igualdad entre ambos lados (cf. el "equilibrio" mencionado por Q1). Esto coincide con la opinión de John Cohen en el sentido de que puede haber preferencias por la simetría y el equilibrio estético (Cohen, 1963, reportado por Maury, 1984, pág. 200). Además, la interpretación se ve apoyada por el hecho de que el mismo arreglo en otra presentación no obtuvo ninguna respuesta "da igual": se trata de la pregunta 21 de cuestionario C3, que tenía este aspecto:



57. Recuérdese que en el primer experimento utilicé la baraja americana.

58. Recuérdese que en C4, X=negras y O=blancas.

**b) Representación**

Una de las diferencias entre el mecanismo de atracción y el de acomodo radica en que en el mecanismo de acomodo el sujeto ubica en las cartas (y no en sí mismo) lo que lo hace llegar a una decisión. A pesar de ello, no busca razonar con base en las cantidades de favorables o desfavorables sino en la disposición en que están colocados los favorables y los desfavorables. Es un mecanismo altamente dependiente del modo de presentación de la información. Maury (1984, 1986), quien llama "argumentos de re-partición" a los mecanismos de acomodo, los observa en sus experimentos con ruletas pero no en los realizados con urnas (aunque reporta que Nassefat sí los observó). Aunque ella achaca a la edad de los sujetos estas diferencias entre ambas investigaciones, yo creo que se deben al hecho de que en la suya el sujeto recibía la información acerca de las ruletas con una representación gráfica de ellas, y la información acerca de las urnas con una representación numérica. Así, la forma de representación favorecía los mecanismos de acomodo en ruletas y no en urnas. En mis experimentos, con la información sobre "urnas" representada gráficamente, sí se observan mecanismos de acomodo.

**4.5.2.3. MECANISMO DE JUNTAR LADOS**

Otro de los mecanismos seguidos por algunos sujetos en algunas ocasiones consiste en una operación mental de "juntar" ambos espacios muestrales, para formar un solo conjunto de la forma  $(f_1+f_2, d_1+d_2)$ . En general, el mecanismo se presenta en preguntas correspondientes a las situaciones piagetianas de imposibilidades y/o certezas, pero también ocurre en otras situaciones; en general, la decisión a la que llega un sujeto que utiliza este mecanismo es del tipo "da igual", pero también puede llegar a la elección de uno de los dos espacios muestrales.

**a) Ejemplos**

Se detectaron once respuestas con el mecanismo de juntar lados; cuatro de ellas son:

- existe probabilidad de negras 50% 2-2 (sic)  $[(0,2)(2,0)]=$  (Fat; C1,13)
- de seis cartas hay seis negras  $[(2,0)(4,0)]=$  (Mig; C1,12)
- en S1 no hay y en S2 hay dos y para sacar la negra puedo unir las dos (S1 y S2)  $[(0,2)(2,2)]=$  (Edu; C1,3)
- son 3+4 son 7 cartas y son 5 negras  $[(2,1)(3,1)]=$  (Edu; C1,15)

**b) Representación**

Un sujeto que utiliza este mecanismo está buscando en las cartas presentadas un motivo para tomar alguna decisión, pero en su intento por considerar globalmente la situación la globaliza tanto que pierde de vista el planteamiento mismo de decisión (y por eso llega a la respuesta de "da igual").

El hecho de que este mecanismo se presente sobre todo ante imposibilidades o certezas puede interpretarse como una reacción de desconcierto: para algunos sujetos podrían ser tan obvias estas preguntas que buscan un "gato encerrado" y recurren a alguna acción mental en la que ya no haya imposibilidades o certezas: en efecto, salvo para las situaciones de doble imposibilidad o de doble certeza, la acción de juntar lados elimina la imposibilidad o la certeza que pudiera haber en uno de los dos espacios muestrales.

## 5. METODOS DE INTERROGACION Y DESCIFRADO

En este capítulo abordaré la tercera y última línea metodológica de la triple hélice planteada en el capítulo 2: es la llamada línea de los métodos para el planteamiento de las preguntas y para la captación de las respuestas. Esta línea tiene una fuerte relación con cada una de las otras dos: comprende por una parte las maneras de realizar la interrogación y por ende de llevar a la práctica las categorías para el planteamiento de preguntas y los cuestionarios diseñados, y, por otra, las maneras de descifrar las respuestas obtenidas y asignarles alguna de las categorías para la interpretación.

Aquí conviene aclarar el diferente significado que les estoy dando a los términos 'descifrar' e 'interpretar'. Por 'descifrar' me refiero al proceso de comprender, a través de las expresiones escritas o verbales del sujeto, cómo está pensando, qué comparaciones o relaciones está estableciendo entre qué porciones de la información que tiene ante sí. Por 'interpretar' entiendo la asignación de una estrategia simple o compuesta (o la de algún mecanismo primitivo) a la respuesta ya descifrada.

No se puede interpretar adecuadamente una respuesta si previamente no ha sido descifrada correctamente, y por ende la calidad de los métodos para descifrar es una condición necesaria (aunque no forzosamente suficiente) para llegar a una buena interpretación. Este es un proceso cíclico: cada vez que encontré nuevas categorías fue necesario repetir el descifrado, y cada vez que surgieron nuevas posibilidades de descifrado fue revisada la interpretación.

Cada uno de los métodos está fuertemente ligado con las líneas metodológicas abordadas en los capítulos 3 y 4. Ambos tienen también una fuerte relación entre sí. Efectivamente, ambos están ubicados exactamente en el punto metodológico crucial de la correspondencia entre los dos sistemas de categorías (para preguntas y para respuestas), puesto que para poder establecer la correspondencia es necesario interpretar las respuestas, para lo cual es necesario contar con respuestas interpretables, pero para tener respuestas interpretables es necesario no sólo descifrarlas correctamente sino que sean descifrables, y para que las respuestas sean descifrables se deben haber planteado las preguntas de la mejor manera posible. Así, otra condición necesaria para una buena interpretación es un método adecuado para la interrogación.

La importancia de los métodos de interrogación se manifestó en la búsqueda de la mejor manera de realizar la captura de la información: una de las variables experimentales de este trabajo es justamente la forma de aplicación de los cuestionarios diseñados. Y, cuando digo "mejor manera", no me refiero a la que no plantea problemas de interpretabilidad (ésa sería un cuestionario cerrado, en el que las respuestas son claras e inequívocas pero

no permiten saber qué mecanismos mentales sigue el sujeto para resolver el problema), sino a la que favorece las expresiones más interpretables: la calidad de un método de interrogación radica en la descifrabilidad e interpretabilidad de las respuestas que se obtengan con el método.

El capítulo está dividido en tres secciones. La primera aborda principalmente los métodos de interrogación, mientras que la segunda y la tercera están dedicadas a los métodos para descifrar las respuestas.

### 5.1. METODOLOGIA DE INTERROGACION

Dentro de la hélice de los métodos aparece, en primer lugar, el problema de la metodología de la interrogación, es decir, el de cómo adquirir la información.

Para los primeros dos experimentos, en los que solamente buscaba contrastar la hipótesis de que los estudiantes podrían resolver todos los tipos de preguntas de la clasificación piagetiana, elegí el método no piagetiano de aplicación de un cuestionario para que los estudiantes lo resolvieran por escrito y de manera individual. A partir de esos experimentos resultó evidente que había que resolver dos necesidades importantes: por una parte, la de construir paralelamente los sistemas de categorías para las preguntas y para las respuestas y, por otra, la de recurrir a un método distinto del de cuestionario para recabar la información. Esto último se debía a la ineffectividad del método de cuestionario para obtener respuestas que pudieran ser descifradas e interpretadas adecuadamente; la ineffectividad, que comentaré con más detalle en el primer apartado de esta sección, resultaba particularmente perjudicial para poner a prueba los sistemas paralelos de categorías para preguntas y respuestas.

Había que buscar entonces un método que permitiera cubrir dos tipos de metas: por un lado, detectar con mayor detalle las maneras que tenían los sujetos para resolver las preguntas planteadas, y, por otro, contrastar los sistemas de categorías. La primera meta podía ser cubierta por el método piagetiano clásico de entrevistas clínicas o clínico-críticas<sup>1</sup>), que permite una visión más de cerca y con más libertad de movimiento que el cuestionario. Sin embargo, el método clínico prescribe que el interrogatorio debe irse adaptando al sujeto y que las preguntas que se le plantean deben irse adecuando a las respuestas que éste ha dado a las preguntas anteriores: se corre, pues, el peligro de no cubrir con todos los sujetos estudiados un mismo sistema estructurado de preguntas. Por ello, el método clínico-crítico no podría cubrir la segunda meta. Lo que yo necesitaba era un método con la flexibilidad y la "mirada de lupa" del método clínico-crí-

---

1. Véase la referencia al método en el capítulo 1 (§1.5.2.2).



tico y con la estructura y comparabilidad del método de cuestionario.

Una vez que la pregunta quedó así planteada, la respuesta fue casi inmediata: lo que yo debía hacer era:

- diseñar un cuestionario estructurado de acuerdo con el sistema de categorías recién creado para las preguntas,
- aplicarlo en entrevistas de tipo clínico en las que el cuestionario me guiara pero no me constriñera,
- interpretar las respuestas de acuerdo con el sistema de categorías recién creado para ello,
- y ver si los dos sistemas de categorías se correspondían mutuamente.

Entonces, el cuestionario debía darme la confianza de estar basando las preguntas en un sistema estructurado pero también la libertad de plantear en cada momento nuevas preguntas o nuevas versiones a las preguntas planteadas, así como la de irle preguntando a los sujetos por qué habían tomado sus decisiones. De este modo podría observar con detalle las estrategias de los sujetos, pero también podría comparar entre sí los resultados obtenidos en entrevistas y compararlos asimismo con los obtenidos en las aplicaciones por escrito.

Ese fue el método elegido para los experimentos tercero y quinto: apliqué cuestionarios en entrevistas de corte clínico. No mantuve el cuestionario de manera rígida: por una parte, apliqué dos cuestionarios distintos sujetos entrevistados (uno a cuatro sujetos y el otro a cinco), y por otra, cuando en el curso de un interrogatorio surgía la conveniencia de plantear preguntas no previstas en el cuestionario, procedí a plantearlas (luego manejé estas preguntas no previstas como "variantes"). De este modo, todos los sujetos interrogados en un mismo experimento compartieron las preguntas del cuestionario correspondiente, y cada sujeto contestó además a algunas variantes. El hecho de que hubiera dos cuestionarios distintos y preguntas distintas dentro del marco de cada cuestionario no le resta comparabilidad al experimento, porque todas las preguntas están comprendidas dentro del mismo sistema de categorías. Las entrevistas fueron efectuadas a individuos o a parejas de individuos, y las respuestas, verbales, fueron grabadas en cinta magnética y transcritas posteriormente.

Justamente antes de realizar el quinto experimento descubrí y leí la tesis doctoral de Sylvette Maury (1986); ahí, ella refiere los trabajos que M. Nassefat realizó en 1963 en una investigación sobre las respuestas de adolescentes a preguntas de probabilidad en un planteamiento de previsión. Para ese trabajo, refiere Maury, Nassefat diseñó un "método de interrogatorio estandarizado", derivado del método clínico-crítico de la escuela ginebrina, pero en el que en vez de hacer las entrevistas de manera libre sobre un tema, se trabaja con un cuestionario establecido previamente para asegurar la constancia del esquema del interrogatorio, y se registra no sólo la reacción inicial o respuesta del sujeto sino también las justificaciones. Esto le permitió a Nassefat hacer un análisis cualitativo y cuantitativo de los datos obtenidos. Maury (1986) utilizó también el método de interrogatorio estandarizado, pero no en entrevistas sino en forma de

cuestionario aplicado por escrito, en el que pidió a los sujetos (estudiantes de nivel medio superior y superior) que explicaran claramente las razones de sus elecciones.

Después de la lectura de esa tesis me resultó claro que lo que yo estaba aplicando era el mismo "método de interrogatorio estandarizado" que Nassefat había diseñado y que Maury había aplicado en modalidad de cuestionario. Además, en el método de interrogatorio estandarizado no solamente está incluido el método que yo utilicé para las entrevistas en los experimentos tercero y quinto, sino también los cuestionarios aplicados de manera colectiva y con respuesta por escrito de los experimentos primero, segundo y cuarto. Esto es, a pesar de que la forma de registro de la información difiere notablemente entre unos y otros experimentos, y a pesar de que la misma forma de planteamiento de las preguntas difiere en uno y otro caso, no se trata de metodologías diferentes, sino de diversas modalidades de la misma metodología de interrogatorio estandarizado.

Así, adaptando el término de Nassefat, la metodología que yo utilicé en los cinco experimentos para la adquisición de la información fue el método de interrogatorio estandarizado, en dos modalidades: la de respuestas escritas y la de respuestas orales (2). Cada una de ellas tiene dos submodalidades, que dependen del número de sujetos participantes: la primera modalidad se podría clasificar en respuestas individuales (experimentos primero y segundo) o de equipo (experimento cuarto); la segunda en entrevistas individuales (experimento quinto) o de binomio (experimentos tercero y quinto).

En esta sección haré un breve análisis comparativo de las modalidades del método de interrogatorio estandarizado que he utilizado. Aunque no será el único, el principal criterio para este análisis es el de la interpretabilidad de las respuestas obtenidas.

Dedicaré el primer apartado a comparar las modalidades de respuestas escritas o verbales: destacaré en particular las ventajas de las verbales sobre las escritas. En el segundo apartado hablaré de la modalidad de cuestionarios, y en el tercero de la modalidad de entrevistas. En el cuarto me ocuparé específicamente de la forma de presentación de la información al sujeto.

### 5.1.1. RESPUESTAS ESCRITAS O HABLADAS

La aplicación por escrito que realicé en los experimentos primero, segundo y cuarto podría a simple vista equipararse con la realizada por Maury. Sin embargo, aunque hay cierto paralelismo entre ambas, hay también una importante diferencia que convie-

2. La modalidad de respuestas verbales es análoga a la de Nassefat, la de respuestas escritas a la de Maury (cf. Maury, 1986).

ne resaltar desde el principio: esta diferencia radica en su calidad de interpretables. Maury (1986) aplicó el cuestionario a unos quinientos estudiantes; la aplicación se realizó durante la clase de matemáticas de los sujetos, y el profesor de cada grupo insistió fuertemente en que debían quedar muy claras las razones de las elecciones que realizaran los estudiantes. Los resultados que obtuvo fueron satisfactoriamente interpretables (3). En mi caso, apliqué el cuestionario sólo a mis alumnos, e insistí también en que se explicitaran las razones de una u otra elección. Sin embargo, los resultados no fueron satisfactoriamente interpretables, debido en gran parte a que muchas de las "razones" esgrimidas resultaban sumamente oscuras.

De las tres aplicaciones por escrito la más exitosa desde este punto de vista fue la del cuarto experimento, en el que la redacción corresponde a un trabajo de equipo y en el que además estuve insistiendo constantemente en que las justificaciones no fueran descripciones. Sin embargo, aún en este caso muchas de las razones resultaron muy poco claras. A mi modo de ver, esto refleja una serie de dificultades de los estudiantes, que culminan con e incluyen a dificultades con el lenguaje, en particular con la lengua escrita (ver un estudio más detallado de esto en la sección sobre uso del lenguaje, §5.2), y pienso que tal vez se podría pensar que estas dificultades son mucho mayores para los alumnos mexicanos de la UPN estudiados por esta investigadora que para los franceses de la Provence francesa estudiados por aquélla.

Estos problemas de interpretabilidad no ocurrieron (o no tan extensivamente) en las entrevistas: los sujetos de los experimentos tercero y quinto resultaron mucho más claros en sus expresiones verbales que los sujetos de los otros experimentos en sus respuestas escritas. Esto no fue ninguna sorpresa: ya la discusión en equipos de la segunda fase del segundo experimento me había permitido ver que las expresiones verbales de cada sujeto eran mucho más claras que sus propias expresiones escritas. Por otra parte, las entrevistas tienen la riqueza de que aún cuando un sujeto esgrima de inicio una razón poco clara se le puede pedir que la aclare todo lo que sea necesario. Por poner un ejemplo hipotético, supongamos que a un sujeto se le plantea la pregunta (2,3)(5,4), y que el sujeto elige S2 porque "hay más". Si da esta respuesta por escrito, la respuesta no es interpretable (uno se preguntaría "¿más qué que qué...?"), pero si se trata de una entrevista se le puede preguntar "¿más qué?". E incluso si el sujeto contesta "más negras" (lo que ya excluye las interpretaciones {N+} y {D+}), se le puede seguir preguntando: "¿más negras que qué?", lo que podría conducir por ejemplo a una respuesta del tipo "más negras que blancas" ({E<}), o a una del tipo "más negras que en S1" ({F+}).

Pero las respuestas habladas no sólo tuvieron la ventaja, con respecto a las escritas, de ser más fácilmente interpretables. También fueron más espontáneas. Y también fueron más com-

3. Este tipo de resultados satisfactorios están también reportados en Maury (1984).

pletas, más ricas. Hubo más respuestas compuestas y múltiples en los experimentos tercero y quinto (34% de todas las respuestas interpretadas en esos experimentos fueron compuestas o múltiples) que en los experimentos primero, segundo y cuarto (11%); además, todas las respuestas múltiples que se encontraron en este estudio ocurrieron en entrevistas. Es decir, los sujetos dicen más de lo que escriben.

Tuve oportunidad de observar un ejemplo muy notorio de este fenómeno en un taller con maestras de primaria y educadoras. Planteé una serie de preguntas del tipo de las que he venido presentando; la consigna ahí era reportar por escrito las elecciones y las justificaciones para discutir las posteriormente. Uno de los sujetos (Mlu) acababa de escribir, para la pregunta (5,3)(7,2), "S2: hay más negras", cuando me asomé a ver su hoja. Entonces me explicó verbalmente: "S2, porque hay más negras, a pesar de que hay más cartas". No es que tuviera dos estrategias distintas, una por escrito y la otra verbal, sino que la misma estrategia tuvo una expresión más resumida por escrito que verbalmente. Sin embargo, si yo hubiera visto sólo la respuesta escrita, la hubiera clasificado como {F+}, pero después de oír la explicación es obvio que se trata de {F+ - N-}.

### 5.1.2. CUESTIONARIOS: RESPUESTAS INDIVIDUALES O DE EQUIPO

Las submodalidades del método de cuestionario, tal como lo apliqué, son la de respuestas individuales (experimentos primero y segundo) y la de respuestas de equipo (experimento cuarto). Lo que distingue a ambas, o sea el número de individuos participantes, opera a la vez a favor y en contra de cada una en su calidad de interpretables.

Las respuestas individuales corresponden a la manera de resolver el problema que tiene cada sujeto, aunque no siempre resultan fácilmente descifrables, mientras que las respuestas de equipo, aunque son en general más fácilmente descifrables que las individuales, no corresponden a una forma individual de resolver las preguntas.

Además, tal como lo apliqué, el método de aplicación en equipo no permite saber tampoco a ciencia cierta si dentro del equipo se presentan estrategias que entren en un conflicto del que resulten unas estrategias dominantes y unas dominadas. Sin embargo, como en varios de los equipos los integrantes se lograron unificar y llegaron en buena parte a estrategias de equilibrio, puede interpretarse que eso es probablemente lo que ocurrió. En algunos equipos pudo haber ocurrido que hubo alguien que habló con estrategias de equilibrio con la seguridad de la intuición y su solo tono convenció (o intimidó) a los demás; en otros pudo haber ocurrido que entre todos llegaron a ese punto y les resultó colectivamente tan convincente (salvo necesidad de compensación) que no salieron de ahí.

En resumen, la aplicación en equipo no aporta ninguna solución al problema de interpretación (o incluso lo agrava), aun-

que, como veremos en el capítulo 7, sí puede ser tomado como base para una aplicación didáctica.

### 5.1.3. ENTREVISTAS: RESPUESTAS INDIVIDUALES O DE BINOMIO

En la modalidad de entrevistas del método de interrogatorio estandarizado, que apliqué en los experimentos tercero y quinto, realicé la interrogación con base en el método clínico-crítico piagetiano. Entre las grandes ventajas de ese método está el hecho de que la relación directa y verbal permite a la persona que lleva la entrevista ajustar el interrogatorio a las características de la persona entrevistada, no sólo con respecto a su nivel sino sobre todo al proceso que va siguiendo, y le permiten confrontarla, cuestionarla, presionarla para que aclare sus formas de expresión, etc.

Por otra parte, los resultados dependen mucho de la comunicación que se pueda establecer entre entrevistador(a) y entrevistados(as), así como de la fluidez verbal de los segundos. Los sujetos considerados en este trabajo eran estudiantes, y consideré qué estos problemas de comunicación podían ser menores entre dos estudiantes que entre un estudiante y una persona conocida como profesora: por ello decidí trabajar al principio (tercer experimento) en entrevistas dobles (4), es decir con parejas de estudiantes que se conocen y suelen estudiar juntos (esta modalidad es conocida en Francia como de "binomios"). La táctica seguida para procurar que los sujetos expresaran lo más posible sus razonamientos fue pedirles que cuando no estuvieran de acuerdo en una solución intentaran convencerse uno a otro.

El método funcionó aparentemente bien, con la salvedad de que detecté efectos de interacción entre los personajes entrevistados: por ello, en el quinto experimento realicé una nueva entrevista de binomio, y además tres individuales, con el fin de poder esbozar una comparación entre ambas metodologías de interrogación. Además, como posiblemente algunas de las interacciones detectadas estaban relacionadas con el hecho de que los binomios estaban formados por un hombre y una mujer, el binomio del quinto experimento estaba formado por dos hombres.

En este apartado compararé los resultados de las dos submodalidades de entrevistas: individuales y de binomio, y, cuando proceda, compararé las diferencias entre los dos binomios formados por personas de diferente sexo y el binomio formado por dos del mismo. Me interesará destacar en particular dos aspectos: las formas de hablar de los sujetos y las interacciones entre ellos; ejemplificaré este segundo aspecto con una interpretación general de las interacciones entre los sujetos de uno de los binomios. Cerraré el apartado con una serie de comentarios generales acerca de la modalidad de entrevistas.

4. Agradezco esta idea al Dr. Jesús Alarcón (Papini) de Matemática Educativa del IPN.

El marco de referencia para este apartado no son los extractos que he tomado de las entrevistas para la interpretación de las respuestas, sino las propias entrevistas, tal como aparecen transcritas en el Anexo 4: por ello, las citas con las que ilustraré la exposición tienen como referencia los números correspondientes al contador de la grabadora (como subíndices y en caracteres itálicos).

### 5.1.3.1. FORMAS DE HABLAR

En la sección §5.2 de este mismo capítulo comentaré ampliamente las características del lenguaje utilizado por los sujetos tanto en sus expresiones escritas como en las verbales. Sin embargo, aquí me interesa destacar en qué medida la submodalidad de entrevista afectó la manera en que cada sujeto habló, y en particular si esta manera refleja una espontaneidad que pueda ser interpretada como la expresión de una intuición. Aquí conviene tal vez anotar que la espontaneidad puede haber sido propiciada en todas las entrevistas, porque se desarrollaron en un clima general de buen humor.

Es obvio que la manera de hablar de un sujeto en una entrevista depende mucho más del sujeto mismo que de la modalidad de la entrevista. El sujeto V del binomio T-V hubiera tenido la misma falta de claridad verbal y los visos cantinflescos que mostró en la entrevista doble (ver por ejemplo 249, 302, 307, 318, 335, 340, 350) si se le hubiera entrevistado individualmente, y el sujeto I, entrevistado individualmente, muy probablemente hubiera manifestado también en binomio su preocupación por expresarse elegante y "correctamente" (ver su uso reiterado de expresiones como *porque ya que* en vez de "porque", *existe* en vez de "hay", *número de cifra* en vez de "número", *en cuestión de*, *en sí...*). Los sujetos M del binomio J-M y X entrevistado individualmente tienen un manejo similar del lenguaje, y lo hubieran manifestado así si la entrevista a M hubiera sido individual y la de X en binomio.

Pero de alguna manera las respuestas en entrevistas de binomio tienen una calidad distinta: son algo más espontáneas, están expresadas en un lenguaje que se antoja más auténtico y parecen reproducir más fielmente el modo de pensar del sujeto que las respuestas obtenidas en las entrevistas individuales, que se diría que están "maquilladas" para la persona con autoridad (la entrevistadora). Esto es particularmente claro en la entrevista al binomio J-M: sobre todo después del arranque, ya entrados en confianza, los dos sujetos expresaron espontáneamente sus opiniones y rara vez tuvo que animarlos a argumentar. En esa entrevista los sujetos tuvieron mucha más comunicación entre ellos que conmigo, lo cual operó a favor en términos de autenticidad y por ende de interpretabilidad.

El hecho de tener que convencer al compañero obliga a los sujetos a encontrar mejores expresiones de su modo de pensar, menos ambiguas. A lo largo de la entrevista, es notable cómo algunas ideas de los sujetos se van afinando, van encontrando una ex-

presión verbal para comunicarla al compañero, y a su vez la expresión verbal estimula una mayor claridad en la idea. Por ejemplo, en la entrevista al binomio J-M, el sujeto J empieza con una idea de *desventaja* (113); pronto la afina para comparar lo que pasa al formar pares (122), y va encontrando poco a poco expresiones:

- *se balancean las oportunidades* (123),
- *una pareja del cincuenta por ciento* (150);

después de un rato, con el segundo tipo de problemas, recupera su estrategia:

- *la misma cantidad que sobran* (229),
- *está la misma proporción guardada* (230)

(aunque la estrategia de las "parejas", de J, encuentra su mejor expresión en boca de M (127)).

Con respecto a la espontaneidad y autenticidad del lenguaje, otro aspecto interesante es la gran variedad de expresiones que surgen, en el curso de la discusión, para una misma idea (5). Solamente en la entrevista al binomio J-M, para la idea correspondiente a una probabilidad de 0.5, se dieron las expresiones: *cartas emparejadas* (129), *estar emparejado (al azar)* (205, 227), *todas serían pareja* (130), *ahí está balanceado* (221), *hay una a una* (610), *tanto en A, tanto en B* (221), *estar a (o al) cincuenta por ciento* (129, 147), *el cincuenta, el cincuenta* (206), *estoy jugando al cincuenta* (237), *es el mismo riesgo* (207), *compartes el riesgo* (207), *hay igual número de probabilidades* (221), *hay igual número de posibilidades de sacar una que otra* (222), *es la misma proporción* (237).

### 5.1.3.2. INTERACCIONES

La entrevista doble o de binomio permite una interacción entre los dos sujetos que tiene aspectos interesantes. Por ejemplo, los sujetos van aportando no solamente términos sino también estrategias que finalizan siendo patrimonio común. Ocurre con frecuencia que después de una primera impresión ante un problema, los dos sujetos van cambiando juntos de idea (véanse el caso del binomio J-M en 129-131, el del binomio T-V en 327-328, y el del binomio W-Z en 928-930), y en este proceso la verbalización se enriquece. Asimismo, resaltan los casos en los que uno de los sujetos interpreta el pensamiento del otro, o redondea la idea en forma más explícita: por ejemplo, en el binomio J-M M interpreta una estrategia de J incorrectamente (123), y luego una correctamente (127-129), e incluso fueron los términos aportados por ella los que él utilizó desde ese momento para explicarse (134, 144, 220).

Otro aspecto interesante de la interacción, y sobre el que vale la pena detenerse un poco, es el proceso de "convencimiento". En todas las entrevistas de binomio hay casos en los que efectivamente uno de los sujetos convence al otro a través de una argumentación racional. Sin embargo, con frecuencia parece que lo

5. Esta variedad en las expresiones se puede asociar a la idea de sinonimia, que presentaremos en el apartado §5.2.1.

que lleva a los sujetos entrevistados a mantenerse en su posición o a dejarse convencer, no son tanto los argumentos que se manejan, sino una dinámica propia de la relación entre ellos y una especie de diálogo implícito que se va presentando de manera paralela al diálogo explícito.

Por ejemplo, en el binomio T-V, ocurre básicamente que V habla siempre después de T. El habla mucho más, cantinlescamente pero habla. T habla menos y dice mucho menos, justifica menos sus ideas. La constante entre ellos es que V trata de veras de convencer a T, con argumentos racionales, aunque sean como éste:

- *sin en cambio aquí yo tengo tres cartas y puedo resolver que si tomo una negra, en cambio allá tengo más blancas y...* (318)

pero T prácticamente no se deja convencer nunca, ni cuando V descubre la operación de agregar una blanca y una negra (332), ni siquiera cuando V se da por vencido con los argumentos y suplica:

- *una vez en tu vida dame la razón* (334).

Por su parte, cuando yo le pido a T que convenga a V, la mayor parte de las veces no esgrime argumentos sino presiones:

- *te va a convenir* (317),
- *aquí te ganas el viaje... la noche de bodas, si quieres...*
- *a lo mejor lo resientes* (320),
- *mira, mejor en B* (324), *convéncete* (330),

aunque a veces trata de entrar a la argumentación:

- *aquí también tienes las... bueno, menos una opción... bue... siempre hay más... bueno, a mí me da igual, cualquiera de las dos* (336).

T juega a no dejarse convencer, V juega dos veces a sí dejarse convencer, pero son falsos convencimientos (339, 350).

En la entrevista al binomio J-M hay una posible interpretación de la interacción y los procesos de convencimiento entre los dos sujetos, que se encuentra en el párrafo §5.1.3.3. Evidentemente no es la única lectura posible de la entrevista, pero puede ser un buen ejemplo de cómo una lectura entre líneas permite entender aspectos de un diálogo que las puras palabras no dejan traslucir.

Las dinámicas que he comentado en los binomios T-V y J-M tienen una gran relación con el hecho de que en ambas entrevistas los sujetos eran de distinto sexo. En particular, en ambas hubo con frecuencia juegos de doble sentido; esto operó a favor en la primera entrevista y en contra en la segunda, donde la insistencia en el doble sentido fue un obstáculo a la comunicación y la argumentación.

Evidentemente, estos efectos de interacción inter-sexual no ocurren en el binomio W-Z. Sin embargo, a pesar de que los sujetos W y Z (ambos de sexo masculino) se mostraron particularmente respetuosos uno del otro durante la entrevista, pueden notarse entre ellos una dinámica en la que W es más seguro y Z más inseguro, y en la que hay convencimientos "verdaderos" (930, 941, 949) y convencimientos "falsos" (956).

Por otro lado, es evidente que también yo misma, como entrevistadora, tuve efectos de interacción con los sujetos, y que es-



to puede ocurrir tanto en las entrevistas individuales como en las de binomios. Mencionaré sólo un ejemplo de cada caso.

- En la entrevista al binomio T-V, después de mi intervención: *No se vale darle al otro por su lado y de la respuesta B de T, V afirma A y no cambia de opinión ni porque ve que su argumento vale también para el lado B.*
- En la entrevista individual con el sujeto X la intervención de S: *Ahora sí me sacaste de onda desconcierta a la entrevistada: ¿Qué, ya estoy hecha bolas?*

### 5.1.3.3. UNA LECTURA PARALELA DE UNA ENTREVISTA DE BINOMIO

El binomio en el que se presentaron más interacciones entre los dos sujetos es, sin lugar a dudas, el binomio J-M. Como se recordará (6), ambos pertenecían a un mismo grupo en la UPN, y se les pidió que participaran porque eran un hombre (J) y una mujer (M) que solían estudiar juntos. Vale la pena agregar a la descripción que M era un poco mayor de edad que J, y que J era, además de estudiante, empleado de una mercería. En el curso de la entrevista fue evidente que había entre ambos una buena amistad, salpimentada con una dosis de pique juguetón. Como a todas las grabaciones de las entrevistas, yo he escuchado la del binomio J-M múltiples veces, y en alguna de ellas se me reveló repentinamente que el pique tenía algo de flirteo, y que no era sólo la manera de interactuar de los sujetos, sino una fuerza que podía intervenir en sus soluciones a los problemas planteados. Al escuchar nuevamente la grabación a la luz de esa revelación, me encontré con una entrevista casi totalmente diferente de la que había estado oyendo anteriormente: una entrevista en el curso de la cual los dos sujetos juegan reiteradamente un juego cíclico de interacciones personales.

No pretendo afirmar que esta interpretación de las interrelaciones en el binomio J-M es la única y verdadera historia de J y M, pero la presento aquí por mostrar que puede haber más de una lectura de lo que ocurre en las entrevistas, y que no podemos nunca estar completamente seguros de estar interpretando correctamente lo que dicen los sujetos. Si el lector desea seguir paso a paso la interpretación, puede ir consultando la transcripción de la entrevista en el Anexo 4; si no lo desea creo que esta pequeña "novela" es legible por sí sola.

El juego cíclico que yo veo consiste en lo siguiente: al principio de cada ciclo J propone casi tímidamente algo que difiere de lo planteado por M, M acepta condescientemente primero pero luego decide tomar las riendas y apabullarlo provocadoramente con argumentos, J se deja apabullar un poco pero luego reacciona despechado y hay un rato de desacuerdos airados hasta que M apacigua a J y el ciclo termina con una tregua, que dura hasta que empieza el nuevo ciclo.

6. Véase en el capítulo 2 el recuento del tercer experimento, en el apartado §2.2.3.

El primer ciclo abarca las primeras preguntas (en particular las 5, 6, 6.1, 6.2 y 6.3). J intenta expresar la idea que se convertirá posteriormente en su estrategia de "parejas" (122), es decir {R+} y {R-}. M habla por él, interpretándolo primero incorrectamente (123, 126) y luego correctamente (127), e incluso lo convence con los propios argumentos de J (128). Esto hiere el orgullo de J, pero aguanta hasta que M predice que él va a utilizar la estrategia de "parejas": *tu dirías que sería igual* (131). Que M lo prediga parece ya ser demasiado: ahí J se rebela y se va a la otra estrategia ({F+}) (132), a pesar de que no era originalmente la suya. M cede terreno: *en eso sí estoy de acuerdo, me acabas de convencer*. Cede tanto que propone un ejemplo del territorio de él, los botones de la mercería, y remata con un generoso y espléndido lógico. Tregua. Posiblemente después M siente que se le fue la mano un poco, que promovió ya demasiado acercamiento con J, y regresa a su ámbito, infantilizando con lagartijitas y arañas (133) para mantenerlo a distancia.

El siguiente ciclo, con varios pequeños ciclos internos, abarca las preguntas 7 a 21. J acepta sin discutir (134) la solución propuesta por M e incluso para defenderla tiene que recurrir a una nueva estrategia ({E-}) (135), pero ella lo abandona (136), le da la vuelta a todas las soluciones y estrategias ({N-}, {F+}, {R+}, {E-}) y termina depositando su confusión en S: *está muy complicado, maestra, ¿qué nos hizo?* (138)... Poco después llega la hora de los reclamos, que empieza con J (142): *caes en lo que yo estaba diciendo hace rato: a mayor cantidad... ({F+}) -- ¿Y entonces por qué a ti te da igual? -- ¿Y por qué a ti te... antes no la aceptaste?* Pero sigue la paliza a J, porque según él se mantiene: *sigo con mi misma treta: a mayor cantidad de negras... y M le demuestra que no: de acuerdo a lo que estás diciendo, tendrías que haber escogido ésta (por {R+})*. J calla, hasta la hora de la revancha, en que saca a colación las arañas (147) y además se hace el difícil: *tiene dos semestres y no lo logra (convencerme)* (148). De nuevo hay un contraataque de M, que le vuelve a interpretar su razonamiento (149, 150). Pero M termina cediendo terreno *me está convenciendo, me está convenciendo, a ratos me convence...* (203), y de nuevo lo obsequia, ahora con admiración: *pues tú eres más arriesgado* (204), de manera gratuita, pues J ni siquiera había manifestado en ese caso su opinión. El cae redondito: *¿yo? sí, yo sí me aviento*, pero todavía debe soportar una última andanada de argumentos terminantes (como no hay más) (205) hasta que termina cediendo: *bueno, no más porque aceptaste la otra* (206). Ahora la armonía y el acuerdo duran por siete preguntas más, incluso en la séptima J cambia de opinión porque ya *me está convenciendo de que compartamos el cuarto* (211): es la tregua.

El tercer ciclo dura de la pregunta 22 a la 28. En la pregunta 22 J consecuenta a M en una estrategia de ella (decidiéndose por el lado B con una estrategia {N-}), y el ciclo se desencadena con una provocación a J de S: *ahora el que está cambiando de*

bando eres tú (?), secundada por M: *Orale, ¿eh? ¿Te sabe algo?* (214). J reacciona, primero mansamente con un cambio de opinión: *me iría por B.... o me daría igual*. Pero M está ya lanzada: reincede en la provocación: *no, no, no, los hombres, nunca sabe uno ni para dónde tiran, y por si fuera poco menciona lo inmencionable: si estuviera aquí mi novio* (215). Entonces la reacción de J es casi violenta: se va inmediatamente al otro extremo: *yo diría que en A y hasta con desaire: ¿cómo la ves?*. Se debate un rato, hasta que se desdice: *yo piens... mejor... más bien, ésta nos quedamos me da igual* (219). Pero M no se mueve un ápice: *yo escojo B, digo, por favor*. Esta vez es J el que "propone" un descanso: al llegar a la pregunta 24 se pliega a una estrategia de M: *pues nos da igual* (221), y parece que ya se alcanzó la armonía pero a pesar de que J empieza la pregunta 25 con un tímido: *da igual, ¿no?*, M se deslinda, *¡con una estrategia de él! ({F+})* (223). La tregua llega de manera natural con la explicación del nuevo tipo de preguntas, y por un lapso de tres preguntas razonan juntos.

Un nuevo ciclo abarca las preguntas 29 a 34. En la pregunta 29, J desentierra brillantemente dos estrategias: {R+} (decisión "da igual") y {F+} (elección del lado A), y ambas contradicen la opinión de M (quien había elegido B). M no puede sostener su respuesta: *simplemente yo creo que me gustó, y punto* (229), y termina aceptando a regañadientes en todo caso el argumento de J ya con esa explicación, *¿no?, de que son el mismo número que sobra de blancas en las dos* (231). Parece que ha sido vencida, pero inmediatamente después agarra en falta a J, que dejó de ver su relación de parejas ({R+}) (232). J se ofusca un poco, pero después se mantiene firme en su estrategia {F+}. M también se mantiene firme. El acuerdo espontáneo y simultáneo de la pregunta 31 (233) no parece abrir una tregua sino un receso: la tensión sigue.

El último ciclo empieza en la pregunta 35, en que J de nuevo contradice a M (235), pero pronto cede (236). Sigue un intercambio de regalos: M usa una estrategia de J ({R+}) (237) y J retoma una estrategia abandonada de M ({N-}): *son poquitos, es más fácil* (238). M se lo reconoce, de nuevo abriendo espacio para el territorio de él: su mercería, y el acuerdo es total hasta el final.

#### 5.1.3.4. COMENTARIOS GENERALES

En términos generales, me parece que para los propósitos de este trabajo, la modalidad de entrevistas del método de interrogatorio estandarizado ha aportado mucha más información que la de respuestas escritas a cuestionarios aplicados en grupo o a equi-

7. Antes de esa provocación a J, yo le había hecho notar a M un cambio de estrategia, con el fin de ver si la nueva estrategia resistía la confrontación. La forma de la provocación a J fue ciertamente desafortunada de mi parte, pero no alcancé a apreciar la magnitud del error más que con esta lectura paralela: lo que hice fue una provocación con alcances que iban mucho más allá de la estrategia seguida.

pos de trabajo. Entre las entrevistas, es particularmente notorio que los sujetos entrevistados en binomio tienen una mayor fluidez de lenguaje y expresan con mayor naturalidad sus formas de pensar, al tratar de convencer a un compañero, que la que tienen los sujetos entrevistados individualmente al intentar darle una formalidad al discurso que me ofrecen a mí como entrevistadora. Puede entenderse este fenómeno si se considera que durante las entrevistas yo quedaba en una posición de autoridad que cohibía un tanto a los entrevistados, porque tengo mayor edad que ellos, porque soy profesora de la universidad en la que estudian y porque además era la persona que planteaba los problemas; por otra parte, en el diálogo con un "igual" cada sujeto se sentía más libre, aun si estaba yo presente. Esta mayor naturalidad significa para este estudio una mayor riqueza, puesto que permite interpretar con más facilidad y confianza los mecanismos mentales que sigue el sujeto para resolver los problemas que se le plantean. Aún así, pienso que dentro de cada tipo de entrevistas hay unas "más ricas" (el binomio J-M y el sujeto X) y unas "más pobres" (el binomio T-V y el sujeto I).

Sin embargo, el método de entrevista doble también tiene una serie de características que pueden resultar desventajosas con respecto a las entrevistas individuales, sobre todo el hecho de que los aspectos afectivos pueden imprimirles a las respuestas a los problemas planteados un sesgo especial. El mejor ejemplo de ello es tal vez el repentino cambio de opinión del sujeto J ante la mención del novio de M (215): si no se tiene en cuenta el aspecto afectivo, este cambio de opinión sería incomprensible desde el solo punto de vista analítico de las estrategias mentales utilizadas en la resolución de los problemas.

Es decir, aunque la entrevista doble proporciona una serie de condiciones muy favorables para la obtención de expresiones verbales acerca de las posibles estrategias de los sujetos ante los problemas planteados, debe tenerse en cuenta que la dinámica de convencimientos no necesariamente tiene que ver exclusivamente con los argumentos racionales explicitados.

A este respecto me interesa enfatizar que aunque en el planteamiento del estudio a los sujetos les dije que era importante que se convencieran uno a otro, el objetivo no era estudiar la fuerza de convicción de los argumentos, sino tener la mayor cantidad posible de expresiones verbales del mayor número posible de estrategias. Por ello, estos sesgos de dinámica relacional no sólo no afectan de manera negativa este estudio, sino que operan a favor, ya que en los "piques" y los "despechos" surgen respuestas que pueden canalizarse por la vía de la argumentación acerca de los problemas planteados. Por último, aunque el objetivo de este trabajo no es estudiar la dinámica de relación, tampoco puede dejarse de lado: hay algunas respuestas que no podrían entenderse si no se consideran dentro del marco de la dinámica relacional.

5.1.4. FORMA DE PRESENTACION DE LA INFORMACION

En todos los experimentos utilicé cuestionarios. Sin embargo, la mayoría de ellos difirieron en la manera con que presenté la información. Después del segundo experimento resultaron evidentes varios puntos al respecto:

- no convenía utilizar naipes como referentes;
- no convenía presentar la información "físicamente" (es decir, como lo hice en el primer experimento, mostrando los dos juegos de naipes en sendas manos);
- tampoco convenía presentar la información en el pizarrón (como lo hice en el segundo experimento).

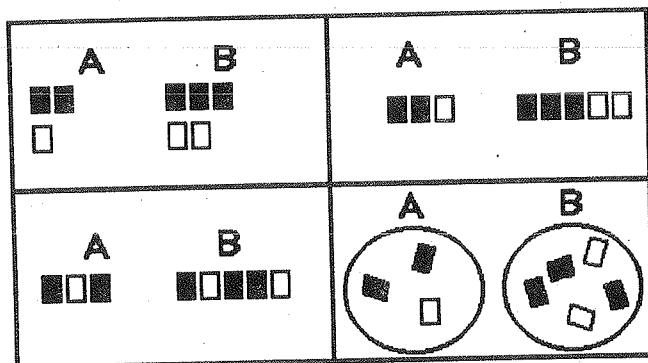
Debía, por lo tanto, diseñar no sólo el cuestionario para el tercer experimento, sino también la forma de presentación de las preguntas.

El tipo de errores comentidos por los sujetos en los experimentos anteriores (incluyendo, evidentemente, los de carácter "primitivo" mencionados en el apartado §4.5.2. del capítulo 4) me hizo pensar que no debía dar por hecho que los sujetos responderían de la misma manera ante un cuestionario en el que pudiera ver y contar por sí mismo los casos favorables, desfavorables y totales con una representación de las cartas, que ante uno que planteara la información con los números correspondientes a cada arreglo. El primer modo solamente permitiría plantear las preguntas con  $n_1$  y  $n_2$  "chicas", mientras que el segundo permitiría el planteamiento para casos totales "chicos" y "grandes". Por ello, el cuestionario debía incluir ambos, con preguntas de casos totales "chicos" también en el segundo modo, para poder detectar los eventuales efectos del modo de presentación.

Para el segundo modo sólo tuve que decidir que presentaría la información de todas las clases de números (es decir,  $f_1$ ,  $d_1$ ,  $n_1$ ,  $f_2$ ,  $d_2$  y  $n_2$ ), porque la presentación de sólo dos de ellas podría desfavorecer las estrategias de centración en la clase eliminada.

Sin embargo, el primero planteaba más problemas. Debía dibujar unas cartas, en cantidades correspondientes a los casos favorables y desfavorables, de tal modo que la imagen global no sugiriera o favoreciera ninguna estrategia en particular, pero que tampoco sugiriera ningún "orden" ni ningún "desorden" en particular (es decir, que no sugiriera el resultado de la "revoltura" a que se las iba a someter en el planteamiento teórico). Pensé en cuatro posibilidades, que ilustro para el arreglo (2,1)(3,2) en la figura de la siguiente página:

- a: disponer de cada lado (A y B) las cartas negras arriba y las blancas abajo (arriba a la izquierda en la figura);
- b: presentar para cada lado en una sola hilera las negras a la izquierda y las blancas a la derecha (arriba a la derecha en la figura);
- c: presentar las blancas y negras de cada lado "revueltas" en una sola hilera (abajo a la izquierda en la figura);
- d: mostrar, encerradas en un círculo distinto para cada lado, todas las cartas "revueltas" (abajo a la derecha en la figura).



Insisto en entrecomillar el término "revueltas" porque en las formas c y d no se trataba de hacer una ordenación aleatoria de las cartas sino de buscar intencionalmente en cada caso la presentación que mejor pudiera dar una idea de mezcla aleatoria<sup>(8)</sup>.

Para resolver este asunto, realicé una prueba de la presentación diagramática. Elaboré un pequeño instrumento de sondeo con tres preguntas planteadas con las cuatro formas gráficas distintas. Las tres preguntas fueron (2,1)(3,2), (1,3)(2,2) y (1,2)(2,4). El instrumento de doce preguntas así conformado, que se puede consultar en la parte final del Anexo 3, fue aplicado a un grupo de estudiantes de Estadística<sup>(9)</sup>; además se sometió de manera individual y comentada a algunos estudiantes de nivel medio superior. Después de un análisis cualitativo de la información obtenida, opté por la forma c de presentación, puesto que aparentemente las opciones a y b, más ordenadas, sugieren más fácilmente estrategias de relación que c y d, y entre éstas últimas dos la que mejor sugiere la idea de mezcla aleatoria es la c.

Después de esta pequeña prueba de presentación diagramática, la parte de cartas del cuestionario C3 fue presentada con la forma c mencionada.

Esta forma de presentación no fue utilizada en el cuarto experimento, en el que regresé a una representación exclusivamente numérica. Sin embargo, los resultados, en cuanto a la forma de presentación, no me parecieron satisfactorios<sup>(10)</sup>, y en el quinto experimento regresé a la forma elegida para el cuestionario C3, porque aunque ya no pesaba tanto el objetivo de poner a prue-

8. Véanse las heurísticas de representatividad estudiadas por Kahneman y Tversky, que presenté en el capítulo 1 (§1.2.3.2a).
9. De tercer semestre de la carrera de Educación Indígena (plan 79).
10. Un ejemplo de confusión causado por la forma de presentación del cuestionario C4 se vio ya en el capítulo 4 (§4.5.2.2).

ba el paralelismo de los sistemas de categorías para preguntas y respuestas, era el que mejor información había proporcionado.

Por otra parte, en los experimentos tercero, cuarto y quinto los sujetos contaban con un material concreto (fichas marcadas como favorables y desfavorables), que podían manipular. Esta opción le permitía al sujeto mover y acomodar las cartas para formar "parejas", o para establecer relaciones de tipo ENTRE o de tipo DENTRO, como en el siguiente ejemplo:

- (acomoda las cartas en paquetitos de negra, blanca, negra: uno en S1 y dos en S2) *tendría estas dos probabilidades más aquí de que fuera negra* [(2,1)(6,2):S2] (X; C6,20.1)

Incluso sin el material, la propia presentación en cartas de las preguntas en los cuestionarios C3 y C6 permitió también efectuar estas operaciones con la representación gráfica, ayudándose con la mano (tapando, señalando, uniendo, incluso "agregando"), como en los siguientes ejemplos:

- *fuera lo mismo si allí fueran cuatro negras y aquí la mitad de las negras* [(2,1)(3,2):S1] (T; C3,18)
- *es lo mismo, no más que aumentadas las cartas: aquí tienes dos y una blanca, aumentale una negra y otra blanca, pues es lo mismo* [(2,1)(3,2):-] (V; C3,18/2)

Aunque teóricamente estas operaciones mentales se podrían hacer sin ninguna clase de material a la mano, me parece claro que el tener el material o por lo menos su representación gráfica ayuda considerablemente a algunos de los sujetos, incluso si éstos son, como en el caso de esta investigación, adultos.

## 5.2. OBSERVACIONES ACERCA DEL USO DEL LENGUAJE

En la tercera línea de trabajo de la triple hélice metodológica presentada en el capítulo 2, aparecen, además de los métodos de interrogación de los sujetos, los de descifrado de las respuestas obtenidas. Entiendo por "descifrado" el proceso mediante el cual intento comprender lo que dice el sujeto y, a través de lo que dice, cómo piensa. El descifrado de una respuesta es lo que va a permitir interpretarla, asignarle una estrategia.

En parte, el descifrado de las respuestas debe tener en cuenta el tipo de condiciones en las que se efectuó la interrogación, en particular si las respuestas fueron verbales o escritas. Pero hay otros aspectos del descifrado que se relacionan mucho más con la manera en que el sujeto utiliza el lenguaje que con la manera en que se obtuvo la información.

Efectivamente, no siempre resulta evidente qué estrategia es la que está entrando en juego en una respuesta determinada: la información que da el sujeto acerca de la manera en que está resolviendo el problema puede ser insuficiente o ambigua. Muchas de estas ambigüedades están relacionadas con el uso que hace el sujeto de las herramientas de expresión, tanto de las herramientas

"técnicas" relacionadas con la aritmética y con el uso de un lenguaje hasta cierto punto "especializado", como de la herramienta general de expresión, el lenguaje común.

En efecto, el proceso de interpretación consiste en un intento de conocer y modelar la manera de pensar del sujeto, los elementos del problema que le parecen sobresalientes, lo que lo lleva a utilizar una u otra estrategia. Pero el modo que hay de acceder a ello es a través de la expresión utilizada por el propio sujeto, y la forma que ésta adopte se supedita a su vez al uso que haga el sujeto del lenguaje. En el proceso de interpretación se hizo evidente desde el principio que este uso del lenguaje era bastante complejo, y que eso era causa de que muchas de las respuestas quedaran oscuras.

Por ello consideré importante detenerme a estudiar someramente la herramienta de expresión en sí: el uso de términos "técnicos" importantes, el uso del lenguaje en las argumentaciones, el uso de los números y la expresión de cálculos. Para realizar el estudio en la parte de uso de números y de expresión de cálculos había que aplicar un poco de aritmética, pero para la parte del uso del lenguaje en las justificaciones se hizo necesario recurrir a la herramienta de análisis del lenguaje: la lingüística.

Aunque esta herramienta es muy poco usual en los estudios acerca de los razonamientos probabilísticos, hay varios autores que reconocen la necesidad de abordarla: entre otros, John Cohen (1957a), Falk et al. (1980), Green (1983), Garfield y Ahlgren (1988), y muchos más lo han hecho en el contexto general de las matemáticas. Todos estos autores insisten en tomar en cuenta las dificultades de los sujetos con el uso del lenguaje a nivel de expresión, y también a nivel de comprensión<sup>11</sup>. Walkerdine (1982, pág. 129) es enfática al respecto: «el razonamiento abstracto requiere una reflexión conciente de la estructura lingüística del discurso», puesto que en él «la veracidad se determina en términos de las relaciones internas de la afirmación misma»; afirma que «el razonamiento formal es un acto realizado sobre el lenguaje», y que «por eso no es sorprendente que muchos psicólogos encuentren resultados similares entre niños y adultos analfabetas o sin escolaridad. No hay bases para inferir que los resultados de problemas de razonamiento muestren que este tipo de genes son infantiles o subnormales». Es decir, para Walkerdine hay una estrecha relación entre la dificultad de la expresión y del uso del lenguaje por una parte y la dificultad con el razonamiento abstracto (o el pensamiento formal) por otra, y los resultados que yo encuentro parecen apoyar esta afirmación, puesto que aunque los sujetos con los que trabajo son estudiantes universitarios (y no "adultos analfabetas o sin escolaridad"), tienen ambas dificultades: muchas dificultades con el razonamiento abstracto han quedado manifiestas en el capítulo 4, y en esta sección se mostrarán algunas dificultades de los sujetos con el uso del lenguaje.

11. Cf. un comentario de Garfield y Ahlgren (1988, pág. 55): «un factor importante en los juicios erróneos es una percepción errónea de la pregunta que se está haciendo».



Ciertamente, ni yo soy lingüista ni la finalidad de este trabajo es emprender un estudio lingüístico de las maneras de expresión de los sujetos. Sin embargo, el breve análisis que intentaré mostrará cómo hay una falta de precisión en el uso del lenguaje utilizado por muchos de los sujetos: los sujetos utilizan distintas palabras para referirse al mismo concepto, pero también la misma palabra para referirse a distintos conceptos. Esta falta de precisión lleva con frecuencia a dificultades en la labor de interpretación del modo que tiene cada sujeto para resolver un problema dado, como se verá en el capítulo 6.

Así, después de un primer apartado dedicado a la presentación de algunos fundamentos de la lingüística, en esta sección trataré en tres apartados el uso del lenguaje: los apartados estarán dedicados respectivamente a los términos "técnicos", a los conectivos utilizados en las argumentaciones y a algunos usos de expresiones. En cuanto al otro lenguaje, el aritmético, será tema de análisis de la siguiente sección. En ambas secciones me ocuparé tanto de las respuestas escritas como de las verbales. Por otra parte, como en ambas mi interés estará centrado en la presentación de expresiones, por brevedad he suprimido las partes de la justificación que corresponden más al razonamiento seguido por los sujetos que a la expresión de lo que ejemplifico cada vez.

### 5.2.1. UNA INCURSION EN LA LINGÜISTICA

En este apartado plantearé las nociones fundamentales de la lingüística que utilizaré posteriormente como herramienta de análisis. Aclararé también el ámbito en el que estudiaré cada una de ellas, dentro del contexto de la investigación que presento.

Por último, especificaré los recursos que utilizaré para distinguir los términos y los conceptos.

De acuerdo con la terminología introducida por Ferdinand de Saussure, una palabra tiene dos componentes: un significado y un significante. El significado es el concepto al que se refiere la palabra, y el significante, que yo llamaré término <sup>(12)</sup>, es el "molde acústico", los sonidos que conforman la palabra (o las letras cuando la palabra es escrita). Es frecuente que haya varios significantes para un mismo significado, es decir que haya varios términos para referirse a un mismo concepto o a conceptos muy relacionados: esto es lo que se denomina sinonimia <sup>(13)</sup>. También es frecuente que un solo significante tenga varios significados, es

12. Este uso de la palabra término difiere del que le dan los lingüistas, puesto que para ellos un término es lo mismo que una palabra. Estoy así identificando el todo (palabra) con una de sus partes (significante), lo que no es muy ortodoxo pero sí más cómodo para lectores (y escritora) no lingüistas.

13. Por ejemplo, son sinónimos los términos nota, apunte, acotación, observación, inscripción, notación, anotación, apuntación, etc.

decir que haya varios conceptos asociados a un término: a este fenómeno se le llama polisemia (14).

Una de las características del lenguaje "común" (es decir, el que hablamos cotidianamente el común de los mortales) es su polimorfismo: esto es, el hecho de que en el habla existen muchas formas para un mismo fenómeno: mucha sinonimia, mucha polisemia y otras formas de usos variados del lenguaje. Por otro lado, los lenguajes "técnicos" buscan reducir el polimorfismo, evitando la proliferación de sentidos para un mismo término y de términos para un mismo sentido. Se llama precisión al uso de un solo significado para cada significante y de un solo significante para cada significado. Así, cuando en matemática (que es un lenguaje técnico) se dice "multiplicado por" se entiende que se está efectuando una sola y muy determinada operación aritmética, la de multiplicación.

Destaco esta diferencia entre los dos tipos de lenguaje porque resulta particularmente significativa para los experimentos reportados en este trabajo. En efecto, la mayoría de los sujetos (tanto los que se expresaron por escrito como los entrevistados) se manejaron en un campo intermedio entre el lenguaje "común" y el "técnico": usaron un híbrido que no tiene la flexibilidad del lenguaje común natural ni la precisión del lenguaje técnico. Esto se debe tal vez a que, a pesar de que insistí en que expresaran las cosas como las veían, como se les ocurrieran, etc., muchos percibieron que los problemas planteados tenían algo que ver con "probabilidad", o sea con matemáticas (15), a lo que pudieron haber respondido utilizando de la "mejor" forma posible el lenguaje matemático adquirido en los años de escuela: la sola intención de utilizar una terminología técnica ya coloca al sujeto fuera del lenguaje común. Es un intento lego y fracasado de uso de un lenguaje técnico, que puede ameritar un estudio lingüístico más profundo del que aquí intentaré. Sin embargo, a primera vista, el aspecto más sobresaliente del lenguaje utilizado por los sujetos es la falta de precisión: diríase que es un lenguaje técnico apó-

14. Por ejemplo, el término nota puede referirse a los conceptos de señal, anotación, calificación, reprobación (como en una "nota mala"), prestigio (como en un restaurante "de nota"), comunicación (como en una "nota de prensa"), signo musical (como en "la nota sol"), explicación (como en esta nota de pie de página...).

15. Aunque los sujetos no hubieran percibido que los problemas trataban de Probabilidad, el solo contexto de interrogación ya indicaba que todo el asunto tenía algo que ver con las matemáticas: en los experimentos primero, segundo y cuarto el cuestionario fue aplicado por mí, que era la profesora de Estadística de los grupos, en el tercero las entrevistas se realizaron en un cubículo de la Academia de Matemáticas y Estadística, ante la presencia de la maestra de Matemáticas de los sujetos, y aun en el quinto, donde traté de matizar estos aspectos efectuando las entrevistas en un área "neutral" (salas acondicionadas de la biblioteca), los sujetos sabían que soy profesora de la Academia de Matemáticas y Estadística.

crifo que hereda del lenguaje común un polimorfismo insostenible en un lenguaje técnico legítimo.

Así, los sujetos considerados en estos experimentos suelen utilizar dos términos diferentes para referirse al mismo concepto (sinonimia), o bien el mismo término para referirse a dos conceptos diferentes (polisemia), aunque también es cierto que con frecuencia utilizan términos diferentes para referirse a conceptos diferentes (precisión). Lo que sería más "deseable" para efectos de la interpretación de las respuestas es que el lenguaje de los sujetos fuera preciso; sin embargo, dentro de las imprecisiones son mucho menos graves las sinonimias (que se pueden catalogar como una profusión innecesaria) que las polisemias (en las que los distintos conceptos asociados a un mismo término dan lugar a dudas y confusiones para la interpretación) (16).

Si se deseara hacer un estudio profundo y sistemático de la sinonimia, la polisemia y la precisión en las expresiones obtenidas, se debería distinguir tres niveles:

- 1º en un primer nivel "general" se estudiaría estos tres fenómenos lingüísticos en la totalidad de respuestas obtenidas, independientemente de quién las emitió;
- 2º en un segundo nivel "dentro de individuos" se podría ver cómo se manifiestan la sinonimia, la polisemia y la precisión en las distintas expresiones de cada sujeto, independientemente de la respuesta;
- 3º en un tercer nivel "dentro de respuestas" se enfocaría exclusivamente lo que ocurre al interior de cada una de las respuestas emitidas (17).

---

16. Al respecto me parece muy importante que el estudiante de matemáticas tenga conciencia de este fenómeno, y aplaudo las observaciones de Beyth-Marom y Dekel en su libro de texto (1985, págs. 16 a 18): le advierten al estudiante que «las palabras ambiguas son palabras con significados múltiples», y especifican los dominios en los que son útiles («las expresiones vagas o ambiguas pueden echar a andar la imaginación de quien escucha, ocultar información o evitar conflictos», como en literatura, publicidad, y para utilizar eufemismos corteses o políticos), pero también advierten que hay dominios en que sólo causan malos entendidos: «se debe llegar a un acuerdo sobre la definición de los términos desde el principio. Después de un acuerdo así, un debate puede ser fructífero e interesante. Un debate basado en términos vagos y ambiguos ni tiene sentido ni es productivo».

17. Desde un punto de vista lingüístico estricto, la sinonimia y la polisemia sólo se refieren a los niveles 2º y 3º, o sea cuando es un solo sujeto el considerado. Sin embargo, yo haré un uso un tanto laxo de los términos "sinonimia" y "polisemia", extendiéndolos también al nivel 1º, que incluye a todos los sujetos. Esto se debe a que mi interés se centra en cómo se expresan los sujetos: obedece a la necesidad de comprender las expresiones (respecto al tipo de problemas elegido) de cualquier sujeto (de la población considerada).

Los tres niveles tienen efectivamente razón de ser en la población considerada, puesto que hay casos de sinonimia en cada uno:

- 1º cuando diferentes sujetos utilizan varios términos diferentes para referirse a un solo concepto,
- 2º cuando un sujeto usa diferentes términos para un solo concepto en varias respuestas,
- 3º cuando una sola respuesta incluye varios términos que se refieren al mismo concepto;

y casos de polisemia en cada uno:

- 1º cuando diferentes sujetos utilizan un mismo término para referirse a diferentes conceptos,
- 2º cuando un sujeto utiliza un solo término con diferentes significados en diferentes respuestas,
- 3º cuando en una sola respuesta aparece un mismo término refiriéndose a varios conceptos distintos.

En cuanto a la precisión, su ocurrencia en el nivel 1º es trivial:

- 1º cuando diferentes sujetos utilizan términos distintos para referirse a conceptos distintos;

lo que sí merece observarse es que ocurre también:

- 2º cuando un sujeto utiliza términos distintos con significados distintos en diferentes respuestas,
- 3º cuando en una sola respuesta aparecen términos distintos, cada uno refiriéndose a un concepto distinto.

Sin embargo, yo no haré un estudio tan minucioso (18): he prescindido del nivel intermedio (el nivel 2º, "dentro de individuos"), incorporándolo al 1º ("general"). Es decir, manejaré solamente los niveles:

"entre respuestas" (1º y 2º), y  
"dentro de respuestas" (3º).

Esta cancelación obedece, además de a la necesidad de no sobrecargar la presentación, a la precepción de que un "sujeto" no es en este estudio una entidad suficientemente estable desde el punto de vista lingüístico. Efectivamente, muchos sujetos, en el curso del cuestionario que resuelven, van cambiando de estrategias y de terminología, por lo que puede haber tanta variabilidad entre las respuestas que da un mismo sujeto al principio y al final del cuestionario como la que hay entre diferentes indivi-

18. Si hubiera emprendido el estudio minucioso a los tres niveles ("general", "dentro de individuos" y "dentro de respuestas"), tendría los siguientes ocho tipos: sinonimia entre individuos, sinonimia dentro de individuos entre respuestas, sinonimia dentro de respuestas dentro de individuos; polisemia entre individuos, polisemia dentro de individuos entre respuestas, polisemia dentro de respuestas dentro de individuos; precisión dentro de individuos entre respuestas, precisión dentro de respuestas dentro de individuos.

duos (19). Por ello, he decidido tratar las diferentes respuestas que da un mismo sujeto como si fueran de sujetos diferentes (nivel "entre respuestas"). La sinonimia y la polisemia en el sentido más estricto quedan restringidas al otro nivel ("dentro de respuestas"), puesto que en una misma respuesta hay una "instantánea" de un sujeto que se está "moviendo" de respuesta en respuesta (20).

Para distinguir los conceptos de los términos utilizaré los siguientes recursos tipográficos:

- los conceptos o significados aparecerán entre comillas simples; por ejemplo:  
  'extracción'
- los términos o significantes utilizados por los sujetos aparecerán subrayados; por ejemplo:  
  chance

### 5.2.2. CONCEPTOS Y TERMINOS RELACIONADOS CON LA PROBABILIDAD

La interpretación de la estrategia seguida por un sujeto se basa en el proceso de descifrado de sus respuestas. Y uno de los puntos cruciales del descifrado radica en los términos "técnicos" utilizados por el sujeto y en los conceptos asociados a ellos. Por ello es fundamental saber cómo expresan los sujetos los conceptos de 'probabilidad' o 'proporción'; o a qué se refieren cuando utilizan los términos probabilidad, o proporción, o cantidad. Desde el capítulo anterior, el lector debe de haber observado que no hay una correspondencia biunívoca entre los conceptos y los términos, sino que la 'probabilidad' es expresada por los sujetos por muchos más términos que probabilidad y que probabilidad puede significar mucho más que 'probabilidad'. Hay, pues, usos sinónimos y polisémicos para estos conceptos y términos en el lenguaje que utilizan los sujetos estudiados, que dificultan notablemente el proceso de interpretación de las respuestas: a su presentación dedicaré este apartado.

He elegido para esta presentación solamente los conceptos y los términos más relevantes en la situación problemática trabajada: es decir, los relativos a la probabilidad y a las estrategias utilizadas. Aún así, no pretendo presentar una sucesión estructurada de conceptos ni de términos: sólo he rescatado aquellos que plantean más problemas para la interpretación, que son justamente los que plantean más casos de sinonimia o de polisemia.

19. De hecho, podría decirse que efectivamente el sujeto no es el mismo al principio y al final del cuestionario, sino que el propio hecho de enfrentarse a las preguntas lo ha hecho evolucionar de alguna manera en el terreno cognoscitivo. Visto así, lo extraordinario sería que su lenguaje no reflejara el cambio.

20. Cuando importe recuperar el nivel "dentro de individuos" en el análisis del nivel general haré una observación específica.

Mostraré una amplia variedad de ejemplos de sinonimia entre y dentro de respuestas, polisemia entre y dentro de respuestas, y precisión dentro de una sola respuesta (puesto que, como dije arriba, la precisión entre respuestas es trivial). Debo resaltar que en este recorrido mi objeto de estudio serán las respuestas consideradas como "items" aislados y no los individuos, y que los fenómenos que observo ocurren tanto en las respuestas escritas como en las verbales.

En los párrafos dedicados a la sinonimia veré ejemplos de sinónimos para los siguientes conceptos:

- 'probabilidad' (de sacar negras o blancas)
- 'diferencia de negras menos blancas'.
- 'cantidad' (de cartas, de negras o de blancas)
- 'cartas' (o canicas)

Y en los párrafos dedicados a la polisemia veré ejemplos de usos polisémicos de los siguientes términos:

- probabilidad, posibilidad, proporción, oportunidad, equilibrio.

Conviene pues definir lo que comprenderé por los conceptos entrecomillados que aparecerán en este apartado:

#### G L O S A R I O

- 'cantidad' (de cartas, de negras o de blancas): el número de cartas ( $n_j$ ), o de negras ( $f_j$ ), o de blancas ( $d_j$ )
- 'cartas': los objetos de referencia
- 'diferencia de negras menos blancas': la resta o diferencia  $r_j = f_j - d_j$
- 'extracción': la acción y el efecto de extraer una carta de un conjunto de cartas o una canica de una bolsa
- 'lado': el lado (A ó B) correspondiente a un espacio muestral ( $S_1$  ó  $S_2$ )
- 'posibilidad': lo que hace que se pueda extraer una carta negra de un conjunto, o la existencia de al menos una negra en el conjunto
- 'probabilidad': aquí extenderemos el concepto de probabilidad en el sentido de la definición clásica de "casos favorables sobre casos posibles", y abarcaremos también la probabilidad en sentido intuitivo, es decir, aquello que lleva al sujeto a decidirse a favor o en contra de una u otra elección (el espacio muestral  $S_1$  o el espacio muestral  $S_2$  o ninguno o cualquiera de los dos)
- 'proporción': la proporción en sentido matemático, es decir la igualdad de dos cocientes

En los casos de sinonimia presentaré uno o varios ejemplos de cada uno de los términos que pueden corresponder a cada significado; en los de polisemia, uno o varios ejemplos de cada uno de los significados que puede adquirir cada término entre los sujetos. Algunas respuestas que me han parecido especialmente importantes aparecen como ejemplos en los listados de sinonimia y en los de polisemia. Los usos que me han parecido particularmente llamativos por uno u otro motivo aparecen en *itálicas subrayadas*.

### 5.2.2.1. SINONIMIA EN DIFERENTES RESPUESTAS

Entre los conceptos que más sinónimos tienen en el conjunto de respuestas están 'probabilidad', 'diferencia de negras menos blancas', las diferentes 'cantidades' y las 'cartas'. Veamos qué terminos utilizan los sujetos de este estudio para referirse a estos conceptos.

#### a) El concepto de 'probabilidad'

El concepto de probabilidad intuitiva encuentra múltiples expresiones. Antes de enlistarlas, reproduzco aquí una manifestación de la duda que suele existir en los sujetos acerca de cómo expresar ese concepto:

- *hay más probabilidad aquí, porque allá, por ejemplo, hay más probab... posib... probab... probabilidad de que...*  
[(1,3)(2,6):S1] (V; C3,4/3)

Los dos términos en duda en el ejemplo anterior, *probabilidad* y *posibilidad*, son ciertamente dos de los sinónimos más frecuentes para el concepto, pero la variedad es grande: *proporción, chance, opción, oportunidad, riesgo, acierto, certeza, seguridad, porcentaje, índice...* Salvo los últimos términos de la lista, todos ellos pueden aparecer en singular o en plural, o en construcciones compuestas como en el siguiente ejemplo:

- *igual número de probabilidades* [(1,2)(2,4):-] (Jua; C1,8)

He aquí ejemplos de uso de cada uno de estos términos en el sentido de 'probabilidad':

#### probabilidad(es)

- *es más la probabilidad de no equivocarse* [(2,0)(4,1):S1] (Mab; C2,14)
- *hay mayor probabilidad* [(2,1)(3,1):S2] (Ang; C1,15)
- *existe una probabilidad similar para sacar negra*  
[(2,1)(4,2):-] (Als; C2,4)
- *tiene las mismas probabilidades de salir o no*  
[(1,3)(2,2):S2] (May; C1,9)
- *... en probabilidades están las dos a igual probabilidad de que salga, pero en cantidades es mejor S1*  
[(12,12)(14,14):S1] (X; C6,36)

posibilidad(es)

- hay un 100% de posibilidades de que saque una negra [(0,2)(2,0):S2] (Map; C2,13)
- la misma posibilidad [(1,1)(1,2):=] (Bet; C2,16)
- tengo más posibilidad de ganar... [(2,1)(3,2):S2] (V; C3,18/1)

proporción

- ...tienen la misma proporción en cuanto a probabilidades [(2,2)(4,2):=] (Fau; C1,14)

chance

- más negras, más chance [(1,3)(2,2):S2] (Ter; C1,9)
- hay el mismo chance en los dos porque hay más de una carta negra en cada lado [(2,1)(3,1):=] (Bla; C2,1)

opción

- aquí tienes más opción de gane... [(1,5)(10,14):S2] (V; C3,30)
- existe mayor opción de que salga negra en S2 [(1,3)(2,6):S1] (Q6; C4,11)

oportunidad

- menos cartas más oportunidad [(1,2)(2,4):S1] (Ter; C1,8)
- hay mejor oportunidad de sacar el premio en S2 que en S1 [(2,2)(3,1):S2] (Q6; C4,1)

riesgo

- tienes el riesgo de que te lo puedas sacar [(1,2)(2,4):=] (T; C3,12/2)
- aquí compartes el riesgo, en cambio allá aumenta más el riesgo de que sea blanca [(2,2)(2,3):S1] (J; C3,14)

Otros sinónimos: acierto, certeza, seguridad, índice

- el acierto en el premio será mayor [(1,2)(3,5):S2] (Q6; C4,7)
- tienen la misma certeza [(3,4)(4,3):=] (Q6; C4,3)
- es más seguro... [(3,2)(5,1):S2] (Q6; C4,4)
- existe un porcentaje de que no se saque la negra en primera instancia [(1,2)(2,4):=] (Jai; C1,24)
- puede haber un mayor índice de sacar una negra [(1,2)(2,4):S1] (Bea; C1,8)

## b) El concepto de 'diferencia de negras menos blancas'

La 'diferencia de negras menos blancas' es un concepto estrechamente ligado con las estrategias de resta {R+} y {R-}, que son estrategias de difícil expresión. Parte de la dificultad de expresión está en la de la propia diferencia (<sup>21</sup>): parece que los sujetos buscan la manera de expresarla utilizando diferentes sinónimos: probabilidad, posibilidad, número, oportunidad, propor-

<sup>21</sup>. Otra parte de la dificultad radica en la comparación de las diferencias; al respecto véase el capítulo 6 (§6.2.3.2b).



ción... Como en el caso anterior, estos términos pueden estar usados en singular o en plural:

probabilidad(es)

- ahí sobran dos blancas, y aquí nada más te sobra una... hay más probabilidades de NO allá... [(2,3)(3,5):S1] (M; C3,6.1)
- ... por una diferencia de blanca, acá ya son a dos probabilidades [(3,2)(5,3):S2] (X; C6,3)

Obsérvese que en el segundo de estos ejemplos aparece el término diferencia; sin embargo, aunque el sujeto puede estar utilizando el término en el sentido que yo lo uso, es decir la diferencia de negras menos blancas (que sería en S1:  $r_1=3-2=1$ ), me parece más verosímil que se refiere o bien a la diferencia entre ambas blancas ( $d_2-d_1=3-2=1$ ), o bien a la diferencia de diferencias ( $r_2-r_1=2-1=1$ ).

posibilidad(es)

- por lo menos son cuatro posibilidades de blancas... [(1,5)(10,14):S2] (J; C3,30)

número

- en ambos grupos hay igual número de negras [(2,1)(3,2):=] (Q1; C4,16)

oportunidad(es)

- allá hay dos oportunidades menos de que me salga la negra, y acá... una menos [(1,2)(2,4):S1] (X; C6,4)

proporción

- por la proporción... (en S1) son dos parejas (y sobra 1 blanca), (en S2) tres parejas, sobran 2 blancas) [(2,3)(3,5):S1] (J; C3,6.1)
- da igual por la misma desproporción que existe... predominan las blancas... [(1,2)(3,5):=] (J; C3,7)

Llama la atención en el último ejemplo el uso del término desproporción: más que a la diferencia propiamente dicha parece estarse refiriendo al signo de la diferencia, esto es, al hecho de que tanto  $r_1=2-1=-1$  como  $r_2=3-5=-2$  son negativas. Por cierto, este hecho sólo ocurre en las ubicaciones U3.1 y U3.2; aquí estamos en U3.2 ( $p_1=1/3$  y  $p_2=3/8$  son ambas mayores que 0 y menores que .5), lo que también está expresado con la observación de que predominan las blancas.

c) El concepto de 'cantidad'

También los números o cantidades están sujetos a sinónimos como probabilidad y proporción, que pueden aparecer en singular o en plural; otros sinónimos son, desde luego, cantidad y número. También se presentan expresiones compuestas como la siguiente:

- en ambos lados el grado de probabilidad es mayor tanto de negras como de blancas [(2,2)(3,3):=] (Q3; C4,15)

probabilidad(es)

- tengo la misma probabilidad tanto en blanca como en negra... [(1,5)(3,3):S2] (X; C6,5)

proporción

- hay las mismas cartas aunque en diferente proporción [(2,1)(4,2):=] (Pa2; C2,4)
- ... entre menos cartas haya, independientemente de la proporción... [(1,2)(2,3):S1] (M; C3,5)

cantidad

- ... a pesar de que es la misma cantidad de negras, y aquí son sólo una [(4,1)(4,2):S1] (J; C3,22.3)

número

- igual, no en número, pero en posibilidades igual [(2,1)(4,2):=] (X; C6,32)

## d) El concepto de 'carta(s)'

Por último, veamos algunas de las maneras con que los sujetos se refieren a los objetos de trabajo (cartas o canicas). Aparecen nuevamente como sinónimos los términos probabilidad y posibilidad, pero también otros como intento, opción, oportunidad, alternativa, elemento, y ciertamente, carta. Todos ellos pueden aparecer en singular o en plural, y en expresiones compuestas como las siguientes:

- es el mismo número de probabilidades para sacar tanto negras como blancas [(2,2)(2,3):S1] (Q3; C4,23)
- son más números de cartas con color negro [(2,1)(3,1):S2] (Bet; C2,1)

probabilidad(es)

- ..., allá nada más tengo una probabilidad de que salga la negra [(1,5)(3,3):S2] (X; C6,5)
- aquí hay tres probabilidades que no sea y allá cuatro: aquí es menos la cantidad de probabilidad de que salga blanca [(2,3)(3,4):S1] (X; C6,10)

posibilidad(es)

- aquí tengo DOS posibilidades de que sean negras, contra cuatro... [(1,3)(2,4):S2] (M; C3,35)

intento(s)

- menos posibilidad de equivocarme en dos intentos [(1,1)(1,2):S1] (Rub; C1,10)

opción(opciones)

- hay cuatro opciones de tener una negra [(2,0)(4,0):S2] (Con; C1,12)
- tengo más opciones [(2,2)(3,3):S2] (V; C3,24)

oportunidad(es)

- hay una sola oportunidad para equivocarme y en el otro lado dos [(2,1)(3,2):S1] (Rub; C1,16)
- ...aquí tengo dos oportunidades de negra, contra una aquí... [(1,2)(2,4):S2] (M; C3,12/2)

alternativa(s)

- sólo son dos alternativas y allá hay tres [(1,1)(1,2):S1] (Ang; C1,10)

elemento(s)

- tiene más elementos, aunque allá sean igual: 50% de que salga tanto blanca como negra, y aquí hay más negras [(2,2)(4,2):S2] (O; C6,21): elementos = 'cantidad de negras'
- tiene menos elementos... S2 tiene muchas más blancas que negras y S1 igual, pero tiene menos elementos [(1,2)(3,5):S1] (O; C6,24): elementos = 'cantidad de cartas'

(Obsérvese que los dos ejemplos recién presentados provienen del mismo sujeto)

carta(s)

- hay una negra y una blanca de dos cartas en cada lado [(1,1)(1,1):=] (Mal; C2,7)
- hay más probabilidad ya que hay dos cartas [(1,3)(2,6):S2] (Mab; C2,17)

(Obsérvese que en este último caso cartas = 'cartas negras')

## 5.2.2.2. SINONIMIA DENTRO DE LA MISMA RESPUESTA

Ocasionalmente llega a ocurrir que un concepto encuentre dos expresiones distintas dentro de una misma respuesta, lo que se puede considerar como un uso profuso (22) del lenguaje (demasiados términos para un solo concepto). Esto ocurre sobre todo con el concepto de 'cantidad', como se puede ver en el siguiente par de ejemplos:

'cartas' expresada por cartas y por probabilidades

- en seis cartas hay dos probabilidades de que escoja una negra [(1,2)(2,4):S2] (Ger; C1,8)

'cartas negras' expresada por probabilidad y por oportunidad

- hay una probabilidad y allá hay cero oportunidades [(1,1)(0,3):S1] (Mab; C2,11)

22. Profuso en el sentido de 'derroche o despilfarro'. Este caso es el más indiscutible de sinonimia.

## 5.2.2.3. POLISEMIA EN DIFERENTES RESPUESTAS

Como dije anteriormente, entenderé por "polisemia" el uso de un término con diferentes significados. Antes de abordar los términos más comúnmente utilizados de manera polisémica entre respuestas de diferentes individuos, presento aquí un ejemplo de polisemia en dos respuestas (por cierto sucesivas) de un mismo sujeto (nivel "entre respuestas, dentro de individuos"). Se trata del término total, utilizado en un caso para expresar la igualdad de probabilidades:

▪ los dos son el total de  $\frac{1}{2}$  [(2,2)(4,4):=] (Rub; C1,18) y a continuación para referirse a la probabilidad de uno de los espacios muestrales:

▪ allá el evento "negra" es un evento vacío y aquí es una probabilidad total de 1 [(0,2)(2,0):S2] (Rub; C1,19).

En cuanto al nivel general "entre respuestas", los términos más utilizados en diferentes sentidos son: probabilidad, posibilidad, proporción y oportunidad. Los ejemplos siguientes deben mostrar por qué afirmo que el hecho de que un sujeto utilice términos "técnicos" como probabilidad o proporción no implica que posee ni que maneja adecuadamente los conceptos correspondientes.

a) El término probabilidad

El sustantivo probabilidad es frecuentemente usado en plural: probabilidades, y también se presenta el adjetivo probable. En la lista de los significados de estas formas está el sentido de 'probabilidad' que sería de esperar, pero también están sentidos relacionados con la 'posibilidad' y con las 'cantidades' (incluyendo unas 'diferencias'):

## 'probabilidad':

- es más probable sacar dos de tres cartas que tres de cinco cartas [(2,1)(3,2):S1] (Raf; C1,16)
- allá tengo muy poca probabilidad de que salga la negra... [(1,7)(4,4):S2] (X; C6,16)
- tiene 50% de probabilidad [(1,1)(1,2):S1] (May; C1,10)
- hay menor probabilidad de sacar blanca [(2,1)(3,2):S1] (Als; C2,5)

## 'posibilidad'

- es la única probabilidad de que salgan negras son las dos cartas que hay [(0,2)(2,0):S2] (Mab; C2,13)

## 'cantidad'

- hay una probabilidad más de negra... [(5,2)(6,2):S2] (M; C3,9.1)
- tengo nada más una probabilidad de que sea blanca, y allá tengo dos... [(2,1)(5,2):S1] (X; C6,20)
- en seis cartas hay dos probabilidades de que escoja una negra [(1,2)(2,4):S2] (Ger; C1,8)
- ... aquí hay tres probabilidades que no sea y allá cuatro ... [(2,3)(3,4):S1] (X; C6,10)

'diferencia de negras menos blancas'

- hay una probabilidad más de que salga negra... una más de las cuatro blancas [(1,2)(5,4):S2] (X; C6,18,3)

Me parece importante recalcar cómo el término probabilidad, que es uno de los más relevantes para la investigación, carece de precisión: cuando un sujeto lo utiliza no se puede saber en cuál de sus significados lo está utilizando. Pero además, hay que destacar que tampoco el modo en que el sujeto usa el término da clave alguna sobre el significado que le está dando.

Por ejemplo, el uso del singular o del plural no da ninguna clave: el singular puede tomar el significado de 'probabilidad' y de 'cantidad':

- existe la misma probabilidad porque en las dos hay las mismas cartas pero en número diferente [(1,2)(2,4):=] (Pa2; C2,10)
  - los dos lados cuentan con la carta que queremos sólo que con diferente probabilidad [(1,1)(2,0):=] (Pa1; C1,6)
- y lo mismo ocurre con el plural:
- hay más probabilidades de que salga pues  $3/4 >$  que  $2/3$  [(2,1)(3,1):S2] (Rub; C1,17)
  - hay dos probabilidades de sacar una negra [(1,2)(2,4):S2] (MaB; C2,10)

Otro tipo de claves que podrían buscarse es en el uso del término en expresiones complejas, pero también en ellas hay polisemia: por ejemplo, la expresión número de probabilidad(es) puede referirse a una 'probabilidad':

- sería igual el número de probabilidad [(3,1)(6,2):=] (X; C6,14)
- o a una 'cantidad':
- hay más probabilidades más que allá de sacar negra y el mismo número de probabilidad "blanca" [(2,2)(3,2):S2] (Als; C2,12)
  - hay igual número de probabilidades de sacar una que otra, está balanceado... [(2,2)(3,3):=] (M; C3,24)

También la expresión una probabilidad puede referirse a una 'probabilidad':

- hay menos cartas y hay una probabilidad de que saque una negra [(2,2)(4,4):S1] (Gab; C1,18)

a una 'posibilidad':

- cuando menos existe una probabilidad [(1,1)(0,3):S1] (Als; C2,11)

o a una 'cantidad':

- hay una probabilidad... [(1,1)(0,3):S1] (MaB; C2,11)

Me permito por último llamar la atención sobre dos expresiones que me parecen curiosas:

- ...aquí es menos la cantidad de probabilidad de que salga blanca [(2,3)(3,4):S1] (X; C6,10)

- Si por el menor número de diferencia de probabilidad, sería mejor que nada más hubiera tres [(3,3)(4,4):S1] (X; C6,11)

La primera podría ser un pleonasma, puesto que en ella el término probabilidad puede estar siendo utilizado en el sentido de 'cantidad'; si no es así, tampoco es claro si cantidad de probabilidad es, a fin de cuentas, una 'cantidad', una 'probabilidad', o un 'valor de la probabilidad'. En cuanto a la segunda, es de nuevo un ejemplo en que el término diferencia no necesariamente se refiere a una 'diferencia'; es posible que aquí se refiera a las cartas "diferentes" de las deseadas, es decir que el menor número de diferencia de probabilidad no sea más que una menor cantidad de blancas.

#### b) El término posibilidad

El término posibilidad, también utilizado en plural (posibilidades), tiene usos aún más polisémicos que el término probabilidad; he aquí los más frecuentes:

##### 'probabilidad'

- hay más posibilidad porque su relación es una de dos [(1,1)(1,2):S1] (Bra; C1,31)
- como hay más negras es mayor la posibilidad [(2,3)(5,4):S2] (Mal; C2,9)

##### 'posibilidad'

- es la única posibilidad de sacar una negra [(0,2)(2,0):S2] (Ale; C1,19)
- no hay ninguna posibilidad de error como allá [(2,0)(4,1):S1] (Pa2; C2,14)

##### 'cantidad'

- ... hay una posibilidad de negra y dos de blancas ... [(1,2)(3,5):S1] (Q3; C4,7)
- hay una posibilidad de dos y en la otra una de tres [(1,1)(1,2):S1] (Mig; C1,10)

##### 'diferencia de blancas menos negras'

- por lo menos son cuatro posibilidades de blancas... [(1,5)(10,14):S2] (J; C3,30)

Es notable el paralelismo de las observaciones que se pueden hacer acerca del uso de los términos posibilidad y probabilidad. Tampoco para el término posibilidad el uso del singular o del plural da clave alguna acerca del significado; véase por ejemplo:

- aunque hay menos negras pero con más posibilidades porque hay menos cartas [(2,1)(3,2):S1] (Mig; C1,16)
- hay tres posibilidades, y allí nada más hay dos ... [(2,1)(3,2):S2] (W; C6,1)

Existe también la expresión polisémica número de posibilidades, que se puede referir a una 'probabilidad':

▪ ... mismo número de posibilidades [(1,2)(2,4):=] (W; C6,18)

o a una 'cantidad':

▪ el número de posibilidades de sacar negra es de dos contra cuatro [(1,3)(2,4):S2] (Q3; C4,21)

Y también se encontró la expresión cantidad de posibilidades:

▪ aquí es la misma cantidad de posibilidades [(3,3)(2,22):S1] (J; C3,27)

Otro ejemplo de expresión polisémica: dos posibilidades puede referirse a los 'lados':

▪ en las dos posibilidades hay dos cartas negras [(2,1)(2,2):=] (Bla; C2,2)

o a una 'cantidad':

▪ de tres cartas me aseguran que dos posibilidades [(2,1)(3,2):S1] (Q3; C4,25)

### c) El término proporción

Como los sustantivos anteriores, éste puede ser usado también en plural (proporciones), aunque lo es con menor frecuencia. También son utilizados el adjetivo proporcional, el adverbio proporcionalmente y hasta el sustantivo proporcionalidad. Asimismo, pueden presentarse expresiones compuestas como las siguientes (que tienen el significado de 'probabilidad'):

▪ hay dos negras, una misma proporción de probabilidad. 4-2 (sic) [(1,3)(2,2):S2] (Fat; C1,9)

▪ ...tienen la misma proporción en cuanto a probabilidades [(2,2)(4,2):=] (Fau; C1,14)

Los significados que pueden adquirir estas formas son muy similares a los que pueden adquirir las formas relacionadas con probabilidad y con posibilidad (23):

'probabilidad'

▪ más negras proporcionalmente [(2,2)(4,2):S2] (Bra; C1,14)

▪ proporcionalmente más posibilidades [(2,1)(3,2):S1] (Bra; C1,16)

'proporción'

▪ si nos damos cuenta es la misma proporcionalidad [(1,2)(2,4):=] (Ces; C2,10)

▪ está en la misma proporción, o sea, estoy jugándole al cincuenta [(2,2)(11,11):=] (M; C3,36)

▪ están en la proporción de 3,1 [(1,2)(2,4):=] (Bra; C1,8)

'cantidad'

▪ en proporción existe tres negras y una blanca [(2,1)(3,1):S2] (Raf; C1,15)

23. Pienso que la similitud de los conjuntos de significados para los significantes probabilidad, posibilidad y proporción puede estar relacionada con la similitud fonética de los tres términos.

- es la misma proporción de blancas, a pesar de que varíe la cantidad de negras [(5,2)(6,2):-] (J; C3,9.1)
- allá son dos proporciones, más probabilidades de que me salga blanca... [(4,1)(4,2):S1] (J; C3,22.3)

'diferencia de negras menos blancas' o simplemente 'signo de la diferencia de negras menos blancas'

- está en la misma proporción... hay cuatro blancas más en proporción [(1,5)(10,14):-] (M; C3,30)
- da igual por la misma desproporción que existe... predominan las blancas, a pesar de que aquí son ocho [(1,2)(3,5):-] (J; C3,7)

'igualdad'

- la probabilidad es proporcional [(2,2)(4,2):-] (Ang; C1,14)

Tal vez lo más notable de los usos de proporción y los términos emparentados es su coincidencia dentro de la misma respuesta con otros términos, como se verá en el párrafo §5.2.2.5. Con frecuencia estos términos no se usan tanto de manera aislada (salvo con el sentido preciso de 'proporción', por los sujetos que lo conocen), sino para distinguir un concepto de otro o para afirmar el término probabilidad: véanse los dos primeros ejemplos citados, de (Fat; C1,9) y (Fau; C1,14). Sin embargo destaca también el uso de 'diferencia de negras menos blancas' al que llegaron los sujetos del binomio J-M del tercer experimento.

#### d) El término oportunidad

Usado por los sujetos, el término oportunidad puede adquirir significados que van desde la 'posibilidad' hasta la 'cantidad', desde la 'probabilidad' hasta la 'extracción':

'probabilidad'

- hay más oportunidad de que salga negra en S2 que en S1 [(1,2)(4,2):S2] (Q6; C4,12)
- hay la misma oportunidad [(3,1)(6,2):-] (Q6; C4,13)

'posibilidad'

- hay una sola negra y no hay otra oportunidad de sacar otra carta [(1,0)(1,1):S1] (Car; C1,4)

'cantidad'

- dos oportunidades de dos [(0,2)(2,0):S2] (Bra; C1,19)
- tengo dos oportunidades de negra, contra una allí; en último de los casos me iría a S2 [(1,2)(2,4):S2] (M; C3,12/2)
- hay una sola oportunidad para equivocarme y en el otro lado dos [(2,1)(3,2):S1] (Rub; C1,16)

'diferencia de negras menos blancas'

- allá hay dos oportunidades menos de que me salga la negra, y acá... una menos [(1,2)(2,4):S1] (X; C6,4)



'extracción'

- las dos son negras y en cualquier oportunidad puede salir una negra [(1,1)(2,0):S2] (Bea; C1,6)

#### e) Términos relacionados con la idea de equilibrio

En el conjunto de sujetos se presenta con frecuencia la idea de 'equilibrio', que se expresa mediante términos como el propio equilibrio, estabilidad, balance, emparejar, compartir. Los manejaré como una sola familia de términos, puesto que todos ellos pueden adquirir prácticamente los mismos significados: igualdad de negras y blancas, igualdad de probabilidades, igualdad de diferencias....

El equilibrio puede referirse a una igualdad de blancas y negras, o sea, al caso en que  $p_i = .5$ :

- hay una negra y una blanca que se equilibran en las dos partes [(2,2)(4,4):=] (Adr; C2,8)
- .... está balanceado... [(2,2)(3,3):=] (M; C3,24)
- aquí compartes el riesgo [(2,2)(2,3):S1] (J; C3,14)
- hay equilibrio y en S2 hay más posibilidad de sacar blanca [(2,2)(2,3):S1] (Q1; C4,23)
- aquí estarían emparejadas, estaríamos a cincuenta por ciento, allá sobraría una blanca [(2,3)(4,4):S2] (M; C3,6.2)

También se puede referir a una igualdad de probabilidades, por ejemplo mediante la estrategia {P=}

- hay equilibrio en ambos grupos [(3,1)(6,2):=] (Q1; C4,13)
- o a una igualdad de diferencias, con la estrategia {R=}
- da igual porque están equilibrados en S1 y S2 [(3,1)(5,3):=] (Q1; C4,28)
  - se balancean, da igual [(5,1)(6,2):=] (J; C3,22.1)

#### 5.2.2.4. POLISEMIA DENTRO DE LA MISMA RESPUESTA

En unos cuantos casos ocurre que la polisemia se da dentro de la misma respuesta del mismo sujeto, lo que se puede considerar como un uso sumamente impreciso del lenguaje (porque resulta difícil saber a qué concepto se refiere cada uso del término).

probabilidad como 'probabilidad' y como 'diferencia de negras menos blancas'

- hay más probabilidad de negra, allá (también, pero) casi saldría la misma probabilidad, por una diferencia de blanca, acá ya son a dos probabilidades [(3,2)(5,3):S2] (X; C6,3)
- tengo dos probabilidades más de que sean negras y allá tengo la misma probabilidad [(1,1)(3,1):S2] (X; C6,27)

- ahí sobran dos blancas, y aquí nada más te sobra una... hay más probabilidades de NO allá... allá sobran dos y aquí nomás una, en donde hay más probabilidad [(2,3)(3,5):S1] (M; C3,6.1)

probabilidad como 'probabilidad' y como 'cantidad de blancas'

- ... en S1 hay dos probabilidades de que saques blanca,... predominan las blancas; es la misma probabilidad: puedo sacar negra de cualquiera... [(1,2)(2,4):=] (J; C3,12)

oportunidad como 'probabilidad' y como 'extracción'

- en S2 hay dos negras y en S1 hay una negra por lo tanto es la misma oportunidad de obtener una negra a la primera oportunidad [(1,1)(2,1):=] (Bea; C1,11)

ocasión como 'carta' y como 'extracción'

- hay una sola y única ocasión de sacar la negra a la primera ocasión [(1,0)(1,1):S1] (Bea; C1,4)

se comparte como 'hay una igualdad' y como expresión de  $p_1=.5$

- no se comparte la probabilidad; yo siento que no se comparte... a pesar de que se comparte la cantidad en botones [(2,2)(11,11):S1] (J; C3,36)

#### 5.2.2.5. PRECISION DENTRO DE LA MISMA RESPUESTA

Como dije arriba, entenderé por precisión el uso de términos diferentes para referirse a conceptos diferentes. Si dentro de una misma respuesta la sinonimia implica que hay varios términos para un solo concepto y la polisemia que hay varios conceptos para un solo término, en la precisión hay tantos términos como conceptos. Tanto la profusión de la sinonimia como la imprecisión de la polisemia sugieren una falta de claridad conceptual, esto es, que el sujeto no ha comprendido los significados de los significantes que utiliza, sobre todo cuando se trata de términos técnicos. En la precisión podría pensarse que no hay esta falta de claridad conceptual puesto que cada concepto es distinguido con un solo término y cada término corresponde a un solo concepto; sin embargo, como con frecuencia los términos que utilizan los sujetos no son forzosamente los "canónicos", la duda persiste.

En la gran mayoría de las respuestas con precisiones uno de los conceptos precisado es el de 'cantidad'. Y en la mayoría de éstas el otro concepto precisado es el de 'probabilidad'; en general se usan para 'cantidad' términos como cantidad, número, opción y oportunidad, y para 'probabilidad' términos como probabilidad, posibilidad y (más) seguridad:

- nada más por número de cantidades menor, S1, porque son iguales. En probabilidades están las dos a igual probabilidad de que salga, pero en cantidades es mejor S1 [(12,12)(14,14):S1] (X; C6,36)
- igual, no en número, pero en posibilidades igual [(2,1)(4,2):=] (X; C6,32)

- aquí tienes dos opciones, claro que son más cartas, pero tienes más posibilidad [(1,3)(2,6):S2] (T; C3,4)
- tengo una opción más de negra y allá podría tener una posibilidad de ganar pero aquí la veo más, tengo una negra que me da más seguridad [(2,2)(3,2):S2] (V; C3,20)
- es más seguro ya que tiene mayor cantidad de negras [(3,2)(5,1):S2] (Q6; C4,4)
- hay más negras y por lo tanto hay más probabilidad de sacar una negra con cuatro oportunidades [(2,2)(4,4):S2] (Bea; C1,2)

Sin embargo, hay respuestas con esos términos invertidos, como en los siguientes ejemplos, en los que posibilidad o proporción se utilizan para 'cantidad', y oportunidad o probabilidades para 'probabilidad':

- aquí tengo DOS posibilidades de que sean negras, contra cuatro... ya puedo tener más oportunidades, en cambio ahí nada más hay un negro [(1,3)(2,4):S2] (M; C3,35)
- allá son dos proporciones, más probabilidades de que me salga blanca, a pesar de que es la misma cantidad de negras, y aquí son sólo una [(4,1)(4,2):S1] (J; C3,22.3)

En el segundo de estos ejemplos hay una doble precisión: proporciones para 'cantidad de blancas', cantidad para 'cantidad de negras' y probabilidades para 'probabilidad'.

También ocurre con alguna frecuencia que la precisión se refiera a los conceptos 'cantidad' y 'proporción', particularmente en las situaciones de proporcionalidad (combinaciones K14, K15 y K16).

En esto es notable uno de los sujetos, que llega con frecuencia a la precisión en estas situaciones, pero invierte los términos. Es evidente que percibe la proporcionalidad, que sabe que la situación en general tiene que ver con el término proporción y que hay que utilizar distintos términos para la 'proporción' y para las 'cantidades'; sin embargo, utiliza proporción (o número) en sentido de 'cantidad' y mismas cartas (o probabilidad) en sentido de 'proporción' (24):

- seguimos teniendo la misma probabilidad de sacar nuestra carta sólo que en proporción diferente [(1,2)(2,4):=] (Pa1; C1,8)
- hay las mismas cartas aunque en diferente proporción [(2,1)(4,2):=] (Pa2; C2,4)

24. Se trata del único sujeto que participó en los dos primeros experimentos, llamado Pa1 en el primer experimento y Pa2 en el segundo (véase la nota al respecto en el Capítulo 2, parágrafo §2.2.1.2). El sujeto tuvo más expresiones precisas en las 20 preguntas del segundo experimento que en las 16 que contestó del primero, lo cual puede deberse a una maduración del sujeto en el lapso transcurrido entre los dos experimentos (¡maduración que pudo incluso ser favorecida por el curso de Estadística!), o bien a que las propias preguntas del segundo cuestionario (en particular, con muchas menos preguntas con certezas e imposibilidades) daban pie para ello.

- tiene las mismas cartas pero en diferente proporción [(2,2)(4,4):=] (Pa2; C2,8)
- existe la misma probabilidad porque en las dos hay las mismas cartas pero en número diferente [(1,2)(2,4):=] (Pa2; C2,10)

Otra precisión que se suele presentar ocurre entre los conceptos de 'cantidad' y de 'diferencia de negras menos blancas'. El sujeto J utiliza los términos cantidad u oportunidad para la 'cantidad', y el término proporción para la 'diferencia de negras menos blancas':

- ...están terminando seis negros, está la misma proporción guardada, pero por la cantidad, puede ser S2, a pesar de que se incrementen las blancas [(13,7)(18,12):S2] (J; C3,29)
- la misma desproporción de S2 de la 5.2 la hay en S2 de la 6, sigo yéndome a S2, a pesar de que haya más (cartas? blancas?)... hay más oportunidades de negras [(1,2)(3,5):S2] (J; C3,6)

Y el sujeto X casi invierte los términos de J: probabilidad por 'cantidad' y oportunidad por 'diferencia de negras menos blancas':

- aquí una probabilidad de negra, allá dos probabilidades; allá hay dos oportunidades menos de que me salga la negra, y acá... una menos [(1,2)(2,4):S1] (X; C6,4)

Los ejemplos que he mostrado en este párrafo ilustran respuestas en las que, como dije, hay tantos términos como conceptos. Esto es ya un "avance" con respecto a las respuestas con sinonimias o con polisemias, pero deja sin resolver dos problemas.

Por un lado está el problema de la claridad que tiene el sujeto acerca de los conceptos aritméticos o probabilísticos que está expresando: el hecho de que utilice distintos términos para distintos conceptos, incluso si éstos son los "correctos" o "canónicos", no implica necesariamente que está comprendiendo adecuadamente los conceptos (y, ciertamente, el uso del término proporción no implica una comprensión conceptual de la 'proporción'...). Por ejemplo, me parece evidente que el sujeto Pa2 está más cerca de un razonamiento proporcional correcto, con todo y su utilización invertida de los términos, que el sujeto J, al parecer anclado en un razonamiento aditivo ({R+}).

Por otro lado, metodológicamente permanece el problema de la interpretación de lo que dice el sujeto. Aunque en cada respuesta utilice términos diferentes para conceptos diferentes, si éstos varían de respuesta a respuesta dentro de cada individuo, difícilmente puede el investigador apoyarse en la terminología utilizada en cada caso para interpretar el pensamiento y las estrategias seguidas. Para que esto pudiera ocurrir tendría que haber por lo menos una consistencia intra-individuos, es decir una precisión dentro de cada sujeto, invariable entre sus diferentes respuestas; sólo así, aunque los términos fueran invertidos (como en Pa2) podría el investigador tener un pequeño "diccionario individual" que le diera acceso al pensamiento de cada sujeto. Pe-

ro, por lo menos entre los sujetos que participaron en este estudio, esto no ocurre así.

### 5.2.3. USOS POLISEMICOS DE CONECTIVOS DEL LENGUAJE COMUN

Aunque el lenguaje "técnico" revisado en el apartado anterior es el que plantea más problemas de sinonimia y polisemia, las palabras del lenguaje común que utilizan los sujetos en sus argumentaciones no están exentas de ellos.

Importan sobre todo los conectivos utilizados en las expresiones. Aquí destaco los usos que pueden tener algunas conjunciones en la composición de estrategias, y los que pueden tener algunas preposiciones en la yuxtaposición y comparación de números de diferentes clases y espacios muestrales.

En el lenguaje común, estas partículas están cargadas normalmente de una gran variedad de significados más o menos relacionados entre sí, polisemia que evidentemente se refleja en las respuestas dadas por los sujetos. No estoy, pues, descubriendo nada nuevo, sino sólo enfatizando cómo esta polisemia puede implicar una dificultad en la interpretación de las respuestas.

Se observará que aquí me estoy refiriendo exclusivamente a la polisemia, dejando de lado la sinonimia. Efectivamente, las diversas maneras de expresar un mismo concepto son relevantes para los conceptos relacionados con el tema de interés ('probabilidad', 'proporción', etc.), y de ello me ocupé en el apartado anterior. Sin embargo, aquí ya no me interesa tanto resaltar las diversas maneras en las que se pueden juxtaponer estrategias y números (sinonimia), sino el hecho de que el uso de un término no implica necesariamente la pertenencia a alguna de las categorías que he establecido (polisemia).

#### 5.2.3.1. CONECTIVOS PARA COMPONER ESTRATEGIAS

Las estrategias que componen una estrategia compuesta (véase en el capítulo 4 la sección §4.4) pueden estar ligadas mediante diversos conectivos. Intentaré mostrar cómo el conectivo utilizado no implica necesariamente el tipo de composición (conjunción, exclusión, compensación, contrapeso) puesto que cada uno puede servir para varios tipos de composición.

##### a) La conjunción y

Esta conjunción es la que se antoja natural para expresar conjunciones:

▪ *son más cartas y de cinco que hay tres son negras*  
 [(1,1)(3,2):S2] (Bet; C2,20): Conjunción {N+ & F+}

Pero no necesariamente el uso de y implica que se trata de una conjunción: puede tratarse, por ejemplo, de una compensación:

- hay una probabilidad más que allá de sacar negra y el mismo número de probabilidad "blanca" [(2,2)(3,2):S2] (Als; C2,12): Compensación {F+ \* D=}
- o de un contrapeso:
- en S1 sólo hay dos cartas y en S2 hay cuatro cartas negras [(2,0)(4,1):=] (Bla; C2,14): Contrapeso {N- ¥ F+}

#### b) La conjunción aunque

Prácticamente por definición, las maneras para expresar la exclusión de una estrategia por otra son la conjunción aunque y el adverbio a pesar. En cuanto a la conjunción aunque, ocurrió en exclusiones:

- tengo nada más una probabilidad de que sea blanca, y allá tengo dos, aunque sean más negras [(2,1)(5,2):S1] (X; C6,20): Exclusión {D- - F+}
  - aunque hay más cantidad de cartas, pero hay más posibilidad de sacar la negra porque hay dos cartas negras [(1,2)(2,4):S2] (Z; C6,18): Exclusión {F+ - N-}
- pero también en compensaciones:
- existe mayor número de canicas negras, aunque mayor es el número de canicas blancas, pero hay más posibilidad..., porque hay más negras en S2 que en S1 [(1,4)(10,13):S2] (I; C6,33): Compensación {F+ \* E=}

#### c) El adverbio a pesar

El adverbio a pesar tuvo aún más usos que aunque: sirvió para exclusiones:

- es la misma proporción de blancas, a pesar de que varíe la cantidad de negras [(5,2)(6,2):=] (J; C3,9.1): Exclusión {E= - F+}
- y para compensaciones:
- aquí sí ya es menor cantidad... ahí no se comparte la probabilidad, a pesar de que se comparte la cantidad en botones, pero aquí son poquitos [(2,2)(11,11):S1] (J; C3,36): Compensación {N- \* P=}
- pero también para contrapesos:
- a pesar de que en S2 hay dos negras hay más cartas y es la misma probabilidad que en S1 porque hay uno pero son menos cartas [(1,2)(2,4):=] (Edi; C1,8): Contrapeso {N- ¥ F+}

#### d) La conjunción pero

En la medida en que expresa una objeción, la conjunción pero se esperaría en exclusiones:

- aquí tienes dos opciones; claro que son más cartas, pero tienes más posibilidad [(1,3)(2,6):S2] (T; C3,4): Exclusión {F+ - N-}
  - aunque hay menos cartas negras, pero hay menos cartas por todas [(2,3)(3,4):S1] (Z; C6,10/1): Exclusión {N- - F+}
- y en compensaciones:

- tienen un blanco cada uno, pero aquí son menos elementos [(3,1)(4,1):S1] (O; C6,13/2): Compensación {N- \* D=}
- Sin embargo se presentó también en conjunciones:
- aquí tengo las cinco blancas, pero allá son catorce blancas... allá hay muchísimas cartas más; si es poca la posibilidad de que te llegues a sacar la negra, pero son más [(1,5)(10,14):S1] (T; C3,30): Conjunción {D- & N-}
- y en contrapesos:
- a pesar de que en S2 haya más (negras), pero predominan las blancas, en cualquiera de los dos momentos puede salir ésta... En S2 predominan más blancas, sobran dos, allá una (pero) me da igual [(1,2)(3,5):=] (J; C3,25): Contrapeso {F+ ≠ R+}

### 5.2.3.2. CONECTIVOS PARA COMPARAR NUMEROS

Uno de los principales aspectos en el proceso de interpretación de las respuestas es evidentemente todo el manejo de los números por parte del sujeto. En la siguiente sección de este capítulo me ocuparé del manejo aritmético de los números, pero aquí trataré brevemente del manejo "en español" de los números, en particular de los términos utilizados por los sujetos para comparar números.

Los sujetos utilizan diferentes maneras de expresar una comparación entre dos números. La comparación puede ser entre números del mismo espacio muestral y de diferentes clases (comparación DENTRO), o entre números de una misma clase y diferentes espacios muestrales (comparación ENTRE).

Para el proceso de interpretación de las respuestas, importa saber qué números está comparando el sujeto y cómo los está comparando (DENTRO o ENTRE); en particular, importa conocer, si el sujeto se refiere a dos números, a qué clase y qué espacio muestral pertenecen, y si la relación establecida entre ellos es de orden, aditiva o multiplicativa. Sin embargo, la clave para este conocimiento no está en las preposiciones utilizadas, puesto que cualquiera de ellas puede servir para cualquier tipo de comparación, como lo ilustran los ejemplos que muestro en este párrafo.

Las preposiciones más frecuentes en estas yuxtaposiciones son contra, a, de, en y sobre. Examinaré a continuación los usos de estas preposiciones con números: esto es, si p es una de estas preposiciones y a y b son números, examinaré las construcciones del tipo "a p b" (frecuentemente acompañadas de los verbos ser, estar, o de las formas hay, había, etc.) y las construcciones del tipo "p b".

#### a) La preposición contra

El uso más común de la preposición contra en las respuestas obtenidas es un uso DENTRO con las clases de favorables y desfavorables ("f<sub>i</sub> contra d<sub>j</sub>" o bien "d<sub>j</sub> contra f<sub>i</sub>"):

- son tres contra dos, allá cinco contra tres [(3,2)(5,3):S1] (O; C6,3)

Pero también puede tratarse de otras clases, como este ejemplo de uso DENTRO en el que aparecen "d<sub>j</sub> contra f<sub>j</sub>" y "n<sub>j</sub> contra f<sub>j</sub>":

- la misma posibilidad porque en S2 son dos contra tres y en S1 es dos contra uno [(1,1)(3,2):=] (Cla; C2,20)

Y también puede tener un uso ENTRE, como este ejemplo con clases "d<sub>j</sub> contra d<sub>k</sub>":

- tengo dos oportunidades de negra, contra una aquí [(1,2)(2,4):S2] (M; C3,12/2)

Los usos DENTRO y ENTRE pueden incluso presentarse en el mismo sujeto, como lo muestran estas dos respuestas sucesivas de Jae:

- dos contra dos y las dos de aquí son negras [(0,2)(2,0):S2] (Jae; C1,13): uso ENTRE, "n<sub>j</sub> contra n<sub>k</sub>"
- cuatro contra seis porque hay cuatro negras [(2,2)(4,2):S2] (Jae; C1,14): uso DENTRO, "f<sub>j</sub> contra n<sub>j</sub>"

Una expresión conectiva relacionada con contra es la de competencia con, de la que hay usos DENTRO de la forma "f<sub>j</sub> compite con d<sub>j</sub>":

- sólo compite con una, en cambio allá compite con dos [(1,1)(1,2):S1] (Cla; C2,16)
- tres negras compiten con una blanca [(2,1)(3,1):S2] (Cla; C2,19)

#### b) La preposición a (y las construcciones a cada y por cada)

La preposición a entre dos números o seguida de un número tiene varios usos polisémicos. Por una parte puede expresar una simple comparación de tipo DENTRO de favorables y desfavorables: "f<sub>j</sub> a d<sub>j</sub>" (ó "d<sub>j</sub> a f<sub>j</sub>")

- la posibilidad es de dos a una [(2,1)(3,2):S1] (Ray; C1,16)
- estoy dos a uno [(2,1)(3,4):S1] (X; C6,7)
- hay más probabilidad tres a uno [(2,1)(3,1):S2] (Pa2; C2,1)
- es uno a uno [(1,1)(2,1):S1] (O; C6,6)

Por otro lado puede expresar una relación de tipo multiplicativo en una estrategia de razonamiento proporcional con la forma "f<sub>j</sub> a d<sub>j</sub>" (ó "d<sub>j</sub> a f<sub>j</sub>"):

- hay probabilidad de dos a dos y allá hay tres blancas y dos negras [(2,2)(2,3):S1] (Pa2; C2,3)
- cuatro a dos, dos a una [(1,2)(2,4):=] (X; C6,37.4)
- en S1 estoy a tres, a tres, en S2 a cuatro, a cuatro [(3,3)(4,4):S1] (X; C6,11)

Las relaciones de tipo multiplicativo se expresan también mediante las expresiones a cada o por cada o mediante construcciones de tipo ... es a ... lo que ... es a ..., aunque el uso de estas expresiones no implica necesariamente que la relación de tipo multiplicativo sea correcta:

- en S2 a cada tres le corresponde una blanca, en S1 igual, a cada tres le corresponde una blanca: igual [(3,1)(6,2):=] (X; C6,14)



- la misma posibilidad ya que por cada blanca hay una negra [(1,3)(2,6):=] (Bet; C2,17)
- veinticinco es a cinco lo que cinco es a uno [(1,4)(5,20):S1] (X; C6,29.5)

Los usos recién vistos de a y a cada para la expresión de relaciones de tipo multiplicativo son comunes y muy frecuentemente utilizados en el lenguaje aprendido escolarmente. Sin embargo, estas mismas construcciones pueden también expresar una relación de tipo sustractivo:

- aquí a cada dos canicas negras le corresponde una blanca, acá a cada tres negras le corresponden dos blancas. La diferencia es de una canica para que fueran iguales las dos [(2,1)(3,2):=] (X; C6,39.2)
- hay muy poca diferencia de canicas negras hacia las blancas, nada más es por dos canicas, allá son veintitres a seis: diecisiete [(9,11)(6,23):S1] (X; C6,35)
- en S1 por una blanca es mayor la probabilidad de que salga blanca, allá estoy a dos blancas de que sean igual [(1,2)(3,5):S1] (X; C6,24)
- hay más cartas negras, a una blanca [(3,1)(4,1):S2] (X; C6,13.1)

### c) Las preposiciones de y en

Las preposiciones de y en son las únicas sin usos polisémicos, aunque resultan sinónimas por su uso entre dos números y acompañadas de los verbos ser o haber. Ambas han tenido casi siempre un uso DENTRO de la forma " $f_j$  de (o en)  $n_j$ " y, ocasionalmente, de la forma " $d_j$  de (o en)  $n_j$ ".

Vale la pena observar que la frontera entre las expresiones del tipo " $f_j$  de (o en)  $n_j$ " y las expresiones con fracciones del tipo  $f_j/n_j$  que revisaremos en la siguiente sección (en particular en §5.3.2) no es una frontera tajante, como lo muestra el siguiente ejemplo:

- tres son negras (3/4), mientras que allá de tres dos son negras (2/3) [(2,1)(3,1):S2] (Ale; C1,15)

He aquí ejemplos de uso de las preposiciones de y en:

- de dos había una negra [(1,1)(1,2):S1] (Bra; C1,10)
- de tres cartas hay dos negras [(1,1)(2,1):S2] (Bra; C1,11)
- es más fácil sacar dos de tres que una de dos [(1,1)(2,1):S2] (Mig; C1,11)
- hay dos negras en tres cartas [(1,1)(2,1):S2] (Rey; C1,11)
- hay dos negras en cuatro cartas, hay más probabilidad, en cambio allá sólo hay una negra en cuatro cartas [(1,3)(2,2):S2] (Car; C1,9)
- hay probabilidad de uno en dos y allá hay dos negras y una blanca [(1,1)(1,2):S1] (Pa2; C2,16)

En un caso coinciden ambas preposiciones *de* y *en* en la misma respuesta (cada una se utiliza para un espacio muestral):

- *hay dos en cuatro cartas y allá una de cuatro* [(1,3)(2,2):S2] (Mig; C1,9)

#### d) La preposición *sobre*

Un sujeto del segundo experimento utilizó en varias respuestas la preposición *sobre*; en todas ellas el uso fue DENTRO y de esta forma: "*f<sub>j</sub> sobre d<sub>j</sub>*". Cabe la duda de si está expresando una simple comparación o si está haciendo un uso "matemático" de la preposición y se está refiriendo a una operación  $f_j/d_j$  (en cuyo caso sería el único sujeto en utilizar esta forma para la probabilidad matemática, equivalente a la clásica  $f_j/n_j$ ):

- *son cuatro negras sobre dos* [(2,1)(4,2):S2] (Mab; C2,4)
- *hay más probabilidad porque tiene dos sobre una* [(1,1)(2,1):S2] (Mab; C2,18)

### 5.2.4. EXPRESIONES RELACIONADAS CON LA PROBABILIDAD Y LA OBVEDIAD

Para finalizar la sección acerca de los usos del lenguaje he reunido algunas expresiones que me parecen interesantes. Unas son expresiones del concepto que tienen los sujetos de la probabilidad; otras de la facilidad de algunas preguntas planteadas.

#### 5.2.4.1. EXPRESIONES DE UNA PROBABILIDAD INTUITIVA

A pesar de ser una de las mayores interrogantes tras la investigación emprendida, la de cómo entiende cada sujeto la probabilidad intuitiva es prácticamente inabordable. Aquí sólo puedo presentar algunas de las expresiones de esa intuición.

Algunos sujetos expresan simplemente la idea de la situación de aleatoriedad:

- *más o menos, en cosas de azar* [(1,2)(2,4):=] (W; C6,37.4)
- *... aunque quién sabe* [(1,1)(2,1):S2] (Edi; C1,11)
- *no me interesa... yo lo echo a la suerte* [(2,1)(3,2):S2] (V; C3,1)

Muchos de los sujetos usan directa y escuetamente los términos probabilidad, posibilidad y otros semejantes, pero no necesariamente reflejan la idea que el sujeto se hace de los conceptos que está manejando.

Sin embargo, hay respuestas en las que esta idea sí queda claramente reflejada. Yo encuentro cinco tipos o familias de expresiones (no exclusivas entre sí): unas relacionadas con la idea de "seguridad", otras con las ideas de "facilidad" o de "rapidez", otras con la de una "extracción", otras con la de una "búsqueda", y por último las expresiones de que el sujeto tuvo que invertir el problema para abordarlo.

## a) Seguridad

Como se ha mencionado ya, en muchas ocasiones no es evidente que las expresiones de los sujetos se refieran a una mayor probabilidad de obtener una carta negra en un lado que en otro. Cuando un sujeto usa las expresiones "es seguro" o "es más seguro", puede simplemente estarlas utilizando como sinónimos de "es más probable", pero también puede estar pensando en una seguridad efectiva, como (tal vez) en los siguientes ejemplos <sup>(25)</sup>:

- *es seguro que encuentre la negra aunque escoja dos veces* [(0,2)(1,1):S2] (Rub; C1,5) (ver también el inciso sobre "extracciones")
- *... tengo una negra que me da más seguridad* [(2,2)(3,2):S2] (V; C3,20)
- *es más seguro ya que tiene mayor cantidad de negras* [(3,2)(5,1):S2] (Q6; C4,4)

## b) Facilidad o rapidez

Es frecuente que la probabilidad intuitiva se exprese en términos de una dicotomía facilidad / dificultad:

- *...es más fácil sacar una negra de acá* [(1,0)(1,1):S1] (Ale; C1,4)
- *es más fácil sacar dos de tres que una de dos* [(1,1)(2,1):S2] (Mig; C1,11)
- *en los dos lados es difícil* [(2,3)(1,5):=] (Q2; C4,26)
- *allá es muy difícil sacar negra...* [(1,2)(2,4):S1] (Ray; C1,8)
- *entre más cartas haya, se te pone más difícil...; entre menos cartas haya, más fácil es la elección, más fácil poderle atinar...* [(1,2)(2,3):S1] (M; C3,5)

En otros casos se habla en términos de rapidez:

- *hay más rapidez para saber si sale o no una negra porque hay menos cartas* [(1,2)(2,4):S1] (Gua; C1,24)
- *tiene las mismas blancas y tienes aquí también tres negras que te puedes sacar el premio luego, y acá también tienes más* [(3,2)(18,2):=] (T; C3,40)
- *es más rápido que mi probabilidad sea negra, estoy dos a uno..., allá a tres probabilidades de que sea y cuatro de que no, rápido: menos cartas para elegir* [(2,1)(3,4):S1] (X; C6,7)

Aunque también hay híbridos que parecerían indicar que por lo menos en algunos casos la facilidad y la rapidez son equivalentes:

- *son mucho más opciones, y a lo mejor rápido te llevas en éstas; como tienes bastantes opciones es más fácil* [(3,1)(5,2):S2] (T; C3,9)

<sup>25</sup>. Véase al respecto, en el capítulo 4 (§4.3.1.1.b), la nota que da cuenta de los sujetos infantiles de Falk et al. (1980, pág. 201) que cuando las probabilidades eran menores de  $\frac{1}{2}$  estaban "seguros de perder" y con las mayores de  $\frac{1}{2}$ , "seguros de ganar".

- *si me pongo a hacer multiplicaciones, divisiones y restas, podria sacar una igualdad, veinticinco es a cinco lo que cinco es a uno, pero yo hablo de rapidez, es más fácil que salga aquí [(1,4)(5,20):S1] (X; C6,29.5)*

### c) Extracciones

Por otro lado, es frecuente que la probabilidad intuitiva se exprese en términos de la extracción que se hace, sobre todo de la "primera" extracción:

- *posibilidad total de sacar una negra al primer intento [(2,0)(4,0):=] (Rub; C1,12)*
- *existe mayor probabilidad de que salga la negra a la primera [(1,3)(2,2):S2] (Jai; C1,23)*
- *son más pocas, y como allá son más hay la posibilidad de no poderla sacar en la primera [(2,2)(4,4):S1] (Bea; C1,18)*

Aunque no necesariamente es la primera:

- *las dos son negras y en cualquier oportunidad puede salir una negra [(1,1)(2,0):S2] (Bea; C1,6)*
- *en un momento determinado, yo puedo sacar la negra [(1,2)(2,4):=] (J; C3,12)*

### d) Idea de búsqueda

Varios de los ejemplos citados arriba sugieren que el modelo mental que tiene el sujeto está más cerca de una búsqueda que de una elección en una situación aleatoria. Los términos seguridad, facilidad, rapidez, primer intento pueden ocurrir cuando se está buscando un objeto en un lugar en el que hay objetos de la clase que se desea mezclados con objetos de otras clases. Es cierto que las propias circunstancias de búsqueda y de extracción aleatoria tienen una frontera que puede resultar ambigua (sobre todo cuando hay un premio ligado a la extracción aleatoria), y esta ambigüedad conceptual puede heredarse a la terminología, pero la incidencia repetida de esos términos que están más relacionados con la idea de una búsqueda que con la de una extracción aleatoria sugiere que en algunos casos los sujetos se imaginan "buscando" la carta o la canica negra.

Esta idea de búsqueda es la que parece haber estado operando en el ejemplo del frasco de botones surgido durante la entrevista al binomio J-M (tercer experimento):

- *(pensé) en un frasco de botones... entre los botones negros unos blancos, y mientras más negros haya, más fácil va a ser [(2,3)(4,5):S2] (M; C3,6.3/2)*
- *aquí sí ya es menor cantidad: mucho más probable que salga la negra: más rápido... ahí ya hay un montón de botones, se revuelven, pueden quedar blancos juntos..., pero aquí son negros y son menos, son poquitos, es más fácil que saques el negro de aquí [(2,2)(11,11):S1] (J; C3,36)*

Las expresiones anteriores parecen corresponder más a la imagen de un frasco con botones blancos y negros en el que se mete la mano y, viendo, se busca un boton negro cualquiera (y, si no sale

a la primera, se vuelve a intentar) que a la del frasco de botones volcado al revés del que sin ver se deja caer el primer botón que salga. La primera imagen corresponde a una búsqueda, la segunda está más relacionada con el planteamiento de extracción aleatoria (26).

Aunque evidentemente no a todos los sujetos se les ocurrió el ejemplo del frasco de botones, pienso que una idea de la probabilidad intuitiva más conectada con una búsqueda que con una extracción aleatoria puede estar asociada con varias de las estrategias identificadas en el capítulo 4 (ver la §4.5.1.2):

- la centración {N-} podría expresarse así en términos del frasco de botones: "mientras menos botones haya, más pronto termino de recorrerlos todos, y aunque los negros se me escondan y queden al final, más pronto pesco alguno de ellos" (véase también la expresión menos cartas para elegir del sujeto X citada más arriba);
- la centración {F+} podría expresarse de manera muy semejante: "mientras más botones negros haya, más fácilmente pesco uno";
- inclusive la centración {F-} podría expresarse en estos términos: "mientras menos botones negros haya entre más blancos, más destacan los negros y más fácilmente los encuentro".

Si es cierto que en muchos sujetos está operando una idea de búsqueda más que una de extracción aleatoria, entonces debemos pensar que muchos de los problemas en la adquisición de los conceptos de probabilidad están basados en una muy seria dificultad de los sujetos con la idea misma de aleatoriedad.

#### e) Inversión del problema

En algunas ocasiones, los sujetos invierten el problema: hablan de la frecuencia, posibilidad o probabilidad de blancas, o sea de los casos desfavorables, para elegir el espacio muestral en que haya menos oportunidades de perder.

Estas inversiones ocurren sobre todo en las ubicaciones U2.1, U2.2, U3.1 y U3.2 (en las que hay más probabilidad de sacar

---

26. En mi opinión, ambas situaciones difieren radicalmente, por las razones arriba expuestas. No opina así Zaleska (1974, pág. 136), quien afirma que «en las situaciones en las que el sujeto es actor, las respuestas racionales [es decir, las correctas] deberían ser las más frecuentes. En primer lugar, una cierta similitud con las situaciones familiares puede tener un papel facilitador. La extracción de una urna puede ser asimilada a la búsqueda de objetos deseados en dos recipientes de los cuales uno contiene más de ellos». Lo que expuse arriba debe dejar muy claro que la "asimilación" de las últimas dos situaciones no sólo no tiene un papel facilitador sino que favorece la producción de estrategias inadecuadas, incorrectas e incompatibles con la idea de fenómeno aleatorio.

una blanca que una negra) o asociados a estrategias de centración en los casos desfavorables ( $\{D-\}$ ,  $\{D=\}$ ).

La inversión puede tratarse de una simple descripción del arreglo o de la estrategia seguida en términos de "blancas" o de "no negras", como en los siguientes ejemplos:

- da igual que no se saque negra  $[(1,3)(2,6):=]$  (Q1; C4,30)
- existe un porcentaje muy bajo de que pueda ser blanca  $[(2,2)(4,2):S2]$  (Jai; C1,27)
- tengo muy poca probabilidad de que salga la única blanca y hay más opción que salga la negra  $[(3,1)(5,2):S1]$  (X; C6,17)

O bien puede tratarse de una expresión de cómo evitar el error de sacar una blanca, como en los siguientes ejemplos:

- ... es menos o puede ser menos el error de sacar una blanca en lugar de negra  $[(2,2)(4,4):S1]$  (Bet; C2,8)
- existe un menor riesgo de que sea blanca  $[(2,2)(4,4):S1]$  (Jai; C1,18)
- de cuatro cartas sólo puedo fallar una vez  $[(2,1)(3,1):S2]$  (Ger; C1,15)
- ... más pierde allá de que pueda perder  $[(1,3)(2,6):S1]$  (V; C3,4/1)
- puedo equivocarme sólo dos veces y en la otra cuatro  $[(1,2)(2,4):S1]$  (Rub; C1,8)
- en cualquier lado existe la posibilidad de sacar la carta equivocada  $[(2,1)(3,1):=]$  (Pal; C1,15)
- es más la probabilidad de no equivocarse  $[(2,0)(4,1):S1]$  (Mab; C2,14)

Pero también puede tratarse de una inversión en el sentido más estricto del término, es decir un replanteamiento del problema, modificándolo a un arreglo en el que el "premio" está asociado con una carta blanca, no negra, como en los siguientes ejemplos:

- es más frecuente sacar blancas por ser mayor el número de elementos blancos  $[(1,2)(3,5):S2]$  (Q5; C4,7)
- da igual para blancas porque hay menor posibilidad de sacar negras  $[(1,3)(2,6):=]$  (Q1; C4,11)
- da igual la posibilidad de sacar blanca  $[(1,3)(2,6):=]$  (Q5; C4,11)

#### 5.2.4.2. EXPRESIONES DE OBVIEDAD

En este estudio de las respuestas intuitivas a problemas de probabilidad se plantea la siguiente pregunta: ¿cómo rescatar la expresión de la intuición pura? Fischbein (1975, 1987) ha dicho que la intuición se presenta a una persona como un conocimiento obvio, acompañado de una sensación de convicción, de certeza. Entonces, cuando un sujeto expresa la obviada, está reflejando que la forma en que está resolviendo el problema es intuitiva, aunque no necesariamente lo esté haciendo de manera correcta y aunque lo

inverso no necesariamente sea cierto (si un sujeto no expresa la obviada eso no implica que no procede intuitivamente).

Y, sí, los sujetos expresan la obviada, verbalmente y sin palabras.

Estos son algunos ejemplos de expresiones verbales de una percepción de obviada por parte de los sujetos (27):

- aquí es claro [(2,0)(6,0):=] (M; C3,19)
- ahí no hay problema [(3,1)(0,7):S1] (M; C3,13)
- ... por supuesto... [(0,2)(2,0):S2] (Ces; C2,13)
- ... aunque no lo quieras creer [(2,1)(3,2):=] (V; C3,18/2)
- pues ni pensarlo [(4,0)(5,1):S1] (V; C3,10)
- ... sin tener que pensar... [(2,0)(4,0):=] (Jai; C1,29)
- ..., ¡no puede ser! [(4,1)(6,2):S1] (M; C3,22)
- digo, ¡por favor! [(5,1)(6,2):S1] (M; C3,22.1)
- ... ¡por Dios!..., por favor [(4,0)(5,1):S1] (M; C3,10)
- por la simple razón... [(1,1)(1,1):S2] (Ray; C1,7)

Pero tal vez la expresión más común de la percepción de obviada la constituye la risa espontánea con la que los sujetos acompañan sus respuestas (28). Estos son algunos de los casos (29) en que las respuestas fueron acompañadas por risa; es interesante observar que no porque una pregunta se perciba como fácil la respuesta es correcta: así, los dos últimos ejemplos de la siguiente lista corresponden a elecciones incorrectas:

- [(12,8)(4,24):S1] (J; C3,31)
- [(12,8)(4,24):S1] (M; C3,31)
- [(3,1)(0,7):S1] (T; C3,13)
- [(2,0)(6,0):=] (Z; C6,23)
- [(1,4)(40,20):=] (X; C6,29.7)
- [(2,0)(6,0):S1] (O; C6,23)

Por otra parte son interesantes las expresiones de descubrimiento de algo que parece intuitivamente correcto:

27. Lecoutre realizó también un estudio con estudiantes de primer año de universidad (franceses), y reporta entre ellos las siguientes expresiones de obviada: «me parece que es así, pero no podría decir por qué»; «el ejercicio era de una trivialidad desconcertante»; algunos problemas les resultaron «elementales», «muy simples», «triviales». En general, esas respuestas acompañaron a elecciones correctas; un dato interesante es que los estudiantes que habían recibido un principio de formación teórica en matemáticas fueron los que peores respuestas dieron, y que con frecuencia sus elecciones fueron acompañadas por comentarios como «estoy completamente perdido» o «desorientado», «ahora tengo la impresión de que ya no sé dónde ando; mezclo todo» (Lecoutre, 1984, pág. 897).

28. Falk et al. (1980, pág. 197) reportan un caso de un niño que resuelve bien preguntas con arreglos no proporcionales y luego, ante una pregunta de proporcionalidad, se carcajea y juega: «de tñ, marin...» (edad: 9;6)

29. Recuerdo al lector que la transcripción completa de las entrevistas está en el Anexo 4.

- *si nos damos cuenta es la misma proporcionalidad* [(1,2)(2,4):=] (Ces; C2,10)
- ¡ufujú! (al descubrir {R=}) [(1,5)(10,14):S2] (J; C3,30)

Estas expresiones de descubrimiento también pueden consistir exclusivamente en risa, como en los siguientes ejemplos:

- (risas al descubrir {R=}) [(13,7)(18,12):S2] (J; C3,29)
- (risas al descubrir {R=}) [(1,3)(2,4):=] (V; C3,35)
- (risas al descubrir {P=}) [(3,1)(6,2):=] (W; C6,14/2)

Por cierto, la risa no necesariamente refleja una obvedad: puede expresar, por ejemplo, desconcierto:

- (risas)... *está muy complicado, maestra, ¿qué nos hizo?* [(1,2)(3,5):S1] (M; C3,7/3)

### 5.3. OBSERVACIONES ACERCA DEL USO DE LA ARITMETICA

En la sección anterior vi cómo un tamiz lingüístico permite ubicar las imprecisiones en el uso que hacen los sujetos del lenguaje común y de algunos términos más especializados. Dentro de estos términos "especializados" podrían considerarse los números y su manejo aritmético: a ellos dedico esta sección.

De manera paralela a lo que ocurre entre las palabras, entre los números podemos encontrar usos sinonímicos y polisémicos. Por ejemplo, en la respuesta

▪ *en S2 hay un 75% de probabilidad y en S1 un 50% de probabilidad* [(2,1)(3,2):=] (Gab; C1,16)

se puede considerar que hay la sinonimia  $3/5 = 75\% = 50\% = 2/3$ . También hay usos polisémicos: por ejemplo, hay respuestas en las que 90% significa '90 de cada 100' y otras en las que 90% significa 'el total menos uno'.

Green observa que los alumnos de 11 a 16 años tienen estas dificultades con el lenguaje de la aritmética, y las asocia a la habilidad verbal en general:

«la habilidad verbal de los alumnos suele ser inadecuada para describir adecuadamente las situaciones probabilísticas. Con frecuencia se equipararon la certeza con una probabilidad alta, la imposibilidad con una probabilidad baja. Los alumnos asociaron libremente una probabilidad de 50% con cualesquiera eventos que podrían o no ocurrir, o con eventos equiprobables (cuando hay 2 o más eventos posibles)». (Green, 1983, pág. 40)

Así, no porque en una respuesta aparezcan números u operaciones aritméticas debemos pensar que el sujeto que los utiliza tiene un razonamiento aritmético o proporcional correcto.

La sección consta de dos apartados. En el primero me ocupo de ver cómo expresan los sujetos algunas relaciones numéricas, y en el segundo veo el uso que hacen de fracciones y porcentajes.



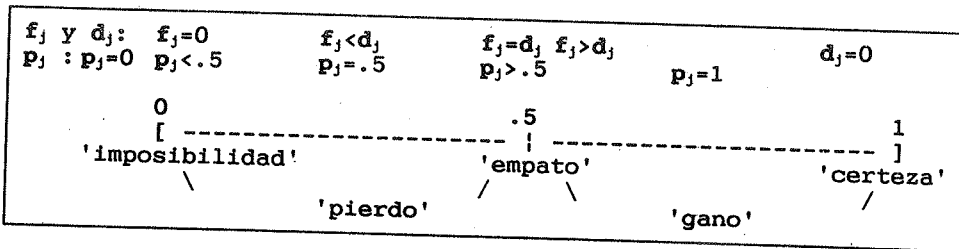
5.3.1. EXPRESIONES DE NUMEROS

Los números que más expresan los sujetos son, evidentemente, los casos favorables ( $f_1, f_2$ ), los desfavorables ( $d_1, d_2$ ) y los totales ( $n_1, n_2$ ). A partir de ahí es interesante ver las diferentes maneras que utilizan los sujetos para referirse a situaciones importantes y las que utilizan para referirse al número 0.

5.3.1.1. EXPRESIONES DE IMPOSIBILIDAD, "PIERDO", "EMPATO", "GANO" Y CERTEZA

En el capítulo 4 mencioné que las estrategias de equilibrio ocurren cuando un sujeto establece una relación de orden entre los favorables y los desfavorables, basándose en el punto de equilibrio en que ambos son iguales (ver el apartado §4.3.1). Esto lleva a una demarcación "por trechos" del intervalo (0, 1), a los que denominé "pierdo", "empato", "gano", denominaciones que sirvieron para definir las diferentes estrategias de equilibrio.

Ahora veamos qué expresiones utilizan los sujetos para referirse a estas situaciones; a las tres mencionadas agregaremos las dos extremas de imposibilidad y certeza:



En las situaciones de doble imposibilidad, imposibilidad-certeza o posibilidad-imposibilidad (ubicaciones U1.1, U1.3, U2.1 y U3.1), los sujetos expresaron de varias maneras el hecho de que no había negras ( $p_j=0$ ). He aquí algunas de ellas:

- no hay ninguna negra 0% probabilidad [(0,2)(0,3):n] (Gab; C1,1)
- no hay probabilidad [(0,2)(0,3):n] (Ric; C1,26)
- no hay negras y por supuesto ninguna probabilidad [(0,2)(2,0):S2] (Ces; C2,13)
- el evento "negra" es un evento vacío [(0,2)(2,0):S2] (Rub; C1,19)
- hay certeza de que no salga [(0,2)(0,3):n] (Raf; C1,26)
- la probabilidad es cero ya que en ninguna existe carta negra [(0,2)(0,3):n] (Mab; C2,15)
- probabilidad 0/3 y 0/2 [(0,2)(0,3):=] (Ram; C2,15)

La situación que he denominado "pierdo" ( $p_j < 0.5$ , que ocurre en U1.5, U2.2, U2.3, U3.1 y U3.2) es expresada de varias maneras.

Algunas de las expresiones utilizadas por los sujetos se refieren a la mayor cantidad de blancas que de negras:

- hay más blancas que negras [(1,3)(2,6):=] (Q2; C4,30)
- (no) existe la probabilidad de sacar una negra puesto que es mayor el número de blancas [(1,2)(2,4):=] (Maf; C2,10)
- por la desproporción que existe... predominan las blancas [(1,2)(3,5):=] (J; C3,7)

Otras se refieren a la dificultad de ganar o al hecho de que es mayor la probabilidad de sacar una blanca que la de sacar una negra:

- hay más probabilidad de sacar blancas [(1,2)(2,3):=] (Q1; C4,17)
- está dura (la cosa) [(9,14)(9,20):S1] (V; C3,37)
- da igual que no se saque negra [(1,3)(2,6):=] (Q1; C4,30)
- no hay mucho de qué agarrarse [(1,2)(3,3):S2] (V; C3,2)
- existe un porcentaje de que no se saque la negra en primera instancia [(1,2)(2,4):=] (Jai; C1,24)
- es más fácil que se perdieran las negras [(3,3)(3,18):S1] (O; C6,25)

En cuanto a la situación de "empato" ( $p_j=0.5$ , que ocurre en U2.1, U2.2, U2.4, U2.5 y U3.3) se expresó en ocasiones señalando la igualdad de las cantidades de negras y blancas:

- está a igual probabilidad, hay la misma cantidad de blancas que de negras [(1,2)(4,4):S2] (X; C6,18.2)
- hay la mitad de negras y la mitad de blancas [(2,2)(4,4):=] (Jor; C1,2)
- hay equilibrio [(2,2)(2,3):S1] (Q1; C4,23)
- estarían emparejadas, estaríamos a cincuenta por ciento [(2,3)(4,4):S2] (M; C3,6.2)

En otras ocasiones la igualdad que se señaló fue entre la probabilidad de ganar y la de perder:

- $\frac{1}{2}$  de sacar negra y  $\frac{1}{2}$  de error [(1,1)(1,1):=] (Mar; C1,32)
- tiene las mismas probabilidades de salir o no [(1,3)(2,2):S2] (May; C1,9)
- una probabilidad de uno a uno [(1,1)(1,2):S1] (Jai; C1,31)
- el 50% de posibilidad: una a una... tengo una de cada una [(1,2)(3,3):S2] (M; C3,5.1)

Pero lo que tal vez resulta más sobresaliente de la situación de "empato" es la gran frecuencia con la que los sujetos la expresaron a través de una cuantificación:

- la probabilidad es... de .5 [(1,0)(1,1):S1] (Ale; C1,20)
- cincuenta por ciento de que salga blanca y cincuenta negro [(1,1)(1,2):S1] (O; C6,9)
- hay un 50% de que salga y un 50% de que no salga [(1,3)(2,2):S2] (Gua; C1,23)
- hay un 50% de probabilidad [(0,2)(2,2):S2] (Gab; C1,3)
- tengo el 50% de lograr sacar la negra [(1,3)(2,2):S2] [(1,3)(2,2):S2] (Pal; C1,9)
- hay  $p=2/4$  [(0,2)(2,2):S2] (Ric; C1,28)
- probabilidad de  $\frac{1}{2}$  [(1,1)(1,2):S1] (Ram; C2,16)

En las expresiones de la situación que he denominado "gano", o sea la situación en la que hay más favorables que desfavorables ( $p_i > 0.5$ , que ocurre en las ubicaciones U1.1, U2.3, U2.4, U2.5, U3.4 y U3.5), se refleja la mayor cantidad de negras que de blancas:

- ganan las negras [(3,2)(5,3):S2] (I; C6,3)
  - el número de negras es mayor y esto hace que la probabilidad aumente [(4,1)(6,2):=] (Q3; C4,22)
  - hay más números de cartas negras [(3,1)(5,2):=] (Q3; C4,27)
- o la mayor probabilidad de sacar una negra que una blanca:
- hay posibilidades rotundas de que salga negra [(4,1)(6,2):=] (J; C3,22/2)
  - te puedes sacar el premio luego luego [(3,2)(18,2):=] (T; C3,40)

Por último, en los arreglos de imposibilidad-certeza, posibilidad-certeza y doble certeza (ubicaciones U1.3, U1.5, U2.5 y U3.5), los sujetos utilizaron muchas expresiones del hecho de que en uno o ambos espacios muestrales era seguro que el resultado de la extracción fuera una carta negra ( $p_i = 1$ ). Unas respuestas expresan directamente la seguridad o certeza misma:

- es un evento seguro [(1,0)(1,1):S1] (Art; C1,20)
- es seguro que sale negra [(2,0)(4,0):=] (Jor; C1,12)
- voy a la segura [(0,2)(2,0):S2] (Jam; C1,19)
- se tiene ya seguro y garantizado que salga una negra [(1,1)(2,0):S2] (Gua; C1,22)
- tenemos la oportunidad de sacar la negra con seguridad [(2,0)(4,0):=] (Pal; C1,12)
- hay una certeza de que salga a fuerzas una negra [(1,1)(2,0):S2] (Raf; C1,22)

En otras respuestas hay un intento de mayor descripción o incluso una cuantificación de la certeza:

- probabilidad total de sacar una negra [(1,1)(2,0):S2] (Rub; C1,6)
- probabilidad segura 2/2 [(0,2)(2,0):S2] (Ram; C2,13)
- hay 2/2=1 de probabilidad [(0,2)(2,0):S2] (Ric; C1,19)
- hay un 100% de que saque una negra [(0,2)(2,0):S2] (Gua; C1,13)
- la probabilidad es de 100% [(0,2)(2,0):S2] (Als; C2,13)

Y otras respuestas mencionan la existencia únicamente de negras o la no existencia de blancas:

- sólo hay dos negras y la probabilidad es 100% de sacarla [(0,2)(2,0):S2] (Ang; C1,13)
- hay un 100% porque está sola [(1,0)(1,1):S1] (Gab; C1,4)
- no existe la probabilidad de sacar blanca, sólo negra [(2,0)(4,1):S1] (Als; C2,14)
- no hay blancas por lo consiguiente 100% de probabilidad de sacar negras [(2,0)(4,1):S1] (Ces; C2,14)

### 5.3.1.2. TRATAMIENTO ESPECIAL AL CERO

Es notable en las respuestas por escrito de los experimentos primero, segundo y cuarto que muchos sujetos usan maneras de expresar el número cero distintas de las que usan para los otros números. Lo más común es que el cero esté escrito con letras y los demás números con numerales (tal vez para evitar la confusión del número 0 con la letra O):

- 0 (cero) probabilidad allá  $[(0,2)(1,1):S2]$  (Jam; C1,5)
- hay la probabilidad de  $\frac{1}{2}$  contra la probabilidad de cero en las otras  $[(0,2)(1,1):S2]$  (Rub; C1,30)

Pero puede ocurrir también que las letras utilizadas para el cero sean de un tipo distinto al del texto:

- la probabilidad es cero, no hay probabilidad  $[(0,2)(0,3):n]$  (Hil; C2,15)

En otros casos el cero si está expresado con numerales pero se distingue de algún modo de los demás números: carece del símbolo de porcentaje que tienen los otros números o aparece entrecomillado:

- 50% de probabilidad aquí y 0 allá  $[(0,2)(2,2):S2]$  (Jua; C1,28)
- la probabilidad... es "0"  $[(0,2)(0,3):n]$  (Gab; C1,26)
- ... probabilidad de "0"... (símbolo del conjunto vacío)  $[(0,2)(2,2):S2]$  (Rub; C1,28)

Esto podría deberse a una percepción por parte de algunos sujetos de que el número cero es distinto, o de que hay que tener cuidado con él; podría incluso tratarse de una forma del "horror al vacío".

Sin embargo, este "horror al cero" no es un fenómeno general: también hay sujetos que expresan el cero de la misma manera en que expresan los demás números:

- la probabilidad aquí es  $\frac{1}{2}$  y allá 0  $[(0,2)(2,2):S2]$  (Jor; C1,28)
- hay una probabilidad y allá cero oportunidades  $[(1,1)(0,3):S1]$  (Mab; C2,11)

Hay incluso dos sujetos que llegan a escribir fracciones con ceros, uno correctamente (0/3, 0/2):

- probabilidad 0/3 y 0/2  $[(0,2)(0,3):=]$  (Ram; C2,15)
- y el otro incorrectamente (0/0):
- en S1 y en S2 no hay negras entonces la probabilidad 0/0  $[(0,2)(1,1):n]$  (Cri; C1,5) (además vio mal la pregunta)

### 5.3.2. FRACCIONES Y PORCENTAJES

Veamos ahora el uso que hacen los sujetos de los números y de las expresiones de cálculos. En la gran mayoría de las respuestas aparecen numerales, pero lo más frecuente es que éstos sirvan únicamente para describir el arreglo o para apoyar una ar-

gumentación en términos de comparaciones. Sin embargo, también hay muchas respuestas que basan su justificación en la expresión de una fracción o un porcentaje. Me permito recalcar que lo que se observa es la expresión de la fracción o del porcentaje, porque como se verá en este apartado el hecho de que una justificación incluya los símbolos "/" ó "%" no necesariamente significa que el sujeto está efectuando correctamente comparaciones u operaciones aritméticas.

### 5.3.2.1. FRACCIONES

En muchas respuestas hay un uso de fracciones para denotar la relación  $f_j/n_j$ . Con una excepción, las fracciones están expresadas correctamente, o sea con los valores exactos de  $f_j$  y  $n_j$ .

Reporto aquí la excepción, porque me parece bastante interesante. Se trata del sujeto Cri del primer experimento, que en la primera aplicación del cuestionario y en las primeras respuestas de la segunda aplicación expresa correctamente fracciones como  $1/2$ ,  $2/3$ , etc. (aunque no forzosamente hace las comparaciones correctamente: hay un par de ejemplos en la pág. (?)), pero en las últimas respuestas busca reflejar no sólo las cantidades sino los nombres mismos de los naipes que salieron:

- ...  $8/2$   $2/2$  ó  $6/2$   $A/2$ ...
- ...  $A/2$  ó  $8/2$ ...
- ...  $A/2$  ó  $5/2$ , en el caso contrario  $J/2$  ó  $A/2$ ...

Después afirma que se basó "en la probabilidad clásica  $P(c) = \text{casos favorables} / \text{casos posibles}$ ". He clasificado esas últimas respuestas como primitivas (por "acomodo": ver §4.5.2.2), pero en realidad creo que se trata de una regresión: después de tener expresiones correctas, al sujeto le parecieron insuficientes, y regresó de lo cuantitativo (cantidad de favorables y de totales) a una mezcla de cualitativo (descripción individual de todas las cartas) con cuantitativo (raya de fracción y "denominador" igual a los casos totales).

Fuera de esa curiosa excepción, las fracciones son correctas en el sentido de que reproducen exactamente los valores de  $f_j$  y  $n_j$ . Hay respuestas en las que ambos lados están así expresados y otras en las que sólo está expresado de esta manera el lado elegido. Sin embargo, el hecho de que una respuesta esté expresada en fracciones numéricas, no necesariamente implica que dichas fracciones estén manejadas de una manera aritmética correcta.

Para estudiar estas formas de expresión consideraré los dos aspectos de la respuesta: la decisión (correcta o incorrecta) y la justificación (con la expresión de sólo una o ambas fracciones). De acuerdo con ello, hay cuatro tipos de respuestas con fracciones:

- decisión correcta, con dos fracciones
- decisión correcta, con una fracción
- decisión incorrecta, con dos fracciones
- decisión incorrecta, con una fracción.

El orden con que las presento corresponde a la amplitud del margen que estas respuestas dejan para especular acerca de los razonamientos que siguen los sujetos.

a) **Uso de fracciones con decisión correcta**

Cuando un sujeto toma la decisión correcta y utiliza dos fracciones en su justificación, creo que se puede suponer que no sólo está expresando los números como cocientes de la forma  $f/n$  sino que además está comparando exitosamente las dos fracciones obtenidas mediante un razonamiento proporcional (aunque no resulta claro si esta comparación es mediante una idea gráfica del modelo de "rebanadas de pastel", mediante el paso a un común denominador o mediante la resolución de los cocientes correspondientes). Las siguientes respuestas corresponden a esta categoría <sup>(30)</sup>, y fueron clasificadas como {P+} o como {P=}:

- es mejor  $2/3$  que  $3/5$  [(2,1)(3,2):S1] (Ale; C1,25) ({P+})
- la probabilidad de  $2/3 > 3/5$  de las otras [(2,1)(3,2):S1] (Rub; C1,25) ({P+})
- probabilidad de  $1/3$  y  $2/6$  [(1,2)(2,4):=] (Ram; C2,10) ({P=})
- la probabilidad de que salga negra es un tercio de los dos lados [(1,2)(2,4):=] (Jor; C1,8) ({P=})
- la probabilidad aquí es dos tercios y ahí un medio [(2,2)(4,2):S2] (Jor; C1,14) ({P+})

Las respuestas con decisión correcta y la expresión en forma de fracción solamente del lado elegido dan pie para pensar desde que la pregunta es tan obvia para el sujeto que expresa sólo una parte de la información que utiliza, hasta que la decisión correcta fue resultado de un acierto aleatorio. Sin embargo, a expresiones como éstas las clasifiqué como {P+}:

- $P = 2/3$  [(1,1)(2,1):S2] (Cri; C1,21)
- son  $2/3$  de probabilidad de sacar negra [(1,1)(2,1):S2] (Jam; C1,21)
- tiene la probabilidad de sacar la negra  $2/3$  [(1,1)(2,1):S2] (Mar; C1,21)
- hay más negras por  $3/4$  de probabilidad [(2,1)(3,1):S2] (Ric; C1,17)

b) **Uso de fracciones con decisión incorrecta**

Cuando la respuesta tiene una elección incorrecta pero las dos fracciones están correctamente expresadas, cabe la duda de si se trata de un mero error de cálculo o si hay alguna incompreensión acerca de la estructura de orden de los números racionales,

<sup>30</sup>. En el trabajo realizado por Maury con alumnos del primer año del nivel medio superior, ella afirma que «de manera general, los alumnos no tuvieron dificultad en la comparación de las fracciones (escritas o no), aunque a veces la técnica empleada no es completamente explícita». No ocurre así en este trabajo, donde hay muchos errores en la comparación de fracciones, como se verá en las siguientes páginas (Maury, 1984, pág. 199).

como se ve en los ejemplos siguientes, de los que resultan las falsas igualdades  $2/3 = 1/2$  y  $2/3 = 3/5$ . Ambos fueron clasificados {P'}:

- en S1 la probabilidad es  $2/3$  y en S2 es  $1/2$  [(1,1)(2,1):=] (Cri; C1,11)
- en S1 la probabilidad es  $2/3$ , aunque también en S2 hay la misma probabilidad  $3/5$  [(2,1)(3,2):=] (Cri; C1,16)

Por último, cuando una respuesta tiene solamente la expresión en forma de fracción del lado elegido pero esta elección es incorrecta, se puede especular acerca de errores de cálculo, incompreensión de la estructura de orden, etc; en todo caso, sólo deja la certeza de que en algún momento el sujeto pudo expresar una fracción. En estos casos, he clasificado como {P'}:

- la probabilidad  $2/3$  [(2,1)(3,1):S1] (Cri; C1,15)
- tengo  $4/8$  de probabilidad de sacar negra [(2,2)(4,4):S2] (Jam; C1,18)
- tengo  $3/5$  de probabilidad de sacar negra [(2,1)(3,2):S2] (Jam; C1,25)

#### 5.3.2.2. PORCENTAJES

Las respuestas expresadas en términos de porcentajes son comparables a las que conllevan fracciones, con una salvedad: a las dos variables que he manejado en el caso de las fracciones (corrección o incorrección de la decisión y número de fracciones expresadas) agrego ahora el de la corrección del propio resultado porcentual, en tres categorías: exacto, aproximado e incorrecto. Así, el margen que dejan para especulaciones los tipos de respuestas con porcentajes es mayor si el resultado es incorrecto que si es aproximado y mayor si es aproximado que si es exacto; es mayor si la decisión es incorrecta que si es correcta; es mayor si hay un porcentaje que si hay dos.

Hay entonces tres grandes categorías en el rango de respuestas:

- las que tienen uno o dos resultados exactos y una decisión correcta, que dan bastante pie para pensar que el sujeto está aplicando correctamente un razonamiento proporcional;
- las que tienen uno o dos resultados aproximados, o uno o dos resultados exactos con una decisión incorrecta, que sugieren que en un intento de razonamiento proporcional ocurrió alguna clase de error;
- las que expresan uno o dos porcentajes que no corresponden a los números del arreglo y que sólo permiten pensar que el sujeto tiene una vaga idea de que el tipo de problema planteado tiene alguna relación con los porcentajes, como la del siguiente ejemplo, que no da pie para pensar en ningún intento real de razonamiento proporcional:
  - existen negras 40% 3-5 2-3 [(2,1)(3,2):=] (Fat; C1,16)

En la siguiente revisión, hay que tener en cuenta que así como la presencia del símbolo "/" no garantiza que el sujeto esté

haciendo un uso adecuado de las fracciones, tampoco el símbolo "%" garantiza que el uso de los porcentajes sea correcto. Incluso el hecho de que los porcentajes estén correctamente calculados no implica necesariamente que el sujeto los esté utilizando de una manera acorde con la Teoría de la Probabilidad.

Veamos ahora ejemplos de las tres grandes categorías recién mencionadas:

**a) Usos correctos**

La primera categoría consta, por una parte, de respuestas con dos resultados porcentuales exactos y una decisión correcta, como en los siguientes ejemplos (obsérvese que en el primero de ellos la respuesta está expresada en términos decimales y no porcentuales <sup>31</sup>):

- es mejor .5 que .25 de probabilidad [(1,3)(2,2):S2] (Ale; C1,23)
  - 75% de probabilidad, mientras que allá 66.6 % de probabilidad [(2,1)(3,1):S2] (Jua; C1,15)
  - hay un 50% de que salga y un 50% de que no salga [(1,3)(2,2):S2] (Gua; C1,23)
- y, por otra parte, de respuestas con un solo resultado porcentual exacto en la justificación y una decisión correcta:
- de las cuatro hay una probabilidad del 50% de sacar una negra [(1,3)(2,2):S2] (Gab; C1,23)
  - tiene 66% de probabilidad [(1,1)(2,1):S2] (May; C1,11)

En general, estas respuestas fueron clasificadas como {P+} (como los ejemplos de los sujetos Ale, Jua, Gab y May recién citados), pero también hay casos en los que la interpretación fue {E<} ó {E>} (como el ejemplo de Gua).

**b) Usos parcialmente correctos**

En la segunda categoría hay varias clases de respuestas: por un lado, las que tienen un solo resultado porcentual correcto pero en las que la decisión es incorrecta:

- en cinco cartas hay tres negras la probabilidad de que salga negra es al 60% aprox [(2,1)(3,2):S2] (Paz; C1,16)
  - es uno a uno... sería el 50% de probabilidad que sea blanca o negra, allá son dos negros, pero... la sacaría de SI [(1,1)(2,1):S1] (O; C6,6)

Por otro lado, están las respuestas con resultados aproximados, entre las que es evidente que los resultados porcentuales aproximados tampoco garantizan que el uso de los porcentajes sea adecuado. Puede haber elecciones correctas acompañadas de dos resultados porcentuales aproximados:

<sup>31</sup>. Puede observarse que este ejemplo corresponde a la segunda aplicación del cuestionario en el experimento C1, por lo que podría pensarse que la forma de la expresión podría estar influenciada o determinada por el tema de Probabilidad abordado en el curso.



- 60% de probabilidad, mientras que allá 50% de probabilidad [(2,2)(4,2):S2] (Jua; C1,14)
- hay un 50% en cambio allá hay un 30% [(1,1)(1,2):S1] (Als; C2,16)

También ocurren elecciones correctas acompañadas de un solo resultado aproximado (el del lado elegido):

- hay cuatro cartas negras y dos blancas, probabilidad de una negra al 70% [(2,2)(4,2):S2] (Paz; C1,14)
- ... escojo éstas porque tengo 75% de probabilidad de sacar la negra [(1,1)(2,1):S2] (Jam; C1, 11)

Pero también los resultados aproximados pueden acompañar a una elección incorrecta:

- hay 35% de proba [(1,2)(2,4):S2] (May; C1,8)

Las respuestas de esta categoría fueron mayoritariamente clasificadas como {P'}, aunque hay excepciones, como el ejemplo citado de (0; C6,6), en el que la interpretación fue {E5 - F+}.

Obsérvese que cuando los porcentajes en una respuesta son resultados aproximados, no hay manera de saber si son producto de un cálculo aritmético aproximado o de una estimación expresada en términos numéricos.

Por otra parte, cuando sólo aparece el resultado porcentual correspondiente al lado elegido, hay varias situaciones posibles. Puede haber ocurrido que el otro porcentaje haya sido calculado y comparado pero que no haya quedado expresado en la respuesta (por ejemplo, en el primer ejemplo citado (Paz; C1,16), podría haber ocurrido que el sujeto haya calculado también el porcentaje del otro espacio muestral y, al encontrar un resultado igual o parecido (60%), haya compensado la igualdad mediante alguna otra estrategia que no explicitó). Puede haber ocurrido que sólo se calculó uno de los porcentajes, en cuyo caso cabe la posibilidad de que la decisión fue tomada antes del cálculo por medio de otra estrategia, y luego el porcentaje se usó sólo para justificar la decisión.

### c) Usos incorrectos

En la tercera categoría están los resultados que no se pueden catalogar como aproximados porque difieren en demasía del resultado correcto, en los que cabe la duda de si el sujeto está cometiendo un error en una operación planteada correctamente o si está efectuando una operación incorrecta o si está haciendo una estimación numérica. No tiene en estos casos mucha pertinencia anotar si los resultados incorrectos acompañan a elecciones correctas o incorrectas, porque puede ocurrir que dos resultados incorrectos mantengan la relación de orden de los resultados correctos:

- existe un 75% de probabilidad aquí y 33.3% allá [(2,1)(3,1):S2] (Jua; C1,17)
- 66% de probabilidad, mientras que allá 40% de probabilidad [(2,1)(3,2):S1] (Jua; C1,16)

Pero también puede ocurrir que no mantengan la relación de orden de los resultados correctos:

- en S2 hay un 75% de probabilidad y en S1 un 50% de probabilidad [(2,1)(3,2):=] (Gab; C1,16)

Conviene en todo caso observar que, como en el caso de los resultados correctos y los aproximados, los incorrectos pueden presentarse en respuestas con dos porcentajes como las de los ejemplos anteriores o en respuestas con uno solo (el del lado elegido). Estas pueden llevar una decisión correcta, como en los siguientes ejemplos:

- tiene 40% de probabilidad [(2,2)(4,2):S2] (May; C1,14)
- tres negras en cuatro cartas mayor probabilidad de sacar una negra (aprox 90%) [(2,1)(3,1):S2] (Paz; C1,15)
- no me interesa que haya más negras allá, pero aquí nada más tengo una opción de perder, entonces tengo más, tengo un 90% de ganar [(4,1)(6,2):S1] (V; C3,22)

O una decisión incorrecta:

- 50% de probabilidad, allá en las tres cartas hay una negra y aquí en las dos cartas hay una negra [(1,1)(1,2):S1] (Jam; C1,10)

De las respuestas de esta categoría, algunas fueron clasificadas como {P'}, pero hay otras respuestas que recibieron otras interpretaciones, como {D- → F+} (V; C3,22), o {N- \* F=} (Jam; C1,10), o {F+} (Gab; C1,8).

En estos resultados incorrectos llama la atención la incidencia de los números 40%, 50%, 75% y 90%. He aquí algunas hipótesis acerca de cómo estos números pueden estar correspondiendo a estimaciones expresadas numéricamente:

- el porcentaje 90% podría estar calculado con un mecanismo así: "100% menos una blanca es más o menos como 100% menos 10%, o sea 90%":
  - tres negras en cuatro cartas mayor probabilidad de sacar una negra (aprox 90%) [(2,1)(3,1):S2] (Paz; C1,15)
- el porcentaje 50% puede corresponder en un primer acercamiento a "todo lo que no es ni 100% ni 0%":
  - 50% igual [(1,3)(2,2):=] (Jam; C1,9)
- en un segundo acercamiento, lo que está entre 0% y 50% caería en 40%, y lo que está entre 50% y 100% en 75%:
  - tiene 40% de probabilidad [(2,1)(3,2):S2] (May; C1,16)
  - en las tres de aquí hay dos negras y en las dos de ahí hay una. Escojo éstas porque tengo 75% de probabilidad de sacar la negra [(1,1)(2,1):S2] (Jam; C1,11)

Por otro lado, en algunos casos se puede especular acerca de la manera de efectuar los cálculos, que de otro modo podrían parecer absurdos. He aquí algunos ejemplos: en

- hay un 50% de más de este lado [(1,2)(2,4):S2] (Gab; C1,8)
- el sujeto puede haber considerado que como S1 es 50% de S2, entonces hay 50% menos del lado de S1 y "por lo tanto", 50% de más del lado S2. En

- ... van ganando 25% las negras... parejas de 100%, sobra una negra [(3,4)(4,3):S2] (J; C3,21)

el 25% puede haber sido calculado en S2 como resultado de una negra más tres parejas, "o sea" una negra de cuatro, o sea 25%. Por último, creo que vale la pena llamar la atención sobre algunos resultados del sujeto Jua:

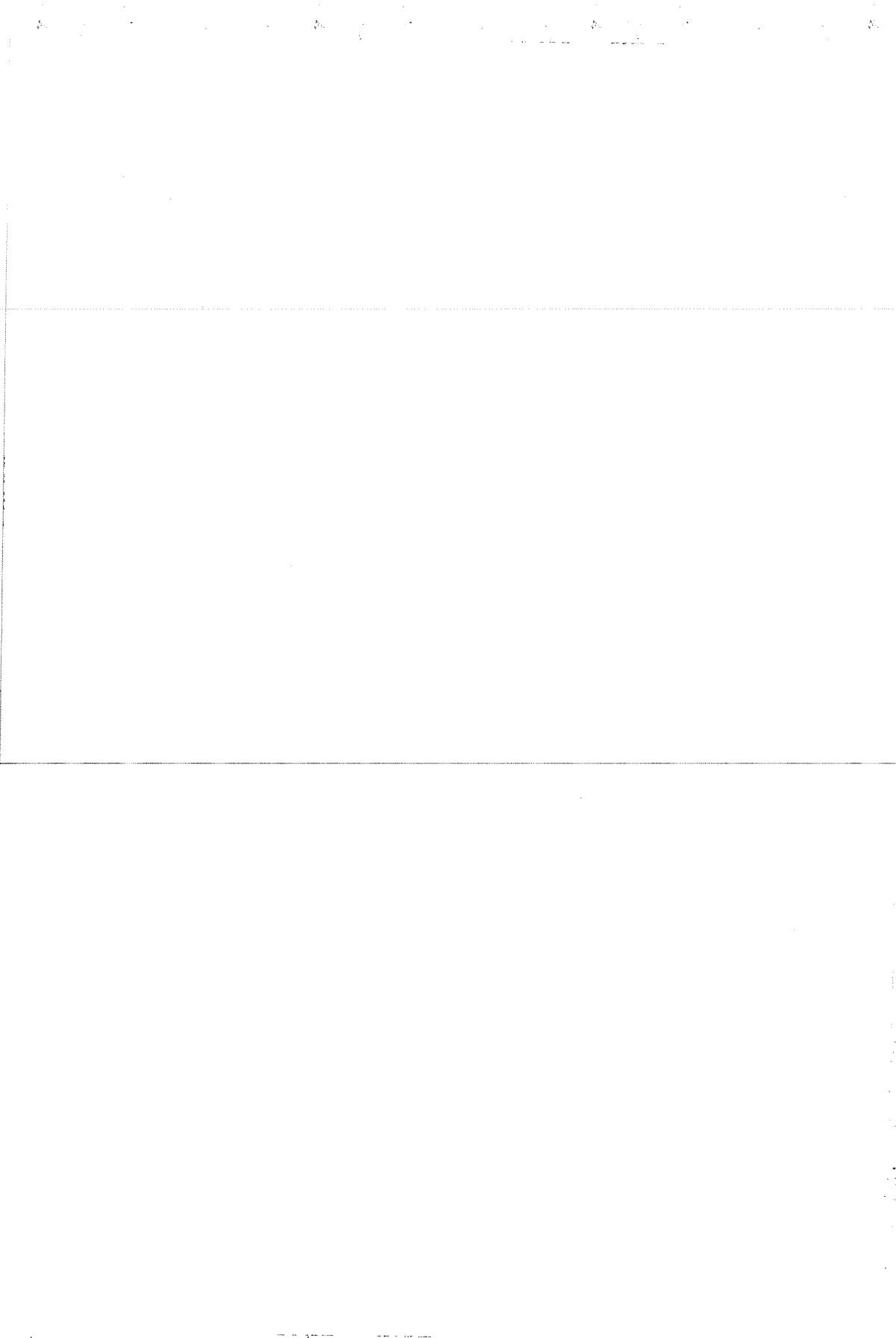
- 66% de probabilidad, mientras que allá 40% de probabilidad [(2,1)(3,2):S1] (Jua; C1,16)
- existe un 75% de probabilidad aquí y 33.3% allá [(2,1)(3,1):S2] (Jua; C1,17)
- existe un 50% de probabilidad aquí y 33.3% allá [(1,1)(2,1):S1] (Jua; C1,21)
- existe un 33.3% de probabilidad allí y 60% acá [(2,1)(3,2):S2] (Jua; C1,25)

En estas respuestas, el sujeto calcula correctamente el porcentaje de negras en el lado elegido, pero compara con el porcentaje de blancas en el lado no elegido.

Finalmente, es pertinente observar que no necesariamente hay una gran diferencia entre las respuestas que utilizan fracciones y las que utilizan resultados porcentuales. Un ejemplo curioso de ello son las siguientes respuestas de dos sujetos diferentes a la misma pregunta:

- en S1 la probabilidad es  $2/3$ , aunque también en S2 hay la misma probabilidad  $3/5$  [(2,1)(3,2):=] (Cri; C1,16)
- en S2 hay un 75% de probabilidad y en S1 un 50% de probabilidad [(2,1)(3,2):=] (Gab; C1,16)

Ambos llegan a la decisión incorrecta "da igual" mediante la utilización de una igualdad incorrecta; en un caso  $2/3 = 3/5$ , y en el otro  $75\% = 50\%$ .



## 6. INTEGRACION METODOLOGICA

Uno de los objetivos que planteé para este estudio de las respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad fue que, cuando no fuera posible utilizar la metodología usada por otros autores en trabajos similares, o cuando no existiera ninguna, yo intentaría construir una metodología adecuada.

En los cuatro capítulos anteriores he expuesto cómo se plantearon tres líneas metodológicas, y cómo se fue construyendo cada una. Ahora pretendo explicar cómo es que esa construcción era efectivamente necesaria y cómo fue el proceso de la construcción. Además, una vez que las líneas han sido presentadas, puedo plantear algunos ejemplos de cómo interactúan entre sí. Estos dos aspectos cubren las dos primeras secciones del capítulo.

La tercera sección se dedicará a la metodología con la que se efectuará, en el capítulo 7, el análisis de los resultados, mientras que la cuarta y última pretende voltear hacia atrás una mirada evaluativa y abarcar el proceso de construcción metodológica.

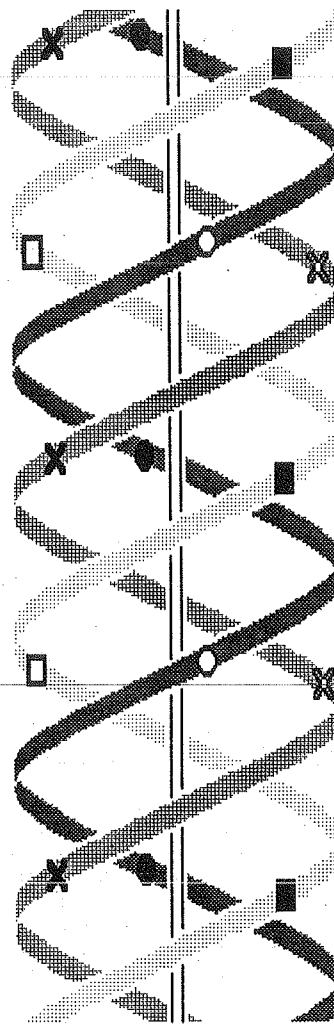
Así, este capítulo cierra la segunda parte del trabajo, dedicada a la metodología.

### 6.1. CONSTRUCCION DE LA METODOLOGIA

En los trabajos consultados de otros autores no existe una metodología aplicable directamente al problema que se había planteado. La principal razón es que hay muy pocos trabajos dirigidos a contestar preguntas del estilo de "¿qué estrategias de solución utilizan los sujetos ante qué tipo de situaciones en problemas probabilísticos?". Si a la pregunta se le agrega que los sujetos son adultos y los problemas son de decisión binaria, los trabajos que hay se pueden contar con los dedos de una mano.

Sin embargo, muchos de los elementos que yo he considerado para la construcción de la metodología han sido contemplados también por otros autores, frecuentemente con otros términos, otra notación y, lo que resulta más importante, con otras finalidades.

Ciertamente, no tenía sentido reconstruir con esos elementos una metodología que no hubiera resultado más que un conjunto de parches: lo único sensato era, partiendo de los elementos existentes más adecuados, construir las líneas metodológicas tal y como se explicó en el capítulo 2 y como se desarrolló en los subsiguientes, es decir de acuerdo con el esquema de la triple hélice:



### LÍNEA DE LAS PREGUNTAS:

- X situaciones
- X cuestionario

### LÍNEA DE LAS RESPUESTAS:

- estrategias
- interpretación

### LÍNEA DE LOS MÉTODOS:

- interrogación
- descifrado

### EJE DEL TIEMPO:



Sin embargo, no quiero dejar sin exponer cuáles eran los elementos que otros investigadores habían propuesto, así como cuáles fueron su utilidad y sus cotas en la construcción emprendida.

### 6.1.1. SITUACIONES

Las variables que he manejado para definir las categorías de situaciones son: las combinaciones (que a su vez son, como su nombre lo indica, una combinación de las variables  $n$ ,  $f$ ,  $d$ ,  $r$  y  $p$ ), las ubicaciones, las variables de perceptividad ( $\delta_p$ ,  $\delta_s$ ,  $\delta_0$  y  $\delta_1$ ), los unos ( $U_r$  y  $U_d$ ) y las variables de multiplicidad ( $D$  y  $E$ ).

De alguna manera o de otra, muchas de estas variables habían sido consideradas por otros autores. En particular, muchas investigaciones están basadas en el sistema piagetiano de diez preguntas (que yo he denotado P1 a P10), que permite la observación (en algunos casos) de algunas estrategias de centración y de las estrategias de razonamiento proporcional.

Otras de las variables no habían sido consideradas por otros investigadores, y ninguno de los trabajos consultados abarca esta cantidad de variables ni la sistematización introducida en su clasificación.

#### 6.1.1.1. COMBINACIONES

Las combinaciones son una serie de situaciones diseñadas para la observación diferencial de las estrategias de centración (en casos totales, favorables y desfavorables) y de las estrategias de relación sustractiva y proporcional. Por observación diferencial me refiero al hecho de que las combinaciones permiten saber, para cada pregunta planteada, cuáles de las diferentes estrategias se pueden estar manifestando y cuáles de ellas llevan a cada una de las tres diferentes respuestas posibles.

El sistema piagetiano de diez preguntas permite también la observación de estrategias de centración y de relación. Sin embargo, no permite la observación de todas las estrategias mencionadas, ni la observación diferencial de ellas.

Por ejemplo, el sistema piagetiano permite comparar la ocurrencia de las estrategias de centración en los casos favorables y en los casos totales, en particular a través de las preguntas "de una variable" P8 (desigualdad de los casos favorables e igualdad de los casos posibles) y P9 (igualdad de los casos favorables y desigualdad de los casos posibles), pero sólo en el caso de las estrategias de igualdad  $\{N=\}$  y  $\{F=\}$ : las estrategias  $\{N-\}$  y  $\{F+\}$ , que se podrían manifestar como correctas respectivamente en P9 y P8, quedan confundidas entre muchas otras estrategias incorrectas en las preguntas "de dos variables".

El sistema piagetiano tampoco permite la observación de la estrategia  $\{D=\}$ , puesto que nunca considera la observación específica de la situación de igualdad de los casos desfavorables y desigualdad de los casos posibles (que llamé P9' en el capítulo 3).

Esto podría describirse como una "centración" de Piaget e Inhelder en la respuesta correcta buscada: exclusivamente una razón de la forma  $f/n$ . Es una "centración" que interviene a nivel metodológico: como la construcción de las preguntas está guiada

por las categorías con las que se pretende realizar la interpretación de las respuestas, y como Piaget e Inhelder sólo toman como respuesta correcta a la probabilidad formal, nunca consideran como variable importante los casos desfavorables (1). Para estos autores, como la situación P9' es formalmente equivalente a la situación P9, no hay necesidad de explorarla específicamente. Personalmente, opino que la diferencia está en que las situaciones P9 y P9' no son perceptualmente equivalentes, y coincido con Hawkins y Kapadia cuando le reprochan a Piaget su énfasis «en los conceptos de la probabilidad formal más que en la capacidad de procesar la información probabilística de manera significativa y útil» (Hawkins y Kapadia, 1984, pág. 355).

Por otra parte, el sistema piagetiano sólo permite la observación de estrategias de relación proporcional, y no está dirigido a detectar y caracterizar las de relación sustractiva (aunque Piaget e Inhelder reconocen esta estrategia, como veremos más adelante).

Finalmente, el sistema piagetiano de diez preguntas no permite diferenciar situacionalmente la ocurrencia de una estrategia de la de otra. Esto no se debe a un error de Piaget e Inhelder, sino al hecho de que su sistema está diseñado para fines distintos que el mío: las diez preguntas no están dirigidas a saber en qué situaciones los sujetos utilizan qué estrategias, sino en qué estadio de desarrollo los sujetos responden correctamente a qué tipo de preguntas.

Muchos investigadores han tomado la clasificación piagetiana en diez preguntas tal cual, sin incluir otras posibilidades ni diferenciar unas de otras, aunque sus objetivos no han sido necesariamente los mismos que los de Piaget e Inhelder en 1951. No fue sino hasta 1980 que las categorías fueron afinadas, por Falk et al. Estos investigadores diseñaron su experimento considerando las relaciones de orden entre los casos totales, los casos favorables y las probabilidades, es decir considerando las variables que yo he definido como  $n$ ,  $f$  y  $p$ , aunque sólo en preguntas sin proporcionalidad (es decir, excluyendo los casos en los que  $p=0$ ). Después agregaron también la variable  $d$ . Obtuvieron las siete categorías mostradas en la tabla de la siguiente página, en la que "mayor", "menor" e "igual" se refieren al lado correcto y en la que se ha puesto el equivalente a mis combinaciones (2):

Así, la afinación introducida por Falk et al. en el sistema piagetiano es doble: introduce la variable  $d$  y además permite la observación diferencial de las estrategias. Sin embargo, no introduce la variable  $r$  que permite la observación de las estrategias de relación sustractivas, ni el valor  $p=0$  para los casos de proporcionalidad.

1. La "centración" se manifiesta incluso en la notación utilizada: Piaget e Inhelder se refieren a las preguntas planteadas como una comparación de cocientes. Por ejemplo, denotan como  $2/3$  vs  $5/9$  lo que yo marco como  $(2,1)(5,4)$ .
2. Por cierto, Falk et al. (1980, pág. 191) utilizan también el término "combinaciones", aunque más bien en el sentido de "posibilidades diferentes" que en el que yo planteo aquí.



n mayor, f mayor, d mayor:	combinaciones K6, K8, K10	(111r1)
n mayor, f mayor, d menor:	combinación K1	(11211)
n mayor, f mayor, d igual:	combinación K4	(11011)
n menor, f mayor, d menor:	combinación K2	(12122)
n menor, f mayor, d menor:	combinaciones K7, K9, K11	(111r2)
n menor, f igual, d menor:	combinación K5	(10122)
n igual, f mayor, d menor:	combinación K3	(01211)

#### 6.1.1.2. UBICACIONES

Las ubicaciones son una serie de situaciones diseñadas para la observación diferencial de las estrategias de relación de orden, es decir las estrategias de equilibrio. Como la relación de orden es entre las probabilidades  $P_1$  y  $P_2$  por una parte y el punto medio  $p=0.5$ , y como las diferentes posibilidades pueden ocurrir en casi todas las combinaciones, era importante definir las ubicaciones como una variable aparte.

Los únicos investigadores que han considerado esta variable son, nuevamente, Falk et al. (1980, pág. 187), cuando afirman que «la comparación [entre dos espacios muestrales] podría variar también con respecto a la diferencia entre dos proporciones». Ellos definen tres valores para esta variable, de acuerdo con la dificultad asociada a la comparación:

"fácil", que es equivalente a mi ubicación U2.3 ("pierdo"-  
"gano");

"regular", que es equivalente a la unión de U2.2 y U2.4  
("pierdo-empato" y "empato-gano"); Y

"difícil", que es equivalente a la unión de U3.2 y U3.4  
("pierdo-pierdo" y "gano-gano").

Así, las diferencias entre las categorías de Falk et al. y las mías radican en la inclusión por mi parte de las ubicaciones extremas correspondientes a imposibilidades y/o certezas, en la inclusión de "empato-empato" (en situación de proporcionalidad) y en la diferenciación de las categorías "regular" y "difícil" según que se trate de "pierdo" o de "gano".

#### 6.1.1.3. PERCEPTIVIDAD

A pesar de que la afirmación recién citada de Falk et al. se refiere a «la diferencia entre dos proporciones», estos autores no la manejan directamente (es decir, como  $|P_1 - P_2|$ , que es lo que yo definí como  $\delta_p$ ), sino a través de la ubicación de ambas con respecto a 0.5. Por su parte, Lecoutre (1984, pág. 892) reconoce también que esta diferencia puede tener efectos en los resultados, y opta por no introducirla como una variable: «se le pide al sujeto que dé juicios probabilistas "espontáneos", y es por ello que las probabilidades de los eventos A y B son o bien exactamente las mismas o bien netamente diferentes».

En la bibliografía que logré reunir y consultar, los únicos autores que manejan explícita y sistemáticamente la diferencia entre los valores reales de ambas razones son Hoemann y Ross (1971), quienes manejan los niveles  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  y, en algún caso,  $\frac{1}{16}$  (es decir,  $|p_1 - p_2| = 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625$ , que se traducen a  $\delta_p = G, M, M, C$ ). El tomar en cuenta esta diferencia obedece también a razones de carácter perceptual: «el argumento central [de Hoemann y Ross] es que, en algunos problemas, los resultados que se podrían obtener a partir de una estimación podrían ser obtenidos con la misma facilidad por comparación directa de los tamaños, mientras que en otras tareas la diferencia entre los dos procesos resulta aparente» (Fischbein, 1975, pág. 87).

Hoemann y Ross no consideran, empero, otras variables que podrían ser perceptualmente importantes, en particular las diferencias entre las probabilidades y los puntos "clave" 0.5, 0 y 1.

#### 6.1.1.4. UNOS Y MULTIPLICIDAD

Estas variables fueron introducidas para la definición de situaciones al final de mi trabajo, a raíz de la re-lectura del artículo de Noelting (1980) sobre razonamiento proporcional. Sin embargo, él no habla de ellas como definitorias de situaciones que deban ser exploradas específicamente: no intenta ver experimentalmente si hay variaciones en las estrategias de proporcionalidad (y, en particular, en las estrategias de tipo DENTRO y las de tipo ENTRE) ante situaciones en las que haya unos y situaciones en las que no, ni ante situaciones sin unos con diferentes valores de  $D$  y  $E$  (3).

#### 6.1.2. ESTRATEGIAS

En cuanto a las estrategias, unas (como las de centración y las de proporcionalidad) aparecen claramente desde el texto clásico de Piaget e Inhelder (1951), mientras que otras han estado sujetas a discusión.

Antes de entrar en cómo consideran otros autores las categorías de estrategias con las que yo he trabajado, conviene hacer un comentario.

Contrariamente a lo que ocurre con las categorías para las preguntas, donde la mayoría de los trabajos utilizan las categorías piagetianas (y algunos las modifican ligeramente), las categorías para las respuestas con que trabajan la mayoría de los investigadores difieren bastante unas de otras.

Para algunos, sólo se establecen estrategias correctas y estrategias incorrectas (y la diferencia entre ellos radica en cuál

3. En los anexos 1 y 2 se pueden encontrar múltiples ejemplos de  $D=1$  y  $E=1$  con  $U_f=1$  ó  $U_f=0$  y con  $U_a=1$  ó  $U_a=0$ , así como múltiples ejemplos de  $U_f=0$  y  $U_a=0$  en los que  $D=0,1,2,3$  ó  $E=0,1,2,3$ .

les estrategias se consideran correctas). Entre ellos están Piaget e Inhelder (1951), quienes sólo reconocen como estrategia correcta el cociente  $f/n$ ; todas las demás son incorrectas (entre ellas hablan de las centraciones y de las de relación aditiva). Maury (1984, 1986) establece tres categorías de respuesta: correcta (argumentación pertinente), incorrecta (argumentación no pertinente) y mixta (dos tipos de argumentación); tiene además una lista de cuáles argumentaciones son pertinentes y cuáles son no pertinentes.

Otros se ocupan, más que de la corrección, de la coherencia interna. Así, Lecoutre (1984) establece las categorías: coherente correcta, coherente en problemas de equiprobabilidad y no coherente.

Otros investigadores más intentan establecer una jerarquía entre las estrategias. Así Fischbein et al. (1970) hablan de: centraciones (basadas en una comparación binaria simple), estrategias de transición (basadas en los cuatro términos numéricos pero sin indicar las razones numéricas) y estrategias de razonamiento proporcional. En un caso similar está el trabajo de Thornton y Fuller (1981), quienes clasificaron los razonamientos para problemas de proporcionalidad en cinco categorías (las dos primeras, concretas, la tercera de transición y las dos últimas de razonamiento formal):

- 1) Intuitivo (sin respuesta o por adivinación);
- 2) Aditivo (suma o resta para obtener una respuesta);
- 3) Intento de cociente (intenta un cociente pero falla por razones no aritméticas);
- 4) Fórmula del cociente (utiliza el razonamiento proporcional para plantear una ecuación y resolver por despeje de la incógnita);
- 5) Conversión (introduce una nueva cantidad como un factor de conversión y luego multiplica o divide).

Sin embargo, el hecho de que los autores mencionados (y otros más) no utilicen las categorías que yo he definido para el análisis de las respuestas no se debe a que sus sujetos no manifesten las estrategias que yo observo, ni (en la mayoría de los casos) a que los investigadores no las detecten, sino que no son lo que les resalta como importante para el establecimiento de categorías. Como lo comenté en el capítulo 4, lo que me ha resaltaado a mí es la cantidad y calidad de las clases de elementos que entran en juego en una estrategia, ya que ello lleva a una jerarquización de las estrategias por nivel de complejidad.

#### 6.1.2.1. CENTRACIONES

Las estrategias de centración fueron reconocidas y definidas por los propios Piaget e Inhelder en 1951. Son estrategias universalmente conocidas y aceptadas. Lo único que yo he hecho al respecto es agregarles si son "positivas", "negativas" o "de igualdad".

### 6.1.2.2. RELACIONES

No ocurre lo mismo con las estrategias de relación. Algunas de ellas no son reconocidas por todos los investigadores; en el planteamiento de otras hay aún discusiones.

#### a) Estrategias de equilibrio

Las estrategias de equilibrio son poco reconocidas como estrategias por otros autores. Entre ellos están Falk et al., quienes observan que

«un niño que enfrenta un problema "fácil" ["pierdo-gano"], o "regular" ["pierdo-empato" o "empato-gano"] puede comparar las cantidades absolutas de los dos colores dentro de cada conjunto y elegir aquél en el que el número de favorables es mayoría. Estaría en lo correcto. Sólo con los problemas "difíciles" ["pierdo-pierdo" o "gano-gano"] no hay manera de evitar la comparación entre dos razones». (Falk et al., 1980, pág. 187)

Lema y Morfín (1981, pág. 185) también detectan en algunos sujetos las estrategias que yo he definido como de equilibrio, aunque las llaman de "no cuantificación" e indican que los sujetos que las utilizan «consideran las cantidades en forma aproximada». La descripción me parece poco afortunada: por una parte, aunque es cierto que en las estrategias de equilibrio no hay cuantificación, puede contraargüirse que no son las únicas con esta característica: también las estrategias de centración son de "no cuantificación", porque no implican una cuantificación sino una comparación (4). Por otra parte, me parece que los sujetos que utilizan las estrategias de equilibrio no llegan a sus respuestas por una simplificación en el procedimiento de cálculo o en los resultados (aproximación), sino por una simplificación del problema mismo (comparación común con un solo valor:  $\frac{1}{2}$ ).

Noelting, en los experimentos del jugo de naranja, describe estas estrategias como la «comparación entre términos complementarios de cada pareja ordenada, y luego comparación del resultado», es decir como la comparación entre  $f_1$  y  $d_1$  por una parte y entre  $f_2$  y  $d_2$  por otra y luego comparación del resultado (5) (Noelting, 1980, pág. 337).

La estrategia que no he visto identificada como tal entre los investigadores que he revisado es la estrategia de igualdad {E=}, que, contrariamente a sus contrapartes {E<} y {E>}, es una estrategia incorrecta (6).

4. Ver también al respecto mis comentarios al término "cuantificación" en el capítulo 1 (§1.5.1.3).

5. Nosotras hemos detectado también las estrategias de equilibrio en un experimento similar a los de Noelting con jugo de naranja (Alatorre y Mendiola, resultados no publicados).

6. La definición de estrategias correctas e incorrectas se hará más adelante, en el §6.3.1, pág. 323.

## b) Estrategias de resta

Las estrategias de resta han sido detectadas por muchos investigadores. Sin embargo, hay algunas discusiones al respecto. Yo plantearé aquí dos objeciones que tengo con respecto a Piaget e Inhelder por una parte y a Noelting por otra.

Como en otros casos, el referente más cercano para hablar de estrategias de resta es el de Falk et al.:

«Imagínese el lector a un niño que ha avanzado más allá de ocuparse exclusivamente del número de elementos de un solo color. El niño se da cuenta de que debe considerar simultáneamente los elementos favorables y los desfavorables. El problema que surge es ahora el de integrar ambas dimensiones en un solo número. Se le puede ocurrir la idea de calcular la *diferencia* entre los números de elementos de los dos colores más que en la razón.» (Falk et al., 1980, pág. 198)

Como mencionamos en el capítulo 4, la estrategia de resta va un paso más allá no sólo de las centraciones, que consideran una sola clase de elementos, sino de las estrategias de equilibrio, que aunque consideran elementos de dos clases sólo lo hacen mediante una relación de orden. La estrategia de resta integra toda la información numérica del problema.

Piaget e Inhelder, sin embargo, no consideran que las estrategias de resta signifiquen un progreso notable con respecto a otras estrategias utilizadas por los niños anteriormente al estadio de las operaciones concretas; ellos describen que el niño de este estadio,

«para tomar en cuenta las partes y el todo a la vez, comienza por razonar alternativamente sobre los casos favorables como si el todo quedara constante, luego sobre los casos desfavorables como si los favorables quedaran constantes, después de lo cual, si el método le parece insuficiente, se limita a comparar la diferencia de las dos partes: favorables menos desfavorables o viceversa.» (Piaget e Inhelder, 1951, pág. 147) (subrayados míos).

Esta cita ilustra una vez más lo que he descrito como la "centración" de Piaget e Inhelder en la probabilidad formal: están tan inmersos en la posición de que la única respuesta correcta es la comparación de las razones de favorables sobre totales, que cualquier estrategia diferente es un fracaso. De acuerdo con su descripción, parecería que la inmadurez del niño consiste en que sólo dispone de la estrategia de proporcionalidad en dos casos particulares (cuando el todo es constante y cuando los favorables son constantes), aunque por cierto sabe que son casos particulares, y que cuando se enfrenta al caso más general intenta aplicar sus conocimientos parciales y, ante el fracaso evidente, "se limita" a hacer una comparación mucho más simple e incorrecta.

Yo discrepo de esta visión en dos puntos importantes. En primer lugar, el hecho de que el niño haya podido resolver las

situaciones piagetianas P8 y P9 no se debe a la disponibilidad parcial de una estrategia correcta general, sino a que en esas situaciones (así como en P9') las estrategias de centración (que son incorrectas) llevan consistentemente a una respuesta correcta. En segundo lugar, la comparación de la diferencia entre favorables y desfavorables no es algo más simple sino más complicado que la sola comparación de favorables o de desfavorables. Parafraseando a Piaget e Inhelder, yo describiría al niño en esa situación con los siguientes términos:

para tomar en cuenta las partes y el todo a la vez, comienza por razonar alternativamente sobre los casos favorables, luego sobre los casos desfavorables, después de lo cual, si el método le parece insuficiente, llega a comparar la diferencia de las dos partes: favorables menos desfavorables o viceversa.

En cuando a mi objeción a Noelting, se debe a que este autor denomina a las estrategias de resta estrategias de "multiplicación conjunta" (Noelting, 1980, pág. 230).

Explicaré con un ejemplo a qué se refiere, y para ello utilizaré el arreglo (1,3)(2,5) con el que se trabajó en los capítulos 3 y 4: en S1 se tiene que  $(1,3) = (1,1) + (0,2)$  y en S2 se tiene que  $(2,5) = (2,2) + (0,3) = 2(1,1) + (0,3)$ . La eliminación de las parejas (1,1) y (2,2) deja para los desfavorables la comparación  $(0,2) < (0,3)$ , que lleva a la elección de S1. Argumenta Noelting:

«Este tipo de argumento ha sido llamado "aditivo" por Piaget. Sin embargo se puede ver que es un argumento aditivo después de una co-multiplicación. El problema está "fragmentado" en partes, una parte "interna" y otra "externa", porque la compensación multiplicativa uno-uno es inadecuada para el tratamiento de todos los datos, y deja un residuo en el medio que es tratado aditivamente.» (Noelting, 1980, pág. 233)

Así, según Noelting, lo que el sujeto compara no es  $d_1 - f_1 = 3 - 1 = 2$  contra  $d_2 - f_2 = 5 - 2 = 3$ , sino  $d_1 - kf_1 = 3 - k \cdot 1 = 3 - 1 \cdot 1 = 3 - 2$  contra  $d_2 - kf_2 = 5 - k \cdot 2 = 5 - 1 \cdot 2 = 5 - 2 = 3$ . Lo que ocurre es que en este caso el argumento se vuelve innecesariamente complicado, porque como  $k=1$  la multiplicación planteada es trivial. Yo no he encontrado respuestas de individuos en los que estos modelos tuvieran un valor de  $k$  distinto de uno (7), por lo que coincido con Piaget en decir que es-

7. Noelting (1980, pág. 241) cita un ejemplo en el que  $k=2$ : «igual, porque en los dos hay 1/2 vaso de agua menos que la mitad del jugo» (5,2)(7,3) (edad: 12;3):  $f_1 - 2d_1 = f_2 - 2d_2$ . Después de la realización de este trabajo, nosotras encontramos un ejemplo parecido, en el que la argumentación estaba favorecida por la presentación gráfica con "paquetes" similares: (5,2) como un favorable más dos paquetes (2,1) y (7,3) como un favorable más tres paquetes (2,1). Aún así, optaría más por definir estas respuestas como un caso especial que por hablar en general de multiplicación conjunta (Alatorre y Mendiola, resultados no publicados).

tos argumentos son de tipo aditivo y no de tipo multiplicativo ni co-multiplicativo (especifico incluso que es sustractivo) (8).

### c) Estrategias de razonamiento proporcional

Las estrategias {P+} y {P=} son las únicas estrategias universalmente reconocidas y aceptadas como correctas (aunque no, evidentemente, con esta notación); las especificaciones de Noeiting con respecto a las diferencias entre los razonamientos de tipo DENTRO y los de tipo ENTRE ya fueron discutidos en el capítulo 4.

Sin embargo, ningún autor establece una categoría aparte para las respuestas que yo he denotado con {P'} (estrategias de proporcionalidad con error). Algunos, como Maury (1984, 1986), las incluyen entre las respuestas correctas, mientras que para otros quedan indiscutiblemente entre las incorrectas; otros más simplemente ignoran el caso (como si dichos errores no existieran o como si fueran un ruido que debe ser eliminado de la investigación). A pesar de ello, entre los ejemplos reportados por muchos investigadores se pueden encontrar respuestas que apuntan hacia una respuesta correcta pero no lo son del todo porque hay un error aritmético; por ejemplo, en la siguiente respuesta el error está en la calibración de "un medio": «(2,3), porque si fueran seis estarían igual de posibilidad, porque se nivelan los dos conjuntos. Pero son cinco, es una menos blanca, es un medio menos posibilidad» (1,2)(2,3) (Lema y Morfin, 1981, pág. 191).

#### 6.1.2.3. ESTRATEGIAS PRIMITIVAS

Las estrategias que yo he definido como primitivas son observadas por la mayoría de los investigadores que trabajan con niños, y en general se identifican con los primeros estadios del desarrollo. Este hecho, junto con la escasa frecuencia con la que ocurrieron entre los sujetos considerados en este estudio, fue lo que me determinó a asignarles la categoría aparte de "estrategias primitivas".

#### 6.1.2.4. ESTRATEGIAS COMPUESTAS

Maury (1984, 1986) es la única autora de los que he consultado que reconoce alguna clase de estrategias compuestas: las "respuestas mixtas", que son las que contienen al menos un argumento correcto (pertinente) y al menos un argumento incorrecto (no pertinente). Ella encuentra que en la gran mayoría de las respuestas mixtas el argumento no pertinente aparece en segunda posición, y refuerza al pertinente; es decir, los dos argumentos llevan a elegir la misma bolsa (conjunciones). Cuando no lo refuerza, el resultado que prevalece es casi siempre el indicado por el argumento no pertinente; habla también de argumentos de

8. En esto coinciden además autores como Falk (1980) y Maury (1984, 1986).

"no equivalencia" en los que el alumno ve la equivalencia entre las razones pero la rompe con un argumento que permite una elección efectiva (compensaciones). Maury (1984, pág. 207) observa también que hay algunas argumentaciones, como las de acomodo, que tienen particular tendencia a ir acompañadas de otras.

Así, Maury considera como una categoría aparte las respuestas compuestas por varias argumentaciones, y analiza esta nueva categoría según el tipo de argumentaciones que interaccionan y según la manera en que lo hacen. Esto es similar a lo que yo hago, con la salvedad de que en vez de tres tipos de argumentaciones yo manejo más tipos de estrategias, y de que clasifiqué la manera en que interaccionan según la operación lógica que los liga y según si el tipo de estrategias que intervienen.

### 6.1.3. CORRESPONDENCIA ENTRE SITUACIONES Y ESTRATEGIAS

Las categorías de situaciones y de estrategias se corresponden entre sí, pero no coinciden. Las situaciones son una manera de clasificar las posibles preguntas planteables a los sujetos, mientras que las estrategias son una manera de clasificar las respuestas de los sujetos.

La correspondencia entre ambas se establece porque las primeras están diseñadas para la observación de las segundas. De este modo, dada una situación siempre será posible saber qué estrategia(s) se puede(n) presentar en ella; sin embargo, el hecho de que una estrategia se pueda presentar en una situación no implica necesariamente que lo haga. La importancia de la correspondencia entre sistemas de categorías radica justamente en la posibilidad de establecer con qué frecuencia se presenta realmente cada una de las estrategias que se pueden presentar en una situación dada. Además la correspondencia permite contestar preguntas como éstas:

¿qué estrategia sigue un sujeto en una situación que favorece a dos distintas?

¿qué estrategias utiliza preferentemente cada sujeto?

¿qué estrategias utilizan los sujetos preferentemente?

En la bibliografía consultada, no hay ningún trabajo que establezca por separado dos sistemas de categorías y defina una correspondencia entre ellas. Eso no significa, sin embargo, que no se esté realizando; en la gran mayoría de las investigaciones esto se realiza implícitamente.

Así, por ejemplo, Piaget e Inhelder (1951) establecieron un sistema de clasificación de situaciones en diez preguntas, pero no establecieron con la misma sistematicidad una clasificación de las respuestas. En última instancia, se puede considerar que ambos sistemas están supeditados a uno solo:

«Las estructuras lógico-matemáticas que caracterizan tanto el estadio de las operaciones concretas como el de las operaciones formales desempeñarán una doble función: como instrumento de análisis de la diversidad de conductas de los niños de un mismo nivel de desarrollo;



pero también como instrumento heurístico de diseño de nuevas situaciones experimentales que permitan estudiar el desarrollo operatorio de la inteligencia.» (Coll y Gillieron, 1981, pág. 63)

El trabajo clásico de Noelting (1980) acerca del razonamiento proporcional es más sofisticado, puesto que parece manejar ambos sistemas de categorías. Efectivamente, su metodología consiste en plantear a sujetos de diferentes edades una gama de preguntas distintas y observar sus respuestas con el fin de precisar la definición de los estadios piagetianos. Sin embargo, no maneja por separado los dos sistemas de categorías, y entonces construye unas categorías sobre las situaciones que les plantea a los individuos, y otras sobre las estrategias de solución que siguen los individuos. Por ejemplo, define el estadio IA ("intuitivo bajo") como la centración en los casos favorables, o sea mediante una estrategia, y el IB ("intuitivo medio") como la igualdad de los casos favorables, o sea mediante una situación. Es evidente que esta hibridación puede causar problemas en el momento del análisis, puesto que lleva a confundir las causas con los efectos, las variables experimentales con las de respuesta. Además, cada estadio está caracterizado por las preguntas que pueden resolver los sujetos de ese estadio (y que no pueden resolver los de los anteriores) y estas preguntas (o "categorías situacionales") conllevan una confusión entre combinaciones y ubicaciones que complica aún más las cosas (9).

A continuación expondré brevemente cómo son las correspondencias entre las categorías más importantes de ambos sistemas construidos por mí.

#### 6.1.3.1. COMBINACIONES Y ESTRATEGIAS DE CENTRACION Y RELACION

Por construcción, las combinaciones permiten observar todas las estrategias de centración y las estrategias de relación con

9. Es una lástima que haya tal desajuste en las categorías de Noelting, pues su procedimiento ulterior es sumamente interesante: él busca una unidad de contenido para determinar una jerarquía de niveles de aprendizaje. El análisis de los resultados se realiza en dos órdenes distintos: el primero lleva al concepto de un proceso de desarrollo que es por etapas (para lo cual primero ordena las preguntas de acuerdo con su nivel de dificultad, y luego los clasifica en categorías); el segundo busca determinar un patrón en la sucesión de estadios (en el que el éxito en cada categoría de preguntas forma un estadio de desarrollo si los sujetos correspondientes pueden ser diferenciados cronológicamente). Después de este proceso, Noelting llega a una clasificación en estadios que corresponde a los resultados de un análisis estadístico multivariado (Factor Analysis). Sin embargo, dada la hibridación mencionada, cabría preguntarse si todo este procedimiento no es tautológico.

la salvedad de las de equilibrio. Esto se ilustra en la siguiente tabla, en la que se ha prescindido de las estrategias primitivas {N+}, {F-}, {D+} y {R-}:

Combinaciones	Estrategias de centración	Estrategias de relación
K1 = 11211 y K2 = 12122	{N-} {F+} {D-}	{R+} {P+}
K3 = 01211 K4 = 11011 K5 = 10122	{N=} {F+} {D-} {N-} {F+} {D=} {N-} {F=} {D-}	{R+} {P+} {R+} {P+} {R+} {P+}
K6 = 11111 y K7 = 11122 K8 = 11121 y K9 = 11112	{N-} {F+} {D-} {N-} {F+} {D-}	{R+} {P+} {R+} {P+}
K10 = 11101 y K11 = 11102	{N-} {F+} {D-}	{R=} {P+}
K12 = 10120 K13 = 11010	{N-} {F=} {D-} {N-} {F+} {D=}	{R+} {P-} {R+} {P=}
K14 = 11120 y K15 = 11110	{N-} {F+} {D-}	{R+} {P=}
K16 = 11100	{N-} {F+} {D-}	{R=} {P+}
K0 = 00000	{N=} {F=} {D=}	{R=} {P=}

6.1.3.2. UBICACIONES Y ESTRATEGIAS DE EQUILIBRIO

Por su parte, las estrategias de equilibrio están, por definición, relacionadas con las categorías de ubicaciones, como se muestra en el siguiente esquema (en el que se ha prescindido de la estrategia primitiva {E5}):

Ubicaciones y su representación gráfica	Estrategias
U1.1: $p_m = 0, .5 < p_M < 1$ U1.3: $p_m = 0, p_M = 1$ U1.5: $0 < p_m < .5, p_M = 1$	$x----- ---x--]$ $x----- -----x$ $[-x-- -----x$ {E<>} {E<>} {E<>}
U2.1: $p_m = 0, p_M = .5$ U2.2: $0 < p_m < .5, p_M = .5$ U2.3: $0 < p_m < .5, .5 < p_M < 1$ U2.4: $p_m = .5, .5 < p_M < 1$ U2.5: $p_m = .5, p_M = 1$	$x-----x-----]$ $[-x--x-----]$ $[-x-- ---x--]$ $[------x-x--]$ $[------x-----x$ {E<} {E<} {E<>} {E>} {E>}
U3.1: $p_m = 0, .5 \leq p_M < 1$ U3.2: $0 < p_m < p_M < .5$ U3.3: $p_m = .5 = p_M$ U3.4: $.5 < p_m < p_M < 1$ U3.5: $.5 \leq p_m < 1, p_M = 1$	$x--x-- -----]$ $[-x-x- -----]$ $[------*-----]$ $[------ x-x-]$ $[------ ---x--x$ {E=} {E=} {E=} {E=} {E=}

Es decir, dada una ubicación, sólo hay un tipo de estrategia de equilibrio que se puede manifestar en ella, aunque haya hasta cuatro ubicaciones en las que se puede presentar una misma estrategia de equilibrio <sup>(10)</sup>.

#### 6.1.4. METODOS

En cuanto a la línea de métodos, es necesario considerar por separado sus dos componentes. Los métodos de interrogación que utilicé desde el tercer experimento corresponden a la metodología del interrogatorio estandarizado utilizado por Maury y Nassefat (Maury, 1986). Sin embargo, el análisis de tipo lingüístico de los métodos de descifrado no es considerado, para problemas probabilísticos, por ningún autor de mi conocimiento. Algunos lo hacen de manera tentativa para el caso general de matemáticas, mientras que otros reclaman la necesidad de estudiar a fondo las maneras que tienen los sujetos de expresarse.

#### 6.1.5. EL PROCESO DE CONSTRUCCION EN ESPIRAL

El proceso en espiral debe de ser la manera más usual de construir una metodología. Sin embargo, pocos autores lo suelen reportar, y presentan la metodología aplicada como si hubiera sido creada ad hoc desde el principio y sin modificaciones. Un par de excepciones notables en ese sentido son dos investigaciones, de gran relevancia para este trabajo, aparecidas en 1980: el de Falk et al. y el de Noelting. Aquí comentaré brevemente la primera.

Falk et al. (1980) plantean de inicio variables similares a mis combinaciones ( $K=nfp$ ), que amplían durante el proceso (y llegan a  $K=nfdp$ ). Terminan sugiriendo que habría que considerar también  $r$  (con lo que las categorías quedarían como las mías,  $K=nfdrp$ ). Sin embargo, y a pesar de que utilizan el mismo término que yo he empleado, no establecen el sistema completo de combinaciones sino que van tomando algunos ejemplos de algunas de ellas. Los autores consideran también, y también paralelamente a las combinaciones (y no integradas a ellas) una variable similar a las ubicaciones, salvo que con menos categorías ("fácil": U2.3, "regular": U2.2 y U2.4, y "difícil": U3.2 y U3.4) y sin incluir las categorías piagetianas de imposibilidades, certezas (U1.1, U1.3, U1.5, U2.1, U2.5, U3.1, U3.5) y composiciones idénticas (K0). Estos investigadores no plantean por separado las categorías para el planteamiento de las preguntas y para la interpretación de las respuestas, sino que (como Piaget) utilizan un mismo

10. La estrategia {E=} no se usa en la ubicación U3.3 por las razones que se expondrán en la pág. 312.

sistema para ambos fines; sin embargo, proceden recursivamente y cada vez que tienen nuevas respuestas e interpretaciones corrigen el sistema para utilizarlo en nuevas preguntas. De este modo pueden prever nuevas respuestas, y en la última etapa han abarcado todas las imaginables, aunque...

«pensábamos que nuestro diseño había anticipado cualquier principio [estrategia] posible, pero los niños lograron sorprendernos.» (Falk et al., 1980, pág. 196) (lo cual es algo que no sólo los niños, sino hasta los adultos, logran con una persistencia notable...).

## 6.2. INTERRELACIONES ENTRE LAS LINEAS METODOLOGICAS

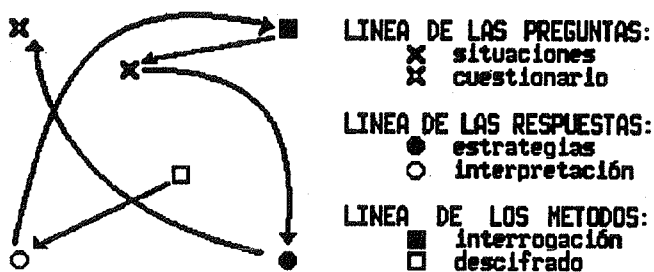
En el capítulo 2 mencioné que las tres líneas metodológicas, la de las preguntas, la de las respuestas y la de los métodos, se construyeron gracias a un proceso recursivo de interrelaciones entre ellas. Describí también las más fuertes de estas interrelaciones: cómo la interpretación de las respuestas obtenidas en un cuestionario guía la construcción de categorías de situaciones para la siguiente etapa, que a su vez guía a los nuevos métodos de interrogación, etc.

En los siguientes tres capítulos abordé cada una de las tres líneas metodológicas, pero no volví a mencionar cómo se relacionan entre sí. En esta sección ahondaré en tres interacciones que me parecen importantes. No son, ciertamente, las únicas, pero pueden considerarse fundamentales en lo que ha sido la construcción de la metodología. Estas interacciones se pueden esquematizar como se ilustra en la siguiente figura.

La primera interacción ocurren entre preguntas y respuestas, y se da cuando se cruzan las categorías creadas para una y otra línea, permitiendo predecir qué estrategias llevan a qué tipo de respuestas en qué tipo de situaciones. La información obtenida es fundamental para el diseño de cuestionarios.

La segunda interacción se presenta cuando, a partir de la interpretación de los resultados, se revela que el planteamiento de decisión implica una presión hacia la elección de un lado u otro, y desfavorece la respuesta "da igual". Ello lleva a modificar el planteamiento (que se puede considerar como parte de los métodos de interrogación) y las situaciones diseñadas, hasta la formulación de un planteamiento de equiparación.

Por último, la interacción entre los métodos para el descifrado de respuestas y los métodos de interpretación de las mismas es lo que ha permitido llegar a la asignación de estrategias a una gran mayoría de las respuestas obtenidas.



### 6.2.1. INTERRELACION ENTRE PREGUNTAS Y RESPUESTAS

A nivel de resultados, ciertamente importa saber qué respuestas se obtienen ante qué preguntas: de ello me ocuparé en el siguiente capítulo. Sin embargo, también a nivel metodológico hay interrelaciones entre la línea de las preguntas y la de las respuestas: una vez que fueron construidos los sistemas de categorías para las preguntas (situaciones) y para las respuestas (estrategias), se pudo predecir las respuestas a cada situación según cada estrategia, lo que a su vez permitió saber qué situaciones son más discriminantes, en el sentido de que la elección de un lado u otro indique qué estrategia siguió el sujeto <sup>(11)</sup>. Este conocimiento fue importante, a partir del cuestionario C3, para diseñar los cuestionarios insistiendo más (aunque no exclusivamente) en las situaciones más discriminantes.

<sup>11</sup>. De acuerdo con la definición dada en el capítulo 3 (ver el párrafo §3.2.1.2.a), una pregunta es discriminante si ante ella sujetos que siguen diferentes estrategias llegan a diferentes elecciones.

Las estrategias para este "estudio de predicción" son <sup>(12)</sup>:

- "N", que abarca a {N+} para elecciones de un lado y a {N=} para la respuesta "da igual";
- "F", que abarca a {F+} para elecciones de un lado y a {F=} para la respuesta "da igual";
- "D", que abarca a {D+} para elecciones de un lado y a {D=} para la respuesta "da igual";
- "E", que abarca a {E<>}, {E<} y {E>}, para elecciones de un lado, y a {E=} para la respuesta "da igual";
- "R", que abarca a {R+} para elecciones de un lado y a {R=} para la respuesta "da igual";
- "P", que abarca a {P+} para elecciones de un lado y a {P=} para la respuesta "da igual".

Las situaciones relacionadas con estas estrategias son las determinadas por las combinaciones K1 a K16 (estrategias N, F, D, R, P), y las ubicaciones U1.1 a U3.5 (estrategias E).

A partir de esta doble identificación de estrategias y situaciones, se obtiene la tabla de predicciones que se encuentra a continuación. En cada caso, S1, S2 e = representan las elecciones posibles, y dentro de cada celda se especifican las estrategias que pueden dar lugar a cada una de esas elecciones. Así, es fácil ver, por ejemplo, que la situación de la combinación K10 en la ubicación U3.2 es más discriminante que la K2 en las ubicaciones U2.2, U2.3 ó U2.4.

12. En cada caso, para saber de cuál de las dos estrategias se trata se puede consultar la tabla de la pág. 298. Obsérvese que no están ahí incluidas las estrategias primitivas {N-}, {F1}, {F-}, {D+}, {E5} y {R-}: esto se debe a que son estrategias mucho menos frecuentes que las otras, que no guían la construcción de un cuestionario, y que de todos modos serán observadas puesto que llevarán respectivamente a la elección del lado contrario al de {N+} (salvo en K3 y K0), {F+} (cuando  $U_i=1$ , salvo en K5 y K0), {F=} (salvo en K5 y K0), {D-} (salvo en K4 y K0), {E>} (en U2.3, U2.4 y U2.5), y {R+} (salvo en K10, K11 y K0). Tampoco está incluida la "estrategia" de proporcionalidad con error {P'} puesto que no se trata de una estrategia legítima sino de un intento fallido de utilizar {P+} o {P=}, y que puede llevar a la misma elección determinada por esas estrategias o a otra diferente, según el error cometido.

	ubicaciones U1.1, U1.3, U1.5, U2.1, U2.2, U2.3, U2.4, U2.5		
	S1	S2	=
K1 = 11211 K2 = 12122	N N, F, D, R, E, P	F, D, R, E, P	
K3 = 01211 K4 = 11011 K5 = 10122	N N, D, R, E, P	F, D, R, E, P F, R, E, P	N D F
K6 = 11111 K7 = 11122	N, D N, D, R, E, P	F, R, E, P F	
	ubicaciones U3.1, U3.2, U3.4, U3.5		
	S1	S2	=
K1 = 11211 K2 = 12122	N N, F, D, R, P	F, D, R, P	E E
K3 = 01211 K4 = 11011 K5 = 10122	N N, D, R, P	F, D, R, P F, R, P	N, E D, E F, E
K6 = 11111 K7 = 11122	N, D N, D, R, P	F, R, P F	E E
K8 = 11121 K9 = 11112	N, D, R N, D, P	F, P F, R	E E
K10 = 11101 K11 = 11102	N, D N, D, P	F, P F	R, E R, E
K12 = 10120 K13 = 11010	N, D, R N	F, R	F, E, P D, E, P
K14 = 11120 K15 = 11110	N, D, R N, D	F F, R	E, P E, P
	ubicación U3.3		
	S1	S2	=
K16 = 11100	N, D	F	R, E, P
K0 = 00000			N, F, D, E, R, P

### 6.2.2. INTERRELACION ENTRE PREGUNTAS Y METODOS DE INTERROGACION

La interrelación más notable entre la línea de las preguntas y la de los métodos ocurre con el planteamiento de equiparación. Como se recordará, este planteamiento fue diseñado en el quinto y último experimento para contrarrestar el efecto de presión en contra de la respuesta "me da igual" que conllevaba el planteamiento original de decisión ("¿de qué lado eliges una carta?"). En el planteamiento de equiparación se plantea una colección de cartas que sirve "de referencia" y seis más para comparar con ella (A, B, C, D, E, F) y se le pide al sujeto que identifique para cuál (o cuáles) de las seis la da igual escoger entre ellas y la de referencia.

Con las preguntas en planteamiento de equiparación se pretendía favorecer la ocurrencia de las estrategias de igualdad: {N=}, {F=}, {D=}, {E=}, {R=}, {P=}, así como ver si alguna(s) de ellas era(n) más atractiva(s) que las demás.

### 6.2.3. INTERRELACION ENTRE RESPUESTAS Y METODOS DE DESCIFRADO

En los dos capítulos precedentes mostré una amplia gama de ejemplos de expresiones. Por una parte, están las que permiten interpretar la estrategia seguida por el sujeto para llegar a su elección (capítulo 4) y, por otra, aquellas en las que es posible ver que un término adquiere varios significados o que un concepto es expresado por varios términos o por varias construcciones o frases (capítulo 5).

Podría pensarse, después de la lectura del capítulo 5, que el uso inconsistente e impreciso que hacen del lenguaje los sujetos confiere a las interpretaciones proclamadas en el capítulo 4 un margen de variabilidad tan grande que se convierten en meras especulaciones: parecería que el capítulo 4 trató de cómo interpretar las respuestas y el capítulo 5 de cómo NO interpretarlas.

Y, efectivamente, el proceso de interpretación es un proceso complejo pues no sólo implica la asignación de una categoría (estrategia) a cada respuesta, sino la consideración, para esa misma asignación, de las imprecisiones en el lenguaje utilizado. Sabemos, por ejemplo, que no porque un sujeto diga "hay más probabilidad" se refiere a lo que un matemático entendería por esa misma afirmación, sino que puede estar refiriendo a una gran variedad de conceptos: como dicen Garfield y Ahlgren (1988, pág. 51), «la evidencia muestra que los conceptos erróneos pueden existir a pesar de la capacidad del individuo de utilizar una terminología apropiada». Recíprocamente, también puede ocurrir que procedimientos que aparentan ser ingenuos o primitivos sean en realidad procedimientos sofisticados pero con una expresión incompleta, insuficiente o inadecuada. Esto fue observado también por Green (1983, pág. 38), quien afirma que los sujetos «que respondieron "tienen las mismas negras (y/o) blancas" pueden perfectamente haber estado usando el concepto de razón pero eran incapaces de ex-



presarlo», y junto con Hawkins y Kapadia (1984, pág. 366), que «la falta de un lenguaje apropiado con el cual responder no demuestra necesariamente la ausencia de conceptos apropiados» (13).

Así, las categorías para la interpretación de las respuestas son necesarias pero no suficientes: cuando se cuenta con ellas, las mayores dificultades en el proceso de interpretación radican en el descifrado de la respuesta. Hay que descifrar la justificación del sujeto: entender a qué se refiere, con qué significación utiliza cada término, qué uso le da a las conjunciones, preposiciones y expresiones complejas, etc. Esto lleva a saber en qué elementos está pensando el sujeto y cómo los está comparando, lo que permite interpretar la justificación: asignarle una de las estrategias del sistema de categorías para la interpretación. Esto se ha realizado de manera recursiva, repitiendo el proceso de re-descifrar y re-interpretar, cada vez a la luz del conocimiento adquirido en la etapa anterior, e incorporando en ambas acciones otros elementos, como el lado elegido y las características del planteamiento del problema (en particular, la categoría de situación a la que corresponde). Sólo así ha sido posible eliminar la gran cantidad de dudas que fueron surgiendo en diferentes etapas del proceso, y llegar a interpretar con bastante seguridad la estrategia seguida por el sujeto y el significado que le otorga a los términos que utiliza.

En este apartado me explayaré acerca de las dificultades con las que se puede topar el proceso de interpretación. En el primer párrafo expondré a través de ejemplos algunos tipos generales de dificultades, y las maneras generales de resolverlas.

En los siguientes tres párrafos veré con detalle la resolución de varios tipos de dificultades en el proceso de interpretación. El segundo párrafo se refiere a respuestas que he logrado manejar de manera completa (elección y justificación interpretada), ya sea mediante la consulta a otras respuestas del mismo sujeto, ya sea mediante la incorporación de otros elementos, ya sea mediante una consideración global del tipo de respuestas que se pueden esperar en determinadas situaciones. En el tercero se ven los tipos de dificultades que pueden haber llevado a manejar una respuesta de manera incompleta (elección sin justificación ni interpretación). El cuarto párrafo muestra algunos ejemplos de respuestas que he debido cancelar totalmente.

Por último, trataré un tipo particular de respuestas que son canceladas por otros autores pero que yo sí he considerado: las primeras preguntas planteadas a los sujetos.

#### 6.2.3.1. DIFICULTADES EN LA INTERPRETACION

Para empezar, veamos cómo pueden surgir las dudas en la interpretación; para ello, veamos en tres expresiones hipotéticas

13. Hawkins y Kapadia (*ibid*) agregan además que frecuentemente, lo que se está evaluando es «si los sujetos tienen un sistema de "etiquetas" adecuado para la probabilidad», más que si tienen el concepto.

cómo una misma respuesta puede dar lugar a diversas interpretaciones. En cada caso enunciaré la expresión y veré cómo se puede interpretar con diferentes arreglos.

1) Supongamos que un sujeto da la respuesta:

▪ "S1, porque hay más negras"

Entonces:

- si el arreglo es (5,2)(4,1), es evidente que se trata de una estrategia {F+} (en S1 hay más negras que en S2);
- si el arreglo es (3,2)(3,3), es evidente que se trata de una estrategia {E>} (en S1 hay más negras que blancas);
- si el arreglo es (3,2)(1,5), no podemos saber si está utilizando una estrategia {F+} (porque observa que  $3 > 1$ ) o una estrategia {E<>} (porque observa que  $3 > 2$  y  $1 < 5$ ): tenemos una duda en la interpretación.

2) Supongamos ahora que un sujeto da la respuesta:

▪ "S2, porque hay una probabilidad más que en S1"

Entonces:

- si el arreglo es (1,2)(2,3), entonces una probabilidad más se refiere a 'una negra más' y la estrategia es {F+};
- si el arreglo es (1,1)(3,2), una probabilidad más es 'más negras que blancas' y la estrategia es {E>};
- si el arreglo es (3,1)(5,2), una probabilidad más es 'una diferencia de negras menos blancas mayor en una unidad' y la estrategia es {R+};
- si el arreglo es (2,2)(3,2), no podemos saber si se trata de una estrategia {F+} (porque S2 tiene una negra más que S1) o de una estrategia {E>} (porque S2 tiene una negra más que blancas) o de una estrategia {R+} (porque en S2 la diferencia de negras menos blancas es 1 y en S1 es 0, y  $1 - 0 = 1$ ) o incluso de una estrategia {P+} (en la que una probabilidad más es 'una mayor probabilidad' y  $3/5 > 2/4$ ): tenemos una duda en la interpretación.

3) Por último, supongamos que un sujeto da la respuesta:

▪ "S2, porque hay cuatro negras y una sola blanca"

Entonces:

- si el arreglo es (1,3)(4,1), esto puede interpretarse como una estrategia {E<>}, o bien como una estrategia {F+}, o bien como una estrategia {D-}: tenemos una duda en la interpretación;
- si el arreglo es (1,1)(4,1), puede interpretarse como una estrategia {E>} o bien como una estrategia {F+}, o bien como una estrategia de compensación {F+ \* D-}: tenemos una duda en la interpretación;
- si el arreglo es (3,2)(4,1), puede interpretarse como {F+} o como {D-} o como {F+ & D-} o como {F+ \* N=} o como {D- \* N=} o como {(F+ & D-) \* N=}: tenemos una duda en la interpretación.

Estos tres ejemplos deben bastar para ilustrar algunas de las dificultades encontradas. En muchos casos se trata de que varias interpretaciones con estrategias simples o compuestas son

posibles dados el planteamiento del problema, el lado elegido y la expresión de la justificación. Pero puede tratarse también de una respuesta en la que el uso ambiguo del lenguaje no dé pie a ninguna interpretación. Puede tratarse de una respuesta meramente descriptiva (como nuestra hipotética expresión 3), o en la que se hace un uso muy impreciso de términos "técnicos", o en la que pudiera ser que el sujeto intenta expresar su estrategia y no lo logra, etc.

En muchos casos las dudas se deben a los usos polisémicos de términos importantes, como probabilidad: por ejemplo, la polisemia de este término entre 'probabilidad' y 'cantidad' dificulta la discriminación en la interpretación de estrategias, en particular entre las estrategias de equilibrio y {F+} (véase el segundo ejemplo). Lo mismo ocurre, por cierto, vice-versa; incluso un sujeto puede estarse refiriendo a una 'cantidad' cuando dice probabilidad y a una 'probabilidad' cuando dice cantidad... Cuando un sujeto habla de proporciones o utiliza fracciones o porcentajes no necesariamente está pensando en una igualdad matemática de razones expresadas como cocientes, ni está efectuando operaciones aritméticas. Cuando un sujeto dice y puede querer decir algo más parecido a 'aunque' y viceversa.

Estas dudas en la interpretación, que ocurrieron con mucha mayor frecuencia de la que yo hubiera deseado, se presentaron en las respuestas por escrito de los experimentos primero, segundo y cuarto (sobre todo en el primero), pero también en las entrevistas del tercero y el quinto, ya sea porque el sujeto no respondió a una petición de precisión por parte mía, ya porque no hubo tal petición.

Sin embargo, la mayor cantidad ocurrió en las aplicaciones escritas. Atribuyo esto parcialmente al hecho de que en las aplicaciones por escrito no hubo por parte mía como entrevistadora una presión suficiente en el sentido de que los sujetos utilizaran un lenguaje preciso. Sin embargo, insisto en que ésta no puede ser toda la explicación. Las dificultades con el manejo del lenguaje son aún mayores por escrito que verbalmente: es por ello que no tiene mucho sentido, si se desea saber cuál es el modo de pensar de un sujeto, pedirle que justifique por escrito sus elecciones (14).

Por cierto, también en el curso de una interrogación oral puede haber una presión insuficiente o una interrogación incompleta. Véanse por ejemplo las siguientes respuestas, presentadas fuera de los experimentos mencionados en este trabajo. A un sujeto, profesor de Matemáticas en Secundaria, le planteé el arreglo (2,1)(3,2). Eligió S1. Al preguntarle por qué, dijo "porque son dos contra uno, mientras que en S2 son tres contra dos". Le pregunté de nuevo por qué y dijo "¡pues porque en S1 son menos!", y abundó: "es como en la lotería: son tantos números que por eso nunca te la vas a ganar". Además de que este sujeto proporciona una interesante justificación de la estrategia {N-}, lo que me parece más importante resaltar es que estuve a punto de conside-

14. Como lo hacen, por ejemplo, Lecoutre y Durand (1988) y la misma Maury (1984, 1986).

rar como correcta la primera respuesta y de no volver a preguntar por qué. La primera respuesta podría ser considerada como proveniente de una estrategia {P+}, sobre todo tratándose de un profesor de Matemáticas, y si la interrogación se hubiera detenido ahí ésa hubiera sido la interpretación <sup>(15)</sup>. Sin embargo la segunda pregunta hace evidente que la estrategia es {N-}, y que la primera respuesta no era más que una descripción del arreglo. Cabe entonces preguntarse en cuántas ocasiones no habrá sucedido que di por suficiente una expresión que no lo es...

Cada vez que en una interpretación se han presentado dudas, he intentado resolverlas de varios modos, por ejemplo mediante la consulta a las respuestas del mismo individuo a otras preguntas o mediante la consulta a las respuestas de otros individuos a preguntas similares. Es frecuente también que una segunda mirada a una respuesta haga ver detalles que una primera interpretación no tomó en cuenta. Esto es evidente y ocurre en cualquier proceso de interpretación; incluyo aquí algunos ejemplos de ello.

- sólo compite con una, en cambio allá compite con dos [(1,1)(1,2):S1] (C1a; C2,16): {D- \* F=}, no {E<}
- tiene más negras, son más elementos y tiene más... allá también, pero nada más es una de más de negras, y aquí son más negras que blancas [(2,1)(4,2):S2] (O; C6,32): {R+ \* E=}, no {F+}
- hay mejor probabilidad de tomar negras porque hay dos posibilidades más [(1,3)(2,4):S2] (Q5; C4,21): {F+}, no {R+}
- da igual tomar negra en S1 o S2 [(4,1)(6,2):=] (Q5; C4,22): {E=} porque en la hoja de respuestas aparecen muy marcados el 4n de S1 y el 6n de S2

Por otra parte, hay otro tipo de respuestas problemáticas: las respuestas que de alguna manera no corresponden a la pregunta planteada, o porque el sujeto no ha comprendido la naturaleza del ejercicio, o porque vio mal las tarjetas mostradas en la primera aplicación del cuestionario C1 o vio mal la información en el pizarrón en la segunda aplicación de C1 o en la aplicación de C2, o incluso puede ocurrir alguna otra contingencia que lleve a respuestas absurdas.

La posición que he adoptado al respecto es la siguiente. Cuando ha habido una duda en la interpretación, he procurado resolverla con los medios a mi alcance. A pesar de ello, han quedado respuestas en las que hay una elección claramente marcada pero en las que o no hay justificación, o ésta no permite una interpretación; en esos casos he considerado conveniente, para propósitos de análisis, considerar exclusivamente la elección. He decidido asimismo cancelar de la etapa de análisis tanto las elecciones como las justificaciones de las respuestas en las que me ha parecido que el sujeto vio mal la pregunta o comprendió mal el ejercicio o en las que había algún otro impedimento.

15. Hubiera sido un falso positivo en el diagnóstico. Ver al respecto las definiciones de falso positivo y falso negativo en el capítulo 1 (§1.5.3).

La razón de estas cancelaciones parciales o totales reside en el hecho de que he preferido pecar por defecto que por exceso: me ha parecido menos grave interpretar de menos que excederme en las interpretaciones. De esta manera he procurado llegar a la etapa de análisis que emprenderé en el siguiente capítulo con un banco de respuestas ya depurado.

#### 6.2.3.2. RESPUESTAS CON ELECCION E INTERPRETACION

Para efectos de análisis, lo más deseable es evidentemente contar con respuestas que consten de una elección y una justificación interpretada en términos de una de las estrategias simples o compuestas descritas en el capítulo 4. Como dije arriba, hay efectivamente respuestas cuya interpretación no deja lugar a dudas y que por lo tanto quedan automáticamente incluidas en alguna de esas categorías. Pero hay otras respuestas cuya interpretación se planteaba en un principio como dudosa y en las que logré sortear algún tipo de dificultad para poder manejarlas de manera completa: de ellas me ocuparé ahora.

La primera asidera para resolver las dudas es la consulta a otras respuestas del mismo individuo: llamo a esto el contexto. En otros casos he planteado conjeturas y he interpretado algunas respuestas bajo la suposición de que dichas conjeturas son ciertas. Manejaré estas interpretaciones de la misma manera que las demás para efectos de análisis; sin embargo, en este párrafo expongo las hipótesis que las sustentan.

##### a) Interpretaciones por el contexto

Muchas de las respuestas han sido interpretadas no sólo a través del contenido y la forma de su justificación, sino mediante una revisión del contexto determinado por las respuestas del mismo individuo a otras preguntas del cuestionario, principalmente a las preguntas inmediatamente anteriores y posteriores y a las preguntas de arreglos similares.

En la gran mayoría de los casos esta revisión ha disipado dudas. Pongamos un ejemplo: supongamos que se tiene la idea de que una respuesta podría provenir de una estrategia  $E_1$  o de una estrategia  $E_2$ , o de una composición de la forma  $\{E_3 * E_1\}$  o de la forma  $\{E_3 - E_2\}$ , y que al revisar las otras respuestas del sujeto se ve que tiende a utilizar principalmente la estrategia  $E_1$  y a compensarla en caso de igualdad: entonces se opta por la estrategia compuesta  $\{E_3 * E_1\}$  de la lista inicial.

Veamos por ejemplo la siguiente respuesta:

• hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos que donde hay más [(2,3)(5,4):S1] (Adr; C2,9)

La primera interpretación podría ser {N-}, completando así:  
hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos (cartas) que donde hay más

También podría ser {F-}, si se lee así:  
hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos (negras) que donde hay más

Incluso podría ser {D-}, si se lee así:

*hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos (blancas) que donde hay más*

Si se tratara de cualquier otro sujeto, la interpretación más adecuada sería {N-}, porque es una estrategia muy común, mientras que {F-} es excepcional y en la lectura como {D-} queda un poco "forzada" la redacción. Sin embargo, este sujeto es precisamente el que tiene otras respuestas con {F-}, por lo que la interpretación final es {F-}.

Algunas veces un sujeto que ha estado utilizando con alguna consistencia estrategias de equilibrio tiene una respuesta cuya primera interpretación es una estrategia de centración pero que a la luz de las demás se puede leer como una estrategia de equilibrio simple o compuesta, como en los siguientes ejemplos:

- *hay mayor número de negras [(2,2)(3,2):S2] (Map; C2,12): {E>}, y no {F+}*
- *son dos cartas negras y una blanca y allá no, porque hay dos negras y dos blancas [(2,1)(2,2):S1] (Sil; C2,2): {E>}, y no {D-}*
- *es la misma proporción de blancas, a pesar de que varíe la cantidad de negras [(5,2)(6,2):=] (J; C3,9.1): {E= - F+}, y no {D= - F+}*
- *hay más tarjetas negras y sólo una tarjeta blanca [(3,2)(5,1):S2] (Q3; C4,19): {D- \* E=}, y no {F+ & D-}*

Es necesario indicar que también ha habido algunos casos en los que la revisión del contexto ha creado dudas donde no las había, al menos momentáneamente. Supongamos por ejemplo que tenemos la certeza de que una determinada respuesta corresponde a una estrategia  $E_1$  y que luego vemos que no hay ninguna otra respuesta que corresponda a  $E_1$  en el conjunto de respuestas del sujeto, sino que éste tiende a utilizar más bien otra estrategia  $E_2$ : si la respuesta revisada puede entenderse también como proveniente de  $E_2$ , ahora tenemos una duda, que puede incluso "contaminar" a las respuestas interpretadas con  $E_2$ ...

O bien, en una respuesta tenemos la certeza de que un término está utilizado con cierto significado que nos permite interpretar la estrategia seguida, pero al revisar el contexto nos encontramos con otros usos polisémicos del término que disipan la primera certeza. Tal es, por ejemplo, el caso de varias respuestas del sujeto Gab que contienen porcentajes.

#### b) Posible {R+} ó {R=} mal expresada

Como ya he mencionado, las estrategias de relación sustractiva {R+} y {R=} son de difícil expresión, probablemente debido a que implican la comparación de dos diferencias, y cada una de estas etapas puede resultar difícil de expresar. Por ejemplo, en el capítulo 5 se mostró una serie de sinónimos para el concepto 'diferencia de negras menos blancas', crucial para esta estrate-

gia (16), sinónimos que a su vez suelen tener usos polisémicos: esto es parte de la dificultad de la expresión.

Además, debemos tener en cuenta que cuando hablamos de {R+} o de {R=} nosotros estamos pensando en 'diferencias', pero no es necesariamente lo que le ocurre al sujeto: él puede estar pensando en 'parejas', o en 'cancelaciones', o en 'añadiduras', y esos conceptos pueden ser aún más difíciles de expresar que las diferencias. Estas dificultades también fueron observadas por Green:

«La comparación de dos colores toma tanto la simple y poco clara forma "tiene más negro que blanco" como la más sutil y prometedora forma "tiene más negro y menos blanco". La estrategia que se aprecia fácilmente de comparar diferencias (de colores similares entre las bolsas o de colores diferentes dentro de cada bolsa) [es decir, {R+}] tiene aparentemente una incidencia sorprendentemente pequeña. Sin embargo, esto puede ser más un reflejo de la incapacidad de los alumnos de expresarse, por la que recurren a términos que encubren el concepto (por ejemplo "tiene más negro" o "tiene más negro que blanco").» (Green, 1983, pág. 38) (subrayado mio).

Las dificultades de expresión son más fuertes por escrito que verbalmente. Es notable en particular que en las respuestas escritas hay una sola que es indudablemente la expresión de una estrategia de diferencia:

- hay más negras que blancas que en S1 [(3,2)(5,1):S2] (Q1; C4,4)

Puede ser interesante notar que esta única expresión escrita es de un equipo del cuarto experimento: cabe entonces la hipótesis de que la redacción ocurrió después de una discusión del equipo, discusión que pudo haber contribuido a afinar tanto la idea como su expresión.

El hecho de que {R+} y {R=} se manifiesten muchísimo menos por escrito que verbalmente no implica que sean estrategias que no surgen de manera espontánea cuando el sujeto está en una situación en la que se le piden respuestas por escrito y sí cuando se le entrevista verbalmente. Coincido con Green en pensar que la gran escasez de manifestaciones indiscutibles de estas estrategias por escrito se debe a la dificultad de expresar cómo unas tarjetas blancas "cancelan" a unas negras, o cómo se pueden formar "parejas" de blancas y negras, o cómo se puede hablar no sólo de MAS negras de un lado sino de un "más" "más grande" que otro "más"... En este sentido, me parece notable algo que ocurrió en la discusión verbal que siguió a la aplicación del cuestionario en el segundo experimento: en el cuestionario no hubo una sola expresión escrita de estas estrategias, pero se suscitó una discrepancia en torno a la pregunta 4 [(2,1)(4,2)] en términos como éstos:

16. Véase en el capítulo 4 el §4.3.2.1 y en el capítulo 5 el §5.2.2.1b.

- Sujeto 1: "yo creo que S2, porque tiene más negras que S1" ({F+})
- Sujeto 2: "pero S1 tiene menos blancas, es mejor" ({D-})
- Sujeto 3: "como las dos cosas son ciertas, da igual: en S2 hay más negras, pero en S1 hay menos blancas" ({F+} & D-)
- Sujeto 4: "no, pero es que además en S2 hay más MAS negras que en S1" ({R+})

Así, cuando una justificación podría corresponder a un intento de expresión de una estrategia {R+} ó {R=}, he asignado {R+} ó {R=} como interpretación. Entre los ejemplos más significativos están los siguientes:

- en ambos grupos hay igual número de negras [(2,1)(3,2):=] (Q1; C4,16)
- da igual porque están equilibrados en S1 y S2 [(3,1)(5,3):=] (Q1; C4,28)
- aquí es más fácil sacar negra que blanca [(3,2)(5,1):S2] (Q2; C4,4)
- es más fácil sacar negras, porque hay más [(3,1)(5,2):S2] (Q2; C4,9)
- negras es mayor que blancas [(3,2)(5,1):S2] (Q5; C4,4)
- existe una posibilidad más de sacar negra porque hay dos blancas [(1,2)(2,4):S1] (Q5; C4,20)
- aquí a cada dos canicas negras le corresponde una blanca, acá a cada tres negras le corresponden dos blancas. La diferencia es de una canica para que fueran iguales las dos [(2,1)(3,2):=] (X; C6,39.2)

### c) Estrategias que se confunden

Hay situaciones en las que dos estrategias diferentes pueden tener exactamente la misma expresión, por lo que resulta imposible distinguir una de otra y determinar cuál de ellas está siendo utilizada por el sujeto. En varios de estos casos he determinado excluir una de las estrategias e interpretar con la otra todas las respuestas en las que cabría la duda.

#### {E=} y {P=} en U3.3

Una de estas confusiones entre estrategias ocurre en la ubicación U3.3 (combinación K16), esto es, cuando  $f_1=d_1$  y  $f_2=d_2$ , por lo que  $p_1=p_2=.5$ . En este caso, cuando la elección es "da igual", es prácticamente imposible diferenciar si la estrategia seguida por el sujeto es {E=} ó {P=}. En principio podría postularse una estrategia {E=} que estaría operando cuando el sujeto se plantea un argumento de este estilo: "en los dos lados empate, entonces da igual" ("empato-empato"). La estrategia {P=} estaría detrás de una justificación del tipo de "en este lado hay una correspondencia biunívoca entre blancas y negras, en aquél también, entonces da igual". Sin embargo, en la realidad los dos tipos de respuestas son prácticamente indiscernibles uno de otro.

He optado por asignarles a todas las respuestas que están en este caso la estrategia {P=}. De este modo, queda excluida la es-



trategia {E=} en la versión "empato-empato" (ubicación U3.3) (17).

Algunos ejemplos de las expresiones que acompañan a la elección "da igual" en la ubicación U3.3 son:

- en ambos lados están el mismo número de negras que de blancas 4 y 4 y 2 y 2 [(2,2)(4,4):=] (Cla; C2,8)
- existen igual número de tanto tarjetas blancas como negras... sí, sí, es igual [(3,3)(4,4):=] (I; C6,11)
- está en la misma proporción, o sea estoy jugándole al cincuenta [(2,2)(11,11):=] (M; C3,36)
- ambos tienen el mismo equilibrio [(2,2)(3,3):=] (Q1; C4,15)

#### {E5} y {E<} en U2.2

Otras estrategias que pueden ser confundidas son, en la ubicación U2.2, {E5} y {E<}. Efectivamente, podría plantearse la posibilidad de una estrategia {E5} en la ubicación U2.2, cuya argumentación podría ser "elijo el lado en el que  $p_j=0.5$  por este solo hecho", distinta de la estrategia {E<} cuya justificación podría ser "elijo el lado en el que  $p_j=0.5$  porque en el otro tengo  $p_k<0.5$ ". La diferencia radica en que {E5} lleva a la elección de un lado sin comparar con el otro, mientras que {E<} lleva a la elección del mismo lado pero después de comparar con el otro. Sin embargo, esta diferencia no se manifiesta en la práctica: por ello todas las respuestas en las que podría haber la duda fueron interpretadas con {E<}, la estrategia primitiva {E5} quedó excluida de la ubicación U2.2 (18). Estos son algunos ejemplos:

- tiene las mismas probabilidades de salir o no [(1,3)(2,2):S2] (May; C1,9)
- tiene 50% de probabilidad [(1,1)(1,2):S1] (May; C1,10)
- hay igualdad de de colores [(2,2)(2,3):S1] (Adr; C2,3)
- existe el mismo número de negras y el mismo número de blancas [(2,2)(2,3):S1] (Bet; C2,3)

#### {R+} y {E<} en U2.2, {R+} y {E<>} en U2.3, {R+} y {E>} en U2.4

Por último, menciono aquí otras estrategias que podrían tomarse como confundibles pero que he manejado por separado: se trata de la estrategia {R+} que en las ubicaciones U2.2, U2.3 y U2.4 coincide con las estrategias de centración (respectivamente {E<}, {E<>} y {E>}). Sin embargo, las expresiones de una y otras sí difieren, como puede verse en el siguiente par de respuestas dadas a la misma pregunta:

- aquí hay pares y allá hay un par y sobra una blanca: más posibilidades porque allá son dos blancas contra una [(1,2)(3,3):S2] (J; C3,5.1): {R+}
- hay las mismas negras y blancas, y allá hay menos negras que blancas [(1,2)(3,3):S2] (Q4; C4,14): {E<}

17. Véase al respecto el final del párrafo §4.3.1.4.a) en el capítulo 4.

18. Véase al respecto el párrafo §4.3.1.5 del capítulo 4.

**d) Otras: la interpretación más verosímil**

Después de haber resuelto dudas mediante la consulta del contexto, la búsqueda de expresiones incompletas de estrategias complejass (por ejemplo del tipo {R+}) o excluyendo estrategias que se confunden, quedaban algunas respuestas sin interpretar porque había dos o más interpretaciones posibles a su justificación. En estos contados casos, he asignado como interpretación a la que parece más verosímil que las demás. Aquí presento algunos ejemplos:

- *aunque es menor el número de negras 1 y 3 [(1,3)(2,6):S1] (Maf; C2,17): {N- - F+}, a pesar de que el uso del término "aunque" podría indicar {R+ - F+} o {R+ \* P=}*
- *existe mayor número de tarjetas negras que de blancas... allá también... pero hay mayor posibilidad aquí, nada más es una la diferencia [(3,1)(5,2):S1] (I; C6,17): {D- \* E=}, aunque podría ser {R-} ó {R- \* E=}, o la "diferencia" mencionada podría ser la diferencia de diferencias:  $|r_1 - r_2| = |2 - 3| = 1$*
- *también en S2 porque hay más negras [(3,1)(5,3):S2] (Q2; C4,28): {F+} considerando que el término "también" se refiere a que en la pregunta anterior se hizo la misma elección (lado B) que en ésta, aunque ese mismo término podría indicar {F+ - E=}.*

**e) Distribución de las respuestas interpretadas**

Independientemente si se llegó a la interpretación directamente o mediante las tácticas expuestas en este parágrafo, hay el siguiente número de respuestas interpretadas en los diferentes experimentos:

	C1	C2	C3	C4	C6	TOT
interpretadas	529	233	97	120	165	1144
TOTAL DE RESPUESTAS	729	318	193	150	240	1630

**6.2.3.3. RESPUESTAS CON ELECCION PERO SIN INTERPRETACION**

En el análisis de las respuestas que expondré en el próximo capítulo manejaré muchas respuestas solamente a través de la elección que manifiestan, esto es, sin interpretación. El que de una respuesta se considere sólo la elección puede deberse a tres tipos de motivos: o bien porque el sujeto no dio justificación, o bien porque dio una que no da pie a ninguna interpretación posible, o bien porque su justificación es más bien una descripción de lo que ve. En total hubo 405 respuestas consideradas así; a continuación veré con algún detalle cada uno de los tipos mencionados.

**a) Respuestas sin justificación**

El primer motivo por el que una respuesta pueda estar manejada sin interpretación es simplemente porque no hay justificación: el sujeto sólo manifiesta su elección, sin justificación alguna. Esto ocurrió en 174 respuestas de todos los experimentos, aunque en las respuestas por escrito ocurrió sobre todo en el primer experimento, y muy poco en el segundo y en el cuarto, y en las entrevistas ocurrió sobre todo en las de binomio, cuando ambos sujetos coincidían en una elección y ésta no se justificaba.

**b) Respuestas sin argumentación**

Bajo este nombre están agrupadas las respuestas en las que sí hay una justificación pero ésta no aporta ningún pie para su interpretación, porque carece de argumentos y sólo redundante en la mayor probabilidad o facilidad asociada al espacio muestral elegido. He aquí algunos ejemplos:

- no hay [(0,2)(1,1):S1] (May; C1,5)
- tiene mayor probabilidad [(2,1)(3,1):S2] (Art; C1,17)
- hay más probabilidad de sacar la negra [(1,1)(2,1):S2] (Gab; C1,21)
- es más fácil sacar negra [(4,1)(6,2):S2] (Q2; C4,22)
- mismas posibilidades [(1,2)(2,4):=] (Bra; C1,24)

Hubo en total 113 respuestas de este tipo, y ocurrieron en todos los experimentos, aunque proporcionalmente más en aquellos en los que la respuesta fue por escrito que en los realizados con entrevistas.

**c) Justificaciones descriptivas**

Hay 118 de las respuestas dadas por los sujetos que no permiten clasificar el razonamiento en una u otra de las categorías de interpretación porque se limitan a describir de manera más o menos completa lo que el sujeto ve. Conviene enfatizar que no se trata de que el sujeto no esté pensando el problema ni de que no tenga estrategias para resolverlo, sino que lo que expresa no da pie para interpretar cómo está pensando. En ese sentido las descripciones son expresiones insuficientes.

El único intento de análisis que se puede hacer con este tipo de respuestas es recuperar la cantidad y calidad de los elementos considerados en la descripción, porque éstos pueden sugerir cuál es la estrategia, insuficientemente expresada, que está siguiendo el sujeto. Sólo se trata, evidentemente, de un proceso de adivinación, por lo que éste será el único momento en que intente "interpretar" las respuestas que he llamado descriptivas: en el proceso de análisis estas respuestas serán manejadas únicamente a través de su elección.

A continuación veré ejemplos de respuestas descriptivas según el número y tipo de elementos que comprenden.

Hay descripciones que comprenden un solo elemento, por ejemplo la frecuencia  $f_j$  del espacio muestral elegido. Este tipo de descripciones podría ser una expresión insuficiente de una estra-

tegia {F+} o de una estrategia de equilibrio. Algunos ejemplos son:

- hay aquí tres negras y existe la posibilidad de sacar negra en la primera ocasión [(2,1)(3,1):S2] (Bea; C1,17)
- hay una negra [(1,1)(1,2):S1] (Con; C1,10)

Otras respuestas describen dos elementos del arreglo planteado. Lo más frecuente es la pareja de elementos  $f_j, n_j$  del espacio muestral elegido, que podría ser una expresión insuficiente de la estrategia {P+}, o de las composiciones {N- & F+} ó {N+ & F+} o de estrategias de equilibrio. He aquí algunos ejemplos:

- de dos había una negra [(1,1)(1,2):S1] (Bra; C1,10)
- hay seis cartas y cuatro son negras [(2,2)(4,2):S2] (Edu; C1,14)
- en seis cartas hay dos probabilidades de que escoja una negra [(1,2)(2,4):S2] (Ger; C1,8)

También ocurre que los dos elementos sean  $f_j, d_j$  del espacio muestral elegido, lo que puede sugerir una estrategia {P+} o {R+} o alguna composición del tipo de {F+ & D-}:

- son dos negras y dos blancas [(2,2)(4,4):S1] (Jud; C1,18)
- en proporción existe tres negras y una blanca [(2,1)(3,1):S2] (Raf; C1,15)
- hay más probabilidad porque hay tres sobre uno [(2,1)(3,1):S2] (Mab; C2,19)

Otras parejas son posibles: por ejemplo,  $d_j, n_j$  del espacio muestral elegido:

- tengo cuatro cartas y una es blanca [(2,1)(3,1):S2] (Jud; C1,17)

Por otro lado, también hay descripciones con tres elementos. Se puede tratar de la terna  $f_j, d_j, n_j$  del espacio muestral elegido, lo que podría ser una expresión insuficiente de {P+} o de alguna composición múltiple del estilo de {(N- & D-) \* F=}

- hay cuatro cartas dos negras dos blancas [(2,2)(2,3):S1] (Eug; C2,3)
- hay tres cartas: dos negras y una blanca y la posibilidad es de dos a una [(2,1)(3,2):S1] (Ray; C1,16)

Cuando una descripción tiene cuatro elementos lo más frecuente es que se trate de la cuarteta  $f_j, n_j, f_k, n_k$  (donde j es el espacio muestral elegido y k el otro). En algunos de estos casos se podría pensar que es una expresión insuficiente de {P+}, pero también podría ser, por ejemplo, {F+}:

- es más probable sacar dos de tres que uno de dos [(1,1)(2,1):S2] (Raf; C1,21)

Otros casos sugieren más bien estrategias de equilibrio:

- tiene dos negras y son cuatro cartas y allá tienen una negra y cuatro cartas [(1,3)(2,2):S2] (Mar; C1,9)

Una descripción de cuatro elementos también puede tratarse de la cuarteta  $f_j, d_j, f_k, d_k$ . Las de estos ejemplos podrían ser expresiones insuficientes de estrategias de equilibrio, de {F+} o de {N-}:

- hay cinco negros cuatro blancos, allá tres negros dos blancos [(2,3)(5,4):S2] (Eug; C2,9)
- existen dos en negro y una blanca, existen más probabilidades, porque allá existe tres negras y dos blancas [(2,1)(3,2):S1] (I; C6,1)

También hay descripciones con cuatro elementos de caracter mixto. La de este ejemplo podría sugerir las estrategias {N- & D-} ó {P+}:

- de tres tomamos dos negras y allá hay dos blancas y tres negras [(2,1)(3,2):S1] (Pa2; C2,5)

Por último, señalo una respuesta descriptiva particularmente notable porque aunque comprende seis elementos y describe por completo el arreglo, no da indicios de cuál pueda ser la estrategia seguida (o las estrategias seguidas):

- en S1 de tres hay una negra y dos blancas y en S2 de seis hay dos negras y cuatro blancas [(1,2)(2,4):=] (Mal; C2,10)

**d) Distribución de las respuestas sin interpretación**

Las 405 respuestas que intervendrán en el análisis únicamente con elección (sin interpretación) se distribuyen como sigue:

causa	C1	C2	C3	C4	C6	TOT
sin justificación	16	5	83	4	66	174
sin argumentación	65	26	7	14	1	113
descripción	68	43	1	3	3	118
TOTAL	149	74	91	21	70	405
TOTAL DE RESPUESTAS	729	318	193	150	240	1630

**6.2.3.4. RESPUESTAS CANCELADAS**

Del total de 1630 respuestas, hubo 81 que debieron ser eliminadas de la etapa de análisis. Esto ocurrió o bien porque el sujeto vio mal el enunciado del problema, o bien porque es manifiesto que el sujeto no había comprendido el planteamiento del ejercicio, o bien porque hay otras incongruencias. Aquí presento algunos ejemplos.

**a) El sujeto vio mal la pregunta**

Hay 47 respuestas canceladas en las que es claro o probable que el sujeto ha visto mal la pregunta. Esto ocurrió sobre todo (38 respuestas) en la primera aplicación del cuestionario en el primer experimento, lo que atribuyo a la mala realización experi-

mental (barajas enseñadas al aire, etc) o a que los sujetos vieron correctamente pero interpretaron mal los conjuntos de cartas mostrados por desconocimiento de la baraja americana (por ejemplo tomando tal vez por ases las figuras, etc). Aunque con menor frecuencia, también se presentó este fenómeno en la segunda aplicación de C1 (2 respuestas) y en la aplicación de C2 (7 respuestas). Veamos dos ejemplos:

- en S1 y en S2 no hay negras entonces la probabilidad 0/0 [(0,2)(1,1):n] (Cri; C1,5)
- de tres, dos son negras y de dos las dos son negras [(1,1)(2,1):=] (Bet; C2,18)

Un caso particular es el de la pregunta 14 del primer cuestionario, planteada como (2,2)(4,2). Es evidente que varios sujetos la vieron correctamente:

- tengo la misma posibilidad de equivocarme dos veces [=] (Rub; C1,14)
- la probabilidad aquí es dos tercios y ahí un medio [S2] (Jor; C1,14)
- hay dos probabilidades de cuatro, aunque allá haya seis es menos probable sacar una negra en seis cartas [S1] (Ray; C1,14)

Pero también es evidente que cuatro sujetos coincidieron en ver (2,2)(3,3) en vez de (2,2)(4,2) <sup>(19)</sup>; he aquí esas respuestas:

- existe probabilidad de negras 2-3 (sic) [=] (Fat; C1,14)
- en ambos casos tengo el 50% de prob de sacar negra [=] (Jam; C1,14)
- en proporción hay una negra por cada dos cartas en los dos conjuntos [=] (Raf; C1,14)
- hay dos negras de cuatro y tres negras de seis [=] (Rey; C1,14)

Una vez detectada esta doble visión, en once de las respuestas a esa pregunta cabe la duda: es posible que el sujeto haya visto (2,2)(4,2) o bien (2,2)(3,3), como en las siguientes:

- en ambos lados hay la misma probabilidad [=] (Edi; C1,14)
- hay buena oportunidad de sacarla en ambos [=] (Ter; C1,14)
- de preferencia S2 ya que tiene más negras [S2] (Pal; C1,14)
- hay menos cartas que allá y hay dos negras [S1] (Bea; C1,14)

En otras tres, es evidente que el sujeto no vio ninguna de las dos posibilidades, sino alguna otra:

- en ambas sólo existía una carta blanca [=] (Ang; C1,14). Este sujeto vio algo de la forma (?)(?,1)
- sólo hay dos posibilidades de fallar en cinco cartas y allá hay tres [S2] (Car; C1,14). Este sujeto vio algo de la forma (?)(?,3)(3,2)
- hay el mismo número de negras [=] (Gua; C1,14). Este sujeto vio algo de la forma (f,?)(f,?)

19. Por alguna razón que no comprendo uno de los ases de la mano S2 debe haber sido fácilmente confundible con otra carta (¿tal vez un cuatro?).

Debido a todas estas confusiones, me he visto en la necesidad de cancelar no sólo las 7 respuestas a la pregunta C1,14 en las que es **si** evidente que el sujeto **no** vio adecuadamente el arreglo (2,2)(4,2), sino también todas las 11 respuestas en las que **no** sea evidente que el sujeto **si** vio adecuadamente el arreglo. Sólo he dejado las respuestas en las que **si** es evidente que el sujeto **si** vio correctamente el arreglo (2,2)(4,2).

Entre las demás respuestas canceladas porque el sujeto vio mal la pregunta, hay también en el cuestionario C1 varias otras "repeticiones": dos corresponden a cada una de las preguntas 5 y 8, y tres a cada una de las preguntas 9, 10 y 15. Lo mismo ocurre una vez en el cuestionario C2: dos de las respuestas canceladas por este motivo corresponden a la pregunta 7. Sin embargo, no hay evidencia de que se trate del mismo error en estas repeticiones, por lo que sólo se cancelaron las respuestas en las que era evidente que el sujeto no vio adecuadamente el arreglo.

Así, las cancelaciones porque el sujeto vio mal la pregunta se distribuyen como sigue:

	cuestionario	preguntas	canceladas
seguramente vio mal	C1	2 a 13, 15 y 16	20
	C1	14	7
	C1	17 a 32	2
	C2	1 a 20	7
probablemente vio mal	C1	14	11
	TOTAL		47

**b) Incomprensión del ejercicio**

En 22 respuestas fue claro que el sujeto no había comprendido la naturaleza del ejercicio que se le solicitaba realizar; las respuestas en las que se identificó este tipo de fenómeno fueron canceladas del análisis. Estos son algunos ejemplos:

- para sacar negra debe de ser una y en S2 hay cuatro y en S1 hay dos [(2,2)(4,4):n] (Edu; C1,2)
- es más frecuente sacar blancas por ser mayor el número de elementos blancos [(1,2)(3,5):S2] (Q5; C4,7)

La gran mayoría (18 de 22) de las respuestas canceladas por incomprensión del ejercicio están asociadas a mecanismos primitivos. Así, 10 de las 11 respuestas en las que se presentó un mecanismo de acomodo fueron canceladas, como las siguientes:

- la probabilidad de que salga 7/2 y 3/2 (sic: los numeradores son la representación de las barajas) [(0,2)(2,2):S1] (Cri; C1,28) (en el mismo caso están las respuestas del mismo sujeto a las preguntas 30, 31 y 32)
- la forma de acomodarse empieza con negro y termina en negro, en cambio allá empieza con blanco y termina...? [(2,3)(5,4):S2] (Als; C2,9)

- aunque se tienen menos cartas hay un rey de corazones [(2,1)(4,2):S1] (Bla; C2,4)
- hay equilibrio en los dos grupos [(3,4)(4,3):=] (Q1; C4,3) (en el mismo caso están las respuestas de los sujetos Q2, Q5 y Q6 a la misma pregunta <sup>20</sup>)

Asimismo, 6 de las 11 respuestas en las que se presentó el mecanismo de juntar lados debieron ser canceladas (todas ellas de C1), como las siguientes:

- existe probabilidad de negras 50% 2-2 (sic) [(0,2)(2,0):=] (Fat; C1,13)
- en unión hay tres negras y cuatro cartas [(1,1)(2,0):=] (Edu; C1,6) (en el mismo caso están las respuestas a las preguntas 3, 7, 12 y 15 del mismo sujeto)

En cuanto al mecanismo de atracción, 2 de las 7 respuestas registradas con él debieron ser canceladas:

- más blancos pero mismos negros... es más fácil que salga en S1 pero me gustaría agarrar de S2 [(3,1)(3,4):S2] (O; C6,2)
- tuve una corazonada y fue al azar [(1,1)(3,1):=] (Q6; C4,10)

Así, la distribución de las respuestas canceladas por incomprensión del ejercicio es la siguiente:

formas de incomprensión	cuestionario	canceladas en las preguntas		
		1 a 5	6 a 10	11 al fin
acomodo	C1	0	0	4
	C2	1	1	0
	C4	4	0	0
juntar lados	C1	1	2	3
	C4	0	1	0
atracción	C6	1	0	0
	C1	1	0	0
otras	C2	1	0	0
	C4	0	1	0
	C6	1	0	0
	TOTAL: 22 =	10	5	7

Es de observar que 15 de las 22 respuestas que fueron canceladas por incomprensión ocurrieron durante las primeras diez preguntas de un cuestionario, y que de ellas 10 corresponden a las primeras cinco preguntas.

#### c) Otros causantes de cancelación

Entre las 81 respuestas canceladas, hay 12 que no corresponden a ninguno de los motivos anteriores:

<sup>20</sup>. Véase el comentario al respecto en el párrafo §4.5.2.2.a del capítulo 4.



Han sido canceladas del análisis respuestas en las que no sólo cabe la duda de cómo interpretar la justificación sino de cuál es la elección misma. Esto se presentó en 4 ocasiones (una en C2, dos en C3 y una en C4); aquí hay dos ejemplos:

- hay en S2 tres posibilidades de sacar negras de cinco, en S1 hay una de dos [(1,1)(3,2):?] (Mal; C2,20)
- en S1 hay un poco de chance en sacar negra. En los dos lados hay la misma posibilidad de sacar negra [(1,2)(2,4):?] (Q2; C4,20)

Asimismo, cancelo del análisis las respuestas de sujetos entrevistados en las que es evidente que hubo una presión por parte del compañero de binomio o de la entrevistadora. Esto ocurrió en 6 ocasiones (tres en cada uno de C3 y C6); aquí hay dos ejemplos:

- yo diría que S2, ¿cómo la ves?... porque hay más negras [(4,1)(6,2):S2] (J; C3,22/3) (después de que M hizo mención de su novio <sup>21</sup>)
- (S: ¿entonces de te quedas en S1?) ajá, (porque) son menos cartas... eh... pues... en S2 hay más cartas, pero sabes que hay menos posibilidades de ganar, entonces puede ser un poco psicológico, ¿no? De que ves más cartas, pero hay más, entonces ves menos pero, pues... digo... [(1,2)(3,5):S1] (V; C3,25/2)

Las demás respuestas fueron canceladas por representar algún absurdo. Son 2, ambas de C4; se trata de:

- en S2 hay un equilibrio y en S1 hay más blancas [(1,2)(3,3):=] (Q1; C4,14) (el argumento parece ser {E<}, pero eso discrepa con la respuesta "da igual")
- existe mayor opción de que salga negra en S2 [(1,3)(2,6):S1] (Q6; C4,11) (discrepancia entre el lado elegido y la justificación)

Esta es la distribución de las respuestas canceladas por estos motivos:

motivo	cuestionario	número de canceladas
sin elección	C2	1
	C3	2
	C4	1
no es su opinión	C3	3
	C6	3
	C4	2
absurdo	C4	2
	TOTAL	12

21. Ver en el capítulo 5 el párrafo sobre la lectura paralela de la entrevista al binomio J-M: §5.1.3.3.

**d) Distribución de las respuestas canceladas**

En la siguiente tabla se reportan la distribución de todas las respuestas canceladas, según el motivo de cancelación, el cuestionario y el número de pregunta correspondiente. Al final, para fines de comparación, se agrega el total de respuestas (canceladas o no) de los cinco experimentos.

causa	num	C1	C2	C3	C4	C6	TOT
vio mal	1 a 5	4	2	0	0	0	6
	6 a 10	9	1	0	0	0	10
	11 al fin	27	4	0	0	0	31
	total	40	7	0	0	0	47
incom- prensión del ejer- cicio	1 a 5	2	2	0	4	2	10
	6 a 10	2	1	0	2	0	5
	11 al fin	7	0	0	0	0	7
	total	11	3	0	6	2	22
otras	1 a 5	0	0	1	0	0	1
	6 a 10	0	0	1	0	0	1
	11 al fin	0	1	3	3	3	10
	total	0	1	5	3	3	12
total por etapa	1 a 5	6	4	1	4	2	17
	6 a 10	11	2	1	2	0	16
	11 al fin	34	5	3	3	3	48
	total	51	11	5	9	5	81
total por tipo	vio mal	40	7	0	0	0	47
	incompr.	11	3	0	6	2	22
	otras	0	1	5	3	3	12
	total	51	11	5	9	5	81
TOTAL	1 a 5	122	78	26	30	25	281
DE	6 a 10	143	80	36	30	26	315
RES-	11 al fin	464	160	131	90	189	1034
PUESTAS	total	729	318	193	150	240	1630

**6.2.3.5. RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE FOGUEO**

Como mencioné en el capítulo 1, muchos autores les dan a los sujetos, antes del experimento propiamente dicho, algunas preguntas diseñadas para que se familiarice con el planteamiento, el material, etc. Para esos autores estas preguntas no forman parte explícita del experimento, y las respuestas que dan los sujetos a ellas son desechadas. Yo he obrado de distinta manera: las respuestas que dan los sujetos a las primeras preguntas son consideradas al mismo nivel que las demás, porque lo que más me ha interesado son las respuestas intuitivas al tipo de problemas planteado, y las primeras respuestas son las más espontáneas.

Sin embargo, esas preguntas son también las que permiten al sujeto la familiarización con el planteamiento, y en ese proceso, algunos sujetos cometen errores por incomprensión del ejercicio, lo que ocurre en mis experimentos como en los de cualquier otro. Algunos de esos errores fueron detectados y cancelados (ver en la pág. 319 las respuestas canceladas por incomprensión), pero es posible que haya habido otros errores del mismo estilo, ocurridos durante las primeras preguntas, y que no hayan sido detectadas: éste es un riesgo que decidí correr, en aras de la recuperación de las respuestas más espontáneas (22).

### 6.3. METODOLOGIA PARA EL ANALISIS DE RESULTADOS

La construcción de los sistemas de categorías permitió saber cuáles estrategias son correctas, cuáles pueden considerarse como correctas en determinadas circunstancias y cuáles son incorrectas. Esto último, juntamente con el trabajo de descifrado, permitió establecer que hay respuestas cuya interpretación, a primera vista, es de una estrategia incorrecta, pero que considerada bajo otra luz podría ser una estrategia correcta. Esta nueva manera de considerar a las estrategias permite estructurar la metodología con la que se efectuará, en el capítulo siguiente, el análisis de los resultados obtenidos.

#### 6.3.1. CLASIFICACION DE ESTRATEGIAS

¿Qué estrategias se pueden considerar correctas? Como hemos visto, según Piaget sólo las estrategias de proporcionalidad son correctas, y para Fischbein cualquier indicio de que el sujeto pueda estar manejando una idea precursora de la probabilidad ya puede ser considerada como correcto, incluso estrategias como {F+}. Yo prefiero no clasificar las estrategias en dos categorías (correctas e incorrectas), sino en cinco niveles progresivos, que a su vez se agrupan en tres. Los cinco niveles son:

I: Estrategias consistentemente correctas. Son estrategias que, como familia, se pueden aplicar siempre, y que siempre son correctas. Las únicas estrategias en este nivel son las estrategias de proporcionalidad, {P+} y {P=}: siempre se puede aplicar una de las dos, y ésta siempre es correcta.

---

22. Esto se tratará nuevamente en el capítulo 7 (§7.3.3.2).

- II: Estrategias inconsistentemente correctas. Se trata de estrategias que no se pueden aplicar en todas las situaciones, pero que, cuando se aplican, son correctas siempre. Un ejemplo típico de este nivel son las estrategias de equilibrio {E<>}, {E<} y {E>}: aunque como familia las estrategias de equilibrio siempre se pueden aplicar, los demás miembros de la familia ({E5} y {E=}) son incorrectos, mientras que las aquí mencionadas son correctas siempre que se pueden aplicar, que es respectivamente en las ubicaciones U2.3, U2.2 y U2.4. Otras estrategias de este nivel se tratarán más adelante (§6.3.1.1, pág. 324).
- III: Estrategias situacionalmente correctas. Bajo este nombre he agrupado las estrategias que no se pueden aplicar en todas las situaciones y que, cuando se aplican, pueden ser correctas o incorrectas dependiendo de la situación en que estén. En este nivel se encuentran las estrategias simples {F+}, {F-}, {D-} y {D=}, que son correctas sólo en situaciones de imposibilidad o certeza; esto se comentará en la pág. 324. Cuando no son correctas, podemos decir que estas estrategias son situacionalmente incorrectas.
- IV: Estrategias inconsistentemente incorrectas. Son estrategias que no se pueden aplicar en todas las situaciones, y que, cuando lo hacen, son siempre incorrectas. Un ejemplo de este nivel son las estrategias de equilibrio que no están en II: {E5} y {E=} son incorrectas siempre que se aplican, que es respectivamente en las ubicaciones U2.4, y U3.2 ó U3.4. En este nivel se encuentran, además, las estrategias primitivas {F-}, {F1} y {D+}.
- V: Estrategias consistentemente incorrectas. Se trata de estrategias que, como familia, se pueden aplicar siempre, y que siempre son incorrectas. Dos familias componen este nivel: las centraciones en los casos totales y las estrategias de resta.

Por brevedad, cuando no sea indispensable especificar más, hablaré de estrategias correctas para referirme a los niveles I y II, o bien a los niveles I, II y III; y de estrategias incorrectas para referirme a los niveles IV y V, o bien a los niveles III, IV y V.

#### 6.3.1.1. ESTRATEGIAS CORRECTAS

Las estrategias correctas son aquellas cuya estructura lógica lleva a una elección que coincide sistemáticamente con el espacio muestral de mayor probabilidad formal (o bien, lleva a la respuesta "da igual" cuando ambas probabilidades son iguales).

Las principales estrategias correctas son, evidentemente, las estrategias simples {P+} y {P=}; éstas son las únicas estrategias que son consistentemente correctas. Las estrategias inconsistentemente correctas pueden ser simples o compuestas.

## a) Estrategias simples

Las estrategias correctas simples son algunas de las estrategias de equilibrio:  $\{E<\>\}$ ,  $\{E<\}$  y  $\{E>\}$ . Son inconsistentemente correctas porque no se aplican siempre y porque su contraparte de igualdad,  $\{E=\}$ , que se aplica en las ubicaciones de la forma U3.j, es incorrecta siempre. Sin embargo, éstas sí son correctas cuando se pueden aplicar:

- $\{E<\>\}$ : Es correcta en las ubicaciones U1.1, U1.3, U1.5 y U2.3, que es donde se aplica. Demostración: si  $f_j > d_j$  y  $f_k < d_k$ , entonces  $p_j > \frac{1}{2} p_k$ , de donde  $p_j > p_k$ .
- $\{E<\}$ : Es correcta en las ubicaciones U2.1 y U2.2, que es donde se aplica. Demostración: si  $f_j = d_j$  y  $f_k < d_k$ , entonces  $p_j = \frac{1}{2} p_k$ , de donde  $p_j > p_k$ .
- $\{E>\}$ : Es correcta en las ubicaciones U2.4 y U2.5, que es donde se aplica. Demostración: si  $f_j > d_j$  y  $f_k = d_k$ , entonces  $p_j > \frac{1}{2} p_k$ , de donde  $p_j > p_k$ .

## b) Estrategias compuestas

Por otro lado, están las estrategias compuestas que son inconsistentemente correctas. Se trata de estrategias compuestas que consideran toda la información y lo hacen de manera que es correcta, pero que no se aplican siempre. Son las siguientes diez:

- $\{F+ \& N-\}$ : Es correcta en K2=12122, que es la única situación en donde se aplica: cuando  $\{F+\}$  y  $\{N-\}$  llevan a la elección del mismo lado, ese espacio muestral tiene más favorables y menos totales que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $f_j > f_k$  y  $n_j < n_k$ , entonces  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .
- $\{F+ - N+\}$ : Es correcta en K2=12122, que es la única situación en donde se aplica, y es equivalente a la anterior, porque siempre  $\{N-\}$  y  $\{N+\}$  llevan a elecciones contrarias.
- $\{F+ * N=\}$ : Es correcta en K3=01211, que es la única situación en donde se aplica: cuando  $\{F+\}$  lleva a la elección de un lado pero  $\{N=\}$  lleva a la respuesta "da igual" y domina  $\{F+\}$ , el espacio muestral elegido tiene más favorables y los mismos totales que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $f_j > f_k$  y  $n_j = n_k$ , entonces  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .
- $\{F= \& N=\}$ : Es correcta en K0=00000, que es la única situación en donde se aplica: cuando  $\{F=\}$  y  $\{N=\}$  llevan a la respuesta "da igual", ambos espacios muestrales tienen los mismos favorables y los mismos totales, lo que implica que su probabilidad es igual. Demostración: si  $n_j = n_k$  y  $f_j = f_k$ , entonces  $f_j/n_j = f_k/n_k$  por lo que  $p_j = p_k$ .
- $\{F+ \& D-\}$ : Es correcta en K1=11211, K2=12122 y K3=01211, que son las únicas situaciones en donde se aplica: cuando  $\{F+\}$  y  $\{D-\}$  llevan a la elección del mismo lado, ese espacio muestral tiene más favorables y menos desfavorables que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $f_j > f_k$  y  $d_j < d_k$ , entonces  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .

- {F= & D=}: Es correcta en  $K0=00000$ , que es la única situación en donde se aplica: cuando {F=} y {D=} llevan a la respuesta "da igual", ambos espacios muestrales tienen los mismos favorables y los mismos desfavorables, lo que implica que su probabilidad es igual. Demostración: si  $d_j=d_k$  y  $f_j=f_k$ ,  $n_j=n_k$  y entonces  $f_j/n_j=f_k/n_k$  por lo que  $p_j=p_k$ .
- {D- & N+}: Es correcta en  $K1=11211$ , que es la única situación en donde se aplica: cuando {D-} y {N+} llevan a la elección del mismo lado, ese espacio muestral tiene menos desfavorables y más totales que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $d_j < d_k$  y  $n_j > n_k$ , entonces  $d_j/n_j < d_k/n_k$ , o sea  $(1-f_j/n_j) < (1-f_k/n_k)$ , de donde  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .
- {D- - N-}: Es correcta en  $K1=11211$ , que es la única situación en donde se aplica, y es equivalente a la anterior, porque siempre {N-} y {N+} llevan a elecciones contrarias.
- {D- \* N=}: Es correcta en  $K3=01211$ , que es la única situación en donde se aplica: cuando {D-} lleva a la elección de un lado pero {N=} lleva a la respuesta "da igual" y domina {D-}, el espacio muestral elegido tiene menos desfavorables y los mismos totales que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $d_j < d_k$  y  $n_j = n_k$ , entonces  $d_j/n_j < d_k/n_k$ , o sea  $(1-f_j/n_j) < (1-f_k/n_k)$ , de donde  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .
- {D= & N=}: Es correcta en  $K0=00000$ , que es la única situación en donde se aplica: cuando {D=} y {N=} llevan a la respuesta "da igual", ambos espacios muestrales tienen los mismos desfavorables y los mismos totales, lo que implica que su probabilidad es igual. Demostración: si  $n_j=n_k$  y  $d_j=d_k$ ,  $f_j=f_k$  y entonces  $f_j/n_j=f_k/n_k$  por lo que  $p_j=p_k$ .

### c) Teoremas en acto

Ahora bien, cuando un sujeto utiliza de manera espontánea alguna de las estrategias correctas que no son consistentemente correctas, no tiene en mente las demostraciones que se han planteado aquí. Un sujeto que utiliza estas estrategias compuestas lo hace respondiendo a la necesidad de integrar toda la información contenida en el problema (23).

Sin embargo, hay maneras correctas de integrar toda la información, como las de arriba, y maneras incorrectas, como {R+} o

23. Utilizo aquí el término "integrar" en el sentido que le asigna Fischbein (1987), es decir como lo contrario de "globalizar". La globalización fischbeiniana es básicamente la "cancelación" de algunos componentes (ver en el capítulo 4 la introducción a la sección §4.2), y la integración implica que todos los componentes entran en juego. En este tipo de problemas, la integración se logra primero de manera aditiva y después de manera multiplicativa (Wilkening y Anderson, 1982).

alguna de las estrategias compuestas incorrectas del tipo de {N- & D-}. ¿Qué es lo que hace que un sujeto integre la información en una estrategia correcta y no en una incorrecta? Sin duda, la respuesta es una mezcla de azar e intuición, mezcla que debe ser distinta para cada sujeto y probablemente también para cada problema. Y cuando digo "intuición" en este caso me refiero a lo que Vergnaud llama "teoremas en acto":

«Las diferentes respuestas y soluciones aportadas por los alumnos pueden ser consideradas como concebidas por reglas de producción o procedimientos. Desde un punto de vista metodológico, es decisivo identificar estas reglas o procedimientos. Sin embargo, solamente podremos comprender su significado teniendo en cuenta las relaciones a las que dichas reglas o procedimientos se aplican. En otros términos, es necesario considerarlos como "teoremas" implícitos. El concepto de "teorema en acto" se refiere a las propiedades de las relaciones percibidas y utilizadas por el sujeto en situación de resolución de un problema, entendiéndose que esto no significa que el sujeto sea capaz de explicitarlas o de justificarlas.» (Vergnaud, 1981)

Así, el que un sujeto utilice la estrategia {F+ & N-} (o cualquiera de las de la lista de arriba) puede ser un teorema en acto, como lo es también el que un sujeto exprese de manera intuitiva la relación  $(f+1)/(n+1) > f/n$ , como en el siguiente ejemplo (interpretado como {N+ \* D=}):

▪ hay una carta más que allá y es negra [(2,1)(3,1):S2]  
(Als; C2,19)

Aquí es necesaria una aclaración: aunque estas respuestas se han considerado correctas "por teorema en acto", esto no es necesariamente así. Podría ocurrir, por ejemplo, que un sujeto que expresara {F+ & N-} en un arreglo de la combinación K2 lo hiciera simplemente tratando de reunir dos fuentes de información, como lo haría expresando {D- & N-} en cualquiera de las combinaciones K6 a K16: en ese caso ambas composiciones tendrían que ser consideradas como incorrectas (puesto que no basta reunir cualesquiera dos fuentes de información para que la composición sea correcta). Así, podría estarse incurriendo en un "falso positivo" en el diagnóstico. Sin embargo, este es un riesgo que he decidido correr, porque el contexto general de quienes utilizan estas respuestas inconsistentemente correctas sugiere en la mayoría de los casos que están razonando correctamente.

### 6.3.1.2. ESTRATEGIAS SITUACIONALMENTE CORRECTAS

Las estrategias situacionalmente correctas son estrategias que se pueden aplicar en muchas situaciones, pero que son correctas sólo en algunas de ellas.

Como en el caso anterior, podemos hablar de estrategias simples y compuestas. Ambos tipos de estrategias situacionalmente correctas son correctas por teoremas en acto.

## a) Estrategias simples

Hay cuatro estrategias simples que pueden ser correctas en cierto tipo de situaciones. Las estrategias son centraciones en favorables o desfavorables, y las situaciones son aquellas en las que hay imposibilidades y/o certezas.

- {F+}: Aunque se puede aplicar en muchas más situaciones, sólo es correcta en las ubicaciones U1.1, U1.3, U2.1 y U3.1, que es donde hay alguna imposibilidad. Demostración: si  $f_j > f_k$  y  $p_n = 0$ , entonces  $f_j > f_k = 0$ , de donde  $p_j > p_k = p_n = 0$ .
- {D-}: Aunque se puede aplicar en muchas más situaciones, sólo es correcta en las ubicaciones U1.3, U1.5, U2.5 y U3.5, que es donde hay alguna certeza. Demostración: si  $d_k < d_j$  y  $p_n = 1$ , entonces  $0 = d_k < d_j$ , de donde  $1 = p_n = p_j > p_k$ .
- {F-}: Aunque se puede aplicar en muchas más situaciones, sólo es correcta en K12=10120, que sólo ocurre en la ubicación U3.1, y que es donde hay doble imposibilidad. Demostración: si  $f_j = f_k$  y  $p_n = 0$ , entonces  $f_j = f_k = 0$ , de donde  $p_j = p_k = p_n = 0$ .
- {D=}: Aunque se puede aplicar en las combinaciones K4 y K15, sólo es correcta en K13=11010, que sólo ocurre en la ubicación U3.5, y que es donde hay doble certeza. Demostración: si  $d_j = d_k$  y  $p_n = 1$ , entonces  $d_j = d_k = 0$ , de donde  $p_j = p_k = p_n = 1$ .

## b) Estrategias compuestas

También hay cuatro estrategias compuestas que son situacionalmente correctas.

- {N- \* F=}: Se puede aplicar en K12 y en K5, pero sólo es correcta en K5=10122: cuando {N-} lleva a la elección de un lado pero {F=} lleva a la respuesta "da igual" y domina {N-} (y si hay casos favorables), el espacio muestral elegido tiene menos totales y los mismos favorables que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $n_j < n_k$  y  $f_j = f_k$  (y si además  $f_j > 0$ , lo que excluye a K12), entonces  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .
- {F+ \* D=}: Se puede aplicar en K13 y en K4, pero sólo es correcta en K4=11011: cuando {F+} lleva a la elección de un lado pero {D=} lleva a la respuesta "da igual" y domina {F+} (y si hay casos desfavorables), el espacio muestral elegido tiene más favorables y los mismos desfavorables que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $f_j > f_k$  y  $d_j = d_k$  (y si además  $d_k > 0$ , lo que excluye a K13), entonces  $f_j/d_j > f_k/d_k$ , lo que equivale a  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .
- {D- \* F=}: Se puede aplicar en K12 y en K5, pero sólo es correcta en K5=10122: cuando {D-} lleva a la elección de un lado pero {F=} lleva a la respuesta "da igual" y domina {D-} (y si hay casos favorables), el espacio muestral elegido tiene menos desfavorables y los mismos favorables que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $d_j < d_k$  y  $f_j = f_k$  (y si además



$f_j > 0$ , lo que excluye a K12), entonces  $f_j/d_j > f_k/d_k$ , lo que equivale a  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .

{N+ \* D=}: Se puede aplicar en K13 y en K4, pero sólo es correcta en K4=11011: cuando {N+} lleva a la elección de un lado pero {D=} lleva a la respuesta "da igual" y domina {N+} (y si hay casos desfavorables), el espacio muestral elegido tiene más totales y los mismos desfavorables que el otro, lo que implica que su probabilidad es mayor. Demostración: si  $n_j > n_k$  y  $d_j = d_k$  (y si además  $d_k > 0$ , lo que excluye a K13), entonces  $d_j/n_j < d_k/n_k$ , o sea  $(1-f_j/n_j) < (1-f_k/n_k)$ , de donde  $f_j/n_j > f_k/n_k$  por lo que  $p_j > p_k$ .

### 6.3.1.3. ESTRATEGIAS INCORRECTAS

Las estrategias incorrectas llevan a soluciones que, en general, no coinciden con la probabilidad formal aunque coyunturalmente pueden hacerlo; por ejemplo, el hecho de que en (2,1)(5,2) la estrategia {R+} lleve a la misma elección que {P+} no implica que {R+} sea correcta: el tipo de razonamiento involucrado en {R+} (aditivo, y no multiplicativo) es incorrecto. Análogamente, {E=}, que se aplica en las ubicaciones de la forma U3.j, es incorrecta siempre:  $f_j < d_j$  y  $f_k < d_k$  no implica que  $p_j = p_k$ , así como  $f_j > d_j$  y  $f_k > d_k$  tampoco implica que  $p_j = p_k$ .

#### a) Estrategias simples

Las estrategias simples que son consistentemente incorrectas son todas las centraciones en los casos totales: {N-}, {N+} y {N=}, así como todas las estrategias de resta: {R+}, {R-} y {R=}.

Por otra parte, son inconsistentemente incorrectas las estrategias primitivas {E5}, {F-}, {F1} y {D-}, amén de la estrategia de equilibrio {E=} (24).

#### b) Estrategias compuestas

En los párrafos anteriores, se mencionaron algunas estrategias compuestas que son inconsistente o situacionalmente correctas. La mayoría de las demás estrategias compuestas son incorrectas, aunque no todas lo son. Se puede ver si una composición es correcta o incorrecta, considerando el tipo de composición y la corrección de las estrategias componentes: así, se dan las siguientes posibilidades de composiciones correctas e incorrectas:

#### Composiciones correctas:

- (1) dos dominantes, ambas correctas:  
por ejemplo, {F= & P=} en K12;

24. La estrategia {E=} es inconsistentemente incorrecta porque como su expresión era indistinguible de la de {P=} en la ubicación U3.3, se eliminó como interpretación posible de esa situación (ver pág. 312); si no hubiera sido así, {E=} tendría que ser considerada situacionalmente correcta.

- (2) una dominante correcta y una dominada incorrecta:  
por ejemplo, {P= - N-};

Composiciones incorrectas:

- (3) dos dominantes, una correcta y una incorrecta:  
por ejemplo, {N- & E<>};
- (4) dos dominadas, una correcta y una incorrecta:  
por ejemplo, {N- & E<>};
- (5) una dominante incorrecta y una dominada correcta:  
por ejemplo, {N- \* P=};
- (6) dos dominantes, ambas incorrectas:  
por ejemplo, {N- & D-};
- (7) dos dominadas, ambas incorrectas:  
por ejemplo, {F+ & F1};
- (8) una dominante y una dominada, ambas incorrectas:  
por ejemplo, {F+ \* E=};

Es decir, basta con que haya dos estrategias dominadas, o una correcta dominada o una incorrecta dominante para que la composición sea incorrecta.

Cabe una observación. Según la clasificación de Maury, las posibilidades (2) a (5) serían "argumentaciones mixtas": estrategias compuestas en las que un componente es una estrategia correcta y el otro una estrategia incorrecta. Sin embargo, una de esas posibilidades es, a mi entender, correcta, mientras que las otras son incorrectas. En particular, podría discutirse si en la posibilidad (3) tiene más peso la correcta o la incorrecta. Esto sólo ocurrió en cuatro ocasiones, todas ellas en entrevistas. En las cuatro respuestas me ha parecido que el componente erróneo es más fuerte, y por ello las he considerado como incorrectas, a pesar de que tienen un componente correcto. Estas son las cuatro respuestas; en todas ellas se ha subrayado el componente incorrecto:

- son el cincuenta el cincuenta los dos, mitad de cada uno o sea pues cincuenta, o sea en los dos predominan los negros [(14,7)(18,9):=] (J; C3,26) ({E= & P=})
- acá es más fácil, también ahí pero tiene dos blancas y acá sólo una, fuera lo mismo si allí fueran cuatro negras y aquí la mitad de las negras [(2,1)(3,2):S1] (T; C3,18) ({(D- \* E=) & P+})
- hay menos elementos, y son dos negras [(2,1)(3,4):S1] (O; C6,7) ({N- & E<>})
- es más rápido que mi probabilidad sea negra, estoy dos a uno... allá a tres probs de que sea y cuatro de que no, rápido: menos cartas para elegir [(2,1)(3,4):S1] (X; C6,7) ({N- & E<>})

### 6.3.2. EXPRESIONES INCOMPLETAS DE ESTRATEGIAS CORRECTAS

En muchas respuestas cabe la duda de si el sujeto está expresando todo lo que ve o si hay partes de la información que,

valga la redundancia, obvia por obvias. Veamos un ejemplo. La respuesta:

- hay más negras [(1,3)(2,2):S2] (Gua; C1,9)

parecería indiscutiblemente provenir de una estrategia {F+}. Sin embargo, al revisar el contexto, se ve que el sujeto Gua utilizó en el arreglo anterior una centración en los casos totales {N-}:


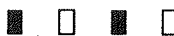
- hay menos cartas y puede haber la posibilidad de que saque una negra [(1,2)(2,4):S1] (Gua; C1,8)

Esto da pie para especular sobre la posibilidad de que la respuesta a la pregunta 9 citada en primer lugar provenga más bien de una estrategia compuesta {F+ \* N=}. Lo mismo ocurre con la respuesta:

- hay más negras en el mismo evento [(1,3)(2,2):S2] (Raf; C1,23)

La diferencia entre {F+} y {F+ \* N=} es importante: la primera es una estrategia incorrecta (puesto que no se trata de una ubiación de imposibilidad), mientras que la segunda es (inconsistentemente) correcta.

¿Por qué se puede pensar que el sujeto pudo haber callado el hecho de que había el mismo número de tarjetas de ambos lados? Intentemos representarnos lo que vio el sujeto, que pudo haber sido algo como lo que se ilustra en la siguiente figura:

ESPACIO MUESTRAL S1	ESPACIO MUESTRAL S2
	

Puede decirse que es tan obvio que hay cuatro tarjetas en cada lado que no hay necesidad de decirlo:

«Las intuiciones (son) formas de conocimiento inmediato en los que los elementos justificantes, si los hay, están implícitos.» (Fischbein, 1975, pág. 5)

Lo intuitivo, lo obvio, está implícito.

En consecuencia, el sujeto puede tal vez estar considerando implícitamente mucha más información que la que está manifestando explícitamente. La expresión de la información incorporada y de la que hay conciencia es ya, de suyo, difícil, pero se vuelve imposible cuando la información ha sido incorporada inconcientemente.

Fischbein comenta también este aspecto:

«Mi punto de vista es que hay que distinguir entre no-integración y centración. (...) Si por varias razones, cierto componente no le parece relevante al sujeto en cierta tarea, el efecto de este componente puede no ser detectable por la metodología de investigación. Esto no implica que el mismo componente no se active si la tarea cambia (...) Además, un factor aparentemente inactivo, neutralizado, por ejemplo, por la igualación, de hecho toma parte en la decisión cognitiva final simplemente por su información neutra. El hecho de que el ni-

ño esté enfocando su atención en una dimensión (centración) no implica necesariamente que la otra dimensión haya desaparecido por completo para él (...). En algunas circunstancias la extrapolación desde, digamos, una dimensión a la situación global puede estar objetivamente justificada por la neutralidad de las otras dimensiones (via igualización).» (Fischbein, 1987, pág. 114)

Así, cuando un sujeto expresa ante el arreglo (1,3)(2,2) una estrategia {F+}, podría ser que haya visto la igualdad  $n_1=n_2$  y de alguna manera, conciente o inconcientemente, la esté incorporando también (lo que es tanto más probable mientras más pequeños sean  $n_1$  y  $n_2$ ). Esto no convierte en correcta a la estrategia incorrecta {F+}, ni la convierte en la estrategia correcta {F+ \* N=}, sino que permite considerar a {F+} como una expresión potencialmente incompleta de la estrategia correcta {F+ \* N=}.

Claro, no podemos afirmar que un sujeto que exprese {F+} ante un arreglo como el del ejemplo esté integrando también, sólo que implícitamente, la información de la igualdad de los casos totales y que por lo tanto la estrategia real que esté siguiendo sea {F+ \* N=}: también es perfectamente posible que un sujeto esté absolutamente centrado en los casos favorables. Sin embargo, tampoco podemos desechar que {F+} sea la expresión de {F+ \* N=}: es una posibilidad que podemos y debemos mantener como sospecha (25).

Una consecuencia de esto es que como todas las estrategias compuestas que son inconsistente o situacionalmente correctas tienen dos componentes, cualquiera de ellos podría eventualmente corresponder a una información que no se está considerando explícitamente. Es decir, el sujeto podría estar expresando sólo la mitad (aparentemente incorrecta) de una argumentación correcta. Esto se ve en la siguiente tabla, en la que se han puesto las razones y estrategias que pueden estar expresadas explícitamente y las razones que se podrían estar considerando implícitamente, lo que convertiría a las estrategias (incorrectas) explícitas en expresiones incompletas de estrategias (correctas) implícitas.

25. Este razonamiento permite ver uno de los problemas de la clasificación de Maury (1984, 1986) en respuestas correctas, incorrectas y mixtas: sólo considera como respuestas correctas las que contienen un argumento "pertinente", y deja como incorrectas todas las respuestas con elección correcta y argumento "no pertinente", incluyendo las que podrían estar considerando implícitamente una información que, de explicitarse, transformaría el argumento "no pertinente" en uno "pertinente".

Combinación K=nfd <sub>1</sub> r <sub>2</sub> p	esp elegido	explícitamente:		¿implícitamente?:	
		razón	estrategia	razón	estrategia
K1=11211	S2	$f_1 < f_2$	{F+}	$d_1 > d_2$	{F+ & D-}
	S2	$d_1 > d_2$	{D-}	$f_1 < f_2$	{F+ & D-}
	S2	$d_1 > d_2$	{D-}	$n_1 < n_2$	{N+ & D-}
	S2	$n_1 < n_2$	{N+}	$d_1 > d_2$	{N+ & D-}
K2=12122	S1	$f_1 > f_2$	{F+}	$d_1 < d_2$	{F+ & D-}
	S1	$d_1 < d_2$	{D-}	$f_1 > f_2$	{F+ & D-}
	S1	$f_1 > f_2$	{F+}	$n_1 < n_2$	{F+ & N-}
	S1	$n_1 < n_2$	{N-}	$f_1 > f_2$	{F+ & N-}
K3=01211	S2	$f_1 < f_2$	{F+}	$n_1 = n_2$	{F+ * N=}
	S2	$f_1 < f_2$	{F+}	$d_1 > d_2$	{F+ & D-}
	S2	$d_1 > d_2$	{D-}	$n_1 = n_2$	{D- * N=}
	S2	$d_1 > d_2$	{D-}	$f_1 < f_2$	{F+ & D-}
K4=11011	S2	$f_1 < f_2$	{F+}	$d_1 = d_2$	{F+ * D=}
	S2	$n_1 < n_2$	{N+}	$d_1 = d_2$	{N+ * D=}
K5=10122	S1	$d_1 < d_2$	{D-}	$f_1 = f_2$	{D- * F=}
	S1	$n_1 < n_2$	{N-}	$f_1 = f_2$	{N- * F=}
K0=00000	=	$f_1 = f_2$	{F=}	$d_1 = d_2$	{F= & D=}
	=	$f_1 = f_2$	{F=}	$n_1 = n_2$	{F= & N=}
	=	$d_1 = d_2$	{D=}	$f_1 = f_2$	{F= & D=}
	=	$d_1 = d_2$	{D=}	$n_1 = n_2$	{D= & N=}
	=	$n_1 = n_2$	{N=}	$f_1 = f_2$	{F= & N=}
	=	$n_1 = n_2$	{N=}	$d_1 = d_2$	{D= & N=}

**6.3.3. CATEGORIAS PARA EL ANALISIS**

El análisis de los resultados que se efectuará en el siguiente capítulo comprenderá, entre otros aspectos, una comparación de los resultados obtenidos en diferentes situaciones y una comparación de las ocurrencias de las diferentes estrategias.

**6.3.3.1. CATEGORIAS PARA EL ANALISIS DE LAS SITUACIONES**

- En cada situación, importará saber lo siguiente:
- qué cantidad (o porcentaje) de las respuestas conllevan una decisión correcta y qué cantidad (o porcentaje) cada una de las dos decisiones incorrectas (si la decisión correcta es la elección de un espacio, las incorrectas son la elección del otro y la respuesta "da igual"; si la correcta es la respuesta "da igual", las incorrectas son las dos elecciones de espacios);

- qué cantidad (o porcentaje) de las respuestas están interpretadas;
- entre las respuestas con elección correcta, qué cantidad (o porcentaje) están interpretadas;
- entre las respuestas con elección correcta que están interpretadas, qué cantidad (o porcentaje) tienen una justificación (estrategia) correcta, cuántas tienen una justificación potencialmente incompleta de una estrategia correcta y cuántas tienen una justificación (estrategia) incorrecta;
- entre las respuestas con elecciones incorrectas, qué cantidad (o porcentaje) están interpretadas.

La pregunta obligada en cada situación es "¿qué porcentaje de éxito hubo?". Para contestar a esta pregunta hay dos métodos.

El método más conservador consiste en contar exclusivamente las respuestas con elección correcta y justificación correcta. Este método implica que los únicos sujetos que tienen un éxito en una pregunta son:

- los sujetos con elección correcta y justificación interpretada como una estrategia correcta.

Por otra parte, un método menos estricto puede conceder, a las respuestas no interpretadas y a las justificaciones potencialmente incompletas de estrategias correctas, lo que se suele denominar "el beneficio de la duda". Según este método, los sujetos que tienen un éxito en una pregunta pueden ser:

- los sujetos con elección correcta y justificación interpretada como una estrategia correcta;
- los sujetos con elección correcta y justificación que es una expresión potencialmente incompleta de una estrategia correcta;
- los sujetos con elección correcta y justificación no interpretable (por inexistente, por carente de argumentación o por descriptiva).

El primer método da un porcentaje de éxito que es el mínimo seguro, mientras que el segundo da un porcentaje máximo posible. Ambos métodos excluyen como incorrectas tanto las elecciones incorrectas como las elecciones correctas acompañadas de justificaciones con estrategias incorrectas.

Ninguno de los dos es totalmente adecuado: al primero le faltan todas las respuestas de los sujetos que estaban razonando correctamente pero en las que no atinó a expresar plenamente su razonamiento; mientras que el segundo califica como correctas muchas respuestas de sujetos que posiblemente estaban razonando incorrectamente (pero no lo expresaron plenamente).

Por ello me ha parecido que lo adecuado para medir el rendimiento es considerar ambos porcentajes, como un intervalo. Esto tiene las siguientes implicaciones:

- el porcentaje de éxito real, para cada situación, está entre ambos porcentajes, el mínimo seguro y el máximo posible;

- la diferencia entre ambos porcentajes es un indicador de las dificultades de expresión a que se enfrentan los sujetos en esa situación (26): mientras más fácil sea la expresión, menos respuestas sin interpretar y menos expresiones incompletas habrá;
- la expresión del porcentaje de éxito reproduce el grado de seguridad que se tiene en el resultado.

#### 6.3.3.2. CATEGORIAS PARA EL ANALISIS DE LAS ESTRATEGIAS

Las estrategias serán consideradas de acuerdo con:

- si son estrategias simples o compuestas;
- si son estrategias simples de centración o de relación;
- si intervienen en una estrategia compuesta como dominantes o como dominadas;
- si son consistente, inconsistente o situacionalmente correctas o incorrectas.

### 6.4. RECAPITULACION

En esta última sección del capítulo he agrupado dos temas finales. Por una parte, haré unos comentarios acerca de la hipótesis general enunciada en el capítulo 2. No se trata de concluir todavía acerca de ella, sino de especificar a qué se refiere, lo que era difícil antes de la construcción metodológica a que se dedicaron los tres capítulos anteriores a éste.

Por otra parte, revisaré el material con el que se cuenta para emprender la etapa de análisis.

#### 6.4.1. HIPOTESIS GENERAL

Como ya lo he expuesto en varias ocasiones, las expresiones escritas o verbales de las justificaciones que los sujetos dan de sus propios razonamientos pueden no dar información o hasta dar información falsa. Surge entonces la siguiente interrogante: ¿Se puede prescindir de las explicaciones que da un sujeto acerca de sus elecciones y llegar a una interpretación de las estrategias que él utiliza que esté basada exclusivamente en sus elecciones?

Esta pregunta da pie al siguiente planteamiento: suponiendo que un sujeto utilice de manera consistente una o varias estrategias, se podría diseñar un cuestionario de tal modo que una suce-

26. Sin embargo, no convendría tomarlo como una medida de esas dificultades, por la diferencia de condiciones experimentales en las que se obtuvieron los resultados.

sión específica de respuestas a las diferentes preguntas o patrón de respuestas fuera característico de una determinada estrategia. En este caso no sería necesario preguntarle al sujeto las razones de sus elecciones, sino que las estrategias se podrían deducir de su patrón de respuestas.

Intentaré explicar esto con un ejemplo simplificado. Supongamos que cada sujeto recurre consistentemente a una sola estrategia (y su equivalente de igualdad en caso necesario), y que sólo existen las principales estrategias (es decir, sin las llamadas primitivas). Supongamos que se plantean las tres preguntas que se indican en la tabla:

pregunta	situación	interpretaciones de las respuestas		
		S1	S2	=
(2,1)(4,2)	K15,U3.4	{N-}, {D-}	{F+}, {R+}	{E=}, {P=}
(2,4)(4,4)	K-4,U2.2	{N-}	{F+}, {R+}, {P+}, {E<}	{D=}
(2,1)(4,3)	K10,U3.4	{N-}, {D-}	{F+}, {P+}	{R=}, {E=}

Cada respuesta (salvo las respuesta "S1" y "=" en la segunda pregunta) está sujeta a varias interpretaciones posibles. Sin embargo, cada sujeto que sigue consistentemente un tipo de estrategias tendrá un patrón específico de elecciones:

el sujeto que razona según las estrategias	dará las respuestas, a la pregunta		
	primera	segunda	tercera
{N-} ó {N=}	S1,	S1,	S1
{F+} ó {F=}	S2,	S2,	S2
{D-} ó {D=}	S1,	=,	S1
{E<} ó {E<}, {E>} ó {E=}	=,	S2,	=
{R+} ó {R=}	S2,	S2,	=
{P+} ó {P=}	=,	S2,	S2

Como los seis patrones de la tabla son distintos, el patrón de respuestas que da un sujeto indica qué estrategia ha estado siguiendo. Además, según las reglas del ejemplo, estos seis patrones son los únicos posibles, puesto que suponemos que un sujeto es consistente en su uso de estrategias: ningún sujeto daría uno de los veintinueve patrones restantes, como (S1,S1,S2) ó (S2,=,=) ó (=,S1,S2).

Sin embargo, las condiciones del ejemplo no son muy realistas. Hay, por ejemplo, muchos sujetos que eligen cierto tipo de estrategias ante cierto tipo de situaciones y otras estrategias en situaciones distintas. Por ejemplo, podría haber un individuo que razona consistentemente con las estrategias de equilibrio {E<>}, {E<} ó {E>} en las ubicaciones de la forma U2.j, pero con otra estrategia en las ubicaciones de la forma U3.j; si esa estrategia es {N-} ó {N=}, su patrón de respuestas será (S1,S2,S1), que no se identificaba como posible, pero si la estrategia es {F+} ó {F=}, el patrón será (S2,S2,S2), que es idéntico al que en el ejemplo identifica al uso consistente de {F+} ó {F=}. Esto da-



ría un patrón que no necesariamente identifica la estrategia que está siguiendo el sujeto. Para resolver este problema, habría que agregar otra pregunta, de modo que el patrón de respuestas de este individuo difiriera del de un sujeto que utiliza permanentemente {F+} ó {F=} (27).

Análogamente, podrían en principio irse agregando más preguntas hasta conformar un cuestionario que diera patrones de respuesta específicos, si no para cada comportamiento mental específico, por lo menos para discriminar entre una buena cantidad de ellos. Un cuestionario que permita una deducción así permitiría prescindir de las justificaciones de los sujetos, lo que tendría la doble ventaja de eliminar los errores debidos a las imprecisiones en el lenguaje utilizado y de permitir una aplicación masiva.

Este planteamiento, que se originó al planear el tercer experimento de este trabajo, dio pie a la hipótesis general H23 que veremos en seguida. Antes de ello, debo sin embargo reportar que después del tercer experimento tuve en mis manos el artículo de Falk et al. (1980), quienes hacen un planteamiento muy parecido al mío (tanto así, que tomé de ellos la expresión "patrón de respuestas"):

«Idealmente, las elecciones realizadas sistemáticamente según cualquier principio erróneo, cuantitativo o no, no deben dar respuestas correctas en mayor proporción que la esperada por azar. El patrón de respuestas correctas debe por ello diferir de cualquier patrón dirigido por algún principio erróneo. Para identificar los criterios alternativos que puedan tener los niños para sus elecciones, los patrones de respuesta que resulten de cualesquiera dos principios diferentes no deben coincidir nunca». (Falk et al., 1980, pág. 183)

La hipótesis llamada general, que es la última de las hipótesis propuestas en el capítulo 2, es la formalización del planteamiento que se ha venido trabajando:

27. Por ejemplo una cuarta pregunta (2,1)(2,4) daría el patrón (S2,S2,S2,=) para un sujeto que use {F+} ó {F=} siempre y el patrón (S2,S2,S2,S1) para uno que sólo use {F+} ó {F=} en ubicaciones U3.j y estrategias de equilibrio en ubicaciones U2.j.

## Hipótesis general (H23):

Si:

- (1) se construyen adecuadamente los sistemas de categorías para las variables experimentales y de respuesta,
- (2) se plantean a los sujetos las preguntas adecuadas en el cuestionario adecuado y en la forma adecuada,
- (3) las respuestas obtenidas son adecuadamente descifradas e interpretadas, y
- (4) cada sujeto es consistente en su elección de estrategias,

entonces habrá una buena correlación para cada sujeto entre situaciones y estrategias utilizadas.

Si esto ocurre, puede diseñarse un cuestionario tal que el patrón de respuestas indique la estrategia que sigue el sujeto, sin necesidad de recurrir a la expresión de sus justificaciones.

La hipótesis general plantea cuatro condiciones para poder hablar de una correlación entre patrones de respuesta y estrategias seguidas por un sujeto. Las tres primeras están garantizadas por la construcción metodológica que se ha seguido hasta aquí. Sin embargo, la cuarta merece una atención especial.

Para seguirla, era especialmente importante verificar las condiciones de consistencia interna, para lo que fueron diseñadas las preguntas idénticas y similares. El comportamiento de cada sujeto en el cuestionario que resolvió, y en particular ante las preguntas idénticas y similares, será uno de los aspectos que se analizarán en el próximo capítulo.

Una vez que se haya resuelto la cuarta condicionante, volveremos a hablar de la hipótesis general (capítulo 8).

#### 6.4.2. MATERIAL DE TRABAJO PARA EL ANALISIS DE LOS RESULTADOS

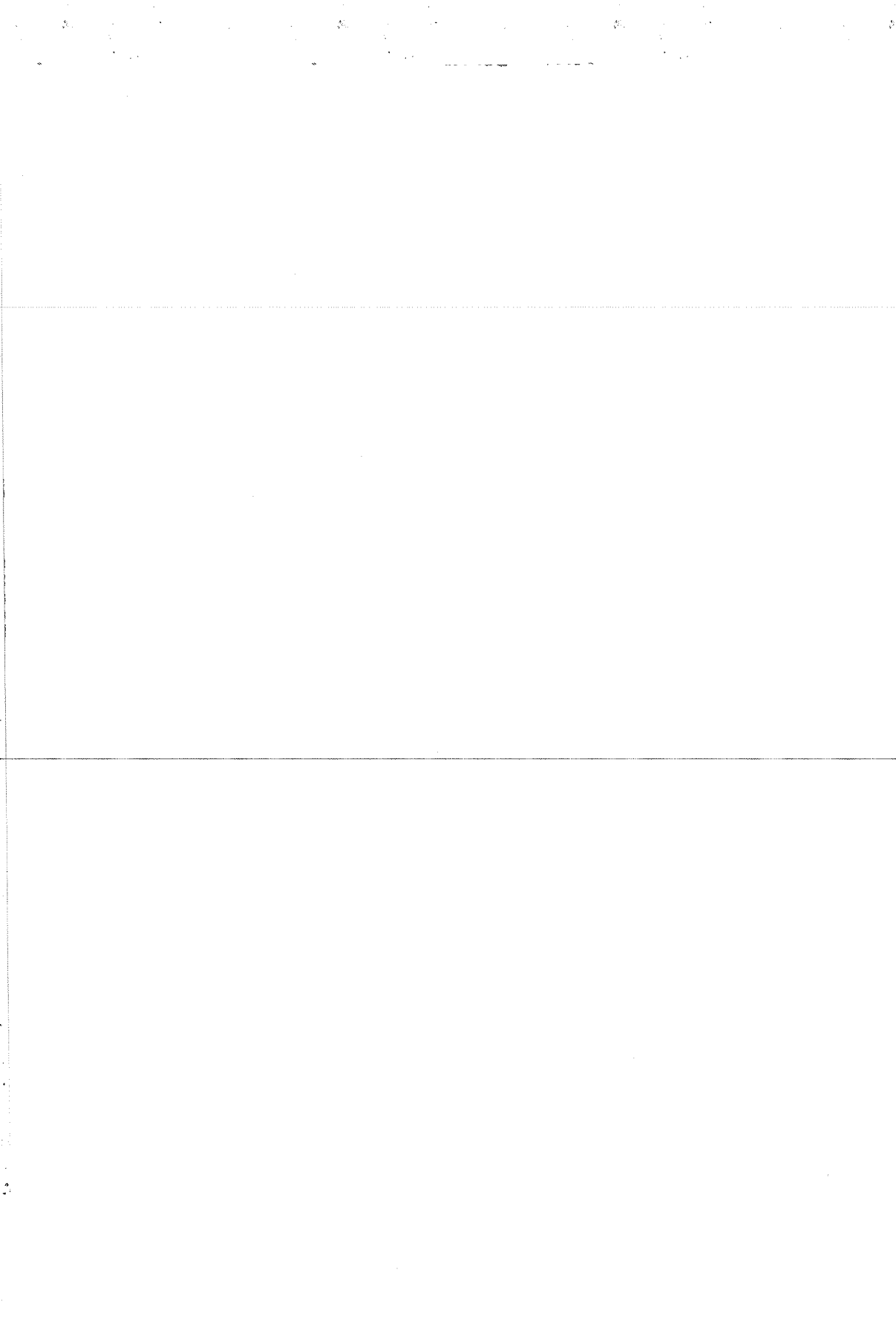
Después del trabajo de descifrado e interpretación se obtuvo una clasificación de las 1630 respuestas en tres grupos:

- las respuestas interpretadas ( con elección e interpretación), a su vez clasificadas según su interpretación en estrategias simples (centraciones o relaciones) o compuestas (de dos o múltiples);
- las respuestas con elección pero sin interpretación, a su vez clasificadas según que fueron sin justificación, sin argumentación o con justificación descriptiva;
- las respuestas canceladas (sin elección ni interpretación), a su vez clasificadas según que el sujeto vio mal la pregunta, no comprendió la naturaleza del ejercicio u otras causas de cancelación.

En resumen, la distribución de estos grupos por experimento y en total es la siguiente:

Respuestas	C1	C2	C3	C4	C6	Total
Con elección e interpretación	529	233	97	120	165	1144
Con elección sin interpretación	149	74	91	21	70	405
Subtotal: con elección	678	307	188	141	235	1549
Canceladas	51	11	5	9	5	81
Total	729	318	193	150	240	1630

Es decir, del total de respuestas obtenidas, sólo 5% fueron canceladas y el resto (1549 respuestas) pasan a la etapa de análisis. De ellas, 74% (1144 respuestas) tienen una interpretación y 26% (405) intervendrán solamente a nivel de la elección.



**T E R C E R A**

**P A R T E :**

**R E S U L T A D O S**

La segunda parte de este trabajo estuvo dedicada al proceso de construcción de la metodología necesaria para el estudio de las respuestas intuitivas de adultos jóvenes a problemas de probabilidad de corte clásico. Las tres líneas metodológicas trabajadas: las situaciones, las estrategias y los métodos de interrogación y descifrado, fueron analizadas de manera individual y, a la postre, en sus interacciones.

Sin embargo, poco se ha hablado hasta ahora de los resultados obtenidos gracias a esa metodología, salvo a nivel de los múltiples ejemplos presentados. Esto es lo que se hará ahora: se presentarán los resultados y se hará un breve análisis de ellos.

Esta parte consta de dos capítulos. En el primero (séptimo del trabajo) se revisan los resultados obtenidos con respecto a cada una de las variables estudiadas, y se obtienen algunas conclusiones de carácter parcial.

El segundo capítulo (octavo y último del trabajo) pretende dar conclusiones generales.

## 7. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Los datos obtenidos en los experimentos realizados para este trabajo parecen adecuados para ser analizados mediante un tratamiento estadístico, porque son suficientemente numerosos. Sin embargo, no lo son; las razones de ello se pueden encontrar mediante una pequeña revisión histórica.

La primera etapa del trabajo comprendió los primeros dos experimentos (cuestionarios C1 y C2). Ahí, yo buscaba coincidencias o diferencias con respecto a algunas afirmaciones del texto clásico de Piaget e Inhelder, por lo que las categorías situacionales con las que trabajé fueron las de ellos, en particular con mucho énfasis en las preguntas con imposibilidades y certezas. La metodología de interrogación no fue piagetiana, sino una que permitiera una interrogación masiva a un grupo de estudiantes. Estos dos primeros experimentos brindaron una gran cantidad de respuestas (64% de las respuestas viene de ellos), pero surgieron de condiciones experimentales muy poco adecuadas: los sujetos no conocían los naipes o no los podían ver bien, no expresaron sus razonamientos de manera clara, etc.

Los tres siguientes experimentos conforman una segunda etapa. En ella, construí las situaciones, diseñé mucho más cuidadosamente los cuestionarios, abrí nuevas variables (referente, tamaño, planteamiento) y exploré metodologías de interrogación (entrevistas, tratamiento de los problemas de manera individual, en binomio, en equipo). De gran riqueza para la construcción de las categorías de interpretación (estrategias) fueron las respuestas de los nueve sujetos entrevistados en los experimentos tercero y quinto, mientras que el tratamiento en equipos del cuarto permitió abrir la perspectiva de una aplicación didáctica.

Sin embargo, todas estas exploraciones en direcciones distintas le imprimieron a los datos sellos específicos: no es lo mismo, por ejemplo, una respuesta de un sujeto entrevistado en binomio que la de un sujeto que responde individualmente a un cuestionario, que la respuesta escrita que es el resultado de una discusión en la que participaron varias personas. Así, de los 64 sujetos que participaron en los cinco experimentos, 49 lo hicieron en las condiciones indeseables e inestables de los dos primeros, 6 no son sujetos reales sino equipos de individuos y los 9 restantes fueron vistos con una lupa que no les tocó a los demás.

También hay fuertes irregularidades en lo que respecta a las variables experimentales (situaciones, planteamientos, etc.). Aunque todas las preguntas fueron registradas, lo que permitió siempre reclasificarlas de acuerdo con la etapa de construcción en la que se estaba, el énfasis dado a las diversas categorías cambió drásticamente de la primera etapa a la segunda. Muchas de las situaciones que diseñé después de los dos primeros experimentos (justamente a partir de los resultados obtenidos en ellos) fueron insuficientemente exploradas en ellos. Lo mismo ocurrió con algunas de las categorías finales: las variables de percepti-

vidad y multiplicidad fueron diseñadas formalmente sólo después de la última fase experimental, lo que en principio no sería grave para el análisis si no hubiera ocurrido que muchas de estas variables están altamente correlacionadas con las situaciones previamente definidas, de tal modo que no se puede saber si las diferencias que se le podrían imputar a una variable se deben a esa variable o a todas las demás correlacionadas con ella.

Así, estos datos simplemente no son adecuados para un análisis estadístico: podría intentarse, ciertamente, pero yo sería la primera en cuestionar la aplicabilidad de la herramienta cuando se cuenta con datos obtenidos tan heterogéneamente. Lo ideal, claro está, sería utilizar la información obtenida hasta aquí como una mera base exploratoria que permitiera, ahora sí, diseñar un cuestionario con la incorporación cuidadosa de situaciones y variables experimentales, aplicarlo por escrito y en entrevistas de binomio e individuales, descifrar e interpretar cuidadosamente las respuestas y efectuar con los resultados un análisis sistemático, mediante técnicas estadísticas multivariadas (1). Pero esa última etapa quedó pendiente; hubo que poner un alto, así sea temporal, y los datos disponibles para un análisis son los que hay.

Por todo ello, el análisis que haré de los datos será mucho más cualitativo que cuantitativo, consistirá en una serie de análisis parciales (y no en un solo análisis global), se basará en aspectos descriptivos y, sobre todo, será realizado e interpretado con mucha cautela. Es decir, llegué al nivel que describen Piaget e Inhelder:

«Cuando en el transcurso de una conversación se han examinado uno por uno cierto número de niños, la calidad de los resultados obtenidos ha sido siempre lograda a expensas de la cantidad; por eso las hipótesis que hemos propuesto en el curso de nuestro estudio [...] exigen ser verificados por la estadística.» (Piaget, 1924; pág. 80)

«Sólo cuando nos creemos en posesión de una serie tan completa de posibles reacciones originales frente a un problema particular, podrá tomar el método de interrogación un carácter más sistemático [...] Sólo después de haber recogido un conjunto de conductas lo más completo posible en los diferentes niveles de desarrollo, podremos aplicar una planificación experimental eligiendo las situaciones y los tipos de preguntas y de contraargumentos que se habían revelado como los más valiosos y pertinentes en las exploraciones previas.» (Inhelder et al., 1974, pág. 40)

Así, la metodología de análisis se basará sobre todo en una descripción tan sencilla como la que pueden dar los porcentajes de respuestas con justificaciones correctas o con justificaciones potencialmente incompletas, tal como se vio en el capítulo 6.

1. Ver, por ejemplo, el uso que hace Noeltling (1980) de un análisis estadístico de factores para la clasificación de preguntas, respuestas y sujetos.



Eventualmente, se utilizarán algunas pruebas de inferencia estadística, sobre todo para sustentar la afirmación hecha arriba en el sentido de la correlación entre las variables experimentales. Reconozco, sin embargo, que tal vez por mi formación profesional en Estadística la manera de enfrentar y organizar el análisis, aun este análisis cualitativo, está fuertemente emparentado con el tipo de análisis que se lograría si se pudieran aplicar técnicas estadísticas.

Sea como fuere, los cuatro tipos de análisis que emprenderé en este capítulo (por situaciones, por estrategias, por individuos y de otras variables) deberán ser tomados con las reservas del caso: el estudio ideal de la "tercera etapa" mencionada arriba posiblemente matizaría o corregiría muchas de las afirmaciones que aquí se harán.

7.1. ANALISIS POR SITUACIONES

La situación que caracteriza a un arreglo está principalmente determinada por su ubicación y su combinación; además, intervienen en la situación variables como las de perceptividad, las de unos y las de multiplicidad. Cada una de estas variables será tratada por separado en esta sección; cuando así convenga se hará además un análisis conjunto considerando dos o más de ellas.

En el análisis de estas variables, consideraremos tanto las respuestas con justificación interpretada como las que no recibieron interpretación. Así, por ejemplo, para el tratamiento de las ubicaciones y las combinaciones cada tabla tendrá uno de los siguientes dos encabezados:

situación	n	mín, máx	lado correcto				1. incor.		1g.incor	
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji

situación	n	mín, máx	igualdad correcta				S1 incor		S2 incor	
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji

- En ellos,
- "situación" se refiere a la ubicación, combinación, etc. bajo estudio;
- "n" es el número de respuestas (no canceladas) en esa situación;
- "mín" es el porcentaje de éxito mínimo seguro: las justificaciones correctas (jc), como porcentaje de n;
- "máx" es el porcentaje de éxito máximo posible: las justificaciones correctas, más las elecciones correctas sin justificación, más las justificaciones potencialmente incompletas (jc+si+jp), como porcentaje de n.
- "lado correcto" se refiere a las respuestas con elección del espacio muestral con la mayor probabilidad formal;

- "l. incor" (lado incorrecto) se refiere a las respuestas con elección del espacio muestral con la menor probabilidad formal;
- "ig. incor" (igualdad incorrecta) se refiere a las respuestas "da igual" en situaciones de no proporcionalidad;
- "igualdad correcta" se refiere a las respuestas "da igual" en situaciones de proporcionalidad;
- "S1 incor" se refiere a las respuestas con elección del espacio muestral S1 en situaciones de proporcionalidad;
- "S2 incor" se refiere a las respuestas con elección del espacio muestral S2 en situaciones de proporcionalidad;
- tot es el número total de respuestas en ese lado o con la igualdad ( $tot = si + jc + jp + ji$ );
- si es el número de respuestas sin interpretación;
- jc es el número de respuestas con justificación correcta; serán consideradas como justificaciones correctas las que consisten en una estrategia de proporcionalidad {P+} o {P=}, así como las composiciones inconsistente o situacionalmente correctas por teoremas en acto (2);
- jp es el número de respuestas con justificación potencialmente incompleta;
- ji es el número de respuestas con justificación incorrecta.

Salvo cuando se indique lo contrario, los números en las tablas estarán relativizados, es decir expresados como porcentajes del número total de respuestas en cada renglón (n). En contadas excepciones, el porcentaje es menor de 1%; en esos casos se pondrá en el lugar correspondiente un asterisco (\*).

Cuando se junten categorías (por ejemplo, cuando se consideren varias ubicaciones a la vez o varias combinaciones a la vez) se hablará de *globalización*; los cálculos en estos casos corresponderán a un promedio de las situaciones globalizadas, ponderado para el número de respuestas  $n_j$  de cada una y expresado como porcentaje, mediante la fórmula  $100[\sum n_j x_j / \sum n_j^2]$  donde las  $x_j$  son las cantidades por globalizar y donde j toma tantos valores como situaciones se están globalizando. Las cantidades globalizadas se expresarán siempre en letras cursivas.

La sección se divide en tres apartados, en que se analizarán respectivamente las ubicaciones, las combinaciones, la mezcla de ambas y las demás variables de situación. Los dos primeros apartados se basan fuertemente en los resultados reportados en el Anexo 6, donde se encuentran, agrupados por combinación, por ubicación y por tipo de respuesta (correcta o incorrecta, y en su caso qué tipo de incorrecta), todos los resultados obtenidos de las respuestas de los sujetos, tanto en cuanto al número de res-

2. Ver en el capítulo 6 (§6.3.1) las definiciones de estas categorías así como la de justificaciones potencialmente incompletas. En la sección de análisis por estrategias, se estudiarán específicamente qué tipo de estrategias conforman las justificaciones correctas de combinaciones y ubicaciones (ver §7.2.3.1, pág. 406).

puestas en cada categoría como en cuanto a las estrategias utilizadas en cada situación.

### 7.1.1. UBICACIONES

Las trece ubicaciones definidas fueron probadas en los cinco cuestionarios con la siguiente distribución:

	U11	U13	U15	U21	U22	U23	U24	U25	U31	U32	U33	U34	U35	TOT
C1	0	44	0	80	87	0	79	87	38	43	82	90	48	678
C2	0	16	0	32	31	15	59	0	16	30	31	61	16	307
C3	4	4	0	0	24	28	12	0	0	52	8	48	8	188
C4	0	0	0	0	15	14	16	0	0	42	6	42	6	141
C6	0	0	0	0	28	22	22	0	0	79	18	61	5	235
TOT	4	64	0	112	185	79	188	87	54	246	145	302	83	1549

Estas ubicaciones dieron lugar a resultados de muy diferente índole. A continuación se presentará una tabla de resultados generales; para cada ubicación se reportan los resultados en cantidades absolutas en el primer renglón, seguidas en el segundo renglón por los porcentajes calculados sobre el total de respuestas a la ubicación correspondiente: sobre esos porcentajes se trabajará el resto del apartado.

En la tabla se han resaltado con letras negritas los porcentajes en los que las elecciones fueron correctas. Estos totales se pueden clasificar en tres grupos:

- en las ubicaciones con imposibilidades y/o certezas, hay de 76% a 100% de elecciones correctas;
- en las ubicaciones de "pierdo-gano" o con algún empate, hay de 81% a 89% de elecciones correctas;
- en las de "pierdo-pierdo", "empato-empato" o "gano-gano", hay de 52% a 70% de elecciones correctas.

Sin embargo, las elecciones correctas pueden deberse a motivos correctos o incorrectos. En los siguientes párrafos se hará un análisis de las respuestas obtenidas en cada ubicación.

RESULTADOS EN CANTIDADES ABSOLUTAS Y RELATIVAS														
ubicación	n	mín, máx	lado correcto					l. incor.			ig. incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji	
U1.1 x--- -x-]	4	0,100 0,100	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
U1.3 x--- ---x	64	92,98 92,98	63	4	59	0	0	0	0	0	0	1	1	0
U1.5 [-x- ---x	0	---,--- ---,---	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
U2.1 x---x---]	112	95,96 95,96	107	1	106	0	0	3	3	0	2	1	1	1
U2.2 [-x-x---]	185	45,85 45,85	162	52	83	23	4	7	3	4	16	10	6	6
U2.3 [-x---x-]	79	29,77 29,77	70	33	23	5	9	7	1	6	2	1	1	1
U2.4 [---x-x-]	188	32,76 32,76	153	54	60	29	10	16	1	15	19	11	8	8
U2.5 [---x---x	87	77,95 77,95	83	7	67	9	0	0	0	0	4	2	2	2
U3.1 x-x- ---]	0	---,--- ---,---	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
U3.2 [-xx ---]	122	1,24 1,24	65	22	1	6	36	26	3	23	31	4	27	27
U3.4 [--- xx-]	259	12,41 12,41	153	58	30	18	47	44	12	32	62	15	47	47
U3.5 [--- -x-x	20	60,75 60,75	16	3	12	0	1	0	0	0	4	1	3	3
ubicación	n	mín, máx	igualdad correcta					S1 incor			S2 incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji	
U3.1 *--- ---]	54	89,94 89,94	51	3	48	0	0	0	0	0	3	0	3	
U3.2 [-*- ---]	124	23,35 23,35	65	15	29	0	21	34	6	28	25	5	20	
U3.3 [---*---]	145	39,69 39,69	101	34	57	9	1	20	4	16	24	7	17	
U3.4 [--- -*-]	43	23,37 23,37	24	6	10	0	8	9	2	7	10	4	6	
U3.5 [--- ---*]	63	57,76 57,76	48	12	36	0	0	5	0	5	10	0	10	
			76	19	57	0	0	8	0	8	16	0	16	

7.1.1.1. SITUACIONES PIAGETIANAS CON IMPOSIBILIDADES Y CERTEZAS

Aquí haré un análisis de las respuestas obtenidas en los arreglos piagetianos con casos imposibles y seguros. Para ello, veré por separado las respuestas a cada uno de los cinco tipos de

situaciones: doble imposibilidad, posibilidad-imposibilidad, imposibilidad-certeza, posibilidad-certeza, doble certeza. Básicamente, estas situaciones corresponden a ubicaciones de las formas U1.j, U1.1 ó U1.5, aunque las particiones son diferentes, como se puede apreciar en el siguiente cuadro:

situación piagetiana	U1.1	U1.3	U1.5	U2.1	U2.5	U3.1	U3.5
P1: doble imposibilidad						x	
P5: posibilidad-imposibilidad	x			x		x	
P3: imposibilidad - certeza		x					
P4: posibilidad - certeza			x		x		x
P2: doble certeza							x

Sin embargo, he observado que en general cada una de estas respuestas se asemeja muchísimo más a otras de la misma categoría piagetiana que a otras de la misma situación de combinación y ubicación. Debido a ello, después de los respectivos análisis parciales, se englobarán los resultados correspondientes a las ubicaciones contenidas en P5 y P4. Asimismo, se analizará la ubicación U3.1 en dos casos por separado, según que corresponda a la situación de proporcionalidad (P1) o no (P4); lo mismo ocurre con U3.5.

Conviene señalar un aspecto general que ocurre en estas situaciones: se refiere a las reacciones de desconcierto manifestadas por algunos sujetos ante preguntas que les parecen demasiado fáciles. Estas reacciones ya habían sido comentadas (capítulo 4, §4.5.2.3). Una de ellas consiste en juntar los dos lados de la pregunta, conformando así un solo espacio muestral en el que quedan tanto favorables como desfavorables (salvo cuando hay originalmente dos imposibilidades o dos certezas). Aunque esto puede interpretarse como una resistencia a la inexistencia de favorables o de desfavorables, yo prefiero pensar que es una reacción de desconcierto: no es que estas situaciones les parezcan tan difíciles a ciertos sujetos que las modifican para resolverlas, sino que les resultan demasiado fáciles y buscan el "gato encerrado".

#### a) Ubicación U3.1: doble imposibilidad en K12

La ubicación U3.1 no necesariamente corresponde a una doble imposibilidad: puede corresponder a una situación piagetiana de posibilidad-imposibilidad cuando se presenta en combinaciones sin proporcionalidad <sup>(3)</sup>. Sin embargo, ninguna de las preguntas de los cinco experimentos realizados correspondió a este caso. La única pregunta de U3.1 planteada es en K12 y es de doble imposibilidad (y por ende corresponde a la situación piagetiana P1). El mismo arreglo se planteó en los cuestionarios C1 y C2; éstos son los resultados:

3. Son las combinaciones K1 a K4, K6, K8 ó K10.

ubicación	n	mín, máx	igualdad correcta				S1 incor			S2 incor				
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji	
U3.1 *--- ---]	54	89,94	94	6	89	0	0	0	0	0	0	6	0	6

En la comparación de dos imposibilidades, la gran mayoría de los sujetos dieron la respuesta correcta "da igual" (4); de ellos la mayoría dieron una justificación correcta y no hubo justificaciones incorrectas. La mayor parte (88%) de las interpretaciones correspondió a {F-}, que es una estrategia considerada como situacionalmente correcta por teorema en acto.

Sólo hubo tres elecciones incorrectas; las tres consistieron en la elección de S2 en la pregunta planteada, y las tres fueron con estrategias primitivas: dos con {N+} y una con {D+}. En los tres casos esto posiblemente se debe al desconcierto causado por la doble imposibilidad (sobre todo en las dos respuestas con {N+}, en que la pregunta era la primera del cuestionario).

La diferencia entre el máximo posible y el mínimo seguro es de 5%, que, como se verá posteriormente, es un valor pequeño de esta variable. Esto que indica que tanto la situación como el razonamiento que conduce a una solución correcta son de fácil expresión.

#### b) Ubicaciones U1.1, U2.1 y U3.1: una imposibilidad y una posibilidad

La situación piagetiana de posibilidad-imposibilidad (P5) se da en las ubicaciones U1.1, U2.1 y U3.1 (5). De ellas, la primera fue probada con un arreglo de K3 en C3; y la segunda fue probada con tres arreglos de K4, K3 y K2, en C1 y C2. La tercera no fue probada. Los resultados obtenidos son:

ubicación	n	mín, máx	lado correcto				l. incor.			ig. incor				
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji	
U1.1 x--- -x-]	4	0,100	100	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
U2.1 x---x---]	112	95,96	96	1	95	0	0	3	3	0	2	1	1	
U1.1 y U2.1	116	95,96	96	1	95	0	0	3	3	0	2	1	1	

Las cuatro respuestas de la ubicación U1.1 corresponden a una elección no justificada del lado correcto: los sujetos del tercer experimento a quienes se planteó esta pregunta la pasaron sin discutir: debe haberles parecido demasiado obvia. Eso puede ser también lo que explique la enorme diferencia entre los porcentajes máximo posible y mínimo seguro, aunque de todos modos

4. Para efectos de análisis, considero las respuestas "ninguno de los dos lados" como si hubieran sido "da igual".

5. Pueden ocurrir en las combinaciones K1 a K4 y K6; la última además en K8 y K10.

cuatro respuestas son muy pocas para hacer inferencias en este o cualquier otro sentido.

En U2.1 hubo una gran mayoría de sujetos que eligieron el espacio correcto; de ellos la mayoría dieron una justificación correcta y no hubo justificaciones incorrectas. La mayor parte (78%) de las interpretaciones correspondió a {F+}, que es una estrategia considerada como situacionalmente correcta por teorema en acto, aunque hubo una fracción (16%) de respuestas interpretadas como {P+}.

Las tres elecciones del espacio incorrecto no fueron interpretables. De las dos respuestas del tipo "da igual" (o "ninguno de los dos"), una no fue interpretada pero correspondió al mecanismo primitivo de juntar lados (Ter; C1,5); la otra correspondió a {N=}, aunque también es posible que se trate de una mera reacción de desconcierto ante el imposible (Bet; C2,6).

Hay una diferencia de 1% entre el máximo porcentaje (posible) de éxito y el mínimo seguro, lo que indica que esta situación y los razonamientos correctos que llevan a la respuesta correcta son de fácil expresión.

Al globalizar los resultados de las dos ubicaciones (último renglón de la tabla), se observa que la comparación de una imposibilidad con una posibilidad es una situación muy fácil, y resulta también fácil justificar un razonamiento correcto para llegar a la solución del problema.

### c) Ubicación U1.3: una imposibilidad y una certeza

La ubicación U1.3 es la única que corresponde a la situación piagetiana de imposibilidad-certeza (P3) (6). Fue probada en dos arreglos (de K3 y K2) en los cuestionarios C1, C2 y C3, con los siguientes resultados:

ubicación	n	mín, máx	lado correcto					l. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U1.3 x--- ---x	64	92,98	98	6	92	0	0	0	0	0	2	2	0

La gran mayoría de los sujetos eligieron el espacio con una certeza; de ellos la gran mayoría dieron una justificación correcta y no hubo justificaciones incorrectas. Más de la mitad (68%) de las justificaciones fue por estrategias consideradas como situacionalmente correcta por teorema en acto (y de ellas aproximadamente la mitad fue por {F+}, que enfatiza la existencia de favorables en el lado no imposible y la mitad por {D-}, que enfatiza la inexistencia de desfavorables en el lado seguro); también hubo una fracción (31%) de respuestas {P+}.

La única respuesta incorrecta corresponde a la elección "da igual" y fue verosímelmente mediante el mecanismo de "juntar" ambos espacios muestrales.

6. Puede presentarse en las combinaciones K1 a K3.

La diferencia de 6% entre ambos porcentajes de éxito muestra que la situación es de fácil expresión.

d) Ubicaciones U1.5, U2.5 y U3.5: una posibilidad y una certeza

La situación piagetiana de posibilidad-certeza (P4) se da en las ubicaciones U1.5, U2.5 y U3.5 (7). De ellas, la primera no fue probada. La segunda fue probada en dos arreglos de C1, que son de K5 y K3. La tercera fue probada en dos arreglos de C2 y C3, que son respectivamente de K9 y K11. Los resultados son:

ubicación	n	mín, máx	lado correcto				l. incor. ig. incor						
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U2.5 [---x---x	87	77,95	95	8	77	10	0	0	0	0	5	2	2
U3.5 [--- -x-x	20	60,75	80	15	60	0	5	0	0	0	20	5	15
U2.5 y U3.5	107	76,94	95	8	76	10	*	0	0	0	5	2	3

Cuando la situación posibilidad-certeza implicó una posibilidad con  $p=\frac{1}{2}$  (U2.5), una gran mayoría de las respuestas conllevaron la elección del espacio muestral con certeza; sin embargo, entre ellas hay 9 (11%) con justificaciones {F+} a la pregunta (1,1)(2,0) que no son correctas ni como teoremas en acto; están consideradas como potencialmente incompletas porque podrían corresponder a {F+ \* N=} o a {F+ & D-}.

Las respuestas incorrectas corresponden todas a la elección "da igual"; de ellas sólo dos pudieron ser interpretadas y corresponden a {F=} en la pregunta (1,0)(1,1).

En este caso no sólo han disminuido los porcentajes de éxito (mínimo seguro y máximo posible) en comparación con las ubicaciones anteriores, sino que también ha aumentado notoriamente la diferencia entre ambos: ahora es de 18%, lo que parece sugerir que en esta situación les resulta más difícil a los sujetos expresar cómo llegaron a una solución correcta. Todas las respuestas de esta ubicación fueron obtenidas en C1, y la mayoría (67%) de las respuestas sin interpretación son por falta de argumentación (respuestas escritas del estilo de "porque hay mayor probabilidad"). Así, la dificultad mencionada puede ser debida a que la situación parece demasiado obvia.

En la ubicación U3.5, la mayoría de las respuestas corresponden a la elección del lado con certeza; de ellas, la mayoría son con justificaciones correctas.

Hubo una respuesta con justificación incorrecta, y correspondió a la estrategia primitiva {F-} en la pregunta (2,0)(4,1). En cuanto a las respuestas incorrectas, las cuatro son por respuesta "da igual"; una no pudo ser interpretada y las tres restantes son por contrapesos en la pregunta (2,0)(4,1): dos de ellas {N- ¥ F+} y la otra {D- ¥ F+}.

7. Pueden ocurrir en las combinaciones K1 a K3, K5 y K7; la última además en K9 y K11.



La diferencia de 15% entre los dos porcentajes de éxito sugiere que se trata, como en la ubicación anterior, de una situación en la que no resulta tan fácil que un sujeto que llega a la respuesta correcta explique cómo lo hizo. En su mayoría, las respuestas a esta pregunta vienen de C2, y también puede ser que las respuestas escritas sin argumentación sólo reflejen la demasiada obviedad.

#### e) Ubicación 3.5: doble certeza en K13

La ubicación U3.5 puede aparecer en situaciones de imposibilidad-certeza (que ya fueron analizadas). Cuando se presenta en la combinación K13, corresponde a la situación piagetiana de doble certeza (P2). Esta fue probada en dos arreglos, uno planteado en C1 y el otro en C2, C4 y C6. Los resultados son:

ubicación	n	mín, máx	igualdad correcta				S1 incor.			S2 incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U3.5 [--- ---*]	63	57,76	76	19	57	0	0	8	0	8	16	0	16

Aunque la mayoría de las respuestas son correctas, esta situación es, entre las ubicaciones con imposibilidades o certezas, la que menor porcentaje tiene de respuestas correctas, tanto en el mínimo seguro como en el máximo posible. No hubo justificaciones incorrectas, pero hubo un menor porcentaje de respuestas con elección correcta e interpretación que en los otros casos. Las justificaciones correctas fueron interpretadas en su mayoría (57%) como {D=}, que es una estrategia considerada como situacionalmente correcta por teorema en acto.

Las 15 respuestas incorrectas corresponden a la elección de uno de los dos espacios muestrales; en todas ellas se podría pensar que los sujetos no habían comprendido la validez de la respuesta "da igual". Salvo una con interpretación {P'}, las que señalan la elección de S1 se han interpretado como {N-} simple o como compensante en {N- \* D=} o incluso {N- \* P=}. De las que señalan la elección de S2, cuatro se han interpretado como {F+}, cuatro como la compensación {F+ \* D=} y dos como {N+ \* D=}. Puede pensarse que las estrategias simples {N-} y {F+} son expresiones incompletas de la necesidad de compensar la igualdad aparente de desfavorables (ningún desfavorable en ningún espacio muestral), y que es justamente esta necesidad la que lleva a la elección de uno de los dos espacios muestrales.

Hay una diferencia de 19% entre los porcentajes máximo posible y mínimo seguro, y las respuestas vienen también en su mayoría de un cuestionario escrito (C1), lo que hermana a esta situación con las dos anteriores.

#### f) Análisis

En resumen, podemos comparar estas cinco situaciones. Para poder hacer estas comparaciones en las que intervendrán ubicacio-

nes sin y con proporcionalidad, agruparemos las elecciones incorrectas en una sola categoría. Esto se ve en la siguiente tabla:

ubicaciones	n	mín, máx	tot	resp. correcta				resp. incor.		
				si	jc	jp	ji	tot	si	ji
U3.1 *--- ---]	54	89,94	94	6	89	0	0	6	0	6
U1.1 y U2.1	116	95,96	96	1	95	0	0	5	4	1
U1.3 x--- ---x	64	92,98	98	6	92	0	0	2	2	0
U2.5 y U3.5	107	76,94	95	8	76	10	*	5	2	3
U3.5 [--- ---*	63	57,76	76	19	57	0	0	24	0	24

De estas situaciones, las que involucran uno o dos casos imposibles resultan fáciles para los sujetos con los que he trabajado: los porcentajes de éxito (mínimo seguro) 89%, 95%, 92% así lo corroboran, respectivamente para doble imposibilidad, posibilidad-imposibilidad e imposibilidad-certeza. En todos estos casos creo que se pueden atribuir las escasas respuestas incorrectas al desconcierto causado por una situación que el sujeto percibe como demasiado fácil.

No es así en las situaciones piagetianas de posibilidad-certeza y de doble certeza, donde los porcentajes de éxito (mínimo seguro) bajan respectivamente a 76% y 57%: ahí hay respuestas incorrectas que sí se pueden interpretar como provenientes de estrategias definidas e incorrectas, en particular las centraciones {N-} y, sobre todo, {F+} como simple o compensante.

Quedan así definidos dos grupos de ubicaciones para las situaciones piagetianas de imposibilidades y certezas: las que implican al menos una imposibilidad y las que sólo implican certezas. El primero es más fácil que el segundo (mayores porcentajes de éxito), pero también es de más fácil expresión que el otro (menores diferencias entre ambos tipos de porcentaje):

ubicaciones	n	mín,máx	dif
U3.1, U1.1, U2.1 y U1.3	234	93,96	3
U2.5, U3.5 (sin p) y U3.5 (con p)	170	88,70	18

#### 7.1.1.2. UBICACIONES DE EQUILIBRIO

El resto de las ubicaciones son las de la forma U2.j y U3.j, con j=1, j=2 ó j=3, es decir las diseñadas para observar las estrategias de equilibrio. Como en el caso anterior, se analizarán por separado las situaciones U3.2 y U3.4: por un lado aquellas en que hay proporcionalidad (combinaciones K14 y K15 respectivamente) y por otro aquellas en que no hay proporcionalidad (combinaciones K1 a K11).

a) Ubicación pierdo-gano: U2.3

La ubicación U2.3 fue probada en cada una de las combinaciones K1 a K7 (8), en un total de catorce arreglos a lo largo de todos los cuestionarios menos C1. Los resultados son:

ubicación	n	mín, máx	lado correcto					l. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U2.3 [-x- -x-]	79	29,77	89	42	29	6	11	9	1	8	3	1	1

A pesar de que en esta ubicación opera la estrategia {E<>}, hubo un rendimiento relativamente bajo. Sólo la tercera parte de las respuestas con elección correcta corresponden a justificaciones correctas; de ellas, todas menos una son {E<>}.

Las justificaciones incorrectas a la elección correcta, así como las que acompañan a la elección incorrecta, son principalmente centraciones {N-} y {F+}; dos de ellas son centraciones que excluyen a {E<>}. También en la única respuesta "da igual" interpretada, {E<>} es dominada: se trata del contrapeso {N- ¥ E<>}.

La diferencia entre el porcentaje de éxito máximo posible y el mínimo seguro es de 48%, lo que implica que casi la mitad de los sujetos que llegaron a la elección correcta tuvieron dificultades en justificar su elección; esto ocurrió tanto en los experimentos de respuestas escritas como en los de entrevistas.

b) Ubicaciones pierdo-empato y empato-gano: U2.2 y U2.4

La ubicación U2.2 fue probada en las combinaciones K2, K3, K5 y K6 (9), en quince arreglos distintos y en todos los cuestionarios. Por su parte, la ubicación U2.4 fue probada en las combinaciones K3, K4, K6 y K7 (10), en ocho arreglos distintos y en todos los cuestionarios. Los resultados son:

ubicación	n	mín, máx	lado correcto					l. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U2.2 [-x-x- - -]	185	45,85	88	28	45	12	2	4	2	2	9	5	3
U2.4 [ - - - x-x-]	188	32,76	81	29	32	15	5	9	1	8	10	6	4
U2.2 y U2.4	373	38,81	84	28	38	14	4	6	1	5	10	6	4

A pesar de que en la ubicación U2.2 puede operar la estrategia correcta {E<}, sólo 45% de las respuestas tuvo justificación correcta, y de ellas sólo 53% correspondió a esta estrategia de equilibrio; el resto fueron principalmente {P+} (27%) y composiciones correctas por teoremas en acto (20%). Si se agregan éstas a las justificaciones potencialmente incompletas, cubren el 25%

8. Son todas las combinaciones en que puede ocurrir.

9. Puede ocurrir además en K1, K4 y K7.

10. Puede ocurrir además en K1 y K2.

de las justificaciones al lado correcto (mientras que {E<} cubre el 27%).

Las justificaciones a la elección del lado incorrecto son centraciones; en una de ellas se trata de {D- - E<}, en la que la estrategia de equilibrio es excluida. También las justificaciones a la respuesta "da igual" son principalmente centraciones.

La diferencia de 40% entre los dos tipos de porcentaje de éxito muestra que ésta es una situación, como la anterior, de difícil expresión; también en este caso la dificultad ocurrió en los cuestionarios de respuestas escritas y verbales.

En cuanto a la ubicación U2.4, hubo, como en U2.2, un porcentaje relativamente bajo de respuestas con justificación correcta (32%), y de ellas sólo el 48% correspondieron a la estrategia de equilibrio que opera en esta ubicación, {E>}; el resto correspondió a {P+} (42%) y a composiciones correctas por teoremas en acto (10%). Si se agregan éstas a las justificaciones potencialmente incompletas, cubren el 23% de las justificaciones al lado correcto (mientras que {E>} cubre el 19%).

Las justificaciones incorrectas son, principalmente, centraciones; hay también 7 casos de {P'}. Entre las justificaciones a la elección del lado incorrecto se encuentran seis con la estrategia primitiva {E5}.

En cuanto a la dificultad de expresión que conlleva esta situación, está, con una diferencia de 44% entre los dos porcentajes, prácticamente al nivel de las ubicaciones U2.3 y U2.2 (con una distribución similar en los cuestionarios escritos y verbales).

Al globalizar estas dos ubicaciones (último renglón de la tabla), se observa que son más difíciles que las que implican imposibilidades o certezas, lo que se muestra tanto en los menores valores de ambos tipos de porcentajes de éxito como en el mayor valor de la diferencia entre ambos (43).

### c) Ubicaciones pierdo-pierdo y gano-gano, sin proporcionalidad: U3.2 y U3.4

El análisis de las ubicaciones U3.2 y U3.4 se separará en dos casos: veremos aquí lo que ocurre cuando no hay proporcionalidad <sup>(11)</sup>, y posteriormente se verá lo que ocurre cuando sí la hay.

La ubicación U3.2 fue probada en 22 arreglos distintos, cubriendo las combinaciones K1 a K8 y K10 y los cuestionarios C3, C4 y C6. En cuanto a la ubicación U3.4, fue probada en 21 arreglos distintos, cubriendo las combinaciones K1, K4 a K7, K9 y K11 y todos los cuestionarios. Se obtuvieron los siguientes resultados:

11. Combinaciones K1 a K8 y K10 para U3.2 y combinaciones K1 a K7, K9 y K11 para U3.4.

ubicación	n	mín, máx	lado correcto					l. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U3.2 [-xx ---]	122	1,24	53	18	1	5	30	21	2	19	25	3	22
U3.4 [--- xx-]	259	12,41	59	22	12	7	18	17	5	12	24	6	18
U3.2 y U3.4 sin proporc.	381	10,38	58	22	10	7	20	18	4	14	24	5	19

La ubicación U3.2 es la que tiene peores resultados. Como máximo, sólo la cuarta parte de las respuestas podría ser considerada (con el beneficio de la duda) como correcta. Una sola de las respuestas tiene una justificación correcta: se trata de una composición correcta por teorema en acto.

Entre las justificaciones incorrectas destaca la presencia de {E=}, tanto como estrategia simple en las respuestas "da igual" (70% de esas justificaciones) como en el papel de compensada en la elección de uno u otro espacio muestral (20% de esas justificaciones). Las demás justificaciones incorrectas corresponden a concentraciones simples o compuestas; en 9 de las elecciones de un lado interviene {R+} y en 5 de las respuestas "da igual" interviene {R=}.

La diferencia entre los dos tipos de porcentaje de éxito (23%) se sitúa entre los pequeños valores de las situaciones de imposibilidades o certezas y los grandes de las situaciones de "pierdo-gano" o con algún empate.

En esta ubicación es notable la ausencia total de estrategias de proporcionalidad: no hay ni {P+} ni {P'}.

Por su parte, aunque ligeramente mejores que los de U3.2, los resultados de U3.4 distan de ser buenos. Como máximo posible hay sólo 41% de éxitos. Hubo 30 justificaciones correctas, que representan sólo el 12% del total de respuestas; de ellas, 23 (77%) corresponden a la estrategia universalmente correcta {P+} y el resto (23%) a composiciones correctas por teoremas en acto. Si se juntan éstas con las justificaciones potencialmente incompletas, cubren el 10% de todas las respuestas, mientras que {P+} cubre el 9%.

Entre las justificaciones incorrectas, aparece la estrategia {E=} en las justificaciones a la respuesta "da igual", como simple (55%) o dominante (11%). Aparece también como dominada en justificaciones incorrectas a la elección del lado correcto (26%) y a la elección del lado incorrecto (6%). Otras estrategias que intervienen en las justificaciones incorrectas son {P'} (10% de todas las justificaciones incorrectas), {R+} como simple o dominante (14% de las elecciones justificadas de un lado), {R=} (13% de las respuestas "da igual" justificadas). Las demás son concentraciones, simples o dominantes (53% de todas las justificaciones incorrectas).

La diferencia entre el porcentaje de éxito máximo posible y el mínimo seguro es de 29%, lo que hermana a esta ubicación con la anterior: en ambas, más de la cuarta parte de los sujetos que

llegaron a una respuesta correcta tuvieron dificultades para explicar cómo lo hicieron.

A pesar del paralelismo aparente con la ubicación U3.2, en la ubicación U3.4 sí hubo presencia de {P+} y de {P'}: 21% de las respuestas justificadas son o contienen a una de estas dos estrategias.

Las respuestas a las preguntas de ubicaciones U3.2 y U3.4 no son tan homogéneas como en el caso de U2.2 y U2.4, empezando con el hecho de que hubo más del doble de respuestas a U3.4 que a U3.2. Otra gran diferencia está en el porcentaje de respuestas que son justificaciones correctas: sólo 1% en U3.2, mientras que en U3.4 hay 12%. Sin embargo, otros parámetros no difieren tanto: por ejemplo los porcentajes de elecciones del lado correcto, el lado incorrecto y la respuesta "da igual" son respectivamente 53%, 21% y 25% en U3.2 y 59%, 17% y 24% en U3.4. Por ello, puede valer la pena globalizar los resultados como se hizo para U2.2 y U2.4 (último renglón de la tabla). En la globalización, se observa que estas situaciones son aún más difíciles que las que contienen un empate: ambos tipos de porcentajes de éxito son menores (de hecho, estas ubicaciones son las más difíciles de todas). Sin embargo, la diferencia entre ambos (28%) es menor que en aquellas ubicaciones: aunque hubo menos sujetos que llegaron a la respuesta correcta, los que llegaron tuvieron menos dificultades en expresar cómo lo hicieron que los que dieron respuestas correctas en las ubicaciones U2.2 y U2.4.

d) Ubicaciones pierdo-pierdo y gano-gano, con proporcionalidad: U3.2 y U3.4 en K14 y K15

Las ubicaciones U3.2 y U3.4 pueden ser de proporcionalidad, cuando ocurren en las combinaciones K14 y K15 respectivamente.

La combinación U3.2 fue probada en K14 en cinco arreglos distintos, cubriendo todos los cuestionarios, mientras que la combinación U3.4 fue probada en K15 en cuatro arreglos distintos, cubriendo los cuestionarios C2, C3, C4 y C6. Los resultados son:

ubicación	n	mín, máx	igualdad correcta				S1 incor			S2 incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U3.2 [-*- ---]	124	23,35	52	12	23	0	17	27	5	23	20	4	16
U3.4 [--- *-]	43	23,37	56	14	23	0	19	21	5	16	23	9	14
U3.2 y U3.4 con proporc.	167	23,36	53	12	23	0	17	27	5	22	20	5	16

En situación de proporcionalidad, la ubicación U3.2 tuvo mejores resultados que en las otras combinaciones. Hubo 23% de justificaciones correctas; todas ellas son {P=}, que es la única estrategia correcta posible en esta combinación.

La mayoría de las justificaciones incorrectas a la respuesta "da igual" corresponde a {E=} (86% de ellas son {E=} o la contienen como dominante). Las justificaciones a la elección de uno u

otro espacio muestral son principalmente centraciones simples o dominantes (90% de esas justificaciones); sólo dos de ellas son compensaciones: {N- \* P=} y {D \* P=}.

La diferencia entre el máximo porcentaje de éxito posible y el mínimo posible es de 12%, lo que indica que en esta situación los sujetos tuvieron menos dificultades para justificar la respuesta correcta "da igual" que en la situación U3.2 de no proporcionalidad (donde era de 23%).

También la ubicación U3.4 tuvo mejores resultados en la combinación de proporcionalidad que en las otras combinaciones. Hubo 23% de justificaciones correctas; una de ellas es {P= - N=} y las otras son {P=}.

Las justificaciones incorrectas a la respuesta "da igual" son en su mayoría {E=} como simple o dominante (88%), como en el caso de U3.2. Y, como en el caso de U3.2, la mayoría de las justificaciones a la elección de alguno de los espacios muestrales son centraciones simples o dominantes (92%); de ellas, hay cuatro compensaciones: una {N- \* P=}, dos {N- \* E=} y una {R+ \* E=}.

La diferencia de 14% entre los dos tipos de porcentaje de éxito establece una dualidad con la ubicación U3.2 con proporcionalidad.

En la globalización de estas ubicaciones (último renglón de la tabla), se observa que las situaciones laterales con proporcionalidad, aunque más difíciles que las que tienen un empate (U2.2 y U2.4), lo son menos que las situaciones U3.2 y U3.4 sin proporcionalidad, en lo que respecta a los porcentajes de éxito (son intermedios entre el 38,81 de las primeras y el 10,38 de las segundas). Sin embargo, en lo que respecta a las dificultades de expresión, medidas a través de la diferencia entre ambos porcentajes (también la diferencia de 13% es menor que el 43% de las primeras y el 38% de las segundas), estas ubicaciones son las que implican menos dificultades de expresión: los sujetos que llegaron a una respuesta correcta tuvieron menos dificultades en justificarlo adecuadamente que en las otras situaciones.

e) Ubicación empate-empate: U3.3

La última ubicación es U3.3, que sólo puede ocurrir en K0 y K16. Fue probada en siete arreglos cubriendo las dos combinaciones y todos los cuestionarios. Los resultados son:

ubicación	n	mín, máx	igualdad correcta				S1 incor		S2 incor				
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
U3.3 [---*---]	145	39,69	70	23	39	6	1	14	3	11	17	5	12

Esta es la ubicación de proporcionalidad con mejores resultados. El porcentaje de justificaciones correctas llegó a 57%, aunque de ellas sólo 68% son {P=} y el resto (32%) corresponde a composiciones correctas en K0 por teoremas en acto. Si se juntan éstas con las justificaciones potencialmente incompletas, confor-

man el 19% de las respuestas en esta ubicación, mientras que {P=} corresponde al 23%.

La única justificación incorrecta a la respuesta "da igual" es {P'}. Las elecciones de uno u otro espacio muestral fueron justificadas primordialmente con concentraciones simples o dominantes (88% de esas justificaciones); de ellas, 6 compensan la igualdad de {P=}. Hubo también justificaciones {P'} (12%).

A pesar de los buenos resultados en términos de porcentajes, la alta diferencia entre ambos tipos de porcentajes (30%) indica que a casi una tercera parte de los sujetos que respondieron correctamente les resultó difícil explicar cómo llegaron a esta respuesta.

#### f) Análisis

Se puede emprender una comparación global de los diferentes tipos de ubicaciones. Esta comparación está relacionada con dos de las hipótesis planteadas en el capítulo 3:

H10.2.2: Los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a ubicaciones de "pierdo-gano" (U1.1, U1.3, U1.5, U2.3) que las correspondientes a las demás no extremosas (U2.2, U2.4, U3.2, U3.3, U3.4);

H10.2.3: Los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a ubicaciones de "pierdo-empato" (U2.1, U2.2) o de "empato-gano" (U2.4, U2.5) que las correspondientes a las demás no extremosas ni de "pierdo-gano" (U3.2, U3.4).

Por una parte, se pueden comparar los tres tipos de ubicaciones para situaciones sin proporcionalidad: cuando las probabilidades están de un lado y otro de  $\frac{1}{2}$  (situación denominada "fácil" por Falk et al., 1980, pág. 187), cuando una de ellas vale  $\frac{1}{2}$  (situación denominada "regular" por esos autores), y cuando ambas están del mismo lado de  $\frac{1}{2}$  (situación denominada "difícil" por los autores citados). Por otra parte, se pueden comparar los dos tipos de ubicaciones para situaciones con proporcionalidad: cuando ambas probabilidades son iguales a  $\frac{1}{2}$ , y cuando no (situaciones no previstas por Falk et al., 1980).

Esto se puede apreciar en la siguiente tabla.

ubicaciones	n	mín,máx	dif
U2.3 [-x- -x-]	79	29,77	48
U2.2 y U2.4	373	38,81	43
U3.2 y U3.4 sin proporc.	381	10,38	28
U3.3 [---*---]	145	39,69	30
U3.2 y U3.4 con proporc.	167	23,36	13

En cada parte de la tabla, la colocación de los renglones corresponde al orden previsto de dificultad en las respectivas



ubicaciones y, en la primera parte, corresponde también al orden previsto por Falk et al. para las preguntas "fáciles", "regulares" y "difíciles". Esto ocurrió así, efectivamente, con las ubicaciones U3.2/U3.4 ("pierdo-pierdo"/"gano-gano"), que resultaron más difíciles a los sujetos que las ubicaciones U2.3 ("pierdo-gano") y U2.2/U2.4 ("pierdo-empato"/"empato-gano"): las ubicaciones U3.2/U3.4 son, indiscutiblemente, las más difíciles, lo que se podría explicar por el hecho de que la estrategia de equilibrio que se aplica en ellas, {E=}, es incorrecta (12). En situación de proporcionalidad, las ubicaciones U3.2/U4.3 resultaron asimismo más difíciles que U3.3 ("empato-empato" 13).

Sin embargo, las ubicaciones U2.2 ("pierdo-empato") y U2.4 ("empato-gano") tuvieron resultados ligeramente mejores que la ubicación U2.3 ("pierdo-gano"), tanto en lo que respecta a los porcentajes de éxito mínimos seguros como en lo que respecta a los máximos posibles. En términos de Falk et al., las regulares resultaron más fáciles que las fáciles (14). Una posible explicación de este fenómeno radica en las combinaciones en que fueron probadas estas ubicaciones: la proporción de combinaciones más difíciles (15) es más alta en U2.3 (39%) que en U2.2 y U2.4 (9%).

En cuanto a las dificultades de expresión, el orden coincide con los renglones: los sujetos que hicieron una elección correcta

12. Esta dificultad explicaría también el resultado encontrado por Kahneman y Tversky (1972, pág. 34) en el sentido de que 75% de los sujetos piensan que es más probable que una muestra con  $p=.55$  venga de una población en la que  $p=.65$  que de una población en la que  $p=.45$ : un sujeto que tienda a las estrategias de equilibrio verá .55 y .65 como casi iguales por {E=} ("gano-gano"), mientras que verá .55 sustancialmente mayor que .45 por {E<>} ("pierdo-gano").
13. Esto contrarresta con la afirmación de Fischbein (1975, pág. 69) en el sentido de que «la "cantidad de impredecibilidad" aumenta cuando disminuye la diferencia entre las posibilidades de que ocurra cualquier alternativa. Para cualquier número de posibilidades, la incertidumbre [...] aumenta cuando todas las posibilidades son equiprobables»: según esta afirmación, los arreglos de la ubicación U3.3 deberían ser más difíciles que las de U3.2/U3.4.
14. Los propios Falk et al. (1980) reportan un resultado similar entre niños de 7 a 9 años. También reportan que entre niños de 4 a 5 años las preguntas "difíciles" resultaron más fáciles que las "regulares" (yo aventuro que eso se puede deber a estrategias {E5} en una de las ubicaciones "regulares": U2.4). Por lo demás, como tendencia general, los resultados de estos investigadores son como lo previsto: los porcentajes en cada edad tienden a ser más altos en las preguntas "fáciles", intermedios en las "regulares" y más bajos en las "difíciles", y a mayor edad hay mejores resultados en cada ubicación y menores diferencias entre las tres ubicaciones.
15. Aquí consideramos como fáciles las combinaciones K1 a K5, y como difíciles las combinaciones K6 y K7, que son las que pueden existir en estas ubicaciones. La dificultad de las diferentes combinaciones se analizará más adelante (§7.1.2).

tuvieron más facilidad para expresar sus justificaciones en las situaciones simétricas que en las no simétricas, más facilidad cuando hay un empate que cuando no lo hay <sup>(16)</sup>.

Al comparar las ubicaciones sin proporcionalidad con las que sí la tienen, vemos que resultaron más difíciles las primeras que las segundas: U2.3 ligeramente más difícil que U3.3, y U3.2/U3.4 bastante más difíciles que su contraparte con proporcionalidad. Lo mismo ocurre con la dificultad de expresión.

### 7.1.1.3. ANALISIS GLOBAL DE LAS UBICACIONES

Dos tipos de análisis son pertinentes aquí. Por un lado, la comparación de los tipos de ubicación según cuán extremas son: las ubicaciones más extremas son las de la forma Ui.1 y Ui.5, las laterales son las de la forma Ui.2 y U2.4, y las centrales o simétricas las de la forma Ui.3.

Por otro lado, importa saber si las ubicaciones que tienden "hacia la izquierda", es decir cuyas probabilidades están entre 0 y  $\frac{1}{2}$ , difieren de las ubicaciones que tienden "hacia la derecha", es decir cuyas probabilidades están entre  $\frac{1}{2}$  y 1. Esto define nuevamente tres grupos: las ubicaciones "izquierdas", Ui.1 y Ui.2, las "derechas", Ui.5 y Ui.4, y las centrales o simétricas, Ui.3.

#### a) Ubicaciones extremas y no extremas

Para comparar los resultados de las ubicaciones más extremas con las laterales y las centrales, se agruparán las elecciones incorrectas en una sola categoría, como ya se había hecho anteriormente. Además, se globalizarán los grupos de ubicaciones extremas (por un lado todas las de la forma Ui.1, por otro todas las de la forma Ui.5), laterales (Ui.2 y Ui.4) y centrales o simétricas (Ui.3).

ubicaciones	n	mín, máx	resp. correcta				resp. incor.			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji
Ui.1 globaliz.	170	93,95	95	2	93	0	0	5	3	2
Ui.2 globaliz.	431	30,59	71	22	30	8	12	29	7	22
Ui.3 globaliz.	288	44,74	77	25	44	5	3	23	6	17
Ui.4 globaliz.	490	19,53	67	24	19	10	14	33	9	24
Ui.5 globaliz.	170	70,88	88	12	70	7	*	12	2	10

Sin embargo, conviene tener en cuenta que dentro de cada uno de estos grupos hay mejores resultados mientras más difieren las dos probabilidades formales, con la excepción (previamente comen-

16. Cuando hablo de situaciones simétricas no me refiero a que la diferencia  $|p_j - 0.5|$  sea necesariamente la misma para ambas probabilidades, sino a alguna de las ubicaciones de la forma Ui.3. En U1.3 y U3.3 la diferencia es la misma (respectivamente 0.5 y 0 para ambas probabilidades), pero en U2.3 una puede ser mayor que la otra.

tada) de que las ubicaciones de proporcionalidad suelen ser más fáciles que las de no proporcionalidad.

En lo que respecta a la comparación entre estos grupos, se deduce que las situaciones extremas (Ui.1 y Ui.5) son más fáciles que las simétricas (Ui.3) y éstas a su vez son más fáciles que cualquiera de las dos laterales (Ui.2 y Ui.4); estas relaciones se dan no sólo con respecto a cada uno de los porcentajes de éxito (mínimo seguro y máximo posible), sino también en cuanto a la facilidad con que los sujetos que hacen la elección correcta pueden justificar su decisión (con la excepción de Ui.3):

ubicaciones	n	mín,máx	dif
Ui.1 globaliz.	170	93,95	2
Ui.5 globaliz.	170	70,88	18
Ui.3 globaliz.	288	44,74	30
Ui.2 globaliz.	431	30,59	29
Ui.4 globaliz.	490	19,53	34

Aquí conviene revisar otra de las hipótesis planteadas en el capítulo 3, referentes a las ubicaciones:

H10.2.1: Los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a ubicaciones extremosas de "pierdo" (U1.1, U1.3, U2.1, U3.1) o de "gano" (U1.3, U1.5, U2.5, U3.5) que las correspondientes a las demás;

Las situaciones extremosas son, efectivamente, las de más fácil resolución.

**b) Lateralidad**

Por otra parte, al comparar los arreglos "izquierdos" (Ui.1 y Ui.2), los "derechos" (Ui.4 y Ui.5) y los simétricos (Ui.3), se obtiene lo siguiente: los arreglos "derechos" son más difíciles que los "izquierdos", mientras que, vistos globalmente, no hay mucha mayor facilidad en las situaciones simétricas que en los laterales izquierdos. Por otra parte, en cuanto a la dificultad de expresión, los arreglos se asemejan más a los derechos que a los izquierdos:

ubicaciones	n	mín,máx	dif
Ui.3: simétric.	288	44,74	30
Ui.1/Ui.2: izq.	601	42,66	24
Ui.4/Ui.5: der.	660	24,56	32

Así, hay las siguientes diferencias entre las ubicaciones izquierdas y las derechas: las izquierdas son más fáciles que las derechas (tanto, prácticamente, como las simétricas), mientras que las derechas son de más fácil expresión que las izquierdas (tanto, prácticamente, como las simétricas). La diferencia en

rendimiento entre las ubicaciones izquierdas y derechas difícilmente podría justificarse por una mayor proporción de combinaciones difíciles (17) en las derechas que en las izquierdas (hay 28% y 18% de combinaciones difíciles respectivamente), aunque sí podría intervenir el hecho de hay un menor porcentaje de situaciones de proporcionalidad en las derechas (16%) que en las izquierdas (30%). Aún así, cabe preguntarse si efectivamente pudiera haber algo que hiciera la situación general de "gano" más difícil de resolver pero más fácil de expresar que la de "pierdo".

### 7.1.2. COMBINACIONES

Las combinaciones fueron diseñadas para la observación de las estrategias de centración y las de las familias de {R+} y {P+}. Para ver las diferencias entre ellas, eliminaré del análisis en esta etapa las preguntas con imposibilidades o certezas (ubicaciones de la forma U1.j, Ui.1 y Ui.5), puesto que, como se vió en el párrafo §7.1.1.1, estas situaciones son particularmente fáciles y podrían sesgar el análisis de las combinaciones (siendo que, además, no todas las combinaciones tienen la misma representación de estas ubicaciones).

Así, la distribución de las respuestas con las que se trabajará en este apartado, por combinación y cuestionario, es la siguiente:

	K0	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10	K11	K14	K15	K16	TOT
C1	43	0	0	43	122	44	0	0	0	0	0	47	43	0	39	381
C2	16	0	0	0	62	45	29	0	0	0	0	16	30	14	15	227
C3	0	12	11	16	23	17	12	2	14	8	17	12	12	8	8	172
C4	0	11	9	8	16	16	5	0	11	14	10	11	12	6	6	135
C6	0	5	5	11	31	23	21	21	13	15	17	8	27	15	18	230
TOT	56	28	25	78	254	145	67	23	38	37	44	94	124	43	86	1145

La tabla de resultados generales que sigue presenta, por única vez en este apartado, las cantidades (absolutas) de respuestas por combinación, tanto con las ubicaciones de imposibilidades o certezas (c) como sin ellas (s). Además, como en el apartado anterior, se ponen los porcentajes (p) con los que se trabajará en el resto del apartado; cada uno está calculado sobre el total de respuestas a la combinación correspondiente, sin imposibilidades ni certezas.

17. En este caso se consideran como difíciles las combinaciones K5 a K11, y como fáciles K1 a K5 y K14 a K15.

RESULTADOS EN CANTIDADES ABSOLUTAS Y RELATIVAS														
combinac. K = nfdrp		n	min,máx	lado correcto l.					incor.ig.			incor		
				tot	si	jc	jp	ji	totsi	ji	tot	si	ji	
K1= 11211	c	28	11,79	28	14	3	5	6	0	0	0	0	0	0
	s	28	11,79	28	14	3	5	6	0	0	0	0	0	0
	p		11,79	100	50	11	18	21	0	0	0	0	0	0
K2= 12122	c	49	37,84	46	20	18	3	5	1	0	1	2	0	2
	s	25	8,68	22	12	2	3	5	1	0	1	2	0	2
	p		8,68	88	48	8	12	20	4	0	4	8	0	8
K3= 01211	c	239	73,95	227	32	175	20	0	4	4	0	8	5	3
	s	78	44,92	72	27	34	11	0	2	2	0	4	2	2
	p		44,92	92	35	44	14	0	3	3	0	5	3	3
K4= 11011	c	293	36,73	224	67	105	42	10	22	8	14	47	19	28
	s	254	26,69	186	67	67	42	10	21	7	14	47	19	28
	p		26,69	73	26	26	17	4	8	3	6	19	7	11
K5= 10122	c	188	52,87	165	45	98	20	2	4	1	3	19	9	10
	s	145	43,85	125	42	61	20	2	4	1	3	16	8	8
	p		42,85	86	29	42	11	1	3	1	2	11	6	6
K6= 11111	c	67	21,45	50	16	14		20	13	2	11	4	2	2
	s	67	21,45	50	16	14		20	13	2	11	4	2	2
	p		21,45	75	24	21		30	19	3	16	6	3	3
K7= 11122	c	23	26,43	17	4	6		7	5	1	4	1	0	1
	s	23	26,43	17	4	6		7	5	1	4	1	0	1
	p		26,43	74	17	26		30	22	4	17	4	0	4
K8= 11121	c	38	0,11	14	4	0		10	15	2	13	9	0	9
	s	38	0,11	14	4	0		10	15	2	13	9	0	9
	p		0,11	37	11	0		26	39	5	34	24	0	24
K9= 11112	c	53	21,34	31	7	11		13	12	1	11	10	1	9
	s	37	0,19	19	7	0		12	12	1	11	6	0	6
	p		0,19	51	19	0		32	32	3	30	16	0	16
K10=11101	c	44	0,11	20	5	0		15	9	0	9	15	3	12
	s	44	0,11	20	5	0		15	9	0	9	15	3	12
	p		0,11	45	11	0		34	20	0	20	34	7	27
K11=11102	c	98	13,36	54	24	11		19	18	4	14	26	7	19
	s	94	11,33	50	21	10		19	18	4	14	26	7	19
	p		11,33	53	22	11		20	19	4	15	28	7	20

				igualdad correcta				S1 incor.			S2 incor		
				tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si
K12=10120	c	54	89,94	51	3	48	0	0	0	0	3	0	3
	s	0	---,---	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	p		---,---	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K13=11010	c	63	57,76	48	12	36	0	5	0	5	10	0	10
	s	0	---,---	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	p		---,---	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K14=11120	c	124	23,35	65	15	29	21	34	6	28	25	5	20
	s	124	23,35	65	15	29	21	34	6	28	25	5	20
	p		23,35	52	12	23	17	27	5	23	20	4	16
K15=11110	c	43	23,37	24	6	10	8	9	2	7	10	4	6
	s	43	23,37	24	6	10	8	9	2	7	10	4	6
	p		23,37	56	14	23	19	21	5	16	23	9	14
K16=11100	c	86	37,53	46	14	32	0	19	3	16	21	4	17
	s	86	37,53	46	14	32	0	19	3	16	21	4	17
	p		37,53	53	16	37	0	22	3	19	24	5	20
K0= 00000	c	59	42,92	55	20	25	9	1	1	0	3	3	0
	s	59	42,92	55	20	25	9	1	1	0	3	3	0
	p		42,92	93	34	42	15	2	2	0	5	5	0

Como para las ubicaciones, se han resaltado en la tabla los porcentajes en los que las elecciones fueron correctas. Puede observarse que, en general, estos porcentajes tienden a ser más bajos mientras más alto es el número que caracteriza a la combinación, hasta K7<sup>(18)</sup>. En las restantes, el orden es inverso:

entre K0 y K2, hay de 88% a 100% de elecciones correctas;  
entre K3 y K5, hay de 73% a 86% de elecciones correctas;  
entre K6 y K7, hay de 74% a 75% de elecciones correctas;  
entre K14 y K16, hay de 52% a 56% de elecciones correctas;  
entre K10 y K11, hay de 45% a 53% de elecciones correctas;  
entre K8 y K9, hay de 37% a 51% de elecciones correctas.

Sin embargo, como vimos con respecto a las ubicaciones, es necesario estudiar los motivos por los que una elección es la correcta. Eso se hará, para cada combinación, en los siguientes párrafos.

#### 7.1.2.1. COMBINACIONES NO DISCRIMINANTES

Las combinaciones que podrían resultarles más fáciles a los sujetos, según las hipótesis planteadas, son, por una parte, la que corresponde a los arreglos de identidad (en que el arreglo está compuesto por dos espacios muestrales idénticos) y, por

<sup>18</sup>. No hay así una relación global entre el número que caracteriza a la combinación y el número de respuestas con elección correcta que hay en ella. Tampoco hay, por ende, relación alguna con el número de arreglos en esa combinación.

otra, las combinaciones en las que todas (o casi todas) las estrategias de combinación llevan a la elección del mismo lado.

**a) Arreglos con conjuntos idénticos: K0**

La combinación K0 corresponde a la situación piagetiana de conjuntos idénticos (P6) <sup>(19)</sup>. Sólo fue probada con un arreglo de U3.3: (1,1)(1,1), en los cuestionarios C1 y C2, con los siguientes resultados:

combinac. K = nfdrrp	n	mín,máx	igualdad correcta					S1 incor.			S2 incor.		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
K0= 00000	59	42,92	93	34	42	15	2	2	2	0	5	5	0

Esta situación tiene un porcentaje bastante alto de éxito. Entre las justificaciones correctas a la respuesta "da igual" se presentaron estrategias {P=} (28%), aunque la mayoría (72%) son composiciones correctas por teoremas en acto. Si se juntan éstas con las expresiones potencialmente incompletas, cubren el 77% de las justificaciones al lado correcto (mientras que {P+} y {P'} cubren el 23% restante).

Hubo cuatro respuestas incorrectas, pero ninguna pudo ser interpretada.

La expresión de la respuesta correcta a este arreglo no resultó tan fácil como el arreglo mismo: en 50% de las respuestas correctas hubo dificultades de expresión. Todas las respuestas a esta pregunta vienen de los cuestionarios C1 y C2, y la mayor parte de ellas corresponden a respuestas sin argumentación: la situación parece ser demasiado fácil para detenerse a escribir un razonamiento.

**b) Arreglos poco discriminantes: K1 y K2**

La combinación K1 <sup>(20)</sup> fue probada en tres arreglos (de U2.3, U3.2 y U3.4) en los cuestionarios C3, C4 y C6; mientras que la combinación K2 <sup>(21)</sup> fue probada en cuatro arreglos distintos, cubriendo las ubicaciones sin imposibilidades ni certezas U2.2, U2.3 y U3.2, en los cuestionarios C3, C4 y C6. Los resultados son:

combinac. K = nfdrrp	n	mín,máx	lado correcto					1. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
K1= 11211	28	11,79	100	50	11	18	21	0	0	0	0	0	0
K2= 12122	25	8,68	88	48	8	12	20	4	0	4	8	0	8
K1 y K2	53	10,74	95	49	10	15	21	2	0	2	4	0	4

19. Se puede observar en todas las ubicaciones de la forma U3.j.

20. Puede existir en todas las ubicaciones menos U3.3.

21. Puede existir en todas las ubicaciones menos U3.3.

La combinación K1 resulta bastante fácil también. Todas las justificaciones correctas a la elección del lado correcto son principalmente estrategias correctas por teoremas en acto; si se juntan con las expresiones potencialmente incompletas, cubren el 57% de las justificaciones al lado correcto.

Las justificaciones incorrectas a la elección correcta son principalmente {R+} (67%). No hubo, para esta combinación, ninguna elección incorrecta.

Como para K0, la expresión de la respuesta correcta a este arreglo resultó más difícil que el arreglo: la diferencia entre los porcentajes de éxito máximo posible y mínimo seguro es de 68%. En este caso, las respuestas a estas preguntas vienen principalmente de entrevistas, y la mayor parte de las respuestas sin interpretar corresponden a respuestas sin justificación: los sujetos dijeron sus elecciones y no las discutieron: eran preguntas demasiado fáciles.

La combinación K2 difiere ligeramente de las dos anteriores, sobre todo en el sentido de que hay menos justificaciones correctas a la elección correcta. Estas son dos, y en ambos casos se trata de la estrategia de equilibrio {E<} en U2.2.

Las justificaciones incorrectas a la elección correcta utilizan {R+} y la compensación {F+ \* E=}. Las tres elecciones incorrectas fueron justificadas por una centración y la estrategia de equilibrio {E=}.

El mayor parecido de esta combinación con las anteriores radica en la dificultad de expresión. En este caso, 60% de los sujetos que hicieron la elección correcta tuvieron dificultades para justificarla adecuadamente. Estas respuestas también provienen de entrevistas en su mayoría, y en general, las respuestas no interpretadas fueron por falta de justificación: como en el caso anterior, los sujetos no discutieron estas preguntas.

Las dos combinaciones de arreglos no idénticos menos discriminantes pueden globalizarse, pues resultan bastante homogéneas (último renglón de la tabla). Aunque estas situaciones son fáciles, la gran mayoría de las elecciones correctas fueron acompañadas de justificaciones incorrectas (22%) o de expresiones inadecuadas (64%).

### c) Análisis

Las combinaciones no discriminantes son, en general, fáciles de resolver pero difíciles de expresar. Esto es más notorio en la combinación de arreglos idénticos, K0, que en las combinaciones en que todas las estrategias llevan a la misma elección, K1 y K2, y ocurre tanto a nivel de cada uno de los porcentajes de éxito como a nivel de la diferencia entre ambos:



combinaciones	n	mín,máx	dif
K0 = 00000	59	42,92	50
K1 y K2	53	10,74	64

Así, si se les concede a las respuestas a estas combinaciones "el beneficio de la duda", los porcentajes de éxito (máximos posibles) son bastante altos: respectivamente 92% y 74%. Sin embargo, si no se les concede, estos porcentajes (mínimos seguros) sólo llegan a 42% y 10%. Sin embargo, como hemos visto, el hecho de que las diferencias entre los porcentajes de éxito provengan de respuestas escritas sin argumentación y de respuestas verbales sin justificación es consistente con la hipótesis de que estas preguntas les resultan muy fáciles a los sujetos.

#### 7.1.2.2. COMBINACIONES "DE UNA VARIABLE"

Las combinaciones K3, K4 y K5 pueden denominarse, según la clasificación piagetiana, preguntas de una variable, aunque este término no es del todo correcto, por lo que explico en seguida. En K3=01211 una variable se "neutraliza" (término fischbeiniano): los casos posibles. Esto deja, según Piaget, una sola variable para estos problemas: los casos favorables. Sin embargo, queda otra variable también: los casos desfavorables, que aunque no son formalmente independientes de los favorables (puesto que una vez fijados los posibles, los desfavorables quedan determinados por los favorables), sí lo son perceptualmente. Análogamente, K5=10122 fija los favorables y deja variables los posibles (y los desfavorables), y del mismo modo K4=11011 fija los desfavorables y deja variables los posibles (y los favorables).

Lo correcto sería, entonces, llamar "de dos variables" a las preguntas que Piaget e Inhelder denominan "de una variable", y "de tres variables" a las que ellos denominan "de dos variables". A pesar de ello, he conservado la denominación piagetiana, por lo menos en el título de este párrafo.

#### a) Igualdad de los casos posibles: K3

La combinación K3 es equivalente a la situación piagetiana P8<sup>22</sup>). Fue probada en las ubicaciones (sin imposibilidades ni certezas) U2.2, U2.3, U2.4, y U3.2, en ocho arreglos de los cuestionarios C1, C3, C4 y C6. Los resultados son:

combinac. K = nfdrp	n	mín,máx	lado correcto				1. incor.			ig. incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
K3= 01211	78	44,92	92	35	44	14	0	3	3	0	5	3	3

22. Puede existir en todas las ubicaciones menos U3.3

La combinación K3 es similar a las anteriores en cuanto a rendimiento: muy alto si se considera el máximo posible porcentaje de éxito, y mediano si se considera el mínimo seguro. Las justificaciones correctas a la elección correcta se distribuyen así: 41% son estrategias de equilibrio correctas, 35% son {P+} y el resto (24%) son la composición {F+ \* N=} correcta por teorema en acto. (Si a ésta se agregan las justificaciones potencialmente incorrectas, cubren el 42% de las justificaciones a la elección correcta).

No hay en esta combinación justificaciones incorrectas a la elección correcta. La mayor parte de las elecciones incorrectas no pudo ser interpretada; sólo lo fueron dos respuestas "da igual": una fue {P'} y la otra {E=}. En particular, conviene observar que no se registró la estrategia {N=} como justificación a la respuesta "da igual" (23).

La diferencia entre el máximo porcentaje de éxito posible y el mínimo seguro es de 48%, lo que indica que a casi la mitad de los sujetos que eligieron correctamente les resultó difícil justificar por qué lo hicieron. Esto ocurrió en todos los cuestionarios en que se aplicaron preguntas de esta combinación.

#### b) Igualdades de los casos desfavorables y favorables: K4 y K5

La combinación K4 no es equivalente a ninguna de las situaciones piagetianas; en términos de esa clasificación, se denominaría igualdad de los casos desfavorables y desigualdad de los casos posibles (y/o de los favorables); sin embargo, Piaget e Inhelder no la contemplaron (yo la he denotado P9') (24). Fue probada en las ubicaciones sin imposibilidades ni certezas U2.3, U2.4, U3.2 y U3.4, en 16 arreglos distintos y en todos los cuestionarios. Por su parte, la combinación K5 es equivalente a la situación piagetiana P9 (25). Fue probada en diez arreglos distintos de todas las ubicaciones sin certezas ni imposibilidades: U2.2, U2.3, U2.4, U3.2 y U3.4, cubriendo todos los cuestionarios. Se obtuvieron los siguientes resultados:

combinac. K = nfdrp	n	mín,máx	lado correcto				l. incor.			ig. incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
K4= 11011	254	26,69	73	26	26	17	4	8	3	6	19	7	11
K5= 10122	145	42,85	86	29	42	11	1	3	1	2	11	6	6
K4 y K5	399	30,73	76	27	30	16	3	7	2	5	17	7	10

23. La única respuesta con estrategia {N=} que se registró en K3 fue en una de las ubicaciones que no se están considerando aquí: U2.1 (Bet; C2,6).

24. Puede presentarse en todas las ubicaciones menos U3.3 y las de la forma Ui.5.

25. Puede existir en todas las ubicaciones menos U3.3 y las de la forma Ui.1.

La combinación K4 es más difícil que K3. Hay sólo 26% de justificaciones correctas. De ellas, 52% son {P+}, 33% son estrategias correctas de equilibrio y 15% son alguna de las composiciones correctas por teorema en acto {F+ \* D=} ó {N+ \* D=} (si a éstas se agregan las justificaciones potencialmente incompletas, cubren el 44% de las justificaciones a la elección correcta).

Entre las justificaciones incorrectas a la elección correcta hay siete {P'} (70%) y dos {F+ \* E=} (20%). La elección del espacio muestral incorrecto fue justificada por centraciones {N+} y {F+} en 50% de esas elecciones que fueron interpretadas, por {E=} en 29% y por {P'} en 21%. En cuanto a las respuestas "da igual", 54% fueron justificadas por {D=} como estrategia simple o dominante, 36% por {E=} y el resto por otras estrategias.

Aunque el rendimiento de esta combinación es menor que el de las anteriores, su dificultad de expresión es aproximadamente la misma: 43% de los sujetos con elección correcta tuvieron dificultades en explicar por qué la hicieron. Esto ocurrió en todos los cuestionarios.

En cuanto a la combinación K5, aunque un poco más fácil que la anterior, se le parece bastante en el tipo de estrategias utilizadas. Hubo 42% de respuestas con elección y justificación correctas; de ellas, 66% se debieron a estrategias de equilibrio, 18% a {P+} y 16% a alguna de las composiciones correctas por teorema en acto {N- \* F=} ó {D- \* F=} (si a éstas se agregan las justificaciones potencialmente incompletas, cubren el 36% de las justificaciones a la elección del espacio correcto).

Las dos justificaciones incorrectas a la elección correcta son {P'} y {D- \* E=}. Como en el caso de K4, casi todas las elecciones del espacio incorrecto fueron justificadas por centraciones ({N+} simple o dominante). Y, como en el caso de K4, las respuestas "da igual" fueron mayoritariamente (88%) justificadas por la centración de igualdad correspondiente, en este caso {F=}.

La diferencia entre los porcentajes de éxito máximo posible y mínimo seguro es de 42%; es decir, en el mismo rango que las anteriores. Esto ocurrió en todos los cuestionarios.

A pesar de las diferencias entre las combinaciones K4 y K5, podemos intentar globalizarlas (último renglón de la tabla); se obtiene que son situaciones relativamente fáciles, aunque de expresión difícil: 43% de los sujetos que eligieron el lado correcto no pudieron justificar adecuadamente su decisión.

### c) Análisis

Las tres combinaciones "de una variable" resultaron relativamente fáciles, pero de expresión difícil:

combinaciones	n	mín,máx	dif
K3 = 01211	78	44,92	48
K4 y K5	399	31,73	42

La combinación de igualdad de casos posibles (K3) es más fácil que las otras dos; también es de expresión más difícil.

En las tres combinaciones, las justificaciones a las elecciones correctas incluyen 11% por teoremas en acto y 30% más por expresiones potencialmente incompletas de ellos. Además, 57% de las justificaciones a las respuestas "da igual" son por las centraciones de igualdad correspondientes.

En las tres, las respuestas no interpretadas se debieron principalmente a justificaciones descriptivas, tanto en las respuestas escritas como en las obtenidas en entrevistas. Esto podría indicar que los sujetos hicieron un intento (fallido) de expresar un razonamiento: esta familia de situaciones no parece ser tan obvia como la anterior.

### 7.1.2.3. COMBINACIONES "DE DOS VARIABLES", SIN PROPORCIONALIDAD

Las combinaciones "de dos variables" sin proporcionalidad, que para Piaget e Inhelder son una sola categoría (P10), se dividen aquí en tres parejas de combinaciones:

K6=11111 K7=11122	coincidencia de r y p: causan la misma elección
K8=11121 K9=11112	discrepancia de r y p: causan diferente elección
K10=11101 K11=11102	igualdad de resta de favorables menos desfavorables

#### a) Coincidencia de r y p: K6 y K7

Las combinaciones K6 y K7 son las únicas, entre las de dos variables, que pueden presentarse en las ubicaciones U2.2 y U2.4.

La combinación K6 <sup>(26)</sup> fue probada en todas las ubicaciones sin imposibilidades ni certezas, en catorce arreglos distintos de los cuestionarios C2, C3, C4 y C6. Por su parte, la combinación K7 <sup>(27)</sup> sólo fue probada en U2.3, U2.4, U3.2 y U3.4, en cuatro arreglos distintos de los cuestionarios C3 y C6. Se obtuvieron los siguientes resultados:

26. Puede existir en todas las ubicaciones menos U3.3 y las de la forma U1.5.

27. Puede existir en todas las ubicaciones menos U3.3 y las de la forma U1.1.

combinac. K = nfdrrp	n	mín,máx	lado correcto				l. incor.			ig. incor			
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si	ji
K6= 11111	67	21,45	75	24	21		30	19	3	16	6	3	3
K7= 11122	23	26,43	74	17	26		30	22	4	17	4	0	4
K6 y K7	90	21,45	75	23	21		30	20	3	17	6	3	3

La combinación K6 es notoriamente más difícil que las anteriores. Sólo 21% de las respuestas contienen una justificación correcta a una elección correcta. De ellas, 79% son estrategias de equilibrio y 21% son {P+}.

Las justificaciones incorrectas a la elección del lado correcto son primordialmente {F+} como estrategia simple o dominante (70%) y {R+} (30%). Entre las justificaciones incorrectas a elecciones incorrectas, se encuentra principalmente {N+} como simple o dominante (55%). En 27% de todas las justificaciones incorrectas aparece alguna estrategia de equilibrio.

La diferencia de 24% entre los porcentajes de éxito máximo posible y mínimo seguro indica que esta situación, aunque más difícil que las anteriores, conlleva menores dificultades en la expresión adecuada de la justificación a la elección correcta.

En lo que respecta a la combinación K7, es similar a la anterior. Hubo 26% de justificaciones correctas; todas ellas son estrategias de equilibrio.

Entre las justificaciones incorrectas a la elección correcta, 57% contienen a {N+} como simple o dominante, mientras que la principal estrategia en las justificaciones a la elección del lado incorrecto es {F+} (75% como simple o dominante). En 50% de todas las justificaciones incorrectas aparece alguna estrategia de equilibrio.

En cuanto a la dificultad de expresión, esta combinación indica un poco menos de dificultad que la anterior: 17% de los sujetos que eligieron correctamente tuvieron dificultades en la expresión adecuada de su justificación. Todas las respuestas a arreglos de esta combinación fueron obtenidas en entrevistas, y todas las respuestas que no fueron interpretadas carecieron de justificación: los sujetos resolvieron la pregunta sin discutirla.

Los resultados globalizados de estas dos combinaciones muestran que estas combinaciones implican mayores dificultades en la resolución del problema y menores dificultades en la expresión de una justificación correcta que las combinaciones "de una variable" revisadas anteriormente.

Las respuestas no interpretadas pero con elección correcta se debieron principalmente a que no tienen justificación.

## b) Discrepancia de r y p: K8 y K9

La combinación K8 <sup>(28)</sup> fue probada en tres arreglos distintos; uno de ellos se planteó en C3, C4 y C6, y los otros dos sólo se plantearon en C6, mientras que la combinación K9 <sup>(29)</sup> se probó en tres arreglos distintos de los cuestionarios C3, C4 y C6. Los resultados son:

combinac. K = nfdrp	n	mín,máx	lado correcto				l. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si
K8= 11121	38	0,11	37	11	0	26	39	5	34	24	0	24
K9= 11112	37	0,19	51	19	0	32	32	3	30	16	0	16
K8 y K9	75	0,15	44	15	0	29	36	4	32	20	0	20

K8 es una combinación difícil. Aunque 37% de las respuestas son con elección del lado correcto, no hubo ninguna justificación correcta.

En cambio, 26% de las justificaciones acompañantes de la elección correcta son incorrectas; todas ellas son centraciones como estrategias simples o dominantes. Entre las justificaciones a la elección incorrecta, 77% tienen alguna centración como estrategia simple o dominante y 23% tienen {R+}. En cuanto a las respuestas "da igual", 89% de las justificaciones son o se basan en {E=}.

La diferencia de 11% entre ambos tipos de porcentaje de éxito sugiere que, aunque de difícil resolución, los sujetos que deciden correctamente expresan con facilidad sus justificaciones.

La combinación K9 es similar a la anterior. Como en ella, no hubo justificaciones correctas, pero sí un porcentaje relativamente alto de elecciones del lado correcto.

Sin embargo, 32% de ellas son con justificaciones incorrectas, y de esas justificaciones son, en su mayoría (83%) centraciones simples o dominantes. También las justificaciones a la elección del lado incorrecto son principalmente centraciones (91%), mientras que las que acompañan a la respuesta "da igual" son {E=}.

Las únicas respuestas que podrían ser candidatas a correctas son las que no fueron interpretadas; en general se trata de respuestas sin justificación, por lo que resulta imposible intentar siquiera una interpretación.

Los resultados globalizados de estas dos centraciones se muestran en el último renglón de la tabla. El hecho de que no se haya encontrado ninguna justificación correcta en estas combinaciones es la causa de que el porcentaje mínimo seguro de éxito es 0%. El máximo posible es de 15%, por las respuestas sin interpretación, que son sobre todo porque no tienen justificación (en los cuestionarios C3, C4 y C6).

<sup>28</sup>. Sólo puede existir en la ubicación U3.2.

<sup>29</sup>. Sólo puede existir en la ubicación U3.4.

## c) Igualdad de restas: K10 y K11

Las combinaciones K10 y K11 fueron diseñadas para observar la ocurrencia de la estrategia {R=}.

La combinación K10 <sup>(30)</sup> fue probada en ocho arreglos distintos en los cuestionarios C3, C4 y C6, y la combinación K11 <sup>(31)</sup> fue probada en cinco arreglos distintos en todos los cuestionarios. Se obtuvieron los siguientes resultados:

combinac. K = nfdrrp	n	mín,máx	lado correcto				l. incor.			ig. incor		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si
K10=11101	44	0,11	45	11	0	34	20	0	20	34	7	27
K11=11102	94	11,33	53	22	11	20	19	4	15	28	7	20
K10 y K11	138	9,29	52	20	9	23	19	3	16	29	7	21

La combinación K10 se asemeja a K8. No hubo ninguna respuesta con justificación correcta.

Todas justificaciones incorrectas a la elección del espacio muestral correcto son centraciones simples o compuestas; 67% de ellas tienen sólo centraciones y el 33% restante componen centraciones con relaciones. También todas las justificaciones a la elección del lado incorrecto son centraciones; todas menos una involucran exclusivamente centraciones. En cuanto a las respuestas "da igual", la estrategia {R=} estuvo en el 42% de las justificaciones; el 58% restante son {E=}.

Solamente 11% de los sujetos que eligieron el lado correcto tuvieron dificultades para expresar sus razones para ello.

En comparación con K10, K11 resulta una combinación menos difícil: aquí hubo 11% de respuestas con justificación correcta, y todas ellas son {P=}.

Las justificaciones incorrectas a la elección correcta son (salvo un caso de {P'}) centraciones simples o compuestas; 79% de ellas involucran solamente centraciones y 16% componen centraciones con relaciones. Las justificaciones a la elección incorrecta son también principalmente centraciones, aunque hay aquí 43% de respuestas {P'}. Las justificaciones a la respuesta "da igual" son 58% {E=}, 32% {R=} y 11% {P'}.

Hay una diferencia de 22% entre los porcentajes de éxito máximo posible y mínimo seguro, lo que parecería indicar que esta situación, aunque más fácil que la anterior, es de expresión más difícil. Sin embargo, la diferencia podría también deberse a que esta combinación fue probada por escrito (donde hay en general mayores dificultades de expresión) y la anterior no.

La similitud de las combinaciones y la del tipo de estrategias obtenidas en ellas (más que la de los porcentajes de éxito obtenido) nos sugiere globalizar ambas situaciones (último renglón de la tabla). La situación globalizada es difícil. Los re-

<sup>30</sup>. Sólo puede existir en la ubicación U3.2.

<sup>31</sup>. Sólo puede existir en la ubicación U3.4.

sultados globalizados se asemejan más a los de K11 que a los de K10 porque hubo muchas menos respuestas en K10 que en K11; este relativamente pequeño (44) número de respuestas podría explicar también la ausencia de estrategias {P+} o {P'} en K10. Como estaba previsto en la construcción de estas combinaciones, se presentó la estrategia {R-}, pero no tan frecuentemente como {E-} (representan respectivamente el 35% y el 58% de las justificaciones a las respuestas "da igual").

Las respuestas no interpretadas son sobre todo por descriptivas, lo que parece indicar que los sujetos hicieron un intento por expresar alguna clase de razonamiento, que no pudo ser interpretado.

#### d) Análisis

Las tres parejas de combinaciones "de dos variables" sin proporcionalidad son mucho más difíciles de resolver que las de "una variable", aunque parecen ser de menor dificultad para expresar adecuadamente la justificación a una elección correcta:

combinaciones	n	mín,máx	dif
K6 y K7	90	21,45	24
K8 y K9	75	0,15	15
K10 y K11	138	9,29	20

De las tres parejas, las más fáciles son K6 y K7. Esto puede deberse al hecho de que en esas combinaciones sí se pueden dar las ubicaciones U2.2 y U2.4, en las que son correctas las estrategias de equilibrio (y, efectivamente, de las justificaciones correctas, 85% son por estrategias de equilibrio, mientras que sólo 15% de ellas son {P+}; con respecto al total de justificaciones al lado correcto estas dos estrategias representan respectivamente 36% y 6%). En contraste, en las otras dos parejas de combinaciones, la única estrategia correcta es {P+}, que se presenta en 15% del total de justificaciones al lado correcto.

Las diferencias entre los porcentajes máximo posible y mínimo seguro son relativamente bajas <sup>(32)</sup>. Sin embargo, el hecho de que la mayor parte de las respuestas sin interpretación se deba a que no tienen justificación en las combinaciones K6, K7, K8 y K9 pero a que son respuestas descriptivas en K10 y K11 sugiere que estas últimas podrían significar un reto mayor a los ojos de los sujetos, lo que las haría merecedoras de un intento de expresión de un razonamiento.

#### 7.1.2.4. COMBINACIONES "DE DOS VARIABLES", CON PORPORCIONALIDAD

Las combinaciones "de dos variables" en las que hay una proporcionalidad entre los elementos de ambos espacios muestrales,

<sup>32</sup>. La razón de esto se discutirá más tarde: ver el párrafo §7.1.2.5, pág. 379.



son para Piaget e Inhelder una sola categoría (P7). En mi clasificación, quedan repartidas en cinco categorías:

K12=10120 K13=11010	proporcionalidad con p = 0 y p = 1
K14=11120 K15=11110	proporcionalidad con p <.5 y p >.5
K16=11100	proporcionalidad con p = .5

De ellas, las dos primeras son, respectivamente, la situación de doble imposibilidad y la de doble certeza, por lo que entran en las categorías piagetanas P1 y P2. Las tres siguientes sí corresponden estrictamente a la categoría P7.

**a) Doble imposibilidad y doble certeza: K12 y K13**

Como las combinaciones K12 y K13 sólo existen en ubicaciones de doble imposibilidad (U3.1) y doble certeza (U3.5) respectivamente, su análisis ya fue realizado en el parágrafo §7.1.1.1.

**b) Proporcionalidad en laterales: K14 y K15**

La combinación K14 <sup>(33)</sup> fue probada en cinco arreglos distintos, en todos los cuestionarios, y la combinación K15 <sup>(34)</sup> en cuatro arreglos distintos en los cuestionarios C2, C3, C4 y C6. Los resultados son los siguientes:

combinac. K = nfdrrp	n	mín, máx	igualdad correcta				S1 incor.			S2 incor.		
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji	tot	si
K14=11120	124	23,35	52	12	23	17	27	5	23	20	4	16
K15=11110	43	23,37	56	14	23	19	21	5	16	23	9	14
K14 y K15	167	23,36	53	12	23	17	27	5	22	20	5	16

K14 es una situación es más fácil que las combinaciones K8 a K11, e incluso que las combinaciones globalizadas K6-K7: 23% de los sujetos dieron la justificación correcta {P=} a su respuesta "da igual".

Las justificaciones incorrectas a la respuesta correcta "da igual" se basaron mayoritariamente (86%) en la estrategia {E=}. En cuanto a las elecciones de uno u otro espacio muestral, fueron principalmente (88%) justificadas por concentraciones simples o dominantes.

La diferencia de 12% entre ambos tipos de porcentaje de éxito sugiere que los sujetos que hicieron la elección correcta tuvieron un nivel de dificultad para justificar adecuadamente su

33. Sólo puede existir en la ubicación U3.2.

34. Sólo puede existir en la ubicación U3.4.

decisión similar al que tuvieron cuando se enfrentaron a los problemas "de dos variables" sin proporcionalidad.

La combinación K15 es prácticamente idéntica a K14: el 23% de las respuestas correctas llevan la justificación correcta {P=}; entre las justificaciones incorrectas a la respuesta "da igual" destaca primordialmente {E=} (88%), mientras que entre las justificaciones a la elección de uno u otro espacio muestral destacan las centraciones simples o dominantes (92%); por último, la diferencia de 14% entre ambos tipos de porcentaje de éxito indica no demasiada dificultad en la expresión de una justificación correcta.

La globalización de las combinaciones K14 y K15 se encuentra en el último renglón de la tabla. La mayoría de las respuestas que no pudieron ser interpretadas no tienen argumentación: son las respuestas del tipo "porque la probabilidad es igual" o "son iguales" que no indican qué tipo de razonamiento está siguiendo el sujeto.

**c) Proporcionalidad central: K16**

La combinación K16 <sup>(35)</sup> fue probada en seis arreglos distintos de todos los cuestionarios. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Combinac. K = <i>nfdrp</i>	n	mín,máx	igualdad correcta				S1 incor.			S2 incor.		
			tot	si	jc	jp	jl	tot	si	jl	tot	si
K16=11100	86	37,53	53	16	37	0	22	3	19	24	5	20

La mayor diferencia entre esta situación y las dos anteriores radica en que ésta es más fácil (tanto considerando los mínimos porcentajes de éxito seguros como los máximos posibles). Asimismo, es de notar que en esta combinación no hubo justificaciones incorrectas a la respuesta "da igual". Debe recordarse, sin embargo, que la estrategia {E=} fue excluida de esta situación (ubicación U3.3), puesto que su expresión se confundía con la de {P=}: de este modo, los sujetos que estaban efectivamente basando su elección en un razonamiento del tipo "empato-empato" fueron clasificados bajo {P=}. Esta es la razón de que la categoría de justificaciones incorrectas a la igualdad correcta, que en K14 y K15 estaba ocupada principalmente por {E=}, esté aquí vacía.

Por lo demás, las estrategias utilizadas son semejantes: todas las justificaciones correctas a la respuesta "da igual" son (o contienen a) {P=} y las justificaciones a la elección de uno u otro lado son mayoritariamente (88%) centraciones simples o dominantes.

<sup>35</sup>. Sólo puede existir en la ubicación U3.3.

También las respuestas sin interpretar, que son las causantes de la diferencia de 16% entre los dos tipos de porcentaje de éxito, se deben principalmente a respuestas sin argumentación.

#### d) Análisis

Las tres combinaciones de proporcionalidad son más fáciles de resolver que las "de dos variables" sin proporcionalidad, aunque conllevan el mismo nivel de dificultad en la expresión adecuada de una estrategia correcta de resolución:

combinaciones	n	mín,máx	dif
K14 y K15	167	23,36	13
K16	86	37,53	16

De las tres, la más fácil es K16. Como se observó anteriormente, esto puede simplemente deberse al hecho de que la estrategia {E=} se confunde con {P=} en esta situación.

La mayor proporción de respuestas sin argumentación en estas combinaciones que en las demás puede deberse a que los sujetos perciben la proporcionalidad y les parece tan obvia que basta con decir que los dos espacios muestrales son iguales (o iguales en probabilidad).

#### 7.1.2.5. ANALISIS GLOBAL DE LAS COMBINACIONES

El análisis global de las quince combinaciones aquí consideradas se abordará a través de tres aspectos. En primer lugar, se comentará la medición de las dificultades de expresión. En segundo lugar, se intentará una clasificación de las combinaciones en cuatro niveles según la dificultad que implican. Por último, se compararán los resultados obtenidos con los reportados en otras tres investigaciones.

##### a) Dificultades para la expresión adecuada

A nivel de la diferencia entre los porcentajes de éxito máximo posible y mínimo seguro, se tiene lo que se ilustra en el cuadro de la siguiente página.

En el cuadro se pueden distinguir dos grandes grupos: las combinaciones K0 a K5 y las combinaciones K6 a K16. La gran discrepancia entre unas y otras puede deberse a que efectivamente a los sujetos les resulta más fácil expresar adecuadamente una justificación a la elección correcta en las primeras combinaciones que en las segundas. Recordemos sin embargo que el máximo porcentaje de éxito posible incluye las respuestas no interpretadas y las expresiones potencialmente incompletas de estrategias correctas por teoremas en acto, y que las respuestas incluidas en la diferencia sólo podrían ser correctas si se les concede "el beneficio de la duda".

combinaciones	n	min,máx	dif
K0	59	42,92	50
K1 y K2	53	10,74	64
K3	78	44,92	48
K4 y K5	399	31,73	42
K6 y K7	90	21,45	24
K8 y K9	75	0,15	15
K10 y K11	138	9,29	20
K14 y K15	167	23,36	13
K16	86	37,53	16

Esta aclaración es importante porque una de las grandes diferencias entre las combinaciones de ambos grupos es que en las primeras son válidas las composiciones correctas por teoremas en acto, mientras que en las segundas no: es por ello que no hay, en las combinaciones K6 a K16, respuestas que pudieran considerarse como potencialmente incompletas. Así, la diferencia entre los dos tipos de porcentajes de éxito incluye en las combinaciones K0 a K5 una categoría de respuestas que no son posibles en las otras: mientras que en las primeras muchas de las centraciones son expresiones potencialmente incompletas de estrategias correctas (jp), en las combinaciones K6 a K16 todas las centraciones se convierten en justificaciones incorrectas (ji).

Es por ello que las diferencias de 60%, 64%, 48% y 42% sólo permiten comparar entre sí las dificultades de expresión involucradas respectivamente en K0, K1/K2, K3 y K4/K5, mientras que las diferencias de 24%, 15%, 20%, 13% y 16% sólo permiten comparar entre sí las dificultades de expresión involucradas respectivamente en K6/K7, K8/K9, K10/K11 K14/K15 y K16.

Para poder efectuar comparaciones en el nivel de dificultad involucrado en la expresión de una elección correcta entre ambos grupos, sólo se pueden comparar las respuestas sin interpretación (si), lo que da:

combinaciones	n	si
K0	59	34
K1 y K2	53	49
K3	78	35
K4 y K5	399	27
K6 y K7	90	24
K8 y K9	75	15
K10 y K11	138	20
K14 y K15	167	13
K16	86	16

Así, aunque se conserva la relación de mayor dificultad de expresión (mayores porcentajes de si) para las combinaciones K0 a

K5, ésta no es tanto más que la encontrada en las combinaciones K6 a K16.

#### b) Clasificación en grados de dificultad

A partir del trabajo realizado en la parte inicial de este apartado, se puede intentar una clasificación de las quince combinaciones aquí revisadas (sin imposibilidades ni certezas), basada en la dificultad que cada una implica para los sujetos con los que trabajé.

Esta clasificación, en cuatro grupos, se basa en el porcentaje mínimo seguro de éxitos y en el máximo posible, pero no exclusivamente: intervienen también la diferencia entre ambos y el análisis realizado del tipo de motivos por los que quedaron respuestas sin interpretar. Así, aunque los porcentajes mínimos para las combinaciones K1 y K2 sean muy bajos, estas combinaciones se encuentran en el segundo nivel, bajo la consideración de que por lo menos una buena parte de las respuestas sin justificar (comprendidas en la diferencia entre el máximo seguro y el mínimo posible) pueden haberse debido a que el sujeto vio la situación como muy obvia. Algo análogo ocurre, para los sujetos con razonamiento proporcional, con las combinaciones K14 a K16.

combinación	(mín,máx)	descripción
<b>PRIMER GRUPO:</b>		
K0 = 00000	(42,92)	arreglos idénticos
K3 = 01211	(44,92)	igualdad de casos posibles
K5 = 10122	(42,85)	igualdad de casos favorables
<b>SEGUNDO GRUPO:</b>		
K1 = 11211	(11,79)	no discriminante
K2 = 12122	( 8,68)	no discriminante
K4 = 11011	(26,69)	igualdad de casos desfavorables
K16 = 11100	(37,53)	proporcionalidad central
<b>TERCER GRUPO:</b>		
K6 = 11111	(21,45)	coincidencia de r y p
K7 = 11122	(26,43)	coincidencia de r y p
K14 = 11120	(23,35)	proporcionalidad en laterales
K15 = 11110	(23,37)	proporcionalidad en laterales
<b>CUARTO GRUPO:</b>		
K8 = 11121	( 0,11)	discrepancia de r y p
K9 = 11112	( 0,19)	discrepancia de r y p
K10 = 11101	( 0,11)	igualdad de restas
K11 = 11102	(11,33)	igualdad de restas

Algunos aspectos de esta clasificación merecen comentarios particulares.

Las combinaciones no discriminantes, K0, K1 y K2, quedan en dos grupos distintos. La combinación de arreglos idénticos es, evidentemente, muy fácil para estos sujetos. No ocurre así con

las combinaciones K1 y K2, que muchos sujetos resolvieron correctamente por composiciones de centraciones válidas por teoremas en acto, pero que muchos otros intentaron resolver o con centraciones simples o con composiciones no válidas: así, aunque la gran mayoría (96%) de las respuestas a estas combinaciones llevan la elección correcta, hubo 15% de ellas que iban acompañadas de razonamientos incorrectos: estas situaciones, aunque fáciles, parecen más fáciles de lo que son.

Las combinaciones de una variable, K3, K4 y K5, quedan también en dos grupos distintos. Es notable como la igualdad de casos desfavorables no es tan fácil como las otras dos. En K3 y K5 hubo más respuestas por composiciones de teoremas en acto que en K4 (del total de respuestas, estas composiciones representan 44% en K3, 42% en K5 y 26% en K4). Esto podría deberse a la escasa observación, por parte de algunos sujetos, de los casos desfavorables<sup>36</sup>). En todo caso, me parece que deja claro que la resolución de los problemas de igualdad de los casos desfavorables no es, de ningún modo que no sea el formal, equivalente a la resolución de igualdad de los casos favorables.

A su vez, las combinaciones de dos variables sin proporcionalidad pertenecen a grupos distintos. Aunque todas son difíciles, las combinaciones de "coincidencia de  $r$  y  $p$ ", es decir, en las que  $\{R+\}$  lleva a la misma elección que  $\{P+\}$ , son menos difíciles que las demás. Esto puede deberse a la coincidencia señalada: algunas de las respuestas no interpretadas podrían ser expresiones incompletas de la estrategia  $\{R+\}$  (que, como hemos visto, es de difícil expresión), pero al no ser interpretadas son "beneficiarias de la duda" e intervienen en el cálculo del porcentaje máximo posible de éxito. También es posible que la facilidad global de K6 y K7 con respecto a las combinaciones K8 a K10 se deba a las ubicaciones más fáciles U2.2, U2.3 y U2.4 posibles en ellas e imposibles en las demás; efectivamente, los porcentajes globalizados de K6 y K7 para estas ubicaciones son (28,48) con  $n=67$ , mientras que para U3.2 y U3.4 se tiene (6,32) con  $n=23$ . Las combinaciones de más difícil resolución son, sin lugar a dudas, las denotadas K8 a K10: estas son las combinaciones en las que la única estrategia posible que lleva a una solución correcta es  $\{P+\}$ .

Por otra parte, las combinaciones de dos variables con proporcionalidad quedan, también, en dos grupos distintos. La proporcionalidad central, es decir la clase de equivalencia de  $\frac{1}{2}$ , es mucho más fácil que otras clases de equivalencia.

Es pertinente revisar aquí dos de las hipótesis planteadas en el capítulo 3. La primera se refiere a la numeración de las combinaciones:

<sup>36</sup>. Lo que por cierto apoyaría la observación de Falk et al. (1980) en el sentido de que la estrategia  $\{D-\}$  es más sofisticada que  $\{F+\}$ .

H10.1.1: Hay diferencias en las elecciones hechas y las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes combinaciones: los sujetos tenderán a resolver mejor las preguntas correspondientes a las combinaciones con numeración baja que a las de numeración alta, salvo, tal vez, por las combinaciones de proporcionalidad, que no necesariamente resultarán las de menores cantidades de respuestas correctas;

Como tendencia, esta afirmación resultó cierta. Las excepciones al orden mencionado son las previstas combinaciones de proporcionalidad y las combinaciones K3 y K5, que resultaron más fáciles que las combinaciones K1 y K2.

La segunda hipótesis se refiere a las parejas de combinaciones:

H10.1.2: Hay aproximadamente la misma tendencia a resolver correctamente las preguntas correspondientes a las siguientes parejas de combinaciones: K1 y K2, K4 y K5, K6 y K7, K8 y K9, K10 y K11, K12 y K13, K14 y K15.

Esta afirmación resultó también básicamente cierta, con la misma excepción que la anterior: K5 resultó ser más fácil que su "pareja" K4.

### c) Comparación con otras investigaciones

La gran mayoría de las investigaciones consultadas no pueden compararse con estos resultados, por muy diversas razones (empezando por que pocos investigadores reportan las preguntas que plantean a los sujetos, por lo que no se pueden clasificar de acuerdo con el sistema construido para este estudio). Sin embargo, tres de las investigaciones más importantes como referentes sí se pueden comparar:

- los dos experimentos reportados por Falk et al. (1980) con niños de 4 a 11 años,
- la investigación de Maury (1986), de quien tomo los datos correspondientes a alumnos de primero de preparatoria (19P) y a estudiantes de primer año de licenciatura en el área de humanidades (19LH), y
- la investigación sobre razonamiento proporcional con jugo de naranja realizada por Noelting (1980) con niños de 6 a 16 años.

La tabla de la página siguiente resume los resultados, por combinaciones, de esta investigación y de las tres mencionadas.

El hecho de que las cuatro investigaciones hayan sido realizadas con metodología y condiciones experimentales muy diferentes no las hace directamente comparables. Sin embargo, hay algunos puntos que ameritan comentario.

combinaciones	ESTE ESTUDIO		FALK		MAURY		NOELTING
	n	min, máx	1 <sup>o</sup> exp	2 <sup>o</sup> exp	1 <sup>o</sup> P	1 <sup>o</sup> LH	proporc
K0 = 00000	59	42,92					
K3 = 01211	78	44,92	90	77			99*
K5 = 10122	145	42,85	87	63			95*
K1 = 11211	28	11,79	80				
K2 = 12122	25	8,68	89				
K4 = 11011	254	26,69		75			
K16 = 11100	86	37,53					75
K6 = 11111	67	21,45		88	45	88	
K7 = 11122	23	26,43	79	52			92*
K14 = 11120	124	23,35			33	85	58
K15 = 11110	43	23,37			29	73	49
K8 = 11121	38	0,11					41
K9 = 11112	37	0,19		16			
K10 = 11101	44	0,11			39	83	27
K11 = 11102	94	11,33					28

\*: ver nota al pie (37)

Al comparar los resultados que obtuve con los reportados por los tres investigadores, llama la atención que sus porcentajes de éxito tienen más similitud con los máximos posibles que con los mínimos seguros. Aquí cabe preguntarse si eso se debe a una mayor laxitud en la interpretación realizada por ellos, o a una diferencia en las capacidades de los sujetos estudiados. Llama también la atención que los niños de los estudios de Falk et al. y de Noelting tienen mejores rendimientos que los estudiantes universitarios de este estudio; asimismo, los resultados aquí reportados tienen más similitud con los estudiantes de preparatoria estudiados por Maury que con los de licenciatura.

Por otra parte, lo más comparable es tal vez el orden en que quedan resueltas las diferentes combinaciones. Con la excepción de K7, los resultados reportados aquí tienen bastante similitud en cuanto a ese orden con los resultados de Noelting; es interesante recordar que ese estudio no es probabilístico sino de razonamiento proporcional en un sentido estricto. Al comparar con Maury, las principales diferencias están en K10, donde ella obtuvo mejores resultados que yo. Globalmente hablando, los resultados que obtuve tienen semejanzas en este sentido con los reportados por Falk et al.

37. Las combinaciones K3, K5 y K7 de Noelting adolecen de lo que en diseño experimental recibe el nombre de "factores confundidos": sólo están probadas en ubicaciones de la forma U2.j, lo que las facilita.



## ANALISIS DE LOS RESULTADOS

7.1.3. ANALISIS CONJUNTO DE UBICACIONES Y COMBINACIONES

En los dos apartados anteriores hemos visto qué ubicaciones son más fáciles de resolver que otras, y qué combinaciones son más fáciles que otras. Sin embargo, aunque como el lector recordará no todas las combinaciones existen en todas las ubicaciones ni todas las ubicaciones en todas las combinaciones (38), vale la pena preguntarse qué tipo de facilidad tiene más arraigo: ¿qué es más fácil, una situación con una ubicación fácil y una combinación difícil (digamos, U2.2 en K6), o una con una ubicación difícil y una combinación fácil (digamos U3.4 en K1)?

En la tabla de la siguiente página aparecen todas las situaciones de combinación y ubicación que fueron probadas en los experimentos aquí reportados, en un orden aproximado de dificultad.

El orden en que aparecen en la tabla las diferentes combinaciones no corresponde ni al de las ubicaciones ni al de las combinaciones, sino a un híbrido entre los dos. Como lo he señalado en la tabla, se pueden distinguir seis grandes niveles agrupados a su vez en tres "hiperniveles". La manera de llegar a ellos ha sido mediante un análisis cualitativo similar al realizado para definir grupos de combinaciones al final del apartado anterior, tomando en cuenta para cada situación los porcentajes de éxito mínimo y máximo, la diferencia entre ambos, el número de respuestas disponibles en ella y el conocimiento del tipo de estrategias más típicas.

---

38. Cf. §3.2.1.3.c)

situaciones	n	mín, máx	resp. correcta			resp. incor.				
			tot	si	jc	jp	ji	tot	si	ji
K2 U2.1	16	100, 100	16	0	16	0	0	0	0	0
K3 U1.3	60	98, 98	59	0	59	0	0	1	1	0
K12 U3.1	54	89, 94	51	3	48	0	0	3	0	3
K4 U2.1	39	97, 97	38	0	38	0	0	1	1	0
K3 U2.1	57	91, 93	53	1	52	0	0	4	3	1
K2 U1.1	4	0, 100	4	4	0	0	0	0	0	0
K2 U1.3	4	0, 100	4	4	0	0	0	0	0	0
K5 U2.5	43	86, 93	40	3	37	0	0	3	1	2
K9 U3.5	16	69, 69	12	0	11	0	1	4	1	3
K3 U2.5	44	68, 98	43	4	30	9	0	1	1	0
K13 U3.5	63	57, 76	48	12	36	0	0	15	0	15
K11 U3.5	4	25, 100	4	3	1	0	0	0	0	0
K7 U2.4	6	67, 67	4	0	4	0	0	2	0	2
K5 U2.3	14	64, 100	14	5	9	0	0	0	0	0
K3 U2.2	57	51, 91	52	15	29	8	0	5	4	1
K2 U2.2	4	50, 100	4	2	2	0	0	0	0	0
K5 U2.2	109	43, 93	94	31	47	15	1	15	8	7
K5 U2.4	14	43, 86	12	3	6	3	0	2	0	2
K0 U3.3	59	42, 92	55	20	25	9	1	4	4	0
K4 U2.4	144	33, 77	116	41	47	23	5	28	12	16
K6 U2.2	15	33, 60	12	4	5	0	3	3	1	2
K6 U2.3	22	32, 45	16	3	7	0	6	6	1	5
K3 U2.3	10	30, 100	10	7	3	0	0	0	0	0
K4 U2.3	15	27, 100	15	8	4	3	0	0	0	0
K3 U2.4	10	20, 100	10	5	2	3	0	0	0	0
K7 U2.3	10	20, 40	7	2	2	0	3	3	1	2
K6 U2.4	14	7, 43	11	5	1	0	5	3	0	3
K1 U2.3	4	0, 100	4	4	0	0	0	0	0	0
K2 U2.3	4	0, 100	4	4	0	0	0	0	0	0
K16 U3.3	86	37, 53	46	14	32	0	0	40	7	33
K15 U3.4	43	23, 37	24	6	10	0	8	19	6	13
K14 U3.2	124	23, 35	65	15	29	0	21	59	11	48
K5 U3.4	1	100, 100	1	0	1	0	0	0	0	0
K1 U3.2	5	20, 100	5	2	1	2	0	0	0	0
K4 U3.4	93	17, 49	54	18	16	15	5	39	14	25
K6 U3.4	10	10, 30	6	2	1	0	3	4	1	3
K1 U3.4	19	11, 68	19	8	2	3	6	0	0	0
K2 U3.2	17	0, 53	14	6	0	3	5	3	0	3
K4 U3.2	2	0, 50	1	0	0	1	0	1	0	1
K5 U3.2	7	0, 43	4	3	0	0	1	3	1	2
K6 U3.2	6	0, 33	5	2	0	0	3	1	1	0
K7 U3.4	5	0, 40	4	2	0	0	2	1	0	1
K7 U3.2	2	0, 0	2	0	0	0	2	0	0	0
K3 U3.2	1	0, 0	0	0	0	0	2	1	0	1
K11 U3.4	94	11, 33	50	21	10	0	19	44	11	33
K9 U3.4	37	0, 19	19	7	0	0	12	18	1	17
K10 U3.2	44	0, 11	20	5	0	0	15	24	3	21
K8 U3.2	38	0, 11	14	4	0	0	10	24	2	22

Los seis niveles son:

- I: situaciones con imposibilidades: ubicaciones U1.1, U1.3, U2.1, U3.1 (incluyendo la doble imposibilidad de K12/U3.1 y la situación de imposibilidad-certeza de U1.3);
- II: situaciones con certezas (excluyendo la situación de imposibilidad-certeza de U1.3): ubicaciones U1.5, U2.5, U3.5 (incluyendo la doble certeza de K13/U3.5);
- III: situación de identidad (combinación K0) y situaciones de tipo "pierdo-gano", "pierdo-empato" y "empato-gano" (ubicaciones U2.3, U2.2, U2.4);
- IV: situaciones de proporcionalidad sin imposibilidades, certezas ni conjuntos idénticos: combinaciones K14, K15, K16;
- V: situaciones de tipo "pierdo-pierdo" o "gano-gano" (ubicaciones U3.2 y U3.4) en combinaciones no discriminantes o "de una variable": K1, K2, K3, K4, K5;
- VI: situaciones de tipo "pierdo-pierdo" o "gano-gano" (ubicaciones U3.2 y U3.4) en combinaciones "de dos variables": K6, K7, K8, K9, K10, K11.

El siguiente esquema representa gráficamente los niveles así definidos:

	U1.1	U3.1	U2.1	U3.1	U1.3	U1.5	U3.5	U2.5	U3.5	U2.3	U2.2	U2.4	U3.3	U3.2	U3.4	U3.2	U3.4
K12	85 84																
K13							57 76										
K0													42 52				
K16													35 37				
K15			I				II						III	IV	23 35		
K14															23 37		
K3			91 93		85 88			69 99		38 189	51 91	28 188				8 8	
K5								86 93		64 166	43 83	43 86				8 43	189 188
K4			97 97							27 166		33 77				8 86	17 49
K1										8 166						28 166	11 69
K2	8 166		166 166		8 166					8 166	88 166					8 53	
K6										32 45	33 68	7 43				8 33	18 38
K7										28 48		67 67				8 8	8 48
K9								69 69								8 19	
K11								25 166								11 33	
K8																8 11	
K10																8 11	

En el esquema se han puesto todas las combinaciones como renglones y las ubicaciones como columnas (separando, como se hizo en el análisis de ubicaciones, los casos de proporcionalidad; éstos aparecen marcados con un asterisco). Los cruces de ambos tipos de situación que no existen aparecen sombreados en color oscuro. Con sombra clara aparecen las situaciones de combinación y ubicación que, aunque sí son factibles, no fueron probadas en ninguno de los experimentos aquí reportados. Con fondo blanco aparecen las situaciones que sí fueron probadas; los números que aparecen en ellas corresponden a los porcentajes de éxito mínimo seguro (parte superior de cada cuadro) y máximo posible (parte inferior). Cuando el número de respuestas obtenidas para una situación es muy pequeño (menor o igual que 4) el cuadro aparece cruzado por una línea diagonal, para indicar que su confiabilidad es menor que la de situaciones con más respuestas.

Algunas observaciones acerca de esta nueva clasificación por niveles de dificultad:

1. Los niveles se han definido incluyendo las situaciones que pueden existir pero de las que no se cuenta con ninguna información ("faltantes"). Esta es, evidentemente, una inferencia que debe ser ratificada o rectificada mediante nuevos datos experimentales, aunque se ha realizado a partir del análisis de los resultados de las situaciones más cercanas (en ubicación y/o combinación). Se observará que las situaciones "faltantes" están más o menos homogéneamente distribuidas en el cuadro, por lo que siempre hay otras situaciones cercanas sí probadas, con la eventual salvedad de la ubicación U1.5 (de la que no se planteó ninguna pregunta, pero que presenta una situación similar a U2.5 y U3.5),
  2. La clasificación obtenida mezcla los dos principales tipos de categorías para las situaciones, aunque permite ubicar a las combinaciones y las ubicaciones dentro de cada nivel. Algunas combinaciones y ubicaciones pertenecen enteras a un nivel; otras, como K6 y K7, están repartidas en dos o más niveles.
  3. Las categorías piagetianas corresponden a los siguientes niveles: las preguntas P1 a P5 con imposibilidades y certezas quedan en los niveles I y II <sup>(39)</sup>; la pregunta P6 (conjuntos idénticos), en el nivel III; la pregunta P7 conforma el nivel VI; las preguntas P8, P9 y P9' ("de una variable") están en el nivel III; la pregunta P10 ("de dos variables" sin proporcionalidad) está repartida en los niveles III, V y VI.
- 
- <sup>39</sup>. P1, doble imposibilidad, en el nivel I; P2, doble certeza, en el II; P3, certeza-imposibilidad, en el I; P4, posibilidad-certeza, en el II; P5, posibilidad-imposibilidad, en el I: como se vio en el análisis de las ubicaciones, las situaciones con imposibilidades son mucho más fáciles que las que implican alguna certeza.

4. Las mayores diferencias entre estos niveles están entre el II y el III y entre el V y el VI, de modo que se pueden definir los siguientes "hiperniveles":  
 preguntas fáciles: niveles I y II  
 preguntas de mediana dificultad: niveles III, IV y V  
 preguntas difíciles: nivel VI
5. Para los seis niveles, los porcentajes mínimo y máximo de éxito y la diferencia entre ambos son los que se indican en la siguiente tabla:

niveles	n	mín,máx	dif
I	234	91,95	4
II	170	68,86	18
III	511	37,81	44
IV	253	28,42	14
V	145	14,56	42
VI	236	4,22	18

Así, si la diferencia entre los dos tipos de porcentaje es un indicador de la dificultad con que se pueden topar los sujetos que eligen acertadamente para justificar su decisión, aparentemente los niveles de expresión más difíciles son el III y el V, es decir, los que corresponden a las combinaciones K1 a K5 (y K6, K7 en U2.2, U2.3, U2.4). Sin embargo, recordemos que es justamente en estas combinaciones donde las justificaciones potencialmente incompletas contribuyen a que esta diferencia aparezca como exageradamente alta.

#### 7.1.4. OTRAS VARIABLES DE SITUACION

Además de las ubicaciones y las combinaciones, con las que trabajé a profundidad desde el tercer experimento, fueron incluidas en la construcción presentada en el capítulo 3 otras variables de situación: las de perceptividad, los unos y las dos variables de multiplicidad. Aunque estas variables no fueron incluidas explícitamente en el diseño de ninguno de los cinco experimentos realizados, podremos obtener una idea general de su efecto en las respuestas de los sujetos.

Se analizarán en este apartado los efectos de las variables de perceptividad y de multiplicidad. Los unos fueron planteados con dos fines: para estudiar la presencia de estrategias primitivas del tipo de {F1}, y como contribución a las variables de multiplicidad. El segundo fin quedará cubierto en el análisis de las variables de multiplicidad, y el primero se verá en el análisis por estrategias.

## 7.1.4.1. PERCEPTIVIDAD

Las cuatro variables de perceptividad fueron definidas respectivamente como la distancia entre ambas probabilidades y la mínima distancia de las probabilidades a los puntos 0,  $\frac{1}{2}$ , 1, digamos así:

$$\begin{aligned}\delta_p' &= |p_1 - p_2| \\ \delta_s' &= \min \{ |p_1 - .5|, |p_2 - .5| \} \\ \delta_0' &= \min \{ p_1, p_2 \} \\ \delta_1' &= \min \{ (1-p_1), (1-p_2) \},\end{aligned}$$

con la salvedad de que no fueron manejadas numéricamente sino por categorías; es decir, para cada una de las cuatro variables,

$$\begin{aligned}\delta &= N \text{ si } \delta' = 0 && \text{(diferencia "nula")}, \\ \delta &= C \text{ si } 0 < \delta' \leq 0.1 && \text{(diferencia "chica")}, \\ \delta &= M \text{ si } 0.1 < \delta' < 0.3 && \text{(diferencia "mediana")}, \\ \delta &= G \text{ si } \delta' \geq 0.3 && \text{(diferencia "grande").}\end{aligned}$$

Los valores  $\delta = N$  de cada una de las cuatro variables están intrínsecamente asociados con definiciones de combinaciones y/o ubicaciones (<sup>40</sup>), por lo que quedan siempre asociados con los niveles más fáciles (según fueron definidos en la pág. 387):  $\delta_p = N$  y  $\delta_s = N$  ocurren sólo en los niveles I a IV,  $\delta_0 = N$  en el I y  $\delta_1 = N$  en los niveles I y II. Sin embargo, estos valores de las variables de perceptividad no son los únicos que quedaron asociados a niveles de dificultad, debido a la falta de consideración de estas variables en el diseño de los cuestionarios. En la siguiente tabla se puede ver que, al considerar todas las respuestas (no canceladas) a las preguntas sin  $\delta = N$ , las preguntas de los niveles (nv) más bajos tienden a coincidir con los valores altos de las cuatro variables (<sup>41</sup>). Por ello, sería un error considerar globalmente los resultados obtenidos con cada una de estas variables.

	$\delta_p$				$\delta_s$				$\delta_0$				$\delta_1$			
	N	C	M	G	N	C	M	G	N	C	M	G	N	C	M	G
I	54	0	0	180	112	0	4	118	234	0	0	0	64	0	4	166
II	63	0	20	87	87	0	0	83	0	0	0	170	170	0	0	0
III	59	81	327	44	432	64	15	0	0	4	65	442	0	0	28	483
IV	253	0	0	0	86	0	161	6	0	0	34	219	0	0	16	237
V	0	96	45	4	0	45	100	0	0	0	26	119	0	4	109	32
VI	0	213	23	0	0	133	103	0	0	0	21	215	0	0	44	192

<sup>40</sup>. La asociación es la siguiente:  $\delta_p = N$  ocurre en todas las combinaciones de proporcionalidad (K0 y K12 a K16) y sólo en ellas; análogamente  $\delta_s = N$  está asociado con las ubicaciones de la forma U2.j,  $\delta_0 = N$  con U1.3 y todas las ubicaciones de la forma U1.1, y  $\delta_1 = N$  con U1.3 y todas las ubicaciones de la forma U1.5.

<sup>41</sup>. Los valores de ji-cuadrada son respectivamente 1255.71, 1868.28, 38.47 y 517.59, todos ellos altamente significativos ( $p < .005$ ).

Entonces, cada una de las cuatro variables será analizada en cada uno de los seis niveles definidos. En cada caso, se muestran los porcentajes de éxito mínimo seguro y máximo posible en cada uno de los valores que puede tomar la variable. Se muestra también el número de respuestas ( $n$ ) sobre el que se calcularon esos porcentajes, porque las conclusiones están basadas mucho más en los casos con  $n$  grande que en los que tienen  $n$  pequeña.

La variable  $\delta_p$  está relacionada con la hipótesis de que a nivel intuitivo uno de los factores que intervienen en la resolución de los problemas planteados, sea una percepción muy global de la diferencia entre las dos probabilidades matemáticas  $p_1=f_1/n_1$  y  $p_2=f_2/n_2$ . Si esto es cierto, los problemas planteados son más fáciles de resolver mientras mayor sea la diferencia  $\delta_p$  entre las dos probabilidades matemáticas; esto fue planteado ya así en el capítulo 3:

H10.3.1: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con mayor  $\delta_p$  que con menor  $\delta_p$ .

Los resultados para  $\delta_p$  son:

	$\delta_p = N$		$\delta_p = C$		$\delta_p = M$		$\delta_p = G$	
niv	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max
I	54	89,94	0	---,--	0	---,--	180	92,97
II	63	7,76	0	---,--	20	60,75	87	77,95
III	59	42,92	81	38,75	327	37,80	44	34,89
IV	253	28,42	0	---,--	0	---,--	0	---,--
V	0	---,--	96	17,52	45	9,62	4	0,75
VI	0	---,--	213	5,22	23	0,26	0	---,--

De acuerdo con la hipótesis H10.3.1, esperaríamos, en cada renglón de la tabla, mayores porcentajes en las columnas de la derecha. Aunque esto no ocurre sistemáticamente en los porcentajes mínimos seguros (salvo en el nivel II), sí ocurre para los valores  $\delta_p = C$  a  $G$  en los porcentajes máximos posibles. Esto parece indicar que hay una asociación entre las distancias cada vez más grandes entre  $p_1$  y  $p_2$  y la elección correcta pero con expresión insuficiente, lo que parece apoyar la hipótesis de que la percepción de la distancia contribuye a la valoración intuitiva del arreglo en cuestión.

Por otra parte, la hipótesis acerca de la variable  $\delta_s$  está relacionada con algunas de las estrategias de equilibrio: si la manera de resolver los problemas planteados pasa por buscar si hay una situación de "pierdo-empato" o "empato-gano", entonces también deben ser fáciles los problemas "similares" a una de esas situaciones. Como la variable  $\delta_s$  mide la diferencia entre .5 y la más cercana a .5 de  $p_1$  y  $p_2$ , la hipótesis correspondiente se puede entonces plantear como sigue:

H10.3.2: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con menor  $\delta_s$  que con mayor  $\delta_s$ .

	$\delta_5 = N$		$\delta_5 = C$		$\delta_5 = M$		$\delta_5 = G$	
niv	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max
I	112	95,96	0	--,--	4	0,100	118	91,97
II	87	77,95	0	--,--	0	--,--	83	58,76
III	432	39,82	64	30,75	15	27,87	0	--,--
IV	86	37,53	0	--,--	161	24,37	6	0,0
V	0	--,--	45	7,67	100	17,51	0	--,--
VI	0	--,--	133	7,27	103	1,17	0	--,--

También en este caso los porcentajes máximos posibles apoyan a la hipótesis planteada más que los mínimos seguros: en general hay, en cada renglón, porcentajes más altos en las columnas de la izquierda que en las de la derecha, y esto es más notorio en los porcentajes máximos posibles (salvo en el nivel III). Parece plausible que la percepción de que una de las dos probabilidades se acerca a  $\frac{1}{2}$  puede ayudar a resolver correctamente el problema.

Las variables  $\delta_0$  y  $\delta_1$  son semejantes a  $\delta_5$  salvo que lo que miden no es la distancia de .5 a la probabilidad más cercana, sino, respectivamente, la distancia de 0 y de 1 a la probabilidad más cercana. Las hipótesis respectivas se refieren a la facilidad con que se pueda reconocer una situación como "casi imposible" (y por lo tanto no deseable) o como "casi segura" (y por lo tanto muy deseable). Estas hipótesis son:

H10.3.3: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con menor  $\delta_0$  que con mayor  $\delta_0$ ;

H10.3.4: Los sujetos tienden a resolver mejor las preguntas con menor  $\delta_1$  que con mayor  $\delta_1$ .

En estos casos esperaríamos, como para  $\delta_5$ , mayores porcentajes en cada renglón en las columnas de la izquierda que en las de la derecha. Sin embargo, aquí hay menos evidencia a favor de estas hipótesis de lo que había ahí a favor de aquélla. En algunos renglones parecería incluso que la hipótesis apoyada sería la inversa: mejores resultados mientras mayores son las diferencias con respecto al 0 y al 1.

	$\delta_0 = N$		$\delta_0 = C$		$\delta_0 = M$		$\delta_0 = G$	
niv	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max
I	234	91,96	0	--,--	0	--,--	0	--,--
II	0	--,--	0	--,--	0	--,--	170	68,86
III	0	--,--	4	50,100	65	48,86	442	36,81
IV	0	--,--	0	--,--	34	21,26	219	29,44
V	0	--,--	0	--,--	26	4,54	119	16,56
VI	0	--,--	0	--,--	21	0,19	215	5,23



	$\delta_1 = N$		$\delta_1 = C$		$\delta_1 = M$		$\delta_1 = G$	
niv	n mín,max		n mín,max		n mín,max		n mín,max	
I	64	92,98	0	--,--	4	0,100	166	93,95
II	170	68,86	0	--,--	0	--,--	0	--,--
III	0	--,--	0	--,--	28	36,96	483	37,81
IV	0	--,--	0	--,--	16	25,31	237	28,43
V	0	--,--	4	0, 0	109	17,55	32	3,56
VI	0	--,--	0	--,--	44	2,18	192	5,23

En conclusión, a pesar de que estas variables no fueron incluidas explícitamente en el diseño de los cuestionarios, puede pensarse que los resultados apoyan la hipótesis de que la percepción global de la situación presentada en un problema puede estar teniendo un papel en su resolución, cuando la percepción se refiere a la diferencia entre ambas probabilidades y a su ubicación o distancia con respecto al punto medio  $\frac{1}{2}$ , y no cuando se refiere a la distancia con respecto a los puntos extremos 0 y 1. Sea como fuere, estas conclusiones no pueden tomarse más que a título tentativo: estas variables deberían ser estudiadas explícitamente, en particular mediante su consideración en el diseño de los cuestionarios utilizados.

Estos resultados van en el mismo sentido que los reportados por Hoemann y Ross (1971) en sus experimentos con niños y ruletas y conjuntos discretos. Ellos obtuvieron, en general, mejores resultados mientras mayor era la diferencia entre ambas probabilidades. Así, por ejemplo, para los conjuntos discretos encuentran los siguientes porcentajes de éxito en K3, para  $\delta_p=1/2$ ,  $\delta_p=1/4$  y  $\delta_p=1/8$ : respectivamente 82%, 78%, 73% a los 7 años, y 92%, 86%, 84% a los 11 años (42).

#### 7.1.4.2. MULTIPLICIDAD

Las dos variables de multiplicidad fueron definidas como una medida de la facilidad con la que se pueden detectar múltiplos entre los elementos de un arreglo. Para caracterizar a cada arreglo, se definió la variable  $D$  para la multiplicidad de tipo DEN-

42. Estos porcentajes pueden sorprender no tanto porque apoyan la hipótesis de intuición perceptual sino por lo elevados que son: los sujetos con los que yo trabajé llegan a los porcentajes mínimo y máximo de 44% y 92% en K3. Hoemann y Ross no inquieran acerca de las razones por las que un sujeto elige un conjunto u otro, por lo que metodológicamente sus porcentajes se parecen más a mis "máximos posibles" que a mis "mínimos seguros". Así, los resultados de los niños de 11 años con los que ellos trabajaron parecen estar al mismo nivel que los de los adultos jóvenes con los que yo trabajé, al menos en este muy particular tipo de preguntas.

TRO y la variable E para la multiplicidad de tipo ENTRE. Los valores que toman estas variables son:

- D=1 si se puede decir "en este espacio hay tantos favorables por cada desfavorable" (o viceversa), lo que ocurre si algún favorable o desfavorable es igual a 1, o si en algún espacio hay tantos favorables como desfavorables; es decir,  $D=1$  si  $U_f=1$ ,  $U_d=1$ ,  $f_1=d_1$  o  $f_2=d_2$ ,
- D=2 ó 3 si se puede decir algo del estilo de "en este espacio hay el doble (triple) de favorables que de desfavorables" (o viceversa), es decir  $D=k$  con k entero y  $k>1$  si no hay unos y si  $f_1=kd_1$ ,  $d_1=kf_1$ ,  $f_2=kd_2$  ó  $d_2=kf_2$ ,
- D=0 si no hay relaciones directas de multiplicidad dentro de algún espacio, es decir si no existe un entero k tal que  $f_1=kd_1$ ,  $d_1=kf_1$ ,  $f_2=kd_2$  ó  $d_2=kf_2$ ,
- E=1 si se puede decir "en los (des)favorables hay tantos de este espacio por cada uno del otro", lo que ocurre si  $U_f=1$ ,  $U_d=1$ ,  $f_1=f_2$  o  $d_1=d_2$ ,
- E=2 ó 3 si se puede decir algo del estilo de "los (des)favorables de este espacio son el doble (triple) que los del otro", es decir  $E=k$  con k entero y  $k>1$  si no hay unos y si  $f_1=kf_2$ ,  $f_2=kf_1$ ,  $d_1=kd_2$  ó  $d_2=kd_1$ ,
- E=0 si no hay relaciones directas de multiplicidad entre los espacios, es decir si no existe un entero k tal que  $f_1=kf_2$ ,  $f_2=kf_1$ ,  $d_1=kd_2$  ó  $d_2=kd_1$ .

Cómo en el caso de las variables de perceptividad, estos valores de ambas variables de multiplicidad quedaron asociados con las situaciones según sus niveles de dificultad, en parte por construcción (todas las ubicaciones U2.j tienen D=1, mientras que K4, K5, K12 y K13 tienen E=1), y en parte porque las variables no fueron consideradas para el diseño de los cuestionarios. La asociación, que se puede apreciar en la siguiente tabla (43), determina que el análisis se hará, como para las variables de perceptividad, por cada nivel.

nivel	multiplicidad dentro			multiplicidad entre		
	D=1	D≥2	D=0	E=1	E≥2	E=0
I	78	156	0	78	156	0
II	107	63	0	107	51	12
III	422	81	8	420	87	4
IV	242	0	11	159	36	58
V	121	22	2	128	17	0
VI	205	31	0	205	31	0

Para cada variable, la hipótesis es que mientras más "detectables" sean las relaciones de multiplicidad, habrá mejores resultados:

43. Los valores de ji-cuadrada son 400.73 para D y 240.95 para E; ambos son altamente significativos ( $p<.005$ ).

- H10.5.1: Los sujetos tienden a resolver mejor y utilizando estrategias de proporcionalidad las preguntas en las que  $D=1$  que en las que  $D>1$ , y en éstas mejor que en las que  $D=0$ ;
- H10.5.2: Los sujetos tienden a resolver mejor y utilizando estrategias de proporcionalidad las preguntas en las que  $E=1$  que en las que  $E>1$ , y en éstas mejor que en las que  $E=0$ .

	D=1		D≥2		D=0	
niv	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max
I	78	87,94	0	--,--	156	93,97
II	107	74,92	0	--,--	63	57,76
III	422	36,82	8	0,100	81	51,78
IV	242	27,42	11	45,45	0	--,--
V	121	17,59	2	0,100	22	0,36
VI	205	5,22	0	--,--	31	0,16

	E=1		E≥2		E=0	
niv	n	mín,max	n	mín,max	n	mín,max
I	78	87,94	0	--,--	156	93,97
II	107	74,92	12	71,71	51	0,100
III	420	36,82	4	45,79	87	0,100
IV	159	23,36	58	34,48	36	42,56
V	128	16,60	0	--,--	17	--,--
VI	205	5,22	0	--,--	31	--,--

De acuerdo con las hipótesis, se esperarían mejores resultados en la parte izquierda que en la derecha de cada tabla, en cada renglón. Esto ocurre para la multiplicidad DENTRO en los porcentajes máximos posibles aunque no tan claramente en los mínimos seguros, lo que podría indicar que si la multiplicidad es percibida no resulta fácil de expresar. En cuanto a la multiplicidad ENTRE, los datos más bien parecerían apoyar la hipótesis contraria a la planteada, puesto que en general hay porcentajes (mínimos y máximos) ligeramente mayores cuando no hay multiplicidades ENTRE o las hay con dobles o triples que cuando  $E=1$ .

Por otra parte, como las variables de multiplicidad están diseñadas para medir la "detectabilidad" de los múltiplos existentes en un arreglo, conviene verificar si los valores distintos de cero de estas variables favorecen el uso de alguna estrategia de razonamiento proporcional. Esto se puede apreciar en la siguiente tabla, en la que "P" se refiere al número de respuestas en que se utiliza alguna estrategia de proporcionalidad, ya sea {P+}, {P=} o {P'} como estrategias simples o en composiciones, inclusive en composiciones del estilo {N- \* P=} donde {P=} resulta dominada por {N-}, porque lo que se trata de averiguar es si el sujeto detectó la posibilidad de establecer una relación de

carácter multiplicativo y no si la utilizó adecuadamente. Las columnas n son el número total de respuestas (no canceladas) con las características especificadas, y las columnas % están calculadas como  $(P/n) \times 100$ . Los grupos de columnas aquí irían de la mayor detectabilidad ( $D=1$  y  $E=1$ ) a la menor detectabilidad ( $D=0$  y  $E=0$ ).

niv	D=1 y E=1			D≥1 y E≥1			D=0 ó E=0			D=0 y E=0		
	n	P	%	n	P	%	n	P	%	n	P	%
1	78	10	13	0	0	0	0	0	0	156	32	21
2	107	28	26	0	0	0	12	0	0	51	15	29
3	416	62	15	4	0	0	10	0	0	77	3	4
4	159	42	26	58	24	41	36	22	61	0	0	0
5	121	16	13	2	0	0	5	0	0	17	0	0
6	205	21	10	0	0	0	0	0	0	31	0	0

Se esperarían, pues, mayores porcentajes de utilización de estrategias de proporcionalidad en los grupos de la izquierda que en los de la derecha, lo que no ocurre en ningún caso.

En conclusión, las variables de multiplicidad no arrojaron ninguna luz acerca de la facilidad con la que los sujetos pueden detectar los múltiplos existentes en un arreglo, con la eventual salvedad de las multiplicidades de tipo DENTRO en las respuestas sin interpretación. Esto puede deberse a alguna de las siguientes explicaciones, o incluso a una combinación de ambas:

- la detectabilidad de las multiplicidades sí es determinante en la facilidad con la que se puede recurrir a un razonamiento proporcional, pero esto no es visible con estos datos por las características de los cuestionarios: como estas variables no fueron incluidas en el diseño, las preguntas planteadas en los sucesivos cuestionarios no reflejaron la variedad de valores de  $D$  y  $E$  para cada combinación y ubicación que se puede apreciar en el Anexo 2;
- el uso de estrategias de proporcionalidad depende mucho más del sujeto que de la situación a que se enfrenta: estos, los sujetos que disponen de estas estrategias las utilizan independientemente de la detectabilidad de las multiplicidades, y los que no disponen de ellas no las utilizan aunque el arreglo tenga  $D=1$  y  $E=1$ .

## 7.2. ANALISIS POR ESTRATEGIAS

En esta tercera sección del capítulo emprenderemos el estudio de las diferentes estrategias utilizadas por los sujetos. El análisis se basará en buena parte en los resultados numéricos

reportados en el Anexo 6, así como en un análisis de tipo más cualitativo.

La sección consiste en tres apartados. En primer lugar, se hará una descripción general de la cantidad de veces que aparece, en las justificaciones de los sujetos, cada una de las estrategias identificadas en el capítulo 4, tanto como estrategias simples como en composiciones. Después se abordarán, a través de un análisis de las estrategias compuestas, una serie de características de las diferentes estrategias. Finalmente, se enfocarán algunas situaciones específicas de interés para las estrategias que en ellas se presentan.

### 7.2.1. DISTRIBUCION GENERAL

Para el análisis de la ocurrencia de las estrategias he dispuesto la información pertinente en el siguiente cuadro. Para cada estrategia, señalo el número de "posibilidades", es decir, la cantidad de arreglos en las que pudo presentarse la estrategia (por ejemplo: de los 1144 arreglos que aquí analizo, 198 correspondieron a la combinación  $K3=01211$  y 35 a  $K0=00000$ , que son aquellas en las que  $n_1=n_2$  y por ende en las que pudo expresarse la estrategia  $\{N=\}$ ; en las 911 restantes pudieron manifestarse las estrategias  $\{N-\}$  ó  $\{N+\}$ ). Las siguientes columnas de la tabla señalan las respuestas en las que la estrategia se manifestó como única estrategia de un razonamiento (U), como estrategia dominante (V) o como estrategia dominada (W). Además he agregado los porcentajes correspondientes a la aparición de la estrategia como única y como dominante y los porcentajes correspondientes al total de apariciones.

Globalmente hablando, la familia de estrategias más frecuentemente utilizada es la de centraciones en los casos favorables,  $\{F\}$  (38% de todas las respuestas interpretadas utilizan alguna de estas estrategias); esto es debido principalmente a la gran frecuencia con que es utilizada  $\{F+\}$  (44). Mucho después sigue la familia de estrategias de proporcionalidad  $\{P\}$  (24%), seguida de cerca por la familia de estrategias de equilibrio  $\{E\}$  (20%), y la de centraciones en los casos desfavorables  $\{D\}$  (19%). La quinta es la familia de centraciones en los casos posibles  $\{N\}$  (13%), y la última es la familia de estrategias de resta  $\{R\}$  (4%).

44. La centración en los casos favorables es reconocida como uno de los errores más comunes desde el trabajo clásico de Piaget e Inhelder (1951), y muchos investigadores lo siguen reportando así. Por ejemplo, Falk et al. (1980) sostienen que es el error más común entre los niños más pequeños (4 a 6 años). Empero, afirman que ese error desaparece hacia los 10 u 11 años, lo cual contradice flagrantemente los resultados hallados aquí (la afirmación viene de una inferencia demasiado liberal a partir de sus resultados, porque en realidad, como trataron con niños pequeños, no recogieron sus justificaciones).

En dos de las familias el miembro más frecuente es la estrategia de igualdad ( $\{P=\}$  y  $\{R=\}$ ); en otras dos la estrategia de igualdad es la menos frecuente ( $\{N=\}$  y  $\{E=\}$ ); en otras dos la estrategia de igualdad es aproximadamente tan utilizada como la estrategia de elección de un lado ( $\{F=\}$  y  $\{D=\}$ ).

Estrategia	posibilidades	única (U)	dominante (V)	(U+V)	dominada (W)	(U+V+W)
$\{N-\}$	911	54 (6%)	40 (4%)	(10%)	22 (2%)	(13%)
$\{N=\}$	233	3 (1%)	7 (3%)	(4%)	11 (5%)	(9%)
$\{N+\}$	911	6 (1%)	9 (4%)	(2%)	1 (*)	(2%)
$\{N\}$	1144	63 (6%)	56 (5%)	(10%)	34 (3%)	(13%)
$\{F+\}$	925	235 (25%)	69 (7%)	(33%)	27 (3%)	(36%)
$\{F=\}$	219	57 (26%)	21 (10%)	(36%)	11 (5%)	(41%)
$\{F-\}$	925	6 (1%)		(1%)		(1%)
$\{F1\}$	502	3 (1%)		(1%)	2 (*)	(1%)
$\{F\}$	1144	301 (26%)	90 (8%)	(34%)	40 (3%)	(38%)
$\{D-\}$	859	97 (11%)	38 (4%)	(16%)	8 (1%)	(17%)
$\{D=\}$	285	33 (12%)	16 (6%)	(17%)	19 (7%)	(24%)
$\{D+\}$	859	2 (*)		(*)		(*)
$\{D\}$	1144	132 (12%)	54 (5%)	(16%)	27 (2%)	(19%)
$\{E<>\}$	44	22 (50%)	2 (5%)	(55%)	3 (7%)	(61%)
$\{E<\}$	227	48 (21%)	3 (1%)	(22%)	1 (*)	(23%)
$\{E>\}$	200	29 (15%)	1 (1%)	(15%)	1 (1%)	(16%)
$\{E=\}$	396	66 (17%)	10 (3%)	(19%)	32 (8%)	(27%)
$\{E5\}$	122	6 (5%)	3 (2%)	(7%)	1 (1%)	(8%)
$\{E\}$	1144	171 (15%)	19 (2%)	(17%)	38 (3%)	(20%)
$\{R+\}$	945	18 (2%)	6 (1%)	(3%)	2 (*)	(3%)
$\{R=\}$	199	11 (6%)		(6%)	4 (2%)	(8%)
$\{R-\}$	945	2 (*)		(*)		(*)
$\{R\}$	1144	31 (3%)	6 (1%)	(3%)	6 (1%)	(4%)
$\{P+\}$	813	133 (16%)	2 (*)	(17%)		(17%)
$\{P=\}$	331	93 (28%)	5 (2%)	(30%)	10 (3%)	(33%)
$\{P'\}$	1144	32 (3%)		(3%)		(3%)
$\{P\}$	1144	258 (23%)	7 (1%)	(23%)	10 (1%)	(24%)

Todos los porcentajes están calculados sobre el número de posibilidades; los espacios en blanco corresponden a ceros. (\*): menos de 1%

Entre las estrategias que llevan a la elección de un lado, la más popular (como estrategia simple o como dominante) es la estrategia de equilibrio  $\{E<>\}$ , seguida de la centración en casos favorables  $\{F+\}$ . Luego siguen  $\{E<\}$ ,  $\{P+\}$ ,  $\{D-\}$ ,  $\{E>\}$  y  $\{N-\}$ . A la zaga,  $\{R+\}$ . Estas estrategias aparecen en composiciones sólo en contadas ocasiones; las más frecuentemente compuestas son  $\{E<>\}$  y  $\{F+\}$ .

La estrategia de igualdad más utilizada es {F-}; siguen {P=}, {E=} y {D=}, y, con ocurrencias menores de 10%, {N=} y {R=}. En ese mismo orden (salvo por una inversión entre las dos últimas) ocurre que estas mismas estrategias de igualdad aparecen compensadas.

Entre las estrategias primitivas, la más utilizada es {E5} (8.2%); después sigue {N+} (1.8%). Luego están {F-} (0.6%) y {F1} (0.6%), y finalmente {D+} (0.2%) y {R-} (0.2%). Las estrategias {F-}, {D+} y {R-} sólo ocurren como estrategias simples, mientras que las demás se presentan también en composiciones.

### 7.2.2. ESTRATEGIAS COMPUESTAS

tipo de estr.	estra- tegia	ocurre (n)	composic cant %		dominante cant %		dominada cant %	
de elec- ción de un espacio mues- tral	{N-}	116	62	53	40	65	22	35
	{F+}	331	96	28	69	72	27	28
	{D-}	143	46	32	38	83	8	17
	{E<>}	27	5	19	2	40	3	60
	{E<}	52	4	8	3	75	1	25
	{E>}	31	2	6	1	50	1	50
de igual- dad de ambos espacios	{R+}	26	8	31	6	75	2	25
	{P+}	135	2	1	2	100	0	0
	{N=}	21	18	86	7	39	11	61
	{F=}	89	32	36	21	66	11	34
	{D=}	68	35	51	16	46	19	54
primiti- vas y de propor- cionali- dad con error	{E=}	108	42	39	10	24	32	76
	{R=}	15	4	27	0	0	4	100
	{P=}	108	15	14	5	33	10	67
	{N+}	16	10	63	9	90	1	10
	{F-}	6	0	0	--	--	--	--
	{F1}	5	2	40	0	0	2	100
	{D+}	2	0	0	--	--	--	--
	{E5}	10	4	40	3	75	1	25
	{R-}	2	0	0	--	--	--	--
	{P'}	32	0	0	--	--	--	--

Los porcentajes de las composiciones están calculados sobre el número total de ocurrencias; los de dominadas y dominantes sobre el número de ocurrencias en composiciones.

¿Con qué frecuencia interactúa una estrategia con otras?  
¿qué es más frecuente en esos casos, que resulte dominante o

dominada? (45). Esto se puede apreciar en la tabla de la página anterior.

### 7.2.2.1. REACTIVIDAD

La tabla permite apreciar que hay estrategias mucho más "reactivas" que otras: es decir, estrategias que entran en composición más fácilmente que otras.

Entre las estrategias que llevan a la elección de alguno de los dos espacios muestrales podemos distinguir cuatro "escalones". La más reactiva es, sin lugar a dudas, {N-}: más de la mitad de las veces que un sujeto la utiliza, la utiliza en composición con otra(s) estrategia(s). El siguiente escalón lo ocupan, con porcentajes entre 28% y 32%, las estrategias {D-}, {R+} y {F+}. Las tres estrategias de equilibrio conforman el siguiente escalón, con porcentajes de 19% ({E<>}) a 6% ({E>}). Por último, la estrategia {P+} es la menos reactiva de todas: sólo entró en composición con otras estrategias en dos de las respuestas en que apareció (1%) (46).

Las relaciones entre las estrategias de igualdad tienen algunas semejanzas con las anteriores. Hay también cuatro "escalones". El primero está también ocupado por la concentración en casos posibles ({N=}), con 86% (que la hace la estrategia más reactiva de todas), y el último por la estrategia de proporcionalidad ({P=}), con 14%; ambos porcentajes son mucho mayores que sus contrapartes de elección de un espacio. La distribución en los dos escalones intermedios es diferente que en el caso anterior: aquí la que destaca de las demás con un porcentaje más elevado es {D=}, que ocupa el segundo escalón, mientras que el tercero queda ocupado por {E=}, {F=} y {R=}.

Las estrategias primitivas, a las que hemos agregado {P'} para este análisis, son en general menos reactivas que las demás. Sólo ocurren en composiciones {N+} y, ocasionalmente, {F1} y {E5}. Aunque los porcentajes aparecen elevados, hay que tener en cuenta que se calculan sobre bases muy pequeñas: estas estrategias aparecen muy poco, y no se volverán a mencionar en esta parte del análisis.

A mi modo de ver, la reactividad de una estrategia es una medida de lo satisfactoria que le resulta a los sujetos: mientras más reactiva, menos satisfactoria. Es decir, el sujeto percibe en

45. Aunque estas son principalmente las preguntas que guiarán el análisis de las estrategias compuestas, no son necesariamente las únicas que se pueden plantear. Por ejemplo, Maury (1986) estudia también el orden en que aparecen en una argumentación "mixta", los diferentes componentes.
46. Este resultado coincide con una observación en el mismo sentido de Maury (1986), quien basa su afirmación de que la argumentación "favorables sobre posibles" está asociada a un buen dominio de la Probabilidad porque, contrariamente a lo que pasa con otras, ocurre más frecuentemente sola que en respuestas mixtas.



la situación algo que le invita a elegir una estrategia pero, al sentir que ella no le resuelve satisfactoriamente el problema, no la desecha sino que busca otra que la complementa. Vistas bajo esta luz, es comprensible que las estrategias correctas {P+}, {E<>}, {E<} y {E>} sean tan poco reactivas: una vez que un sujeto recurre a ellas, siente que el problema ha sido satisfactoriamente resuelto (47); sin embargo, debe enfatizarse que no es lo mismo satisfactorio que correcto. La estrategia más reactiva es la menos satisfactoria: ente las de elección, {N-} suele ser percibida como insuficiente para resolver los problemas; lo mismo pero en mayor grado ocurre, entre las de igualdad, con {N=}.

Es también comprensible que las estrategias de igualdad tengan, en general, mayores porcentajes de reactividad que sus contrapartes de elección: justamente por el hecho de que no llevan a una decisión "efectiva", es decir a la elección de uno de los dos espacios muestrales, estas estrategias, correctas o incorrectas, son percibidas como insatisfactorias.

Al comparar la "satisfactoriedad" de las estrategias de elección con sus contrapartes de igualdad, se obtienen resultados interesantes. Las más insatisfactorias en ambos casos son las estrategias de la familia de las centraciones en casos posibles: {N-} y {N=}, aunque es mucho más insatisfactoria la segunda que la primera. Las menos insatisfactorias son {P+} y {P-}, lo que sería comprensible si se considera que ambas son estrategias correctas; sin embargo, {P=} es más insatisfactoria que otras estrategias correctas: {E<} y {E>}: es decir, la estrategia de proporcionalidad que lleva a la decisión "da igual" es correcta pero no plenamente satisfactoria. El contraste entre las estrategias de elección y las de igualdad es mucho mayor entre las de equilibrio que entre las demás: {E=} es mucho más insatisfactoria que sus contrapartes {E<>}, {E<} y {E>}, lo cual es reconfortante porque es una estrategia incorrecta. Las estrategias {D-}, {R+} y {F+} y sus contrapartes son medianamente satisfactorias, y no hay entre las de elección y las de igualdad una diferencia importante (todas andan cerca de 30%).

#### 7.2.2.2. DOMINANCIA

La siguiente pregunta es la siguiente: cuando dos estrategias entran en composición una con otra, ¿cuál de las dos domina? Se recordará que dos estrategias  $E_1$  y  $E_2$  pueden interactuar de las siguientes maneras:

- las dos dominan (no hay dominadas): es la conjunción  $E_1 \& E_2$  (equivalente a  $E_2 \& E_1$ );
- $E_1$  domina a  $E_2$ : si  $E_2$  es de elección, se trata de la exclusión  $E_1 \neg E_2$ ; si es de igualdad, de la compensación  $E_1 * E_2$ ;
- $E_2$  domina a  $E_1$ : si  $E_1$  es de elección, se trata de la exclusión  $E_2 \neg E_1$ ; si es de igualdad, de la compensación  $E_2 * E_1$ ;

47. Aunque me intriga, en este sentido, la relativa alta reactividad de {E<>}.

- cada una de las dos es dominada por la otra (no hay dominantes): es el contrapeso  $E_1 \text{ y } E_2$  (equivalente a  $E_2 \text{ y } E_1$ ).

En este sentido podemos hablar de estrategias "fuertes" y estrategias "débiles": una estrategia es más fuerte mientras más tienda a ser dominante y más débil mientras más tienda a ser dominada. Así, una medida de la fuerza de una estrategia es el porcentaje de veces que aparece como dominante, tomando como total el número de veces que aparece en composiciones; cuando ese porcentaje es mayor de 50% se podrá hablar de una estrategia que tiende a ser fuerte y si es menor de 50%, la estrategia tiende a ser débil. Estos porcentajes aparecen también en la tabla de la pág. 399.

En general, las estrategias de elección tienden a ser fuertes (con la excepción de {E<}}, y las estrategias de igualdad tienden a ser débiles (con la excepción de {F=}).

La estrategia más fuerte es {P+}: todas las (pocas) veces que interactúa, es dominante. Siguen {D-}, {E<}, {R+}, {F+}, que son bastante fuertes (porcentajes entre 83% y 72%). Las estrategias que están sobre o cerca de la "línea de flotación" del 50% son {N-} y {E>}; también {F=} está entre ellas. Las menos débiles entre las débiles, junto con {E<>}, son {D=}, {N=} y {P=} (cuya fuerza sólo llega al 33%). Sigue, con una fuerza de 24%, {E=}. Cierra la lista, como una estrategia absolutamente débil, {R=}.

### 7.2.2.3. INTERPRETACION GENERAL

No hay que olvidar que la medida de la fuerza de una estrategia es después de su medida de "satisfactoriedad". Es decir, la satisfactoriedad es, en sí, una medida de fuerza también: {P+} es una estrategia muy satisfactoria porque prácticamente todas las veces que ocurre lo hace como estrategia simple; esta fuerza se ve corroborada además porque cuando llega a interactuar con otras estrategias, resulta dominante. Análogamente, {N=} es una estrategia muy insatisfactoria porque la gran mayoría de las veces que ocurre es en composiciones; además, en la mayor parte de ellas resulta dominada (compensada). Así, {P+} es una estrategia satisfactoria y fuerte y {N=} es insatisfactoria y débil: es como decir que {P+} es doblemente fuerte y {N=} doblemente débil.

Sin embargo, hay estrategias que, aunque son satisfactorias porque interactúan poco, cuando lo hacen resultan dominadas y otras que, aunque son insatisfactorias porque interactúan bastante, cuando lo hacen resultan dominantes. Así, podemos hablar de los cinco tipos de estrategias que se muestran en el cuadro de la siguiente página (48).

Hay dos estrategias que son satisfactorias y fuertes: {P+} y {E<}; además, son correctas; a esta categoría podemos agregar {P'}, que, aunque no es una estrategia correcta (de hecho, no es bien a bien una estrategia), corresponde a intentos fallidos de

48. Excluyo de aquí las estrategias {F-}, {F1}, {D+} y {R-}, porque cuentan con muy pocos datos.

utilizar {P+} o {P=}. Las estrategias correctas relacionadas con ellas, {P=}, {E>} y {E<>} son satisfactorias pero no son fuertes.

Las demás estrategias de elección, así como {F=}, son insatisfactorias pero fuertes; es notable que estas estrategias, con la excepción de {R+} y {E5}, son incorrectas pero pueden ser situacionalmente incorrectas ({F+}, {D-} y {F=}) o, en algunas composiciones adecuadas, correctas por teoremas en acto. Finalmente, las estrategias de igualdad, con la excepción de {P=} y de {F=}, son insatisfactorias y débiles; además, con la única excepción de {D=} en K13, son incorrectas (aunque, adecuadamente compensadas, {D=} y {N=} pueden ser correctas por teoremas en acto).

estrat.	medida de satisfactoriedad % composiciones	medida de fuerza % dominantes
{P'}	0 sumamente satisfactoria	--
{P+}	1 sumamente satisfactoria	100 sumamente fuerte
{E<}	8 muy satisfactoria	72 fuerte
{E>}	6 muy satisfactoria	50 intermedia
{P=}	14 satisfactoria	33 débil
{E<>}	19 satisfactoria	40 débil
{F+}	28 insatisfactoria	72 muy fuerte
{R+}	31 insatisfactoria	75 muy fuerte
{D-}	32 insatisfactoria	83 muy fuerte
{F=}	36 insatisfactoria	66 fuerte
{E5}	40 insatisfactoria	75 muy fuerte
{N-}	53 muy insatisfactoria	65 fuerte
{N+}	63 muy insatisfactoria	90 muy fuerte
{R=}	27 insatisfactoria	0 sumamente débil
{E=}	39 insatisfactoria	24 muy débil
{D=}	51 muy insatisfactoria	46 débil
{N=}	86 sumamente insatisfactoria	39 débil

Los porcentajes de composiciones están calculados sobre el número total de ocurrencias; los de dominadas sobre el número de ocurrencias en composiciones.

#### 7.2.2.4. UN CASO PARTICULAR: LAS ESTRATEGIAS DE IGUALDAD

Puede ser pertinente mirar aquí con mayor detalle las estrategias de igualdad, y, en particular, lo que ocurre cuando son dominadas (compensadas).

Las estrategias de igualdad no llevan a la elección de uno de los dos espacios muestrales sino a la respuesta "da igual", que es percibida por los sujetos como una no-decisión, aún cuando se insiste en que la respuesta "da igual" es perfectamente válida. Por ello, es muy frecuente que estas estrategias sean compensadas: es como si el razonamiento del individuo estuviera en estos términos: "me salta a la vista esta igualdad, pero como estos

dos lados no pueden ser iguales porque yo necesito elegir uno de ellos, tengo que recurrir a otro mecanismo que me lo permita". Veamos qué estrategias son las que actúan como compensantes, y para compensar a cuáles estrategias de igualdad:

- {N=} es compensada 11 veces. Diez de ellas son por {F+} y la undécima por {D-}; todas ellas son inconsistentemente correctas por teoremas en acto.
- {F=} es compensada en 11 ocasiones. En siete de ellas la estrategia compensante es {N-} y en 3 es {D-}; todas son situacionalmente correctas. La undécima compensante es {N+}, que da una justificación incorrecta.
- {D=} es compensada también en 11 ocasiones en K4 (y en 8 más en K13, pero como son sólo situaciones de doble certeza no la analizamos aquí). Tres de ellas son por {N+} y siete por {F+}; éstas son situacionalmente correctas. La restante es por {N-}, que da una justificación incorrecta.
- {E=} es compensada en 32 ocasiones, todas ellas incorrectamente. Hay seis por {N-}, trece por {F+}, ocho por {D-}, tres por {R+} y dos más por composiciones de centraciones.
- {R=} es compensada 4 veces, todas ellas incorrectamente. En todas la estrategia compensante es {F+}: dos como estrategia simple y las otras dos como dominante en una exclusión (es decir, {R=} es compensada por una exclusión en la que la excluyente es {F+}).
- {P=} es compensada en 9 ocasiones. Seis son por {N-}, dos por {D-} y una por {F+}.

Así, con la salvedad de dos compensaciones {R+ \* E=}, todas las estrategias compensantes son siempre centraciones; la gran favorita es {F+}.

Ahora bien, es necesario señalar que no todas las veces que interactúan una estrategia de igualdad y una centración de no igualdad el resultado es una compensación: hay también varias veces en que la estrategia de igualdad domina a la centración y se obtiene una exclusión. De 85 veces que ocurren este tipo de interacciones, 76 son las compensaciones recién mencionadas y las 9 restantes son las siguientes exclusiones (49):

- |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| 1 {F= ¬ D-} | 1 {E= ¬ N-} | 2 {P= ¬ N-} |
| 2 {D= ¬ N-} | 3 {E= ¬ F+} |             |

Por otra parte, tampoco todas las veces que las estrategias e igualdad entran en composiciones con otras hay necesariamente una dominada: en algunos casos estas estrategias entran en conjunciones con otras estrategias de igualdad, lo que ocurre con la siguiente distribución:

- |              |             |             |
|--------------|-------------|-------------|
| 7 {N= ¬ F=}  | 3 {E= & D=} | 2 {F= & P=} |
| 11 {F= & D=} | 1 {E= & P=} |             |

49. El hecho de que cuando interactúan una estrategia de igualdad y una de elección suela con mucha mayor frecuencia dominar la de elección puede ser un efecto del planteamiento. Esto será analizado posteriormente (§7.4.2, pág. 428).

## 7.2.2.5. OTRAS INTERACCIONES

Las otras interacciones entre estrategias son descritas en la siguiente tabla.

Algunos aspectos interesantes que se desgajan de esta tabla son los siguientes: {N-} y {F+} interactúan mucho entre sí y, aunque {F+} es más satisfactoria y más fuerte que {N-}, en el total de las interacciones que tiene entre sí ninguna de las dos resulta más dominante que la otra. Algo similar ocurre con {N-} y {D-}. Entre las demás formas de interacción, a veces unas resultan más dominantes que otras, pero no se puede establecer un orden entre ellas en el sentido de "la estrategia A domina a B, que domina a C, ....".

$E_1$	$E_2$	$E_1 \& E_2$	$E_1 \neg E_2$	$E_2 \neg E_1$	$E_1 \forall E_2$
{N-}	{F+}		7	7	4
{N-}	{D-}	3			2*
{F+}	{D-}	10	4	7	1
{N+}	{F+}	3			
{N+}	{D-}			1	
{F+}	{F1}				2
{E<}	centraciones	4			
{E>}	centraciones	1			
{E<>}	centraciones	2		2	1
{E5}	centraciones	1	1	1	
{R+}	centraciones	2			2
{E5}	{E>}		1		
{F+}	{P+}	1			

\* En realidad se trata de la composición múltiple {F+-(N-&D-)}, puesta como contrapeso porque en ella tanto {N-} como {D-} resultan dominadas.

## 7.2.3. SITUACIONES EN QUE OCURREN ALGUNAS ESTRATEGIAS

El análisis de las estrategias no puede prescindir de las situaciones en que ocurren. Esta parte del análisis de hará enfocando dos aspectos de particular interés. Por un lado, se estudiarán las estrategias correctas que constituyen las justificaciones correctas a las que se refieren los análisis de las ubicaciones y de las combinaciones. Por otra se revisarán las situaciones construidas especialmente para la observación de algunas estrategias específicas, como las de igualdad, las de equilibrio, y {F1}.

## 7.2.3.1. ESTRATEGIAS CORRECTAS

¿Qué tipo de estrategias correctas son las que conforman las justificaciones correctas? Cuando una pregunta pertenece, por ejemplo, al arreglo (3,1)(3,5) (K5, U2.3) y el sujeto elige S1, ¿su razonamiento se basa en una estrategia de proporcionalidad ( $3/4 > 3 > 8$ ), o en una de las estrategias correctas por teorema en acto de K5 (igual número de negras, pero menos blancas), o en la estrategia de equilibrio válida en U2.3 (en S1 gana, en S2 pierdo)? Aunque sería muy tedioso analizar cada una de las posibles situaciones de combinación/ubicación, se puede ver, sobre el total de respuestas correctas en cada combinación y en cada ubicación, cuántas de las justificaciones correctas se deben a respuestas propias de la situación.

situac núm	{P+}ó{P-}		otras		descripción	
	n	%	n	%		
K0	25	7	28	18	72	7 {N=&F=}, 0 {N=&D=}, 11 {F=&D=}
K1	3	0	0	3	100	3 {F+-D-}, 0 {D--N+}, 0 {D--N-}
K2	18	1	6	0	0	0 {F+-D-}, 0 {F+&N-}, 0 {F+-N+}
K3	175	52	30	18	10	7 {F+-D-}, 10 {F+*N=}, 1 {D-*N=}
K4	105	42	40	7	7	7 {F+*D=}, 0 {N+*D=}
K5	98	25	26	10	10	7 {N-*F=}, 3 {D-*F=}
K6	14	3	21			
K7	6	0	0			
K8	0	--	--			
K9	11	1	9			
K10	0	--	--			
K11	11	9	82			
K12	48	44	92	4	9	4 {F=}
K13	36	13	36	21	58	21 {D=}
K14	29	29	100			
K15	10	9	90			
K16	32	32	100			
U1.1	0	--	--	--	--	0 {F+}
U1.3	59	18	31	32	54	15 {F+}, 17 {D-}, 6 {F+&D-}
U1.5	--	--	--	--	--	0 {D-}
U2.1	106	17	16	89	84	6 {E<}, 83 {F+}
U2.2	83	22	27	45	54	45 {E<}
U2.3	23	1	4	22	96	22 {E<>}
U2.4	60	25	42	30	50	30 {E>}
U2.5	67	27	40	39	58	0 {E>}, 39 {D-}
U3.1	48	4	8	44	92	44 {F=}
U3.2	30	29	97			
U3.3	57	38	67			
U3.4	40	31	78			
U3.5	48	14	29	34	71	11 {D-}, 23 {D=}

núm es la cantidad de respuestas con justificación correcta en cada situación; los porcentajes están calculados sobre ella.

Esto se puede apreciar en la tabla recién presentada, en la que se han separado las estrategias de proporcionalidad (aplicables en todas las situaciones) de las otras estrategias, simples o compuestas (válidas en la situación específica) (estas estrategias se describen en la última columna).

En la tabla se puede ver que hay algunas situaciones, como K0 o U2.1, en las que todas las justificaciones correctas se deben a alguna de las estrategias propias de la situación, ya sea una estrategia de proporcionalidad o una válida específicamente en ella. En contraste con ellas, hay otras situaciones, como K2 o U2.2, en las que la suma de las estrategias correctas en ellas no cubre todas justificaciones correctas: esto ocurre, por ejemplo, porque algunas de las justificaciones correctas en K2 son por estrategias de equilibrio, o porque algunas de las de U2.2 son por composiciones correctas por teoremas en acto.

Asimismo, se puede apreciar que hay algunas de estas composiciones correctas por teoremas en acto que nunca ocurrieron; por ejemplo, {F+ & N-} (válida en K2).

Las estrategias de proporcionalidad constituyen un porcentaje muy variable de las justificaciones correctas. En las combinaciones K1 a K5, donde {P+} es sustituible por las composiciones correctas por teoremas en acto, no rebasa el 45% de las justificaciones correctas, y tampoco lo hace en las ubicaciones de la forma U2.j, donde es sustituible al menos por estrategias de equilibrio que son correctas.

Las composiciones correctas por teoremas en acto pueden constituir un porcentaje del total de justificaciones correctas tan variable como de 0% (K2) a 100% (K1), aunque esos ejemplos extremos vienen de cantidades pequeñas de justificaciones correctas, y es más confiable atenerse a los porcentajes cercanos a 10% de K3, K4 y K5.

Las estrategias de equilibrio de tipo "pierdo-empato" o "empato-gano") cubren cerca del 50% de las justificaciones correctas en sus ubicaciones, mientras que la del tipo "pierdo-gano" cubre hasta 96% de las justificaciones correctas en U2.3.

#### 7.2.3.2. ESTRATEGIAS QUE OCURREN EN SITUACIONES ESPECIFICAS

Hay algunas situaciones que permiten detectar específicamente la ocurrencia de alguna estrategia en particular. En ellas, es interesante observar si esas estrategias ocurren efectivamente, y con cuáles otras estrategias "compiten". Son dos tipos de situaciones y estrategias: por una parte, las situaciones en las que se puede manifestar alguna estrategia de igualdad y, por otra, las ubicaciones en las que se pueden manifestar las estrategias de equilibrio. Las ubicaciones U3.2 y U3.4, que permiten la expresión de {E-}, serán incluidas en la primera tabla.

##### a) Estrategias de igualdad

La siguiente tabla muestra cómo ocurren las estrategias de igualdad en las situaciones donde pueden ocurrir específicamente.

En general, las centraciones de igualdad ocurren con frecuencia relativa muy baja en las situaciones en que pueden ocurrir, y cuando se manifiestan es, frecuentemente, para ser compensadas; sus mayores competidores son estrategias simples: otras centraciones en el caso de {N=} y estrategias de relación en el caso de {F=} y {D=}.

Entre las relaciones de igualdad, la menos frecuente es {R=}, pero ocurre más como dominante o simple que como compensada; aunque sus competidores en las combinaciones K10 y K11 son principalmente otras relaciones, es notable que en estas combinaciones es donde las composiciones adquieren mayor relevancia como competidoras: se trata, en efecto, de situaciones difíciles en las que los sujetos suelen intentar poner en juego la mayor cantidad de información posible.

situación	núm	estr.	U+V W U+V+W			centr rel comp		
			(porcentajes)			(porcentajes)		
K3	198	{N=}	1	6	6	54	35	5
K5	133	{F=}	7	9	15	32	51	2
K4	199	{D=}	8	6	13	38	45	4
U3.2	191	{E=}	20	7	27	37	24	13
U3.4	205	{E=}	19	9	27	34	28	10
K10 y K11	99	{R=}	11	4	15	31	36	17
K14 y K15	129	{P=}	31	2	33	33	21	13
K16	65	{P=}	49	9	58	31	6	5

U es la cantidad de ocasiones en que la estrategia aparece como única, V en que aparece como dominante y W en que aparece como dominada. Se reportan los porcentajes con respecto al número de respuestas interpretadas en la situación correspondiente (núm).

La estrategia de equilibrio de igualdad {E=} se manifiesta en 27% de las posibilidades, y mucho más como estrategia simple o dominante que como compensada; sus competidores están repartidos entre centraciones, relaciones y composiciones.

En cuanto a las estrategias de proporcionalidad igual {P=}, son las que ocurren más frecuentemente en las situaciones que les son favorables: 33% de las respuestas a K14 y K15 y 58% de las respuestas a K16 contienen la estrategia {P=}. Es de notar que esta estrategia ocurre mucho más en la clase de equivalencia de  $\frac{1}{2}$  (K16) que en clases de equivalencia de  $p < \frac{1}{2}$  (K14) o  $p > \frac{1}{2}$  (K15); también tiende más a ser compensada en K16 que en K14 o K15. Las estrategias que compiten con {P=} también difieren entre unas y otras combinaciones: en K14 y K15 (que ocurren en U3.2 y U3.4) la distribución es similar a la de las competidoras de {E=}, mientras que en K16 prácticamente no hay otras relaciones que compitan con {P=} (ya que en K16 operan también {R=} y {E=}, que no llevan a ninguna elección).



## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

## b) Estrategias de equilibrio

Por su parte, las situaciones que permiten la expresión de alguna estrategia de equilibrio son las de la siguiente tabla.

La estrategia de equilibrio de igualdad {E=} se manifiesta en 27% de las posibilidades, y mucho más como estrategia simple o dominante que como compensada; sus competidores están repartidos entre centraciones, relaciones y composiciones.

De estas estrategias, la que ocurre más en la situación que le da pie es {E<>} ("pierdo-gano"): se manifiesta en 61% de las posibilidades, y mucho más como estrategia simple o dominante que como excluida; sus competidores son principalmente centraciones.

Las estrategias {E<} ("pierdo-empato") y {E>} ("empato-gano") ocurren también mucho más como simples o dominantes que como dominadas; sus competidores están repartidos entre centraciones, relaciones y composiciones.

Por último, la estrategia primitiva {E5} (elección del lado en que  $p=\frac{1}{2}$ , aunque el otro lado "gane") es poco frecuente, pero más como simple o dominante que como dominada. Sus principales competidores son estrategias de relación; de ellas, la principal es su contraparte {E>}, que se aplica en la misma situación pero lleva a la elección del lado contrario.

situación	núm	estr.	U+V (porcentajes)	W	U+V+W	centr rel comp (porcentajes)		
U2.3	44	{E<>}	55	7	61	32	2	5
U2.2	120	{E<}	38	1	38	23	23	16
U2.4	122	{E>}	25	1	25	33	31	11
U2.4	122	{E5}	7	1	8	33	50	9

U es la cantidad de ocasiones en que la estrategia aparece como única, V en que aparece como dominante y W en que aparece como dominada. Se reportan los porcentajes con respecto al número de respuestas interpretadas en la situación correspondiente (núm).

## c) Estrategias con unos

Cuando se diseñaron las variables de situación, se vio que podía ser pertinente observar arreglos en los que hubiera unos, y se plantearon las siguientes hipótesis:

- H10.4.1: En las situaciones en que  $U_i=1$  se podrá detectar la estrategia primitiva que consiste en la elección de un lado porque tiene UN SOLO caso favorable (elección del lado en que  $f=1$ );
- H10.4.2: En las situaciones en que  $U_i=1$  se verá con mayor frecuencia que cuando  $U_i=0$  la estrategia de centración en los casos favorables (elección del lado contrario al de  $f=1$ ).
- H10.4.3: En las situaciones en que  $U_d=1$  se podrá detectar la estrategia primitiva que consiste en la elección de un lado porque el otro tiene UN SOLO caso desfavorable (elección del lado contrario al de  $d=1$ );

H10.4.4: En las situaciones en que  $U_d=1$  se verá con mayor frecuencia que cuando  $U_d=0$  la estrategia de centración en los casos desfavorables (elección del lado en que  $d=1$ ).

Ahora podemos evaluar estas hipótesis. La primera es, evidentemente, correcta: se detectó la estrategia primitiva {F1} en cinco respuestas (dos de ellas en contrapeso con {F+}).

La segunda especulaba acerca de un mayor peso de {F+} en el caso en que de un lado hubiera un solo caso favorable. Al comparar la ocurrencia de estrategias simples {F+} en las respuestas interpretadas en las que  $U_r=1$  y en las que  $U_r=0$  se obtienen respectivamente 116/502 y 119/642. Es decir, {F+} ocurre un poco más cuando  $U_r=1$  (23%) que cuando  $U_r=0$  (19%), aunque esta diferencia es pequeña.

La tercera hipótesis planteaba la posible existencia de una estrategia dual de {F1}; no se logró detectar.

La cuarta especulaba acerca de una mayor presencia de {D-} en caso en que uno de los dos lados tuviera un solo caso desfavorable. Al comparar la ocurrencia de estrategias simples {D-} en las respuestas interpretadas en las que  $U_d=1$  y en las que  $U_d=0$  se obtienen respectivamente 67/519 y 30/625. Es decir, {D-} ocurre con bastante más frecuencia cuando  $U_d=1$  (13%) que cuando  $U_d=0$  (5%). Esto es, la centración en los casos desfavorables es más atractiva cuando hay un solo caso desfavorable en un espacio muestral que cuando hay varios en ambos. Es como si los sujetos que resultan así atraídos pensarán: "uno no es ninguno; por eso si hay una carta blanca es como si no hubiera ninguna, y es seguro que sale negra".

### 7.3. ANALISIS POR INDIVIDUOS

Hasta ahora, no nos hemos ocupado de las respuestas de cada individuo sino del total de las respuestas, para analizar los resultados de dos de los grandes ejes metodológicos de este trabajo: las situaciones y las estrategias. Trocaremos ahora el catalejo por la lupa, ocupándonos de ver cómo responde cada uno de los 64 sujetos a las preguntas planteadas.

El análisis se basará en dos tipos de resultados: uno cuantitativo y otro cualitativo. El cuantitativo se refiere al número de preguntas que cada sujeto constestó correctamente en cada uno de los seis niveles definidos previamente (categorías conjuntas de combinaciones y ubicaciones). El cualitativo se refiere al tipo de estrategias más comúnmente utilizadas por cada uno de los sujetos. Ambos tipos de resultados se encuentran en el Anexo 7 de este trabajo.

Dos tipos de preocupación guían el análisis. Por una parte, la comparación entre los diferentes sujetos y la necesidad de llegar a una clasificación de ellos que indique, aunque sea en términos muy globales, de qué es capaz cada uno. Por otra parte,

## ANALISIS DE LOS RESULTADOS

la observación dentro del conjunto de respuestas de cada sujeto, para buscar alguna consistencia entre ellas; y, en caso de no encontrarla, la búsqueda de una explicación a ello en la metodología de interrogación.

Cierra la sección un apartado de análisis global.

7.3.1. CLASIFICACION DE LOS SUJETOS

¿Cuáles sujetos pueden resolver mejor las preguntas planteadas? ¿cuáles no las pueden resolver? ¿cómo estratificar a estos sujetos?

Entre las primeras preguntas que me planteé, estaba la posibilidad de clasificar a estos sujetos según los estadios piagetianos. Sin embargo, esto no fue posible. La gran mayoría de los sujetos utiliza, al menos en alguna ocasión, estrategias tan refinadas como las de proporcionalidad y, al menos en otra, estrategias simples de centración o incluso mecanismos primitivos.

Así, la clasificación piagetiana para niños no sirve para estos adultos. Intenté entonces una clasificación más adecuada a estos sujetos, que basé en los niveles de dificultad establecidos para las situaciones. Claro, no ocurre nunca que un sujeto pase de resolver correctamente todas las preguntas de un nivel y ninguna de las del nivel siguiente a resolver correctamente todas las preguntas de ese siguiente nivel, etc; son pocos los sujetos que resuelven correctamente todas las preguntas de un nivel, todas las de los niveles anteriores y ninguna de las de los siguientes niveles. Por ello, la asignación de categorías a los sujetos sólo se basa en los niveles, y no exige un rendimiento de 100% en un nivel para considerar que el desempeño del sujeto en él es satisfactorio: bastará con un rendimiento de 50%.

Para asignar a cada sujeto un nivel, me baso siempre en el porcentaje mínimo seguro de éxito, y hago la asignación de acuerdo con lo siguiente:

- cuando el porcentaje es mayor o igual que 50% en los niveles anteriores a N y en N, y es menor de 50% en los niveles posteriores a N, se asigna al sujeto el nivel "N";
- cuando en ningún nivel el porcentaje llegue a 50%, se le asigna el nivel "0";
- cuando el porcentaje es mayor o igual que 50% en N y en la mayoría de los niveles anteriores a N pero hay algún nivel con n pequeña en el que el porcentaje no llega a 50%, se asigna al sujeto el nivel "N-";
- cuando el porcentaje es mayor o igual que 50% en los niveles anteriores a N y en N, y es menor de 50% en la mayoría de los niveles posteriores, pero alguno de ellos con n pequeña tiene un porcentaje mayor o igual que 50%, se asigna al sujeto el nivel "N+";

- cuando el porcentaje es mayor o igual que 50% en los niveles anteriores a N y en N, y no se probó en el sujeto ninguna pregunta con nivel posterior a N, se asigna al sujeto la categoría "N?";
- cuando hay duda entre asignar un nivel bajo con el sufijo "+" o uno más alto con el sufijo "-", la asignación se hace considerando el número de preguntas de cada nivel que constestó el sujeto y el tipo de estrategias que utilizó (esto sólo ocurrió en un par de ocasiones).

A continuación se describirán los sujetos que quedan asignados en cada nivel. En estas descripciones, las estrategias que se enuncian corresponden a las utilizadas como estrategias simples o dominantes, en el conjunto total de las respuestas de cada individuo, salvo en el caso de las estrategias o mecanismos primitivos, entre los que se cuentan también los dominados.

#### Nivel 0: 5 sujetos

Son los siguientes sujetos:

C3: J, T, V

C4: Q5

C6: Z

Estos sujetos fueron sometidos a muy pocas o ninguna de las preguntas de los niveles I y II, y es verosímil que si se hubieran probado más preguntas de esos niveles, se les podría asignar alguno de ellos. Los sujetos T y V tienen asignado el nivel 0+, porque llegan a 50% en el nivel IV.

El comportamiento típico de estos sujetos es el uso amplio de centraciones, con algunos usos ocasionales y no sistemáticos de estrategias de relación, inclusive {P+} o {P=}. Algunos de los sujetos (T y V) manifiestan estrategias o mecanismos primitivos<sup>50</sup>. Son frecuentes también las composiciones.

#### Nivel I: 10 sujetos

Son los siguientes sujetos:

C1: Ang, Bra, Edu, Fat, Mig, Paz

C2: Adr, Bla, Eug, Hil

En estos cuestionarios hubo suficientes preguntas de los niveles I y II, es decir con imposibilidades y/o certezas. Siete de estos sujetos no llegaron a 50% de éxitos en ninguno de los niveles siguientes; a Edu y Fat se les asignó el nivel I+ por un éxito en una única pregunta del nivel III. A Adr se le asignó el nivel I+ porque, a pesar de tener 100% de éxitos en los niveles III y IV, esto fue con pocas preguntas (3 y 1, respectivamente), y Adr tuvo una gran cantidad de estrategias y mecanismos primitivos.

Las estrategias utilizadas por los sujetos de este nivel se asemejan mucho a las del anterior: centraciones, uso ocasional de alguna estrategia de relación, estrategias o mecanismos primitivos.

<sup>50</sup>. Atracción, {N+}, {F1}.

vos bastante frecuentes <sup>(51)</sup>, composiciones frecuentes. Da la impresión de que los sujetos de este nivel, así como los del anterior, prueban toda suerte de estrategias simples y compuestas, aunque las que más les atraen en general son las centraciones.

Una excepción en este sentido es Bla, quien es prácticamente consistente en su uso de centraciones en los casos favorables, ya sea como simples (en 10 respuestas), dominantes (en 3 respuestas) o dominadas (en 2 respuestas); sólo dos de sus respuestas no contienen centraciones en favorables.

### Nivel II: 18 sujetos

Son los siguientes:

- C1: Car, Con, Edi, Fau, Ger, Gua, Jae, Jai, Jud, Pal,  
Ray, Reb, Rey, Ter  
C2: Als, Bet, Mab  
C4: Q6

Cinco de estos sujetos son II+ (Ger, Jai, Pal, Als, Bet, quienes no llegan al 50% en el nivel III, pero sí lo rebasan respectivamente en los niveles V, VI, IV, V, IV); el sujeto Rey es II?

Las estrategias que utilizan estos sujetos son menos variadas que en las categorías anteriores. Aquí es abrumadora la mayoría de centraciones y muy ocasionales los usos de estrategias de relación o de composiciones; 8 de los 19 sujetos manifiestan estrategias o mecanismos primitivos <sup>(52)</sup>. Se diría que los sujetos que llegan a este nivel no prueban muchas estrategias, sino que utilizan casi consistentemente las de centración, lo que les permite resolver los problemas de los niveles I y II (con imposibilidades y certezas) por teoremas en acto. Entre las centraciones, la gran favorita es {F+}, aunque prácticamente todos los sujetos utilizan los tres tipos de centraciones como estrategias simples o dominantes.

Un par de casos notables son los sujetos Reb y Con, que utilizan de manera prácticamente consistente {F+} o {F=}. El sujeto Con lo hace con sólo dos excepciones: la estrategia {F1}, también de centración en favorables, y en una situación con una certeza la estrategia (correcta) {D-}. Bet utiliza {F+} consistentemente con cinco excepciones: cuatro situaciones con alguna certeza, en las que utiliza estrategias {D-} o {D=}, y el arreglo (1,1)(1,1), en el que utiliza la conjunción {F= & N=}.

51. En particular Adr los utiliza en 13 ocasiones; es el único de este nivel que utiliza {E5}, y el único de todos los sujetos que utiliza {F-} y {D+}; los otros de este nivel utilizan {N+}, y los mecanismos de juntar lados y de acomodo. En general en este nivel se presentan los mecanismos de juntar lados y de acomodo y la estrategia {N+}. El caso de Adr es particular: utiliza estrategias y mecanismos primitivos en 13 ocasiones, es el único de todos los sujetos que utiliza {F-} y {D+}, es el único del nivel que utiliza {E5} y además su uso persistente de {E<} en la ubicación U2.2 podría sugerir que en todos los casos se trata de una atracción hacia el punto de equilibrio 0.5 ({E5}).

52. En este nivel se utilizan los mecanismos de atracción, acomodo, juntar lados, así como {N+} y {F1}.

Nivel III: 9 sujetos

Son los siguientes:

- C1: Agu, Bea, Jam
- C2: Mal, Sil
- C4: Q1, Q2, Q3
- C6: I

Estos son los sujetos que ya resuelven correctamente la mitad o más de los problemas "de una variable" que se les plantean.

Las estrategias que utilizan estos sujetos son, en muchos casos, centraciones que tienen éxito en los problemas "de una variable" por teoremas en acto. Cuatro de los sujetos utilizan preferentemente estrategias de equilibrio, también adecuadas en estas situaciones porque son en ubicaciones U2.2, U2.3 o U2.4; otros dos tienen algunas respuestas con estrategias de equilibrio. Son menos frecuentes las estrategias o mecanismos primitivos (<sup>53</sup>), pero más frecuentes que en la categoría anterior las composiciones, principalmente compensaciones y conjunciones.

Aquí son notables los equipos Q1, Q2 y Q3 del cuarto experimento, que utilizan preferentemente estrategias de equilibrio. En particular, Q3 es prácticamente consistente en su uso de estas estrategias (sólo hay cuatro excepciones, una de ellas de doble certeza); en donde no hay consistencia es en la decisión de compensar o no {E=} en las ubicaciones U3.2 y U3.4: en cinco respuestas {E=} está compensada, en diez respuestas no lo está. El otro sujeto que utiliza estrategias de equilibrio es I, quien a partir de cierto momento busca mejorar esta estrategia: primero con {R+}, luego incluso con {R-}, luego cambia a {F+} y termina regresando a {E=}.

Nivel IV: 10 sujetos

Estos son:

- C1: Raf
- C2: Ces, Flo, Cla, Maf, Map, Pa2 (<sup>54</sup>)
- C3: M
- C6: W, X

Cuatro de estos sujetos son IV- (Ces, Flo, M y W, quienes aunque rebasan el 50% en el nivel IV no lo alcanzan en el nivel III).

En este nivel están los arreglos de proporcionalidad de las combinaciones K14, K15 y K16; el éxito en ellas se debe a que los sujetos asignados a este nivel empiezan a utilizar las estrategias de proporcionalidad. Sin embargo, este uso no es mayoritario ni consistente; para muchos de los sujetos la primera opción son centraciones y, después, las estrategias de equilibrio. En varios de los sujetos ocurren las estrategias de resta con frecuencias

<sup>53</sup>. Se presentan aquí {F1} y {R-}.

<sup>54</sup>. Se recordará que Pa2 es el mismo sujeto que participó en el primer experimento bajo la clave Pa1; ahí llegó al nivel II, y cuando participó en el segundo experimento llegó al nivel IV. La diferencia puede deberse al curso llevado de Estadística, al hecho de que ya había pasado dos veces por el mismo tipo de problemas, a la maduración del propio sujeto o, simplemente, al azar.

semejantes a las de proporcionalidad. Son frecuentes las composiciones, incluso entre los sujetos de los primeros experimentos. Persisten las estrategias o mecanismos primitivos (55).

#### Nivel V: 7 sujetos

Estos sujetos son:

- C1: Gab, Jua, May, Ric
- C2: Ram
- C4: Q4
- C6: O

De ellos, a Ric y a Q4 se les asigna el nivel V- (porque no alcanzan el 50% en los niveles IV y III, respectivamente) y a Ram la categoría V? (porque no respondió a ninguna pregunta del nivel VI 56).

En este nivel se encuentran las preguntas "de una variable" que no pueden ser resueltas por teoremas en acto (ubicaciones U3.2 y U3.4); salvo por el equipo Q4, las estrategias preferentemente utilizadas en este nivel son ya las de proporcionalidad (Q4 prefiere las centraciones y las estrategias de equilibrio). Aunque ya se había presentado ocasionalmente en niveles anteriores junto con {P+} y {P=}, éste es el primer nivel en que aparece masivamente {P'}: 27% de los intentos de aplicar las estrategias de proporcionalidad son fallidos. Una sola de las respuestas fue con un mecanismo primitivo (57). Las composiciones son escasas aquí (en total, 5 conjunciones y 3 compensaciones).

Las consistencias encontradas en este nivel son de Jua y Ram, en su uso de estrategias de proporcionalidad. Ram las utiliza de manera cien por ciento consistente (con la salvedad de que a veces se equivoca en los cálculos: {P'}). Jua las utiliza consistentemente a partir de la pregunta 12; antes de ella utiliza las centraciones {F+} y {D-} (no sólo en situaciones con imposibilidades o certezas).

#### Nivel VI: 5 sujetos

Los sujetos de este último nivel son:

- C1: Ale, Cri, Jor, Mar, Rub

Hay dos posibles explicaciones al hecho de que todos los sujetos de este nivel sean del primer experimento. La primera se refiere al tipo de sujetos: eran estudiantes de la carrera de Administración Educativa, por lo que podría pensarse que es falsa la idea de que el nivel es básicamente el mismo en todas las carreras. Sin embargo, también los sujetos del segundo experimento eran alumnos de la misma carrera y ninguno quedó en este nivel. La otra explicación, que me parece más razonable, se refiere al escaso número de preguntas de este nivel planteadas a estos suje-

55. La estrategia primitiva más usual aquí es {E5}, aunque también ocurren {N+} y, en una ocasión, el mecanismo de atracción (sujeto O).

56. Sin embargo, como Ram utilizó consistentemente las estrategias de proporcionalidad, cabe pensar que de haberse probado en él arreglos del nivel VI las hubiera podido resolver sin problemas.

57. Gab juntó lados para una de sus respuestas.

tos: 2 para el primer experimento, con lo que bastaba con una pregunta resuelta correctamente para llegar al 50%. Sin embargo, por lo menos los tres primeros sujetos de la lista utilizaron casi consistentemente las estrategias de proporcionalidad, por lo que si se pueden considerar como pertenecientes auténticamente a este nivel.

Las estrategias utilizadas por estos sujetos son, principalmente las de proporcionalidad (con la excepción de Mar, que tiene más estrategias de centración que de proporcionalidad). Aquí, sólo 7% de los intentos de utilizar alguna estrategia de proporcionalidad son fallidos por {P'}. Hay pocas composiciones y dos estrategias o mecanismos primitivos <sup>(58)</sup>.

El sujeto más consistente en este nivel es Jor, quien utiliza las estrategias de proporcionalidad siempre salvo en tres casos de certezas o imposibilidades y en uno en que utiliza {E<}: es decir, sólo estrategias correctas.

En conclusión, si se juntan los sujetos de los niveles 0 y I, los 64 sujetos considerados en este estudio se reparten de la siguiente manera:

Nivel I:	15 sujetos
Nivel II:	18 sujetos
Nivel III:	9 sujetos
Nivel IV:	10 sujetos
Nivel V:	7 sujetos
Nivel VI:	5 sujetos

No deja de sorprender el bajo rendimiento general de estos estudiantes universitarios. Aunque estos niveles no pretenden ya correlacionarse con los estadios piagetianos, puede intentarse una descripción en términos compatibles con ellos: no llegan a 20% los que pueden resolver los problemas piagetianos "de dos variables" sin proporcionalidad (niveles V y VI), y 66% llegan, cuando mucho, a resolver los problemas piagetianos "de una variable" (nivel III). Aunque 41 de los 64 sujetos (64%) expresaron al menos una vez en su conjunto de respuestas una de las estrategias de proporcionalidad (entre ellos todos los de los niveles IV, V y VI), sólo dos de los sujetos (Ram y Jor) las utilizan consistentemente.

Aquí es pertinente una digresión de orden metodológico. Podría parecer tautológica la manera de asignarles niveles a los sujetos, por lo siguiente: a cada uno se le asignó el mayor nivel en que alcanzó 50% de éxitos; pero estos niveles se habían definido, como categorías conjuntas de combinaciones y ubicaciones, a partir tanto del tipo de situaciones que agrupaban a unas u otras como de las respuestas de los propios sujetos. Así, las respuestas de los sujetos sirven para definir niveles que a su vez sirven para calificar a las respuestas de los sujetos... Sin embargo, este procedimiento, que es bastante usual, se justifica porque a fin de cuentas lo que está calificando a cada sujeto no es el sujeto mismo sino el conjunto de todos ellos, que es la única manera de contrastar con la realidad las suposiciones teóricas

58. Un mecanismo de atracción y la estrategia {N+}.



acerca de la relativa facilidad o dificultad de las distintas posiciones.

Por otra parte, la graduación en niveles, aunque no es perfecta, resulta bastante buena. Sería perfecta si cada sujeto al que se le asignara un nivel N resolviera satisfactoriamente las preguntas del nivel N y de todos los niveles anteriores, pero de ninguno de los niveles posteriores. Sin embargo, como lo atestiguan los 16 sujetos a quienes se asignó un nivel con sufijo "+" o "-", esto no ocurre así. Aún así, al 75% restante se le pudo asignar un nivel, que describe por lo menos de manera global su capacidad para resolver las preguntas planteadas.

La categoría más conflictiva es el nivel IV (combinaciones K14, K15, K16: situaciones de proporcionalidad). Las preguntas con proporcionalidades parecen ser para algunos sujetos tanto o más fáciles que las del nivel III (situaciones de tipo "pierdo-gano", "pierto-empato" y "empato-gano"), mientras que para otros son aún más difíciles que las del nivel V (situaciones de tipo "pierdo-pierdo" o "gano-gano" en combinaciones no discriminantes o "de una variable"). Aparentemente a los primeros les resaltan las equivalencias proporcionales, mientras que para los segundos estas preguntas están al mismo nivel que las del nivel VI, que sólo pueden ser resueltas mediante un razonamiento proporcional.

### 7.3.2. CONSISTENCIA

En el apartado anterior se habló de consistencia de algunos sujetos aislados; de manera general, se vio que los demás tienden más bien a una inconsistencia en su utilización de estrategias.

Otra manera de evaluar la consistencia es a través de las preguntas idénticas y similares, que fueron propuestas desde el tercer experimento con este fin. Este tipo de preguntas permitirá evaluar no sólo la consistencia en las respuestas de los sujetos sino también la consistencia en las categorías establecidas para preguntas y respuestas. Para ver como es esto, iniciaremos con algunas definiciones.

Dos arreglos son similares si corresponden a la misma combinación y la misma ubicación y si fueron planteados en el mismo cuestionario. Si además sus elementos son los mismos, los arreglos son idénticos. Así, en cada cuestionario se definen "paquetes" de preguntas similares y "paquetes" de preguntas idénticas. Un ejemplo de "paquete" de similares en C6 es el siguiente (combinación K14, ubicación U3.2):

arreglo (1,2)(2,4), preguntas C6,4; C6,18; C6,37.4;

arreglo (1,4)(5,20), preguntas C6,20; C6,29.5;

arreglo (7,14)(9,18), preguntas C6,40.5; C6,40.8.

Ese mismo "paquete" de siete preguntas similares define además tres "paquetes" distintos de preguntas idénticas: uno por cada renglón.

Para efectos de análisis, no importan aquí las respuestas globales de todos los sujetos, sino el comportamiento de cada

sujeto ante las diferentes preguntas del "paquete". Cuando un "paquete" de similares incluya como el del ejemplo uno o varios "subpaquetes" de preguntas idénticas pero otras que no lo son (o, como en el ejemplo, dos o más paquetes de idénticas diferentes entre sí), serán tratadas globalmente como similares en el análisis de las respuestas a preguntas similares, y repartidas en "paquetes" de idénticas para el análisis de las respuestas a preguntas idénticas.

El análisis de las preguntas similares e idénticas tiene dos metas que, en cierto sentido, son antagónicas.

Por una parte, permite verificar si los sistemas de categorías son consistentes; esto es, si dada una misma situación de combinación y ubicación, los sujetos utilizan la misma estrategia para la respuesta. Sin embargo, para probar esto es necesario que cada sujeto tenga una consistencia interna que, si no lo lleva a elegir una estrategia determinada (o una familia determinada de estrategias) para cualquier situación que se le presente, si lo lleve a elegir alguna determinada para cada situación determinada diferente.

Por otra parte, este tipo de análisis permite saber justamente si cada sujeto tiene la consistencia mencionada, siempre y cuando se garantice que los sistemas de categorías para las preguntas y las respuestas son consistentes entre sí.

Nos enfrentamos, pues, a un círculo vicioso. Si el análisis de las respuestas de cada sujeto a preguntas similares e idénticas da una consistencia, ésta se refiere tanto a los sistemas de categorías como al comportamiento del sujeto. Pero si se obtienen inconsistencias, puede tratarse de alguna incongruencia entre los sistemas de categorías o al simple hecho de que el sujeto utiliza distintas estrategias en preguntas que son, de hecho, la misma situación.

Aquí es donde adquiere relevancia la distinción entre las preguntas similares y las idénticas. Si un sujeto responde consistentemente a las preguntas idénticas pero inconsistentemente a las similares, la inconsistencia podría hallarse más bien en los sistemas de categorías; si un sujeto responde con la misma inconsistencia a ambos tipos de preguntas, cabe pensar que la inconsistencia está dentro del sujeto.

El análisis de este tipo de preguntas se realizará con base en las estrategias que el sujeto utiliza en las diversas preguntas del "paquete" de similares y/o idénticas. Para ello, estableceremos las siguientes categorías:

**iguales:** se utiliza la misma estrategia (simple o compuesta) en todo el "paquete";

**semejantes:** se utilizan, dentro del paquete, estrategias de alguno de los grupos siguientes:

- {P+}, {P=}, {P'}
- {F+}, {N-}, {D-}; {F=}, {N=}, {D=}; {F-}, {N+}, {D+};
- {E=}, {R=}; {E<>}, {E<}, {E>}, {R+}; {E5}, {R-};

**dominantes:** dentro del paquete, una misma estrategia es la dominante en todas las respuestas, ya sea como simple o como dominante en alguna composición;

**contrarias:** dentro del paquete, hay una o más estrategias que son simples o dominantes en unas justificaciones y dominadas en otras;

**variadas:** dentro del paquete, hay respuestas con estrategias diversas, que no caben en ninguna de las categorías anteriores;

**mixtas:** cuando un paquete está formado por tres o más respuestas, y hay dos o más categorías de las previamente descritas que describen las relaciones entre las estrategias utilizadas (<sup>59</sup>).

La distribución de estas categorías, para todas las respuestas a preguntas similares (incluyendo las idénticas) y para sólo las respuestas a preguntas idénticas, es la que se muestra en la siguiente tabla, a partir de la cual se pueden hacer las siguientes afirmaciones:

- 1) La distribución entre los tipos de relación es prácticamente la misma para el total de las respuestas similares que para la fracción de idénticas.
- 2) Sólo en una tercera parte de las respuestas similares los sujetos repitieron la misma estrategia en todas las respuestas del "paquete".

tipo de relación	similares e idénticas	solamente idénticas
iguales	63 (33%)	37 (33%)
semejantes	23 (12%)	16 (14%)
dominantes	20 (10%)	11 (11%)
contrarias	13 (7%)	6 (5%)
variadas	59 (31%)	38 (34%)
mixtas	15 (8%)	3 (3%)
<b>totales</b>	<b>193 (100%)</b>	<b>111 (100%)</b>

- 3) Se podría considerar que las categorías de respuestas iguales, semejantes y dominantes comparten, de una manera amplia, características parecidas: en todas ellas, las estrategias utilizadas en las respuestas del "paquete" van en el mismo sentido, tienen algo en común. Aunque esta manera de ver los tipos de relación entre las estrategias utilizadas es muy amplia y laxa, las respuestas que caen en ella apenas rebasan la mitad de las respuestas a preguntas similares (o idénticas).
- 4) En cambio, si se considera que las relaciones contrarias, variadas y mixtas son aquellas en las que las respuestas del mismo "paquete" no tienen nada en común, pertenecen a familias distintas y a maneras distintas de encarar los problemas, las respuestas con estas características son un porcentaje muy al-

<sup>59</sup>. En la gran mayoría de los casos, una de las categorías es "variadas".

- to: 45% para todas las similares e idénticas, 42% para solamente las idénticas.
- 5) De particular interés son las preguntas idénticas y sucesivas 6 y 7 del cuestionario C3. La inconsistencia de los sujetos en estas preguntas es igual que en idénticas no sucesivas: el sujeto J da respuestas variadas ( $\{F+\}$ ,  $\{E- - N-\}$ ); el sujeto M da respuestas idénticas y luego variadas ( $\{N-\}$  en la 6, sucesivamente  $\{N-\}$ ,  $\{F+\}$ ,  $\{R+\}$  en la 7); los sujetos T y V no justifican en la 6 pero V hace elecciones distintas (S2 en la 6 y S1 en la 7). Otras preguntas idénticas interesantes son la 13 y la 13.1 del cuestionario C6, planteadas a los sujetos I y X. Estas dos parejas de respuestas fueron iguales: I respondió respectivamente  $\{E- \& D-\}$  y  $\{E-\}$ , y X respondió  $\{F+\}$  y  $\{F+ * D-\}$ .

Sin entrar en mayor detalle, podemos describir a rasgos generales cómo se distribuyen a su vez cada uno de los tipos de respuestas definidos aquí. Lo haremos, puesto que no hay grandes diferencias entre el conjunto grande de similares y el subconjunto de idénticas, para las similares.

Entre las respuestas iguales, la más frecuente es  $\{P+\}$  ó  $\{P-\}$ : 24 de las respuestas iguales son de esta familia, por lo que se puede pensar que la mayor consistencia está entre los sujetos que han desarrollado plenamente el razonamiento proporcional. Siguen las estrategias de equilibrio con 21 respuestas, y las centraciones con 12. Las 6 restantes son estrategias de resta y composiciones.

También entre las respuestas semejantes son frecuentes las estrategias de la familia de  $\{P\}$ : 10 de los "paquetes" de respuestas son de esa familia; empero, hay también 10 que son centraciones. Los 3 restantes son estrategias de resta o de equilibrio.

La principal dominante es  $\{F+\}$ : 10 de los "paquetes" de esta categoría corresponden a ella; siguen las estrategias de equilibrio con 5; las 5 restantes son otras centraciones, estrategias de resta o de proporcionalidad.

En cuanto a las contrarias, la familia de estrategias más controvertida en los "paquetes" de similares es la de equilibrio: en 6 paquetes hubo alguna respuesta con una estrategia de equilibrio como simple o dominante y otra en la que esa misma estrategia quedaba dominada por otra. Le siguen las estrategias de proporcionalidad y las centraciones en los casos posibles, respectivamente con 3 y 2 "paquetes" cada una. Las demás son otras centraciones.

A mí me llama particularmente la atención lo variadas que son las respuestas variadas. En 52 de los 59 "paquetes" de esta categoría, una de las respuestas era una centración (simple o compuesta), mientras que la otra era una estrategia de razonamiento proporcional (23), de equilibrio (20), de resta (7) o alguna composición sin centraciones (3). Solamente 6 de las respuestas combinaron entre sí dos o más de estas últimas familias de estrategias. Una vez más, se hace evidente lo llamativas que les resultan a los sujetos las estrategias de centración: aún los

sujetos que "prueban" en la misma situación otras estrategias, empiezan o terminan con concentraciones simples o compuestas.

En conclusión, los sujetos con los que trabajé en estos experimentos muestran mucha inconsistencia en su uso de estrategias para resolver los problemas planteados. Las excepciones a esta afirmación fueron señaladas en el apartado anterior: son los sujetos Bla, Reb, Con, Q3, Jua, Ram y Jor.

### 7.3.3. DESARROLLO A LO LARGO DEL CUESTIONARIO

Parte de la inconsistencia mencionada que ocurre dentro de los individuos puede deberse a efectos del cuestionario mismo. Puede ser que un sujeto evolucione con el cuestionario, perfeccionando sus modos de resolución, o que sean sólo las primeras preguntas las que lo desconcierten porque no se ha habituado al planteamiento del problema, o, si está resolviendo el cuestionario en equipo, que sea la interacción de los diversos individuos entre sí y con el cuestionario la que guíe una evolución del equipo. Estas hipótesis serán revisadas en los siguientes parágrafos.

#### 7.3.3.1. EVOLUCION

Cabe preguntarse si los sujetos tuvieron una evolución a lo largo del cuestionario; es decir, si sus estrategias variaron. En particular, cabe preguntarse si las estrategias mejoraron. Este análisis se hará con base en las preguntas similares y las idénticas utilizadas anteriormente, y definiremos una escala parcial de estratos de estrategias como sigue:

- primer estrato: las estrategias de concentración;
- segundo estrato: las estrategias de relación y de equilibrio, así como todas las composiciones que no se encuentran en el tercer estrato (es decir, todas las estrategias en las que el sujeto intenta relacionar la información relativa a elementos de dos o más clases);
- tercer estrato: las estrategias inconsistentemente correctas, es decir las que son correctas en algunas situaciones pero no se pueden aplicar siempre;
- cuarto estrato: las únicas estrategias universalmente correctas: las de proporcionalidad (se incluyen aquí las estrategias {P'}).

Con estos estratos definidos, podemos ver, en las situaciones similares y en las preguntas idénticas, si en las estrategias utilizadas por un sujeto hubo, entre la pregunta aplicada en primer lugar y la aplicada en último lugar:

- un avance: de un estrato inferior a un estrato superior;
- un retroceso: de un estrato superior a un estrato inferior;

- una inmovilidad: el sujeto mantuvo la(s) misma(s) estrategia(s), o bien mantuvo estrategias semejantes; o
- una no comparabilidad: el sujeto cambió de estrategia por otra del mismo estrato.

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

tipo de evolución	similares e idénticas	solamente idénticas
avance	48 (25%)	33 (30%)
retroceso	29 (15%)	12 (11%)
inmovilidad	78 (40%)	53 (48%)
no comparabilidad	38 (20%)	13 (12%)
<b>totales</b>	<b>193 (100%)</b>	<b>111 (100%)</b>

Tanto en la totalidad de las preguntas similares e idénticas como en el subconjunto de idénticas, la mayoría (60%) de los sujetos utilizaron o la misma estrategia o una semejante o una del mismo estrato, por lo que no se puede afirmar que hayan tenido una evolución significativa a lo largo del proceso.

El 40% restante sí tuvo una evolución, y en general esa evolución significó un avance en el tipo de estrategias utilizadas. Contrariamente a lo que ocurre en el caso del tipo de relación que constituye las respuestas a las preguntas similares e idénticas, donde la distribución era casi idéntica en ambos casos<sup>60</sup>, el avance aquí es más notorio en el subconjunto de las preguntas idénticas que en el conjunto total de las similares e idénticas.

En este sentido, es particularmente interesante revisar el caso de las respuestas a las preguntas idénticas en las dos aplicaciones del cuestionario C1, y compararlas con las respuestas a las idénticas de otros cuestionarios:

tipo de evolución	idénticas de C1	idénticas de C2, C3, C4, C6
avance	22 (37%)	11 (22%)
retroceso	3 (5%)	9 (18%)
inmovilidad	33 (55%)	20 (39%)
no comparabilidad	2 (3%)	11 (22%)
<b>totales</b>	<b>60 (100%)</b>	<b>51 (100%)</b>

No hay variaciones en los dos tipos de cuestionario en cuanto a la inmovilidad y la no comparabilidad: en ambos lados se encuentra el 60% que describe al total de respuestas a preguntas idénticas. Sin embargo, el 30% de avance encontrado en la tabla

<sup>60</sup>. Ver la tabla de la pág. 419.

## ANALISIS DE LOS RESULTADOS

precedente es, aquí, algo más marcado para los sujetos del primer experimento (37%); mientras que los demás bajan incluso del 25% que se presentó para las preguntas similares. Puede entonces concluirse que hubo algún efecto entre las dos aplicaciones del cuestionario C1 (<sup>61</sup>): puede deberse al tiempo transcurrido entre las dos, o al hecho de que los sujetos ya conocían el cuestionario, o al hecho de que en ese tiempo se trabajaron temas de Probabilidad en el curso de Estadística. Otro efecto (colateral) de evolución, este debido obviamente al curso, es la sofisticación del vocabulario utilizado por algunos de los sujetos en la segunda aplicación de este primer experimento (<sup>62</sup>).

En conclusión, algunos sujetos parecen haber reaccionado a la aplicación misma de los cuestionarios mediante una evolución positiva en sus respuestas, particularmente en el cuestionario C1. Algunos sujetos son particularmente notables al respecto, como el sujeto Jua del primer experimento, quien empieza con respuestas descriptivas y estrategias de centración, y a partir de la pregunta 12 utiliza consistentemente las estrategias de proporcionalidad (<sup>63</sup>).

## 7.3.3.2. PREGUNTAS DE FOGUEO

Las primeras preguntas de un cuestionario siempre le sirven al sujeto de "fogueo" (<sup>64</sup>); es decir, para terminar de comprender el planteamiento, familiarizarse con los referentes, etc. Es por ello que muchos investigadores optan por eliminar del estudio estas preguntas. La decisión de considerar o no las primeras preguntas como parte del estudio consiste en sopesar, por una parte, el riesgo de no detectar errores por incomprensión del planteamiento y, por otra, la riqueza de la ocasión brindada por estas preguntas que ponen de manifiesto las primeras intuiciones.

- 
- <sup>61</sup>. Esta conjetura se había planteado en el capítulo 2 (§2.2.1.3). Por lo demás, las preguntas idénticas de C1 no difieren mayormente de las otras: en las 60 respuestas a preguntas idénticas del cuestionario C1 no hay proporcionalmente menos respuestas iguales, ni menos semejantes o dominantes que en la totalidad de las respuestas idénticas (¡en todo caso, habría un poco más de ellas!).
- <sup>62</sup>. Esta sofisticación se había mencionado en el capítulo 2 (§2.2.1.3).
- <sup>63</sup>. Podría pensarse que el cambio se debió al tiempo (y el curso de probabilidad) transcurrido entre las dos aplicaciones del cuestionario C1, y sin duda la interpretación sería ésta si el cambio hubiera ocurrido entre las preguntas 16 y 17; sin embargo, el cambio ocurrió en la pregunta 12 (o, cuando mucho, en la 14): el sujeto parece haber encontrado las estrategias de proporcionalidad sin ayuda externa aparente, y después no las abandonó. Su cambio persistió hasta la segunda aplicación del cuestionario.
- <sup>64</sup>. Ver también los comentarios al respecto en el capítulo 6 (§6.2.3.5).

La siguiente tabla muestra la distribución de las respuestas totales (tot), canceladas (canc), sin interpretación (s/i) y con interpretación (c/i). Asimismo, muestra la distribución de las respuestas interpretadas en múltiples (mult), compuestas binarias (comp) y simples. Finalmente, muestra la distribución de respuestas simples según si son centraciones (centr) o relaciones (rel).

núm preg.	tot	canc	s/i	c/i	múlt	compsimples	centr	rel	
1 a 5	281	17	57	207	1	21	185	125	32
6 a 10	315	16	76	223	2	45	176	107	30
11 al fin	1034	48	272	714	8	111	595	264	109
total	1630	81	405	1144	11	177	956	496	171

Hay en las primeras cinco preguntas proporcionalmente más respuestas canceladas que en las últimas preguntas. Esto es consecuencia precisamente del aspecto de "fogueo" que cubren estas preguntas: las respuestas canceladas son en su mayoría por incomprensión del planteamiento.

Las respuestas con interpretación se distribuyen de manera homogénea, pero de ellas hay proporcionalmente menos composiciones (y aún menos múltiples) que en las últimas preguntas. Las primeras respuestas tienden más a ser estrategias simples que compuestas: el sujeto intenta primero resolver los problemas de la manera más sencilla; la idea de agregar argumentos le viene, en general, más tarde.

Hay proporcionalmente más centraciones y menos relaciones entre las primeras respuestas que entre las últimas; esto es particularmente notorio en el caso de las estrategias de proporcionalidad: sólo 9% de ellas aparecen en las primeras cinco preguntas de un cuestionario. Esto es consecuencia de lo que se mencionaba recientemente: muchos sujetos intentan primero resolver los problemas de la manera más sencilla, que es mediante centraciones, y luego incorporan las relaciones.

Así, la tabla permite apreciar lo siguiente. Aunque sí es cierto que en las primeras preguntas puede haber incomprensiones, éstas pueden quedar canceladas del proceso (y me parece que es mínimo el riesgo de que haya otras respuestas mal-interpretadas, es decir que corresponan en realidad a una incomprensión del planteamiento por parte del sujeto). Por otra parte, las primeras intuiciones tienen una calidad distinta de las demás: son, en general, más simples, tanto en el tipo de estrategias en que consisten, como en la manera de componerlas. No se hubiera llegado a este conocimiento de haber eliminado del estudio las primeras respuestas.

### 7.3.3.3. LAS ESTRATEGIAS DOMINANTES EN C4

Los seis equipos que participaron en el cuarto experimento son "sujetos" muy especiales. Efectivamente, la evolución que se



puede apreciar de sus respuestas no corresponde a un monólogo que pueda tener un individuo ante las diversas situaciones, sino a una discusión entre varias personas: cabe imaginar que ante una pregunta determinada cada uno de los diferentes individuos que componen el equipo propone un modo de resolución, y que, al ver que distintos argumentos llevan a distintas elecciones, se sigue una discusión. Si un argumento es particularmente convincente, los sujetos que sostenían otros modos de resolución renunciarán a ellos y adoptarán el argumento convincente. Así, las justificaciones expresadas por escrito en las hojas dadas a los equipos deberán consignar estas estrategias más convincentes, en caso de que las haya.

Y si las hay. A partir más o menos de la séptima pregunta, todos los equipos adoptan las estrategias de equilibrio. Las utilizan exitosamente en las ubicaciones U2.2, U2.3 y U2.4, y, como se había ya mencionado para el caso particular de Q3, quedan en duda en las ubicaciones U3.2 y U3.4, donde la estrategia de equilibrio que se aplica, {E=}, lleva a la respuesta "da igual": a veces dan esa respuesta, a veces compensan {E=} mediante alguna centración o mediante {R+}.

Salvo Q3, los equipos utilizan ocasionalmente estrategias {F+}, {D-} o {R+} sin referencia explícita a alguna estrategia de equilibrio. Sin embargo, estas estrategias aparecen exclusivamente en una de estas situaciones: o bien cuando hay certezas o imposibilidades o en K4 ó K5 (sólo {F+} o {D-}, que son potencialmente incompletas o correctas), o bien en las ubicaciones U3.2 o U3.4. Es posible que en estos casos estas estrategias estén utilizadas como una compensación de la estrategia {E=}, que queda implícita.

La otra estrategia que es utilizada ocasionalmente es {P=} en K14, K15 ó K16.

Así, hay efectivamente un tipo de argumentación que es particularmente convincente: las estrategias de equilibrio, que son utilizadas casi consistentemente salvo por algunas compensaciones en caso de igualdad y por estrategias de razonamiento proporcional en casos muy sencillos de proporcionalidad<sup>65</sup>.

#### 7.3.4. ANALISIS GLOBAL DEL COMPORTAMIENTO INDIVIDUAL

Destaca de esta sección la gran variabilidad que hay tanto entre los diversos sujetos como entre las diferentes respuestas de cada uno de ellos. No es la primera vez que se observa esto: por ejemplo, Lecoutre (1984, pág. 891) decía que «los trabajos con niños de Piaget, Goldberg, Fischbein, Green, y luego otros más, han puesto de manifiesto la variabilidad inter e intra individual, la fragilidad, los sesgos sistemáticos».

<sup>65</sup>. Ver también la discusión metodológica al respecto en el capítulo 5 (§5.1.2).

La variabilidad "inter" individual es la manifestada en el apartado 7.3.1, y no debe causar sorpresas: todos los maestros sabemos que unos alumnos pueden resolver mejor los problemas de proporcionalidad y/o de probabilidad que otros, incluso entre adultos. Lo que sí puede asombrar es la enorme cantidad de sujetos que no pueden resolver más que los problemas muy sencillos con imposibilidades o certezas; no puedo dejar de asociarlos con los niños descritos por Falk et al. (1980, pág. 198): «evidentemente, la habilidad mostrada por los niños más pequeños puede ser principalmente intuitiva. Basaron sus elecciones en juicios de carácter perceptual más que en operaciones intelectuales bien establecidas».

La variabilidad "intra" individual se describió, básicamente, en el apartado 7.3.2, como una falta de consistencia de los sujetos. Esto ocurre, evidentemente, en contra de la voluntad de cada uno de ellos; como afirmó M:

«... tenemos que decidir qué vamos a usar como criterio para escoger y llegar a una decisión (M; C3,7) y cuando se enfrenta a un sujeto al hecho de que ha utilizado estrategias distintas para resolver problemas similares éste se abochorna y se confunde.

En parte la inconsistencia observada se debe a la evolución que manifiestan algunos sujetos a lo largo del cuestionario. Este tipo de resultados ya habían sido observados por otros investigadores: por ejemplo Fischbein et al. (1970) reportan que entre los niños de preescolar y 3º y 6º de primaria hubo un "aprendizaje durante el experimento", y Dunker (teórico de la Gestalt) demostró «que un problema se aborda de maneras diferentes dependiendo de qué problemas ha trabajado el sujeto inmediatamente antes» (1935, citado por Gigerenzer et al., 1989, pág. 221). Para evitar el efecto de aprendizaje, Maury (1984, 1986) elige no sólo no premiar resultados sino además no dar ninguna indicación acerca del éxito o fracaso; sin embargo yo creo que aunque sí logra evitar el efecto, esto se debe a que trabajó con un número muy pequeño (6) de preguntas. Por su parte, Noelting (1980, pág. 230) no sólo no trata de evitarlo sino que lo promueve en el diseño del cuestionario: tiene cuidado de no poner dos preguntas seguidas del mismo estadio y de poner un orden creciente de dificultad, para que el hecho de responder al cuestionario promueva «un proceso de construcción más fluido» para los niños debajo del estadio formal (claro que, en ese caso, el cuestionario sirve más a propósitos didácticos que de diagnóstico).

Sin embargo, no toda la variabilidad "intra" individual queda explicada por el desarrollo a lo largo del cuestionario. En muchos casos se trata, simplemente, de que los sujetos utilizan estrategias distintas para resolver problemas iguales o similares. Son frecuentes las respuestas como las siguientes, en dos preguntas casi contiguas, ambas de K4/U2.4:

- hay dos tercios de posibilidad de sacarlo y en la otra un medio [(1,1)(2,1):S2] (Rub; C1,11) ({P+})
- tengo la misma posibilidad de equivocarme dos veces [(2,2)(4,2):=] (Rub; C1,14) ({D=})

## ANALISIS DE LOS RESULTADOS

También ocurre con mucha frecuencia que un mismo sujeto manifiesta tan amplia gama de estrategias distintas que cubre desde los mecanismos más primitivos hasta las estrategias de proporcionalidad bien aplicadas. Y este fenómeno se repite con sujetos de todos los niveles; por poner sólo un ejemplo de cada nivel, tenemos: el sujeto T en el nivel 0, Adr en el I, Als en el II, el sujeto I en el III, Maf en el IV, O en el V y Rub en el VI.

La inconsistencia general, como se verá en el capítulo 8, tiene fuertes consecuencias.

#### 7.4. ANALISIS DE OTRAS VARIABLES

Además de las variables de situación, se introdujeron tres variables experimentales en los cinco experimentos realizados: el referente (cartas como objetos físicos, cartas como representaciones gráficas, numerales), el planteamiento (de decisión para la gran mayoría de las preguntas, de equiparación en las últimas cuatro preguntas del último cuestionario) y el tamaño (espacios muestrales pequeños o grandes).

Estas son las que se analizarán en esta sección.

##### 7.4.1. REFERENTES

A lo largo de los cinco experimentos realizados, se utilizaron tres clases de referentes:

- los objetos mostrados directamente a los sujetos en los experimentos primero y segundo; estos objetos fueron cartas;
- las representaciones gráficas de cartas, mostradas en fichas con dibujos utilizadas en los experimentos tercero y quinto;
- las representaciones numéricas o numerales utilizados en el formato para respuestas del cuarto experimento y en fichas con dibujos de bolsas con canicas utilizadas en los experimentos tercero y quinto.

Una posible manera para comparar las respuestas con los diversos referentes es un análisis numérico. Este debe efectuarse por separado para cada nivel, puesto que hay una asociación entre el nivel y los referentes que se muestra en la siguiente tabla (<sup>66</sup>):

<sup>66</sup>. El valor de ji-cuadrada para esta tabla con 10 grados de libertad es 500.97, que es altamente significativa ( $p < .005$ ).

nivel	objetos	representac.	numerales
I	226	8	0
II	151	14	5
III	253	151	107
IV	103	90	60
V	46	24	75
VI	39	83	114

Así, el análisis se efectúa con los porcentajes de éxito mínimo seguro y máximo posible y, como medida de la dificultad de expresión, la diferencia entre ambos, nivel por nivel:

nivel	objetos		dif	representaciones			numerales		
	n mín,máx			n mín,máx	dif		n mín,máx	dif	
I	226	94,96	2	8	0,100	100	0	--,---	--
II	151	72,86	14	14	14,86	72	5	80,80	0
III	253	51,81	30	151	15,76	61	107	37,90	53
IV	103	37,37	0	90	21,47	26	60	23,43	20
V	46	33,59	26	24	13,38	25	75	3,60	57
VI	39	23,23	0	83	1,12	11	114	0,30	30

La tabla sugiere que el uso de objetos como referentes facilita los problemas a estos sujetos en cada uno de los niveles considerados, tanto en los porcentajes de éxito mínimos seguros como en los máximos posibles y como en la diferencia entre ambos.

En cuanto a la comparación entre los referentes de representaciones gráficas y numéricas, la tabla sugiere que las representaciones gráficas resultan más difíciles que las numéricas en los niveles más fáciles I, II, III y IV; esto ocurre tanto entre ambos porcentajes de éxito como en la diferencia. La misma relación se mantiene en los niveles más difíciles V y VI (que son los de las ubicaciones U3.2 y U3.4) para el máximo porcentaje posible y para la diferencia, pero no para el mínimo porcentaje seguro, en que aparentemente resultan algo más fáciles las representaciones gráficas que las numéricas.

#### 7.4.2. PLANTEAMIENTOS

Al final del último experimento, se propusieron cuatro preguntas de prueba con un planteamiento, distinto del de decisión, que pretendía contrarrestar el efecto del planteamiento de decisión contra la respuesta "da igual": un mismo arreglo (de referencia) era comparado con otros seis (alternativos), y se le pedía al sujeto que indicara cuál o cuáles de ellos podían ser considerados equivalentes al de referencia, es decir, que ante la disyuntiva de uno u otro la respuesta tuviera que ser "da igual".

## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una posible forma de efectuar la comparación entre los dos planteamientos es tomar las preguntas idénticas en todos los demás aspectos. Dada la naturaleza del planteamiento de equiparación, la comparación sólo se puede hacer para las respuestas "da igual" en los arreglos alternativos; la pregunta es, entonces, si en las preguntas idénticas con planteamiento de decisión la respuesta fue, también, "da igual" y, en caso afirmativo, si la estrategia utilizada fue la misma.

Desgraciadamente, esta comparación sólo se puede efectuar en siete respuestas a arreglos de las últimas preguntas, que son los siguientes:

arreglo	situación		preg	decisión		equiparac.		suj
	com	ubi		elec	estrat	preg	estr	
(1,2)(3,4)	K10	U3.2	18.1	S1	{D-}	37.3	{R=}	X
(2,1)(3,2)	K11	U3.4	1	S1	{N-}	39.2	{R=}	O
(2,1)(3,4)	K11	U3.4	1	S2	{F+}	39.2	{R=}	X
(1,2)(2,4)	K14	U3.2	4	S1	{R+}	37.4	{P=}	X
(1,2)(2,4)	K14	U3.2	18	S1	{D- * P=}	37.4	{E=}	X
			4	S2	{F+}			O
			18	=	{N- ¥ F+}			O
(1,2)(2,4)	K14	U3.2	18	=	{P=}	37.4	{P=}	W
			(2,1)(4,2)	K15	U3.4	32	=	{E=}

Aunque corresponden a muy pocos datos, estos resultados sugieren que el planteamiento de equiparación puede efectivamente estar contrarrestando el efecto en contra de la respuesta "da igual" del planteamiento de decisión.

Sólo en los tres últimos casos la respuesta fue "da igual" también en el planteamiento de decisión. En dos de ellos la estrategia utilizada fue la misma en ambos planteamientos (respectivamente {P=} y {E=}), mientras que en el restante la estrategia cambió del contrapeso {N- ¥ F+} a la estrategia de equilibrio {E=}.

En los demás ejemplos, los sujetos eligieron uno de los dos lados en el planteamiento de decisión, mientras que en el de equiparación vieron como equivalentes ambos espacios muestrales. El efecto de presión en contra de la respuesta "da igual" puede verse particularmente en la respuesta del sujeto X a la pregunta 18: ahí, aunque ve que hay una proporcionalidad, la compensa con una centración negativa en los desfavorables; sin embargo, en el planteamiento de equiparación ya no necesita la compensación.

Otra manera de abordar el estudio de los dos planteamientos es a través del análisis de las estrategias de igualdad utilizadas en planteamiento de equiparación y su comparación con la frecuencia con que ocurren en el planteamiento de decisión.

En las cuatro preguntas de equiparación se ofrecieron oportunidades de utilizar todas las estrategias de igualdad, según lo muestra la siguiente tabla. Los primeros dos renglones corresponden a las combinaciones o ubicaciones ofrecidas y a las estrategias de igualdad que pueden entrar en juego en cada una. Después

se anota el número de la pregunta y, entre paréntesis, el número de respuestas del tipo "da igual" obtenidas en ellas. Por último, se muestran los sujetos que utilizaron las estrategias correspondientes a cada columna.

	K3	K5	K4	K10, K11	K14, K15, K16	U3.2, U3.4
	{N=}	{F=}	{D=}	{R=}	{P=}	{E=}
37	37.5 (0)	37.1 (2)	37.2 (0)	37.3 (3)	37.4 (3)	37.1 (0) 37.3 (0) 37.4 (1) 37.5 (0)
38	38.4 (0)	38.1 (0) 38.2 (0)	38.6 (1)		38.3 (3)	
39	39.6 (0)	39.3 (0)	39.4 (0)	38.5 (4) 39.2 (2)	39.1 (1)	39.1 (1) 39.2 (1) 39.4 (0)
40	40.1 (0)	40.4 (0)	40.2 (0)	40.6 (1)	40.5 (3)	40.1 (1) 40.2 (1) 40.4 (1) 40.5 (1) 40.6 (1)
suje		I, O	I	I, O, X	I, O, W, X	I, O

La tabla muestra que las centraciones de igualdad fueron las menos atractivas para los sujetos, mientras que todas las relaciones de igualdad les resultaron atractivas en planteamiento de equiparación. El sujeto I parece haber intentado todas las estrategias, menos {N=}; el sujeto O intentó todas menos {N=} y {D=}; el sujeto X sólo intentó las relaciones de igualdad {R=} y {P=}. Sólo el sujeto W utilizó exclusivamente la única estrategia correcta de igualdad en estas situaciones, {P=}. Las respuestas del sujeto Z no entran a este análisis, porque la única que no fue cancelada correspondió a la elección de uno de los dos lados.

Así, podríamos considerar que a estos cuatro sujetos les fueron planteadas cada una de las 33 preguntas enlistadas en la tabla anterior: la no respuesta de uno de los sujetos a alguna de ellas significa entonces a que no utilizó la estrategia de igualdad correspondiente, lo que se puede manejar como si fuera una respuesta interpretada. Esto permite comparar las veces en que se presentó cada estrategia de igualdad en cada uno de los dos planteamientos, que es lo que se presenta en la siguiente tabla. En ella, n es el número de oportunidades para la presentación de la estrategia, es decir el número de respuestas interpretadas en cada situación, x es el número de respuestas interpretadas con la estrategia simple de igualdad y % es el porcentaje de x con respecto a n.

	sit	K3	K5	K4	K10, K11	K14, K15 K16	U3.2, U3.4
	estr	{N=}	{F=}	{D=}	{R=}	{P=}	{E=}
de- ci- sión	n	197	131	197	92	179	374
	x	1	7	12	6	59	58
	%	1%	5%	6%	7%	33%	16%
equi- para- ción	n	16	20	16	16	16	48
	x	0	2	1	6	10	8
	%	0%	10%	6%	38%	63%	17%

La tabla sugiere que el planteamiento de equiparación vuelve particularmente atractivas las estrategias de igualdad {R=} y {P=}, pero no las demás (67).

Para finalizar, dada la pequeña cantidad de datos que hay para hacer este análisis, no se pueden extraer de aquí más conclusiones que la de que vale la pena poner a prueba el planteamiento de equiparación más sistemáticamente, con más preguntas idénticas repartidas entre ambos planteamientos, y más oportunidades en ambos planteamientos de poner en uso las estrategias {R=} y {P=}.

#### 7.4.3. TAMAÑOS

En los cuestionarios C3 y C6 se probaron dos tipos de tamaños de espacios muestrales: los "pequeños", en los que n no rebasa el número 8, y los "grandes", en los que n se encuentra entre 20 y 30. La mayoría de los arreglos utiliza dos espacios pequeños, aunque hay también arreglos con dos espacios grandes y arreglos con uno pequeño y uno grande. Sin embargo, esto solo ocurre en los niveles III a VI (en los niveles I y II sólo hay arreglos de dos espacios pequeños). La siguiente tabla muestra que no hay una asociación significativa entre el nivel y los tamaños de los espacios muestrales de los arreglos utilizados en los cuestionarios C3 y C6 (68):

67. Al efectuar las comparaciones mediante una prueba z se obtiene para {R=},  $z=3.639$ :  $p<.0005$ ; para {P=},  $z=2.368$ :  $p<.01$ ; para {F=},  $z=0.819$ : NS; para {E=},  $z=0.208$ : NS.

68. El valor de ji-cuadrada para esta tabla con 6 grados de libertad es de 9.87, que es NS.

nivel	dos espacios pequeños	uno pequeño y uno grande	dos espacios grandes
III	100	16	17
IV	66	7	15
V	34	4	13
VI	102	9	16

Podemos entonces considerar lo que ocurre en la totalidad de los niveles III a VI para comparar los resultados en los diferentes tamaños:

dos esp. pequeños n mín,máx dif			pequeño vs grande n mín,máx dif			dos esp. grandes n mín,máx dif		
302	16,47	31	39	28,56	28	61	13,61	48

Se esperaría que los arreglos con dos espacios pequeños resultaran más fáciles que los que tienen uno pequeño y uno grande, y éstos a su vez más fáciles que los que tienen dos espacios grandes. Sin embargo, esto no ocurre así.

Así, los datos aquí reportados acerca de los experimentos con los cuestionarios C3 y C6 no aportan evidencia contundente para afirmar que las situaciones con números pequeños de datos sean más fáciles de resolver que las que tienen números grandes. Esto puede deberse a alguna de las siguientes explicaciones:

- el efecto del tamaño es prácticamente negligible, como lo pronosticaron John Cohen et. al. (1957b) para adultos, y como lo encontraron Fischbein et al. (1970) en un trabajo con niños;
- si hay un efecto del tamaño incluso para adultos, como lo afirmaron para niños Piaget e Inhelder (1951, pág. 148): «la relatividad de una misma diferencia (por ejemplo 1 caso desfavorable sobre 2, sobre 20 o sobre 100) es mucho más difícil de comprender en colecciones grandes que en pequeñas», pero se cuenta aquí con información escasa (sólo 9 sujetos en total contestaron las preguntas de estos cuestionarios).



## **8. DISCUSION**

Muchos de los resultados finales de este trabajo han sido ya expuestos en los dos capítulos precedentes, tanto a nivel metodológico como a nivel de los datos obtenidos. Sin embargo, se impone una visión general de todo el trabajo: a ella está consagrado este último capítulo.

La revisión está repartida en dos secciones. En la primera, se revisa la construcción conceptual y metodológica, así como los resultados obtenidos, en una organización basada en función de las hipótesis enunciadas al principio del trabajo. La segunda pretende dar una recapitulación general del trabajo.

De este modo, el trabajo cierra, nuevamente como una espiral que regresa a sus orígenes pero en otro nivel, con una vuelta a los planteamientos del capítulo 2 y una reconsideración de algunos de los aspectos abordados en el capítulo 1.

### **8.1. REVISION DE LAS HIPOTESIS**

Las veintitrés hipótesis enunciadas en el capítulo 2 servirán de columna vertebral de esta sección. Aunque en una agrupación ligeramente distinta a la originalmente planteada, serán revisadas en el mismo orden en que aparecen ahí. Esto implica, en particular, que nuevamente se mezclarán aquí los aspectos relacionados con la construcción metodológica (revisados ya en el capítulo 6) y los relacionados con los resultados y su análisis (vistos en el capítulo 7).

A nivel muy general, cabe observar que la gran mayoría de las hipótesis fueron corroboradas total o al menos parcialmente.

#### **8.1.1. H1 Y H2: HIPOTESIS INICIALES**

Las hipótesis con las que empezó el trabajo fueron posteriormente desglosadas en muchas de las hipótesis siguientes; en particular, la primera dio origen al tratamiento metodológico y al análisis de resultados de situaciones y estrategias, mientras que la segunda originó los planteamientos acerca del desempeño individual (y, en particular, al análisis del problema de la consistencia). Es por ello que aquí solo se revisarán someramente las hipótesis iniciales, y se le dará mayor importancia a las subsiguientes. Las primeras hipótesis son:

- H1: Los estudiantes universitarios mexicanos cometen errores en la resolución de problemas de decisión binaria en situaciones de azar.
- H2: Aunque los estudiantes no se ajusten a la descripción del estadio III (en particular, si no pueden resolver sistemáticamente las preguntas piagetianas "de dos variables"), se pueden clasificar de acuerdo con los otros estadios descritos en los trabajos de Piaget.

a) Los sujetos comenten errores

Esta hipótesis fue la que hizo arrancar todo el trabajo. Su confirmación, que surgió desde las respuestas incorrectas obtenidas en los experimentos primero y segundo, fue llevando, a lo largo de toda la labor experimental y analítica, a nuevas preguntas y, directa o indirectamente, al resto de las hipótesis planteadas.

La pregunta surgida directamente de esta hipótesis puede plantearse así: "qué tipo de errores comenten estos sujetos", y llevó eventualmente a la pregunta "¿Qué estrategias de solución usan los sujetos en qué situaciones?". Claro está, en ese proceso hubo que definir estrategias y situaciones, hubo que construir las líneas metodológicas y luego utilizar lo construido para analizar los resultados. Por ello, la mayoría de las siguientes hipótesis se refieren o al proceso de construcción metodológica o a los resultados analizados mediante la metodología construida.

Antes de cerrar el párrafo correspondiente a la primera hipótesis, es necesaria una aclaración. Su planteamiento se refiere a "los estudiantes universitarios mexicanos", y yo sólo estudié una muestra de estudiantes de una sola universidad mexicana (que sólo tiene carreras humanísticas y administrativas), por lo que no puedo realmente afirmar que los estudiantes universitarios mexicanos cometen errores en la resolución de problemas de decisión binaria. Sin embargo, los resultados obtenidos permiten especular a nivel general acerca de esta hipótesis. Tal vez la más inmediata de las posibles ampliaciones de este trabajo sea la ejecución de experimentos similares a los realizados (sobre todo al último), en otras universidades. Convendría probar universidades públicas y privadas, capitalinas y provinciales, prestigiosas y no prestigiosas. Convendría comparar los resultados obtenidos por estudiantes de todo tipo de carreras, de diferentes etapas de la carrera, de diferentes edades (1).

Una población específica de estudiantes que es de crucial importancia es la de normalistas: si, como yo me temo, un experimento con estudiantes normalistas arroja resultados similares a los aquí obtenidos, estos fenómenos de intuiciones incorrectas se irán repitiendo en ciclos sin fin a menos que un esfuerzo parti-

1. Yo me permito predecir que los resultados no diferirán mucho de los aquí encontrados, con la salvedad de que en algunas universidades (tal vez, las más prestigiosas y céntricas) y en algunas carreras (las científicas y las técnicas) se obtendrán porcentajes más altos de sujetos en el nivel VI descrito en el capítulo 7 de los que se encontraron en este estudio.

## DISCUSION

cular rompa el círculo vicioso en la piedra de toque: los maestros. En efecto, las posibles soluciones educativas a las intuiciones incorrectas que se revisaron en el primer capítulo (2) sólo funcionan cuando el maestro ha trascendido sus propias intuiciones primarias.

### b) Clasificabilidad en estadios piagetianos

En los primeros dos experimentos de este trabajo yo pretendía buscar las similitudes y las diferencias de las respuestas de jóvenes adultos universitarios mexicanos con respecto a las proporcionadas por los niños suizos del trabajo de Piaget e Inhelder. Me preguntaba también si en caso de que estos estudiantes no se ajustaran a la descripción del estadio III, en particular si no podían resolver los problemas de dos variables, podría clasificarlos de acuerdo con los otros estadios descritos en el trabajo de estos autores. Esto dio origen a la segunda hipótesis, que fue la única de las planteadas que resultó indiscutiblemente falsa.

En efecto, no fue posible clasificar a los sujetos en estadios piagetianos, con la salvedad de los pocos que utilizaron consistentemente las estrategias de razonamiento proporcional, que se encuentran indiscutiblemente en el estadio III, llamado de las operaciones formales.

La gran mayoría de los sujetos tuvo estrategias pertenecientes a varios de los estadios piagetianos; muchos manifestaron estrategias primitivas y centraciones a la par con estrategias de razonamiento proporcional. La única explicación de tipo piagetiano que se me ocurre para explicar este fenómeno es que se trata de un "décalage" ampliado, es decir de "la presencia simultánea de estrategias no exitosas de los estadios I y II y de estrategias exitosas del estadio III"; pero esto, de hecho, no es una explicación sino una mera descripción.

Más adelante (§8.1.5.2, pág. 452) esbozaré algunas posibles interpretaciones de este fenómeno.

### 8.1.2. H3 A H9: CATEGORIAS CONSTRUIDAS

Las tres líneas metodológicas presentadas en el capítulo 2, desarrolladas en los capítulos 3, 4 y 5 y revisadas globalmente en el capítulo 6 son la parte medular de este trabajo. En este apartado veremos las hipótesis correspondientes a las categorías construidas en las primeras dos de esas líneas: las categorías para la clasificación de las preguntas y las categorías para la clasificación de las respuestas. En el capítulo 2 fueron enunciadas con la siguiente clasificación:

2. Ver en particular la propuesta de siete puntos de Fischbein (§1.4.1.1).

**Hipótesis para la construcción de categorías:**

- H3: Se puede construir un sistema de categorías para la clasificación de preguntas (situaciones) que provea, para cada una de varias variables, una partición del conjunto de preguntas planteables y que esté sujeto a la hipótesis H5.
- H4: Se puede construir un sistema de categorías para la interpretación de las respuestas (estrategias) que permita que cualquier respuesta dada por un sujeto tenga una y sólo una interpretación en el sistema y que esté sujeto a la hipótesis H5.
- H5: Los sistemas de categorías mencionados en las hipótesis H3 y H4 se pueden construir de modo que haya alguna relación entre las interpretaciones dadas a las respuestas posibles a una pregunta y la situación a la que pertenezca la pregunta.

**Hipótesis de diferencias entre situaciones:**

- H6: Se puede establecer un orden entre las situaciones, según la cantidad de estrategias diferentes que confluyen en una misma elección.
- H7: Se puede establecer un orden entre las situaciones, según el porcentaje de respuestas correctas que dan los sujetos ante ellas.

**Hipótesis de diferencias entre estrategias:**

- H8: Se puede establecer un orden de complejidad entre las estrategias que siguen los sujetos, desde las estrategias que se pueden considerar como primitivas hasta las estrategias que toman adecuadamente en cuenta toda la información contenida en una pregunta.
- H9: Hay estrategias que son más dominantes que otras: son utilizadas preferentemente y, en una situación en la que llevan a una elección diferente de la de las dominadas, son las que marcan la elección.

En los párrafos de este apartado se irán revisando las hipótesis en ese mismo orden.

**8.1.2.1. CONSTRUCCION DE CATEGORIAS (H3, H4, H5)**

De estas tres hipótesis, dos fueron plenamente corroboradas, y una (H4) sólo parcialmente.

Los dos sistemas mencionados en las hipótesis H3 y H4 fueron contruidos, respectivamente, en los capítulos 3 y 4. Están relacionados entre sí (H5) como se muestra en los apartados §6.1.3 y §6.2.1 del capítulo 6.

Todas las preguntas que se pueden plantear son clasificables de acuerdo con las categorías de situación (combinación, ubicación, perceptividad, unos y multiplicidad), por lo que H3 queda corroborada.

En cuanto a que todas las respuestas tengan una y sólo una interpretación en el sistema de categorías para la interpretación (H4), esto es más difícil de afirmar. Todas las respuestas (in-

## DISCUSION

terpretables) que se han obtenido en los experimentos reportados en este trabajo han podido ser asignadas a una estrategia, pero con frecuencia la asignación se ha hecho sólo porque es la interpretación más verosímil. Y en cuanto a otras respuestas que pudieran obtenerse en experimentos similares a éstos... recordemos la afirmación de Falk et al. (1980, pág. 196) en el sentido de que los sujetos suelen sorprender a los investigadores.

## 8.1.2.2. DIFERENCIAS ENTRE SITUACIONES (H6, H7)

Estas dos hipótesis se refieren a distintos aspectos: H6 se refiere a diferencias de orden teórico, provenientes de la forma misma de construcción de las situaciones, mientras que H7 se refiere a diferencias surgidas de los resultados experimentales. Ambos tipos de órdenes existen, como se ha visto ya respectivamente en los capítulos 3 y 7, por lo que será interesante, además, ver si hay alguna relación entre ellos.

El orden entre situaciones planteado en la hipótesis H6 es realizable. Como se vio en el capítulo 6 (§6.2.1), en las diferentes situaciones de combinación y ubicación se puede saber cuáles estrategias llevan a cuáles decisiones ("S1", "S2" o "=" ("da igual")); lo que lleva a una jerarquización de las situaciones en el sentido de su capacidad de discriminación<sup>(3)</sup>.

Una posible manera de ver esta discriminación es considerando el número  $x$  de estrategias que llevan en cada situación a cada decisión, lo que puede llevar a plantear una "medida de la discriminancia" de una situación mediante el siguiente cálculo:

$$\text{DISC} = 10(62 - Ex^2)/62 \quad (4)$$

Los resultados de esta medida se pueden ver en la tabla de la siguiente página, donde las diferentes situaciones se han puesto de menor a mayor discriminancia: así, las situaciones menos discriminantes son K0 y K2 en las ubicaciones de la forma U1.j y U2.j, que dan una medida de discriminancia igual a 0, mientras que las

3. Es pertinente recordar que para la tabla de §6.2.1, en la que se basa la que se presenta aquí, sólo se consideraron las estrategias más importantes: {N-}, {F+}, {D-}, {E<>}, {E<}, {E>}, {R+} y {P+} como estrategias de elección, y {N=}, {F=}, {D=}, {E=}, {R=} y {P=} como estrategias de igualdad. No se consideraron las estrategias primitivas {N+}, {F-}, {F1}, {D+}, {E5} ni {R-}; tampoco se consideró {P'}.
4. Cuando una situación no es discriminante, una de las  $x$  es 6 y las demás son 0, por lo que  $Ex^2$  toma el valor máximo 62, mientras que cuando la situación es muy discriminante, todas las  $x$  valen 2 y  $Ex^2$  toma el valor mínimo 3(22). Al utilizar  $(62 - Ex^2)$  se invierten los valores mínimos y máximos, para dar una medida chica para poca discriminancia y grande para mucha. La división entre 62 es para considerar la diferencia con respecto al máximo valor posible; la multiplicación por 10 es para poder manejar más cómodamente el constructo DISC.

más discriminantes son las combinaciones K15 y K10, cuya discriminancia es de 7 (5).

combinaciones	ubicaciones	Nº estrat			DISCriminancia	n	% respuestas			RESP	
		S1	S2	=			S1	S2	=		
K0	U3.j	0	0	6	0.0	0	59	2	5	93	1.3
K2	U1.j, U2.j	6	0	0	0.0	0	17	82	6	12	3.1
K1	U1.j, U2.j	1	5	0	2.8	3	4	0	100	0	0.0
K2	U3.j	5	0	1	2.8	3	32	100	0	0	0.0
K3	U1.j, U2.j	0	5	1	2.8	3	238	2	95	3	1.0
K5	U1.j, U2.j	5	0	1	2.8	3	180	89	2	9	2.0
K7	U1.j, U2.j	5	1	0	2.8	3	16	69	31	0	4.3
K3	U3.j	0	4	2	4.4	4	1	0	0	100	0.0
K5	U3.j	4	0	2	4.4	4	8	63	0	38	4.6
K6	U1.j, U2.j	2	4	0	4.4	4	51	18	76	6	3.9
K1	U3.j	1	4	1	5.0	5	24	0	100	0	0.0
K4	U1.j, U2.j	1	4	1	5.0	5	198	6	85	9	2.7
K7	U3.j	4	1	1	5.0	5	7	86	0	14	2.4
K12	U3.j	3	0	3	5.0	5	54	0	6	94	1.1
K4	U3.j	1	3	2	6.1	6	95	12	58	31	5.5
K6	U3.j	2	3	1	6.1	6	16	25	69	6	5.9
K8	U3.j	3	2	1	6.1	6	38	39	37	24	6.8
K9	U3.j	3	2	1	6.1	6	53	58	23	19	5.7
K11	U3.j	3	1	2	6.1	6	98	18	55	27	5.9
K13	U3.j	1	2	3	6.1	6	63	8	16	76	3.9
K14	U3.j	3	1	2	6.1	6	124	27	20	52	6.2
K16	U3.j	2	1	3	6.1	6	86	22	24	53	6.1
K15	U3.j	2	2	2	6.7	7	43	21	23	56	5.8
K10	U3.j	2	2	2	6.7	7	44	20	45	34	6.4

Nº estrat. se refiere al número x de estrategias que llevan en cada caso a las respuestas "S1", "S2" y "=". DISC es la medida de la discriminancia; la segunda medida es una aproximación al entero más cercano. n es el número de respuestas no canceladas obtenidas para cada situación (En=1549). Entre los porcentajes de respuestas obtenidas, calculados en cada caso sobre n, las que aparecen en letras negritas corresponden a la respuesta correcta. RESP es la medida similar a DISC, calculada sobre las respuestas obtenidas.

5. DISC como medida de discriminancia no es más que la formalización del criterio utilizado para ordenar de K0 a K16 las diecisiete combinaciones posibles (en el capítulo 3, §3.2.1.2). Efectivamente, la correlación de Spearman entre este orden (tomando como empates K1 y K2, K4 y K5, etc) y la discriminancia (asignando a cada combinación el promedio de las que tiene, si son dos) es de  $r_s=0.82$ .

Por otra parte, conviene contrarrestar esta medida teórica de la discriminancia con los resultados obtenidos en la práctica; es decir, con la cantidad relativa de respuestas con cada una de las tres elecciones posibles en cada situación. Esto se puede apreciar en la misma tabla, cuya parte derecha reproduce los porcentajes (sobre el número de respuestas en cada situación) de respuestas correspondientes a cada decisión. Lo adecuado de la medida de discriminancia puede verse de dos maneras. La primera es a través de la correlación, para cada situación y cada decisión, entre el número de estrategias que confluyen en la decisión y el número de respuestas con esa decisión; esta correlación, ponderando en cada caso con respecto a  $n$ , tiene un valor  $r=0.88$ . La segunda manera es a través de la correlación, para cada situación, entre la medida teórica de discriminación DISC y un constructo calculado de manera similar para las respuestas obtenidas:

$$RESP = 10(1002 - E_y^2)/1002 \quad (6)$$

(donde las  $y$  son los porcentajes de respuestas "S1", "S2" y "=" obtenidas); esta correlación, ponderando también con respecto a  $n$  para cada situación, da un valor  $r=0.79$ .

Estas altas correlaciones permiten afirmar que la discriminancia es un factor importante en las decisiones tomadas por los sujetos. Sin embargo, las correlaciones, aunque buenas, deben tomarse "con un grano de sal", por limitantes como las siguientes:

- la discriminancia no es, ciertamente, el único factor que interviene; por ejemplo, como ya hemos visto, interviene fuertemente el nivel de dificultad de la propia situación (véase por ejemplo el caso de la respuesta correcta "S1" de K11, en la que además confluyen el mayor número de estrategias, pero en la que se obtiene el menor porcentaje de respuestas: como sabemos, K11 es una situación muy difícil);
- el número de estrategias confluyentes en una decisión no puede ser más que un indicador de la discriminancia, puesto que no todas las estrategias tienen el mismo peso: por ejemplo, como sabemos, {F+} es una estrategia mucho más atractiva que {R+};
- como para el estudio de la discriminancia no se tomaron en cuenta más que las estrategias principales, la tabla contiene aparentes anomalías, como el hecho de que en muchas de las situaciones en que alguna de las decisiones tiene 0 estrategias confluyentes (es decir, en la que ninguna de las estrategias consideradas lleva a esa decisión), hay más de 0 respuestas con esa decisión: tal es el caso de KO/U3.j en "S1" y "S2", donde las estrategias y mecanismos primitivos llevan respectivamente a 2 y 5 respuestas;

Sin embargo, la correlación alta y positiva entre la medida teórica de la discriminancia y los resultados reales indica que no pueden considerarse exclusivamente las elecciones de los sujetos para un análisis de los resultados, puesto que pueden estar fuertemente influenciados por el número de estrategias (correctas e

6. Para RESP, el valor máximo de  $E_y^2$  es 1002 (puesto que las  $y$  son porcentajes); el valor mínimo es 3(332).

incorrectas) que confluyen en ellas. Por ello, las investigaciones que incurren en esto sin considerar las estrategias de los sujetos y sin considerar cuáles posibles estrategias llevan a las decisiones tomadas pueden tener, de origen, un sesgo que limite fuertemente su validez (7).

Consideremos ahora el orden entre situaciones previsto por la hipótesis H7; es decir, un orden de acuerdo al porcentaje de respuestas correctas que dan los sujetos ante ellas. No se trata de los mismos porcentajes que se marcan en la tabla anterior, puesto que aquellos se refieren a las elecciones (correctas o incorrectas, con cualesquiera justificaciones), mientras que éstos se refieren a las respuestas correctas. Como se vio en los capítulos 6 y 7 (§6.3.3.1; §7.1), la manera de analizar las respuestas es doble: a través de los porcentajes de éxito mínimo seguro y máximo posible. En el capítulo 7 (§7.1.3) se llegó a una jerarquización de las situaciones de combinación/ubicación en seis niveles, que son los que se marcan en la siguiente tabla:

NIVEL	combinaciones	ubicaciones
I	K1 a K7; K15 K0, K8, K10, K12	U1.1, U1.3, U2.1, U3.1 U3.1
II	K1 a K7 K0, K9, K11, K13	U1.5, U2.5, U3.5 U3.5
III	K0 K1 a K7	U3.2, U3.3, U3.4 U2.2, U2.3, U2.4
IV	K14, K15, K26	U3.2, U3.3, U3.4
V	K1 a K5	U3.2, U3.4
VI	K6 a K11	U3.2, U3.4

Así, el trabajo realizado en el apartado §7.1.3 corrobora la hipótesis H7.

(Un punto que merecía probarse era la correlación entre el nivel de dificultad y la cantidad de posibles arreglos: de acuerdo con lo que se observó en el capítulo 3 (§3.2.3), hay, para  $n_1 \leq 10$  y  $n_2 \leq 10$ , una cantidad decreciente de arreglos de las combinaciones K1 a K16; si hubiera una correlación entre estas cantidades y el nivel de dificultad, éste podría eventualmente explicarse mediante el fenómeno de representatividad estudiado por Kahneman y Tversky: las combinaciones más difíciles lo serían porque se encuentran con menos frecuencia. Sin embargo, esta co-

7. Un caso particular es el trabajo de Fischbein et al. (1970), quienes piden a los sujetos justificaciones, pero lo hacen al final del experimento. Como por otra parte reportan que hay un efecto de aprendizaje durante el experimento, éste puede estar sesgando las justificaciones dadas así a posteriori.



relación es  $r_s = -0.19$ , por lo que dicha explicación no tiene sustento).

Tenemos, entonces, dos formas de ordenar jerárquicamente las situaciones de combinación/ubicación: por un lado, la señalada por H6, que es una jerarquización (teórica) a partir de la construcción de las categorías, medida a través de la discriminancia DISC y validada mediante las respuestas a cada opción; por otro lado, la señalada por H7, que es una jerarquización (práctica) a partir de los resultados correctos obtenidos en cada situación y que queda plasmada en el NIVEL. En la tabla de la siguiente página se puede apreciar cómo quedan clasificadas las diferentes situaciones de acuerdo con el nivel y la discriminancia.

Para estas situaciones, se obtiene un coeficiente de Spearman  $r_s = 0.55$ , lo que indica que hay una correlación positiva moderada entre ambas variables (DISC y NIVEL): las situaciones menos discriminantes tienden a ser las más fáciles y las más discriminantes tienden a ser las más difíciles.

NIVEL	DISC	combinaciones	ubicaciones
I	0	K0	U3.2, U3.3, U3.4
I	0	K2	U1.1, U1.3, 2.1
I	3	K3	U1.3, U2.1
I	5	K4, K12	U2.1, U3.1
II	3	K3, K5	U2.5
II	6	K9, K11, K13	U3.5
III	3	K1, K3, K5, K7	U2.2, U2.3, U2.4
III	4	K6	U2.2, U2.3, U2.4
III	5	K4	U2.3, U2.4
IV	6	K14, K16	U3.2, U3.3
IV	7	K15	U3.4
V	3	K2, K5	U3.2, U3.4
V	4	K1, K3	U3.2, U3.4
V	6	K4	U3.2, U3.4
VI	5	K7	U3.2, U3.4
VI	6	K6, K8, K9, K11	U3.2, U3.4
VI	7	K10	U3.2, U3.4

### 8.1.2.3. DIFERENCIAS ENTRE ESTRATEGIAS (H8, H9)

La segunda línea metodológica es la de las respuestas. Las categorías construidas aquí son las estrategias, y las hipótesis que se refieren a ellas son:

H8: Se puede establecer un orden de complejidad entre las estrategias que siguen los sujetos, desde las estrategias que se pueden considerar como primitivas hasta las estrategias que toman adecuadamente en cuenta toda la información contenida en una pregunta.

H9: Hay estrategias que son más dominantes que otras: son utilizadas preferentemente y, en una situación en la que lle-

{E>}, o las de proporcionalidad {P+}, {P=}). Sin embargo, como hemos visto, esto no ocurre así: las centraciones parecen quedarse ahí hasta la edad adulta (coexistiendo incluso con estrategias de relación correctas e incorrectas).

La segunda de las hipótesis plantea una jerarquización en términos de la relativa fortaleza de las estrategias simples. En el análisis de las estrategias realizado en el capítulo 7 (apartado §7.2.2), desglosé esto en la reactividad (como medida del grado en que una estrategia es percibida como satisfactoria) y la dominancia (como medida de la fortaleza de las estrategias); la interpretación general de estas dos variables se encuentra en el parágrafo §7.2.2.3.

### 8.1.3. H10: EFECTOS DE LAS VARIABLES DE SITUACION

La principal de las variables experimentales es la situación de los arreglos, caracterizada primordialmente a través de la combinación y la ubicación, y de manera secundaria a través de las variables de perceptividad, unos y multiplicidad. La hipótesis acerca de las situaciones fue enunciada en el capítulo 2 así:

H10: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones, incluyendo en ellas las variables de perceptividad, "unos" y multiplicidad.

Posteriormente, en el capítulo 3 esta hipótesis fue desglosada en cinco diferentes (una para cada variable de situación):

- H10.1: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes combinaciones;
- H10.2: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes ubicaciones;
- H10.3: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de perceptividad;
- H10.4: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de unos;
- H10.5: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante diferentes situaciones de multiplicidad.

A su vez, cada una de estas cinco hipótesis fue desglosada en dos o más hipótesis parciales.

en las ubicaciones de "pierdo-gano" que en las de "pierdo-empato" o de "empato-gano"; la tercera (H10.2.3), una mayor facilidad en las ubicaciones de "pierdo-empato" o de "empato-gano" que en las de "pierdo-pierdo" o de "gano-gano". Todas ellas fueron tratadas en el capítulo 7 (la primera en §7.1.1.3a; las dos últimas en §7.1.1.2f).

En resumen, el planteamiento de estas hipótesis parciales es una facilidad como la que se lee en el siguiente cuadro:

pierdo-pierdo gano-gano	pierdo-empato empato-gano	pierdo-gano	sit. extremosas de pierdo o gano
MAYOR DIFICULTAD		MAYOR FACILIDAD	

Mientras que los resultados parecen indicar un orden del siguiente estilo, muy similar pero con una diferencia en cuanto a las ubicaciones de tipo "pierdo-gano":

pierdo-pierdo gano-gano	pierdo-gano	pierdo-empato empato-gano	sit. extremosas de pierdo o gano
MAYOR DIFICULTAD		MAYOR FACILIDAD	

Por otra parte, en el capítulo 7 se hizo también un estudio del efecto de la lateralidad en las ubicaciones, de donde resultó que los arreglos "derechos" (de tipo "gano") son más difíciles que los "izquierdos" (de tipo "pierdo"), y estos últimos sólo un poco más difíciles que los simétricos (de tipo "pierdo-gano"), lo que se puede esquematizar como sigue:

gano		pierdo	pierdo-gano
MAYOR DIFICULTAD		MAYOR FACILIDAD	

### c) Perceptividad

La hipótesis acerca de la perceptividad fue desglosada en el capítulo 3 (§3.2.1.4b) en cinco hipótesis parciales. Las primeras cuatro corresponden a cada de las variables de perceptividad: la diferencia  $\delta_p$  entre las dos probabilidades  $p_1$  y  $p_2$ , la diferencia  $\delta_5$  entre  $\frac{1}{2}$  y la más cercana a  $\frac{1}{2}$  de las dos probabilidades, la diferencia  $\delta_0$  entre 0 y la más cercana a 0, y la diferencia  $\delta_1$  entre 1 y la más cercana a 1. Estas cuatro hipótesis fueron tratadas en el capítulo 7 (§7.1.4.1); su planteamiento se refería a mejores resultados:

- con mayores valores de  $\delta_p$ ;
- con menores valores de  $\delta_5$ ;
- con menores valores de  $\delta_0$ ;
- con menores valores de  $\delta_1$ .

Los resultados obtenidos apoyan las dos primeras hipótesis pero no las dos siguientes. La interpretación general va en el

cidad ENTRE). Cada una especulaba acerca de mejores resultados (y utilización de estrategias de proporcionalidad) con el valor 1 de la variable, resultados intermedios con valores mayores de 1 y peores resultados con el valor 0. Ambas hipótesis fueron tratadas en el capítulo 7 (§7.1.4.2).

La evidencia obtenida no apoya más que ligeramente la hipótesis referente a la multiplicidad DENTRO; en general, la supuesta facilidad para detectar múltiples en un arreglo no parece apoyar la presencia de estrategias de proporcionalidad.

La única conclusión válida al respecto es que es necesario experimentar más cuidadosamente con estas variables, en particular incluyendo arreglos en los que haya multiplicidades de un tipo pero no del otro. Esto podría contribuir a solucionar uno de los grandes problemas del estudio del concepto de probabilidad, que es la dificultad de desligarlo del concepto de proporcionalidad (9).

#### 8.1.3.2. ANALISIS DE OTRAS INVESTIGACIONES

El planteamiento utilizado de decisión binaria con extracción simple debería permitir, según lo afirmado en el capítulo 2, "una comparación al menos de tipo cualitativo con los hallazgos reportados por otros autores". Una comparación de los resultados con las tres referencias experimentales más importantes (Falk et al., Maury, Noelting) se expuso ya en el capítulo 7 (§7.1.2.5c). Sin embargo, esta comparación sería imposible para la mayoría de las investigaciones revisadas: por una parte, la metodología utilizada en cada una es diferente, lo que dificulta o imposibilita la comparabilidad (Hawkins y Kapadia, 1984, págs 365 a 369); por otra parte, son escasos los investigadores que reportan las preguntas que hacen (10), y aún más escasos los que reportan las respuestas que obtienen.

Aún, así, la metodología que he desarrollado permite comprender mejor y hasta entender el "éxito" o "fracaso" de algunos experimentos. Intentaré dar brevemente unos ejemplos de ello.

El hecho de que Noelting (1980) publique las preguntas con las que trabajó permite analizar con detalle sus categorías. Noelting define ocho categorías de preguntas que, de hecho, se basan en definiciones provenientes de diferentes variables (11);

9. Un esfuerzo en este sentido es el trabajo de Hoemann y Ross (1971), aunque adolece de algunos problemas de diseño.

10. Entre ellos, además de Noelting (1980), Falk et al. (1980) y Maury (1984, 1986), está el estudio de Lema y Morfín (1981).

11. Las categorías 1ª y 2ª corresponden a combinaciones (K3 y K5), la 3ª a ubicaciones (U2.2, U2.4), la 4ª y la 5ª nuevamente a combinaciones (K16 y K14/K15), la 6ª a "unos" ( $U_i=1$  ó  $U_j=1$ ), la 7ª a combinaciones (K10/K11) y la 8ª contiene varias combinaciones diferentes (K8, K9, K10), aparentemente sin que los arreglos tengan algo en común.

H13: Hay diferencias en las elecciones hechas y en las estrategias utilizadas por los sujetos ante preguntas con planteamiento de decisión y preguntas con planteamiento de equiparación; en particular, el primero conlleva un efecto de presión en contra de la respuesta 'me da igual' que el segundo no.

**a) Referente**

El análisis de esta variable se efectuó en el capítulo 7 (§7.4.1). Los sujetos adultos considerados en este estudio tuvieron mayor facilidad para la respuesta cuando se utilizaron objetos físicos que cuando se utilizó alguna representación de ellos (salvo el caso de los naipes, que llevaron a confusiones); las representaciones numéricas aparentan ser más fáciles que las representaciones gráficas, por lo menos en algunas situaciones.

Esto es congruente con los hallazgos reportados en otras investigaciones (Gigerenzer et al., 1989; Zaleska, 1974; Thornton y Fuller, 1981; Lecoutré y Durand, 1988).

**b) Tamaño**

La variable "tamaño" se analizó en el capítulo 7 (§7.4.3), pero los resultados no apoyaron la hipótesis planteada: no hay una evidencia contundente para afirmar que las situaciones con números pequeños de datos sean más fáciles de resolver que las que tienen números grandes.

**c) Planteamiento**

También el "planteamiento" fue analizado en el capítulo 7 (§7.4.2). Aunque, como se vio ahí, el planteamiento de equiparación fue muy poco explorado, permite ver que sí revierte el efecto en contra de la respuesta "da igual" que conlleva el planteamiento de decisión: en situaciones análogas, los sujetos tienden a utilizar estrategias de elección simples o compensantes de la igualdad cuando el planteamiento es de decisión, y a utilizar (por lo menos algunas de las) estrategias de igualdad cuando es de equiparación. Las estrategias de igualdad más favorecidas por el planteamiento de equiparación son {R=} y {P=}.

### **8.1.5. H14 Y H15: DESEMPEÑOS INDIVIDUALES**

Tres fueron las hipótesis planteadas en el capítulo 2 acerca del comportamiento de los sujetos. Las dos primeras se refieren a las diferentes respuestas de cada sujeto, mientras que la tercera se ocupa de comparar los sujetos entre sí.

La primera hipótesis es la correspondiente a la consistencia interna de cada sujeto. La segunda plantea, como una posible alternativa, que si no hay tal consistencia esto puede deberse a un efecto del mismo cuestionario, es decir, a una evolución del su-

Esto no es, por cierto, un hallazgo original. Aunque pocos investigadores plantean preguntas similares o idénticas, varios hablan del uso, por parte de los sujetos, de diferentes estrategias (13):

«Hay muy poca consistencia en la elección de estrategias; en general los alumnos [de 11 a 16 años] resuelven cada problema de manera distinta». (Green, 1983, pág. 39)

Una posible alternativa a la de consistencia en el caso de que ésta resultara falsa fue la hipótesis de evolución, que hablaba de la evolución del individuo a lo largo del cuestionario y, en particular, a su uso de estrategias cada vez más complejas a medida que avanza el cuestionario. Esto fue analizado en el capítulo 7 (§7.3.3), en dos vertientes. Por un lado la comparación de las respuestas de los sujetos a preguntas similares e idénticas (§7.3.3.1) sugirió que la mayoría de los sujetos no tuvieron una evolución significativa a lo largo del proceso, aunque una porción tuvo una evolución positiva; la evolución fue más notoria en el caso de las dos aplicaciones del cuestionario C1. Por otro lado, la separación de los cuestionarios en tres "etapas" (preguntas 1 a 5, 6 a 10 y 11 al final) mostró que las primeras respuestas tienden a ser simples (y no compuestas) y que, entre las estrategias simples, se utilizan preferentemente las centraciones (y no las relaciones).

Así, una parte de la inconsistencia observada puede achacarse a un efecto del cuestionario. Sin embargo, queda aún por explicar mucha variabilidad en las respuestas de los sujetos (por ejemplo, el efecto del cuestionario no puede explicar el hecho de que un sujeto utilice estrategias diferentes en dos preguntas idénticas consecutivas).

#### b) Diferencias entre individuos

La tercera hipótesis referente al comportamiento de los sujetos planteaba que diferentes sujetos utilizan diferentes procedimientos, como la utilización de una sola estrategia, o la alternancia de varias, o el uso de un repertorio amplio de estrate-

13. En particular Maury aborda el problema de la consistencia individual a partir del análisis de las respuestas ("mixtas") que contienen al menos un argumento pertinente y uno no pertinente. Concluye que el sujeto dispone de ambos, que «la concepción correcta es la que funciona para descubrir la solución, pero el alumno duda de su resultado [...] El argumento no pertinente tendría entonces una función en el nivel de la decisión, ya sea que traduzca otra concepción (incorrecta) o que sea simplemente el fruto de la adaptación a una "regla del juego" percibida por el alumno» (Maury, 1986, pág. 113). Sin embargo, a mi modo de ver esta interpretación se refiere sólo a un subconjunto de estrategias compuestas (por ejemplo, describe adecuadamente las compensaciones de {P=} mediante centraciones), pero no aborda globalmente el problema de la inconsistencia individual.

dos los estadios, y vuelto permanente (no sólo como un estado de transición entre los estadios II y III).

Este modelo coincide con el hallazgo de Lema y Morfín de «casos atípicos, esto es, individuos que aparentemente presentan reacciones de los tres estadios, o del primero y el tercero» (Lema y Morfín, 1981, pág. 293)

con la salvedad de que aquí no se trata de "casos atípicos", sino de uno de los comportamientos más frecuentes. Sin embargo, Falk et al. (1980, pág. 195) sí observan mosaicos en niños («los niños no parecen estar en un estadio de desarrollo puro»). Cabría entonces preguntarse si hay más mosaicos entre adultos que entre niños; si así fuera habría que ver a qué se debe (14). Los mosaicos pueden también explicar algunos de los fenómenos observados por Páez en su estudio piagetiano del grafismo en adultos venezolanos (1981).

En el modelo del mosaico, el sujeto es pasivo: el mosaico lo describe y, por así decirlo, lo atrapa: no parece haber remedio para un sujeto "mosaico". Es por ello que he preferido plantear otro modelo alternativo.

#### b) El modelo de la estantería

Este modelo no se refiere tanto a la manera de ser del sujeto sino al uso que hace de sus recursos. Plantea que un mismo sujeto tiene, para cada tipo de problema, distintas estrategias posibles (entre las que puede haber correctas e incorrectas). Las estrategias están todas igualmente disponibles (como en una estantería), y para resolver un problema en particular el sujeto elige alguna entre ellas.

Lo que distingue a los sujetos es la manera de elegir una estrategia entre todas las disponibles. Habrá sujetos que elijan siempre la misma estrategia (como Ram, que usa siempre {P+} o {P=}, o Reb, que usa siempre {F+} o {F=}), otros que utilicen unas u otras estrategias según la situación específica del problema por resolver, y otros que elijan de modo prácticamente aleatorio la estrategia que utilizarán cada vez.

Muchas veces me he preguntado cómo resuelvo yo misma los problemas que les planteo a los sujetos. Aunque no necesariamente es más fácil observarse a uno mismo que observar a los demás, creo que utilizo un procedimiento similar al descrito en segundo lugar. Cuando me enfrento a problemas del estilo de los planteados busco primero si reconozco que se trata de alguna situación "fácil": por ejemplo, si hay tantas blancas en un lado como en el otro (K4), sé que basta con contar las negras ({F+ \* D=} es correcta en K4), o si en un lado hay más negras que blancas y en el otro no, sé que puedo aplicar una estrategia de equilibrio. El

14. ¿No se observan mosaicos entre niños porque la coexistencia de estructuras de los estadios I y II no es tan notable y porque los niños que se estudian normalmente no han llegado al estadio III, lo que imposibilita detectar los mosaicos? ¿Será que muchos niños sí llegan "normalmente" al estadio III pero luego una especie de retroceso los hace "recuperar" los estadios anteriores para formar mosaicos?, etc.

los sujetos que participaron en este estudio tienen disponibles las estrategias adecuadas (y otras, como  $\{R+\}$ , inadecuadas), pero no hay una estructura jerárquica entre ellas: todas son igualmente atractivas, o lo son más las de aplicación más sencilla (como  $\{F+\}$  o  $\{E=\}$ )

El modelo de la estantería podría explicar varios fenómenos; por ejemplo, por qué las estrategias utilizadas en las primeras respuestas son estrategias simples (e, incluso, entre las simples, centraciones): el procedimiento de búsqueda de una estrategia llega a ellas primero porque son más accesibles (o bien porque son de aplicación más fácil, o bien porque aparecen primero en el desarrollo cognitivo), y sólo después de algunas aplicaciones de estas estrategias, cuando el sujeto de algún modo siente que son insuficientes (por ejemplo, porque no están considerando toda la información del problema), es que se vuelve a lanzar el procedimiento de búsqueda de una estrategia, ahora para encontrar algo más sofisticado (por ejemplo, una estrategia de relación, o una estrategia compuesta).

Si el modelo de la estantería es un buen modelo, podría tal vez aplicarse a otras áreas del conocimiento matemático, en particular al concepto de proporcionalidad. Sin embargo, hay una razón por la que resultaría particularmente adecuado para la probabilidad, que tiene que ver con la naturaleza misma de los fenómenos aleatorios. Supongamos, por ejemplo, que un sujeto se encuentra ante el arreglo  $(2,1)(5,4)$  en el experimento del juego de naranja (¿qué jarra contiene el líquido con más sabor a naranja, la que tiene dos vasos de concentrado y uno de agua, o la que tiene cinco de concentrado y cuatro de agua?), y que de alguna manera al sujeto le atraen las estrategias de relación sustractiva. Dirá algo así como "las dos saben igual, porque las dos tienen un vaso más de concentrado que de agua". Pero si tiene enfrente las dos jarras, y prueba su contenido, sabrá que la jarra  $(2,1)$  tiene más sabor a naranja que la otra, y después de un par de pruebas semejantes renunciará al uso de  $\{R=\}$ : esta estrategia dejará de estar disponible (y eventualmente desaparecerá de la estantería), porque entró en contradicción con la realidad. Sin embargo, si el mismo sujeto se enfrenta al mismo arreglo en un planteamiento de extracción aleatoria, y si tiene enfrente las dos urnas, una o dos o tres extracciones no lo persuadirán de nada: tendría que efectuar muchísimas, y eso no es, en general, factible:  $\{R=\}$  será una estrategia más reacia en problemas de probabilidad que en problemas de proporcionalidad.

Entre los trabajos que he revisado, dos proponen ideas similares al modelo de la estantería. Por una parte, Lecoutre y Durand (1988, pág. 367) se preguntan si podrían existir en un mismo sujeto diferentes modelos (estrategias) disponibles (y en particular un modelo correcto) aun si el sujeto utiliza para responder uno de ellos preferiblemente. Por otra, Maury afirma que «ciertos alumnos [de preparatoria] disponen de varios procedimientos de resolución, y eligen uno u otro en caso de dificultades de cálculo» (Maury, 1986, pág. 146), sobre todo cuando éstos no están completamente automatizados, y que «algunos de esos modelos (no



	C1 + C2 + C4	C3 + C6	TOT
interpretadas	882 (74%)	262 (61%)	1144 (70%)
TOTAL DE RESPUESTAS	1197	433	1630

Parecería, pues, que se obtiene un porcentaje mucho mayor de respuestas interpretadas cuando se le pide al sujeto que se exprese por escrito que cuando se le entrevista. Sin embargo, el alto porcentaje de respuestas no interpretadas en los experimentos de entrevistas se debe a una gran cantidad de preguntas en las que los sujetos no dieron una justificación y ésta no se les pidió (respuestas "sin justificación"), mientras que en los experimentos de respuestas escritas la gran mayoría de las respuestas sin interpretación se debió a que, aunque había una justificación, ésta no pudo ser interpretada o debió ser cancelada. Por ello, los porcentajes deben ser calculados con respecto al total de preguntas con justificación, como se ve en la siguiente tabla (corregida a partir de la información de la tabla de §6.2.3.3), a partir de la cual se puede ver que la afirmación de la hipótesis H16 quedó corroborada (además, con  $p < .01$ ):

	C1 + C2 + C4	C3 + C6	TOT
interpretadas	882 (75%)	262 (92%)	1144 (79%)
TOTAL JUSTIFICADAS	1172	284	1456
sin justificación	25	149	174
total de respuestas	1197	433	1630

En cuanto a la hipótesis H17, podemos comparar los resultados obtenidos con un solo sujeto (por escrito: C1 y C2 o verbalmente: individuos I, O, X de  $C6=C6(i)$ ), con dos sujetos (verbalmente, binomios J-M y T-V de C3, W-Z de  $C6=C6(b)$ ) y con un equipo de discusión (por escrito: C4). Esto se muestra en la siguiente tabla, realizada con la misma técnica que la anterior:

	un solo sujeto		2 sujetos	equipo
	C1 + C2	C6(i)	C3 + C6(b)	C4
interpretadas	762(74%)	136(96%)	126(89%)	120(82%)
TOTAL JUSTIFICADAS	1026	142	142	146
sin justificación	21	12	137	4
total de respuestas	1047	154	279	150

El hecho de que en unos experimentos la expresión haya sido escrita y en otros verbal dificulta una interpretación global del

Aunque fueron ya comentadas en los capítulos 5 (§5.2) y 6 (§6.2.3), pueden ser pertinentes algunas observaciones más.

El análisis de tipo lingüístico realizado en el capítulo 5 mostró una gran falta de precisión en el lenguaje utilizado por los sujetos. Indagar el por qué de esto sería un interesante tema de trabajo... para un lingüista genuino. Yo sólo adelantaría algunos apuntes a nivel hipotético. Por una parte se trata evidentemente de la imprecisión inherente al lenguaje común, y por lo tanto no tiene nada de extraordinario ni de indagable. Pero el problema es que no se trata aquí del lenguaje común, sino de los intentos realizados por estudiantes de utilizar un lenguaje técnico que no dominan. Yo interpreto estos fallidos intentos como reflejos de un problema educativo: desde la educación básica estos estudiantes han estado oyendo hablar de cantidades y de proporciones, de posibilidades y hasta de probabilidades, pero nunca se han apropiado de los términos ni, lo que es más grave, de los conceptos.

El análisis de tipo lingüístico que emprendí contribuyó eficazmente no sólo al descifrado de las respuestas sino también al análisis de los resultados. Por un lado, impuso una restricción de cautela al descifrar e interpretar las respuestas, al mostrar por ejemplo que no necesariamente probabilidad es 'probabilidad' ni necesariamente 'probabilidad' es probabilidad... Por otro lado, el análisis del tipo de razones por las que algunas respuestas no fueron interpretadas (falta de justificación, falta de argumentación, justificación descriptiva) contribuyó en el capítulo 7 a comprender la mayor facilidad o dificultad de algunas situaciones (más respuestas sin justificación en las situaciones fáciles, más justificaciones descriptivas en las difíciles, lo que permite pensar que pudieran ser intentos fallidos de justificación de alguna estrategia de difícil expresión). Finalmente, el uso de la diferencia ("dif") entre los porcentajes de éxito mínimo seguro y máximo posible contribuyó también a evaluar la mayor facilidad o dificultad de las situaciones.

Por otra parte, me preocupa la escasez de autores que se preocupan por evaluar la calidad de las expresiones (verbales o escritas) emitidas por los sujetos que estudian. Ciertamente, esto puede deberse a una insuficiencia en mi revisión bibliográfica; pero entre los que he revisado sólo Falk et al. (1980) y Green (1983) insisten en la necesidad de hacerlo, aunque también lo mencionan en sus revisiones Hawkins y Kapadia (1984), y Garfield y Ahlgren (1988). También puede deberse a que la población que yo estudio es particularmente problemática al respecto <sup>(16)</sup>, aunque los autores que menciono también han observado problemas entre las poblaciones que ellos estudian; por ejemplo, Falk et al. (1980, pág. 200) indican que algunos de sus sujetos (niños de 5 a 11 años de clase media-alta en Jerusalem) «daban explicaciones verbales erróneas, formulando principios de elección equivo-

16. Véase por ejemplo la diferencia en interpretabilidad de las respuestas obtenidas por Maury (1984, 1986) en aplicaciones por escrito.

una sucesión de preguntas que lleven a "romper" la estrategia y le hagan ver la necesidad de recurrir a otra, más adecuada.

He observado el efecto didáctico de la puesta en común de las estrategias utilizadas por un grupo de alumnos prácticamente en todos los cursos de Estadística I que he impartido desde la realización del segundo experimento reportado en este trabajo. Aunque cada vez he variado la modalidad de aplicación, ésta consiste en general en dos etapas: en la primera, les pido a los alumnos que resuelvan de manera individual varios ejercicios del tipo de los aquí planteados y que anoten sus respuestas; en la segunda, les propongo una discusión en equipos de trabajo o una discusión de todo el grupo o, si el tiempo escasea, yo resumo ante todos las diferentes maneras de resolver algunos de los ejercicios.

En general, el primer efecto es de sorpresa: cada sujeto está sumamente sorprendido no sólo de que los demás no vean tan obvio lo que para él es autoevidente, sino de la misma sorpresa de los demás, y del hecho de que defiendan como verdades absolutas soluciones que al sujeto le parecen mentiras gigantes. Me vienen a la mente dos imágenes específicas. Una es la sorpresa del sujeto Adr del segundo experimento cuando vio que era el único en utilizar {F-} y {D+}. La otra es las expresiones de un grupito de alumnas del curso pasado (en el que yo expuse las estrategias): todas dejaron la cabeza fija y abrieron ojos muy grandes ante la mayoría de las estrategias pero asintieron enérgicamente con una de ellas; sin embargo cada una asintió ante una estrategia diferente, y cuando les hice notar estas conductas primero se miraron unas a otras con la misma sorpresa de ojos muy abiertos y luego prorrumpieron en risas.

Esto tiene más que un mero valor anecdótico. El hecho de que un sujeto enfrente sus propias intuiciones a las intuiciones de otros es el primer paso para romper estrategias incorrectas porque hace que disminuya la sensación de coerción que conlleva toda intuición: si los demás tienen soluciones distintas a la mía y si cada quien cree en la suya con la misma sensación de certeza que yo en la mía, es posible que se trate de una sensación subjetiva de certeza y no de una certeza objetiva de la solución, y por lo tanto puedo sospechar por lo menos tentativamente de la corrección de la mía. Aunque esta sospecha puede afectar también a intuiciones correctas (típicamente a las estrategias de equilibrio en ubicaciones válidas), no saldrán más que fortalecidas de la puesta a prueba. Esto podría justificar el fenómeno ocurrido en el cuarto experimento, donde varios equipos desembocaron en estrategias de equilibrio.

La segunda hipótesis se refiere a esfuerzos didácticos específicos para el rompimiento de intuiciones incorrectas. Todos los maestros quisiéramos contar con «situaciones didácticas que permitan que los alumnos desechen los modelos erróneos» (Maury, 1984, pág. 210) y, aunque no fue el objetivo de este trabajo el

Sea como fuere, para poder romper las estrategias incorrectas utilizadas por un sujeto, es necesario primero saber cuáles son éstas: sería contraproducente, por ejemplo, intentar romper {R=} en un sujeto al que nunca se le ha ocurrido una relación sustractiva. Si se llega a establecer un diagnóstico de cada sujeto, podría incluso pensarse en un programa de autoenseñanza mediante computadora, que vaya planteando preguntas y sometiendo a prueba las estrategias incorrectas en situaciones cada vez más extremas. A la par, el programa podría permitirle al sujeto una simulación de extracciones (con conteo de resultados) para verificar sus respuestas.

Para terminar este apartado, voy a parafrasear las preguntas fundamentales que Hawkins y Kapadia (1984, pág. 351) proponen para la investigación sobre la enseñanza de la probabilidad<sup>18</sup>, intentando aplicarlas específicamente a adultos:

- (1) ¿Qué conceptos de la probabilidad tienen los adultos?
- (2) ¿Cómo podrían cambiarse estos conceptos?
- (3) ¿Qué relación hay entre los conceptos intuitivos o subjetivos y los conceptos que están mediados socialmente en el aula y que constituyen el conocimiento de la probabilidad formal?
- (4) ¿Hay una edad en la que el adulto ya no puede ser introducido a la probabilidad formal?
- (5) ¿Existen técnicas óptimas de enseñanza y de aprendizaje que tomen en cuenta los conceptos espontáneos que tienen los adultos acerca de las nociones probabilísticas durante el desarrollo de su comprensión de la probabilidad formal?

Yo he intentado contestar (parcialmente) a la primera pregunta, y creo que además he aportado elementos para la respuesta a las siguientes, pero mucho trabajo queda por hacer.

### 8.1.9. H23: HIPOTESIS GENERAL

La última de las hipótesis planteadas abarca todas las líneas metodológicas:

H23: Si se construyen adecuadamente los sistemas de categorías para las variables experimentales y de respuesta, si se plantean a los sujetos las preguntas adecuadas en el cuestionario adecuado y en la forma adecuada, si las respuestas obtenidas son adecuadamente descifradas e interpretadas, y si cada sujeto es consistente en su elección de estrategias, entonces habrá una buena correlación para cada sujeto entre situaciones y estrategias utilizadas. Si esto ocurre, puede diseñarse un cuestionario tal que el patrón de res-

<sup>18</sup>. Ver, en el capítulo 1, el apartado §1.4.2.

bien cometen errores al aplicar alguna. Sin embargo, bastantes patrones individuales se aproximaron al modelo derivado de algún principio incorrecto.» (Falk et al., 1980, pág. 195)

A pesar de no poder afirmar como cierta la hipótesis, no considero que deba ser desechada. Por un lado, aun a pesar de la inconsistencia general de los sujetos, existe una relación entre situaciones y estrategias, como lo mostró el análisis del capítulo 7 (ver también la hipótesis H10, §8.1.3, pág. 443).

Por otro lado, hay al menos tres variables de situación que en este trabajo no se han explorado a fondo (perceptividad, unos y multiplicidad). Un diseño de cuestionarios que las incluyera más meticulosamente podría permitir que la definición de "preguntas similares" las abarcara; esto podría cambiar los resultados de las "preguntas similares", con lo que tal vez se obtendrían menores inconsistencias.

Con ello, claro, no se eliminarían las inconsistencias encontradas en las preguntas idénticas. Estas también podrían ser exploradas más a fondo, en la búsqueda de causantes de las inconsistencias; algunas variables que se podrían explorar son: el efecto de los lados A y B (composición, balance con respecto a  $\frac{1}{2}$  y tal vez también cercanía a 0 y a 1), las preguntas inmediatamente anteriores (sus situaciones, las estrategias utilizadas por los sujetos, el balance con respecto a  $\frac{1}{2}$  de los lados A y B), las estrategias utilizadas por el compañero (en el caso de entrevistas de binomio), la distancia en número de preguntas entre cada dos idénticas.

Por otro lado, aun a pesar de las inconsistencias halladas (y por hallar), puede aún pensarse en un cuestionario cuyo patrón de respuestas indique, si no la estrategia utilizada por cada sujeto en cada situación, por lo menos las estrategias que tiende a utilizar en cada situación.

Podría entonces sugerirse un programa de cómputo que lleve, a través del planteamiento de una gama amplia de situaciones (incluyendo preguntas similares e idénticas), a un diagnóstico tentativo de cada sujeto, diagnóstico que de todos modos debería complementarse con una entrevista para afinar lo que no se pueda realizar de manera automática. Si esto pudiera realizarse, el mismo programa podría alimentar al otro (de rompimiento de intuiciones incorrectas) cuya existencia hipoteticé anteriormente (pág. 463).

## 8.2. RECAPITULACION FINAL

En esta última sección pretendo revisar tres aspectos específicos. Por un lado, quisiera dar fe una vez más de las principales ideas que tomé de otros investigadores, tanto a nivel teórico como a nivel experimental. Por otro lado, me parece impor-

construyeron. Incluso, si se toman en cuenta las proporciones de arreglos de cada situación con que se enfrenta la gente en la vida diaria, así como la proporción en que resulta que estrategias simples como las de centración o la de relación sustractiva llevan a respuestas que coinciden con la correcta, podría ser que hasta en los problemas de decisión binaria con extracción simple en urnas sea válida la misma heurística de representatividad como modelo explicativo de las respuestas de los sujetos.

Sylvette Maury es, tal vez, la principal referencia experimental, porque ella trabajó con el mismo planteamiento que yo, métodos experimentales muy comparables y, sobre todo, porque las edades y las condiciones académicas de los sujetos con los que ella trabajó son los más semejantes a los de los sujetos con los que yo trabajé. A pesar de ello, son notables las diferencias en resultados, sobre todo en cuanto a la facilidad de expresión de los sujetos y en cuanto al nivel general de sus respuestas.

Gérard Noelting aportó, para su estudio sobre el jugo de naranja, una estructura que sirvió fuertemente de apoyo, tanto para la construcción de categorías para las preguntas como para la interpretación de las respuestas, en particular con las categorías DENTRO y ENTRE.

El artículo de Ruma Falk cayó en mis manos cuando ya estaba muy avanzado el trabajo experimental y fue una evidente sorpresa para mí descubrir que en muchos aspectos yo había estado caminando por el mismo camino que ya había trazado Falk. De hecho, creo que ambos trabajos se complementan entre sí, principalmente porque los sujetos considerados en ese trabajo son niños de 4 años y yo estudié sólo adultos jóvenes.

### 8.2.2. ALGUNAS PROPOSICIONES PARA LA SIGUIENTE ETAPA

En la introducción al capítulo 7 mencioné que faltó por realizarse una tercera etapa del trabajo experimental. Si ésta llega a efectuarse, podrían considerarse las siguientes propuestas, que ordeno aquí según las tres líneas metodológicas.

En la línea de las preguntas, podrían conservarse las combinaciones tal como fueron definidas, con un eventual cambio en la numeración.

La clasificación de las ubicaciones planteó algunos problemas en el momento del análisis: en particular, el hecho de que la situación piagetiana de doble imposibilidad (y la de doble certeza) estuviera incluida en la misma ubicación que una de las de imposibilidad-posibilidad (certeza-posibilidad), así como el hecho de que las ubicaciones U3.2 y U3.4 comprendieran tanto situaciones de proporcionalidad como de no proporcionalidad. La propuesta sería, entonces, redefinir las trece ubicaciones actuales en las diecisiete categorías ( $V_{ijk}$ ) de la tabla siguiente:

bría las siguientes tres posibilidades: 1), incorporar en el mismo cuestionario más preguntas de equiparación; 2), proponer dos cuestionarios distintos, paralelos entre sí, uno con preguntas en planteamiento de decisión y el otro con preguntas en planteamiento de equiparación; 3), cambiar la forma tricotómica de respuesta que se ha utilizado por la "happiness scale" de Wilkening y Anderson (1982) mencionada en el capítulo 1 (21).

En la línea de las respuestas, el único cambio en categorías que propondría sería en las estrategias de equilibrio, para que pudieran seguir correspondiendo a las nuevas "ubicaciones"  $V_{ijk}$ . En particular, habría que considerar como puntos de referencia no sólo  $\frac{1}{2}$  sino también 0 y 1: así, en  $V_{131}$ , donde la estrategia que vale ahora es {E=} porque ("pierdo-pierdo"), se tendría la posibilidad de considerar una estrategia del tipo "estoy seguro de perder vs tengo más posibilidades de perder que de ganar". De este modo, todas las respuestas a preguntas de las antiguas ubicaciones extremas que fueron interpretadas como {F+} ó {D-} sería asignadas a estas nuevas categorías de interpretación. A la nueva familia de estrategias debería asignárseles un nombre distinto del de "estrategias de equilibrio", puesto que ya no tendrán como único punto de referencia el centro del intervalo.

Por otra parte, podría convenir incorporar, por lo menos a nivel tentativo, una nueva dimensión en las estrategias compuestas, propuesta por Maury (1986), que es el orden en que aparecen las diferentes argumentaciones en la respuesta del sujeto.

En la línea de los métodos hay que seguir prestando particular atención a los métodos de interrogación y a los de descifrado. No ha llegado todavía, me parece, el momento en que pueda prescindirse por completo de las entrevistas; sin embargo, tampoco es necesario aplicarlas en exclusividad: podría aplicarse un cuestionario por escrito y, o bien complementar cada uno con unas cuantas preguntas en entrevistas cortas, o bien aplicar además el mismo cuestionario en entrevistas largas. Cuando se utilice el método de interrogación en equipos, sería recomendable empezar con una aplicación individual por escrito, dejar luego que los integrantes del equipo discutan entre sí, y finalizar el ejercicio con la redacción común de una propuesta de equipo.

### 8.2.3. A MODO DE CONCLUSION

El problema que yo he estudiado no es, de ningún modo, nuevo. Sin embargo, muchos de los aspectos de la manera en que lo he estudiado sí son parcial o totalmente novedosos.

Aunque hay varios estudios acerca de las respuestas de niños al tipo de ejercicios planteados aquí, son muy escasos los traba-

21. Con esto se podrían evitar las dificultades del planteamiento de equiparación (para los sujetos, dificultades en la expresión; para el investigador, dificultades en el análisis).

Quisiera terminar con una reflexión que no se refiere, como las del apartado anterior, a la siguiente etapa de esta investigación, sino a una siguiente etapa de la humanidad. Las grandes anomalías y contradicciones descubiertas por éste y por otros trabajos entre la probabilidad formal y la probabilidad intuitiva no son, necesariamente, un problema de falta de adaptación de la segunda a la primera. No voy a afirmar que la única respuesta válida para los problemas de probabilidad es, entonces, la probabilidad intuitiva: como dije en el capítulo 1, yo he sido formada en el siglo XX y pienso que la probabilidad "correcta" es la formal. Sin embargo, podría caber un resquicio de duda: ¿y si estamos mal?

«La historia de la teoría de la probabilidad, con todos sus cambios en la interpretación de la probabilidad, en el significado de lo "descriptivo" y lo "normativo" debería sin embargo llevarnos a usar con cautela un método formal como la norma, contra la cual esos juicios son denigrados como irracionales, independientemente de su contenido y su contexto. Una mente racional podría ser más que el tipo de estadístico intuitivo que aplica mecánicamente la misma fórmula (ya sea de utilidad esperada, el teorema de Bayes, o cualquier otra) a todos los contenidos y en todos los contextos. Pero una mente racional así es mucho más difícil de definir.» Gigerenzer et al. (1989, pág. 232)

... y, también, tal vez, de alcanzar.



## BIBLIOGRAFIA (1)

- Ackerman, Spencer P. (1980). Relationship of dogmatism to formal operations. *Journal of Research and Development in Education*, 1980, 13(3): 66-77.
- Alarcón, Jesús (1982). *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans: résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4ème et de 5ème* (Thèse de doctorat du 3è cycle). Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1982.
- Alatorre, Silvia (1991). Los contextos, las creencias y las intuiciones: acerca de Cobb, Tversky y Kahneman. *Educación Matemática*, 1991, 3(1): 40-57.
- Bastien, Claude (1984). Réorganisation et construction de schèmes dans la résolution de problèmes. *Pf*, 1984, 29(3;4): 243-246.
- Beyth-Marom, Ruth and Shlomith Dekel (1985). *An elementary approach to thinking under uncertainty*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale New Jersey, 1985.
- Brainerd, Charles J. (1981). Working memory and the developmental analysis of probability judgement (1981). *Psychological Review*, 1981, 88(6): 463-502.
- Carnap, R. (1953). What is probability?. *Scientific American*, 1953, 189: 128-138.
- Chalini Herrera, Antonio (1979). La evolución del concepto de azar en el niño. En: Martínez Sánchez, Jorge (compilador) *Lecturas en teorías del aprendizaje*. Sección de Matemática Educativa del CIEA, Instituto Politécnico Nacional, México, 1979.
- Cobb, Paul (1986). Context, goals, beliefs and learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1986, 6(2): 2-9.
- Cohen, John (1957a). Subjective probability. *Scientific American*, 1957, 197: 129-138. (Existe también una traducción al español en Carnap, R. et al. *Matemáticas en las ciencias del comportamiento*. Alianza Editorial, Madrid, 1974).
- Cohen, John, E.J. Dearnaley, and C.E.M. Hansel (1957b). Measures of subjective probability: estimates of success in performance in relation to size of task. *British Journal of Psychology*, 1957, 48: 271-275.
- Cohen, L. Jonathan (1980). Whose is the fallacy? A rejoinder to Daniel Kahneman and Amos Tversky. *Cognition*, 1980, 8: 89-92.
- Cohen, L. Jonathan (1981). Can human irrationality be experimentally demonstrated? *Behavioral and Brain Sciences*, 1981, 4: 317-31.

1. Nota: la fecha entre paréntesis después del nombre es la fecha de escritura; puede diferir de la fecha de la referencia.

- Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Chapter 18, "Probability and Statistics", pp. 581-614. D. Reidel Publishing Co, Dordrecht, Holland.
- Garfield, Joan and Andrew Ahlgren (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1): 44-63.
- Gigerenzer, Gerd, Zeno Swijtink, Theodore Porter, Lorraine Das-ton, John Beatty and Lorenz Krüger (1989). *The Empire of Chance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- Green, D.R. (1983). School Pupil's Probability Concepts. *Teaching Statistics*, 1983, 5: 34-42.
- Green, D.R. (1987). Encouraging probabilistic thinking. *Journal of Computer Assisted Learning*, 1987, 3: 156-163.
- Guajardo Ramos, Eliseo (1984a). Presentación de Jean Piaget, su obra y su tiempo. En: Guajardo Ramos, E. et al. (eds). *Paquete del autor Jean Piaget*. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1985.
- Guajardo Ramos, Eliseo (1984b). Polémica vigente en torno a Piaget. En: Guajardo Ramos, E. et al. (eds). *Paquete del autor Jean Piaget*. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1985.
- Hacking, Ian (1990). *The Taming of Chance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- Hawkins, Anne S. and Ramesh Kapadia (1984). Children's concep-tions of probability; a psychological and pedagogical re-view. *Educational Studies in Mathematics*, 1984, 15: 349-377.
- Heitele, Dietger (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 1975, 6: 187-205.
- Hewson, Mariana G. and Peter W. Hewson (1983). Effect of instruc-tion using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 20(8): 731-743.
- Hoemann, Harry W. and Bruce M. Ross (1971). Children's under-standing of probability concepts. *Child Development*, 1971, 42: 221-236.
- Inhelder, Bärbel y Jean Piaget (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, págs 190 a 197 y 271 a 272. Paidós, Barcelona, 1985.
- Inhelder, Bärbel, M. Bovet y H. Sinclair (1974). *Aprendizaje y estructuras de conocimiento*, Introducción. Morata, Madrid, 1975.
- Jeffrey, Richard (1987). Risk and human rationality. *The Monist*, 1987, 70: 223-36.
- Jones, Mary Helen, and Shephard Liverant (1960). Effects of age differences on choice behavior. *Child Development*, 1960, 31: 673-680.
- Kahneman, Daniel and Amos Tversky (1972). Subjective probability: a judgement of representativeness. *Cognitive Psychology*, 1972, 3: 430-454. (In: Kahneman, D., P. Slovic and A. Tversky (eds). *Judgement Under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press, 1982).

- Maury, Sylvette (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes* (Thèse de doctorat d'Etat). IREM de Montpellier et Université des sciences et techniques du Languedoc, 1986.
- McCrary, Kay and Huey B. Long (1980). The role of environmental stimulation in adult cognitive functioning. *Journal of Research and Development in Education*, 1980, 13(3): 33-43.
- McGervey, John D. (1986). *Probabilities in Everyday Life*. Ivy Books, New York, 1989.
- Mevarech, Zemira R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 1983, 14: 415-429.
- Noelting, Gerald (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I, Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 1980, 11: 217-253.
- Noelting, Gerald (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II, Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 1980, 11: 331-363.
- Ojeda Salazar, Ana María (1987). Ideas fundamentales y actividades modelo en la enseñanza de la probabilidad. *Cuadernos de Investigación*, 1987, 2(3). Sección de Matemática Educativa del CIEA del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.
- Páez Sánchez, Lelis (1981). *El grafismo como índice del grado de desarrollo de la representación mental del espacio*. Memoria de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Física y Matemáticas, 1981.
- Piaget, Jean (1924). *El juicio y el razonamiento en el niño*, Capítulo III. Guadalupe, Buenos Aires, 1973.
- Piaget, Jean (1926). *La representación del mundo en el niño*, Introducción: El método clínico. En: Delval, J. (comp.) *Lecturas en psicología del niño; 1. Las teorías, los métodos y el desarrollo temprano*, Capítulo 10. Alianza Editorial, Madrid, 1978.
- Piaget, Jean (1950a). *Introducción a la epistemología genética*. Tomo II: El pensamiento físico. Capítulo 6, "El azar, la irreversibilidad y la deducción". Paidós, Buenos Aires, 1975.
- Piaget, Jean (1950b). Une expérience sur la psychologie du hasard chez l'enfant. *Acta Psychologica*, 1950, 7: 323-336.
- Piaget, Jean, et Bärbel Inhelder (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France, Paris, 1974.
- Piaget, Jean (1970). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, 1972, 15(1): 1-12.
- Piaget, Jean, y Rolando García (1980). *Psicogénesis e historia de las ciencias*, Introducción. Siglo XXI, México, 1987.
- Pitz, Gordon F. (1980). Sensitivity of direct and derived judgements to probabilistic information. *Journal of Applied Psychology*, 1980, 65(2): 164-171.

- Walkerdine, Valerie (1982). From context to text: a psychosemiotic approach to abstract thought. (In: Beveridge, M. (ed). *Children Thinking through Language*, Chap. 6., pp 129-155. Edward Arnold, London, 1982).
- Weir, Morton W. (1964). Developmental changes in problem solving strategies. *Psychological Review*, 1964, 71(6): 473-490.
- Wilkening, Friedrich and Norman H. Anderson (1982). Comparison of two rule-assessment methodologies for studying cognitive development and knowledge structure. *Psychological Bulletin*, 1982, 92(1): 215-237.
- Zaki, Moncef (1990). *Traitements de problèmes de probabilité en situation de simulation* (Thèse de doctorat). Université Louis Pasteur, Institut de recherche mathématique avancée, Strasbourg, 1990.
- Zaleska, Maryla (1974). Influence du mode de présentation de séries aléatoires sur le choix d'une stratégie: 1, situations hypothétiques. *Année Psychologique*, 1974, 74: 125-144.

## INDICE ANALITICO

- A priori, probabilidad: 5  
 Abiertas, urnas: 65, 81  
 Acomodación (piagetiana): 14, 453  
 Acomodo, mecanismo de: 219, 319, 442  
 Adultos: 25, 53, 470  
 Ajuste y anclaje: 40  
 Análisis: lingüístico: 459; estadístico: 344  
 Anclaje: 170  
 Aplicación didáctica: 88, 94, 107, 460  
 Argumentos: 160  
 Aritmética: 272  
 Arreglo(s): 119, 136, 167; idénticos: 87, 92, 151, 154-156, 417, 419, 422; de una variable: 18, 21, 63, 369; de dos variables: 18, 20, 21, 63, 74, 105, 372, 376, 387; discriminantes: 121, 148, 301; similares: 88, 92, 151, 153-155, 417, 419, 450, 465  
 Asimilación: 14, 453  
 Atracción: al punto de equilibrio: 187; -, mecanismo de: 218, 442, 320  
 Avance en las respuestas: 421  
 Banco de preguntas: 146  
 Binomios: 90, 92, 106, 230, 456-458  
 Búsqueda: 268  
 Canceladas, respuestas: 317, 319-322, 338, 424  
 Canicas: 119, 163  
 Cantidad: 246, 249  
 Cartas: 119, 163, 246  
 Casos: - desfavorables: 119, 136; - favorables: 119, 136; - totales: 119, 136  
 Categorías: 105, 116, 436, 470; para la interpretación de las respuestas: 100, 160, 436, 470; - para las preguntas: 99, 436, 470; piagetianas: 112, 127, 287, 288, 290, 348, 388, 470 (Ver también P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P9', P10)  
 Centración: 20, 168, 170, 287, 291, 297, 442  
 centraciones de igualdad: - en los casos desfavorables: 178; - en los casos favorables: 175; - en los casos totales: 172  
 centraciones en los casos: - desfavorables: 115, 176, 446; favorables: 115, 176, 446; totales: 115, 170, 173  
 centraciones negativas: 169; - en los casos desfavorables: 176; en los casos favorables: 174; en los casos totales: 170  
 centraciones positivas: 169; - en los casos desfavorables: 178; - en los casos favorables: 173; - en los casos totales: 171  
 Centrales, ubicaciones: 362  
 Cero: 276  
 Cerradas, urnas: 65  
 Certeza: 93, 387  
 Clase: 119, 136, 168  
 Clásica, probabilidad: 6, 246  
 Clasificación de los sujetos: en estadios piagetianos: 105; en niveles: 412, 413, 452  
 Clínico-crítico, método: 69, 224, 229

- DENTRO: 133, 134, 146, 179,  
193, 239, 263, 265, 290,  
295, 393, 395
- Descifrado de las respuestas:  
107, 223, 239, 304, 305,  
338, 458
- Desconcierto: 222, 349
- Desfavorables, casos: 119,  
136
- Desigualdad de los casos: -  
favorables e igualdad de  
los casos posibles (P8):  
63, 112, 114, 127, 369;  
- posibles e igualdad de  
los casos favorables  
(P9): 370; - posibles e  
igualdad de los casos  
desfavorables (P9'):  
63, 112, 114, 127, 370;  
- favorables y de los  
casos posibles, sin  
proporcionalidad (P10):  
63, 112, 114, 127, 372
- Diagnóstico: 71, 463
- didáctica, aplicación: 88, 94,  
107, 460
- dif: 345, 459, 470 (ver  
mín,máx)
- Diferencias: 130, 182, 188,  
246, 248, 253, 254, 256,  
260, 311
- DISC: 437 ; y NIVEL: 441
- Discriminancia: 436-439, 441;  
medida de la: 437
- Discriminantes, situaciones:  
121, 148, 301, 436-439
- Disponibilidad: 40, 453
- Doble certeza (P2): 63, 112,  
114, 127, 155, 275, 328,  
349, 353, 354, 377
- Doble imposibilidad (P1): 63,  
112, 114, 127, 273, 328,  
349, 354, 377
- Dominadas, estrategias: 205,  
400, 436
- Dominancia: 401, 443
- Dominantes, estrategias: 205,  
399, 436, 442;  
respuestas: 418, 419,  
420
- Duplicados: 81, 92, 151, 153-  
156, 417, 419, 422
- {E<>}, estrategia de  
equilibrio de pierdo-  
gano: 183, 292, 313,  
325, 398, 400-403, 409,  
442
- {E<}, estrategia de equilibrio  
de pierdo-empato: 184,  
292, 313, 325, 398, 401-  
403, 409, 442
- {E>}, estrategia de equilibrio  
de empato-gano: 185,  
292, 313, 325, 398, 400-  
403, 409, 442
- {E=}, estrategia de equilibrio  
de pierdo-pierdo o de  
gano-gano (estrategia de  
igualdad): 186, 292,  
304, 312, 398, 400-404,  
408, 409, 442
- {E5}, estrategia de atracción  
al punto de equilibrio:  
187, 217, 313, 398, 400,  
403, 409, 442
- E (multiplicidad ENTRE): 135,  
146, 394, 395
- Edades de acceso a los  
diferentes estadios:  
24, 75
- Elección: 64, 164, 305;  
estrategia de: 402
- Elementos: 119, 136, 168
- Empato: 274; empato-empato:  
184, 187, 313, 359;  
empato-gano: 185, 355,  
387, 409; pierdo-empato:  
184, 355, 387, 409
- ENTRE: 133, 134, 146, 179,  
193, 239, 263, 290, 295,  
394, 395
- Entrevistas: 91, 229, 230,  
235, 458; de binomio:  
90, 92, 106, 230, 456-  
458; dobles: 90, 92,  
230, 236; individuales:  
106, 228, 230, 457, 458
- Equilibrio: 257; estrategias  
de -: 89, 115, 116, 182-  
187, 217, 273, 289, 292,  
298, 304, 312, 313, 325,  
398, 400-404, 409, 442;  
modificaciones a las  
estrategias de -: 469

- incorrectas: 324, 329;  
 situacionalmente  
 correctas: 324, 327,  
 442; incorrectas: 290,  
 323, 329, 461, 463
- Estratos de estrategias: 421
- Estudiantes: 434, 460
- Etapa de fogueo: 94, 322, 293
- Etapas de un cuestionario:  
 451
- Evolución a lo largo del  
 cuestionario: 421, 450,  
 451
- Excluidas, estrategias: 207
- Exclusión: 205, 207, 262,  
 401, 442
- Excluyentes, estrategias: 207
- Expresiones (potencialmente)  
 incompletas de  
 estrategias correctas:  
 331, 332, 346, 352, 355,  
 356, 357, 359, 367, 368,  
 371, 372, 379, 380, 389,  
 425
- Extracción: 64, 246, 268
- Extremas, ubicaciones: 362
- {F+}, estrategia de centración  
 positiva en los casos  
 favorables: 173, 269,  
 397, 400, 401, 402, 403,  
 410, 442
- {F-}, estrategia de centración  
 negativa en los casos  
 favorables: 174, 216,  
 269, 310, 398, 442
- {F=}, estrategia de centración  
 de igualdad en los casos  
 favorables: 175, 304,  
 398, 400, 402, 403, 404,  
 408
- {F1}, estrategia de centración  
 en los casos favorables  
 cuando alguno es igual a  
 uno: 174, 216, 400,  
 410, 442
- Falk: 45, 58, 70, 71, 177,  
 190, 240, 288, 289, 292,  
 293, 299, 337, 360, 383,  
 384, 467
- Falsos en el diagnóstico:  
 negativos: 72;  
 positivos: 72, 308, 327
- Favorables, casos: 119, 136
- Fischbein: 8, 13, 28, 41, 43,  
 44, 47, 48, 51, 52, 53,  
 54, 56, 57, 60, 61, 66,  
 73, 91, 111, 170, 270,  
 291, 323, 331, 361, 426,  
 432, 466
- Fogueo: 94, 322, 423
- Forma de expresión: 168
- Formal, probabilidad: 5, 471
- Formato de las respuestas:  
 162, 166
- Fortaleza de las estrategias:  
 209, 402
- Frecuentista, probabilidad: 5
- Fuertes, estrategias: 209, 402
- Fracciones: 21, 277, 278
- Gano: 275; gana-gana: 356,  
 358, 387; empate-gana:  
 185, 355, 387, 409;  
 pierdo-gana: 355, 387,  
 409
- Globalización: 170, 346
- Habladas, respuestas: 227,  
 239, 456
- Happiness scale: 64, 469
- Heurísticas: 36, 37, 160, 467
- Hipótesis: 105, 118, 123,  
 125, 131, 132, 135, 208,  
 209, 360, 363, 382, 383,  
 391-395, 409, 410, 433,  
 465
- hipótesis general: 107,  
 335, 337, 338
- Idéntica(o)s: conjuntos( P6):  
 63, 112, 114, 127, 367,  
 387; preguntas: 87, 92,  
 151, 154-156, 417, 419,  
 422
- Igualdad: correcta: 346;  
 estrategias de: ;  
 incorrecta: 346
- igualdad de los casos: -  
 desfavorables,  
 favorables y posibles:  
 370; - desfavorables y  
 desigualdad de los casos  
 posibles (P9'): 63,  
 112, 114, 127, 370: -  
 favorables y desigualdad  
 de los casos posibles  
 (P9): 370; - posibles y  
 desigualdad de los casos

- K12: 123, 138, 377, 387  
 K13: 123, 138, 377, 387  
 K14: 123, 138, 377, 379,  
 380, 381, 387  
 K15: 123, 138, 377, 379,  
 380, 381, 387  
 K16: 123, 138, 378, 379,  
 380, 381, 387  
 Kahneman y Tversky: 8, 10,  
 35, 43, 46, 47, 48, 51,  
 60, 73, 74, 160, 238,  
 361, 467  
 Lado: 119, 246; correcto:  
 345; incorrecto: 346  
 Laterales, ubicaciones: 362  
 Lectura paralela: 233  
 Lenguaje: común: 242, 459;  
 imprecisión/precisión en  
 el-: 242, 258, 307, 337,  
 459; técnico: 242, 459;  
 uso del -: 168  
 Líneas metodológicas: 99,  
 285, 463; - de las  
 hipótesis: 100, 104; -  
 de las preguntas: 100,  
 101, 111, 300, 435-437;  
 - de las respuestas:  
 100, 102, 159, 300, 435,  
 441; - de los métodos:  
 100, 102, 223, 300, 456,  
 458  
 Lingüística: 240, 458, 459,  
 470  
 Material concreto: 93, 97,  
 239  
 Maury: 90, 190, 201, 225,  
 226, 278, 291, 295, 307,  
 330, 383, 384, 467  
 máx: 345, 470  
 Mecanismos de solución: 160  
 mecanismos primitivos:  
 215, 413, 442; de  
 acomodo: 219, 319, 442;  
 de atracción: 218, 442,  
 320; de juntar lados:  
 221, 320, 349, 442  
 Métodos: clínico-crítico: 69,  
 224, 229; de entrevista  
 doble: 236; de  
 interrogación en  
 equipos: 469; de  
 interrogatorio estanda-  
 rizado: 225, 229, 235,  
 470; de descifrado:  
 304, 458; de  
 interrogación: 106,  
 304, 456, 469; para el  
 análisis de las  
 respuestas: 470  
 mín: 345, 470  
 Misconceptions: 45  
 Mixtas, respuestas: 419  
 Modelo(s): alternativos para  
 la inconsistencia: 452;  
 de la estantería: 453,  
 455, 456; del mosaico:  
 452; matemáticos: 117  
 Modificaciones: a las  
 estrategias de  
 equilibrio: 469; a las  
 ubicaciones: 362  
 Mosaico, modelo del: 453  
 Multiplicativa, relación: 181,  
 193  
 Multiplicidad: 119, 133, 134,  
 135, 145, 148, 290, 389,  
 393, 394, 395, 396, 436,  
 443, 447, 465, 468  
 {N+}, estrategia de centración  
 positiva en los casos  
 totales: 171, 216, 397,  
 400, 403, 442  
 {N-}, estrategia de centración  
 negativa en los casos  
 totales: 170, 269, 397,  
 400-403, 442  
 {N=}, estrategia de centración  
 de igualdad en los casos  
 totales: 172, 304, 397,  
 400, 401, 402, 403, 404,  
 408, 442  
 Naipes: 84, 85, 89, 91, 163,  
 237, 277  
 Niveles: 385, 387, 389, 390,  
 394, 427, 432, 439-441;  
 clasificación de los  
 sujetos: 412, 416;  
 NIVEL y DISC: 441  
 No comparabilidad en las  
 respuestas: 422  
 Noelting: 16, 23, 67, 69, 76,  
 90, 133, 170, 180, 194,  
 195, 201, 290, 292, 293,  
 294, 297, 299, 344, 383,  
 384, 447, 467



- Precisión en el lenguaje: 242, 258, 307, 337, 459
- Predicción: 64
- Pregunta(s): 119; banco de: 146; categorías para las -: 99-101, 111, 300, 435-437, 470; de dos variables: 18, 20, 21, 63, 74, 105, 372, 376, 387; de fogueo: 94, 322, 423; de una variable: 18, 21, 63, 369; idénticas: 87, 92, 151, 154-156, 417, 419, 422; similares: 419, 450, 465
- Preoperatorio, estadio: 19, 20, 32, 113; desarrollo del concepto de probabilidad: 35, 51, 56, 63, 131, 170, 215
- Presentación diagramática: 91
- Previsión: 64, 81
- Primitiva(o)s: estrategias: 216, 295, 400, 413, 436, 439, 442; mecanismos: 215, 413, 436, 442; de acomodo: 219, 319, 442; de atracción: 218, 442, 320; de juntar lados: 221, 320, 349, 442
- Probabilidad: 4, 12, 119, 136, 245, 246, 247, 249, 250, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 266, 307, 459
- probabilidad: a priori: 5; clásica: 6, 246; formal: 5, 471; frecuentista: 5; intuitiva: 5, 7, 246, 247, 266, 267, 269, 471; objetivista: 6; subjetiva: 5, 7; subjetivista: 6;
- Probability learning: 52
- Problemas: de dos variables: 18, 20, 21, 63, 74, 105, 372, 376, 387; de una variable: 18, 21, 63, 369
- Proporción: 246, 248, 249, 250, 255, 256, 259, 260, 307
- proporcional, razonamiento: 278, 447, 455
- proporcionalidad, estrategias de: 116, 193, 196, 199, 280, 287, 295, 304, 312, 324, 398, 401-404, 408, 442
- proporcionalidad, situación de (P7): 63, 76, 112, 114, 127, 387
- Prueba de la presentación diagramática: 238
- Puesta en común: 460, 461
- {R+}, estrategia de resta mayor (estrategia de relación sustractiva): 189, 310, 313, 398, 400, 401, 402, 403, 442
- {R-}, estrategia de resta menor (estrategia de relación sustractiva): 191, 217, 398, 442
- {R=}, estrategia de resta igual (estrategia de relación sustractiva): 192, 304, 310, 398, 400, 402, 403, 404, 408, 442
- Razonamiento proporcional: 278, 447, 455
- Reactivas, estrategias: 400
- Reactividad: 400, 443
- Referente(s): 66, 91, 151, 155, 427, 428, 448, 449
- Relaciones: 168, 179; de orden: 180, 182; de resta: 442; multiplicativa: 181, 193; sustractiva: 181, 188; equilibrio: 442
- Rendimiento: 334
- Representación: 161
- Representatividad: 38, 441
- RESP: 439
- Respuestas: 164; respuesta 'me da igual: 449
- respuestas: avance en las -: 421; categorías para las -: 100, 160, 436, 470; descifrado de las -: 107, 223, 239, 304, 305, 338, 458; formato de las -: 162, 166; línea de las -: 100, 102, 159,

tot: 346  
 Tratamiento didáctico: 88,  
 94, 107, 460  
 Tversky: ver Kahneman  
 Ubicaciones: 119, 124, 125,  
 127, 139, 148, 289, 298,  
 347, 385, 388, 436, 443,  
 445; modificaciones a:  
 467  
 ubicaciones: centrales:  
 362; extremas: 362;  
 laterales: 362  
 U1.1 (x---|-x-]): 124,  
 139, 350, 354, 363, 387  
 U1.3 ([-x-|-x-]): 124,  
 139, 351, 354, 363, 387  
 U1.5 ([-x-|---x]): 124,  
 139, 352, 363, 387  
 U2.1 (x---x---]): 124,  
 139, 350, 354, 363, 387  
 U2.2 ([-x-x---]): 124,  
 139, 355, 360, 363, 387  
 U2.3 ([-x-|-x-]): 124,  
 139, 355, 360, 363, 387  
 U2.4 ([----x-x]): 124,  
 139, 355, 360, 363, 387  
 U2.5 ([----x---x]): 124,  
 139, 352, 354, 363, 387  
 U3.1 (x-x-|---]): 124,  
 139, 349, 350, 354, 363,  
 387  
 U3.2 ([x-x|---]): 124,  
 139, 356, 358, 360, 363,  
 387  
 U3.3 ([----\*---]): 124,  
 139, 359, 360, 363  
 U3.4 ([----|x-x]): 124,  
 139, 356, 358, 360, 363,  
 387  
 U3.5 ([----|-x-x]): 124,  
 139, 352, 353, 354, 363,  
 387  
 U<sub>a</sub>: 132, 142  
 U<sub>c</sub>: 132, 142, 154  
 Unos: 119, 131, 132, 142,  
 148, 290, 389, 409, 436,  
 443, 446, 465, 468  
 Urnas: 65; abiertas: 65, 81;  
 cerradas: 65  
 Uso del lenguaje: 168

Variabilidad: inter  
 individual: 426; intra  
 individual: 426  
 Variables: 116; de respuesta:  
 99, 107; experimentales:  
 99, 106, 107, 118; de  
 situación: 389, 444  
 Variantes: 153, 155, 165  
 Verbales, respuestas: 227,  
 239, 456  
 Vio mal: 317, 319, 322, 338

**A N E X O S**

**ANEXO 1 : BANCO DE ARREGLOS  
ORDENADOS HASTA N1 = 10**

En este anexo se presentan todos los arreglos de la forma

$$s1, s2 = (f_1, d_1)(f_2, d_2)$$

desde  $n_1 = 1$  hasta  $n_1 = 10$ , en el siguiente orden:

Hay un cuadro para cada  $n_1 = 1, \dots, 10$  y  $n_2 = n_1, \dots, 10$   
 Dentro del cuadro,  $f_1 = 0, \dots, n_1$ ,  $d_1 = n_1 - f_1$ ,  
 si  $n_2 = n_1$ ,  $f_2 = f_1 + 1, \dots, n_2$   $d_2 = n_2 - f_2$ ,  
 si  $n_2 > n_1$ ,  $f_2 = 0, \dots, n_2$   $d_2 = n_2 - f_2$ .

Observación: como cuando  $n_2 = n_1$ ,  $f_2$  es forzosamente mayor que  $f_1$ , estaremos excluyendo en este anexo los arreglos de identidad (en los que  $f_1 = f_2$  y  $d_1 = d_2$ ).

Se reporta también lo siguiente:

restas: las diferencias de favorables menos desfavorables:  
 $r_1 = f_1 - d_1$   
 $r_2 = f_2 - d_2$ ;

probabilidades: los cocientes de favorables sobre totales:  
 $p_1 = f_1 / n_1$   
 $p_2 = f_2 / n_2$ ;

combinac: la combinación que corresponde  
 $K = nfdrp$ :  
 si  $y$  representa  $n, f, d, r, p$ ; entonces  
 $y=0$  si  $y_1 = y_2$ ,  
 $y=1$  si  $y_1 < y_2$ ,  
 $y=2$  si  $y_1 > y_2$ ,  $y$ :

K1=11211	K6=11111	K10=11101	K14=11120
K2=12122	K7=11122	K11=11102	K15=11110
K3=01211	K8=11121	K12=10120	K16=11100
K4=11011	K9=11112	K13=11010	K0= 00000
K5=10122			

ubicac: la ubicación que corresponde:  
 si  $p_m = \min\{p_1, p_2\}$  y  $p_M = \max\{p_1, p_2\}$ , entonces:  
 U1.1:  $p_m = 0, .5 < p_M < 1$ ,  
 U1.3:  $p_m = 0, p_M = 1$ ,  
 U1.5:  $0 < p_m < .5, p_M = 1$ ,  
 U2.1:  $p_m = 0, p_M = .5$ ,

totales $n_1$ $n_2$		arreglo $(f_1, d_1)$ $(f_2, d_2)$	restas $r_1$ $r_2$		probabi- lidades $p_1$ $p_2$		combinac ubicac $K$ $U$		perc unos mult $\delta_p, \delta_s, \delta_e, \delta_1$ $U_f; U_d$ $D; E$
1	1	(0,1)(1,0)	-1	1	0.00	1.00	K-3	U1.3	GGNN 1;1 1;1
1	2	(0,1)(0,2)	-1	-2	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG 0;1 1;1
1	2	(0,1)(1,1)	-1	0	0.00	0.50	K-4	U2.1	GNNG 1;1 1;1
1	2	(0,1)(2,0)	-1	2	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN 0;1 1;1
1	2	(1,0)(0,2)	1	-2	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN 1;0 1;1
1	2	(1,0)(1,1)	1	0	1.00	0.50	K-5	U2.5	GNNG 1;1 1;1
1	2	(1,0)(2,0)	1	2	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN 1;0 1;1
1	3	(0,1)(0,3)	-1	-3	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG 0;1 1;1
1	3	(0,1)(1,2)	-1	-1	0.00	0.33	K10	U3.1	GMNG 1;1 1;1
1	3	(0,1)(2,1)	-1	1	0.00	0.67	K-4	U1.1	GMNG 0;1 1;1
1	3	(0,1)(3,0)	-1	3	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN 0;1 1;1
1	3	(1,0)(0,3)	1	-3	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN 1;0 1;1
1	3	(1,0)(1,2)	1	-1	1.00	0.33	K-5	U1.5	GMGN 1;0 1;1
1	3	(1,0)(2,1)	1	1	1.00	0.67	K11	U3.5	GMGN 1;1 1;1
1	3	(1,0)(3,0)	1	3	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN 1;0 1;1
1	4	(0,1)(0,4)	-1	-4	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG 0;1 1;1
1	4	(0,1)(1,3)	-1	-2	0.00	0.25	K-8	U3.1	MMNG 1;1 1;1
1	4	(0,1)(2,2)	-1	0	0.00	0.50	K-6	U2.1	GNNG 0;1 1;1
1	4	(0,1)(3,1)	-1	2	0.00	0.75	K-4	U1.1	GMNM 0;1 1;1
1	4	(0,1)(4,0)	-1	4	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN 0;1 1;1
1	4	(1,0)(0,4)	1	-4	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN 1;0 1;1
1	4	(1,0)(1,3)	1	-2	1.00	0.25	K-5	U1.5	GMMN 1;0 1;1
1	4	(1,0)(2,2)	1	0	1.00	0.50	K-7	U2.5	GNNG 1;0 1;1
1	4	(1,0)(3,1)	1	2	1.00	0.75	K-9	U3.5	MMGN 1;1 1;1
1	4	(1,0)(4,0)	1	4	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN 1;0 1;1
1	5	(0,1)(0,5)	-1	-5	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG 0;1 1;1
1	5	(0,1)(1,4)	-1	-3	0.00	0.20	K-8	U3.1	MGNG 1;1 1;1
1	5	(0,1)(2,3)	-1	-1	0.00	0.40	K10	U3.1	GCNG 0;1 1;1
1	5	(0,1)(3,2)	-1	1	0.00	0.60	K-6	U1.1	GCNG 0;1 1;1
1	5	(0,1)(4,1)	-1	3	0.00	0.80	K-4	U1.1	GGNM 0;1 1;1
1	5	(0,1)(5,0)	-1	5	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN 0;1 1;1
1	5	(1,0)(0,5)	1	-5	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN 1;0 1;1
1	5	(1,0)(1,4)	1	-3	1.00	0.20	K-5	U1.5	GGMN 1;0 1;1
1	5	(1,0)(2,3)	1	-1	1.00	0.40	K-7	U1.5	GCGN 1;0 1;1
1	5	(1,0)(3,2)	1	1	1.00	0.60	K11	U3.5	GCGN 1;0 1;1
1	5	(1,0)(4,1)	1	3	1.00	0.80	K-9	U3.5	MGGN 1;1 1;1
1	5	(1,0)(5,0)	1	5	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN 1;0 1;1
1	6	(0,1)(0,6)	-1	-6	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG 0;1 1;1
1	6	(0,1)(1,5)	-1	-4	0.00	0.17	K-8	U3.1	MGNG 1;1 1;1
1	6	(0,1)(2,4)	-1	-2	0.00	0.33	K-8	U3.1	GMNG 0;1 1;1
1	6	(0,1)(3,3)	-1	0	0.00	0.50	K-6	U2.1	GNNG 0;1 1;1
1	6	(0,1)(4,2)	-1	2	0.00	0.67	K-6	U1.1	GMNG 0;1 1;1
1	6	(0,1)(5,1)	-1	4	0.00	0.83	K-4	U1.1	GGNM 0;1 1;1
1	6	(0,1)(6,0)	-1	6	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN 0;1 1;1

total- les n <sub>1</sub> n <sub>2</sub>	arreglo (f <sub>1</sub> , d <sub>1</sub> ) (f <sub>2</sub> , d <sub>2</sub> )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult δ <sub>p</sub> δ <sub>s</sub> δ <sub>0</sub> δ <sub>1</sub> U <sub>r</sub> :U <sub>d</sub> D;E		
		r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	K	U			
1 9	(0,1)(5,4)	-1	1	0.00	0.56	K-6	U1.1	GCNG	0;1	1;1
1 9	(0,1)(6,3)	-1	3	0.00	0.67	K-6	U1.1	GMNG	0;1	1;1
1 9	(0,1)(7,2)	-1	5	0.00	0.78	K-6	U1.1	GMNM	0;1	1;1
1 9	(0,1)(8,1)	-1	7	0.00	0.89	K-4	U1.1	GGNM	0;1	1;1
1 9	(0,1)(9,0)	-1	9	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;1	1;1
1 9	(1,0)(0,9)	1	-9	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(1,8)	1	-7	1.00	0.11	K-5	U1.5	GGMM	1;0	1;1
1 9	(1,0)(2,7)	1	-5	1.00	0.22	K-7	U1.5	GMMN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(3,6)	1	-3	1.00	0.33	K-7	U1.5	GMGN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(4,5)	1	-1	1.00	0.44	K-7	U1.5	GCGN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(5,4)	1	1	1.00	0.56	K11	U3.5	GCGN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(6,3)	1	3	1.00	0.67	K-9	U3.5	GMGN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(7,2)	1	5	1.00	0.78	K-9	U3.5	MMGN	1;0	1;1
1 9	(1,0)(8,1)	1	7	1.00	0.89	K-9	U3.5	MGGN	1;1	1;1
1 9	(1,0)(9,0)	1	9	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	1;0	1;1
1 10	(0,1)(0,10)	-1	-10	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(1,9)	-1	-8	0.00	0.10	K-8	U3.1	CGNG	1;1	1;1
1 10	(0,1)(2,8)	-1	-6	0.00	0.20	K-8	U3.1	MGNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(3,7)	-1	-4	0.00	0.30	K-8	U3.1	GMNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(4,6)	-1	-2	0.00	0.40	K-8	U3.1	GCNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(5,5)	-1	0	0.00	0.50	K-6	U2.1	GNNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(6,4)	-1	2	0.00	0.60	K-6	U1.1	GCNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(7,3)	-1	4	0.00	0.70	K-6	U1.1	GMNG	0;1	1;1
1 10	(0,1)(8,2)	-1	6	0.00	0.80	K-6	U1.1	GGNM	0;1	1;1
1 10	(0,1)(9,1)	-1	8	0.00	0.90	K-4	U1.1	GGNC	0;1	1;1
1 10	(0,1)(10,0)	-1	10	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;1	1;1
1 10	(1,0)(0,10)	1	-10	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(1,9)	1	-8	1.00	0.10	K-5	U1.5	GGCN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(2,8)	1	-6	1.00	0.20	K-7	U1.5	GGMN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(3,7)	1	-4	1.00	0.30	K-7	U1.5	GMGN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(4,6)	1	-2	1.00	0.40	K-7	U1.5	GCGN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(5,5)	1	0	1.00	0.50	K-7	U2.5	GNGN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(6,4)	1	2	1.00	0.60	K-9	U3.5	GCGN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(7,3)	1	4	1.00	0.70	K-9	U3.5	GMGN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(8,2)	1	6	1.00	0.80	K-9	U3.5	MGGN	1;0	1;1
1 10	(1,0)(9,1)	1	8	1.00	0.90	K-9	U3.5	CGGN	1;1	1;1
1 10	(1,0)(10,0)	1	10	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	1;0	1;1
2 2	(0,2)(1,1)	-2	0	0.00	0.50	K-3	U2.1	GNNG	1;1	1;1
2 2	(0,2)(2,0)	-2	2	0.00	1.00	K-3	U1.3	GGNN	0;0	0;0
2 2	(1,1)(2,0)	0	2	0.50	1.00	K-3	U2.5	GNGN	1;1	1;1
2 3	(0,2)(0,3)	-2	-3	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
2 3	(0,2)(1,2)	-2	-1	0.00	0.33	K-4	U3.1	GMNG	1;0	1;1
2 3	(0,2)(2,1)	-2	1	0.00	0.67	K-1	U1.1	GMNG	0;1	1;1
2 3	(0,2)(3,0)	-2	3	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;0	0;0
2 3	(1,1)(0,3)	0	-3	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	1;1	1;1











total- les $n_1$ $n_2$	arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult			
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$	$U_f; U_d$	D; E	
4	5	(1,3)(1,4)	-2	-3	0.25	0.20	K-5	U3.2	CMMG	1;0	1;1
4	5	(1,3)(2,3)	-2	-1	0.25	0.40	K-4	U3.2	MCMG	1;0	1;1
4	5	(1,3)(3,2)	-2	1	0.25	0.60	K-1	U2.3	GCMG	1;0	1;1
4	5	(1,3)(4,1)	-2	3	0.25	0.80	K-1	U2.3	GMMM	1;1	1;1
4	5	(1,3)(5,0)	-2	5	0.25	1.00	K-1	U1.5	GMMN	1;0	1;1
4	5	(2,2)(0,5)	0	-5	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;0
4	5	(2,2)(1,4)	0	-3	0.50	0.20	K-2	U2.2	GNMG	1;0	1;1
4	5	(2,2)(2,3)	0	-1	0.50	0.40	K-5	U2.2	CNGG	0;0	1;1
4	5	(2,2)(3,2)	0	1	0.50	0.60	K-4	U2.4	CNGG	0;0	1;1
4	5	(2,2)(4,1)	0	3	0.50	0.80	K-1	U2.4	GNGM	0;1	1;1
4	5	(2,2)(5,0)	0	5	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;0
4	5	(3,1)(0,5)	2	-5	0.75	0.00	K-2	U1.1	GMMN	0;1	1;1
4	5	(3,1)(1,4)	2	-3	0.75	0.20	K-2	U2.3	GMMM	1;1	1;1
4	5	(3,1)(2,3)	2	-1	0.75	0.40	K-2	U2.3	GCGM	0;1	1;1
4	5	(3,1)(3,2)	2	1	0.75	0.60	K-5	U3.4	MCGM	0;1	1;1
4	5	(3,1)(4,1)	2	3	0.75	0.80	K-4	U3.4	CMGM	0;1	1;1
4	5	(3,1)(5,0)	2	5	0.75	1.00	K-1	U3.5	MMGN	0;1	1;1
4	5	(4,0)(0,5)	4	-5	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
4	5	(4,0)(1,4)	4	-3	1.00	0.20	K-2	U1.5	GGMN	1;0	1;1
4	5	(4,0)(2,3)	4	-1	1.00	0.40	K-2	U1.5	GCGN	0;0	0;2
4	5	(4,0)(3,2)	4	1	1.00	0.60	K-2	U3.5	GCGN	0;0	0;0
4	5	(4,0)(4,1)	4	3	1.00	0.80	K-5	U3.5	MGGN	0;1	1;1
4	5	(4,0)(5,0)	4	5	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
4	6	(0,4)(0,6)	-4	-6	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
4	6	(0,4)(1,5)	-4	-4	0.00	0.17	K10	U3.1	MGNG	1;0	1;1
4	6	(0,4)(2,4)	-4	-2	0.00	0.33	K-4	U3.1	GMNG	0;0	2;1
4	6	(0,4)(3,3)	-4	0	0.00	0.50	K-1	U2.1	GNNG	0;0	1;0
4	6	(0,4)(4,2)	-4	2	0.00	0.67	K-1	U1.1	MGNG	0;0	2;2
4	6	(0,4)(5,1)	-4	4	0.00	0.83	K-1	U1.1	GGNM	0;1	1;1
4	6	(0,4)(6,0)	-4	6	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;0	0;0
4	6	(1,3)(0,6)	-2	-6	0.25	0.00	K-2	U3.1	MMNG	1;0	1;1
4	6	(1,3)(1,5)	-2	-4	0.25	0.17	K-5	U3.2	CMMG	1;0	1;1
4	6	(1,3)(2,4)	-2	-2	0.25	0.33	K10	U3.2	CMMG	1;0	1;1
4	6	(1,3)(3,3)	-2	0	0.25	0.50	K-4	U2.2	MNMG	1;0	1;1
4	6	(1,3)(4,2)	-2	2	0.25	0.67	K-1	U2.3	GMMG	1;0	1;1
4	6	(1,3)(5,1)	-2	4	0.25	0.83	K-1	U2.3	GMMM	1;1	1;1
4	6	(1,3)(6,0)	-2	6	0.25	1.00	K-1	U1.5	GMMN	1;0	1;1
4	6	(2,2)(0,6)	0	-6	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;3
4	6	(2,2)(1,5)	0	-4	0.50	0.17	K-2	U2.2	GNMG	1;0	1;1
4	6	(2,2)(2,4)	0	-2	0.50	0.33	K-5	U2.2	MNGG	0;0	1;1
4	6	(2,2)(3,3)	0	0	0.50	0.50	K16	U3.3	NNGG	0;0	1;0
4	6	(2,2)(4,2)	0	2	0.50	0.67	K-4	U2.4	MNGG	0;0	1;1
4	6	(2,2)(5,1)	0	4	0.50	0.83	K-1	U2.4	GNGM	0;1	1;1
4	6	(2,2)(6,0)	0	6	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;3
4	6	(3,1)(0,6)	2	-6	0.75	0.00	K-2	U1.1	GMMN	0;1	1;1
4	6	(3,1)(1,5)	2	-4	0.75	0.17	K-2	U2.3	GMMM	1;1	1;1
4	6	(3,1)(2,4)	2	-2	0.75	0.33	K-2	U2.3	GMMG	0;1	1;1
4	6	(3,1)(3,3)	2	0	0.75	0.50	K-5	U2.4	MNGM	0;1	1;1





totales		arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult		
$n_1$	$n_2$		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_p \delta_5 \delta_o \delta_1$ $U_i; U_d$	$D; E$	
5	6	(3,2)(2,4)	1	-2	0.60	0.33	K-2	U2.3	MCGG	0;0	2;2
5	6	(3,2)(3,3)	1	0	0.60	0.50	K-5	U2.4	CNNG	0;0	1;1
5	6	(3,2)(4,2)	1	2	0.60	0.67	K-4	U3.4	CCGG	0;0	2;1
5	6	(3,2)(5,1)	1	4	0.60	0.83	K-1	U3.4	MCGM	0;1	1;1
5	6	(3,2)(6,0)	1	6	0.60	1.00	K-1	U3.5	GCGN	0;0	0;2
5	6	(4,1)(0,6)	3	-6	0.80	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
5	6	(4,1)(1,5)	3	-4	0.80	0.17	K-2	U2.3	GGMM	1;1	1;1
5	6	(4,1)(2,4)	3	-2	0.80	0.33	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
5	6	(4,1)(3,3)	3	0	0.80	0.50	K-2	U2.4	GNGM	0;1	1;1
5	6	(4,1)(4,2)	3	2	0.80	0.67	K-5	U3.4	MMGM	0;1	1;1
5	6	(4,1)(5,1)	3	4	0.80	0.83	K-4	U3.4	CCGM	0;1	1;1
5	6	(4,1)(6,0)	3	6	0.80	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
5	6	(5,0)(0,6)	5	-6	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
5	6	(5,0)(1,5)	5	-4	1.00	0.17	K-2	U1.5	GGMN	1;0	1;1
5	6	(5,0)(2,4)	5	-2	1.00	0.33	K-2	U1.5	GMGN	0;0	2;0
5	6	(5,0)(3,3)	5	0	1.00	0.50	K-2	U2.5	GNGN	0;0	1;0
5	6	(5,0)(4,2)	5	2	1.00	0.67	K-2	U3.5	GMGN	0;0	2;0
5	6	(5,0)(5,1)	5	4	1.00	0.83	K-5	U3.5	MGGN	0;1	1;1
5	6	(5,0)(6,0)	5	6	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
5	7	(0,5)(0,7)	-5	-7	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
5	7	(0,5)(1,6)	-5	-5	0.00	0.14	K10	U3.1	MGNG	1;0	1;1
5	7	(0,5)(2,5)	-5	-3	0.00	0.29	K-4	U3.1	MMNG	0;0	0;1
5	7	(0,5)(3,4)	-5	-1	0.00	0.43	K-1	U3.1	GCNG	0;0	0;0
5	7	(0,5)(4,3)	-5	1	0.00	0.57	K-1	U1.1	GCNG	0;0	0;0
5	7	(0,5)(5,2)	-5	3	0.00	0.71	K-1	U1.1	GMNM	0;0	0;0
5	7	(0,5)(6,1)	-5	5	0.00	0.86	K-1	U1.1	GGNM	0;1	1;1
5	7	(0,5)(7,0)	-5	7	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;0	0;0
5	7	(1,4)(0,7)	-3	-7	0.20	0.00	K-2	U3.1	MGNG	1;0	1;1
5	7	(1,4)(1,6)	-3	-5	0.20	0.14	K-5	U3.2	CGMG	1;0	1;1
5	7	(1,4)(2,5)	-3	-3	0.20	0.29	K10	U3.2	CMMG	1;0	1;1
5	7	(1,4)(3,4)	-3	-1	0.20	0.43	K-4	U3.2	MCMG	1;0	1;1
5	7	(1,4)(4,3)	-3	1	0.20	0.57	K-1	U2.3	GCMG	1;0	1;1
5	7	(1,4)(5,2)	-3	3	0.20	0.71	K-1	U2.3	GMMM	1;0	1;1
5	7	(1,4)(6,1)	-3	5	0.20	0.86	K-1	U2.3	GGMM	1;1	1;1
5	7	(1,4)(7,0)	-3	7	0.20	1.00	K-1	U1.5	GGMN	1;0	1;1
5	7	(2,3)(0,7)	-1	-7	0.40	0.00	K-2	U3.1	GCNG	0;0	0;0
5	7	(2,3)(1,6)	-1	-5	0.40	0.14	K-2	U3.2	MCMG	1;0	1;1
5	7	(2,3)(2,5)	-1	-3	0.40	0.29	K-5	U3.2	MCMG	0;0	0;1
5	7	(2,3)(3,4)	-1	-1	0.40	0.43	K10	U3.2	CCGG	0;0	0;0
5	7	(2,3)(4,3)	-1	1	0.40	0.57	K-4	U2.3	MCGG	0;0	0;1
5	7	(2,3)(5,2)	-1	3	0.40	0.71	K-1	U2.3	GCGM	0;0	0;0
5	7	(2,3)(6,1)	-1	5	0.40	0.86	K-1	U2.3	GCGM	0;1	1;1
5	7	(2,3)(7,0)	-1	7	0.40	1.00	K-1	U1.5	GCGN	0;0	0;0
5	7	(3,2)(0,7)	1	-7	0.60	0.00	K-2	U1.1	GCNG	0;0	0;0
5	7	(3,2)(1,6)	1	-5	0.60	0.14	K-2	U2.3	GCMG	1;0	1;1
5	7	(3,2)(2,5)	1	-3	0.60	0.29	K-2	U2.3	GCMG	0;0	0;0
5	7	(3,2)(3,4)	1	-1	0.60	0.43	K-5	U2.3	MCGG	0;0	0;1
5	7	(3,2)(4,3)	1	1	0.60	0.57	K11	U3.4	CCGG	0;0	0;0

totales		arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabilidades		combinaciones		perc unos mult		
$n_1$	$n_2$		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_p \delta_5 \delta_o \delta_1$	$U_f; U_d$	D; E
5	8	(3,2)(2,6)	1	-4	0.60	0.25	K-2	U2.3	GCMG	0;0	3;3
5	8	(3,2)(3,5)	1	-2	0.60	0.38	K-5	U2.3	MCGG	0;0	0;1
5	8	(3,2)(4,4)	1	0	0.60	0.50	K-7	U2.4	CNGG	0;0	1;2
5	8	(3,2)(5,3)	1	2	0.60	0.63	K-6	U3.4	CCGG	0;0	0;0
5	8	(3,2)(6,2)	1	4	0.60	0.75	K-4	U3.4	MCGM	0;0	3;1
5	8	(3,2)(7,1)	1	6	0.60	0.88	K-1	U3.4	MCGM	0;1	1;1
5	8	(3,2)(8,0)	1	8	0.60	1.00	K-1	U3.5	CCGN	0;0	0;0
5	8	(4,1)(0,8)	3	-8	0.80	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(1,7)	3	-6	0.80	0.13	K-2	U2.3	GGMM	1;1	1;1
5	8	(4,1)(2,6)	3	-4	0.80	0.25	K-2	U2.3	GMMM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(3,5)	3	-2	0.80	0.38	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(4,4)	3	0	0.80	0.50	K-5	U2.4	GNGM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(5,3)	3	2	0.80	0.63	K-7	U3.4	MMGM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(6,2)	3	4	0.80	0.75	K-9	U3.4	CMGM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(7,1)	3	6	0.80	0.88	K-4	U3.4	CCGM	0;1	1;1
5	8	(4,1)(8,0)	3	8	0.80	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
5	8	(5,0)(0,8)	5	-8	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
5	8	(5,0)(1,7)	5	-6	1.00	0.13	K-2	U1.5	GGMN	1;0	1;1
5	8	(5,0)(2,6)	5	-4	1.00	0.25	K-2	U1.5	GMMN	0;0	3;0
5	8	(5,0)(3,5)	5	-2	1.00	0.38	K-2	U1.5	GMGN	0;0	0;0
5	8	(5,0)(4,4)	5	0	1.00	0.50	K-2	U2.5	GNGN	0;0	1;0
5	8	(5,0)(5,3)	5	2	1.00	0.63	K-5	U3.5	GMGN	0;0	0;1
5	8	(5,0)(6,2)	5	4	1.00	0.75	K-7	U3.5	MMGN	0;0	3;0
5	8	(5,0)(7,1)	5	6	1.00	0.88	K-9	U3.5	MGGN	0;1	1;1
5	8	(5,0)(8,0)	5	8	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
5	9	(0,5)(0,9)	-5	-9	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
5	9	(0,5)(1,8)	-5	-7	0.00	0.11	K-8	U3.1	MGNG	1;0	1;1
5	9	(0,5)(2,7)	-5	-5	0.00	0.22	K10	U3.1	MMNG	0;0	0;0
5	9	(0,5)(3,6)	-5	-3	0.00	0.33	K-6	U3.1	GMNG	0;0	2;0
5	9	(0,5)(4,5)	-5	-1	0.00	0.44	K-4	U3.1	GCNG	0;0	0;1
5	9	(0,5)(5,4)	-5	1	0.00	0.56	K-1	U1.1	GCNG	0;0	0;0
5	9	(0,5)(6,3)	-5	3	0.00	0.67	K-1	U1.1	GMNG	0;0	2;0
5	9	(0,5)(7,2)	-5	5	0.00	0.78	K-1	U1.1	GMNM	0;0	0;0
5	9	(0,5)(8,1)	-5	7	0.00	0.89	K-1	U1.1	GGNM	0;1	1;1
5	9	(0,5)(9,0)	-5	9	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;0	0;0
5	9	(1,4)(0,9)	-3	-9	0.20	0.00	K-2	U3.1	MGNG	1;0	1;1
5	9	(1,4)(1,8)	-3	-7	0.20	0.11	K-5	U3.2	CGMG	1;0	1;1
5	9	(1,4)(2,7)	-3	-5	0.20	0.22	K-8	U3.2	CMMG	1;0	1;1
5	9	(1,4)(3,6)	-3	-3	0.20	0.33	K10	U3.2	MMMGM	1;0	1;1
5	9	(1,4)(4,5)	-3	-1	0.20	0.44	K-6	U3.2	MCMG	1;0	1;1
5	9	(1,4)(5,4)	-3	1	0.20	0.56	K-4	U2.3	CGMG	1;0	1;1
5	9	(1,4)(6,3)	-3	3	0.20	0.67	K-1	U2.3	GMMG	1;0	1;1
5	9	(1,4)(7,2)	-3	5	0.20	0.78	K-1	U2.3	GMMM	1;0	1;1
5	9	(1,4)(8,1)	-3	7	0.20	0.89	K-1	U2.3	GGMM	1;1	1;1
5	9	(1,4)(9,0)	-3	9	0.20	1.00	K-1	U1.5	GGMN	1;0	1;1
5	9	(2,3)(0,9)	-1	-9	0.40	0.00	K-2	U3.1	GCNG	0;0	0;3
5	9	(2,3)(1,8)	-1	-7	0.40	0.11	K-2	U3.2	MCMG	1;0	1;1
5	9	(2,3)(2,7)	-1	-5	0.40	0.22	K-5	U3.2	MCMG	0;0	0;1





total n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	arreglo (f <sub>1</sub> , d <sub>1</sub> ) (f <sub>2</sub> , d <sub>2</sub> )		restas r <sub>1</sub> r <sub>2</sub>		probabili- dades p <sub>1</sub> p <sub>2</sub>		combinac ubicac K U		perc unos mult δ <sub>p</sub> δ <sub>5</sub> δ <sub>0</sub> δ <sub>1</sub> U <sub>f</sub> ; U <sub>d</sub> D; E		
		6	7	(2,4)	(3,4)	-2	-1	0.33	0.43	K-4	U3.2	CCGG
6	7	(2,4)	(4,3)	-2	1	0.33	0.57	K-1	U2.3	MCGG	0;0	2;2
6	7	(2,4)	(5,2)	-2	3	0.33	0.71	K-1	U2.3	GMGM	0;0	2;2
6	7	(2,4)	(6,1)	-2	5	0.33	0.86	K-1	U2.3	GMGM	0;1	1;1
6	7	(2,4)	(7,0)	-2	7	0.33	1.00	K-1	U1.5	GMGN	0;0	2;0
6	7	(3,3)	(0,7)	0	-7	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;0
6	7	(3,3)	(1,6)	0	-5	0.50	0.14	K-2	U2.2	GNMG	1;0	1;1
6	7	(3,3)	(2,5)	0	-3	0.50	0.29	K-2	U2.2	MNMG	0;0	1;0
6	7	(3,3)	(3,4)	0	-1	0.50	0.43	K-5	U2.2	CNNG	0;0	1;1
6	7	(3,3)	(4,3)	0	1	0.50	0.57	K-4	U2.4	CNNG	0;0	1;1
6	7	(3,3)	(5,2)	0	3	0.50	0.71	K-1	U2.4	MNGM	0;0	1;0
6	7	(3,3)	(6,1)	0	5	0.50	0.86	K-1	U2.4	GNGM	0;1	1;1
6	7	(3,3)	(7,0)	0	7	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;0
6	7	(4,2)	(0,7)	2	-7	0.67	0.00	K-2	U1.1	GMNG	0;0	2;0
6	7	(4,2)	(1,6)	2	-5	0.67	0.14	K-2	U2.3	GMMG	1;0	1;1
6	7	(4,2)	(2,5)	2	-3	0.67	0.29	K-2	U2.3	GMMG	0;0	2;2
6	7	(4,2)	(3,4)	2	-1	0.67	0.43	K-2	U2.3	MCGG	0;0	2;2
6	7	(4,2)	(4,3)	2	1	0.67	0.57	K-5	U3.4	CCGG	0;0	2;1
6	7	(4,2)	(5,2)	2	3	0.67	0.71	K-4	U3.4	CMGM	0;0	2;1
6	7	(4,2)	(6,1)	2	5	0.67	0.86	K-1	U3.4	MMGM	0;1	1;1
6	7	(4,2)	(7,0)	2	7	0.67	1.00	K-1	U3.5	GMGN	0;0	2;0
6	7	(5,1)	(0,7)	4	-7	0.83	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
6	7	(5,1)	(1,6)	4	-5	0.83	0.14	K-2	U2.3	GGMM	1;1	1;1
6	7	(5,1)	(2,5)	4	-3	0.83	0.29	K-2	U2.3	GMMM	0;1	1;1
6	7	(5,1)	(3,4)	4	-1	0.83	0.43	K-2	U2.3	GCGM	0;1	1;1
6	7	(5,1)	(4,3)	4	1	0.83	0.57	K-2	U3.4	MCGM	0;1	1;1
6	7	(5,1)	(5,2)	4	3	0.83	0.71	K-5	U3.4	MMGM	0;1	1;1
6	7	(5,1)	(6,1)	4	5	0.83	0.86	K-4	U3.4	CJGM	0;1	1;1
6	7	(5,1)	(7,0)	4	7	0.83	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
6	7	(6,0)	(0,7)	6	-7	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
6	7	(6,0)	(1,6)	6	-5	1.00	0.14	K-2	U1.5	GGMN	1;0	1;1
6	7	(6,0)	(2,5)	6	-3	1.00	0.29	K-2	U1.5	GMMN	0;0	0;3
6	7	(6,0)	(3,4)	6	-1	1.00	0.43	K-2	U1.5	GCGN	0;0	0;2
6	7	(6,0)	(4,3)	6	1	1.00	0.57	K-2	U3.5	GCGN	0;0	0;0
6	7	(6,0)	(5,2)	6	3	1.00	0.71	K-2	U3.5	MMGN	0;0	0;0
6	7	(6,0)	(6,1)	6	5	1.00	0.86	K-5	U3.5	MGGN	0;1	1;1
6	7	(6,0)	(7,0)	6	7	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
6	8	(0,6)	(0,8)	-6	-8	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
6	8	(0,6)	(1,7)	-6	-6	0.00	0.13	K10	U3.1	MGNM	1;0	1;1
6	8	(0,6)	(2,6)	-6	-4	0.00	0.25	K-4	U3.1	MMNG	0;0	3;1
6	8	(0,6)	(3,5)	-6	-2	0.00	0.38	K-1	U3.1	GMNG	0;0	0;0
6	8	(0,6)	(4,4)	-6	0	0.00	0.50	K-1	U2.1	GNNG	0;0	1;0
6	8	(0,6)	(5,3)	-6	2	0.00	0.63	K-1	U1.1	GMNG	0;0	0;2
6	8	(0,6)	(6,2)	-6	4	0.00	0.75	K-1	U1.1	GMMN	0;0	3;3
6	8	(0,6)	(7,1)	-6	6	0.00	0.88	K-1	U1.1	GGNM	0;1	1;1
6	8	(0,6)	(8,0)	-6	8	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNM	0;0	0;0
6	8	(1,5)	(0,8)	-4	-8	0.17	0.00	K-2	U3.1	MGNM	1;0	1;1
6	8	(1,5)	(1,7)	-4	-6	0.17	0.13	K-5	U3.2	CJGM	1;0	1;1

totales $n_1$ $n_2$		arreglo $(f_1, d_1)$ $(f_2, d_2)$		restas $r_1$ $r_2$		probabilidades $p_1$ $p_2$		combinaciones ubicaciones K U		perc unos mult $\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$ $U_r; U_d$ D; E		
6	8	(6,0)	(6,2)	6	4	1.00	0.75	K-5	U3.5	MMGN	0;0	3;1
6	8	(6,0)	(7,1)	6	6	1.00	0.88	K11	U3.5	MGGN	0;1	1;1
6	8	(6,0)	(8,0)	6	8	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
6	9	(0,6)	(0,9)	-6	-9	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
6	9	(0,6)	(1,8)	-6	-7	0.00	0.11	K-8	U3.1	MGNG	1;0	1;1
6	9	(0,6)	(2,7)	-6	-5	0.00	0.22	K-6	U3.1	MMNG	0;0	0;0
6	9	(0,6)	(3,6)	-6	-3	0.00	0.33	K-4	U3.1	GMNG	0;0	2;1
6	9	(0,6)	(4,5)	-6	-1	0.00	0.44	K-1	U3.1	GCNG	0;0	0;0
6	9	(0,6)	(5,4)	-6	1	0.00	0.56	K-1	U1.1	GCNG	0;0	0;0
6	9	(0,6)	(6,3)	-6	3	0.00	0.67	K-1	U1.1	GMNG	0;0	2;2
6	9	(0,6)	(7,2)	-6	5	0.00	0.78	K-1	U1.1	GMNM	0;0	0;3
6	9	(0,6)	(8,1)	-6	7	0.00	0.89	K-1	U1.1	GGNM	0;1	1;1
6	9	(0,6)	(9,0)	-6	9	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;0	0;0
6	9	(1,5)	(0,9)	-4	-9	0.17	0.00	K-2	U3.1	MGNG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(1,8)	-4	-7	0.17	0.11	K-5	U3.2	CGMG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(2,7)	-4	-5	0.17	0.22	K-8	U3.2	CMMG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(3,6)	-4	-3	0.17	0.33	K-6	U3.2	MMMG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(4,5)	-4	-1	0.17	0.44	K-4	U3.2	MCMG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(5,4)	-4	1	0.17	0.56	K-1	U2.3	GCMG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(6,3)	-4	3	0.17	0.67	K-1	U2.3	GMMG	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(7,2)	-4	5	0.17	0.78	K-1	U2.3	GMMM	1;0	1;1
6	9	(1,5)	(8,1)	-4	7	0.17	0.89	K-1	U2.3	GGMM	1;1	1;1
6	9	(1,5)	(9,0)	-4	9	0.17	1.00	K-1	U1.5	GGMN	1;0	1;1
6	9	(2,4)	(0,9)	-2	-9	0.33	0.00	K-2	U3.1	GMNG	0;0	2;0
6	9	(2,4)	(1,8)	-2	-7	0.33	0.11	K-2	U3.2	MMMG	1;0	1;1
6	9	(2,4)	(2,7)	-2	-5	0.33	0.22	K-5	U3.2	MMMG	0;0	2;1
6	9	(2,4)	(3,6)	-2	-3	0.33	0.33	K14	U3.2	MNMG	0;0	2;0
6	9	(2,4)	(4,5)	-2	-1	0.33	0.44	K-6	U3.2	MCGG	0;0	2;2
6	9	(2,4)	(5,4)	-2	1	0.33	0.56	K-4	U2.3	MCGG	0;0	2;1
6	9	(2,4)	(6,3)	-2	3	0.33	0.67	K-1	U2.3	GMGG	0;0	2;3
6	9	(2,4)	(7,2)	-2	5	0.33	0.78	K-1	U2.3	GMGM	0;0	2;2
6	9	(2,4)	(8,1)	-2	7	0.33	0.89	K-1	U2.3	GMGM	0;1	1;1
6	9	(2,4)	(9,0)	-2	9	0.33	1.00	K-1	U1.5	GMGN	0;0	2;0
6	9	(3,3)	(0,9)	0	-9	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;3
6	9	(3,3)	(1,8)	0	-7	0.50	0.11	K-2	U2.2	GNNM	1;0	1;1
6	9	(3,3)	(2,7)	0	-5	0.50	0.22	K-2	U2.2	MNMG	0;0	1;0
6	9	(3,3)	(3,6)	0	-3	0.50	0.33	K-5	U2.2	MNGG	0;0	1;1
6	9	(3,3)	(4,5)	0	-1	0.50	0.44	K-7	U2.2	CNGG	0;0	1;0
6	9	(3,3)	(5,4)	0	1	0.50	0.56	K-6	U2.4	CNGG	0;0	1;0
6	9	(3,3)	(6,3)	0	3	0.50	0.67	K-4	U2.4	MNGG	0;0	1;1
6	9	(3,3)	(7,2)	0	5	0.50	0.78	K-1	U2.4	MNGM	0;0	1;0
6	9	(3,3)	(8,1)	0	7	0.50	0.89	K-1	U2.4	GNMG	0;1	1;1
6	9	(3,3)	(9,0)	0	9	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;3
6	9	(4,2)	(0,9)	2	-9	0.67	0.00	K-2	U1.1	GMNG	0;0	2;0
6	9	(4,2)	(1,8)	2	-7	0.67	0.11	K-2	U2.3	GMMG	1;0	1;1
6	9	(4,2)	(2,7)	2	-5	0.67	0.22	K-2	U2.3	GMMG	0;0	2;2
6	9	(4,2)	(3,6)	2	-3	0.67	0.33	K-2	U2.3	GMMG	0;0	2;3
6	9	(4,2)	(4,5)	2	-1	0.67	0.44	K-5	U2.3	MCGG	0;0	2;1

totales $n_1$ $n_2$	arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabilidades		combinaciones ubicaciones		perc $\delta_p, \delta_s, \delta_o, \delta_1$ $U_f; U_a$	unos	mult $D; E$		
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U					
6	10	(2,4)	(1,9)	-2	-8	0.33	0.10	K-2	U3.2	MMCG	1;0	1;1
6	10	(2,4)	(2,8)	-2	-6	0.33	0.20	K-5	U3.2	MMMCG	0;0	2;1
6	10	(2,4)	(3,7)	-2	-4	0.33	0.30	K-7	U3.2	CMGG	0;0	2;0
6	10	(2,4)	(4,6)	-2	-2	0.33	0.40	K10	U3.2	CCGG	0;0	2;2
6	10	(2,4)	(5,5)	-2	0	0.33	0.50	K-6	U2.2	MNGG	0;0	1;0
6	10	(2,4)	(6,4)	-2	2	0.33	0.60	K-4	U2.3	MCGG	0;0	2;1
6	10	(2,4)	(7,3)	-2	4	0.33	0.70	K-1	U2.3	GMGG	0;0	2;0
6	10	(2,4)	(8,2)	-2	6	0.33	0.80	K-1	U2.3	GMGM	0;0	2;2
6	10	(2,4)	(9,1)	-2	8	0.33	0.90	K-1	U2.3	GMGC	0;1	1;1
6	10	(2,4)	(10,0)	-2	10	0.33	1.00	K-1	U1.5	GMGN	0;0	2;5
6	10	(3,3)	(0,10)	0	-10	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;0
6	10	(3,3)	(1,9)	0	-8	0.50	0.10	K-2	U2.2	GNGC	1;0	1;1
6	10	(3,3)	(2,8)	0	-6	0.50	0.20	K-2	U2.2	GNGM	0;0	1;0
6	10	(3,3)	(3,7)	0	-4	0.50	0.30	K-5	U2.2	MNGG	0;0	1;1
6	10	(3,3)	(4,6)	0	-2	0.50	0.40	K-7	U2.2	CNGG	0;0	1;2
6	10	(3,3)	(5,5)	0	0	0.50	0.50	K16	U3.3	NNGG	0;0	1;0
6	10	(3,3)	(6,4)	0	2	0.50	0.60	K-6	U2.4	CNGG	0;0	1;2
6	10	(3,3)	(7,3)	0	4	0.50	0.70	K-4	U2.4	MNGG	0;0	1;1
6	10	(3,3)	(8,2)	0	6	0.50	0.80	K-1	U2.4	GNGM	0;0	1;0
6	10	(3,3)	(9,1)	0	8	0.50	0.90	K-1	U2.4	GNGC	0;1	1;1
6	10	(3,3)	(10,0)	0	10	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;0
6	10	(4,2)	(0,10)	2	-10	0.67	0.00	K-2	U1.1	GMNG	0;0	2;5
6	10	(4,2)	(1,9)	2	-8	0.67	0.10	K-2	U2.3	GMCC	1;0	1;1
6	10	(4,2)	(2,8)	2	-6	0.67	0.20	K-2	U2.3	GMMG	0;0	2;2
6	10	(4,2)	(3,7)	2	-4	0.67	0.30	K-2	U2.3	GMGG	0;0	2;0
6	10	(4,2)	(4,6)	2	-2	0.67	0.40	K-5	U2.3	MCGG	0;0	2;1
6	10	(4,2)	(5,5)	2	0	0.67	0.50	K-7	U2.4	MNGG	0;0	1;0
6	10	(4,2)	(6,4)	2	2	0.67	0.60	K11	U3.4	CCGG	0;0	2;2
6	10	(4,2)	(7,3)	2	4	0.67	0.70	K-6	U3.4	CMGG	0;0	2;0
6	10	(4,2)	(8,2)	2	6	0.67	0.80	K-4	U3.4	MMGM	0;0	2;1
6	10	(4,2)	(9,1)	2	8	0.67	0.90	K-1	U3.4	MMGC	0;1	1;1
6	10	(4,2)	(10,0)	2	10	0.67	1.00	K-1	U3.5	GMGN	0;0	2;0
6	10	(5,1)	(0,10)	4	-10	0.83	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(1,9)	4	-8	0.83	0.10	K-2	U2.3	GGCM	1;1	1;1
6	10	(5,1)	(2,8)	4	-6	0.83	0.20	K-2	U2.3	GGMM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(3,7)	4	-4	0.83	0.30	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(4,6)	4	-2	0.83	0.40	K-2	U2.3	GCGM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(5,5)	4	0	0.83	0.50	K-5	U2.4	GNGM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(6,4)	4	2	0.83	0.60	K-7	U3.4	MCGM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(7,3)	4	4	0.83	0.70	K11	U3.4	MMGM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(8,2)	4	6	0.83	0.80	K-9	U3.4	CGGM	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(9,1)	4	8	0.83	0.90	K-4	U3.4	CCGG	0;1	1;1
6	10	(5,1)	(10,0)	4	10	0.83	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
6	10	(6,0)	(0,10)	6	-10	1.00	0.00	K-2	U1.3	GNNN	0;0	0;0
6	10	(6,0)	(1,9)	6	-8	1.00	0.10	K-2	U1.5	GGCN	1;0	1;1
6	10	(6,0)	(2,8)	6	-6	1.00	0.20	K-2	U1.5	GGMN	0;0	4;3
6	10	(6,0)	(3,7)	6	-4	1.00	0.30	K-2	U1.5	GMGN	0;0	2;0
6	10	(6,0)	(4,6)	6	-2	1.00	0.40	K-2	U1.5	GCGN	0;0	0;0
6	10	(6,0)	(5,5)	6	0	1.00	0.50	K-2	U2.5	GNGN	0;0	1;0

tota- les n <sub>1</sub> n <sub>2</sub>	arreglo (f <sub>1</sub> , d <sub>1</sub> ) (f <sub>2</sub> , d <sub>2</sub> )		restas r <sub>1</sub> r <sub>2</sub>		probabi- lidades p <sub>1</sub> p <sub>2</sub>		combinac ubicac K U		perc unos mult $\delta_p, \delta_5, \delta_{\delta_1}$ U <sub>r</sub> ; U <sub>d</sub> D; E		
	7	8	(1,6)(4,4)	-5	0	0.14	0.50	K-1	U2.2	GNMG	1;0
7	8	(1,6)(5,3)	-5	2	0.14	0.63	K-1	U2.3	GMMG	1;0	1;1
7	8	(1,6)(6,2)	-5	4	0.14	0.75	K-1	U2.3	GMMM	1;0	1;1
7	8	(1,6)(7,1)	-5	6	0.14	0.88	K-1	U2.3	GGMM	1;1	1;1
7	8	(1,6)(8,0)	-5	8	0.14	1.00	K-1	U1.5	GGMN	1;0	1;1
7	8	(2,5)(0,8)	-3	-8	0.29	0.00	K-2	U3.1	MMNG	0;0	0;0
7	8	(2,5)(1,7)	-3	-6	0.29	0.13	K-2	U3.2	MMMG	1;0	1;1
7	8	(2,5)(2,6)	-3	-4	0.29	0.25	K-5	U3.2	CMMG	0;0	3;1
7	8	(2,5)(3,5)	-3	-2	0.29	0.38	K-4	U3.2	CMMG	0;0	0;1
7	8	(2,5)(4,4)	-3	0	0.29	0.50	K-1	U2.2	MNMG	0;0	1;2
7	8	(2,5)(5,3)	-3	2	0.29	0.63	K-1	U2.3	GMMG	0;0	0;0
7	8	(2,5)(6,2)	-3	4	0.29	0.75	K-1	U2.3	GMMM	0;0	3;3
7	8	(2,5)(7,1)	-3	6	0.29	0.88	K-1	U2.3	GMMM	0;1	1;1
7	8	(2,5)(8,0)	-3	8	0.29	1.00	K-1	U1.5	GMMN	0;0	0;4
7	8	(3,4)(0,8)	-1	-8	0.43	0.00	K-2	U3.1	GCNG	0;0	0;2
7	8	(3,4)(1,7)	-1	-6	0.43	0.13	K-2	U3.2	GCMG	1;0	1;1
7	8	(3,4)(2,6)	-1	-4	0.43	0.25	K-2	U3.2	MCMG	0;0	3;0
7	8	(3,4)(3,5)	-1	-2	0.43	0.38	K-5	U3.2	CCGG	0;0	0;1
7	8	(3,4)(4,4)	-1	0	0.43	0.50	K-4	U2.2	CNGG	0;0	1;1
7	8	(3,4)(5,3)	-1	2	0.43	0.63	K-1	U2.3	MCGG	0;0	0;0
7	8	(3,4)(6,2)	-1	4	0.43	0.75	K-1	U2.3	GCGM	0;0	3;2
7	8	(3,4)(7,1)	-1	6	0.43	0.88	K-1	U2.3	GCGM	0;1	1;1
7	8	(3,4)(8,0)	-1	8	0.43	1.00	K-1	U1.5	GCGN	0;0	0;0
7	8	(4,3)(0,8)	1	-8	0.57	0.00	K-2	U1.1	GCNG	0;0	0;0
7	8	(4,3)(1,7)	1	-6	0.57	0.13	K-2	U2.3	GCMG	1;0	1;1
7	8	(4,3)(2,6)	1	-4	0.57	0.25	K-2	U2.3	GCMG	0;0	3;2
7	8	(4,3)(3,5)	1	-2	0.57	0.38	K-2	U2.3	MCGG	0;0	0;0
7	8	(4,3)(4,4)	1	0	0.57	0.50	K-5	U2.4	CNGG	0;0	1;1
7	8	(4,3)(5,3)	1	2	0.57	0.63	K-4	U3.4	CCGG	0;0	0;1
7	8	(4,3)(6,2)	1	4	0.57	0.75	K-1	U3.4	MCGM	0;0	3;0
7	8	(4,3)(7,1)	1	6	0.57	0.88	K-1	U3.4	GCGM	0;1	1;1
7	8	(4,3)(8,0)	1	8	0.57	1.00	K-1	U3.5	GCGN	0;0	0;2
7	8	(5,2)(0,8)	3	-8	0.71	0.00	K-2	U1.1	GMNM	0;0	0;4
7	8	(5,2)(1,7)	3	-6	0.71	0.13	K-2	U2.3	GMMM	1;0	1;1
7	8	(5,2)(2,6)	3	-4	0.71	0.25	K-2	U2.3	GMMM	0;0	3;3
7	8	(5,2)(3,5)	3	-2	0.71	0.38	K-2	U2.3	GMGM	0;0	0;0
7	8	(5,2)(4,4)	3	0	0.71	0.50	K-2	U2.4	MNGM	0;0	1;2
7	8	(5,2)(5,3)	3	2	0.71	0.63	K-5	U3.4	CMGM	0;0	0;1
7	8	(5,2)(6,2)	3	4	0.71	0.75	K-4	U3.4	CMGM	0;0	3;1
7	8	(5,2)(7,1)	3	6	0.71	0.88	K-1	U3.4	MMGM	0;1	1;1
7	8	(5,2)(8,0)	3	8	0.71	1.00	K-1	U3.5	MMGM	0;0	0;0
7	8	(6,1)(0,8)	5	-8	0.86	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
7	8	(6,1)(1,7)	5	-6	0.86	0.13	K-2	U2.3	GMMM	1;1	1;1
7	8	(6,1)(2,6)	5	-4	0.86	0.25	K-2	U2.3	GMMM	0;1	1;1
7	8	(6,1)(3,5)	5	-2	0.86	0.38	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
7	8	(6,1)(4,4)	5	0	0.86	0.50	K-2	U2.4	GNGM	0;1	1;1
7	8	(6,1)(5,3)	5	2	0.86	0.63	K-2	U3.4	MMGM	0;1	1;1
7	8	(6,1)(6,2)	5	4	0.86	0.75	K-5	U3.4	MMGM	0;1	1;1
7	8	(6,1)(7,1)	5	6	0.86	0.88	K-4	U3.4	CNGM	0;1	1;1

totales $n_1$ $n_2$	arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult				
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_p, \delta_s, \delta_o, \delta_1$	$U_2; U_a$	D; E		
7	9	(3, 4)	(8, 1)	-1	7	0.43	0.89	K-1	U2.3	GCGM	0;1	1;1
7	9	(3, 4)	(9, 0)	-1	9	0.43	1.00	K-1	U1.5	GCGN	0;0	0;3
7	9	(4, 3)	(0, 9)	1	-9	0.57	0.00	K-2	U1.1	GCNG	0;0	0;3
7	9	(4, 3)	(1, 8)	1	-7	0.57	0.11	K-2	U2.3	GCMG	1;0	1;1
7	9	(4, 3)	(2, 7)	1	-5	0.57	0.22	K-2	U2.3	GCMG	0;0	0;2
7	9	(4, 3)	(3, 6)	1	-3	0.57	0.33	K-2	U2.3	MCGG	0;0	2;2
7	9	(4, 3)	(4, 5)	1	-1	0.57	0.44	K-5	U2.3	MCGG	0;0	0;1
7	9	(4, 3)	(5, 4)	1	1	0.57	0.56	K11	U3.4	CCGG	0;0	0;0
7	9	(4, 3)	(6, 3)	1	3	0.57	0.67	K-4	U3.4	CCGG	0;0	2;1
7	9	(4, 3)	(7, 2)	1	5	0.57	0.78	K-1	U3.4	MCGM	0;0	0;0
7	9	(4, 3)	(8, 1)	1	7	0.57	0.89	K-1	U3.4	GCGM	0;1	1;1
7	9	(4, 3)	(9, 0)	1	9	0.57	1.00	K-1	U3.5	GCGN	0;0	0;0
7	9	(5, 2)	(0, 9)	3	-9	0.71	0.00	K-2	U1.1	GMNM	0;0	0;0
7	9	(5, 2)	(1, 8)	3	-7	0.71	0.11	K-2	U2.3	GMMM	1;0	1;1
7	9	(5, 2)	(2, 7)	3	-5	0.71	0.22	K-2	U2.3	GMMM	0;0	0;0
7	9	(5, 2)	(3, 6)	3	-3	0.71	0.33	K-2	U2.3	GMGM	0;0	2;3
7	9	(5, 2)	(4, 5)	3	-1	0.71	0.44	K-2	U2.3	MCGM	0;0	0;0
7	9	(5, 2)	(5, 4)	3	1	0.71	0.56	K-5	U3.4	MCGM	0;0	0;1
7	9	(5, 2)	(6, 3)	3	3	0.71	0.67	K11	U3.4	CMGM	0;0	2;0
7	9	(5, 2)	(7, 2)	3	5	0.71	0.78	K-4	U3.4	CMGM	0;0	0;1
7	9	(5, 2)	(8, 1)	3	7	0.71	0.89	K-1	U3.4	MMGM	0;1	1;1
7	9	(5, 2)	(9, 0)	3	9	0.71	1.00	K-1	U3.5	MMGN	0;0	0;0
7	9	(6, 1)	(0, 9)	5	-9	0.86	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(1, 8)	5	-7	0.86	0.11	K-2	U2.3	GGMM	1;1	1;1
7	9	(6, 1)	(2, 7)	5	-5	0.86	0.22	K-2	U2.3	GMMM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(3, 6)	5	-3	0.86	0.33	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(4, 5)	5	-1	0.86	0.44	K-2	U2.3	GCGM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(5, 4)	5	1	0.86	0.56	K-2	U3.4	GCGM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(6, 3)	5	3	0.86	0.67	K-5	U3.4	MMGM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(7, 2)	5	5	0.86	0.78	K11	U3.4	CMGM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(8, 1)	5	7	0.86	0.89	K-4	U3.4	GCGM	0;1	1;1
7	9	(6, 1)	(9, 0)	5	9	0.86	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
7	9	(7, 0)	(0, 9)	7	-9	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
7	9	(7, 0)	(1, 8)	7	-7	1.00	0.11	K-2	U1.5	GGMN	1;0	1;1
7	9	(7, 0)	(2, 7)	7	-5	1.00	0.22	K-2	U1.5	GMMN	0;0	0;0
7	9	(7, 0)	(3, 6)	7	-3	1.00	0.33	K-2	U1.5	GMGN	0;0	2;0
7	9	(7, 0)	(4, 5)	7	-1	1.00	0.44	K-2	U1.5	GCGN	0;0	0;0
7	9	(7, 0)	(5, 4)	7	1	1.00	0.56	K-2	U3.5	GCGN	0;0	0;0
7	9	(7, 0)	(6, 3)	7	3	1.00	0.67	K-2	U3.5	GMGN	0;0	2;0
7	9	(7, 0)	(7, 2)	7	5	1.00	0.78	K-5	U3.5	MMGN	0;0	0;1
7	9	(7, 0)	(8, 1)	7	7	1.00	0.89	K11	U3.5	MGGN	0;1	1;1
7	9	(7, 0)	(9, 0)	7	9	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
7	10	(0, 7)	(0, 10)	-7	-10	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
7	10	(0, 7)	(1, 9)	-7	-8	0.00	0.10	K-8	U3.1	CGNG	1;0	1;1
7	10	(0, 7)	(2, 8)	-7	-6	0.00	0.20	K-6	U3.1	MGNG	0;0	4;0
7	10	(0, 7)	(3, 7)	-7	-4	0.00	0.30	K-4	U3.1	GMNG	0;0	0;1
7	10	(0, 7)	(4, 6)	-7	-2	0.00	0.40	K-1	U3.1	GCNG	0;0	0;0
7	10	(0, 7)	(5, 5)	-7	0	0.00	0.50	K-1	U2.1	GNNG	0;0	1;0

tota- les $n_1$ $n_2$	arreglo $(f_1, d_1)$ $(f_2, d_2)$	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult				
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_2, \delta_5, \delta_8, \delta_1$	$U_f; U_d$	D; E		
7	10	(5,2)	(0,10)	3	-10	0.71	0.00	K-2	U1.1	GMNM	0;0	0;5
7	10	(5,2)	(1,9)	3	-8	0.71	0.10	K-2	U2.3	GMCM	1;0	1;1
7	10	(5,2)	(2,8)	3	-6	0.71	0.20	K-2	U2.3	GMMM	0;0	4;4
7	10	(5,2)	(3,7)	3	-4	0.71	0.30	K-2	U2.3	GMGM	0;0	0;0
7	10	(5,2)	(4,6)	3	-2	0.71	0.40	K-2	U2.3	GCGM	0;0	0;3
7	10	(5,2)	(5,5)	3	0	0.71	0.50	K-5	U2.4	MNGM	0;0	1;1
7	10	(5,2)	(6,4)	3	2	0.71	0.60	K-7	U3.4	MCGM	0;0	0;2
7	10	(5,2)	(7,3)	3	4	0.71	0.70	K-9	U3.4	CMGM	0;0	0;0
7	10	(5,2)	(8,2)	3	6	0.71	0.80	K-4	U3.4	CMGM	0;0	4;1
7	10	(5,2)	(9,1)	3	8	0.71	0.90	K-1	U3.4	MMGC	0;1	1;1
7	10	(5,2)	(10,0)	3	10	0.71	1.00	K-1	U3.5	MMGN	0;0	0;2
7	10	(6,1)	(0,10)	5	-10	0.86	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(1,9)	5	-8	0.86	0.10	K-2	U2.3	GGCM	1;1	1;1
7	10	(6,1)	(2,8)	5	-6	0.86	0.20	K-2	U2.3	GGMM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(3,7)	5	-4	0.86	0.30	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(4,6)	5	-2	0.86	0.40	K-2	U2.3	GCGM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(5,5)	5	0	0.86	0.50	K-2	U2.4	GNGM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(6,4)	5	2	0.86	0.60	K-5	U3.4	MCGM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(7,3)	5	4	0.86	0.70	K-7	U3.4	MMGM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(8,2)	5	6	0.86	0.80	K-9	U3.4	CGGM	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(9,1)	5	8	0.86	0.90	K-4	U3.4	CGGC	0;1	1;1
7	10	(6,1)	(10,0)	5	10	0.86	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
7	10	(7,0)	(0,10)	7	-10	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
7	10	(7,0)	(1,9)	7	-8	1.00	0.10	K-2	U1.5	GGCN	1;0	1;1
7	10	(7,0)	(2,8)	7	-6	1.00	0.20	K-2	U1.5	GGMM	0;0	4;0
7	10	(7,0)	(3,7)	7	-4	1.00	0.30	K-2	U1.5	GMGN	0;0	0;0
7	10	(7,0)	(4,6)	7	-2	1.00	0.40	K-2	U1.5	GCGN	0;0	0;0
7	10	(7,0)	(5,5)	7	0	1.00	0.50	K-2	U2.5	GNGN	0;0	1;0
7	10	(7,0)	(6,4)	7	2	1.00	0.60	K-2	U3.5	GCGN	0;0	0;0
7	10	(7,0)	(7,3)	7	4	1.00	0.70	K-5	U3.5	GMGN	0;0	0;1
7	10	(7,0)	(8,2)	7	6	1.00	0.80	K-7	U3.5	MGGN	0;0	4;0
7	10	(7,0)	(9,1)	7	8	1.00	0.90	K-9	U3.5	CGGN	0;1	1;1
7	10	(7,0)	(10,0)	7	10	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0

8	8	(0,8)	(1,7)	-8	-6	0.00	0.13	K-3	U3.1	MGNG	1;0	1;1
8	8	(0,8)	(2,6)	-8	-4	0.00	0.25	K-3	U3.1	MMNG	0;0	3;0
8	8	(0,8)	(3,5)	-8	-2	0.00	0.38	K-3	U3.1	GMNG	0;0	0;0
8	8	(0,8)	(4,4)	-8	0	0.00	0.50	K-3	U2.1	GNGG	0;0	1;2
8	8	(0,8)	(5,3)	-8	2	0.00	0.63	K-3	U1.1	GMNG	0;0	0;0
8	8	(0,8)	(6,2)	-8	4	0.00	0.75	K-3	U1.1	GMNN	0;0	3;4
8	8	(0,8)	(7,1)	-8	6	0.00	0.88	K-3	U1.1	GGNN	0;1	1;1
8	8	(0,8)	(8,0)	-8	8	0.00	1.00	K-3	U1.3	GNGN	0;0	0;0
8	8	(1,7)	(2,6)	-6	-4	0.13	0.25	K-3	U3.2	MMMNG	1;0	1;1
8	8	(1,7)	(3,5)	-6	-2	0.13	0.38	K-3	U3.2	MMMNG	1;0	1;1
8	8	(1,7)	(4,4)	-6	0	0.13	0.50	K-3	U2.2	GNGM	1;0	1;1
8	8	(1,7)	(5,3)	-6	2	0.13	0.63	K-3	U2.3	GMMG	1;0	1;1
8	8	(1,7)	(6,2)	-6	4	0.13	0.75	K-3	U2.3	GMMM	1;0	1;1
8	8	(1,7)	(7,1)	-6	6	0.13	0.88	K-3	U2.3	GGMN	1;1	1;1

total- les n <sub>1</sub> n <sub>2</sub>	arreglo (f <sub>1</sub> , d <sub>1</sub> ) (f <sub>2</sub> , d <sub>2</sub> )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult		
		r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	K	U	δ <sub>p</sub> δ <sub>s</sub> δ <sub>o</sub> δ <sub>1</sub>	U <sub>f</sub> ; U <sub>d</sub>	D; E
8 9	(2,6)(6,3)	-4	3	0.25	0.67	K-1	U2.3	GMMG	0;0	2;2
8 9	(2,6)(7,2)	-4	5	0.25	0.78	K-1	U2.3	GMMM	0;0	3;3
8 9	(2,6)(8,1)	-4	7	0.25	0.89	K-1	U2.3	GMMM	0;1	1;1
8 9	(2,6)(9,0)	-4	9	0.25	1.00	K-1	U1.5	GMMN	0;0	3;0
8 9	(3,5)(0,9)	-2	-9	0.38	0.00	K-2	U3.1	GMNG	0;0	0;0
8 9	(3,5)(1,8)	-2	-7	0.38	0.11	K-2	U3.2	MMMG	1;0	1;1
8 9	(3,5)(2,7)	-2	-5	0.38	0.22	K-2	U3.2	MMMG	0;0	0;0
8 9	(3,5)(3,6)	-2	-3	0.38	0.33	K-5	U3.2	MCGG	0;0	2;1
8 9	(3,5)(4,5)	-2	-1	0.38	0.44	K-4	U3.2	CCGG	0;0	0;1
8 9	(3,5)(5,4)	-2	1	0.38	0.56	K-1	U2.3	MCGG	0;0	0;0
8 9	(3,5)(6,3)	-2	3	0.38	0.67	K-1	U2.3	MMGG	0;0	2;2
8 9	(3,5)(7,2)	-2	5	0.38	0.78	K-1	U2.3	GMGM	0;0	0;0
8 9	(3,5)(8,1)	-2	7	0.38	0.89	K-1	U2.3	GMGM	0;1	1;1
8 9	(3,5)(9,0)	-2	9	0.38	1.00	K-1	U1.5	GMGN	0;0	0;3
8 9	(4,4)(0,9)	0	-9	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;0
8 9	(4,4)(1,8)	0	-7	0.50	0.11	K-2	U2.2	GNMG	1;0	1;1
8 9	(4,4)(2,7)	0	-5	0.50	0.22	K-2	U2.2	MNMG	0;0	1;2
8 9	(4,4)(3,6)	0	-3	0.50	0.33	K-2	U2.2	MNGG	0;0	1;0
8 9	(4,4)(4,5)	0	-1	0.50	0.44	K-5	U2.2	CNGG	0;0	1;1
8 9	(4,4)(5,4)	0	1	0.50	0.56	K-4	U2.4	CNGG	0;0	1;1
8 9	(4,4)(6,3)	0	3	0.50	0.67	K-1	U2.4	MNGG	0;0	1;0
8 9	(4,4)(7,2)	0	5	0.50	0.78	K-1	U2.4	MNGM	0;0	1;2
8 9	(4,4)(8,1)	0	7	0.50	0.89	K-1	U2.4	GNGM	0;1	1;1
8 9	(4,4)(9,0)	0	9	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;0
8 9	(5,3)(0,9)	2	-9	0.63	0.00	K-2	U1.1	GMNG	0;0	0;3
8 9	(5,3)(1,8)	2	-7	0.63	0.11	K-2	U2.3	GMMG	1;0	1;1
8 9	(5,3)(2,7)	2	-5	0.63	0.22	K-2	U2.3	GMMG	0;0	0;0
8 9	(5,3)(3,6)	2	-3	0.63	0.33	K-2	U2.3	MMGG	0;0	2;2
8 9	(5,3)(4,5)	2	-1	0.63	0.44	K-2	U2.3	MCGG	0;0	0;0
8 9	(5,3)(5,4)	2	1	0.63	0.56	K-5	U3.4	CCGG	0;0	0;1
8 9	(5,3)(6,3)	2	3	0.63	0.67	K-4	U3.4	MCGG	0;0	2;1
8 9	(5,3)(7,2)	2	5	0.63	0.78	K-1	U3.4	MMGM	0;0	0;0
8 9	(5,3)(8,1)	2	7	0.63	0.89	K-1	U3.4	MMGM	0;1	1;1
8 9	(5,3)(9,0)	2	9	0.63	1.00	K-1	U3.5	GMGN	0;0	0;0
8 9	(6,2)(0,9)	4	-9	0.75	0.00	K-2	U1.1	GMNM	0;0	3;0
8 9	(6,2)(1,8)	4	-7	0.75	0.11	K-2	U2.3	GMMM	1;0	1;1
8 9	(6,2)(2,7)	4	-5	0.75	0.22	K-2	U2.3	GMMM	0;0	3;3
8 9	(6,2)(3,6)	4	-3	0.75	0.33	K-2	U2.3	GMGM	0;0	2;2
8 9	(6,2)(4,5)	4	-1	0.75	0.44	K-2	U2.3	GCGM	0;0	3;0
8 9	(6,2)(5,4)	4	1	0.75	0.56	K-2	U3.4	MCGM	0;0	3;2
8 9	(6,2)(6,3)	4	3	0.75	0.67	K-5	U3.4	CMGM	0;0	2;1
8 9	(6,2)(7,2)	4	5	0.75	0.78	K-4	U3.4	CMGM	0;0	3;1
8 9	(6,2)(8,1)	4	7	0.75	0.89	K-1	U3.4	MNGM	0;1	1;1
8 9	(6,2)(9,0)	4	9	0.75	1.00	K-1	U3.5	MMGN	0;0	3;0
8 9	(7,1)(0,9)	6	-9	0.88	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
8 9	(7,1)(1,8)	6	-7	0.88	0.11	K-2	U2.3	GGMM	1;1	1;1
8 9	(7,1)(2,7)	6	-5	0.88	0.22	K-2	U2.3	GMMM	0;1	1;1
8 9	(7,1)(3,6)	6	-3	0.88	0.33	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
8 9	(7,1)(4,5)	6	-1	0.88	0.44	K-2	U2.3	GCGM	0;1	1;1

tota- les $n_1$ $n_2$	arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult		
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$	$U_f; U_d$	D; E
8 10	(3,5)(0,10)	-2	-10	0.38	0.00	K-2	U3.1	GMNG	0;0	0;2
8 10	(3,5)(1,9)	-2	-8	0.38	0.10	K-2	U3.2	MMCG	1;0	1;1
8 10	(3,5)(2,8)	-2	-6	0.38	0.20	K-2	U3.2	MMMG	0;0	4;0
8 10	(3,5)(3,7)	-2	-4	0.38	0.30	K-5	U3.2	CMGG	0;0	0;1
8 10	(3,5)(4,6)	-2	-2	0.38	0.40	K10	U3.2	CCGG	0;0	0;0
8 10	(3,5)(5,5)	-2	0	0.38	0.50	K-4	U2.2	MNGG	0;0	1;1
8 10	(3,5)(6,4)	-2	2	0.38	0.60	K-1	U2.3	MCGG	0;0	0;2
8 10	(3,5)(7,3)	-2	4	0.38	0.70	K-1	U2.3	GMGG	0;0	0;0
8 10	(3,5)(8,2)	-2	6	0.38	0.80	K-1	U2.3	GMGM	0;0	4;0
8 10	(3,5)(9,1)	-2	8	0.38	0.90	K-1	U2.3	GMGC	0;1	1;1
8 10	(3,5)(10,0)	-2	10	0.38	1.00	K-1	U1.5	GMGN	0;0	0;0
8 10	(4,4)(0,10)	0	-10	0.50	0.00	K-2	U2.1	GNNG	0;0	1;0
8 10	(4,4)(1,9)	0	-8	0.50	0.10	K-2	U2.2	GNCG	1;0	1;1
8 10	(4,4)(2,8)	0	-6	0.50	0.20	K-2	U2.2	GNMG	0;0	1;2
8 10	(4,4)(3,7)	0	-4	0.50	0.30	K-2	U2.2	MNGG	0;0	1;0
8 10	(4,4)(4,6)	0	-2	0.50	0.40	K-5	U2.2	CNNG	0;0	1;1
8 10	(4,4)(5,5)	0	0	0.50	0.50	K16	U3.3	NNGG	0;0	1;0
8 10	(4,4)(6,4)	0	2	0.50	0.60	K-4	U2.4	CNNG	0;0	1;1
8 10	(4,4)(7,3)	0	4	0.50	0.70	K-1	U2.4	MNGG	0;0	1;0
8 10	(4,4)(8,2)	0	6	0.50	0.80	K-1	U2.4	GNGM	0;0	1;2
8 10	(4,4)(9,1)	0	8	0.50	0.90	K-1	U2.4	GNGC	0;1	1;1
8 10	(4,4)(10,0)	0	10	0.50	1.00	K-1	U2.5	GNGN	0;0	1;0
8 10	(5,3)(0,10)	2	-10	0.63	0.00	K-2	U1.1	GMNG	0;0	0;0
8 10	(5,3)(1,9)	2	-8	0.63	0.10	K-2	U2.3	GMCG	1;0	1;1
8 10	(5,3)(2,8)	2	-6	0.63	0.20	K-2	U2.3	GMMG	0;0	4;0
8 10	(5,3)(3,7)	2	-4	0.63	0.30	K-2	U2.3	GMGG	0;0	0;0
8 10	(5,3)(4,6)	2	-2	0.63	0.40	K-2	U2.3	MCGG	0;0	0;2
8 10	(5,3)(5,5)	2	0	0.63	0.50	K-5	U2.4	MNGG	0;0	1;1
8 10	(5,3)(6,4)	2	2	0.63	0.60	K11	U3.4	CCGG	0;0	0;0
8 10	(5,3)(7,3)	2	4	0.63	0.70	K-4	U3.4	CMGG	0;0	0;1
8 10	(5,3)(8,2)	2	6	0.63	0.80	K-1	U3.4	MMGM	0;0	4;0
8 10	(5,3)(9,1)	2	8	0.63	0.90	K-1	U3.4	MMGC	0;1	1;1
8 10	(5,3)(10,0)	2	10	0.63	1.00	K-1	U3.5	GMGN	0;0	0;2
8 10	(6,2)(0,10)	4	-10	0.75	0.00	K-2	U1.1	GMNM	0;0	3;5
8 10	(6,2)(1,9)	4	-8	0.75	0.10	K-2	U2.3	GMCM	1;0	1;1
8 10	(6,2)(2,8)	4	-6	0.75	0.20	K-2	U2.3	GMMM	0;0	3;3
8 10	(6,2)(3,7)	4	-4	0.75	0.30	K-2	U2.3	GMGM	0;0	3;2
8 10	(6,2)(4,6)	4	-2	0.75	0.40	K-2	U2.3	GCCM	0;0	3;3
8 10	(6,2)(5,5)	4	0	0.75	0.50	K-2	U2.4	MNGM	0;0	1;0
8 10	(6,2)(6,4)	4	2	0.75	0.60	K-5	U3.4	MCCM	0;0	3;1
8 10	(6,2)(7,3)	4	4	0.75	0.70	K11	U3.4	CMGM	0;0	3;0
8 10	(6,2)(8,2)	4	6	0.75	0.80	K-4	U3.4	CMGM	0;0	3;1
8 10	(6,2)(9,1)	4	8	0.75	0.90	K-1	U3.4	MMGC	0;1	1;1
8 10	(6,2)(10,0)	4	10	0.75	1.00	K-1	U3.5	MMGN	0;0	3;0
8 10	(7,1)(0,10)	6	-10	0.88	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
8 10	(7,1)(1,9)	6	-8	0.88	0.10	K-2	U2.3	GCCM	1;1	1;1
8 10	(7,1)(2,8)	6	-6	0.88	0.20	K-2	U2.3	GCCM	0;1	1;1
8 10	(7,1)(3,7)	6	-4	0.88	0.30	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
8 10	(7,1)(4,6)	6	-2	0.88	0.40	K-2	U2.3	GCCM	0;1	1;1



total- les $n_1$ $n_2$	arreglo $(f_1, d_1)$ $(f_2, d_2)$	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult		
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$\delta_p, \delta_s, \delta_o, \delta_1$	$U_i; U_a$	D; E
9 9	(4, 5)(5, 4)	-1	1	0.44	0.56	K-3	U2.3	MCGG	0;0	0;0
9 9	(4, 5)(6, 3)	-1	3	0.44	0.67	K-3	U2.3	MCGG	0;0	2;0
9 9	(4, 5)(7, 2)	-1	5	0.44	0.78	K-3	U2.3	GCGM	0;0	0;0
9 9	(4, 5)(8, 1)	-1	7	0.44	0.89	K-3	U2.3	GCGM	0;1	1;1
9 9	(4, 5)(9, 0)	-1	9	0.44	1.00	K-3	U1.5	GCGN	0;0	0;0
9 9	(5, 4)(6, 3)	1	3	0.56	0.67	K-3	U3.4	MCGG	0;0	2;0
9 9	(5, 4)(7, 2)	1	5	0.56	0.78	K-3	U3.4	MCGM	0;0	0;2
9 9	(5, 4)(8, 1)	1	7	0.56	0.89	K-3	U3.4	GCGM	0;1	1;1
9 9	(5, 4)(9, 0)	1	9	0.56	1.00	K-3	U3.5	GCGN	0;0	0;0
9 9	(6, 3)(7, 2)	3	5	0.67	0.78	K-3	U3.4	MMGM	0;0	2;0
9 9	(6, 3)(8, 1)	3	7	0.67	0.89	K-3	U3.4	MMGM	0;1	1;1
9 9	(6, 3)(9, 0)	3	9	0.67	1.00	K-3	U3.5	GMGN	0;0	2;0
9 9	(7, 2)(8, 1)	5	7	0.78	0.89	K-3	U3.4	MMGM	0;1	1;1
9 9	(7, 2)(9, 0)	5	9	0.78	1.00	K-3	U3.5	MMGN	0;0	0;0
9 9	(8, 1)(9, 0)	7	9	0.89	1.00	K-3	U3.5	MGGN	0;1	1;1
9 10	(0, 9)(0, 10)	-9	-10	0.00	0.00	K12	U3.1	NGNG	0;0	0;0
9 10	(0, 9)(1, 9)	-9	-8	0.00	0.10	K-4	U3.1	CGNG	1;0	1;1
9 10	(0, 9)(2, 8)	-9	-6	0.00	0.20	K-1	U3.1	MGNG	0;0	4;0
9 10	(0, 9)(3, 7)	-9	-4	0.00	0.30	K-1	U3.1	GMNG	0;0	0;0
9 10	(0, 9)(4, 6)	-9	-2	0.00	0.40	K-1	U3.1	GCNG	0;0	0;0
9 10	(0, 9)(5, 5)	-9	0	0.00	0.50	K-1	U2.1	GNNG	0;0	1;0
9 10	(0, 9)(6, 4)	-9	2	0.00	0.60	K-1	U1.1	GCNG	0;0	0;0
9 10	(0, 9)(7, 3)	-9	4	0.00	0.70	K-1	U1.1	GMNG	0;0	0;3
9 10	(0, 9)(8, 2)	-9	6	0.00	0.80	K-1	U1.1	GGNM	0;0	4;0
9 10	(0, 9)(9, 1)	-9	8	0.00	0.90	K-1	U1.1	GGNC	0;1	1;1
9 10	(0, 9)(10, 0)	-9	10	0.00	1.00	K-1	U1.3	GGNN	0;0	0;0
9 10	(1, 8)(0, 10)	-7	-10	0.11	0.00	K-2	U3.1	MGNG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(1, 9)	-7	-8	0.11	0.10	K-5	U3.2	CGCG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(2, 8)	-7	-6	0.11	0.20	K-4	U3.2	CGMG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(3, 7)	-7	-4	0.11	0.30	K-1	U3.2	MMMGM	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(4, 6)	-7	-2	0.11	0.40	K-1	U3.2	MCMG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(5, 5)	-7	0	0.11	0.50	K-1	U2.2	GNMG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(6, 4)	-7	2	0.11	0.60	K-1	U2.3	GCMG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(7, 3)	-7	4	0.11	0.70	K-1	U2.3	GMMG	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(8, 2)	-7	6	0.11	0.80	K-1	U2.3	GGMM	1;0	1;1
9 10	(1, 8)(9, 1)	-7	8	0.11	0.90	K-1	U2.3	GGMC	1;1	1;1
9 10	(1, 8)(10, 0)	-7	10	0.11	1.00	K-1	U1.5	GGMN	1;0	1;1
9 10	(2, 7)(0, 10)	-5	-10	0.22	0.00	K-2	U3.1	MMNG	0;0	0;0
9 10	(2, 7)(1, 9)	-5	-8	0.22	0.10	K-2	U3.2	MMCG	1;0	1;1
9 10	(2, 7)(2, 8)	-5	-6	0.22	0.20	K-5	U3.2	CMMG	0;0	4;1
9 10	(2, 7)(3, 7)	-5	-4	0.22	0.30	K-4	U3.2	CMMG	0;0	0;1
9 10	(2, 7)(4, 6)	-5	-2	0.22	0.40	K-1	U3.2	MCMG	0;0	0;2
9 10	(2, 7)(5, 5)	-5	0	0.22	0.50	K-1	U2.2	MNMG	0;0	1;0
9 10	(2, 7)(6, 4)	-5	2	0.22	0.60	K-1	U2.3	CGMG	0;0	0;3
9 10	(2, 7)(7, 3)	-5	4	0.22	0.70	K-1	U2.3	GMMG	0;0	0;0
9 10	(2, 7)(8, 2)	-5	6	0.22	0.80	K-1	U2.3	GMMM	0;0	4;4
9 10	(2, 7)(9, 1)	-5	8	0.22	0.90	K-1	U2.3	GMMC	0;1	1;1
9 10	(2, 7)(10, 0)	-5	10	0.22	1.00	K-1	U1.5	GMMN	0;0	0;5

total- les $n_1$ $n_2$	arreglo ( $f_1, d_1$ ) ( $f_2, d_2$ )	restas		probabi- lidades		combinac ubicac		perc unos mult $\delta_p, \delta_5, \delta_o, \delta_1$		
		$r_1$	$r_2$	$p_1$	$p_2$	K	U	$U_r; U_d$	D; E	
9 10	(7,2)(5,5)	5	0	0.78	0.50	K-2	U2.4	MNGM	0;0	1;0
9 10	(7,2)(6,4)	5	2	0.78	0.60	K-2	U3.4	MCGM	0;0	0;2
9 10	(7,2)(7,3)	5	4	0.78	0.70	K-5	U3.4	CMGM	0;0	0;1
9 10	(7,2)(8,2)	5	6	0.78	0.80	K-4	U3.4	CMGM	0;0	4;1
9 10	(7,2)(9,1)	5	8	0.78	0.90	K-1	U3.4	MMGC	0;1	1;1
9 10	(7,2)(10,0)	5	10	0.78	1.00	K-1	U3.5	MMGN	0;0	0;0
9 10	(8,1)(0,10)	7	-10	0.89	0.00	K-2	U1.1	GGNM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(1,9)	7	-8	0.89	0.10	K-2	U2.3	GGCM	1;1	1;1
9 10	(8,1)(2,8)	7	-6	0.89	0.20	K-2	U2.3	GGMM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(3,7)	7	-4	0.89	0.30	K-2	U2.3	GMGM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(4,6)	7	-2	0.89	0.40	K-2	U2.3	CGCM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(5,5)	7	0	0.89	0.50	K-2	U2.4	GNMG	0;1	1;1
9 10	(8,1)(6,4)	7	2	0.89	0.60	K-2	U3.4	MCGM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(7,3)	7	4	0.89	0.70	K-2	U3.4	MMGM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(8,2)	7	6	0.89	0.80	K-5	U3.4	CGGM	0;1	1;1
9 10	(8,1)(9,1)	7	8	0.89	0.90	K-4	U3.4	CGGC	0;1	1;1
9 10	(8,1)(10,0)	7	10	0.89	1.00	K-1	U3.5	MGGN	0;1	1;1
9 10	(9,0)(0,10)	9	-10	1.00	0.00	K-2	U1.3	GGNN	0;0	0;0
9 10	(9,0)(1,9)	9	-8	1.00	0.10	K-2	U1.5	GGCN	1;0	1;1
9 10	(9,0)(2,8)	9	-6	1.00	0.20	K-2	U1.5	GGMN	0;0	4;0
9 10	(9,0)(3,7)	9	-4	1.00	0.30	K-2	U1.5	GMGN	0;0	0;3
9 10	(9,0)(4,6)	9	-2	1.00	0.40	K-2	U1.5	GCGN	0;0	0;0
9 10	(9,0)(5,5)	9	0	1.00	0.50	K-2	U2.5	GNGN	0;0	1;0
9 10	(9,0)(6,4)	9	2	1.00	0.60	K-2	U3.5	GCGN	0;0	0;0
9 10	(9,0)(7,3)	9	4	1.00	0.70	K-2	U3.5	GMGN	0;0	0;0
9 10	(9,0)(8,2)	9	6	1.00	0.80	K-2	U3.5	MGGN	0;0	4;0
9 10	(9,0)(9,1)	9	8	1.00	0.90	K-5	U3.5	CGGN	0;1	1;1
9 10	(9,0)(10,0)	9	10	1.00	1.00	K13	U3.5	NGGN	0;0	0;0
10 10	(0,10)(1,9)	-10	-8	0.00	0.10	K-3	U3.1	CGNG	1;0	1;1
10 10	(0,10)(2,8)	-10	-6	0.00	0.20	K-3	U3.1	MGNG	0;0	4;0
10 10	(0,10)(3,7)	-10	-4	0.00	0.30	K-3	U3.1	GMNG	0;0	0;0
10 10	(0,10)(4,6)	-10	-2	0.00	0.40	K-3	U3.1	GCNG	0;0	0;0
10 10	(0,10)(5,5)	-10	0	0.00	0.50	K-3	U2.1	GNGN	0;0	1;2
10 10	(0,10)(6,4)	-10	2	0.00	0.60	K-3	U1.1	GCNG	0;0	0;0
10 10	(0,10)(7,3)	-10	4	0.00	0.70	K-3	U1.1	GMNG	0;0	0;0
10 10	(0,10)(8,2)	-10	6	0.00	0.80	K-3	U1.1	GGNM	0;0	4;5
10 10	(0,10)(9,1)	-10	8	0.00	0.90	K-3	U1.1	GGNC	0;1	1;1
10 10	(0,10)(10,0)	-10	10	0.00	1.00	K-3	U1.3	GGNN	0;0	0;0
10 10	(1,9)(2,8)	-8	-6	0.10	0.20	K-3	U3.2	CGCG	1;0	1;1
10 10	(1,9)(3,7)	-8	-4	0.10	0.30	K-3	U3.2	MMCG	1;0	1;1
10 10	(1,9)(4,6)	-8	-2	0.10	0.40	K-3	U3.2	GCCG	1;0	1;1
10 10	(1,9)(5,5)	-8	0	0.10	0.50	K-3	U2.2	GNCG	1;0	1;1
10 10	(1,9)(6,4)	-8	2	0.10	0.60	K-3	U2.3	GCCG	1;0	1;1
10 10	(1,9)(7,3)	-8	4	0.10	0.70	K-3	U2.3	GMCG	1;0	1;1
10 10	(1,9)(8,2)	-8	6	0.10	0.80	K-3	U2.3	GGCM	1;0	1;1
10 10	(1,9)(9,1)	-8	8	0.10	0.90	K-3	U2.3	GGCC	1;1	1;1
10 10	(1,9)(10,0)	-8	10	0.10	1.00	K-3	U1.5	GGCN	1;0	1;1

**ANEXO 2 : BANCO DE ARREGLOS  
CLASIFICADOS POR SITUACION**

Se presentan en este anexo todos los arreglos de la forma

$$S1=(f_1, d_1), S2=(f_2, d_2)$$

desde  $n_1 = 1$  hasta  $n_1 = 10$ , con la exclusión de los arreglos de identidad, clasificados de acuerdo con lo siguiente:

Por combinación:

$$K=nfdrp:$$

si  $y$  representa  $n, f, d, r, p$ ; entonces

$$y=0 \text{ si } Y_1=Y_2,$$

$$y=1 \text{ si } Y_1<Y_2,$$

$$y=2 \text{ si } Y_1>Y_2.$$

Dentro de cada combinación:

Por ubicación:

si  $p_n=\min\{p_1, p_2\}$  y  $p_M=\max\{p_1, p_2\}$ , entonces:

$$U1.1: p_n=0, \quad .5 < p_M < 1,$$

$$U1.3: p_n=0, \quad p_M=1,$$

$$U1.5: 0 < p_n < .5, \quad p_M=1,$$

$$U2.1: p_n=0, \quad p_M=.5,$$

$$U2.2: 0 < p_n < .5, \quad p_M=.5,$$

$$U2.3: 0 < p_n < .5, \quad .5 < p_M < 1$$

$$U2.4: p_n=.5, \quad .5 < p_M < 1$$

$$U2.5: p_n=.5, \quad p_M=1$$

$$U3.1: p_n=0, \quad .5 \leq p_M < 1,$$

$$U3.2: 0 < p_n < p_M < .5$$

$$U3.3: p_n=.5=p_M$$

$$U3.4: .5 < p_n < p_M < 1$$

$$U3.5: .5 \leq p_n < 1, \quad p_M=1.$$

Cada ubicación está encuadrada por separado.

Dentro de cada ubicación:

Por las cuatro variables de perceptividad:

para la diferencia entre  $p_1$  y  $p_2$ :  $\delta_p$

$$\delta_p=N \text{ si } |p_1-p_2|=0,$$

$$\delta_p=C \text{ si } 0 < |p_1-p_2| \leq 0.1,$$

$$\delta_p=M \text{ si } 0.1 < |p_1-p_2| < 0.3,$$

$$\delta_p=G \text{ si } |p_1-p_2| \geq 0.3;$$

K-1 = 11211		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$ y
U1.1	G C N G			0;2: (0,4)(3,2)	(0,3)(3,2)
U1.1	G C N G			0;2: (0,6)(4,3)	(0,4)(4,3)
U1.1	G C N G			0;2: (0,8)(5,4)	(0,5)(4,3)
U1.1	G C N G			0;2: (0,8)(6,4)	(0,5)(5,4)
U1.1	G C N G				(0,5)(6,4)
U1.1	G C N G				(0,6)(5,4)
U1.1	G C N G				(0,6)(6,4)
U1.1	G C N G				(0,7)(5,4)
U1.1	G C N G				(0,7)(6,4)
U1.1	G C N G				(0,9)(6,4)
U1.1	G M N M	1;1:	(0,2)(3,1)	3;0: (0,3)(6,2)	(0,3)(5,2)
U1.1	G M N M	1;1:	(0,3)(3,1)	3;0: (0,5)(6,2)	(0,3)(7,2)
U1.1	G M N M	3;2:	(0,4)(6,2)	3;0: (0,7)(6,2)	(0,5)(5,2)
U1.1	G M N M	3;3:	(0,6)(6,2)	0;2: (0,4)(5,2)	(0,5)(7,2)
U1.1	G M N M			0;2: (0,4)(7,2)	(0,7)(7,2)
U1.1	G M N M			0;3: (0,6)(5,2)	
U1.1	G M N M			0;3: (0,6)(7,2)	
U1.1	G M N M			0;4: (0,8)(7,2)	
U1.1	G M N G	1;1:	(0,2)(2,1)	2;0: (0,3)(4,2)	(0,4)(5,3)
U1.1	G M N G	2;2:	(0,4)(4,2)	2;0: (0,4)(6,3)	(0,4)(7,3)
U1.1	G M N G	2;2:	(0,6)(6,3)	2;0: (0,5)(4,2)	(0,5)(5,3)
U1.1	G M N G			2;0: (0,5)(6,3)	(0,5)(7,3)
U1.1	G M N G			2;0: (0,7)(6,3)	(0,7)(5,3)
U1.1	G M N G			2;0: (0,8)(6,3)	(0,7)(7,3)
U1.1	G M N G			0;2: (0,6)(5,3)	(0,8)(7,3)
U1.1	G M N G			0;2: (0,6)(7,3)	
U1.1	G M N G			0;3: (0,9)(7,3)	
U1.1	G G N C	1;1:	(0,2)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,3)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,4)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,5)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,6)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,7)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,8)(9,1)		
U1.1	G G N C	1;1:	(0,9)(9,1)		

K-1 = 11211		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$ y
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(2,0)	(0,2)(3,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(3,0)	(0,2)(4,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(4,0)	(0,2)(5,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(5,0)	(0,2)(6,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(6,0)	(0,2)(7,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(7,0)	(0,2)(8,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(8,0)	(0,2)(9,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(9,0)	(0,2)(10,0)
U1.3	G G N N	1;1:	(0,1)	(10,0)	(0,3)(4,0)
U1.3	G G N N				(0,3)(5,0)
U1.3	G G N N				(0,3)(6,0)
U1.3	G G N N				(0,3)(7,0)
U1.3	G G N N				(0,3)(8,0)
U1.3	G C N N				(0,3)(9,0)
U1.3	G G N N				(0,3)(10,0)
U1.3	G G N N				(0,4)(5,0)
U1.3	G G N N				(0,4)(6,0)
U1.3	G G N N				(0,4)(7,0)
U1.3	G G N N				(0,4)(8,0)
U1.3	G G N N				(0,4)(9,0)
U1.3	G G N N				(0,4)(10,0)
U1.3	G G N N				(0,5)(6,0)
U1.3	G G N N				(0,5)(7,0)
U1.3	G G N N				(0,5)(8,0)
U1.3	G G N N				(0,5)(9,0)
U1.3	G G N N				(0,5)(10,0)
U1.3	G G N N				(0,6)(7,0)
U1.3	G G N N				(0,6)(8,0)
U1.3	G G N N				(0,6)(9,0)
U1.3	G G N N				(0,6)(10,0)
U1.3	G G N N				(0,7)(8,0)
U1.3	G G N N				(0,7)(9,0)
U1.3	G G N N				(0,7)(10,0)
U1.3	G G N N				(0,8)(9,0)
U1.3	G G N N				(0,8)(10,0)
U1.3	G G N N				(0,9)(10,0)

K-1 = 11211		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_0 \delta_1$	D > 0 E > 0	Y	D = 0 y E > 0 ó E = 0 y D > 0	D = 0 E = 0	Y
U2.1	G N N G	1;0:	(0,3)(2,2)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,4)(3,3)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,5)(3,3)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,5)(4,4)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,6)(4,4)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,6)(5,5)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,7)(4,4)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,7)(5,5)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,8)(5,5)			
U2.1	G N N G	1;0:	(0,9)(5,5)			
U2.2	M N M G	1;2:	(2,5)(4,4)	1;0: (2,6)(5,5)		
U2.2	M N M G			1;0: (2,7)(5,5)		
U2.2	M N G G			1;0: (3,6)(5,5)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,4)(3,3)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,5)(4,4)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,6)(4,4)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,6)(5,5)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,7)(5,5)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,8)(5,5)			
U2.3	M C M G			0;2: (3,5)(6,4)	(2,5)(5,4)	
U2.3	M C G G	2;2:	(2,3)(4,2)		(3,4)(5,3)	
U2.3	M C G G	2;2:	(2,4)(4,3)		(3,4)(7,3)	
U2.3	M C G G	2;2:	(3,4)(6,3)		(3,5)(5,4)	
U2.3	M C G G	2;2:	(3,6)(6,4)		(4,5)(6,4)	
U2.3	M C G G				(4,5)(7,3)	
U2.3	M M G G	2;2:	(3,5)(6,3)	2;0: (2,4)(5,3)		
U2.3	G C M G	1;1:	(1,3)(3,2)	3;0: (2,6)(5,4)		
U2.3	G C M G	1;1:	(1,4)(4,3)	0;3: (2,5)(6,4)		
U2.3	G C M G	1;1:	(1,5)(4,3)	0;3: (2,7)(6,4)		
U2.3	G C M G	1;1:	(1,5)(5,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,5)(6,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,6)(5,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,6)(6,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,7)(5,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,7)(6,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,8)(6,4)			
U2.3	G C M G	3;3:	(2,6)(6,4)			
U2.3	G C G C	1;1:	(2,3)(9,1)			
U2.3	G C G C	1;1:	(3,4)(9,1)			
U2.3	G C G C	1;1:	(4,5)(9,1)			

K-1 = 11211		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$Y$	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ y $E = 0$
U2.3	G M M G	1;1:	(1,3)(4,2)		(2,5)(5,3)
U2.3	G M M G	1;1:	(1,4)(4,2)		(2,5)(7,3)
U2.3	G M M G	1;1:	(1,4)(5,3)		(2,7)(7,3)
U2.3	G M M G	1;1:	(1,4)(6,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,4)(7,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,5)(5,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,5)(6,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,5)(7,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,6)(5,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,6)(6,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,6)(7,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,7)(6,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,7)(7,3)		
U2.3	G M M G	1;1:	(1,8)(7,3)		
U2.3	G M M G	2;2:	(2,6)(6,3)		
U2.3	G M M G	2;3:	(2,5)(6,3)		
U2.3	G M M G	3;2:	(2,6)(7,3)		
U2.3	G M G C	1;1:	(1,2)(9,1)		
U2.3	G M G C	1;1:	(2,4)(9,1)		
U2.3	G M G C	1;1:	(3,5)(9,1)		
U2.3	G M G C	1;1:	(3,6)(9,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(3,1)	4;0: (3,5)(8,2)	(3,5)(7,2)
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(4,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(5,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(6,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(7,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(8,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(2,4)(6,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(2,4)(7,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(2,4)(8,1)		
U2.3	G M G M	1;1:	(3,5)(8,1)		
U2.3	G M G M	2;2:	(2,4)(5,2)		
U2.3	G M G M	2;2:	(2,4)(6,2)		
U2.3	G M G M	2;2:	(2,4)(7,2)		
U2.3	G M G M	2;2:	(2,4)(8,2)		
U2.3	G M G M	2;3:	(3,6)(8,2)		
U2.3	G M G G	2;2:	(3,6)(7,3)	2;0: (2,4)(7,3)	(3,5)(7,3)
U2.3	G M G G	2;3:	(2,4)(6,3)		
U2.3	G G M C	1;1:	(1,4)(9,1)		
U2.3	G G M C	1;1:	(1,5)(9,1)		
U2.3	G G M C	1;1:	(1,6)(9,1)		
U2.3	G G M C	1;1:	(1,7)(9,1)		
U2.3	G G M C	1;1:	(1,8)(9,1)		

K-1 = 11211		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$ y
U3.1	M M N G			3;0: (0,7)(2,6)	(0,6)(2,5)
U3.1	M M N G				(0,8)(2,7)
U3.1	M G N G			4;0: (0,9)(2,8)	
U3.1	G C N G				(0,4)(2,3)
U3.1	G C N G				(0,5)(3,4)
U3.1	G C N G				(0,6)(3,4)
U3.1	G C N G				(0,6)(4,5)
U3.1	G C N G				(0,7)(4,5)
U3.1	G C N G				(0,7)(4,6)
U3.1	G C N G				(0,8)(4,5)
U3.1	G C N G				(0,8)(4,6)
U3.1	G C N G				(0,9)(4,6)
U3.1	G M N G			2;0: (0,5)(2,4)	(0,6)(3,5)
U3.1	G M N G			2;0: (0,7)(3,6)	(0,7)(3,5)
U3.1	G M N G			2;0: (0,8)(3,6)	(0,8)(3,7)
U3.1	G M N G				(0,9)(3,7)
U3.2	M C M G	1;1:	(1,5)(3,4)	0;2: (2,7)(4,6)	
U3.2	M C M G	1;1:	(1,7)(4,6)		
U3.2	M C M G	1;1:	(1,8)(4,6)		
U3.2	M C M G	3;2:	(2,6)(4,5)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,6)(3,5)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,7)(3,6)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,8)(3,7)		
U3.2	G C M G	1;1:	(1,6)(4,5)		
U3.2	G C M G	1;1:	(1,7)(4,5)		
U3.4	M C G M	1;1:	(3,2)(5,1)	3;0: (4,3)(6,2)	(4,3)(7,2)
U3.4	M C G M	1;1:	(3,2)(6,1)		
U3.4	M C G M	1;1:	(3,2)(7,1)		
U3.4	M C G M	1;1:	(3,2)(8,1)		
U3.4	M C G M	4;2:	(4,3)(8,2)		
U3.4	M C G M	4;2:	(5,4)(8,2)		
U3.4	M C G G				(5,4)(7,3)
U3.4	M M G C	1;1:	(4,2)(9,1)		
U3.4	M M G C	1;1:	(5,2)(9,1)		
U3.4	M M G C	1;1:	(6,2)(9,1)		
U3.4	M M G C	1;1:	(7,2)(9,1)		
U3.4	M M G C	1;1:	(5,3)(9,1)		
U3.4	M M G C	1;1:	(6,3)(9,1)		



K-1 = 11211		MULTIPLICIDAD				
ubic	perc	$D > 0$	$y$	$D = 0$	$y$	
$\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$		$E > 0$		$\delta E = 0$	$y D > 0$	
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(4,0)	2;0:	(4,2)(7,0)	(5,3)(9,0)
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(5,0)	2;0:	(4,2)(9,0)	
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(6,0)	2;0:	(4,2)(10,0)	
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(7,0)	2;0:	(6,3)(10,0)	
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(8,0)	0;2:	(5,3)(10,0)	
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(9,0)			
U3.5	G M G N	1;1:	(2,1)(10,0)			
U3.5	G M G N	2;2:	(4,2)(8,0)			

K-2 = 12122		MULTIPLICIDAD				
ubic	perc	$D > 0$	$y$	$D = 0$	$y$	
$\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$		$E > 0$		$\delta E = 0$	$y D > 0$	
U1.1	G C N G			0;3:	(3,2)(0,6)	(3,2)(0,7)
U1.1	G C N G			0;3:	(4,3)(0,9)	(3,2)(0,9)
U1.1	G C N G			0;4:	(3,2)(0,8)	(4,3)(0,8)
U1.1	G C N G			0;5:	(3,2)(0,10)	(4,3)(0,10)
U1.1	G C N G					(5,4)(0,10)
U1.1	G M N M	1;1:	(3,1)(0,5)	3;0:	(6,2)(0,9)	(5,2)(0,9)
U1.1	G M N M	1;1:	(3,1)(0,6)	0;4:	(5,2)(0,8)	
U1.1	G M N M	1;1:	(3,1)(0,7)	0;5:	(5,2)(0,10)	
U1.1	G M N M	1;1:	(3,1)(0,8)	0;5:	(7,2)(0,10)	
U1.1	G M N M	1;1:	(3,1)(0,9)			
U1.1	G M N M	1;1:	(3,1)(0,10)			
U1.1	G M N M	3;5:	(6,2)(0,10)			
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,4)	2;0:	(4,2)(0,7)	(5,3)(0,10)
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,5)	2;0:	(4,2)(0,9)	
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,6)	2;0:	(6,3)(0,10)	
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,7)	0;3:	(5,3)(0,9)	
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,8)			
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,9)			
U1.1	G M N G	1;1:	(2,1)(0,10)			
U1.1	G M N G	2;4:	(4,2)(0,8)			
U1.1	G M N G	2;5:	(4,2)(0,10)			

K-2 = 12122		M U L T I P L I C I D A D					
ubic	perc $\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	y	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,2)	(2,0)	(0,3)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,3)	(2,0)	(0,4)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,4)	(2,0)	(0,5)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,5)	(2,0)	(0,6)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,6)	(2,0)	(0,7)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,7)	(2,0)	(0,8)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,8)	(2,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,9)	(2,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N	1;1:	(1,0)	(0,10)	(3,0)	(0,4)	
U1.3	G G N N				(3,0)	(0,5)	
U1.3	G G N N				(3,0)	(0,6)	
U1.3	G G N N				(3,0)	(0,7)	
U1.3	G G N N				(3,0)	(0,8)	
U1.3	G G N N				(3,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N				(3,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N				(4,0)	(0,5)	
U1.3	G G N N				(4,0)	(0,6)	
U1.3	G G N N				(4,0)	(0,7)	
U1.3	G G N N				(4,0)	(0,8)	
U1.3	G G N N				(4,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N				(4,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N				(5,0)	(0,6)	
U1.3	G G N N				(5,0)	(0,7)	
U1.3	G G N N				(5,0)	(0,8)	
U1.3	G G N N				(5,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N				(5,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N				(6,0)	(0,7)	
U1.3	G G N N				(6,0)	(0,8)	
U1.3	G G N N				(6,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N				(6,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N				(7,0)	(0,8)	
U1.3	G G N N				(7,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N				(7,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N				(8,0)	(0,9)	
U1.3	G G N N				(8,0)	(0,10)	
U1.3	G G N N				(9,0)	(0,10)	
U1.5	G C G N			0;2: (4,0)	(2,3)	(3,0)	(2,3)
U1.5	G C G N			0;2: (6,0)	(3,4)	(4,0)	(3,4)
U1.5	G C G N			0;2: (8,0)	(4,5)	(5,0)	(3,4)
U1.5	G C G N			0;2: (8,0)	(4,6)	(5,0)	(4,5)
U1.5	G C G N					(5,0)	(4,6)
U1.5	G C G N					(6,0)	(4,5)
U1.5	G C G N					(6,0)	(4,6)
U1.5	G C G N					(7,0)	(4,5)
U1.5	G C G N					(7,0)	(4,6)
U1.5	G C G N					(9,0)	(4,6)

K-2 = 12122		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p, \delta_s, \delta_0, \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	Y	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	Y
U1.5	G G M N	1;1:	(2,0)(1,4)	4;0:	(3,0)(2,8)	
U1.5	G G M N	1;1:	(2,0)(1,5)	4;0:	(5,0)(2,8)	
U1.5	G G M N	1;1:	(2,0)(1,6)	4;0:	(7,0)(2,8)	
U1.5	G G M N	1;1:	(2,0)(1,7)	4;0:	(9,0)(2,8)	
U1.5	G G M N	1;1:	(2,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	1;1:	(3,0)(1,4)			
U1.5	G G M N	1;1:	(3,0)(1,5)			
U1.5	G G M N	1;1:	(3,0)(1,6)			
U1.5	G G M N	1;1:	(3,0)(1,7)			
U1.5	G G M N	1;1:	(3,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	1;1:	(4,0)(1,4)			
U1.5	G G M N	1;1:	(4,0)(1,5)			
U1.5	G G M N	1;1:	(4,0)(1,6)			
U1.5	G G M N	1;1:	(4,0)(1,7)			
U1.5	G G M N	1;1:	(4,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	1;1:	(5,0)(1,5)			
U1.5	G G M N	1;1:	(5,0)(1,6)			
U1.5	G G M N	1;1:	(5,0)(1,7)			
U1.5	G G M N	1;1:	(5,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	1;1:	(6,0)(1,6)			
U1.5	G G M N	1;1:	(6,0)(1,7)			
U1.5	G G M N	1;1:	(6,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	1;1:	(7,0)(1,7)			
U1.5	G G M N	1;1:	(7,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	1;1:	(8,0)(1,8)			
U1.5	G G M N	4;2:	(4,0)(2,8)			
U1.5	G G M N	4;3:	(6,0)(2,8)			
U1.5	G G M N	4;4:	(8,0)(2,8)			
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,3)	1;0:	(2,2)(0,5)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,4)	1;0:	(2,2)(0,7)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,5)	1;0:	(2,2)(0,9)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,6)	1;0:	(3,3)(0,7)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,7)	1;0:	(3,3)(0,8)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,8)	1;0:	(3,3)(0,10)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,9)	1;0:	(4,4)(0,9)	
U2.1	G N N G	1;1:	(1,1)(0,10)	1;0:	(4,4)(0,10)	
U2.1	G N N G	1;3:	(2,2)(0,6)			
U2.1	G N N G	1;3:	(3,3)(0,9)			
U2.1	G N N G	1;4:	(2,2)(0,8)			
U2.1	G N N G	1;5:	(2,2)(0,10)			
U2.2	M N M G	1;2:	(3,3)(2,6)	1;0:	(3,3)(2,5)	
U2.2	M N M G	1;2:	(4,4)(2,7)	1;0:	(3,3)(2,7)	
U2.2	M N G G	1;0:	(4,4)(3,6)			
U2.2	M N G G	1;0:	(4,4)(3,7)			

K-2 = 12122		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_0 \delta_1$	D > 0 E > 0	Y	D = 0 y E > 0 ó E = 0 y D > 0	D = 0 E = 0	Y
U2.3	G M C M	1;1:	(3,1)	(1,9)		
U2.3	G M C M	1;1:	(5,2)	(1,9)		
U2.3	G M C M	1;1:	(6,2)	(1,9)		
U2.3	G M C M	1;1:	(7,2)	(1,9)		
U2.3	G M C G	1;1:	(2,1)	(1,9)		
U2.3	G M C G	1;1:	(4,2)	(1,9)		
U2.3	G M C G	1;1:	(6,3)	(1,9)		
U2.3	G M C G	1;1:	(5,3)	(1,9)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(1,4)		(5,2)(2,7)
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(1,5)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(1,6)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(1,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(1,8)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(2,5)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(2,6)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(2,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(3,1)	(2,8)		
U2.3	G M M M	1;1:	(4,1)	(2,5)		
U2.3	G M M M	1;1:	(4,1)	(2,6)		
U2.3	G M M M	1;1:	(4,1)	(2,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(5,1)	(2,5)		
U2.3	G M M M	1;1:	(5,1)	(2,6)		
U2.3	G M M M	1;1:	(5,1)	(2,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(6,1)	(2,6)		
U2.3	G M M M	1;1:	(6,1)	(2,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(7,1)	(2,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(5,2)	(1,7)		
U2.3	G M M M	1;1:	(5,2)	(1,8)		
U2.3	G M M M	1;1:	(6,2)	(1,8)		
U2.3	G M M M	3;3:	(5,2)	(2,6)		
U2.3	G M M M	3;3:	(6,2)	(2,7)		
U2.3	G M M M	3;3:	(6,2)	(2,8)		
U2.3	G M M M	4;4:	(5,2)	(2,8)		
U2.3	G M M M	4;4:	(7,2)	(2,8)		

K-2 = 12122		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$y$	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	$y$
U2.3	G G M M	1;1:	(4,1)(1,5)			
U2.3	G G M M	1;1:	(4,1)(1,6)			
U2.3	G G M M	1;1:	(4,1)(1,7)			
U2.3	G G M M	1;1:	(4,1)(1,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(5,1)(1,6)			
U2.3	G G M M	1;1:	(5,1)(1,7)			
U2.3	G G M M	1;1:	(5,1)(1,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(6,1)(1,7)			
U2.3	G G M M	1;1:	(6,1)(1,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(7,1)(1,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(4,1)(2,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(5,1)(2,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(6,1)(2,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(7,1)(2,8)			
U2.3	G G M M	1;1:	(8,1)(2,8)			
U2.4	M N G M	1;2:	(5,2)(4,4)	1;0: (6,2)(5,5)		
U2.4	M N G M			1;0: (7,2)(5,5)		
U2.4	M N G G			1;0: (6,3)(5,5)		
U2.4	G N G M	1;1:	(4,1)(3,3)			
U2.4	G N G M	1;1:	(5,1)(4,4)			
U2.4	G N G M	1;1:	(6,1)(4,4)			
U2.4	G N G M	1;1:	(6,1)(5,5)			
U2.4	G N G M	1;1:	(7,1)(5,5)			
U2.4	G N G M	1;1:	(8,1)(5,5)			
U2.5	G N G N			1;0: (3,0)(2,2)		
U2.5	G N G N			1;0: (4,0)(3,3)		
U2.5	G N G N			1;0: (5,0)(3,3)		
U2.5	G N G N			1;0: (5,0)(4,4)		
U2.5	G N G N			1;0: (6,0)(4,4)		
U2.5	G N G N			1;0: (6,0)(5,5)		
U2.5	G N G N			1;0: (7,0)(4,4)		
U2.5	G N G N			1;0: (7,0)(5,5)		
U2.5	G N G N			1;0: (8,0)(5,5)		
U2.5	G N G N			1;0: (9,0)(5,5)		
U3.1	M M N G	1;1:	(1,3)(0,5)	3;0: (2,6)(0,9)	(2,5)(0,8)	
U3.1	M M N G	1;1:	(1,3)(0,6)	3;0: (2,6)(0,10)	(2,5)(0,9)	
U3.1	M M N G	1;1:	(1,3)(0,7)	0;2: (2,5)(0,10)	(2,7)(0,10)	
U3.1	M M N G	1;1:	(1,3)(0,8)			
U3.1	M M N G	1;1:	(1,3)(0,9)			
U3.1	M M N G	1;1:	(1,3)(0,10)			

K-2 = 12122		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p, \delta_s, \delta_o, \delta_1$	D > 0 E > 0	Y	D = 0 y E > 0 ó E = 0 y D > 0	D = 0 E = 0	
U3.2	M M M G	1;1:	(2,4)(1,6)	2;0: (3,6)(2,8)	(3,5)(2,7)	
U3.2	M M M G	1;1:	(2,4)(1,7)	4;0: (3,5)(2,8)		
U3.2	M M M G	1;1:	(2,4)(1,8)			
U3.2	M M M G	1;1:	(2,5)(1,7)			
U3.2	M M M G	1;1:	(2,5)(1,8)			
U3.2	M M M G	1;1:	(2,6)(1,8)			
U3.2	M M M G	1;1:	(3,5)(1,8)			
U3.2	G C C G	1;1:	(2,3)(1,9)			
U3.2	G C C G	1;1:	(3,4)(1,9)			
U3.2	G C C G	1;1:	(4,5)(1,9)			
U3.2	G C M G	1;1:	(3,4)(1,7)			
U3.2	G C M G	1;1:	(3,4)(1,8)			
U3.4	M C G M	1;1:	(5,1)(4,3)	0;2: (7,2)(6,4)		
U3.4	M C G M	1;1:	(7,1)(6,4)			
U3.4	M C G M	1;1:	(8,1)(6,4)			
U3.4	M C G M	3;2:	(6,2)(5,4)			
U3.4	M M G M	1;1:	(6,1)(5,3)			
U3.4	M M G M	1;1:	(7,1)(6,3)			
U3.4	M M G M	1;1:	(8,1)(7,3)			
U3.4	G C G M	1;1:	(6,1)(5,4)			
U3.4	G C G M	1;1:	(7,1)(5,4)			
U3.5	M M G N			3;0: (7,0)(6,2)	(6,0)(5,2)	
U3.5	M M G N				(8,0)(7,2)	
U3.5	M G G N			4;0: (9,0)(8,2)		
U3.5	G C G N				(4,0)(3,2)	
U3.5	G C G N				(5,0)(4,3)	
U3.5	G C G N				(6,0)(4,3)	
U3.5	G C G N				(6,0)(5,4)	
U3.5	G C G N				(7,0)(5,4)	
U3.5	G C G N				(7,0)(6,4)	
U3.5	G C G N				(8,0)(5,4)	
U3.5	G C G N				(8,0)(6,4)	
U3.5	G C G N				(9,0)(6,4)	
U3.5	G M G N			2;0: (5,0)(4,2)	(6,0)(5,3)	
U3.5	G M G N			2;0: (7,0)(6,3)	(7,0)(5,3)	
U3.5	G M G N			2;0: (8,0)(6,3)	(8,0)(7,3)	
U3.5	G M G N				(9,0)(7,3)	

K-3 = 012111		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$y$	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	$y$
U2.1	G N N G	1;1:	(0,2)(1,1)			
U2.1	G N N G	1;2:	(0,4)(2,2)			
U2.1	G N N G	1;2:	(0,6)(3,3)			
U2.1	G N N G	1;2:	(0,8)(4,4)			
U2.1	G N N G	1;2:	(0,10)(5,5)			
U2.2	C N G G			1;0:	(4,6)(5,5)	
U2.2	M N M G	1;1:	(1,3)(2,2)			
U2.2	M N M G	1;2:	(2,6)(4,4)			
U2.2	M N G G			1;0:	(2,4)(3,3)	
U2.2	M N G G			1;0:	(3,5)(4,4)	
U2.2	M N G G			1;0:	(3,7)(5,5)	
U2.2	G N C G	1;1:	(1,9)(5,5)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,5)(3,3)	1;0:	(2,8)(5,5)	
U2.2	G N M G	1;1:	(1,7)(4,4)			
U2.3	M C M G			0;2:	(2,5)(4,3)	
U2.3	M C G M			0;2:	(3,4)(5,2)	
U2.3	M C G G			2;0:	(4,5)(6,3)	(2,3)(3,2)
U2.3	M C G G			2;0:	(3,6)(5,4)	(3,4)(4,3)
U2.3	M C G G			0;2:	(4,6)(7,3)	(4,5)(5,4)
U2.3	M C G G					(4,6)(6,4)
U2.3	M M G G					(3,5)(5,3)
U2.3	G C C G	1;1:	(1,9)(6,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,4)(3,2)			(2,7)(5,4)
U2.3	G C M G	1;1:	(1,6)(4,3)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,8)(5,4)			
U2.3	G C M G	4;2:	(2,8)(6,4)			
U2.3	G C G C	1;1:	(4,6)(9,1)			
U2.3	G C G M	1;1:	(2,3)(4,1)			(4,5)(7,2)
U2.3	G C G M	1;1:	(3,4)(6,1)			
U2.3	G C G M	1;1:	(4,5)(8,1)			
U2.3	G C G M	4;2:	(4,6)(8,2)			
U2.3	G C G G			0;2:	(3,7)(6,4)	
U2.3	G M C G	1;1:	(1,9)(7,3)			
U2.3	G M M M	1;1:	(1,3)(3,1)			(2,5)(5,2)
U2.3	G M M M	1;1:	(1,6)(5,2)			(2,7)(7,2)
U2.3	G M M M	1;1:	(1,7)(6,2)			
U2.3	G M M M	1;1:	(1,8)(7,2)			
U2.3	G M M M	1;1:	(2,5)(6,1)			
U2.3	G M M M	1;1:	(2,6)(7,1)			
U2.3	G M M M	1;1:	(2,7)(8,1)			
U2.3	G M M M	3;3:	(2,6)(6,2)			

K-3 = 012111		M U L T I P L I C I D A D		
ubic	perc $\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$	D > 0 y E > 0	D = 0 y E > 0 ó E = 0 y D > 0	D = 0 E = 0 y
U3.1	M G N G	1;1: (0,6)(1,5)	1;0: (0,5)(1,4)	
U3.1	M G N G	1;1: (0,7)(1,6)	4;0: (0,10)(2,8)	
U3.1	M G N G	1;1: (0,8)(1,7)		
U3.1	M G N G	1;1: (0,9)(1,8)		
U3.1	G C N G			(0,5)(2,3)
U3.1	G C N G			(0,7)(3,4)
U3.1	G C N G			(0,9)(4,5)
U3.1	G C N G			(0,10)(4,6)
U3.1	G M N G	1;1: (0,3)(1,2)	2;0: (0,6)(2,4)	(0,8)(3,5)
U3.1	G M N G		2;0: (0,9)(3,6)	(0,10)(3,7)
U3.2	C M M G		4;0: (2,8)(3,7)	
U3.2	C G C G	1;1: (1,9)(2,8)		
U3.2	M C M G	1;1: (1,4)(2,3)	0;2: (2,7)(4,5)	(2,5)(3,4)
U3.2	M C M G	1;1: (1,6)(3,4)		
U3.2	M C M G	4;2: (2,8)(4,6)		
U3.2	M C G G		2;0: (3,6)(4,5)	(3,7)(4,6)
U3.2	M C G G			
U3.2	M M C G	1;1: (1,9)(3,7)		
U3.2	M M M G	1;1: (1,5)(2,4)	2;0: (2,7)(3,6)	
U3.2	M M M G	1;1: (1,6)(2,5)	3;0: (2,6)(3,5)	
U3.2	M M M G	1;1: (1,7)(2,6)		
U3.2	M M M G	1;1: (1,7)(3,5)		
U3.2	M M M G	1;1: (1,8)(2,7)		
U3.2	M M M G	1;1: (1,8)(3,6)		
U3.2	G C C G	1;1: (1,9)(4,6)		
U3.2	G C M G	1;1: (1,8)(4,5)		
U3.4	C C G G			(6,4)(7,3)
U3.4	C G G C	1;1: (8,2)(9,1)		
U3.4	M C G M	1;1: (3,2)(4,1)	0;2: (5,4)(7,2)	(4,3)(5,2)
U3.4	M C G M	1;1: (4,3)(6,1)		
U3.4	M C G M	4;2: (6,4)(8,2)		
U3.4	M C G G		2;0: (5,4)(6,3)	



K-4= 11011		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_0 \delta_1$	D > 0 E > 0	Y	D = 0 Y E > 0 ó E = 0 Y D > 0	D = 0 E = 0	Y
U1.1	G G N C	1;1:	(0,1)(9,1)			
U1.1	G G N M	1;1:	(0,1)(4,1)			
U1.1	G G N M	1;1:	(0,1)(5,1)			
U1.1	G G N M	1;1:	(0,1)(6,1)			
U1.1	G G N M	1;1:	(0,1)(7,1)			
U1.1	G G N M	1;1:	(0,1)(8,1)			
U1.1	G G N M	4;1:	(0,2)(8,2)			
U2.1	G N N G	1;1:	(0,1)(1,1)			
U2.1	G N N G	1;1:	(0,2)(2,2)			
U2.1	G N N G	1;1:	(0,3)(3,3)			
U2.1	G N N G	1;1:	(0,4)(4,4)			
U2.1	G N N G	1;1:	(0,5)(5,5)			
U2.2	C N G G	1;1:	(2,3)(3,3)			
U2.2	C N G G	1;1:	(3,4)(4,4)			
U2.2	C N G G	1;1:	(4,5)(5,5)			
U2.2	M N M G	1;1:	(1,3)(3,3)			
U2.2	M N M G	1;1:	(2,5)(5,5)			
U2.2	M N G G	1;1:	(1,2)(2,2)			
U2.2	M N G G	1;1:	(2,4)(4,4)			
U2.2	M N G G	1;1:	(3,5)(5,5)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,4)(4,4)			
U2.2	G N M G	1;1:	(1,5)(5,5)			
U2.3	M C G G	1;1:	(1,2)(3,2)	0;1:	(2,3)(4,3)	
U2.3	M C G G	2;1:	(2,3)(6,3)	0;1:	(2,3)(5,3)	
U2.3	M C G G	2;1:	(2,4)(5,4)	0;1:	(2,3)(7,3)	
U2.3	M C G G	2;1:	(2,4)(6,4)	0;1:	(3,4)(5,4)	
U2.3	M C G G			0;1:	(3,4)(6,4)	
U2.3	G C M G	1;1:	(1,3)(4,3)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,4)(5,4)			
U2.3	G C M G	1;1:	(1,4)(6,4)			
U2.3	G M M G	1;1:	(1,3)(5,3)			
U2.3	G M M G	1;1:	(1,3)(6,3)			
U2.3	G M M G	1;1:	(1,3)(7,3)			
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(5,2)			
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(6,2)			
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(7,2)			
U2.3	G M G M	1;1:	(1,2)(8,2)			
U2.3	G M G G	1;1:	(1,2)(4,2)			

K-4= 11011		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p, \delta_5, \delta_0, \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	Y	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$ Y
U3.2	C M M G	1;1:	(1,7)(2,7)	0;1:	(2,5)(3,5)
U3.2	C M M G	2;1:	(2,6)(3,6)	0;1:	(2,7)(3,7)
U3.2	C G M G	1;1:	(1,8)(2,8)		
U3.2	M C M G	1;1:	(1,3)(2,3)	0;1:	(2,5)(4,5)
U3.2	M C M G	1;1:	(1,4)(3,4)		
U3.2	M C M G	1;1:	(1,5)(4,5)		
U3.2	M C M G	1;1:	(1,6)(4,6)		
U3.2	M C M G	3;1:	(2,6)(4,6)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,4)(2,4)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,5)(2,5)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,5)(3,5)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,6)(2,6)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,6)(3,6)		
U3.2	M M M G	1;1:	(1,7)(3,7)		
U3.4	C C G G	2;1:	(3,2)(4,2)	0;1:	(4,3)(5,3)
U3.4	C C G G	2;1:	(4,3)(6,3)	0;1:	(5,4)(6,4)
U3.4	C M G M	1;1:	(2,1)(3,1)	0;1:	(5,2)(7,2)
U3.4	C M G M	1;1:	(3,1)(4,1)		
U3.4	C M G M	1;1:	(3,1)(5,1)		
U3.4	C M G M	2;1:	(4,2)(5,2)		
U3.4	C M G M	2;1:	(4,2)(6,2)		
U3.4	C M G M	3;1:	(5,2)(6,2)		
U3.4	C M G M	3;1:	(6,2)(7,2)		
U3.4	C M G M	3;1:	(6,2)(8,2)		
U3.4	C M G M	4;1:	(5,2)(8,2)		
U3.4	C M G M	4;1:	(7,2)(8,2)		
U3.4	C M G G	2;1:	(5,3)(6,3)	0;1:	(5,3)(7,3)
U3.4	C M G G	2;1:	(6,3)(7,3)		
U3.4	C G G C	1;1:	(4,1)(9,1)		
U3.4	C G G C	1;1:	(5,1)(9,1)		
U3.4	C G G C	1;1:	(6,1)(9,1)		
U3.4	C G G C	1;1:	(7,1)(9,1)		
U3.4	C G G C	1;1:	(8,1)(9,1)		

K-5= 10122		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$Y$	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	$Y$
U1.5	G G C N	1;1:	(1,0)	(1,9)		
U1.5	G G M N	1;1:	(1,0)	(1,4)		
U1.5	G G M N	1;1:	(1,0)	(1,5)		
U1.5	G G M N	1;1:	(1,0)	(1,6)		
U1.5	G G M N	1;1:	(1,0)	(1,7)		
U1.5	G G M N	1;1:	(1,0)	(1,8)		
U1.5	G G M N	4;1:	(2,0)	(2,8)		
U2.2	C N G G	1;1:	(2,2)	(2,3)		
U2.2	C N G G	1;1:	(3,3)	(3,4)		
U2.2	C N G G	1;1:	(4,4)	(4,5)		
U2.2	C N G G	1;1:	(4,4)	(4,6)		
U2.2	M N M G	1;1:	(1,1)	(1,3)		
U2.2	M N M G	1;1:	(2,2)	(2,5)		
U2.2	M N M G	1;1:	(2,2)	(2,6)		
U2.2	M N M G	1;1:	(2,2)	(2,7)		
U2.2	M N G G	1;1:	(1,1)	(1,2)		
U2.2	M N G G	1;1:	(2,2)	(2,4)		
U2.2	M N G G	1;1:	(3,3)	(3,5)		
U2.2	M N G G	1;1:	(3,3)	(3,6)		
U2.2	M N G G	1;1:	(3,3)	(3,7)		
U2.2	G N C G	1;1:	(1,1)	(1,9)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,1)	(1,4)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,1)	(1,5)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,1)	(1,6)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,1)	(1,7)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,1)	(1,8)		
U2.2	G N M G	1;1:	(2,2)	(2,8)		
U2.3	M C G G	1;1:	(2,1)	(2,3)	0;1:	(3,2)(3,4)
U2.3	M C G G	2;1:	(4,2)	(4,5)	0;1:	(3,2)(3,5)
U2.3	M C G G	2;1:	(4,2)	(4,6)	0;1:	(4,3)(4,5)
U2.3	M C G G	2;1:	(3,2)	(3,6)	0;1:	(4,3)(4,6)
U2.3	G C G M	1;1:	(3,1)	(3,4)		
U2.3	G C G M	1;1:	(4,1)	(4,5)		
U2.3	G C G M	1;1:	(4,1)	(4,6)		
U2.3	G C G G				0;1:	(3,2)(3,7)
U2.3	G M M G	1;1:	(2,1)	(2,5)		
U2.3	G M M G	1;1:	(2,1)	(2,6)		
U2.3	G M M G	1;1:	(2,1)	(2,7)		
U2.3	G M M G	1;1:	(2,1)	(2,8)		
U2.3	G M G M	1;1:	(3,1)	(3,5)		

K-5= 10122		M U L T I P L I C I D A D					
ubic	perc $\delta_p, \delta_s, \delta_0, \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	Y	$D = 0$ $E = 0$	$E > 0$ $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	Y
U3.2	C G M G	1;1:	(1,4)	(1,5)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,4)	(1,6)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,4)	(1,7)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,4)	(1,8)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,5)	(1,6)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,5)	(1,7)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,5)	(1,8)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,6)	(1,7)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,6)	(1,8)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,7)	(1,8)			
U3.2	M C M G	3;1:	(2,3)	(2,6)	0;1:	(2,3)	(2,5)
U3.2	M C M G	4;1:	(2,3)	(2,8)	0;1:	(2,3)	(2,7)
U3.2	M C G G				0;1:	(3,4)	(3,7)
U3.2	M M C G	1;1:	(1,2)	(1,9)			
U3.2	M M C G	1;1:	(1,3)	(1,9)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,2)	(1,4)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,2)	(1,5)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,2)	(1,6)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,2)	(1,7)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,2)	(1,8)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,3)	(1,6)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,3)	(1,7)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,3)	(1,8)			
U3.2	M M M G	2;1:	(2,4)	(2,7)			
U3.2	M M M G	2;1:	(2,4)	(2,8)			
U3.4	C C G G	2;1:	(4,2)	(4,3)	0;1:	(5,3)	(5,4)
U3.4	C C G G	2;1:	(6,3)	(6,4)			
U3.4	C M G M	1;1:	(7,1)	(7,2)	0;1:	(5,2)	(5,3)
U3.4	C M G M	2;1:	(6,2)	(6,3)	0;1:	(7,2)	(7,3)
U3.4	C G G M	1;1:	(8,1)	(8,2)			
U3.4	M C G M	1;1:	(3,1)	(3,2)	0;1:	(5,2)	(5,4)
U3.4	M C G M	1;1:	(4,1)	(4,3)			
U3.4	M C G M	1;1:	(5,1)	(5,4)			
U3.4	M C G M	1;1:	(6,1)	(6,4)			
U3.4	M C G M	3;1:	(6,2)	(6,4)			
U3.4	M M G M	1;1:	(4,1)	(4,2)			
U3.4	M M G M	1;1:	(5,1)	(5,2)			
U3.4	M M G M	1;1:	(5,1)	(5,3)			
U3.4	M M G M	1;1:	(6,1)	(6,2)			
U3.4	M M G M	1;1:	(6,1)	(6,3)			
U3.4	M M G M	1;1:	(7,1)	(7,3)			

K-6= 11111		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p \delta_5 \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$ y
U2.2	C N G G	1;2:	(2,3)(4,4)	1;0: (2,3)(5,5)	
U2.2	C N G G			1;0: (3,4)(5,5)	
U2.2	M N M G	1;1:	(1,3)(4,4)		
U2.2	M N M G	1;1:	(1,3)(5,5)		
U2.2	M N G G	1;1:	(1,2)(3,3)	1;0: (2,4)(5,5)	
U2.2	M N G G	1;1:	(1,2)(4,4)		
U2.2	M N G G	1;1:	(1,2)(5,5)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,4)(5,5)		
U2.3	M C G G	1;1:	(1,2)(4,3)	0;3: (2,3)(6,4)	(2,3)(5,4)
U2.3	M C G G	1;1:	(1,2)(5,4)		
U2.3	M C G G	1;1:	(1,2)(6,4)		
U2.3	M M G G	1;1:	(1,2)(5,3)		
U2.3	G C M G	1;1:	(1,3)(5,4)		
U2.3	G C M G	1;1:	(1,3)(6,4)		
U2.3	G M G G	1;1:	(1,2)(6,3)		
U2.3	G M G G	1;1:	(1,2)(7,3)		
U2.4	C N G G	1;1:	(1,1)(3,2)	1;0: (3,3)(5,4)	
U2.4	C N G G	1;1:	(1,1)(4,3)		
U2.4	C N G G	1;1:	(1,1)(5,4)		
U2.4	C N G G	1;1:	(1,1)(6,4)		
U2.4	C N G G	1;2:	(2,2)(4,3)		
U2.4	C N G G	1;2:	(2,2)(5,4)		
U2.4	C N G G	1;2:	(2,2)(6,4)		
U2.4	C N G G	1;2:	(3,3)(6,4)		
U2.4	M N G M	1;1:	(1,1)(5,2)		
U2.4	M N G M	1;1:	(1,1)(6,2)		
U2.4	M N G M	1;1:	(1,1)(7,2)		
U2.4	M N G G	1;1:	(1,1)(4,2)	1;0: (2,2)(5,3)	
U2.4	M N G G	1;1:	(1,1)(5,3)	1;0: (2,2)(7,3)	
U2.4	M N G G	1;1:	(1,1)(6,3)		
U2.4	M N G G	1;1:	(1,1)(7,3)		
U2.4	M N G G	1;3:	(2,2)(6,3)		
U2.4	G N G M	1;1:	(1,1)(8,2)		
U3.1	M M N G			3;0: (0,5)(2,6)	(0,4)(2,5)
U3.1	M M N G				(0,6)(2,7)
U3.1	M G N G			4;0: (0,7)(2,8)	

K-7= 11122		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p, \delta_5, \delta_0, \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$y$	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ y $E = 0$
U1.5	G C G N	1;1:	(1,0)(2,3)	0;2: (2,0)(4,5)	(2,0)(3,4)
U1.5	G C G N	1;1:	(1,0)(3,4)	0;2: (2,0)(4,6)	(3,0)(4,5)
U1.5	G C G N	1;1:	(1,0)(4,5)		(3,0)(4,6)
U1.5	G C G N	1;1:	(1,0)(4,6)		
U1.5	G M M N	1;1:	(1,0)(2,5)		
U1.5	G M M N	1;1:	(1,0)(2,6)		
U1.5	G M M N	1;1:	(1,0)(2,7)		
U1.5	G M G N	1;1:	(1,0)(2,4)	2;0: (2,0)(3,6)	(2,0)(3,5)
U1.5	G M G N	1;1:	(1,0)(3,5)		(2,0)(3,7)
U1.5	G M G N	1;1:	(1,0)(3,6)		
U1.5	G M G N	1;1:	(1,0)(3,7)		
U1.5	G G M N	1;1:	(1,0)(2,8)		
U2.2	C N G G	1;1:	(1,1)(2,3)	1;0: (3,3)(4,5)	
U2.2	C N G G	1;1:	(1,1)(3,4)		
U2.2	C N G G	1;1:	(1,1)(4,5)		
U2.2	C N G G	1;1:	(1,1)(4,6)		
U2.2	C N G G	1;2:	(2,2)(3,4)		
U2.2	C N G G	1;2:	(2,2)(4,5)		
U2.2	C N G G	1;2:	(2,2)(4,6)		
U2.2	C N G G	1;2:	(3,3)(4,6)		
U2.2	M N M G	1;1:	(1,1)(2,5)		
U2.2	M N M G	1;1:	(1,1)(2,6)		
U2.2	M N M G	1;1:	(1,1)(2,7)		
U2.2	M N G G	1;1:	(1,1)(2,4)	1;0: (2,2)(3,5)	
U2.2	M N G G	1;1:	(1,1)(3,5)	1;0: (2,2)(3,7)	
U2.2	M N G G	1;1:	(1,1)(3,6)		
U2.2	M N G G	1;1:	(1,1)(3,7)		
U2.2	M N G G	1;3:	(2,2)(3,6)		
U2.2	G N M G	1;1:	(1,1)(2,8)		
U2.3	M C G G	1;1:	(2,1)(3,4)	0;3: (3,2)(4,6)	(3,2)(4,5)
U2.3	M C G G	1;1:	(2,1)(4,5)		
U2.3	M C G G	1;1:	(2,1)(4,6)		
U2.3	M M G G	1;1:	(2,1)(3,5)		
U2.3	G C G M	1;1:	(3,1)(4,5)		
U2.3	G C G M	1;1:	(3,1)(4,6)		
U2.3	G M G G	1;1:	(2,1)(3,6)		
U2.3	G M G G	1;1:	(2,1)(3,7)		

K-7= 11122		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc	$D > 0$	$Y$	$D = 0$ y $E > 0$	$D = 0$ y $E = 0$
	$\delta_p, \delta_5, \delta_0, \delta_1$	$E > 0$		$\delta E = 0$ y $D > 0$	
U3.5	G C G N			0;2: (2,0)(4,3)	(2,0)(3,2)
U3.5	G C G N			0;2: (3,0)(6,4)	(2,0)(5,4)
U3.5	G C G N				(3,0)(4,3)
U3.5	G C G N				(3,0)(5,4)
U3.5	G C G N				(4,0)(5,4)
U3.5	G C G N				(4,0)(6,4)
U3.5	G C G N				(5,0)(6,4)
U3.5	G M G N			2;0: (3,0)(4,2)	(3,0)(5,3)
U3.5	G M G N			2;0: (4,0)(6,3)	(4,0)(5,3)
U3.5	G M G N			2;0: (5,0)(6,3)	(5,0)(7,3)
U3.5	G M G N				(6,0)(7,3)

K-8= 11121		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc	$D > 0$	$Y$	$D = 0$ y $E > 0$	$D = 0$ y $E = 0$
	$\delta_p, \delta_5, \delta_0, \delta_1$	$E > 0$		$\delta E = 0$ y $D > 0$	
U3.1	C G N G	1;1:	(0,1)(1,9)		
U3.1	C G N G	1;1:	(0,2)(1,9)		
U3.1	C G N G	1;1:	(0,3)(1,9)		
U3.1	C G N G	1;1:	(0,4)(1,9)		
U3.1	C G N G	1;1:	(0,5)(1,9)		
U3.1	C G N G	1;1:	(0,6)(1,9)		
U3.1	C G N G	1;1:	(0,7)(1,9)		
U3.1	M M N G	1;1:	(0,1)(1,3)		(0,2)(2,5)
U3.1	M M N G	1;1:	(0,1)(2,5)		(0,2)(2,7)
U3.1	M M N G	1;1:	(0,1)(2,6)		(0,3)(2,7)
U3.1	M M N G	1;1:	(0,1)(2,7)		(0,4)(2,7)
U3.1	M M N G	3;2:	(0,3)(2,6)		
U3.1	M M N G	3;3:	(0,2)(2,6)		

K-9= 11112		M U L T I P L I C I D A D			
ubic	perc $\delta_p \delta_s \delta_0 \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$y$	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$
U3.4	C C G G	1;1:	(2,1)(6,4)		
U3.4	C M G M	1;1:	(3,1)(5,2)		(5,2)(7,3)
U3.4	C M G M	1;1:	(3,1)(6,3)		
U3.4	C M G M	1;1:	(3,1)(7,3)		
U3.4	C M G M	1;1:	(4,1)(6,2)		
U3.4	C M G M	1;1:	(4,1)(7,2)		
U3.4	C M G M	1;1:	(5,1)(7,2)		
U3.4	C M G G	1;1:	(2,1)(5,3)		
U3.4	C G G M	1;1:	(5,1)(8,2)		
U3.4	C G G M	1;1:	(6,1)(8,2)		
U3.4	M M G M	1;1:	(4,1)(7,3)		
U3.5	C G G N	1;1:	(1,0)(9,1)		
U3.5	C G G N	1;1:	(2,0)(9,1)		
U3.5	C G G N	1;1:	(3,0)(9,1)		
U3.5	C G G N	1;1:	(4,0)(9,1)		
U3.5	C G G N	1;1:	(6,0)(9,1)		
U3.5	C G G N	1;1:	(5,0)(9,1)		
U3.5	C G G N	1;1:	(7,0)(9,1)		
U3.5	M M G N	1;1:	(1,0)(3,1)		(2,0)(5,2)
U3.5	M M G N	1;1:	(1,0)(5,2)		(2,0)(7,2)
U3.5	M M G N	1;1:	(1,0)(6,2)		(3,0)(7,2)
U3.5	M M G N	1;1:	(1,0)(7,2)		(4,0)(7,2)
U3.5	M M G N	3;2:	(3,0)(6,2)		
U3.5	M M G N	3;3:	(2,0)(6,2)		



K10= 11101		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p\delta_s\delta_0\delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ y $E = 0$	
U3.1	M G N G	1;1:	(0,3)(1,4)	4;0:	(0,6)(2,8)	
U3.1	M G N G	1;1:	(0,4)(1,5)			
U3.1	M G N G	1;1:	(0,5)(1,6)			
U3.1	M G N G	1;1:	(0,6)(1,7)			
U3.1	M G N G	1;1:	(0,7)(1,8)			
U3.1	G C N G	1;1:	(0,1)(2,3)	0;3:	(0,2)(4,6)	
U3.1	G C N G	1;1:	(0,1)(3,4)			
U3.1	G C N G	1;1:	(0,1)(4,5)			
U3.1	G M N G	1;1:	(0,1)(1,2)			(0,2)(3,5)
U3.1	G M N G	2;2:	(0,2)(2,4)			(0,4)(3,7)
U3.1	G M N G	2;2:	(0,3)(3,6)			
U3.2	C C G G	1;1:	(1,2)(2,3)	0;2:	(2,3)(4,5)	(2,3)(3,4)
U3.2	C C G G	1;1:	(1,2)(3,4)			(3,4)(4,5)
U3.2	C C G G	2;2:	(2,4)(4,6)			(3,5)(4,6)
U3.2	C M M G	1;1:	(1,3)(2,4)	2;0:	(2,4)(3,5)	
U3.2	C M M G	1;1:	(1,4)(2,5)	2;0:	(2,5)(3,6)	
U3.2	C M M G	1;1:	(1,5)(2,6)	3;0:	(2,6)(3,7)	
U3.2	C M M G	1;1:	(1,6)(2,7)			
U3.2	C G M G	1;1:	(1,7)(2,8)			
U3.2	M C M G	1;1:	(1,3)(4,6)			
U3.2	M C G G	1;1:	(1,2)(4,5)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,3)(3,5)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,4)(3,6)			
U3.2	M M M G	1;1:	(1,5)(3,7)			

K11= 11102		M U L T I P L I C I D A D				
ubic	perc $\delta_p\delta_s\delta_0\delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	y	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ y $E = 0$	
U3.4	C C G G	1;1:	(2,1)(3,2)	0;2:	(3,2)(5,4)	(3,2)(4,3)
U3.4	C C G G	1;1:	(2,1)(4,3)			(4,3)(5,4)
U3.4	C C G G	2;2:	(4,2)(6,4)			(5,3)(6,4)
U3.4	C M G M	1;1:	(3,1)(4,2)	2;0:	(5,2)(6,3)	
U3.4	C M G M	1;1:	(4,1)(5,2)	3;0:	(6,2)(7,3)	
U3.4	C M G M	1;1:	(5,1)(6,2)			
U3.4	C M G M	1;1:	(6,1)(7,2)			
U3.4	C M G G			2;0:	(4,2)(5,3)	

K12= 10120		MULTIPLICIDAD				
ubic	perc $\delta_p, \delta_s, \delta_o, \delta_1$	$D > 0$ $E > 0$	$Y$	$D = 0$ y $E > 0$ $\delta E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ $E = 0$	$Y$
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,2)	0;2:	(0,2)(0,4)	(0,2)(0,3)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,3)	0;2:	(0,3)(0,6)	(0,2)(0,5)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,4)	0;2:	(0,4)(0,8)	(0,2)(0,7)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,5)	0;2:	(0,5)(0,10)	(0,2)(0,9)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,6)	0;3:	(0,2)(0,6)	(0,3)(0,4)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,7)	0;3:	(0,3)(0,9)	(0,3)(0,5)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,8)	0;4:	(0,2)(0,8)	(0,3)(0,7)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,9)	0;5:	(0,2)(0,10)	(0,3)(0,8)
U3.1	NGNG	1;1:	(0,1)(0,10)			(0,3)(0,10)
U3.1	NGNG					(0,4)(0,5)
U3.1	NGNG					(0,4)(0,6)
U3.1	NGNG					(0,4)(0,7)
U3.1	NGNG					(0,4)(0,9)
U3.1	NGNG					(0,4)(0,10)
U3.1	NGNG					(0,5)(0,6)
U3.1	NGNG					(0,5)(0,7)
U3.1	NGNG					(0,5)(0,8)
U3.1	NGNG					(0,5)(0,9)
U3.1	NGNG					(0,6)(0,7)
U3.1	NGNG					(0,6)(0,8)
U3.1	NGNG					(0,6)(0,9)
U3.1	NGNG					(0,6)(0,10)
U3.1	NGNG					(0,7)(0,8)
U3.1	NGNG					(0,7)(0,9)
U3.1	NGNG					(0,7)(0,10)
U3.1	NGNG					(0,8)(0,9)
U3.1	NGNG					(0,8)(0,10)
U3.1	NGNG					(0,9)(0,10)

K15= 11110		MULTIPLICIDAD		
ubic perc $\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$	$D > 0$ y $E > 0$	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ y $E = 0$	
U3.4 N C G G		0;2: (3,2)(6,4)		
U3.4 N M G G	1;1: (2,1)(4,2)	2;0: (4,2)(6,3)		
U3.4 N M G G	1;1: (2,1)(6,3)			
U3.4 N M G M	1;1: (3,1)(6,2)			
U3.4 N G G M	1;1: (4,1)(8,2)			

K16= 11100		MULTIPLICIDAD		
ubic perc $\delta_p \delta_s \delta_o \delta_1$	$D > 0$ y $E > 0$	$D = 0$ y $E > 0$ ó $E = 0$ y $D > 0$	$D = 0$ y $E = 0$	
U3.3 N N G G	1;1: (1,1)(2,2)	1;0: (2,2)(3,3)		
U3.3 N N G G	1;1: (1,1)(3,3)	1;0: (2,2)(5,5)		
U3.3 N N G G	1;1: (1,1)(4,4)	1;0: (3,3)(4,4)		
U3.3 N N G G	1;1: (1,1)(5,5)	1;0: (3,3)(5,5)		
U3.3 N N G G	1;2: (2,2)(4,4)	1;0: (4,4)(5,5)		

**ANEXO 3: CUESTIONARIOS  
UTILIZADOS EN LA INVESTIGACION**

Este anexo consta de tres partes.

En la PRIMERA PARTE se presentan las preguntas de los cinco cuestionarios utilizados, con toda la información relativa a las variables experimentales dispuesta en forma de tablas separadas en cuatro secciones (columnas):

La primera sección de las tablas indica:

- el cuestionario:  
C1, C2, C3, C4 ó C6;
- el número de pregunta:  
a la izquierda del punto decimal, el número de la pregunta incluida en el cuestionario,  
a la derecha, cuando las hay, el número de la variante surgida durante alguna entrevista;
- el arreglo  $(f_1, d_1)(f_2, d_2)$ , al que antecede el lado (A ó B) en que queda S1 y al que sigue el lado (B ó A) en que queda S2.

La segunda sección de las tablas indica:

- la combinación  $K=nfdrp$ :  
si  $y$  representa  $n, f, d, r, p$ ; entonces  
 $y=0$  si  $y_1=y_2$ ,  $y=1$  si  $y_1 < y_2$ ,  $y=2$  si  $y_1 > y_2$ ,  $y$ :  

K1=11211	K6=11111	K10=11101	K14=11120
K2=12122	K7=11122	K11=11102	K15=11110
K3=01211	K8=11121	K12=10120	K16=11100
K4=11011	K9=11112	K13=11010	K0= 00000
K5=10122			

- la ubicación:

si  $p_n = \min\{p_1, p_2\}$  y  $p_M = \max\{p_1, p_2\}$ , entonces:

- |       |                              |
|-------|------------------------------|
| U1.1: | $p_n=0, .5 < p_M < 1,$       |
| U1.3: | $p_n=0, p_M=1,$              |
| U1.5: | $0 < p_n < .5, p_M=1,$       |
| U2.1: | $p_n=0, p_M=.5,$             |
| U2.2: | $0 < p_n < .5, p_M=.5,$      |
| U2.3: | $0 < p_n < .5, .5 < p_M < 1$ |
| U2.4: | $p_n=.5, .5 < p_M < 1$       |
| U2.5: | $p_n=.5, p_M=1$              |
| U3.1: | $p_n=0, .5 \leq p_M < 1,$    |
| U3.2: | $0 < p_n < p_M < .5$         |
| U3.3: | $p_n=.5=p_M$                 |
| U3.4: | $.5 < p_n < p_M < 1$         |
| U3.5: | $.5 \leq p_n < 1, p_M=1;$    |

**SITUACIONES DE LAS PREGUNTAS DE LOS CUESTIONARIOS**

Cuestionario número de la pregunta arreglo: S1(f <sub>1</sub> , d <sub>1</sub> )(f <sub>2</sub> , d <sub>2</sub> )S2			combi- nación ubi- cac.	Perc δ <sub>p</sub> δ <sub>5</sub> δ <sub>0</sub> δ <sub>1</sub>	Unos U <sub>f</sub> ;U <sub>a</sub>	Multi plic. D;E	refer. tamaño plan team
C-1, 1.0:	B(0,2)(0,3)A	K12, U3.1	N G N G	0;0	0;0	o cc d	
C-1, 2.0:	A(2,2)(4,4)B	K16, U3.3	N N G G	0;0	1;2	o cc d	
C-1, 3.0:	B(0,2)(2,2)A	K-4, U2.1	G N N G	0;0	1;1	o cc d	
C-1, 4.0:	B(1,0)(1,1)A	K-5, U2.5	G N G N	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 5.0:	B(0,2)(1,1)A	K-3, U2.1	G N N G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 6.0:	A(1,1)(2,0)B	K-3, U2.5	G N G N	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 7.0:	A(1,1)(1,1)B	K-0, U3.3	N N G G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 8.0:	A(1,2)(2,4)B	K14, U3.2	N M G G	1;0	1;1	o cc d	
C-1, 9.0:	A(1,3)(2,2)B	K-3, U2.2	M N M G	1;0	1;1	o cc d	
C-1, 10.0:	A(1,1)(1,2)B	K-5, U2.2	M N G G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 11.0:	A(1,1)(2,1)B	K-4, U2.4	M N G G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 12.0:	A(2,0)(4,0)B	K13, U3.5	N G G N	0;0	0;2	o cc d	
C-1, 13.0:	B(0,2)(2,0)A	K-3, U1.3	G G N N	0;0	0;0	o cc d	
C-1, 14.0:	B(2,2)(4,2)A	K-4, U2.4	M N G G	0;0	1;1	o cc d	
C-1, 15.0:	B(2,1)(3,1)A	K-4, U3.4	C M G M	0;1	1;1	o cc d	
C-1, 16.0:	A(2,1)(3,2)B	K11, U3.4	C C G G	0;1	1;1	o cc d	
C-1, 17.0:	B(2,1)(3,1)A	K-4, U3.4	C M G M	0;1	1;1	o cc d	
C-1, 18.0:	A(2,2)(4,4)B	K16, U3.3	N N G G	0;0	1;2	o cc d	
C-1, 19.0:	B(0,2)(2,0)A	K-3, U1.3	G G N N	0;0	0;0	o cc d	
C-1, 20.0:	B(1,0)(1,1)A	K-5, U2.5	G N G N	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 21.0:	A(1,1)(2,1)B	K-4, U2.4	M N G G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 22.0:	A(1,1)(2,0)B	K-3, U2.5	G N G N	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 23.0:	A(1,3)(2,2)B	K-3, U2.2	M N M G	1;0	1;1	o cc d	
C-1, 24.0:	A(1,2)(2,4)B	K14, U3.2	N M G G	1;0	1;1	o cc d	
C-1, 25.0:	A(2,1)(3,2)B	K11, U3.4	C C G G	0;1	1;1	o cc d	
C-1, 26.0:	B(0,2)(0,3)A	K12, U3.1	N G N G	0;0	0;0	o cc d	
C-1, 27.0:	B(2,2)(4,2)A	K-4, U2.4	M N G G	0;0	1;1	o cc d	
C-1, 28.0:	B(0,2)(2,2)A	K-4, U2.1	G N N G	0;0	1;1	o cc d	
C-1, 29.0:	A(2,0)(4,0)B	K13, U3.5	N G G N	0;0	0;2	o cc d	
C-1, 30.0:	B(0,2)(1,1)A	K-3, U2.1	G N N G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 31.0:	A(1,1)(1,2)B	K-5, U2.2	M N G G	1;1	1;1	o cc d	
C-1, 32.0:	A(1,1)(1,1)B	K-0, U3.3	N N G G	1;1	1;1	o cc d	

C-3, 1.0:	B(2,3)(1,5)A	K-2, U3.2	M C M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 2.0:	A(1,2)(3,3)B	K-6, U2.2	M N G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 3.0:	B(2,1)(2,3)A	K-5, U2.3	M C G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 4.0:	B(1,3)(2,6)A	K14, U3.2	N M M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 5.0:	B(1,2)(2,3)A	K10, U3.2	C C G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 5.1:	B(1,2)(3,3)A	K-6, U2.2	M N G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 5.2:	B(1,2)(2,3)A	K10, U3.2	C C G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 6.0:	B(1,2)(3,5)A	K-8, U3.2	C M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 6.1:	A(2,3)(3,5)B	K-7, U3.2	C C G G	0;0	0;0	r	cc	d
C-3, 6.2:	A(2,3)(4,4)B	K-6, U2.2	C N G G	0;0	1;2	r	cc	d
C-3, 6.3:	A(2,3)(4,5)B	K10, U3.2	C C G G	0;0	0;2	r	cc	d
C-3, 7.0:	B(1,2)(3,5)A	K-8, U3.2	C M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 8.0:	A(3,1)(6,2)B	K15, U3.4	N M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 9.0:	A(3,1)(5,2)B	K-9, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 9.1:	B(5,2)(6,2)A	K-4, U3.4	C M G M	0;0	3;1	r	cc	d
C-3, 9.2:	B(5,2)(7,2)A	K-4, U3.4	C M G M	0;0	0;1	r	cc	d
C-3, 9.3:	B(5,2)(8,2)A	K-4, U3.4	C M G M	0;0	4;1	r	cc	d
C-3, 9.4:	B(5,2)(9,2)A	K-4, U3.4	M M G M	0;0	0;1	r	cc	d
C-3, 9.5:	B(5,2)(17,2)A	K-4, U3.4	M M G M	0;0	0;1	r	cc	d
C-3, 10.0:	B(4,0)(5,1)A	K11, U3.5	M G G N	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 11.0:	A(1,1)(3,1)B	K-4, U2.4	M N G M	1;1	1;1	r	cc	d
C-3, 12.0:	A(1,2)(2,4)B	K14, U3.2	N M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 13.0:	A(3,1)(0,7)B	K-2, U1.1	G M N M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 14.0:	B(2,2)(7,3)A	K-5, U2.2	C N G G	0;0	1;1	r	cc	d
C-3, 15.0:	A(2,2)(3,1)B	K-3, U2.4	M N G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 16.0:	A(3,2)(5,1)B	K-1, U3.4	M C G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 17.0:	B(1,2)(4,2)A	K-4, U2.3	G M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 18.0:	B(2,1)(3,2)A	K11, U3.4	C C G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 19.0:	A(2,0)(6,0)B	K13, U3.5	N G G N	0;0	0;3	r	cc	d
C-3, 20.0:	B(2,2)(3,2)A	K-4, U2.4	C N G G	0;0	1;1	r	cc	d
C-3, 21.0:	A(3,4)(4,3)B	K-3, U2.3	M C G G	0;0	0;0	r	cc	d
C-3, 22.0:	B(4,1)(6,2)A	K-9, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 22.1:	B(5,1)(6,2)A	K11, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 22.2:	B(4,1)(5,2)A	K11, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 22.3:	B(4,1)(4,2)A	K-5, U3.4	M M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-3, 23.0:	B(2,0)(0,6)A	K-2, U1.3	G G N N	0;0	0;0	r	cc	d
C-3, 24.0:	A(2,2)(3,3)B	K16, U3.3	N N G G	0;0	1;0	r	cc	d
C-3, 25.0:	A(1,2)(3,5)B	K-8, U3.2	C M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-3, 26.0:	B(14,7)(18,9)A	K15, U3.4	N M G G	0;0	2;0	n	gg	d
C-3, 27.0:	A(3,3)(2,22)B	K-2, U2.2	G N C G	0;0	1;0	n	cg	d
C-3, 28.0:	A(2,3)(3,2)B	K-3, U2.3	M C G G	0;0	0;0	n	cc	d
C-3, 29.0:	B(13,7)(18,12)A	K11, U3.4	C C G G	0;0	0;0	n	gg	d
C-3, 30.0:	A(1,5)(10,14)B	K10, U3.2	M C M G	1;0	1;1	n	cg	d
C-3, 31.0:	A(12,8)(4,24)B	K-2, U2.3	G C M G	0;0	6;3	n	gg	d
C-3, 32.0:	B(2,2)(2,3)A	K-5, U2.2	C N G G	0;0	1;1	n	cc	d
C-3, 33.0:	A(1,2)(18,9)B	K-6, U2.3	G M G G	1;0	1;1	n	cg	d
C-3, 34.0:	B(10,15)(18,9)A	K-1, U2.3	M C G G	0;0	2;0	n	gg	d
C-3, 35.0:	A(1,3)(2,4)B	K10, U3.2	C M M G	1;0	1;1	n	cc	d
C-3, 36.0:	A(2,2)(11,11)B	K16, U3.3	N N G G	0;0	1;0	n	cg	d
C-3, 37.0:	B(9,14)(9,20)A	K-5, U3.2	C M G G	0;0	0;1	n	gg	d
C-3, 38.0:	A(3,2)(5,1)B	K-1, U3.4	M C G M	0;1	1;1	n	cc	d
C-3, 39.0:	B(10,16)(13,13)A	K-3, U2.2	M N G G	0;0	1;0	n	gg	d
C-3, 40.0:	A(3,2)(18,2)B	K-4, U3.4	G C G C	0;0	9;1	n	cg	d

C-6, 1.0:	A(2,1)(3,2)B	K11, U3.4	C C G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 2.0:	B(3,1)(3,4)A	K-5, U2.3	G C G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 3.0:	A(3,2)(5,3)B	K-6, U3.4	C C G G	0;0	0;0	r	cc	d
C-6, 4.0:	A(1,2)(2,4)B	K14, U3.2	N M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 5.0:	B(1,5)(3,3)A	K-3, U2.2	G N M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 6.0:	B(1,1)(2,1)A	K-4, U2.4	M N G G	1;1	1;1	r	cc	d
C-6, 7.0:	B(2,1)(3,4)A	K-7, U2.3	M C G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 8.0:	A(2,1)(5,3)B	K-9, U3.4	C M G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 9.0:	A(1,1)(1,2)B	K-5, U2.2	M N G G	1;1	1;1	r	cc	d
C-6, 10.0:	B(2,3)(3,4)A	K10, U3.2	C C G G	0;0	0;0	r	cc	d
C-6, 11.0:	A(3,3)(4,4)B	K16, U3.3	N N G G	0;0	1;0	r	cc	d
C-6, 12.0:	B(1,5)(3,4)A	K-1, U3.2	M C M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 13.0:	A(3,1)(4,1)B	K-4, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 13.1:	B(3,1)(4,1)A	K-4, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 14.0:	B(3,1)(6,2)A	K15, U3.4	N M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 15.0:	A(2,1)(5,3)B	K-9, U3.4	C M G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 15.1:	A(2,1)(6,3)B	K15, U3.4	N M G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 16.0:	A(1,7)(4,4)B	K-3, U2.2	G N M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 17.0:	A(3,1)(5,2)B	K-9, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 18.0:	B(1,2)(2,4)A	K14, U3.2	N M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 18.1:	B(1,2)(3,4)A	K10, U3.2	C C G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 18.2:	B(1,2)(4,4)A	K-6, U2.2	M N G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 18.3:	B(1,2)(5,4)A	K-6, U2.3	M C G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 19.0:	B(1,1)(1,2)A	K-5, U2.2	M N G G	1;1	1;1	r	cc	d
C-6, 20.0:	A(2,1)(5,2)B	K-6, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 20.1:	A(2,1)(6,2)B	K-6, U3.4	C M G M	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 20.2:	A(2,1)(4,2)B	K15, U3.4	N M G G	0;1	1;1	r	cc	d
C-6, 21.0:	B(2,2)(4,2)A	K-4, U2.4	M N G G	0;0	1;1	r	cc	d
C-6, 22.0:	A(1,2)(3,5)B	K-8, U3.2	C M G G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 23.0:	B(2,0)(6,0)A	K13, U3.5	N G G N	0;0	0;3	r	cc	d
C-6, 24.0:	A(1,2)(3,5)B	K-8, U3.2	C M G G	1;0	1;1	n	cc	d
C-6, 25.0:	B(3,3)(3,18)A	K-5, U2.2	G N M G	0;0	1;1	n	cg	d
C-6, 26.0:	B(9,12)(15,12)A	K-4, U2.3	M C G G	0;0	0;1	n	gg	d
C-6, 27.0:	A(1,1)(3,1)B	K-4, U2.4	M N G M	1;1	1;1	n	cc	d
C-6, 28.0:	A(8,14)(13,15)B	K-6, U3.2	M C G G	0;0	0;0	n	gg	d
C-6, 29.0:	B(1,4)(5,20)A	K14, U3.2	N G M G	1;0	1;1	n	cg	d
C-6, 29.1:	B(1,4)(6,20)A	K-8, U3.2	C M M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 29.2:	B(1,4)(7,20)A	K-8, U3.2	C M M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 29.3:	B(1,4)(19,20)A	K-6, U3.2	M C M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 29.4:	B(1,4)(20,20)A	K-6, U2.2	G N M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 29.5:	B(1,4)(5,20)A	K14, U3.2	N G M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 29.6:	B(1,4)(21,20)A	K-6, U2.3	G C M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 29.7:	B(1,4)(40,20)A	K-6, U2.3	G M M G	1;0	1;1	r	cc	d
C-6, 30.0:	A(2,1)(3,4)B	K-7, U2.3	M C G G	0;1	1;1	n	cc	d
C-6, 31.0:	A(19,3)(20,8)B	K-7, U3.4	M M G M	0;0	0;0	n	gg	d
C-6, 32.0:	B(2,1)(4,2)A	K15, U3.4	N M G G	0;1	1;1	n	cc	d
C-6, 33.0:	A(1,4)(10,13)B	K10, U3.2	M C M G	1;0	1;1	n	cg	d
C-6, 34.0:	B(3,2)(11,11)A	K-7, U2.4	C N G G	0;0	1;0	n	cg	d
C-6, 35.0:	A(9,11)(6,23)B	K-2, U3.2	M C M G	0;0	0;0	n	gg	d
C-6, 36.0:	B(12,12)(14,14)A	K16, U3.3	N N G G	0;0	1;0	n	gg	d

**PREGUNTAS PLANTEADAS,  
CLASIFICADAS POR COMBINACION, UBICACION Y CUESTIONARIO**

K-1/U2.3	(10,15)(18,9)	C3,34	n = 4	tot = 4
K-1/U2.3	-----			TOT = 4
K-1/U3.2	(1,5)(3,4)	C6,12	n = 5	tot = 5
K-1/U3.2	-----			TOT = 5
K-1/U3.4	(3,2)(5,1)	C3,16	n = 4	tot = 19
		C3,38	n = 4	
		C4,4	n = 6	
		C4,19	n = 5	
K-1/U3.4	-----			TOT = 19

K-2/U1.1	(3,1)(0,7)	C3,13	n = 4	tot = 4
K-2/U1.1	-----			TOT = 4
K-2/U1.3	(2,0)(0,6)	C3,23	n = 4	tot = 4
K-2/U1.3	-----			TOT = 4
K-2/U2.1	(1,1)(0,3)	C2,11	n = 16	tot = 16
K-2/U2.1	-----			TOT = 16
K-2/U2.2	(3,3)(2,22)	C3,27	n = 4	tot = 4
K-2/U2.2	-----			TOT = 4
K-2/U2.3	(12,8)(4,24)	C3,31	n = 4	tot = 4
K-2/U2.3	-----			TOT = 4
K-2/U3.2	(2,3)(1,5)	C3,1	n = 3	tot = 12
		C4,2	n = 6	
		C4,26	n = 3	
	(9,11)(6,23)	C6,35	n = 5	tot = 5
K-2/U3.2	-----			TOT = 17



K-4/U2.1	(0,2)(2,2)	C1,3	n = 22	tot = 39
		C1,28	n = 17	
K-4/U2.1	-----			TOT = 39
K-4/U2.3	(1,2)(4,2)	C3,17	n = 4	tot = 10
		C4,12	n = 6	
K-4/U2.3	(9,12)(15,12)	C6,26	n = 5	tot = 5
	-----			TOT = 15
K-4/U2.4	(1,1)(2,1)	C1,11	n = 31	tot = 68
		C1,21	n = 17	
		C2,18	n = 15	
		C6,6	n = 5	
	(1,1)(3,1)	C3,11	n = 4	tot = 14
		C4,10	n = 5	
		C6,27	n = 5	
	(2,2)(3,2)	C2,12	n = 16	tot = 26
		C3,20	n = 4	
		C4,18	n = 5	
		C6,38.6	n = 1	
	(2,2)(4,2)	C1,14	n = 13	tot = 36
		C1,27	n = 18	
		C6,21	n = 5	
K-4/U2.4	-----			TOT = 144
K-4/U3.2	(7,14)(9,14)	C6,40.2	n = 1	tot = 1
	(9,18)(11,18)	C6,40.7	n = 1	tot = 1
K-4/U3.2	-----			TOT = 2
K-4/U3.4	(2,1)(3,1)	C1,15	n = 27	tot = 74
		C1,17	n = 16	
		C2,1	n = 15	
		C2,19	n = 16	
	(3,1)(4,1)	C6,13	n = 6	tot = 8
		C6,13.1	n = 2	
	(3,2)(18,2)	C3,40	n = 4	tot = 4
	(5,2)(6,2)	C3,9.1	n = 2	tot = 2
	(5,2)(7,2)	C3,9.2	n = 1	tot = 1
	(5,2)(8,2)	C3,9.3	n = 1	tot = 1
	(5,2)(9,2)	C3,9.4	n = 2	tot = 2
	(5,2)(17,2)	C3,9.5	n = 1	tot = 1
K-4/U3.4	-----			TOT = 93

K-6/U2.2	(1,2)(3,3)	C3,2	n = 4	tot = 11
		C3,5.1	n = 2	
		C4,14	n = 5	
	(1,2)(4,4)	C6,18.2	n = 1	tot = 1
	(1,4)(20,20)	C6,29.4	n = 1	tot = 1
	(2,3)(4,4)	C3,6.2	n = 2	tot = 2
K-6/U2.2	-----			TOT = 15
K-6/U2.3	(1,2)(5,4)	C6,18.3	n = 1	tot = 1
	(1,2)(18,9)	C3,33	n = 4	tot = 4
	(1,4)(21,20)	C6,29.6	n = 1	tot = 1
	(1,4)(40,20)	C6,29.7	n = 1	tot = 1
	(2,3)(5,4)	C2,9	n = 15	tot = 15
K-6/U2.3	-----			TOT = 22
K-6/U2.4	(1,1)(3,2)	C2,20	n = 14	tot = 14
K-6/U2.4	-----			TOT = 14
K-6/U3.2	(1,4)(19,20)	C6,29.3	n = 1	tot = 1
	(8,14)(13,15)	C6,28	n = 5	tot = 5
K-6/U3.2	-----			TOT = 6
K-6/U3.4	(2,1)(5,2)	C6,20	n = 5	tot = 5
	(2,1)(6,2)	C6,20.1	n = 1	tot = 1
	(3,2)(5,3)	C6,3	n = 4	tot = 4
K-6/U3.4	-----			TOT = 10

K-7/U2.3	(2,1)(3,4)	C6,7	n = 5	tot = 10
		C6,30	n = 5	
K-7/U2.3	-----			TOT = 10
K-7/U2.4	(3,2)(11,11)	C6,34	n = 6	tot = 6
K-7/U2.4	-----			TOT = 6
K-7/U3.2	(2,3)(3,5)	C3,6.1	n = 2	tot = 2
K-7/U3.2	-----			TOT = 2
K-7/U3.4	(19,3)(20,8)	C6,31	n = 5	tot = 5
K-7/U3.4	-----			TOT = 5

K11/U3.4	(2,1)(3,2)	C1,16	n = 30	tot = 84
		C1,25	n = 17	
		C2,5	n = 16	
		C3,18	n = 5	
		C4,16	n = 5	
		C4,25	n = 3	
		C6,1	n = 5	
		C6,39.2	n = 3	
	(3,1)(5,3)	C4,28	n = 3	tot = 3
	(4,1)(5,2)	C3,22.2	n = 1	tot = 1
	(5,1)(6,2)	C3,22.1	n = 2	tot = 2
	(13,7)(18,12)	C3,29	n = 4	tot = 4
K11/U3.4	-----	-----	-----	TOT = 94
K11/U3.5	(4,0)(5,1)	C3,10	n = 4	tot = 4
K11/U3.5	-----	-----	-----	TOT = 4

K12/U3.1	(0,2)(0,3)	C1,1	n = 21	tot = 54
		C1,26	n = 17	
		C2,15	n = 16	
K12/U3.1	-----	-----	-----	TOT = 54

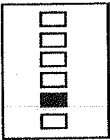
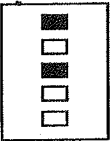
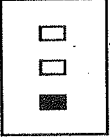
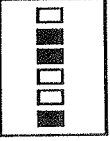


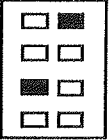

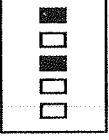

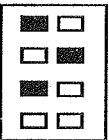

K13/U3.5	(2,0)(4,0)	C1,12	n = 30	tot = 48
		C1,29	n = 18	
	(2,0)(6,0)	C3,19	n = 4	tot = 15
		C4,5	n = 6	
		C6,23	n = 5	
K13/U3.5	-----	-----	-----	TOT = 63

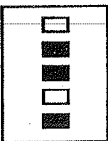



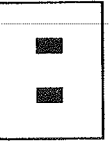

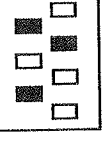
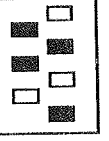



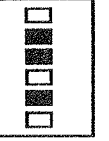
REPRODUCCIONES DE FICHAS Y HOJAS UTILIZADAS















ASPECTO DEL PIZARRON EN LA SEGUNDA ETAPA DEL PRIMER EXPERIMENTO

Pregunta	Azules	Verdes
a (17)	A A Q A	7 A A
b (18)	9 A A 5	A A 3 5 A Q A 10
c (19)	A A	5 7
d (20)	A 6	A
e (21)	A 5	A A 3
f (22)	4 A	A A
g (23)	5 A 8 9	4 A 4 A
h (24)	K A 3	6 A Q A J 5
i (25)	A J A	5 A 3 A A
j (26)	Q 2 4	6 8
k (27)	4 A A 9 A A	A A 5 8
l (28)	A 5 A 7	7 3
m (29)	A A	A A A A
n (30)	6 A	8 2
o (31)	A 8	4 A 5
p (32)	J A	A 5

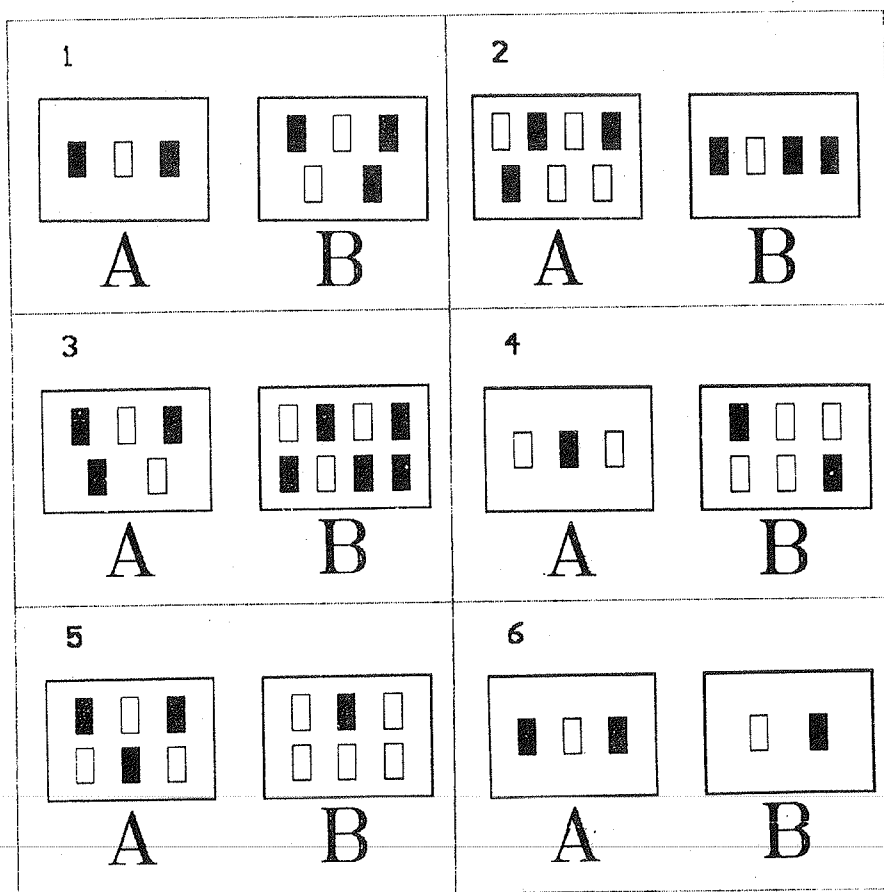
FICHAS UTILIZADAS EN EL CUESTIONARIO C3

<p>1</p> <p>A</p>  <p>escujo A</p> <p>no da igual</p> <p>B</p>  <p>escujo B</p>	<p>2</p> <p>A</p>  <p>escujo A</p> <p>no da igual</p> <p>B</p>  <p>escujo B</p>
<p>3</p> <p>A</p>  <p>escujo A</p> <p>no da igual</p> <p>B</p>  <p>escujo B</p>	<p>4</p> <p>A</p>  <p>escujo A</p> <p>no da igual</p> <p>B</p>  <p>escujo B</p>
<p>5</p> <p>A</p>  <p>escujo A</p> <p>no da igual</p> <p>B</p>  <p>escujo B</p>	<p>6</p> <p>A</p>  <p>escujo A</p> <p>no da igual</p> <p>B</p>  <p>escujo B</p>

<p>16</p> <p><b>A</b></p>  <p>escolha A</p> <input type="checkbox"/>	<p><b>B</b></p>  <p>escolha B</p> <input type="checkbox"/>	<p>18</p> <p><b>A</b></p>  <p>escolha A</p> <input type="checkbox"/>	<p><b>B</b></p>  <p>escolha B</p> <input type="checkbox"/>
<p>19</p> <p><b>A</b></p>  <p>escolha A</p> <input type="checkbox"/>	<p><b>B</b></p>  <p>escolha B</p> <input type="checkbox"/>	<p>21</p> <p><b>A</b></p>  <p>escolha A</p> <input type="checkbox"/>	<p><b>B</b></p>  <p>escolha B</p> <input type="checkbox"/>
<p>22</p> <p><b>A</b></p>  <p>escolha A</p> <input type="checkbox"/>	<p><b>B</b></p>  <p>escolha B</p> <input type="checkbox"/>	<p>24</p> <p><b>A</b></p>  <p>escolha A</p> <input type="checkbox"/>	<p><b>B</b></p>  <p>escolha B</p> <input type="checkbox"/>

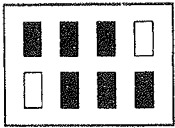
<p>34</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>	<p>35</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>	<p>36</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>
<p>37</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>	<p>38</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>	<p>39</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>
<p>40</p> <p><b>A</b></p>  <p>escujo A</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>ne da igual</p> <p><input type="checkbox"/></p> <p>escujo B</p> <p><b>B</b></p>  <p>escujo B</p> <p><input type="checkbox"/></p>		

FICHAS UTILIZADAS EN EL CUESTIONARIO C6

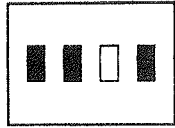




14

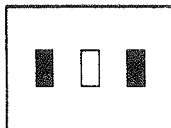


A

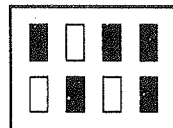


B

15

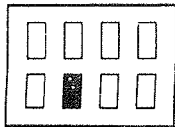


A

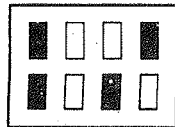


B

16

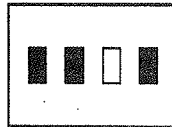


A

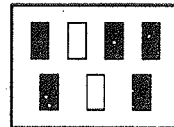


B

17

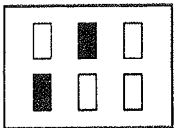


A

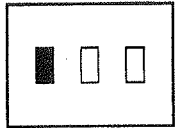


B

18

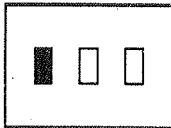


A

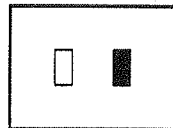


B

19

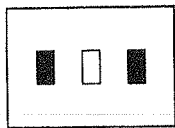


A

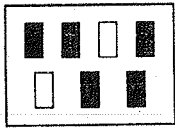


B

20

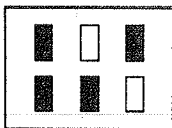


A

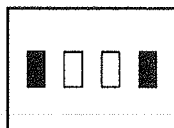


B

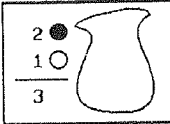

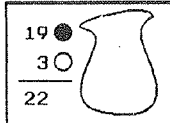
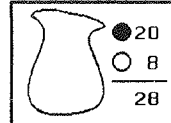
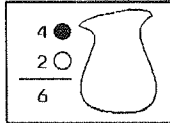

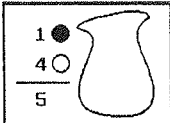
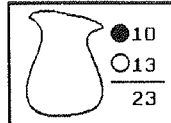
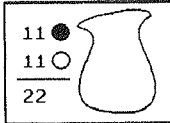

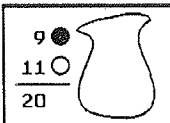
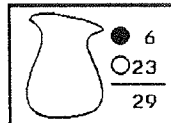
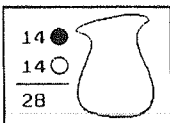
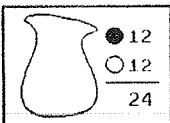







21



A



B

<p style="text-align: center;"><b>30</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>	<p style="text-align: center;"><b>31</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>
<p style="text-align: center;"><b>32</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>	<p style="text-align: center;"><b>33</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>
<p style="text-align: center;"><b>34</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>	<p style="text-align: center;"><b>35</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>
<p style="text-align: center;"><b>36</b></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> </div>	<p style="text-align: center;"><b>37</b></p> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">  </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>A</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>B</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>C</b></p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>D</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>E</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>F</b></p> </div> </div>

## ANEXO 4 : TRANSCRIPCION DE LAS ENTREVISTAS

Los experimentos tercero y quinto se realizaron mediante entrevistas, cuya transcripción presento en este anexo.

Los sujetos para estas entrevistas fueron elegidos de grupos que no habían cursado a nivel universitario ni Probabilidad ni Estadística por alguno de sus profesores (de Matemáticas en el tercer experimento, de Pedagogía en el quinto); en el caso de binomios se pidió que ambos integrantes tuvieran costumbre de estudiar juntos. A todos se les avisó que se trataba de cooperar como voluntarios en un estudio acerca de "las intuiciones de la gente", y que no se les iba a preguntar nada que tuvieran que "saber" sino que sólo se les pedía que respondieran a las preguntas de la manera más espontánea posible.

Las entrevistas fueron realizadas en cubículos cerrados, en torno a una mesa en la que estaban las fichas de preguntas, el material concreto [MC] y el micrófono; una mesa adyacente tenía la grabadora.

Aquí se reproducen las entrevistas completas salvo por secciones marcadas (...) que corresponden a:

- algunas instrucciones (repetidas) de la entrevistadora (o sea, mías)
- las partes en que la conversación giraba sobre temas ajenos a este estudio
- las partes en que la transcripción de la grabación resultó imposible por fallas técnicas en la grabación.

La transcripción incluye tanto el contenido de las preguntas como las respuestas y algunas acotaciones de acciones realizadas por los sujetos en el transcurso de las entrevistas.

Cuando se plantea una nueva pregunta se pone entre corchetes en letras negritas el número de la pregunta y, después de dos puntos, el arreglo contenido en la pregunta con la codificación usual:  $S1, S2 = (f_1, d_1)(f_2, d_2)$ , al que antecede el lado (A ó B) en que queda el espacio muestral  $S1$  y al que sigue el lado (B ó A) en que queda  $S2$  (1). Las preguntas incluidas en el cuestionario diseñado previamente (C-3 ó C-6) se simbolizan por su número. Las variantes introducidas verbalmente durante la realización de la entrevista se simbolizan mediante el número de la pregunta del cuestionario que dio pie a la variante y, a modo de cifras decimales, el número de la variante (2). En las ocasiones en que los

1. Recordamos que la reproducción de las fichas se encuentra en el Anexo 3.
2. La excepción a esta numeración es la pregunta 13.1 del cuestionario C-6, que es idéntica a la pregunta 13 del mismo cuestionario (salvo por la disposición gráfica), pero que fue incluida para algunos sujetos después de la pregunta 26.

BINOMIO J-M

La entrevista con los sujetos J, de sexo masculino y M, de sexo femenino, tuvo una duración de 52 minutos.

S: De lo que se trata es de lo siguiente: hay una serie de preguntas que se refieren a tarjetas. Es como si tuviéramos tarjetas, que aquí están en blanco y negro pero aquí [MC] son (101) moradas y blancas. De lo que se trata cada vez es que yo voy a tener un cierto número de blancas y negras, digamos cinco blancas y una negra (102), y están puestas así para indicar que lo que hago es revolverlas: éste es el lado A, y del lado B tengo dos negras y tres blancas, y también están puestas así para indicar que lo que hago es revolverlas. Entonces yo les enseño lo que tengo del lado A y del lado B, y después lo que voy a hacer es revolverlas (103), y entonces ya no se puede saber cuál es blanca y cuál es morada, tanto las del lado A como las del lado B [efectuando lo dicho en MC]. Supongamos que ustedes quieren sacar una morada, tienen chance de sacar una carta y quieren que sea morada (104), digamos que si se sacan la morada se ganan un viaje a Acapulco. Pero nada más tienen chance de sacar UNA, y de UNO de los dos montones. Entonces la pregunta es: ¿de cuál montón escogen? Siempre (105) es la misma pregunta y cada vez van a cambiar las composiciones de las

cartas en A y en B. Las preguntas están puestas por escrito, siempre podemos recurrir a las tarjetas, cada vez que lo quieran. Bueno, ¿empezamos, pues? La primera es ésta, que fue la que hice [MC], en ella tengo estas composiciones. Entonces la pregunta es (106): ¿cuál quieren, A o B? también puede ser que dé exactamente igual. Lo que yo quisiera es que si no están de acuerdo, traten de convencerse uno al otro. Ese es el mero chiste: tratar de quedar de acuerdo, y no porque sí, sí, sí o que te doy por tu lado. Si al final no llegan a un acuerdo (107), entonces le paramos y ahí no hay acuerdo, pasamos a la siguiente, pero en principio tratar de llegar a un acuerdo, ver si se convencen uno al otro.

M: Y aquí [1: B(2,3)(1,5)A], ¿de cuál? Del B.

S: ¿Del B? ¿Sí (a J)?

M: ¿Quién saca, tú? [MC]

J: Sí, sale la primera [saca de MC una morada].

S: Ya se fueron a Acapulco (risas).

M: Le (108) podemos tomar la palabra (risas).

S: Bueno, ahí va la segunda [2: A(1,2)(3,3)B].

(silencio de 6 segundos)

M: Pero, una pregunta: la composición no es la misma, porque aquí [2B] ya quedó una afuera, y entonces ya...

S: No, no. Es independiente. Es como si yo recojo [MC] y vuelvo a armar, ¿OK? (109) (...)

S: La pregunta es de cuál (110)...

J: La B.

M: La B.

- [5: B(1,2)(2,3)A]. ¿De qué lado escogen?
- M: ¿Yo? Me vuelvo a echar éste [5B].
- J: Pues yo me voy al A.
- S: ¿Por qué?
- M: Porque yo pienso que entre menos cartas haya para escoger (120), independientemente de la proporción, para mí yo siento que es más fácil que el hecho de... de poderle atinar. Si yo tengo que escoger entre tres números, tengo más probabilidades de (...?)... escoger entre seis números, es más difícil atinarle a (...?).
- S: Ahora vamos a...
- M: O sea, porque aquí [5B] tengo... oportunidades de equivocarme, dos, pero en la otra [5A] tengo cinco oportunidades de equivocarme (sic), aquí tengo TRES oportunidades de equivocarme.
- S: (... (121)...) ¿Qué pasa, dónde escoges, si ahora la situación es así, con una negra más del lado A [en MC, 5.1: B(1,2)(3,3)A]?
- M: Aquí [5.1A], porque ya aquí son el cincuenta por ciento de posibilidad... una a una.
- S: ¿Y entonces qué pasó con tu argumento de que ahí [5B] porque ahí había menos cartas?
- M: Sí, pero, por la composición, ¿no? Aquí [5A] había dos, y había tres blancas (122), aquí [5B] había dos blancas y una, pero ya aquí [5.1A], al variar el número, ya tengo una de cada una, y ya...
- J: Yo digo que es igual, porque la desventaja sigue siendo... por ejemplo, si quitamos ésta [la de 5.1A], sigue siendo en uno, la desventaja.
- S: ¿La desventaja...?
- J: Sí, o sea...
- M: Sí, pero ahí tenemos más cartas para escoger.
- J: Ahí [5.1A] hay pares, y ahí [5B] hay un par y aquí hay uno ¿sí?
- S: Ajá, sobra una blanca.
- J: Sobra una blanca. Entonces yo digo que hay más, mucho más posibilidades de sacarla de aquí [5.1A] que de aquí, porque aquí [5.1B] son dos blancas contra una.
- S: Ajá.
- J: ¿Ya?
- M: Pues entonces aquí [5A] también... (123)
- J: Y si pones aquí [5A] yo me sigo yendo ahí.
- S: OK, vamos a quitar esta negra y vamos a dejarla como está en la pregunta original [5.2: B(1,2)(2,3)A]. Tú dices que de todas maneras escogerías del ...
- J: ... del lado A.
- M: Porque tienes dos oportunidades de atinarle, a pesar de que haya más blancas.
- J: Exactamente. Se balancean las oportunidades, ya...
- M: (...?) aquí [5B], porque de dos... o sea tengo tres, y es más fácil, entre tres. (...)
- M: Bien, aquí no nos pusimos de acuerdo.
- S: Muy bien, en la 5 no hay acuerdo. Incluso podemos (124) dejarla de lado, a ver qué pasa al rato. A ver, la 6. [6: B(1,2)(3,5)A] (silencio de 6 segundos)
- M: Es que tenemos la misma onda (risas).
- J: Es lo mismo, es lo mismo. Con más cartas, pero es lo mismo. O sea, la B sigue

- S: Ahora (129) les voy a hacer una pregunta: ¿qué pasa si en la 6A, en lugar de una blanca tengo una negra [MC: 6.2: A(2,3)(4,4)B]?  
(silencio de 5 segundos)
- J: De todos modos daría igual, ¿no? porque...
- M: Entonces sí daría igual, porque aquí sobrarían, estarían... emparejadas.
- J: Está sobrando una.
- M: Sobraría una blanca.
- S: O sea, si tuviera yo cuatro negras y cuatro blancas en la 6 [6.2B], y dos negras y tres blancas en la 5 [6.2A],...
- M: No, porque aquí [6.2B] ya estaríamos otra vez a cincuenta por ciento: cuatro blancas, cuatro negras.
- J: Sí, porque son una, dos, tres, ... o sea tendría..., ah, no, ésta es pareja, (...?).
- M: Todas serían pareja (130), porque hay una, dos, tres, son ocho, ¿sí?
- J: Ajá.
- M: Serían cuatro y cuatro, serían cincuenta por ciento, y aquí [6.2A], estaría (...?) la posibilidad de la blanca, porque hay una más. Entonces, otra pregunta, ¿no?
- S: Ahora [MC: 6.3: A(2,3)(4,5)B], ¿en cuál (131) hay más chances de sacar una negra?
- M: Tú dirías que sería igual...  
(silencio de 4 segundos)
- M: ... pues yo diría que entre menos cartas haya para escoger, ... o sea yo...
- J: Yo diría que entre MAS aumentan las posibilidades, o sea, de color, más posibilidades hay de sacar una negra.
- S: ¿Cómo es eso, o sea, mientras más negras haya...?
- J: ... más negras haya, más es la probabilidad, independientemente de la cantidad...
- M: ... de la cantidad de blancas...
- J: ... de la cantidad de blancas.
- M: ... y de cartas.
- J: ... y de cartas. Entre más cantidad de negras haya, más es la posibilidad de sacar una (132), que aunque sean menos. O sea, en esta caso, la de allá [6.3B].
- M: En eso sí estoy de acuerdo, me acabas de convencer. Es que, ¿sabes en qué pensé? En un frasco con botones.
- S: Ajá, ¿y entonces?
- M: Y entonces puede ser, ¿no? entre los botones negros...
- J: ... unos blancos...
- M: ... unos blancos, y mientras más negros haya, pues...
- J: ... más fácil...
- M: ... más fácil va a ser.
- J: ... independientemente de la cantidad.
- M: Lógico.
- S: ¿Sí?
- M: Pues sí. Aparentemente, sí. Sí, porque es lo que, por ejemplo (133), ahorita me acordé también del juego de la escuela de mis sobrinos, por ejemplo se les puso más lagartijitas que arañas, de esas de goma, y entonces, pues sí, todos iban tras las arañas porque eran menos, y eran las más difíciles de sacar... (risas).
- S: Bueno, ¿pasamos a la siguiente?. La 7 [7: B(1,2)(3,5)A].  
(silencio de 4 segundos)
- M: (risas) Es la misma.
- J: Es lo mismo (134).

- (silencio de 15 segundos)
- J: Cualquiera de las dos...
- M: (Niega con la cabeza)
- J: ... o bien B. Cualquiera de las dos, o bien B (139).
- M: A, es que nada más tienes una posibilidad de sacar la blanca. Hay UNA, contra tres, ...
- J: Yo por eso....
- M: ... y aquí tienes DOS...
- J: Sí pero...
- M: ... posibilidades de sacar A.
- J: ... pero es más fá... De todos modos, es igual. Porque hay una... bastante cantidad. Yo le voy a B, o me da igual, cualquiera de las dos.
- S: ¿Por fin? ¡Defínete! (risas).
- J: Dos, dos, dos de una vez. Bueno, si quieres que me defina, me da igual, así de sencillo.
- S: ¿Te da igual de verdad? Digo, si en uno de los dos sale el viaje a Acapulco, ¿cierras los ojos y en cualquiera...? (140)
- J: En cualquiera, sí, exactamente.
- M: Yo no.
- S: ¿Tú no? Bueno, vamos a la 9 [9: A(3,1)(5,2)B].
- J: (...?) (risas)  
(silencio de 11 segundos)
- J: Sigue siendo igual.
- S: ¿Sí? A ver, vamos a ver la 8 y la 9 juntas.
- J: La A sigue siendo igual.
- M: La A es la misma. ¿Y la B?
- J: Le faltan dos integrantes, PERO, pero...
- S: O sea, en la 9B son siete en total.
- M: Antes [8B] había seis negras y ahora [9B] son cinco.
- S: Ajá.
- J: Vuelvo (141) a repetir lo mismo que en la 8: me da igual.
- M: Yo sigo que con A.
- S: Tú (M) sigues que con A. Y a ti (J) te sigue dando igual.
- J: Me sigue dando igual.
- S: Y ahora vamos, puesto que son de nuevo las mismas respuestas, vamos a comparar la 8B y la 9B [9.1: B(5,2)(6,2)A].
- M: [señala la 9.1A]
- J: Me da igual.
- S: Tú (M) dices que en la 8 [9.1A].
- M: Hay una probabilidad más de negra que aquí [9.1B].
- J: No, no. Da igual.
- S: A ti te da igual. (A M:) ¿Y en qué difieren?
- J: O sea, ...
- M: Pues que aquí [9.1B] tengo cinco negras para atinarle y aquí [9.1A] tengo seis.
- J: O sea, pero aquí ya no... tú ya te vas dando una posibilidad más, y caes en lo que yo estaba diciendo hace rato (142): a mayor cantidad...
- M: ¿Y entonces por qué a ti te da igual?
- J: ¿Y por qué a ti te, ... antes no la aceptaste?
- S: Bueno, a lo mejor no hay que ser absolutamente consistente.
- M: No, porque aquí [8A] era una sola negra, era una sola blanca.
- J: A mí me da igual, porque a pesar de ..., variando la cantidad, sean cinco, sean siete, sean ocho, hay más negras. Sigo con mi misma treta: a mayor cantidad de negras...
- M: Por eso, pero entonces no te puede dar igual, porque aquí [9.1A] hay más negras que acá [9.1B], entonces de acuerdo a lo que estás diciendo, tendrías que haber escogido ésta [9.1A], porque hay más negras que

- salen por acá, que los...  
(risas)...
- S: ... lagartijas...  
(risas)...
- M: ... he-man... (risas).  
(silencio de 6 segundos)
- M: Yo, en este caso, yo me iría a la A.
- S: A la A. ¿Y tú, J (148)?
- J: Pues yo me iría a la B...
- S: A la B.
- J: ... con mi misma maña.
- S: Se me hace que no se van a ir juntos a Acapulco (risas).
- J: No, más bien no me iría a la B, sería en cualquiera de las dos.
- S: ¿En cualquiera de las dos?
- J: En cualquiera de las dos.
- M: (Niega con la cabeza).
- S: ¡Convéncelo!
- M: Es re necio... (risas).
- J: Tiene dos semestres, y no lo logra... (risas).
- M: No lo puedo convencer. Pues es que yo pienso que cuando aquí ya está tan disparejo el asunto,...
- J: Bueno, pero vamos a pensar...
- M: ... para mí, ... mientras menos...
- J: ... comparando números...
- M: ... haya de donde escoger... pues a lo mejor, me late más ir a (?) algún lado. O sea, en este caso, porque aquí [12B] hay más cartas, pero el número de... de negras es menor en mucho menor en proporción, ¿sí? Y aquí (149) tengo más o menos... un tercio, ¿no?
- S: ¿En dónde tienes un tercio?
- M: Aquí [12A].
- J: A mí me da igual.
- S: ¿Por qué te da igual?
- J: Cualquiera de los dos. Porque, mira, a pesar... o sea, vuelvo a lo mismo, a pesar de que sea mayor cantidad...
- M: O sea, él dice que aquí [12B] va a tener dos chances...
- J: ...hay más probabilidad, aquí sigues sacando, o sea si... sacas mala, va a ser blanca...
- S: Ajá.
- J: ... y aquí [12A] también va a seguir siendo blanca, pero hay dos probabilidades de que saques blanca y una negra, ¿ajá? Aquí [12B] hay dos, dos de negra pero mayor blanca, o sea predominan las blancas.
- M: Pero ahí ya hay dos negras.
- J: Es lo que vuelvo a repetir,...
- M: Ahí ya...
- J: ... que no hay problema de que sea la cantidad, ¿me entiendes? O sea, sigue siendo, para mí es la misma probabilidad (150) de... en un momento determinado, yo puedo sacar la negra de cualquier lado.
- M: Sí, es que aquí él lo que dice es que de todos modos siempre hay DOS...
- J: ... hay dos.
- M: ...chances de atinarle...
- J: Aquí [12B] hay una pareja del cincuenta por ciento, aquí hay otra pareja del cincuenta por ciento, y aquí hay dos cien por ciento, bueno un cien por ciento en blancas, y aquí [12A?] hay un cien por ciento en blancas.
- M: No, porque aquí entonces estamos haciendo parejas, entonces ya no (...?)
- J: Pero de todos modos, predominaría la blanca.
- M: Pues aquí [12B] también predomina la blanca.
- J: Sí, acá predomina la blanca.
- M: Entonces te daría igual.
- J: Me daría igual, en cualquiera de los dos lados



- viaje a Acapulco viene en una blanca?  
(silencio de 5 segundos)  
M: Pues entonces sería al revés, porque aquí [14A] hay más blancas.  
S: ¿En A?  
J: Sí.  
M: Nos ponemos de acuerdo si hay que (208) (...?)  
S: Vamos ahora a la 15 [15: A(2,2)(3,1)B].  
(silencio de 5 segundos)  
J: [Señala 15B]  
M: B.  
S: ¿B, sí?  
J: Sí.  
M: Sí, pues hay más.  
S: Vamos a la 16 [16: A(3,2)(5,1)B].  
J: B.  
M: B.  
S: ¿B, sí? ¿Hay acuerdo?  
M: Sí.  
S: Si hay acuerdo, no tiene chiste... (209) (risas). Vamos a la 17 [17: B(1,2)(4,2)A].  
J: A.  
(silencio de 4 segundos)  
M: A.  
J: A.  
S: ¿A?  
M: A.  
S: Vamos a la 18 [18: B(2,1)(3,2)A].  
J: Ta ta ta tán. B.  
M: B.  
S: ¿B?  
(asienten)  
S: La 19 [19: A(2,0)(6,0)B].  
J: Cualquiera de los dos.  
M: Pues sí, cualquiera de los dos, aquí es claro.  
S: La 20 [20: B(2,2)(3,2)A] (210).  
(silencio de 4 segundos)  
J: A.  
M: A.  
S: ¿A? ¿están de acuerdo? (asienten). La 21 [21: A(3,4)(4,3)B].  
(silencio de 2 segundos)  
J: Volvemos a lo mismo.
- M: B.  
S: ¿Tú dices que B?  
J: Dos, cuatro..... Sí, B.  
S: ¿Por qué? ¿Por qué cambiaste de opinión? (211)  
J: Ya me está convenciendo de que compartamos el cuarto... (risas).  
M: Pero con la suerte que yo tengo, así hubiera una sola blanca, seguro que yo saco la blanca, olvídate. Nunca me he sacado, pero... ni la pagada de la cuenta, maestra, de veras.  
J: Yo ya gané un premio de lotería, calcúlale... (212) (risas). Sí existiría una contradicción en cuanto a lo que yo vengo defendiendo, o sea que la cantidad de... Pero en este caso sí hay mucho más probabilidades porque aquí pues nada más son, este... acá [21A] está sobrando una blanca, ¿sí? El riesgo de que salga más blanca es en A, que en B. En B de alguna forma se balancea y van ganando un veinticinco por ciento las negras.  
S: ¿Por qué (213) veinticinco por ciento?  
M: Porque aquí ya (...?).  
J: Porque tenemos [21B] una pareja, una pareja. Cien por ciento, cien por ciento, cien por ciento [cada vez tapa con la mano una pareja formada por una blanca y una negra], sobra...  
M: Sobra una negra. El hace parejas (...?).  
J: ... una pareja.  
S: Ajá, y acá [21A] sobra una blanca.  
J: Sobra una blanca.  
S: Bueno, ahora la 22 [22: B(4,1)(6,2)A].  
(silencio de 7 segundos)  
M: B.  
J: Sí (214).

- J: Sí.
- S: ¿Qué pasa si quito otra negra en A [22.3: B(4,1)(4,2)A]?
- J: Ya no. Me voy más a B.
- S: Bueno.
- J: Sí, porque aquí [22.3A] serían siendo dos proporciones ya, más probabilidades de que me salga blanca, a pesar de que es la misma cantidad de negras, y aquí [22.3B] son sólo una. Entonces aquí ya (...?) B.
- S: Bueno. Vamos ahora a la 23 [23: B(2,0)(0,6)A].
- M: B (221).
- J: B.
- S: Vamos a la 24 [24: A(2,2)(3,3)B]. ¿Hay acuerdo (en la 23)!
- (silencio de 5 segundos)
- J: Si defiendes tu tesis del cincuenta el cincuenta, A.
- M: Pues está igual aquí [24B], sería me da igual.
- J: Ah, sí es cierto. Sí, pues nos da igual.
- M: A mí me da igual.
- S: ¿Por qué?
- M: Porque hay igual número de probabilidades de sacar una que otra.
- J: Sí, exactamente.
- M: Ahí está balanceado, ¿no?
- J: Tanto en A, tanto en B. O sea, en A, puedes (222) sacar blanca, puedes sacar ...
- M: O sea, hay igual número de posibilidades...
- J: Exacto, igual número.
- M: ... de una que de otra.
- J: Sí es cierto.
- S: Bueno, vamos a la 25 [25: A(1,2)(3,5)B].
- (silencio de 11 segundos)
- J: Pues... da igual, ¿no?
- M: Para mí, no. Para mí ya sería la B porque siempre ya hay TRES posibilidades de negra, aunque haya más blancas, aunque... hay más cartas, pero ya tengo TRES (223) posibilidades contra una aquí [25A], ¿no?
- J: Pues a mí me da igual, porque a pesar de que en A hay una sola, y en B aunque haya más, pero predominan las blancas, entonces en cualquiera de los dos momentos puede salir ésta.
- S: ¿Y podrías hacer alguna cosa como ver dónde predominan MAS las blancas?
- J: En B predominan más las blancas.
- S: ¿Por qué?
- J: Dos, cuatro, son cinco, contra tres [25A], pero sigue siendo, no... o sea... por eso... te digo que sobran dos [forma sus parejas en 25B], dos y dos.
- S: Dos sobran en B, ¿cuántas sobran en A? (224)
- J: Una... es una pareja.
- S: Pero, bueno, así, mira, cierra un poquito los ojos y viendo dónde hay más blancas y más negras.... o sea, como que ves eso pero lo ves borroso... ¿dónde te da la impresión de que hay más negro, dónde que hay más blanco?
- J: En B, porque hay más negro, pero también hay más blanco.
- M: Sí, pero yo pienso que aquí [25B] ya tengo tres posibilidades (225), contra solamente una aquí [25A].
- S: Entonces tú te vas con B.
- M: Con B.
- J: A mí me da igual.
- S: ¿Seguro, seguro?
- J: Sí.
- S: Muy bien. Bueno, ahora vamos a otro tipo de preguntas. Son los botones, no más que no están en frascos sino en bolsas. Aquí por ejemplo, en la 26, tengo una bolsa en A y una bolsa en B, y en la bolsa

- M: Por la proporción, puede ser igual.... Pero...
- J: Pero por la cantidad, puede ser la A. A pesar de que se incrementen los blancos...
- M: Sí, se guarda la propor...
- J: O sea, está la misma proporción guardada.  
(silencio de 5 segundos)
- J: Yo ahí sí tengo dos posibilidades. No sé si se admita, pero a mí o me da igual, o me voy con la A.
- E: Yo ahí no diría que te da igual. Yo diría que...  
(231)  
(...?)
- J: ... me tendría que quedar con la A.
- M: No, pues a mí en todo caso me daría igual. No escogería ninguno en forma determinada, ya con esa explicación, ¿no?, de que son el mismo número que sobra de blancas en las dos.
- S: Vamos a la 30 [30: A(1,5)(10,14)B].  
(silencio de 9 segundos)
- M: Daría igual.
- J: La B.
- M: No, pues está en la misma proporción. A qué (...?), si no.
- J: Ah, sí ¡Ujújú! No sé sumar ya (232).
- M: No, sí, porque aquí son (...?) blancas, y acá (...?) seis.
- J: Sí, pero aquí pasaría una cosa muy sencilla...
- S: ¿Por qué, por qué...?
- M: Ah no, son cinco más, perdón.
- J: Sí, yo... yo me quedaría con B. Porque allá [30B]... por lo menos son CUATRO posibilidades de que salgan blancas.
- S: ¿Cuatro?
- J: Sí, según yo...
- M: O sea, aquí, aquí hay menos posibilidades...
- J: O sea, si hacemos una parejita, una pareja. Pero aquí ya hay mucho más cantidad...
- M: ... de negras...
- J: ... de negras. O sea, lo mismo que te decía con las tarjetas. Si se incrementa la cantidad de tarjetas, no importa la cantidad, pero entre más negras haya, mucho más posibilidades de que salga...
- M: (...?)
- J: Yo me quedaría con B (233).  
(silencio de 2 segundos)
- M: En A, porque nada más hay CUATRO blancas más en proporción.
- S: Bueno. A ver la 31 [31: A(12,8)(4,24)B].  
(silencio de 9 segundos)  
[Señalan A ambos] (risas).
- S: A, los dos. Bueno, 32 [32: B(2,2)(2,3)A].
- J: Tres y dos, dos y dos...
- M: B.
- S: ¿B?
- J: B.
- S: La 33 [33: A(1,2)(18,9)B].  
(silencio de 11 segundos)  
(234)
- J: Yo me quedo con B.  
(silencio de 7 segundos)
- S: ¿Sí, M?  
(silencio de 4 segundos)
- M: (Asiente).
- S: Fíjate que son menos en A... (risas)
- M: Sí, pero, pero pues hay más... posibilidades de negras aquí [33B] que acá [33A], ¿no?
- J: Pero ¿qué pasa con tu teoría...?
- M: Bueno, pero sí, pero en este caso pienso diferente...
- S: Se vale, se vale. 34 [34: B(10,15)(18,9)A].  
(silencio de 5 segundos)
- M: En A.
- J: En A (235).
- S: 35 [35: A(1,3)(2,4)B].

S: ¿B? ¿Sin discusión?  
 J: Sin discusión alguna.

**BINOMIO T-V**

La entrevista con los sujetos T, de sexo femenino y V, de sexo masculino, tuvo una duración de 44 minutos.

- S: (240.7) Es un juego: se trata de checar intuiciones, de saber cómo siente la gente las cosas. (.....)
- S: (.....) yo les pregunto de qué lado escogen [1: B(2,3)(1,5)A].
- V: De qué lado.... (246)
- T: Del B.
- S: ¿Tú del B? ¿Y tú?
- V: También.
- S: ¿Sí?
- V: Mmmh...no.
- S: ¿Tú del A?
- V: Yo del A.
- S: ¿Por qué del A?
- V: ¿Por qué del A?
- S: Ajá.
- V: Pues... no me interesa... me... o sea, yo lo echo a la suerte... o sea, yo sé que en B hay dos negras, pero en A nada más una: ahí la echo yo a la suerte... por eso tomo A.
- S: ¿Y tú por qué escoges B?
- T: A mí (...?)
- V: No, no... porque acá [1B] hay dos opciones, y allá [1A] hay una nada más...
- T: Pero yo quiero las dos opciones... (..(247)...) )
- S: Entonces, ¿de qué lado escogen?
- T: Yo del B.
- S: Tú del B. ¿Por qué?
- T: (Risas). Yo quiero escoger ésta, entonces... no sé, se me hace más divertido estar en B.
- S: En B. ¿Y tú?
- V: Pues, en A (248).
- S: ¿En A? Ahora vamos a cambiar de situación. Es como si yo recojo mis tarjetas [MC] y vuelvo a armar otra vez [2: A(1,2)(3,3)B] (...). ¿De cuál?
- T: Del B.
- V: Del B.
- S: ¿Del B? ¿Por qué del B?
- V: Porque en B yo iría a lo seguro...
- S: ¿Por qué? (249)
- V: O sea yo... si ahí está el premio, pues ahí voy, pero si está en A, pues no hay mucho de qué agarrarse. O sea, sí habría opción en A, ¿no?...
- T: ... pero yo creo que un poco más en B...
- V: ... pero menos. Entonces habría más posibilidades en B, de tomar... es más, habría más posibilidad de ganar.
- T: Ajá, exactamente.
- S: Bueno, vamos a la 3 [3: B(2,1)(2,3)A]. (silencio de 15 segundos)
- S: ¿Qué creen? ¿A ver, T? (silencio de 11 segundos) (250)
- T: En B.
- S: ¿B? ¿Y tú, V?
- V: B.
- S: ¿B? ¿Por qué?
- V: Porque mmmh... ¿Por qué? Porque en A hay demasiadas cartas, y habría menos posibilidad de encontrar una... bueno, sí habría el caso de encontrar una negra, ¿no?, pero en... (...)
- S: Bueno, vamos a la 4 [4: B(1,3)(2,6)A]. Ahí estaban de acuerdo. (silencio de 7 segundos)
- V: (niega con la cabeza).

- S: Ah, sí, sí, sí, claro, se vale.
- L: O sea, no es necesario que digan a fuerza A, o a fuerza B, sino que puede ser que les dé igual cualquiera de los dos.
- S: Ajá.  
(silencio de 15 segundos)  
(309)
- T: No, pues para mí sería el A. O B.
- V: A.
- S: ¿A?
- V: A.
- T: Sí, yo igual. Intermedio, punto intermedio.
- S: ¿Entre A y te da igual?
- T: Sí (310).
- V: A.
- S: ¿Tú por qué dices que te da igual?
- T: ¿Por qué?
- S: Ajá.
- T: Ahh. Según para mí... supuestamente yo no sé dónde están las negras, como dices tú, ¿no?
- S: Ajá. Tú sabes que en A hay dos y tres, que en B hay una y dos (311), pero las vas a ver revueltas. (...)  
(... (312) ...)
- T: Donde quiera, me da igual.
- S: ¿Te da igual? ¿Y tú? (313)
- V: No, yo escojo A.
- S: ¿Por qué?
- V: ¿Por qué? ... pues... porque... pues yo pienso que hay más posibilidad en A que en B. En B pues vería pocas cartas pero... eh... tomaría una que no es... entonces en A hay dos posibilidades pero... hay más posibilidad (314) porque son TRES blancas y dos negras, entonces dos negras pues tal vez la puedes... puedes llegar a... tomar una negra en vez de una blanca... ¿No te convence?
- T: No.
- S: Bueno. Yo creo que ahora sí ya... La 6 [6: B(1,2)(3,5)A] (...) (315).  
(silencio de 15 segundos)
- T: En A.
- V: Mmmh... en A.
- T: No le pienses, hombre...
- V: En A.
- S: ¿En A? ¿Sí? Bueno.
- V: Estamos de acuerdo.
- S: Vamos a la 7 [7: B(1,2)(3,5)A].  
(silencio de 6 segundos) (316)
- T: A.
- V: B.
- S: B.
- T: Pues yo, A.
- S: Perfecto, peléense, peléense. ¿Tú por qué dices que A, T?
- T: Yo quiero en A.
- V: ¿Quieres A?
- T: Sí.
- V: No, yo quiero B.
- T: Me gusta siempre estar en suspens... no que nada más diga ¡ah, yo me lo gané! No, no tiene chiste, en cambio así lo juego a la suerte.
- S: No, pero tú no sabes en... o sea, cada vez tú lo que ves [MC] son rayitas.
- T: Sí, A (317).
- S: ¿A? ¿Por qué?
- V: No.
- S: ¡Convéncelo!
- T: Mira, te va a convenir en A (risas)... En A.
- V: ¿Por qué?
- T: Porque en A puedo sacar más cartas, te puedes llevar el viaje a donde tú quieras, lo que quieras hacer.
- V: ¿Puedes escoger?
- T: Sí, para que veas, mira, convéncete.
- V: No, pero (...?) mala suerte.
- S: ¿Dónde... o sea, qué tiene de bueno A o qué tiene de malo B?
- V: Yo tomo B (318), porque son menos cartas y... no... hay

- T: ¿No? ¿No te convence? ¿Por qué no vas a la primera y ya? Mira, mejor en B.
- V: Sí, se trata de llegar al premio, ¿no? Entonces...
- T: No. No nada más se trata de llegar al premio. Se trata de la emoción (325) y luego ya que te sientas realizado, te vas a ganar el premio.
- V: Si es algo grande, pues ni modo de echarlo a la suerte, ¿verdad? Te vas a lo... a lo que verdaderamente es... o sea, donde...
- S: Donde veas más chances, de eso se trata, o sea dónde hay más chances...
- E: Dónde hay más chances de ganar el premio.
- V: ... para podértelo llevar.
- S: (A T:) ¿Tú crees que en B?
- T: Sí yo en B.
- S: ¿Por qué?
- T: Hay más.
- S: ¿Está muy negrito?
- T: No, está muy negrito pero... No, B.
- S: ¿B?
- T: Sí.
- S: Bueno, vamos a ver la 10 [10: B(4,0)(5,1)A]. (silencio de 7 segundos) (326)
- V: Pues ni pensarlo.
- T: En B.
- V: B.
- S: ¿B? La 11 [11: A(1,1)(3,1)B]. (silencio de 4 segundos)
- T: B.
- V: B.
- S: ¿B?
- V: Sí, B.
- S: La 12 [12: A(1,2)(2,4)B]. (silencio de 4 segundos)
- T: B.
- V: No, pero... (327)
- T: B, porque B tiene dos cartas negras.
- V: Sí, pero tiene...
- T: Bueno, tiene (...?)
- V: ... cuatro blancas.
- T: ... donde acá... es lo mismo, porque mira... si... tienes [12B] dos negras y cuatro blancas.
- V: Son tres [12A], y...
- T: Bueno, aquí tienes la mitad de esto, ¿no? Pero aquí [12B] tienes el riesgo de que te lo puedas sacar porque están las dos negras. Aquí [12A] también, pero pues...
- V: Es lo mismo... Es exactamente lo mismo, la mitad de esto... (328)
- S: ¿Ah, es lo mismo?
- T: Las dos.
- V: La mitad de esto.
- T: Sí, porque aquí [12B] tendríamos cuatro, y acá [12A] tendría dos.
- S: Ajá.
- T: Aquí [12A] una, y acá [12B] dos cartas.
- S: ¿Entonces da igual?
- T: Sí, igual.
- V: Me da igual.
- S: ¿Sí?
- T: Sí, igual.
- S: Vamos a la 13 [13: A(3,1)(0,7)B]. (silencio de 2 segundos)
- V: Ni pensarlo... (se ríe).
- T: A.
- V: A.
- S: La 14 [14: B(2,2)(2,3)A]. (silencio de 5 segundos)
- T: B (329).
- V: B.
- S: La 15 [15: A(2,2)(3,1)B]. (silencio de 4 segundos)
- T: B.
- V: B.
- S: La 16 [16: A(3,2)(5,1)B]. (silencio de 2 segundos)
- T: B.
- V: B, también.
- S: ¿B?
- V: Ajá.
- S: La 17 [17: B(1,2)(4,2)A]. (silencio de 2 segundos)
- T: A.
- V: A, también.
- S: La 18 [18: B(2,1)(3,2)A].

- posibilidad de ganar, ¿no? pero aquí la veo más. O sea tengo más posibilidad en A de ganar, porque tengo una más, una negra más que me puede dar más seguridad que en B.
- S: ¿Te convenció?
- V: Así es que no puede ser lo mismo A que en B.
- T: Fácil, fácil. Para mí, sí.
- V: No, no.
- S: ¿Por qué no? ¿por qué da igual?
- T: A mí, igual, me da igual.
- S: ¿Por qué?
- T: Pues porque... aquí él está diciendo que si tirara él es porque tienes una negra más, ¿no?, o sea (...?) (336). Aquí también tienes las... bueno, menos una opción... bue... siempre hay más... bueno, a mí me da igual, cualquiera de las dos. Igual. No quito mi...
- V: No tengo poder de convencimiento (risas).
- S: La 21 [21: A(3,4)(4,3)B]. (silencio de 13 segundos) (337)
- T: En B.
- V: En B.
- S: ¿Sí? (...?). 22 [22: B(4,1)(6,2)A]. (silencio de 3 segundos)
- T: En B.
- V: En B.
- S: ¿Sí?
- V: Sí, en B.
- S: ¿Aunque haya más negras en A?
- V: No me interesa que haya más negras en A. Pero aquí [22B] nada más tengo una opción de perder, entonces tengo más, tengo un noventa por ciento de ganar.
- S: 23 [23: B(2,0)(0,6)A].
- T: B.
- V: B.
- S: 24 [24: A(2,2)(3,3)B]. (silencio de 4 segundos)
- T: B (338).
- V: B.
- S: ¿Sí, totalmente de acuerdo?
- V: Ajá
- S: ¿Aunque haya más chances de equivocarse?
- T: B.
- V: Pero tengo más opciones.
- T: Tiene más opciones.
- S: Bueno, 25 [25: A(1,2)(3,5)B]. (silencio de 18 segundos)
- T: A.
- V: A mí me da igual, de todos modos voy a perder (339) (risas).
- T: ¿ (...?) ?
- V: Sí. Ya la veo muy difícil en A, en cualquiera de las dos...
- T: Porque ya son menos... este...
- V: Sí, hay menos opciones...
- T: Pues sí, ya hay menos opciones.
- V: Puede haber... puede haber más posibilidad en A...
- T: Claro que sí.
- V: ... que en B, ¿no? Pero en las dos voy a perder... Pues entonces me da igual, aunque hay más posibilidades...
- E: De eso se trata: escoger donde haya MAS posibilidades.
- V: Ajá.
- S: ¿Entonces te quedas en A?
- V: Ajá.
- S: ¿Por qué?
- V: Porque son menos cartas... eh... pues... ahí vas... y dos... entonces pue...
- T: Ajá. En B hay más cartas.
- V: En B ya hay más cartas, pero sabes que hay menos posibilidades de ganar, entonces... (340) puede ser un poco psicológico, ¿no? De que... pues ves más cartas, pero hay más, entonces ves menos pero... pues... digo...
- S: ¿Entonces, A? ¿Sí, estás de acuerdo?

(silencio de 15 segundos)

T: A.

V: No, yo voy a B.

S: ¿Tú por qué?

T: Porque son [33A] menos canicas y una... y una negra. Ahora son mucho menos.

V: No a mí no me convence.

S: A ver, ¿por qué, V?

V: Porque en B tengo dieciocho canicas negras, y tengo nueve, nueve blancas, entonces (347) tengo más posibilidad de agarrar una negra que una blanca, entonces yo me quedo en B.

S: ¿Qué dices, T, te convence o no?

V: Aquí te ganas (...?).

T: No, no me gustan, prefiero A.

S: (Imitando a V) ¡Que B! (risas).

T: No, A, yo en A.

S: ¿A? Bueno.

S: La 34 [34: B(10,15)(18,9)A].

(silencio de 6 segundos)

T: A.

V: A.

S: La 35 [35: A(1,3)(2,4)B].

(silencio de 4 segundos)

T: A (348).

V: B.

T: ¿Por qué?

S: A ver, ¿A ver, por qué, T?

T: Porque aquí [35A] son tres negras...

V: No, tres blancas.

T: Digo, tres blancas, tres canicas blancas... con una negra... o sea de las cuatro bolas que... que echas, de esas te puede salir... la negra, definitivamente.

S: ¿Y en B?

T: En B....

V: Pues es lo mismo.

T: ¿Por qué?

V: ¿Eh? Auméntale... échale una canica blanca y una canica negra más...

S: ¿A dónde?

V: A...

T: Aquí [35A].

V: ... a A. Le pones una canica blanca (349) y una canica negra y te dan dos... te da cuatro blancas y dos negras... es lo mismo, pero pues... es lo mismo.

S: ¿Es lo mismo? ¿No que B?

V: Para mí, o sea para mí es lo mismo.

S: Sí, pero al mero principio dijiste que B.

V: Sí.

S: ¿Por qué cambiaste de opinión?

V: ¿Por qué? Pues... porque... ya lo pensé bien (risas).

T: Yo sigo en A.

V: Es lo mismo. Digo, pues...

T: ¿Para ti es lo mismo? Para mí A.

V: Bueno, pero... me voy a... la A. La A, sí, porque tengo dos negras, o sea, tengo... tres blancas... y una negra... pues la A (350). No me convence mucho, pero...

S: ¡Yaaaa! Primero dijiste que B, luego dijiste que te da igual ¡Y ahora dices que A!

V: Es que no me convence... mucho.

(...)

T: (400)... A, yo sigo en A.

V: Yo no sé, pero me da igual, definitivamente me da perfectamente igual.

S: Muy bien, la 36 [36: A(2,2)(11,11)B].

(silencio de 5 segundos)

T: Igual (401).

V: B.

S: ¿Igual?

V: En B.

T: A mí me da igual.

V: Pues es igual.

S: ¿Te da igual?

V: Sí.

S: Si te da igual, ¿eh? No vayas luego a decir no, no,



Formato del material concreto: tarjetas de 3x5cm de anverso negro o blanco y reverso blanco.

Las entrevistas se transcriben en el orden en que fueron realizadas.

### SUJETO O

La entrevista con el sujeto O, de sexo femenino, tuvo una duración de 25 minutos.

S: Yo te voy a hacer preguntas en las que supuestamente hay un lado A y un lado B, y en cada lado hay como unas tarjetitas, como si fueran blancas y negras, digamos como si fueran éstas [MC] (701). Entonces aquí por ejemplo tienes así, y aquí tienes así. Cada vez la composición de las tarjetas va a ser distinta, pero cada vez te voy a hacer el mismo tipo de pregunta, que es: imagínate que yo (702) agarro las del lado A y las revuelvo, ahora imagínate que agarro las del lado B y las revuelvo. De hecho están pintadas así para simbolizar que se revolvieron. Entonces tú sabes lo que hay en el lado A, pero no sabes cuál es cuál, y tú sabes lo que hay en el lado B, pero no sabes cuál es cuál, y yo te digo: (703) tienes UNA chance de sacar UNA tarjeta de UN solo lado; si sale negra, te ganas... ¿qué se te antoja? un viaje a Acapulco... de todas maneras es de mentiritas: si sale negra te ganas un premio. Lo (704) que yo te pregunto es de qué lado escoges [1: A(2,1)(3,2)B].

O: (Silencio de 5 segundos)  
Del A.

S: ¿Del A? ¿Por qué?

O: Porque tiene menos elementos.

S: Porque tiene menos elementos: ¿menos tarjetas?

O: Ajá.

S: Bueno, muy bien. Entonces ahora recogemos las tarjetas y volvemos a hacer (705) otra pregunta, y entonces te pregunto, ahora de qué lado escoges. Si quieres, en el momento en que quieras podemos recurrir a ver cómo sería con las tarjetitas, o más rápido con...

O: ¿Cómo?

S: Sí, o sea, podemos volver a armar (706)...

O: Ah, ¿sacamos de aquí los de acá?

S: ... en las tarjetitas, cómo es, así, aquí son los del lado A, y aquí son los del lado B. Y entonces ver cómo le hacemos, las revolvemos, no sabes cuál es cuál...

(...(707)...) )

S: Si quieres, en el momento que quieras, podemos recurrir a las tarjetas [MC], o viendo nada más las fichas... Como quieras. Y entonces aquí [2: B(3,1)(3,4)A] sería lo mismo: tienes UNA chance de sacar UNA tarjeta de UN lado. ¿De cuál lado escoges? Quieres que salga negra (708).

O: Del A.

S: ¿Del A? ¿Por qué?

O: Porque... quizás porque tienen... tiene más elementos blancos, pero tiene menos... digo, tiene

- [9A] pues nada más es un negro.
- S: Bueno. ¿Y en la 10 [10: B(2,3)(3,4)A]?
- O: En la 10... De aquí lo sacaría de cualquiera de los dos.
- S: ¿Da igual? (718)
- O: Sí... Sí, tienen las mismas probabilidades.
- S: Bueno. ¿Y en la 11 [11: A(3,3)(4,4)B]?
- O: (Silencio de 8 segundos) Igual que el anterior, son los mismos.
- S: ¿Tienen las mismas?
- O: Ajá.
- S: ¿Por qué, eh? ¿Cómo sabes?
- O: Porque [11A] tiene tres negros y tres blancos, y acá [11B] igualmente tiene cuatro negros y cuatro blancos.
- S: Ajá. (719) ¿Y en la 12 [12: B(1,5)(3,4)A]?
- O: (Silencio de 5 segundos) De la A.
- S: ¿Por qué?
- O: Tiene más elementos... Tiene más elementos, pero también tiene más elementos negros, y aquí [12B] tiene más blancos y (...?)
- S: Muy bien. ¿Y en la 13 [13: A(3,1)(4,1)B]?
- O: (Silencio de 6 segundos) Del A.
- S: ¿Por qué?
- O: Ah no, sería igual, como los anteriores (720). Nada más tienen un blanco cada uno... Ah, no sí, del A, del A lo sacaría.
- S: ¿Del A? ¿Por qué, eh? A ver, ¿qué fue lo que pasó en tu cabeza? Cuéntame. Primero dijiste del A, luego dijiste da igual, y luego dijiste del A.
- O: Sí, porque... dije que del A porque tenía menos... o sea nada más tenía uno blanco, pero no había observado bien éste [13B].
- Pero igual tienen... nada más uno, este... un blanco cada uno. Tienen más... negros. (721) Pero del A, porque son menos elementos.
- S: Ajá. ¿Y en la 14 [14: B(3,1)(6,2)A]?
- O: Del A.
- S: ¿Por qué?
- O: Tiene más... elementos negros.
- S: Más negros.
- O: Ajá.
- S: ¿No le hace que aquí [14B] sean menos, en el B, menos en total?
- O: Pues sí.
- S: Digo, porque tú has dicho, algunas veces dices que porque hay menos.
- O: Ajá, sí sí... Sí, del A.
- S: ¿Del A?
- O: Ajá.
- S: La 15 [15: A(2,1)(5,3)B]. (722)
- O: (Silencio de 12 segundos) Del A.
- S: ¿Por qué?
- O: Tiene nada más tres elementos, y dos de ellos son negros.
- S: Ajá, bueno. ¿Y en la 16 [16: A(1,7)(4,4)B]?
- O: (Silencio de 4 segundos) Del B.
- S: ¿Por qué? (723)
- O: Porque tiene los mismos elementos negros que blancos, y aquí [16A] nada más hay un negro.
- S: Ajá. La 17 [17: A(3,1)(5,2)B].
- O: (Silencio de 7 segundos) Del B.
- S: ¿Por qué?
- O: Tiene más elementos negros, por eso.
- S. Bueno. La 18 [18: B(1,2)(2,4)A].
- O: (Silencio de 11 segundos) (724) Y aquí sería lo mismo.
- S: ¿Por qué?

- chance de meter la mano y sacar UNA sola canica de UNA sola de las dos bolsas, y si sale negra te ganas un millón de dólares (731). Ahora sí no tengo las canicas, pero tengo los dibujos. Entonces, ésta es la 24, aquí se está simbolizando: en esta bolsa hay una negra y dos blancas, en total son tres canicas; aquí son tres negras y cinco blancas, en total son ocho canicas [24: A(1,2)(3,5)B].
- O: Del A.  
S: ¿Por qué?  
O: Porque son menos elementos. O sea, digamos que son iguales, porque ésta [24A] tiene menos elementos, pero tiene nada más (732) dos blancas y una negra, y aquí [24B] tiene muchas más blancas que negras, y aquí [24A] igual, pero tiene menos elementos.  
S: Ajá. ¿Y la 25 [25: B(3,3)(3,18)A]?  
O: (Silencio de 6 segundos) Igual, del A.  
S: ¿Por qué?  
O: Porque... son tres negras, ¿verdad? Y...  
S: Sí, y dieciocho blancas, y aquí [25B] son...  
O: Son tres a tres.  
S: Ajá.  
O: (Silencio de 3 segundos) Sería de la B.  
S: ¿Por qué? (733)  
O: Porque son iguales, o sea tiene los mismos elementos blancos y negros, y aquí tiene mucho m... este..., más blancos, entonces quizás es más fácil, digamos, que se perdieran las... las negras. Sería del B.  
S: OK. La 26 [26: B(9,12)(15,12)A].
- O: (Silencio de 4 segundos) Del A.  
S: ¿Por qué?  
O: Hay más eh... canicas negras que blancas. Sí, del A. (734)  
S: OK. La 27 [27: A(1,1)(3,1)B].  
O: (Silencio de 4 segundos) Del A, porque es uno a uno.  
S: Ajá. ¿Y en la 28 [28: A(8,14)(13,15)B]?  
O: (Silencio de 6 segundos) Del B.  
S: ¿Por qué?  
O: Tiene... porque únicamente son dos de más de blancas que hay, no es mucha la diferencia, y aquí [28A] es un poquito más grande.  
S: Ajá. (735) ¿Y en la 29? [29: B(1,4)(5,20)A]?  
O: (Silencio de 5 segundos) Del B.  
S: ¿Por qué?  
O: Porque son menos elementos, acá [29A] son mucho más.  
S: Ajá. ¿Y en la 30 [30: A(2,1)(3,4)B]?  
O: (Silencio de 6 segundos) Del B.  
S: ¿Por qué?  
O: Porque nada más es una la diferencia de... o sea tiene una de más de negras, una... una de más blancas.  
S: Ajá. ¿Y en la A?  
O: Pues es lo mismo. (736)  
S: ¿Cómo es lo mismo?  
O: Ah, sí, sí, sí, ya. Aquí [30A] hay más negras y aquí [30B] hay más blancas. Del B.  
S: ¿Del B?! ¿A pesar de eso?  
O: Ajá, del B.  
S: No es malo cambiar de opinión, ¿eh?  
O: No, pero del B.  
S: Bueno, la 31 [31: A(19,3)(20,8)B].  
O: (Silencio de 7 segundos) De cualquiera de los dos.  
S: ¿Da igual?  
O: Ajá.

- están las tarjetas [MC], puedes usarlas si quieres.
- O: Sí. (Silencio de 5 segundos) Sería en la C.
- S: ¿En la C?
- O: Ajá. Quizás también en la A (743). Y en la D.
- S: ¿Y en la D?
- O: Ajá.
- S: ¿Por qué, eh?
- O: ¿Por qué? Porque aquí [37A] hay... es una de más de blancas (sic), nada más es una negra, en la C igualmente, es una de más de blancas, y en la D... son... son este... ¡más blancas!
- S: OK, muy bien. La 38 es del mismo estilo. [38: R(2,2)-A(2,3)-B(2,1)-C(1,1)-D(1,3)-E(4,4)-F(3,2)].
- O: (Silencio de 7 segundos) Sería la C (744). (Silencio de 5 segundos) La E. La C y la E.
- S: ¿La C y la E?
- O: Ajá.
- S: ¿Por qué?
- O: Porque tienen los mismos elementos. Aquí [38R] son dos blancas, dos negras, [38C] una a una, aquí [38E] son cuatro con cuatro.
- S: Ajá. Muy bien. La 39 es igual, nada más que con canicas [39: R(2,1)-A(4,2)-B(3,2)-C(2,2)-D(3,1)-E(3,3)-F(1,2)]. O sea, aquí hay una de referencia, y seis posibilidades. (Silencio de 5 segundos)
- S: Son, este... Las bolitas blancas parecen cerros, pero son bolitas blancas.
- O: Ajá. Sería la A... No, la A no... (745) (Silencio de 5 segundos) Sería la B (Silencio de 10 segundos). Nada más la B.
- S: ¿Nada más la B? ¿Por qué, eh?
- O: ¿Por qué?
- S: ¿Cómo supiste que la B?
- O: Pues porque aquí tiene... o sea [39R] nada más es una de más de negras, y aquí [39B] igualmente nada más es una. Aquí [39A] no, porque son dos y dos, acá [39C] están iguales. Aquí [39D] son dos de diferencia. En la E es igual que la C, son iguales, y aquí [39F] pues porque hay más blancas (746). Sería nada más la B.
- S: OK. ¿Y en la 40 [40: R(7,14)-A(5,16)-B(9,14)-C(12,12)-D(7,18)-E(9,18)-F(11,18)]?
- O: (Silencio de 24 segundos). La E.
- S: ¿Por qué?
- O: Porque aquí [40R] tiene lo doble de canicas blancas que negras, y aquí [40E] igual, es lo doble de blancas que de negras. (747) Nada más la E.

SUJETO I

La entrevista con el sujeto I, de sexo femenino, tuvo una duración de 33 minutos.

- S: (Te voy a hacer unas preguntas) (...(802)...), y yo te pregunto (803) de qué lado escoges [1: A(2,1)(3,2)B].
- I: Del lado A.
- S: Del lado A, ¿por qué?
- I: Porque hay más probabilidades acá de sacar negra.
- S: ¿Por qué?
- I: Porque existen dos en negro, y una blanca.
- S: ¿Y entonces?
- I: Existen más probabilidades.
- S: ¿Más que en el B?

- número de blancas que de negras.
- S: Ajá. ¿Y en la 6 [6: B(1,1)(2,1)A]?
- I: (Silencio de 5 segundos) Pues, el A, también.
- S: ¿Por qué? (815)
- I: Porque existe mayor número de negras y es menor el número de blancas, y acá en el B pues el número es igual.
- S: Ajá. ¿Y en la 7 [7: B(2,1)(3,4)A]?
- I: ¿En la 7? (Silencio de 8 segundos) En la 7 el B, ya que existe mayor número de negras que de blancas.
- S: Ajá. ¿Y en la 8 [8: A(2,1)(5,3)B]?
- I: (Silencio de 7 segundos) (816) En la 8 la A.
- S: ¿Por qué?
- I: Ya que existe... bueno, hay diferencia de tarjetas negras y blancas... y existiría la posibilidad de sacar el... de acertar mejor en el A que en el B.
- S: ¿Por qué, por qué diferencia? ¿cuál es la diferencia que ves?
- I: De que existe... o sea, aquí [8A] como no más existe una blanca en el A, y dos negras (817), o sea podría ser la posibilidad de que salga, y aquí en el B exist... o sea, sí hay mayor número de fichas también negras, pero también al igual manera la diferencia nada más es una.
- S: ¿Cómo, cuál, cómo...?
- I: O sea que... aquí ex... bueno, en el B existen cinco tarjetas negras, y tres blancas, o sea que hay mayor... o sea no es mucha la diferencia...
- S: ¿Ajá?
- I: ... entonces ahí yo le... yo diría que es el A, porque hay mayor posibilidad (818) de sacar la negra que en el B.
- S: Este... puedo estar de acuerdo, pero lo que no entiendo es cómo lo ves, ¿me explico? O sea cómo... tú hablas de diferencias pero no acabo de entender de qué diferencias hablas.
- I: De número de cifras, o sea de número de tarjetas, vaya. O sea, aquí existe una blanca y dos negras, aquí existen tres blancas y (819) cinco negras. O sea que yo digo que hay mayor posibilidad de sacarla en la A que en la B.
- S: OK, bueno... ¿Y en la 9 [9: A(1,1)(1,2)B]?
- I: ¿En la 9? (Silencio de 10 segundos) Mmh, pues... el A.
- S: Pero no te gusta mucho... ¿o qué? (820)
- I: En los dos hay... Podría existir los dos, ¿no? Pero no, se debe de escoger uno, ¿no?
- S: No, también se puede decir que da igual.
- I: ¿Sí?
- S: Sí.
- I: Ah, bueno, pues sí. O sea que da igual.
- S: ¿Da igual?
- I: Sí.
- S: ¿Y en la 10 [10: B(2,3)(3,4)A]?
- I: (Silencio de 6 segundos), Mmh, en la 10 en el B.
- S: ¿Por qué?
- I: Porque ya... porque en el A existe (821) mayor número de blancas y menor número de negras, y en el B no es mucha la diferencia, aunque sí es mayor el número de blancas que de negras.
- S: Ajá. ¿Y en la 11 [11: A(3,3)(4,4)B]?
- I: (Silencio de 11 segundos) En la 11 la A, ya que existen número igual de...

- nada más es una la diferencia.
- S: ¿Cómo, es una la diferencia?
- I: O sea, nada más... bueno, aquí [17A] existen tres negras y una blanca, o sea hay mayor posibilidad que en la B, porque aquí [17B] hay dos... dos blancas y cinco negras. O podría llamarse de igual manera, o sea podría ser cualquiera (829) también, pero en sí, escogería la A.
- S: OK. ¿Y en la 18 [18: B(1,2)(2,4)A]?
- I: (Silencio de 17 segundos) En la 18... Bueno, en tanto a tarjetas negras se refiere, podría ser el A, porque hay mayor número de tarjetas negras, pero también podría ser de igual manera, ya que existe mayor número de tarjetas blancas (830) en los dos, tanto A como B.
- S: Ajá, ¿y si yo te doy un millón de dólares, en cuál...?
- I: En el A.
- S: ¿En el A?
- I: Sí.
- S: También puedo decir que me da igual, cierro los ojos y en el que sea.
- I: Sí, por eso, me tiene que salir igual.
- S: ¿Es igual?
- I: Sí.
- S: Bueno. ¿Y el 19 [19: B(1,1)(1,2)A]?
- I: (Silencio de 2 segundos) También es igual, porque ya que existen tanto blancas como negras, o sea, aunque aquí [19A] hay mayor número de... (831) blancas, bueno las blancas son más... Pero en sí para meter la mano y sacar la tarjeta, yo la escogería en B.
- S: ¿En B? Bueno. ¿Y la 20 [20: A(2,1)(5,2)B]?
- I: (Silencio de 4 segundos) El... o sea.. de igual... o sea, podría ser... me da igual, ¿no? pero... escogería en la... en el B, ya que existe mayor número de negras y es menor el de blancas. Podría ser de igual manera, porque acá [20A] también existe mayor número de negras (832), y en blancas es muy menor el número.
- S: Ajá. ¿Entonces da igual?
- I: Sí.
- S: ¿Y en la 21 [21: B(2,2)(4,2)A]?
- I: (Silencio de 5 segundos) En la 21... también es igual, ya que existe... pues... mmh... bueno, es mejor, este... el A, entonces metería ahí la mano porque existe mayor número de negras que de blancas...
- S: Ajá.
- I: ... y en tanto que en B existe igual.
- S: Ajá. ¿Y en la 22 [22: A(1,2)(3,5)B] (833)?
- I: (Silencio de 10 segundos) Mmh... En la 22... pues... pues sería... me daría igual, escogería en cualquiera porque ya que existe mayor número de blancas y (...?) las posibilidades.
- S: Ajá. ¿Y en la 23 [23: B(2,0)(6,0)A]?
- I: (Silencio de 3 segundos) Pues igual, en cualquiera de las dos.
- S: ¿En cualquiera de las dos? (...)(834). A ver, se nos escapó la 13 [es otra versión de la 13, con el 13B en dos renglones: 13.1: A(3,1)(4,1)B].
- I: En la 13 también (...?) de igual manera, en cualquiera de las dos, porque ya que

- I: ... ajá...
- S: ... más más (risas)
- I: ... sí, hay más.
- S: ¿Y en el 32 [32: B(2,1)(4,2)A]?
- I: (Silencio de 4 segundos) En el 32... en el B, ya que existe mayor número de canicas... negras que blancas.
- S: ¿Y en el A?
- I: Y en el A también hay mayor número son negras que blancas, pero hay mayor posibilidad de... o de igual manera ¿se podría llamar también aquí?
- S: Sí.
- I: Sí, iguales, podría ser.
- S: ¿Por qué?
- I: Ya que en el A existe... menor número de canicas blancas (841) y mayor número de canicas negras, y en el B de... igual, existe menor número de canicas blancas y mayor número de canicas negras.
- S: Ajá.
- I: Sí, y existe la posibilidad en las dos de sacar la canica negra, ya que hay mayor número de canicas negras.
- S: Ajá. ¿Y en la 33 [33: A(1,4)(10,13)B]?
- I: (Silencio de 4 segundos) El... B, ya que existe mayor número... de canicas negras, aunque mayor es el número de canicas blancas... pero, sí... sí, existe mayor posibilidad de que salga una negra.
- S: ¿Por qué? (842)
- I: Porque hay más canicas negras tant... más canicas negras en el B que en el A.
- S: Ajá. OK. ¿Y en la 34 [34: B(3,2)(11,11)A]?
- I: (Silencio de 4 segundos) En la 34... el B... ya que existe mayor número de canicas negras, y en la A, tanto las canicas negras como las blancas son... son de... al mism... son iguales.
- S: Ajá. OK. ¿Y en la 35 [35: A(9,11)(6,23)B]?
- I: (Silencio de 4 segundos) En la 35...(843) este, el A, ya que existe mayor número de canicas... negras que en el B, aunque mayor sea las canicas blancas.
- S: Ajá. ¿Aunque mayor sean las canicas blancas?
- I: Aunque mayor sea el número de canicas blancas.
- S: OK... que... que... o sea, es más grande el 11 que el 9.
- I: Sí.
- S: OK. ¿Y en la 36 [36: B(12,12)(14,14)A]?
- I: (Silencio de 3 segundos) Sería igual, ya que existe número igual de... tanto canicas blancas como de negras (844)
- S: Ajá. Bueno, ahora son unas preguntas un poco distintas (...). [37: R(1,2)-A(1,3)-B(4,2)-C(3,4)-D(2,4)-E(2,1)-F(3,3)]. (845) (sigue un tratamiento de la pregunta 37 en la que luego resultó que el sujeto había comprendido mal el ejercicio) (848)
- S: El 38 es lo mismo [38: R(2,2)-A(2,3)-B(2,1)-C(1,1)-D(1,3)-E(4,4)-F(3,2)]. (849) (el sujeto comienza a resolver el ejercicio con la misma incomprensión) (850)
- S: O sea... digamos, si te digo: en ésta [38R] o en la A, cuál escoges? (851)
- I: Pues la de arriba [38R].
- S: ¿La de arriba?
- I: Ajá.
- S: ¿Y la B?
- I: La B.
- S: ¿Y la C?

que el de blancas. Y nomás serían ésas.

- S: OK. ¿Y en la 40 [40: R(7,14)-A(5,16)-B(9,14)-C(12,12)-D(7,18)-E(9,18)-F(11,18)]?
- I: (Silencio de 14 segundos)  
En la 40 existen el A, porque mayor es el número de canicas blancas que de negras, de igual manera el B (858), también el D, el E... el E también, y el F.

### BINOMIO W-Z

La entrevista con los sujetos W y Z, ambos de sexo masculino, tuvo una duración de 45 minutos.

- S: (...) (904) [1: A(2,1)(3,2)B]. Y yo les pregunto a ustedes de cuál lado escogen. No cuál, sino de qué lado escogerían...
- Z: De la A.
- S: ... sabiendo que pueden sacar UNA sola tarjeta de UN solo lado, y que si es negra se ganan mil millones de dólares (905). ¿Tú dices que de la A, Z?
- Z: Sí, de qué lado de las fichas, ¿no? ¿o de las figuras de acá?
- S: Es lo mismo,...
- Z: Ah, bueno.
- S: (...) (907)...
- W: Pues sería mejor el lado B, ¿no?
- S: ¿Tú dices que es del lado B?
- W: Sí.
- S: ¿Y tú?
- Z: Pues... sería para mí el lado A.
- S: ¿Para tí el lado A? ¿Qué bueno! Ahora convézanse.
- W: Sería el lado B porque sí hay que sacar una ficha

negra hay más posibilidades de sacar en el lado B, ¿no?

- S: ¿Por qué?
- W: Porque serían tres, hay tres (908)... fi..., tres posibilidades, y aquí [1A] nada más habría dos.
- S: ¿Y tú qué dices, Z?
- Z: Bueno pues yo diría que en el lado A hay más posibilidades porque sólo hay una ficha en blanco, y hay dos fichas negras, ¿no? Entonces hay más posibilidad de poder sacar la ficha negra.
- S: (A W) ¿Tú qué dices?
- W: Que pues también hay que... o sea, (909) pienso que a lo mejor es el mismo..., la misma posibilidad, porque aquí [1B] hay tres..., tres negras, dos blancas, aquí [1B] hay dos blancas, entonces hay un mismo... porcentaje de posibilidad, ¿no? Más o menos, mismo porcentaje. Pero... como que yo veo más porcentaje aquí [1B] de sacar la ficha negra.
- S: (A Z) ¿A tí no te convence?
- Z: No. No, porque, pues, por lo mismo que ya decía, ¿no?, que en el lado B (910) a mí se me dificultaría más saber cuál es la ficha negra, y en cambio en el lado A pues sí se me haría más fácil.
- S: Bueno, pues si no hay acuerdo, no hay acuerdo, pasamos a la siguiente. Este es el número 2 (911) [2: B(3,1)(3,4)A].
- (Silencio de 5 segundos)
- S: Igual, sería la misma pregunta: tienen chance de sacar UNA tarjeta de UN solo lado, si sale negra se ganan un premiote.
- Z: Ahora, este... se puede cambiar ahora, ¿no? O sea,



- la ficha negra (919) en el lado A.
- W: ... Ajá, sí... Es que podríamos decir que hay más... o sea, que lo la ficha que estamos buscando es la negra ¿no?, entonces habríamos de ver... que... dónde hay más fichas en todo caso.
- S: ¿Dónde hay más fichas...?
- W: Negras.
- S: Aquí [MC] está ... (920) A ver, ahí tienen su material. Tú (W) dices que el A, tú (Z) dices que el B [dándole a cada quien el juego correspondiente].
- Z: ¿Se revuelve?
- S: Pues no sé, ¡convéncelo! Yo te estoy dando algo que a lo mejor te ayuda para convencerlo, a lo mejor no, a lo mejor no sirve para nada. Igual a tí, te estoy dando que a lo mejor te ayuda para convencerlo.
- W: (...?)
- S: ¿Eh? Así, bien revueltitas, ¿y luego? (921)
- W: Pues sería, como hacer el experimento, ¿no?
- S: ¿A ver?
- Z: ¿Qué? Pues vas a sacar de aquí.
- W: No, tú vas a sacar la ficha de ahí.
- S: Da igual.
- Z: Para convencerte, o sea, te tengo que convencer yo a tí, entonces tú tienes que sacar la ficha y convencerme, y yo sacar la ficha de las tuyas.
- W: No, no sería así, porque yo lo que estoy diciendo es que en el lado B hay más probabilidad, entonces para convencerte yo sacaría la ficha de aquí
- Z: Tú ya estás convencido de tu probabili... de tu posibilidad.
- S: Da igual quién la saque, si están bien revueltas da igual (922), ¿no?
- Z: Entonces saco aquí y tú de allá.
- W: La ficha negra, ¿no?
- S: Ajá.
- W: ¿Cuál sería? Pues de tén marín. (risas)
- [W saca una blanca]
- W: No, no salió.
- S: (A Z). ¿Y a ver?
- [Z saca una blanca]
- S: Tampoco salió, ¿y ahora? Pero a ver, ¿eso quiere decir que así pasaría igual, siempre,...
- W: No...
- S: ... en todas las veces?
- Z: Pues no creo.
- W: Sería cosa del destino... No, no es cierto (risas) (923)
- S: ¿Cómo se pueden convencer? ¿Ahora quedaron convencidos al revés, porque les salieron blancas las dos? (risas)
- (Silencio de 8 segundos)
- S: Imaginense que tienen que trabajar en equipo. O sea que yo les digo: (924) ustedes dos se ponen de acuerdo, y tienen chance entre los dos de meter la mano UNA sola vez en UNO solo de los dos montones y sacar una ficha. Si es negra, entre los dos se ganan mil millones de dólares. Si les alcanza, ¿no?, entre los dos (risas).
- Z: Pues que viéramos todas las fichas... ah, no, ¿verdad?
- S: Sí las puedes ver, de hecho están aquí, lo que no puedes es saber cuál es cuál (925).
- (...)
- S: ¿Cómo le hacen? ¿Cómo le hacen ustedes dos para decidir de qué lado?

- W: Son menos fichas, la mayoría son negras, nada más una blanca, entonces son tres posibilidades entre una, ¿no?...  
 S: Ajá.  
 W: ... para sacarla... No me entendieron, o sea, ¿sí me entendieron?  
 S: Sí.  
 W: O sea, tenemos tres oportunidades y una... una que puede salir negativa, ¿no?  
 S: Ajá. (A Z:) ¿Y tú por qué dices que el A? (932)  
 Z: Porque hay más cantidad de fichas negras, sólo hay dos fichas blancas, entonces hay más oportunidad de poder sacar la ficha negra, porque hay más cantidad, hay seis... seis contra dos, podríamos decir.  
 W: Podríamos decir que eso, como dice que... que da igual, ¿no? (se ríe) Porque sería en un porcentaje la misma... probabilidad de que saquemos una blanca, porque allá [14A] se duplica la negra y se duplica la blanca, ésta [14A] es como dos fichas de ésta [14B].  
 S: Entonces tú dices que da igual (933).  
 W: Podría decir que sí.  
 S: (A Z:) ¿Y tú qué dices, te convence o no?  
 Z: Pues no, porque... sigo sosteniendo por lo que hay más fichas negras que blancas.  
 S: Ajá.  
 Z: Sí.  
 S: Aquí [14B] también hay más negras que blancas.  
 Z: Sí, pero... sí, también, pero es que aquí solo hay tres... contra uno, y en cambio acá [14B] hay seis contra dos, por eso digo que... [señala la 14A]
- S: OK. ¿Y en la 15 [15: A(2,1)(5,3)B]?  
 (Silencio de 3 segundos)  
 Z: El A.  
 W: El A (934).  
 S: ¿Y en la 16 [16: A(1,7)(4,4)]?  
 (Silencio de 2 segundos)  
 Z: El B.  
 W: También.  
 S: Esa está muy fácil, ¿verdad? ¿Y en la 17 [17: A(3,1)(5,2)B]?  
 (Silencio de 2 segundos)  
 Z: El A.  
 W: El A.  
 S: ¿Y en la 18 [18: B(1,2)(2,4)A]?  
 (Silencio de 18 segundos) (935)  
 Z: Este... Pues sería el A, ¿no? Aunque hay más cantidad de fichas, pero hay más posibilidad de sacar la... la negra porque hay dos fichas negras.  
 (Silencio de 4 segundos)  
 W: Yo, sería igual, cualquiera de las dos.  
 S: ¿Por qué?  
 W: Este... porque también pasa que se duplica la ficha, ¿no? Aquí en el caso A, ¿no? Hay dos blancas y una... (936) hay [18A] cuatro blancas, dos negras, acá [18B] hay dos blancas y una negra. Estaríamos en el mismo número de posibilidades.  
 S: ¿No te convence que aquí [18A] hay más negras?  
 W: Pero también hay más blancas (se ríe).  
 S: ¿Tú qué dices, Z?  
 Z: Es que también aquí [18B] hay más blancas.  
 W: Por eso sería... yo opino que sería lo mismo, cualquiera de las dos, que da igual.  
 Z: Sí, pero es que tienes que decidir una de las dos.  
 W: Sí se puede da igual, ¿no?

- diferencia (...) (942) [24:  
A(1,2)(3,5)B].
- Z: Pues para mí el lado B.
- S: El B.
- Z: Sí, porque hay tres canicas negras (943)... Entonces al meter la mano hay más posibilidad de... pues de sacar una de éstas. En cambio acá no más hay una.
- S: ¿Tú qué dices, W?
- W: El B.
- S: ¿El B? ¿Y en la 25 [25:  
B(3,3)(3,18)A]?  
(Silencio de 5 segundos)
- W: El B.
- Z: El B.
- S: ¿Y en la 26 [26:  
B(9,12)(15,12)A]?  
(Silencio de 4 segundos)
- W: El A.
- Z: El A.
- S: ¿Y en la 27 [27:  
A(1,1)(3,1)B]?  
Z: El B (944).
- W: Mmh.. Ajá.
- S: ¿Y en la 28 [28:  
A(8,14)(13,15)B]?  
(Silencio de 4 segundos)
- W: El B.
- Z: También.
- S: ¿Y en la 29 [29:  
B(1,4)(5,20)A]?  
(Silencio de 8 segundos)
- Z: El A.
- S: ¿W?
- W: El A.
- S: ¿No hay pleito? ¿Está muy aburrido esto...! (945) (risas) ¿Y en la 30 [30:  
A(2,1)(3,4)B]?  
(Silencio de 5 segundos)
- W: El A.
- Z: No, el B.
- W: Bueno, yo considero que el A, porque... hay dos canicas negras y una blanca, entonces, bueno, tengo dos posibilidades, y acá [30B] tenemos tres canicas negras y cuatro blancas, pero hay más cantidad de canicas, hay menos posibilidades, yo pienso.
- Z: Sí, está bien, tienes razón, es que yo me había confundido, yo había leído como 10 éste [30A]
- S: Ajá, sí, sí se confunde (946).
- Z: Entonces yo dije dos contra diez, entonces por eso, no había observado bien, entonces el A.
- S: El A. ¿Y en la 31 [31:  
A(19,3)(20,8)B]?  
(Silencio de 6 segundos)
- W: El A.
- Z: También, el A.
- S: ¿Y en la 32 [32:  
B(2,1)(4,2)A]?  
(Silencio de 5 segundos)
- Z: El B  
(Silencio de 7 segundos)
- W: El B.
- S: ¿El B? ¿Sí? ¿No hay discusión? ¿Por qué te quedaste pensando (947), W? Me da curiosidad.
- W: (Se ríe) Porque... bueno, me llamó la atención esto... La de... [32A] hay cuatro canicas negras, dos blancas y también había posibilidades, pero... definitivamente hay más acá [32B]
- S: ¿Y en la 33 [33:  
A(1,4)(10,13)B]?  
(Silencio de 3 segundos)
- Z: La B.
- W: También.
- S: ¿Y en la 34 [34:  
B(3,2)(11,11)A]?  
(Silencio de 5 segundos)
- W: La B  
(Silencio de 6 segundos)
- Z: Pues para mí el... el A (948).
- S: ¿Por qué?
- Z: Pues... bueno, aunque hay más cantidad de... fichas, digo, canicas, pero hay más cantidad de... canicas negras, entonces como que hay más... ¿es once y once?

(Silencio de 9 segundos)

Z: Sí, si está bien.

S: ¿Nada más la E?

Z: Nada más la E.

(Silencio de 7 segundos)

S: ¿Sí?

W: Ajá.

S: La 39 es lo mismo, nada más que regresamos a las bolsas de canicas (955) [39: R(2,1)-A(4,2)-B(3,2)-C(2,2)-D(3,1)-E(3,3)-F(1,2)]. Y aquí es más el... da más lugar a la confusión esa de las figuritas, ¿sí? Estas [39A] son dos blancas, y no veinte.

Z: Ajá.

(Silencio de 17 segundos)

W: Sería... la A, ¿no?

Z: La A...

S: ¿Es la única?

Z: La A y la F.

S: ¿La F?

Z: No... No, no es cierto, la F no (956). Bueno, nada más yo pienso... bueno, la A sí está bien.

(Silencio de 10 segundos)

W: Sí, nada más.

S: ¿Nada más? ¿Y la 40 [40: R(7,14)-A(5,16)-B(9,14)-C(12,12)-D(7,18)-E(9,18)-F(11,18)]? Igual a la anterior.

(Silencio de 13 segundos)

W: Sería la E.

(Silencio de 20 segundos)

(957)

Z: Pues para mí, ninguna.

S: Ninguna. (A W) A ver...

Z: ¿Me trata de convencer?

S: ... convéncelo de que la E sí.

W: Bueno, más o menos tomando... la posibilidad. Aquí, yo saqué una cuenta, no sé... Por ejemplo aquí sería siete por dos, a ver si estoy bien, ¿no?, catorce, nueve por dos dieciocho, ¿ajá? Es como yo más o menos saqué la

probabilidad, como que es un múltiplo la que está abajo... Eso fue lo que yo pienso que son... parecidos,... podríamos decir...

(Silencio de 6 segundos)

S: ¿Te convenció? (958)

Z: No.

S: ¿Ya es andarle buscando tres pies al gato?

W: Bueno, es que yo creo que... que sí, ¿no?... O sea, es... el mismo... o sea, aumento de... de canicas, ¿no?, o sea, hay una... como un porcentaje (se ríe) de posibilidades iguales... (Silencio de 12 segundos) Tomando en cuenta de que... es su doble, ¿no? Siete, catorce; nueve, dieciocho. Eso fue lo que yo tomé en cuenta, para poder decir que es la E.

Z: Sí (959).

S: Oye, ¿y si tuvieras... de un lado una y tres...? No, espérame... [MC] (... 960 ...) Si tuvieras así, o sea que en B tuvieras dos negras y cuatro blancas, y del lado A tres negras y seis blancas... [41: B(2,4)(3,6)A] ¿Sería lo mismo, o no?

(Silencio de 7 segundos)

W: De la perspectiva que lo dije con éste, pienso que sí, porque (961) es su doble, y su doble. Sería lo mismo.

S: O sea que tú dices que da igual. Porque fijate que en las otras, cuando decías que daba igual era porque estabas multiplicando... digamos del lado A al lado B, como aquí, como en la 18. Decías "se duplica", pero no estabas viendo la duplicación de negras a blancas dentro de A, sino de negras a negras, o sea

- W: Ajá, entonces...
- S: ... o sea que dentro de A hay el doble de negras que de blancas.
- Z: Ajá, sí.
- W: Y aquí [39R] podemos decir que hay el doble de negras que de blancas.
- S: Ajá, también.
- W: Hay dos posibilidades (966) entre una blanca, y acá [39A] posibilidades entre dos blancas, entonces podemos decir que hay un cierto número de... de posibilidades iguales, ¿no? (Silencio de 12 segundos)
- S: Sí, pero es que fíjate que lo puedes hacer... dos negras por dos, dan cuatro negras, una blanca por dos dan dos blancas. Pero también puedes hacer uno por dos, dos en la de referencia, y en la A dos por dos, cuatro. Pero aquí en el 18 también, tienes una negra por dos, dan dos blancas, y dos negras por dos dan cuatro blancas. ¿Ajá? (967) Yo te cuestioné... o sea, estás bien, estás pensando bien. También aquí en la 40 estás pensando bien. O sea, se vale multiplicar de uno al otro, y también se vale que encuentres la misma multiplicación en cada uno. ¿Ajá? Lo que se dice es que tienes la misma proporción en ambos casos. Entonces lo puedes ver así, o lo puedes ver así... Pero eso es lo que dice la teoría de la probabilidad...
- W: (se ríe)
- S: Lo que pasa es que yo no quería mencionarles el término probabilidad, pero eso es en lo que estoy trabajando. O sea (968), yo estoy trabajando en intuiciones de probabilidad. Entonces eso es lo que dice la teoría... la teoría de la probabilidad dice que efectivamente dan igual, en la 18, que en la 40 estas dos [40R y 40E] dan igual... Pero yo lo que ando averiguando es cuáles son las diferencias entre lo que dice la teoría y lo que le late a la gente. Por eso les dije que era de intuiciones...
- Z: Sí, pero... sí, pero aquí no me convencen, ¿eh?
- S: ¿No te convence?
- Z: Aunque sí, tal vez, este, la... la ley de la probabilidad diga así, que... este, se está duplicando, ¿no? (969), nueve por dos dieciocho, siete por dos catorce, pero... pero sí, este, sí hay más probabilidad para mí aquí [40E], porque son dos fichas... son dos canicas más que acá [40R].
- S: Ajá. Pero fíjate que son... también hay más blancas.
- Z: Hay más blancas.
- S: Ajá, hay cuatro blancas más.
- Z: Ajá, sí... pero es que... pero lo que... es que lo que... lo que me interesaría ahí sería la negra, que hay más cantidad de...
- W: Pero sí convéncete que hay más cantidad de blancas y más cantidad de negras. Bueno, como hay más cantidad de negras, hay más cantidad de blancas, mejor dicho.
- (...)
- S: Lo que pasa es que yo no quería mencionarles el término probabilidad, pero eso es en lo que estoy trabajando. O sea (968), yo estoy trabajando en intuiciones de

- blanca como en negra (1014).
- S: Ajá, ya, OK.
- X: Y aquí [5B] nada más tengo una probabilidad de que salga la negra.
- S: OK, claro. ¿Y en la 6 [6: B(1,1)(2,1)A]?
- X: (Silencio de 4 segundos) Ehhh.. pues la A.
- S: ¿Por qué?
- X: Tengo dos probabilidades a... a que salga la negra, o aquí... Bueno, vendría siendo casi lo mismo...
- S: ¿Por qué?
- X: Porque aquí [6B] o volteo ésta (1015), o volteo ésta, la negra. Y en A... o volteo una negra o una blanca, sería la misma probabilidad la A que la B.
- S: ¿Es lo mismo?
- X: Pues sí... O sea, en la A hay UNA probabilidad más de que voltee la negra, pero vendría siendo... (1016) muy parecida a la B.
- S: ¿Y si te vas a sacar un millón de dólares?
- X: La A.
- S: (risas) OK. ¿Y en el 7 [7: B(2,1)(3,4)A]?
- X: (Silencio de 2 segundos) En la B... Bueno aquí [7B] es más rápido que... que mi... (1017) probabilidad sea negra.
- S: ¿En la B?
- X: Ajá.
- S: ¿Cómo, más rápido?
- X: Pues más rápido en cuestión de... de elecciones, en tiempo es más rápido... o... y tengo más probabilidad de que salga negra.
- S: ¿Por qué?
- X: Porque... ahora sí que estoy dos a uno, tengo dos probabilidades de que salga negra, y una que no sea. En la A estoy a... (1018) a tres probabilidades de que sea negra y cuatro que no lo sea. Entonces mejor sería la B.
- S: Lo que no entiendo es qué quieres decir con más rápido.
- X: A más ráp... bueno, en tiempo... de... como son menos cartas, es hasta menos tiempo el que me tardaría en estar pensando qué carta escogería, ¿no? A eso es lo que digo de tiempo.
- S: OK (1019), bueno. ¿Y en la 8 [8: A(2,1)(5,3)B]?
- X: En la 8... (Silencio de 14 segundos) Pues la A.
- S: ¿La A?
- X: Ajá.
- S: ¿Por qué?
- X: Porque acá [8A] estoy a... dos probabilidades de que salga negra, y una que no lo sea. Y aquí [8B] estoy a cinco probabilidades de que sea negra, y a tres que no lo sea (1020). Pero ya hay tres probabilidades de que no lo sea... negra. Aquí [8A] nada más hay una (...?), una probabilidad de que no sea... negra.
- S: OK. ¿Y en la 9 [9: A(1,1)(1,2)B]?
- X: (Silencio de 4 segundos) En la A.
- S: ¿Por qué?
- X: Estoy a una probabilidad de que sí sea, acá [9B] estoy a dos probabilidades de que no sea... Bueno, sí... es que (1021), en la B es... No, sí, la A. Sí, porque acá [9B] estoy a dos de que no lo sea, aquí [9A] una que no lo sea.
- S: Ajá. ¿Qué pasó?, cuando dijiste bueno, en la B, ¿de repente se te antojó que podía ser mejor la B?
- X: No, que podía ser igual... Sí, sí podría ser... hablando de probabilidad de

- negras a una blanca. En la A, bueno, digamos de... sí, a cada tres le corresponde una blanca. Y en la B, igual, a cada tres... negras le corresponde una blanca. Entonces sería igual, para mí, el número de... de probabilidad.
- S: Entonces, ¿da igual? ¿te tiras un volado?
- X: Sí.
- S: Bueno. ¿Y en la 15 [15: A(2,1)(5,3)B]? (1031)
- X: (Silencio de 10 segundos) La A.
- S: ¿Por...?
- X: Porque hay más... a pesar de que en la B hay más tarjetas negras que en la A, también hay más tarjetas blancas en la B que en la A, en la A nada más hay una blanca. Entonces (1032)... sí, yo... escogería la A.
- S: Ajá... Mmh... a ver, déjame ver si te entiendo: (1033) [MC] tú dices (...) que en la A, porque son menos.
- X: Ajá, tengo dos probabilidades a una de que salga... de que salga negra. Y acá [15B] tengo cinco probabilidades que salga, pero a tres que salga blanca... O sea, aquí [15A] la diferencia es de... (1034) de una blanca.
- S: ¿De una blanca?
- X: De... de una menos, de una blanca menos. Y acá [15B] son de dos blancas menos... Pero... o sea, lo que pasa es que del lado B yo veo más tarjetas blancas, y a mí no me conviene que haya más tarjetas blancas.
- S: Ajá, bueno, ahora te voy a cambiar la situación. ¿Qué tal si agrego [MC] una negra en B [15.1: A(2,1)(6,3)B]? (1035)
- X: (Silencio de 5 segundos) Tengo más probabilidad en... tengo igual... no, tengo más probabilidad de que salga negra.
- S: ¿En dónde?
- X: En la B [15.1B].
- S: ¿En la B?
- X: Ajá. Bueno, y si está sin esa agregada, ¿en la A mejor?
- X: Ajá.
- S: OK. Bueno, pasamos a la 16 [16: A(1,7)(4,4)B].
- X: (Silencio de 13 segundos) (1036) La B.
- S: ¿Por... ?
- X: Porque en la A tengo muy poca probabilidad de que salga la negra, hay muchas blancas. En la B tengo igual de probabilidad de que salga o blanca o negra. Pero hay... un poco más de probabilidad de que salga la negra.
- S: Ajá. ¿Y en la 17 [17: A(3,1)(5,2)B]? (Silencio de 13 segundos) (1037)
- X: Pues A... A, porque tengo muy poca probabilidad de que salga la... la tarjeta, bueno la única blanca, y hay más opción que salga la negra.
- S: OK. ¿Y en la 18 [18: B(1,2)(2,4)A]? (1038) Pues podrían ser las dos. Me inclinaría más, práctico, por la B, porque... hay una diferencia de dos blancas a una negra, entonces en probabilidad... y en la A es dos negras a cuatro blancas... es muy parecida la probabilidad.
- S: ¿Muy parecida?
- X: Por... o sea, a... Aquí es... una es a dos [18B] lo que dos acá son a cuatro [18A] (1039).
- S: Ajá, ¿y eso es lo mismo, o parecido, o qué?

- tarjetas negras que quedan aparte de los dos paquetitos] más de que fuera negra... Entonces ya no sería igual... En la B tendría dos... aquí tendría dos oportunidades más, de que fuera negra.
- S: ¿Y cuál escogerías? (1047)
- X: La B.
- S: ¿La B? ¿Aunque aquí [20A] haya menos blancas?
- X: Ajá.
- S: OK. Oye, dijiste que ya no es igual, dime qué habría que hacerle a la B para tener igual que en A [MC].
- X: ¿Qué habría que hacerle a la B, para que fuera A?
- S: Ajá. Para que fuera igual a A. Es que dijiste:...
- X: Ah, no.
- S: ... primero dijiste ah, ya no es igual.
- X: No, así [20.2: A(2,1)(4,2)B].
- S: O sea, ¿dos paquetes iguales que los de A?
- X: Ajá.
- S: ¿Ahí es igual?
- X: (Silencio de 4 segundos) Sí, en probabilidad, sí.
- S: Si yo te digo que un volado, ¿te lo echas? (1048)
- X: (Silencio de 3 segundos) Sí.
- S: ¿Sí? Bueno, pasamos a la 21 [21: B(2,2)(4,2)A]. (Silencio de 9 segundos)
- X: Escogería el A.
- S: ¿Por qué?
- X: Porque... tienen el mismo número de blancas, los dos, sin embargo el A tiene más posible que sea... tiene más, eh, negras.
- S: OK. ¿La 22 [22: A(1,2)(3,5)B]?
- X: (Silencio de 17 segundos) (1049) A.
- S: ¿Por qué?
- X: Por el... por el número de tarjetas blancas. O sea, a pesar de que aquí también, en el B hay... hay más número de blancas, que el de negras, sin embargo el... o sea, no hay el mismo número de blancas que de negras, hay menos probabilidad en el B de que salga una negra que en el A, que nada más... o sea, la diferencia es de UNA para que sean iguales (1050), aquí en el B la diferencia es de dos para que sean la misma... posibilidad de que salga.
- S: Ajá, OK. ¿Y en la 23 [23: B(2,0)(6,0)A]?
- X: (Silencio de 7 segundos) La B... o la A. B, por tiempo, A... pues es que es lo mismo.
- S: ¿Es lo mismo?
- X: Sí.
- S: ¿Un volado?
- X: Bueno, no, acá en el A... Es que es lo m... sí, sí es lo mismo.
- S: Un volado.
- X: ... Sí.
- S: Sí, pero no, pero sí, pero no... (risas). ¿Y ahora? Se me cuatrapeó ésta: la 13 [Segunda versión de la 13, con todas en el mismo renglón: 13.1: A(3,1)(4,1)B] (1051).
- X: (Silencio de 20 segundos) La B.
- S: ¿Por qué?
- X: Porque hay más tarjetas negras, a una blanca.
- S: Perfecto. Ahora, mira. Las preguntas de ahora son muy parecidas (...). (1052) [24: A(1,2)(3,5)B] ¿Cuál escoges?
- X: (Silencio de 13 segundos) En la A... (1053) ¿Por qué? Por la diferencia de tarjetas blancas que haya... bueno, que hay... En la... en la A, es por una difer... por una



- S: ¿Trece?  
 X: (Silencio de 5 segundos) La B.
- S: ¿Catorce?  
 X: (Silencio de 7 segundos) (1060) La B.
- S: ¿Quince?  
 X: (Silencio de 2 segundos) La B.
- S: ¿Dieciseis?  
 X: (Silencio de 6 segundos) Ahí ya la pensaría más.
- S: ¿Ahí ya la pensarías?  
 X: No, no, no: la B.
- S: La B. ¿Y si tengo diecisiete?  
 X: (Silencio de 2 segundos) La B.
- S: ¿Dieciocho?  
 X: (Silencio de 16 segundos) Mmh... No, la B.
- S: ¿Diecinueve [29.3: B(1,4)(19,20)A]?  
 X: La B.
- S: ¿Veinte [29.4: B(1,4)(20,20)A]?  
 X: La B.
- S: ¿Si tengo veinte y veinte?  
 X: Es que son DEMASIADAS canicas (1061)... para... o sea, sí hay probabilidad, es más..., o sea no sé si aquí se... es porque sean veinte a... o sea, por algo son veinte canicas blancas y cinco canicas negras [29 = 29.5: B(1,4)(5,20)A].
- S: Ajá, como está originalmente planteado. No tengo los dibujitos de todo lo que te dicho, pero...
- X: Ajá, sí, sí. Pero... o sea, eehh..., no sé, si me pongo a hacer así como... multiplicaciones, divisiones y restas..., podría sacar una igualdad, ¿no?... o sea veinte es a cinco lo que... bueno, veinticinco es a cinco lo que cinco es a uno (1062)... pero yo habl... o sea, de rapidez, de, de... de como está planteado aquí, es más fácil que salga acá [29.5B] la negra que acá [29.5A].
- S: Ajá. ¿Y si tengo veintiún negras y veinte blancas en la A [29.6: B(1,4)(21,20)A]?  
 X: (Silencio de 7 segundos) Habría una posibilidad más de que fuera... saliera negra, acá [29.6A].
- S: Entonces ya te irías a la A ¿o no? (Silencio de 3 segundos). Imagínate, imagínate: una bolsa llena de canicas, que tiene veintiuna negras y veinte blancas, lado A. Y el lado B tiene poquitas canicas: tiene cuatro blancas y una negra (1063).
- X: No, pues ya sería diferente. Acá ya tengo tres... o sea, puestas así, es tres... ora sí que tres malas a una buena. Acá [29.6A] son... qué será... eehh... no sé, cuatro buenas a... no, no cuatro buenas... mmhh..., bueno, como a siete buenas a catorce malas..., tendría acá [29.6A]... (1064) Pero en sí, est...
- S: ... Para el millón de dólares te sigues yendo a B. ¿Qué méritos tiene que hacer A...? ¿Cuántas canicas negras le tengo que echar a A para...?
- X: Por lo menos unas cuarenta... negras [29.7: B(1,4)(40,20)A].
- S: (risas) ¿Cuarenta negras y veinte blancas, ya le das chance a A?  
 X: Igual (se ríe).
- S: (se ríe) Bueno, está bueno. ¿La 30 [30: A(2,1)(3,4)B]?  
 X: La 30... (Silencio de 13 segundos). Pues la A. A, porque aquí tengo... dos canicas negras (1065) a una probabilidad de que me

- X: Por... mayor número de... canicas negras.
- S: ¿Que blancas, o qué?
- X: Ajá, mayor número..., ajá.
- S: OK. La 35 [35: A(9,11)(6,23)B].
- X: (Silencio de 13 segundos) La A... A...
- S: ¿Por qué?
- X: (Silencio de 6 segundos) Por... que hay muy poca diferencia en... de canicas negras hacia las blancas... nada más es por dos canicas la diferencia..., la probabilidad que habría de que saliera... blanc... negra... Y acá son... (1071) ¿qué?... veintitres a seis, diecisiete canicas blancas a negras.
- S: Ajá. ¿Y la 36 [36: B(12,12)(14,14)A]?
- X: (Silencio de 7 segundos) Nada más por número de cantidades menor, la B, porque son iguales.
- S: ¿Cómo, cómo, cómo?
- X: O sea, la B... Yo escojo la B. En probabilidades están las dos al m... al... a igual probabilidad de que salga, pero en cantidades es mejor la... la B.
- S: La B, bueno. Ahora, mira. Esta es una pregunta... regresamos a las tarjetas y la forma de la pregunta es distinta (1072) (...). [37: R(1,2)-A(1,3)-B(4,2)-C(3,4)-D(2,4)-E(2,1)-F(3,3)]
- X: ¿Con respecto a ésta [37R], nada más?
- S: Con respecto a ésta, sí.
- X: (Silencio de 9 segundos) Mmhh... Bueno, da igual, ésta [37D] (1073).
- S: ¿Por qué?
- X: Por lo que expliqué hace rato. O sea... en cantidad son diferentes, la probabilidad, pero en sí..., aquí estamos hablando de... cuatro tarjetas a dos, y en la referencia es dos tarjetas a una negra... El, o sea... nada más es así, ¿no?, ¿en esta referencia? O sea, dos blancas a una negra, ¿cómo sería igual?
- S: Ajá.
- X: Mmhh... (Silencio de 16 segundos) Según yo, ya.
- S: ¿Ya?
- X: Ya... (1074)
- S: (Silencio de 7 segundos) OK. ¿Sería la única con la que te tirarías un volado?
- X: Nnn... nnno... Bueno, es que estaba también viendo la C... eehh... en referencia de... o sea, de... aquí [37R] estamos dos tarjetas a una negra, aquí [37C] están cuatro tarjetas a tres.
- S: Ajá.
- X: O sea, también la C... eehh... (...)
- S: (1100) O sea, más bien, ¿por qué sí y por qué no?
- X: ¿Por qué sí? Por aquí la diferencia... o sea estoy sacando, eeh... por la diferencia de UNA tarjeta (1101) que hay, y aquí también se podría hablar de UNA diferencia de UNA tarjeta que hay... Sí, para que la referencia esté igual a las tarjetas blancas son dos negras a dos blancas, acá en el C serían cuatro negras a cuatro blancas.
- S: Ajá, a los dos les hace falta una negra.
- X: Ajá, exactamente (1102).
- S: OK, ya entendí por qué sí. Ahora, ¿por qué no?
- X: Pues porque tenía esa duda.
- S: Entonces, ¿sí? ¿Te juegas un volado entre la de arriba y la C?

E(9,18)-F(11,18)]. ¿Da  
igual?

X: (Silencio de 13 segundos)  
(1118) Mmh... no, por el  
número de canicas...  
blancas, escogería [señala  
la 40.9R].

## ANEXO 5 : RESPUESTAS E INTERPRETACIONES

En este anexo se presentan todas las respuestas de los sujetos a las preguntas planteadas, así como el uso que se les ha dado con fines de interpretación y análisis.

El orden de presentación es por cuestionarios (C1, C2, C3, C4, C6); dentro de cada cuestionario aparecen las claves de los sujetos por orden alfabético.

Para cada respuesta se proporciona la siguiente información:

- el número de la pregunta en el cuestionario:
  - cuando la pregunta originó variantes, éstas se señalan con un punto y el número de la variante (1);
  - cuando hubo varias respuestas a una misma pregunta, éstas se señalan con una diagonal y el número de respuesta;
  
- entre corchetes:
  - el planteamiento del arreglo con la convención usual
$$S1, S2 = (f_1, d_1)(f_2, d_2);$$
dos puntos;
  - la elección del sujeto, representada por:
    - S1 si la elección del sujeto fue "el lado (en que está el espacio muestral) S1",
    - S2 si la elección del sujeto fue "el lado (en que está el espacio muestral) S2",
    - n si la elección del sujeto fue "ninguno de los dos lados (espacios muestrales)",
    - = si la elección del sujeto fue "da igual";
  
- en letras cursivas, la justificación dada por el sujeto, con las siguientes sustituciones (2):
  - en el caso de las entrevistas se extrajeron las expresiones más significativas para cada pregunta;
  - los casos favorables se representan por "negras" y los desfavorables por "blancas";

1. Con la excepción de la pregunta 13.1 del cuestionario C6, que fue planteada a algunos sujetos después de la pregunta 23, todas las variantes siguen a la pregunta que originó su planteamiento.

2. El procedimiento para homogeneizar el formato de las respuestas está explicado en el §apartado §-----.

CUESTIONARIO C1

SUJETO AGU CUESTIONARIO C1

- 1[(0,2)(0,3):n] no existe ninguna negra en las cinco cartas ({F=})
- 2[(2,2)(4,4):S2] existe mayor probabilidad ya que hay cuatro negras ({F+})
- 3[(0,2)(2,2):S2] allá no existía ninguna negra y acá sí ({F+})
- 4[(1,0)(1,1):S1] sólo existe una carta y es negra, en cambio allá hay menor posibilidad ya que existe una negra y otra ({D-})
- 5[(0,2)(1,1):S2] sólo existe una carta y es negra en cambio en S1 hay menos posibilidad ya que existían una negra y otra blanca (CAN: vio mal)
- 6[(1,1)(2,0):S2] las dos cartas eran negras ({D-})
- 7[(1,1)(1,1):=] hay igual posibilidad ya que en las dos existía una negra solamente ({F=})
- 8[(1,2)(2,4):S1] S1 había una negra en dos cartas y en S2 había dos negras en ocho cartas por lo tanto hay menor posibilidad (CAN: vio mal)
- 9[(1,3)(2,2):S2] había igual número de cartas pero aquí había dos negras ({F+ \* N=})
- 10[(1,1)(1,2):S1] en las dos había una sola negra pero aquí había menos cartas ({N- \* F=})
- 11[(1,1)(2,1):S2] aquí había dos negras en tres cartas, allá una y una, si fuese cuatro cartas aquí sería igual ({P+})

- 12[(2,0)(4,0):=] en ambas todas las cartas eran negras ({D=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] allí no había ninguna negra, y aquí había dos negras ({F+})
- 14[(2,2)(4,2):=] en ambas sólo existía una carta blanca (CAN: vio mal)
- 15[(2,1)(3,1):=] en ambas sólo hay una blanca ({D=})
- 16[(2,1)(3,2):S1] hay mayor número de negras por número de cartas comparando con las de allá ({P+})

SUJETO ALE CUESTIONARIO C1

- 1[(0,2)(0,3):n] en ningún lado hay negras ({F=})
- 2[(2,2)(4,4):=] en los dos conjuntos la mitad son negras y la otra mitad no. Entonces hay la misma probabilidad de sacar una negra ({P=})
- 3[(0,2)(2,2):S2] aquí sí hay negras y allá no ({F+})
- 4[(1,0)(1,1):S1] aquí únicamente hay una negra, y allá hay varias blancas y una negra. Por lo tanto es más fácil sacar una negra de acá ({D-})
- 5[(0,2)(1,1):S2] aquí de dos cartas una es negra, mientras que allá no hay negra ({F+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] de dos cartas acá hay dos negras, mientras que allá de dos cartas hay una negra ({F+ \* N=})
- 7[(1,1)(1,1):=] de dos cartas que hay en ambos conjuntos una es negra. Hay la misma probabilidad de sacar una negra de los dos conjuntos ({F= & N=})

- 6[(1,1)(2,0):S2] hay dos negras y allá sólo hay una ({F+})
- 7[(1,1)(1,1):=] hay la misma cantidad de negras ({F=})
- 8[(1,2)(2,4):S1] la cantidad de cartas es mínima que allá ({N-})
- 9[(1,3)(2,2):S2] hay mayor cantidad de negras ({F+})
- 10[(1,1)(1,2):S1] sólo son dos alternativas y allá hay tres ({N-})
- 11[(1,1)(2,1):=] tienen la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 12[(2,0)(4,0):=] tienen la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 13[(0,2)(2,0):S2] sólo hay dos negras y la probabilidad es 100% de sacarla ({P+})
- 14[(2,2)(4,2):=] la probabilidad es proporcional (CAN: ¿vio mal?)
- 15[(2,1)(3,1):S2] hay mayor probabilidad (S/I: sin argumento)
- 16[(2,1)(3,2):=] la probabilidad es proporcional (S/I: sin argumento)

**SUJETO ART            CUESTIONARIO C1**

- 17[(2,1)(3,1):S2] tiene mayor probabilidad (S/I: sin argumento)
- 18[(2,2)(4,4):=] (S/I: sin justificación)
- 19[(0,2)(2,0):S2] es un evento seguro ({P+})
- 20[(1,0)(1,1):S1] es un evento seguro ({P+})
- 21[(1,1)(2,1):S2] (S/I: sin justificación)
- 22[(1,1)(2,0):S2] es un evento seguro ({P+})
- 23[(1,3)(2,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 24[(1,2)(2,4):=] (S/I: sin justificación)
- 25[(2,1)(3,2):S1] (S/I: sin justificación)

- 26[(0,2)(0,3):n] no tienen ninguna opción de acierto ({F=})
- 27[(2,2)(4,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 28[(0,2)(2,2):S2] tienen el elemento que se busca ({F+})
- 29[(2,0)(4,0):=] son eventos seguros ({P=})
- 30[(0,2)(1,1):S2] hay el elemento y una probabilidad de 1/2 ({P+})
- 31[(1,1)(1,2):S1] (S/I: sin justificación)
- 32[(1,1)(1,1):=] los dos eventos son iguales y existe la misma probabilidad de acierto ({F= & D=})

**SUJETO BEA            CUESTIONARIO C1**

- 1[(0,2)(0,3):n] no hay negras ({F=})
- 2[(2,2)(4,4):S2] hay más negras y por lo tanto hay más probabilidad de sacar una negra con cuatro oportunidades ({F+})
- 3[(0,2)(2,2):S2] hay tres oportunidades de que en la primera ocasión se saque una negra (CAN: vio mal)
- 4[(1,0)(1,1):S1] hay una sola y única ocasión de sacar la negra a la primera ocasión ({D-})
- 5[(0,2)(1,1):S2] existen dos cartas pero una de ellas puede ser que salga la negra ({F+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] las dos son negras y en cualquier oportunidad puede salir una negra ({D-})
- 7[(1,1)(1,1):=] hay la misma probabilidad de poder sacar la negra ({F=})
- 8[(1,2)(2,4):S1] son menos cartas y puede haber un mayor índice de sacar una negra ({N-})
- 9[(1,3)(2,2):=] hay diferente número de cartas en ambos

- 9[(1,3)(2,2):S2] está en la proporción de 2,1 ({P+})  
 10[(1,1)(1,2):S1] de dos había una negra (S/I: descripción)  
 11[(1,1)(2,1):S2] de tres cartas hay dos negras (S/I: descripción)  
 12[(2,0)(4,0):S1] menos cartas y certeza de que son negras ({N- \* P=})  
 13[(0,2)(2,0):S2] de dos hay dos negras ({D-})  
 14[(2,2)(4,2):S2] más negras proporcionalmente (CAN: ¿vio mal?)  
 15[(2,1)(3,1):S2] observé tres negras de cuatro, contra dos de cuatro (CAN: vio mal)  
 16[(2,1)(3,2):S1] proporcionalmente más posibilidades (S/I: sin argumento)  
 18[(2,2)(4,4):=] tienen misma probabilidad (S/I: sin argumento)  
 19[(0,2)(2,0):S2] dos oportunidades de dos ({D-})  
 20[(1,0)(1,1):S1] (S/I: sin justificación)  
 21[(1,1)(2,1):S2] (S/I: sin justificación)  
 22[(1,1)(2,0):S2] (S/I: sin justificación)  
 23[(1,3)(2,2):S2] existen dos oportunidades de cuatro (S/I: descripción)  
 24[(1,2)(2,4):=] mismas posibilidades (S/I: sin argumento)  
 25[(2,1)(3,2):S1] (S/I: sin justificación)  
 26[(0,2)(0,3):n] inexistencia de negras ({F=})  
 27[(2,2)(4,2):S2] cuatro oportunidades de seis (S/I: descripción)  
 28[(0,2)(2,2):S2] allá carece de negras ({F+})  
 29[(2,0)(4,0):=] da lo mismo (S/I: sin argumento)  
 30[(0,2)(1,1):S2] al menos hay una posibilidad de dos ({F+})

- 31[(1,1)(1,2):S1] hay más posibilidad porque su relación es una de dos (S/I: descripción)  
 32[(1,1)(1,1):=] mismas posibilidades (S/I: sin argumento)

SUJETO CAR CUESTIONARIO C1

- 1[(0,2)(0,3):n] no hay ninguna negra ({F=})  
 2[(2,2)(4,4):S1] sólo hay dos posibilidades de fallar ({D-})  
 3[(0,2)(2,2):S2] hay posibilidades porque hay dos negras y allá no ({F+})  
 4[(1,0)(1,1):S1] hay una sola negra y no hay otra oportunidad de sacar otra carta ({D-})  
 5[(0,2)(1,1):S2] allá no hay ninguna negra, no hay posibilidades ({F+})  
 6[(1,1)(2,0):S2] no hay posibilidad de perder porque las dos son negras ({D-})  
 7[(1,1)(1,1):=] en los dos existe la misma probabilidad de sacar una negra (S/I: sin argumento)  
 8[(1,2)(2,4):S1] hay menos posibilidad de fallar, puesto que sólo hay tres cartas de las cuales una es negra ({N-})  
 9[(1,3)(2,2):S2] hay dos negras en cuatro cartas, hay más probabilidad, en cambio allá sólo hay una negra en cuatro cartas ({F+ \* N=})  
 10[(1,1)(1,2):S1] sólo hay una posibilidad de fallar ({D-})  
 11[(1,1)(2,1):=] en los dos existe la misma posibilidad de fallar en una carta ({D=})  
 12[(2,0)(4,0):=] en los dos lados las cartas son negras y no hay posibilidad de fallar ({D=})

- probabilidad 4/4 y 2/2  
({P=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] la probabilidad 2/2 y allá la probabilidad 0/2 ({P+})
- 14[(2,2)(4,2):S2] allá hay dos negras de cuatro cartas, aquí hay cuatro negras de seis cartas: aquí porque hay mayor negras o sea su probabilidad 4/6 ({P+})
- 15[(2,1)(3,1):S1] la probabilidad 2/3 ({P'})
- 16[(2,1)(3,2):=] en S1 la probabilidad es 2/3, aunque también en S2 hay la misma probabilidad 3/5 ({P'})
- 17[(2,1)(3,1):S2] 3/4 ({P+})
- 18[(2,2)(4,4):S1] 2/4 ({P'})
- 19[(0,2)(2,0):S2] solamente hay negras ({D-})
- 20[(1,0)(1,1):S1] la probabilidad 1/1 = 1 ({P+})
- 21[(1,1)(2,1):S2] P = 2/3 ({P+})
- 22[(1,1)(2,0):S2] la probabilidad solamente hay cartas (negras) también en S1 ({D-})
- 23[(1,3)(2,2):S2] la probabilidad de que salga negra 2/4 ({P+})
- 24[(1,2)(2,4):S1] son menos cartas y la probabilidad de que salga negra 1/3 ({N-})
- 25[(2,1)(3,2):S1] la probabilidad 2/3 ({P+})
- 26[(0,2)(0,3):n] la probabilidad es la misma de que salga cualquiera de las cartas (S/I: sin argumento)
- 27[(2,2)(4,2):S1] la probabilidad 2/4 ({P'})
- 28[(0,2)(2,2):S1] la probabilidad de que salga 7/2 y 3/2 (sic: los numeradores son la representación de las barajas) (CAN: incomprensión; acomodo)
- 29[(2,0)(4,0):=] S1 y S2 tienen solamente negras ({D=})

- 30[(0,2)(1,1):=] su probabilidad es la misma de que salga 8/2 2/2 ó 6/2: A/2 (sic: los numeradores son la representación de las barajas) (CAN: incomprensión; acomodo)
- 31[(1,1)(1,2):S1] el número de cartas son dos y la probabilidad A/2 u 8/2 (sic: los numeradores son la representación de las barajas) (CAN: incomprensión; acomodo)
- 32[(1,1)(1,1):=] tienen el mismo número de cartas entonces la probabilidad es A/2 o 5/2 o en el caso contrario J/2 o A/2 (sic: los numeradores son la representación de las barajas) (CAN: incomprensión; acomodo)

SUJETO EDI CUESTIONARIO C1

- 4[(1,0)(1,1):=] en ambos hay una negra ({F=})
- 5[(0,2)(1,1):S2] hay más probabilidad porque allá sólo hay blancas ({F+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] hay más en sí las dos son negras ({F+ & D-})
- 7[(1,1)(1,1):=] en ambas hay la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 8[(1,2)(2,4):=] a pesar de que en S2 hay dos negras hay más cartas y es la misma probabilidad que en S1 porque hay uno pero son menos cartas ({N- & F+})
- 9[(1,3)(2,2):=] hay la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 10[(1,1)(1,2):=] se puede agarrar de S1 la equivocada y tal vez en S2 se tenga suerte y se tome la correcta (S/I: sin argumento; atracción)



**SUJETO FAT CUESTIONARIO C1**

- 5[(0,2)(1,1):S2] sólo hay una negra aquí ({F+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] aquí hay una negra ({F+})
- 7[(1,1)(1,1):S2] hay una negra (S/I: descripción)
- 8[(1,2)(2,4):=] en los dos hay (S/I: descripción)
- 9[(1,3)(2,2):S2] hay dos negras, una misma proporción de probabilidad. 4-2 (sic) ({E<})
- 10[(1,1)(1,2):S2] hay dos negras y en S1 hay una (CAN: vio mal)
- 11[(1,1)(2,1):=] existe la misma probabilidad 3-2 (S/I: descripción)
- 12[(2,0)(4,0):=] existe probabilidad de negras= 4-2 (sic) (S/I: descripción)
- 13[(0,2)(2,0):=] existe probabilidad de negras 50% 2-2 (sic) (CAN: incomprensión; juntó lados)
- 14[(2,2)(4,2):=] existe probabilidad de negras 2-3 (sic) (CAN: vio mal)
- 15[(2,1)(3,1):=] existen negras = 3-2 3-4 (sic) (S/I: descripción)
- 16[(2,1)(3,2):=] existen negras 40% 3-5 2-3 (sic) (S/I: descripción)

- 5[(0,2)(1,1):S2] hay dos cartas la cual una es negra ({F+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] ambas son negras ({D-})
- 7[(1,1)(1,1):=] hay las mismas probabilidades (S/I: sin argumento)
- 8[(1,2)(2,4):=] hay las mismas probabilidades (S/I: sin argumento)
- 9[(1,3)(2,2):=] hay las mismas probabilidades (S/I: sin argumento)
- 10[(1,1)(1,2):S1] hay dos cartas y una de ellas es negra ({N-})
- 11[(1,1)(2,1):=] hay las mismas probabilidades (S/I: sin argumento)
- 12[(2,0)(4,0):=] todas las cartas son negras, por eso donde quiera que escoja saldrá una negra ({D-})
- 13[(0,2)(2,0):S2] ambas cartas son negras ({D-})
- 14[(2,2)(4,2):=] aunque en unas hay más que en otras, tienen la misma proporción en cuanto a probabilidades (CAN: ¿vio mal?)
- 15[(2,1)(3,1):S2] hay mayor probabilidad (S/I: sin argumento)
- 16[(2,1)(3,2):S1] hay tres cartas de las cuales dos son negras ({N-})

**SUJETO FAU CUESTIONARIO C1**

- 1[(0,2)(0,3):n] no hay ninguna negra ({F=})
- 2[(2,2)(4,4):S1] hay más probabilidades ya que son cuatro cartas y dos de ellas son negras ({N-})
- 3[(0,2)(2,2):S2] hay cuatro cartas de las cuales dos son negras ({F+})
- 4[(1,0)(1,1):S1] es sólo una carta, la cual es negra por lo tanto siempre saldrá una negra ({D-})

**SUJETO GAB CUESTIONARIO C1**

- 1[(0,2)(0,3):n] no hay ninguna negra 0% probabilidad ({F= & P=})
- 2[(2,2)(4,4):=] hay un 50% de probabilidad ({P=})
- 3[(0,2)(2,2):S2] hay un 50% de probabilidad ({P+})
- 4[(1,0)(1,1):S1] hay un 100% porque está sola ({P+})
- 5[(0,2)(1,1):S2] es un 50% ({P+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] hay dos negras y hay un 50% ({F+})

- 10[(1,1)(1,2):S1] de dos cartas hay una negra (S/I: descripción)
- 11[(1,1)(2,1):S2] de tres cartas hay dos negras es muy poco probable fallar ({E>})
- 12[(2,0)(4,0):S2] S1, porque no podría fallar si las cuatro cartas son negras (sic: invirtió los lados) ({N+ \* D=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] sólo hay dos negras ({D-})
- 14[(2,2)(4,2):S1] S2, porque hay dos cartas negras para escoger de cuatro (sic: invirtió los lados) (S/I: descripción)
- 15[(2,1)(3,1):S2] de cuatro cartas sólo puedo fallar una vez ({N+ \* D=})
- 16[(2,1)(3,2):S1] de tres cartas hay dos negras (S/I: descripción)

- 11[(1,1)(2,1):S2] hay más probabilidad de que saque una negra ya que hay dos y las cartas son tres ({F+})
- 12[(2,0)(4,0):=] en las dos hay puras negras ({D=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] hay un 100% de que saque una negra ({P+})
- 14[(2,2)(4,2):=] hay el mismo número de negras (CAN: vio mal)
- 15[(2,1)(3,1):=] hay igual número de negras (CAN: vio mal)
- 16[(2,1)(3,2):S1] hay más probabilidad de que saque negra debido al número de cartas ({N-})
- 17[(2,1)(3,1):S2] hay más probabilidad de que saque una negra (S/I: sin argumento)
- 18[(2,2)(4,4):S1] con menos cartas se saca una negra más rápido ({N-})
- 19[(0,2)(2,0):S2] allá no hay negras ({F+})
- 20[(1,0)(1,1):S1] hay un 100% de que salga negra ({P+})
- 21[(1,1)(2,1):S2] hay más negras que en las de allá ({F+})
- 22[(1,1)(2,0):S2] se tiene ya seguro y garantizado que salga una negra ({D-})
- 23[(1,3)(2,2):S2] hay un 50% de que salga y un 50% de que no salga ({E<})
- 24[(1,2)(2,4):S1] hay más rapidez para saber si sale o no una negra porque hay menos cartas ({N-})
- 25[(2,1)(3,2):S2] hay más probabilidad de que salga una negra (S/I: sin argumento)
- 26[(0,2)(0,3):n] no hay ninguna negra ({F=})
- 27[(2,2)(4,2):S2] hay más negras ({F+})
- 28[(0,2)(2,2):S2] en las de allá no hay ninguna negra ({F+})

**SUJETO GUA            CUESTIONARIO C1**

- 1[(0,2)(0,3):n] no veo ninguna negra ({F=})
- 2[(2,2)(4,4):S2] hay más negras y hay más probabilidad de que saque una negra ({F+})
- 3[(0,2)(2,2):S2] sí hay negras ({F+})
- 4[(1,0)(1,1):S1] es la única que hay ({D-})
- 5[(0,2)(1,1):S2] allá no hay ninguna negra ({F+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] las dos son negras ({D-})
- 7[(1,1)(1,1):=] nada más hay una negra en cada una ({F=})
- 8[(1,2)(2,4):S1] hay menos cartas y puede haber la posibilidad de que saque una negra ({N-})
- 9[(1,3)(2,2):S2] hay más negras ({F+})
- 10[(1,1)(1,2):S1] hay pocas cartas y más probabilidad de que saque una negra ({N-})

- 29[(2,0)(4,0):=] en cualquiera se saca una negra sin tener que pensar si tiene mayor o menor probabilidad ({D=})
- 30[(0,2)(1,1):S2] por sólo tener la negra ({F+})
- 31[(1,1)(1,2):S1] se tiene una probabilidad de uno a uno para sacar la negra ({E<})
- 32[(1,1)(1,1):=] existe la misma probabilidad de que salga negra en los dos (S/I: sin argumento)
- SUJETO JAM CUESTIONARIO C1**
- 1[(0,2)(0,3):n] se quedó en las barajas que están en la mesa ({F=})
- 2[(2,2)(4,4):S2] hay tres negras en S2 y dos negras en S1, en S2 tengo tres posibilidades (CAN: vio mal)
- 3[(0,2)(2,2):S2] hay dos negras y allá no hay ninguna ({F+})
- 4[(1,0)(1,1):S1] es seguro que voy a tomar una negra, es 100% probable y allá 50% ({P+})
- 5[(0,2)(1,1):S2] hay 50% de probabilidad y 0 (cero) probabilidad allá ({P+})
- 6[(1,1)(2,0):S2] 100% de probabilidad y allá 50% ({P+})
- 7[(1,1)(1,1):=] 50% de probabilidad en las dos ({P=})
- 8[(1,2)(2,4):=] 50% igual ({P'})
- 9[(1,3)(2,2):=] 50% igual ({P'})
- 10[(1,1)(1,2):S1] 50% de probabilidad, allá en las tres cartas hay una negra y aquí en las dos cartas hay una negra ({N- \* F=})
- 11[(1,1)(2,1):S2] en las tres de aquí hay dos negras y en las dos de ahí hay una. Escojo éstas porque tengo 75% de probabilidad de sacar la negra ({P'})
- 12[(2,0)(4,0):=] en S2 cuatro negras de cuatro, en S1 dos de dos ({P=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] 100% de probabilidad de sacar negra ({P+})
- 14[(2,2)(4,2):=] en ambos casos tengo el 50% de probabilidad de sacar negra (CAN: vio mal)
- 15[(2,1)(3,1):S2] 75% de probabilidad de sacar negra ({P'})
- 16[(2,1)(3,2):S1] allá tres negras de cinco cartas, acá de tres cartas hay dos negras, aquí tengo > (sic) probabilidad de sacar negra ({P=})
- 17[(2,1)(3,1):S2] son más las negras que allá ({F+})
- 18[(2,2)(4,4):S2] tengo 4/8 de probabilidad de sacar negra ({P'})
- 19[(0,2)(2,0):S2] voy a la segura ({P+})
- 20[(1,0)(1,1):S1] voy a la segura ({P+})
- 21[(1,1)(2,1):S2] son 2/3 de probabilidad de sacar negra ({P+})
- 22[(1,1)(2,0):S2] me gusta S1 (S/I: sin argumento; atracción)
- 23[(1,3)(2,2):S2] hay un 50% de sacar negra ({P+})
- 24[(1,2)(2,4):=] misma probabilidad de sacar negra (S/I: sin argumento)
- 25[(2,1)(3,2):S2] tengo 3/5 de probabilidad de sacar negra ({P'})
- 26[(0,2)(0,3):S2] tengo 4/6 de probabilidad de sacar negra (CAN: vio mal)
- 27[(2,2)(4,2):S2] hay cuatro de seis cartas ({P+})
- 28[(0,2)(2,2):S2] hay 2 negras de cuatro cartas ({F+})
- 29[(2,0)(4,0):S2] hay cuatro negras de cuatro cartas ({F+ \* D=})

- para cualquiera de los dos  
 ({P=})  
 30[(0,2)(1,1):S2] la  
 probabilidad es 1/2 y allá  
 es 0, no hay negras ({P+})  
 31[(1,1)(1,2):S1] la  
 probabilidad es 1/2 y allá  
 es 1/3 ({P+})  
 32[(1,1)(1,1):=] es la misma  
 probabilidad para los dos:  
 es 1/2 ({P=})

SUJETO JUA CUESTIONARIO C1

- 3[(0,2)(2,2):S2] era el único  
 lugar donde había negras  
 ({F+})  
 4[(1,0)(1,1):S1] hay menos  
 error ({D-})  
 5[(0,2)(1,1):S2] sólo ahí hay  
 negras ({F+})  
 6[(1,1)(2,0):S2] no hay error  
 posible ({D-})  
 7[(1,1)(1,1):=] hay igual  
 probabilidad de encontrar  
 una negra en ambos pares  
 (S/I: sin argumento)  
 8[(1,2)(2,4):=] igual número  
 de probabilidades (S/I: sin  
 argumento)  
 9[(1,3)(2,2):S2] existe dos  
 negras 4-2 (sic) ({F+})  
 10[(1,1)(1,2):S1] hay más  
 probabilidad (S/I: sin  
 argumento)  
 11[(1,1)(2,1):=] probabilidad  
 3-2 1 1 (sic) ({D=})  
 12[(2,0)(4,0):=] no hay  
 posibilidad de error, 100%  
 de probabilidad de acertar  
 ({P=})  
 13[(0,2)(2,0):S2] 100% de  
 probabilidad, mientras que  
 allá 50% de probabilidad  
 (CAN: vio mal)  
 14[(2,2)(4,2):S2] 60% de  
 probabilidad, mientras que  
 allá 50% de probabilidad  
 ({P'})  
 15[(2,1)(3,1):S2] 75% de  
 probabilidad, mientras que  
 allá 66.6% de probabilidad  
 ({P+})  
 16[(2,1)(3,2):S1] 66% de  
 probabilidad, mientras que  
 allá 40% de probabilidad  
 ({P'})  
 17[(2,1)(3,1):S2] existe un  
 75% de probabilidad aquí y  
 33.3% allá ({P'})  
 18[(2,2)(4,4):=] existe un 50%  
 de probabilidad en S1 y 50%  
 en S2 ({P=})  
 19[(0,2)(2,0):S2] existe un  
 100% de probabilidad aquí y  
 0 allá ({P+})  
 20[(1,0)(1,1):S1] existe un  
 50% de probabilidad allí y  
 100% acá ({P+})  
 21[(1,1)(2,1):S1] existe un  
 50% de probabilidad aquí y  
 33.3% allá ({P'})  
 22[(1,1)(2,0):S2] existe un  
 50% de probabilidad allí y  
 100% acá ({P+})  
 23[(1,3)(2,2):S2] existe un  
 25% de probabilidad allí y  
 50% acá ({P+})  
 24[(1,2)(2,4):=] existe un  
 33.3% de probabilidad en S1  
 y 33.3% en S2 ({P=})  
 25[(2,1)(3,2):S2] existe un  
 33.3% de probabilidad allí y  
 60% acá ({P'})  
 26[(0,2)(0,3):n] existe un 0%  
 de probabilidad aquí y 0  
 allá ({P=})  
 27[(2,2)(4,2):S2] existe un  
 66% de probabilidad aquí y  
 50% allá ({P+})  
 28[(0,2)(2,2):S2] existe un  
 50% de probabilidad aquí y 0  
 allá ({P+})  
 29[(2,0)(4,0):=] existe un  
 100% de probabilidad en S1 y  
 100% en S2 ({P=})  
 30[(0,2)(1,1):S2] existe un  
 50% de probabilidad aquí y  
 0% allá ({P+})  
 31[(1,1)(1,2):S1] existe un  
 50% de probabilidad aquí y  
 33% allá ({P+})  
 32[(1,1)(1,1):=] existe un 50%  
 de probabilidad en S1 y 50%  
 en S2 ({P=})

- 9[(1,3)(2,2):S2] tiene dos negras y son cuatro cartas y allá tienen una negra y cuatro cartas (S/I: descripción)
- 10[(1,1)(1,2):S1] tiene dos cartas y una de ellas es negra (S/I: descripción)
- 11[(1,1)(2,1):S2] S1, porque tiene tres cartas y dos son negras (sic: invirtió los lados) (S/I: descripción)
- 12[(2,0)(4,0):S2] todas las cartas son negras ({F+ \* D=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] tienen negras y allá no ({F+})
- 14[(2,2)(4,2):S1] tiene menos cartas y dos negras entre ellas (CAN: ¿vio mal?)
- 15[(2,1)(3,1):S1] tiene tres cartas y entre ellas dos negras (S/I: descripción)
- 16[(2,1)(3,2):S1] tiene tres cartas y entre ellas dos negras (S/I: descripción)
- 17[(2,1)(3,1):S2] hay más cartas y también más negras, o sea 3/4 de probabilidad ({N+ \* D=})
- 18[(2,2)(4,4):=] ambas tienen la mitad de probabilidad de negras ({P=})
- 19[(0,2)(2,0):S2] es seguro sacar negra porque hay dos negras y allá no hay negras ({F+})
- 20[(1,0)(1,1):S1] tiene una carta la cual es negra y es seguro que sea negra ({D-})
- 21[(1,1)(2,1):S2] tiene la probabilidad de sacar la negra 2/3 ({P+})
- 22[(1,1)(2,0):S2] es seguro sacar negra ya que sus cartas son negras ({D-})
- 23[(1,3)(2,2):S2] la mitad de sus cartas son negras ({E<})
- 24[(1,2)(2,4):S1] tiene menos cartas ({N-})
- 25[(2,1)(3,2):S1] tiene una probabilidad de sacar una negra 2/3 ({P+})

- 26[(0,2)(0,3):n] en ambas no hay negras ({F=})
- 27[(2,2)(4,2):S2] la probabilidad de sacar una negra es 4/6 ({P+})
- 28[(0,2)(2,2):S2] sí hay negras ({F+})
- 29[(2,0)(4,0):=] ambas tienen todas sus cartas negras y es seguro sacar negra ({D=})
- 30[(0,2)(1,1):n] no hay negras (CAN: vio mal)
- 31[(1,1)(1,2):S1] la probabilidad de sacar negra es 1/2 ({P+})
- 32[(1,1)(1,1):=] ambos lados tienen 1/2 de sacar negra y 1/2 de error ({P=})

SUJETO MAY CUESTIONARIO C1

- 4[(1,0)(1,1):S1] no tiene otra ({D-})
- 5[(0,2)(1,1):S1] no hay (S/I: sin argumento)
- 6[(1,1)(2,0):S2] tiene dos o sea 100% de proba ({P+})
- 7[(1,1)(1,1):S2] hay 50% de probabilidad (S/I: descripción)
- 8[(1,2)(2,4):S2] hay 35% de proba ({P'})
- 9[(1,3)(2,2):S2] tiene las mismas probabilidades de salir o no ({E<})
- 10[(1,1)(1,2):S1] tiene 50% de probabilidad ({E<})
- 11[(1,1)(2,1):S2] tiene 66% de probabilidad ({P+})
- 12[(2,0)(4,0):S1] tiene 100% de probabilidad ({P'})
- 13[(0,2)(2,0):S2] tiene 100% de probabilidad ({P+})
- 14[(2,2)(4,2):S2] tiene 40% de probabilidad ({P'})
- 15[(2,1)(3,1):S2] tiene 75% de probabilidad ({P+})
- 16[(2,1)(3,2):S2] tiene 40% de probabilidad ({P'})

- probabilidad de que salga negra es al 100% ({P+})  
 14[(2,2)(4,2):S2] hay cuatro cartas negras y dos blancas, probabilidad de una negra al 70% ({P'})  
 15[(2,1)(3,1):S2] tres negras en cuatro cartas mayor probabilidad de sacar una negra (aprox 90%) ({P'})  
 16[(2,1)(3,2):S2] en cinco cartas hay tres negras la probabilidad de que salga negra es al 60% aprox ({P'})

- 13[(0,2)(2,0):S2] hay puras negras ({D-})  
 14[(2,2)(4,2):=] en proporción hay una negra por cada dos cartas en los dos conjuntos (CAN: vio mal)  
 15[(2,1)(3,1):S2] en proporción existe tres negras y una blanca (S/I: descripción)  
 16[(2,1)(3,2):S1] es más probable sacar dos de tres cartas que tres de cinco cartas (S/I: descripción)  
 17[(2,1)(3,1):S2] es más probable de cuatro cartas sacar por el número de negras que es mayor ({F+})  
 18[(2,2)(4,4):=] es la misma probabilidad (S/I: sin argumento)  
 19[(0,2)(2,0):S2] es una certeza ({P+})  
 20[(1,0)(1,1):S1] es una certeza ({P+})  
 21[(1,1)(2,1):S2] es más probable sacar dos de tres que uno de dos (S/I: descripción)  
 22[(1,1)(2,0):S2] hay una certeza de que salga a fuerzas una negra ({P+})  
 23[(1,3)(2,2):S2] hay más negras en el mismo evento ({F+ \* N=})  
 24[(1,2)(2,4):=] hay el mismo número de negras en distintos eventos ({P=})  
 25[(2,1)(3,2):=] es la misma probabilidad en diferentes eventos (S/I: sin argumento)  
 26[(0,2)(0,3):n] hay certeza de que no salga en los dos eventos ({P=})  
 27[(2,2)(4,2):S2] en el evento hay más negras ({F+})  
 28[(0,2)(2,2):S2] en el otro evento no hay negras ({F+})  
 29[(2,0)(4,0):=] es una certeza que salga negra en cualquiera de los dos eventos ({P=})  
 30[(0,2)(1,1):S2] en el otro evento no hay probabilidad

SUJETO RAF CUESTIONARIO C1

- 1[(0,2)(0,3):n] en cada conjunto no hay negras ({F=})  
 2[(2,2)(4,4):S1] hay menos cartas blancas ({D-})  
 3[(0,2)(2,2):S2] es más probable habiendo negras en ese lado ({F+})  
 4[(1,0)(1,1):S1] hay la única probabilidad de sacar una negra y sólo una negra de aquí ({D-})  
 5[(0,2)(1,1):S2] hay más probabilidad de sacar la negra porque allá no hay negras ({F+})  
 6[(1,1)(2,0):S2] hay dos negras aquí ({F+})  
 7[(1,1)(1,1):=] iguales estos conjuntos ({F= & D=})  
 8[(1,2)(2,4):S2] hay dos de seis y allá uno de tres (S/I: descripción)  
 9[(1,3)(2,2):=] de cuatro cartas hay dos negras de cada conjunto (CAN: vio mal)  
 10[(1,1)(1,2):S1] existe uno de dos y allá uno de tres (S/I: descripción)  
 11[(1,1)(2,1):S2] existe mayor número de negras esto es dos de tres en cambio allá hay una de dos ({F+})  
 12[(2,0)(4,0):=] hay en cada conjunto puras negras ({D=})

- 18[(2,2)(4,4):S2] tenemos más cartas negras ({F+})
- 19[(0,2)(2,0):S2] tenemos sólo dos y son negras ({D-})
- 20[(1,0)(1,1):S1] sólo hay una carta y es negra ({D-})
- 21[(1,1)(2,1):S2] hay tres cartas y son dos negras (S/I: descripción)
- 22[(1,1)(2,0):S2] hay dos negras ({F+})
- 23[(1,3)(2,2):S2] hay cuatro, y dos son negras (S/I: descripción)
- 24[(1,2)(2,4):S1] S2, porque hay tres cartas y una es negra (sic: invirtió los lados) (S/I: descripción)
- 25[(2,1)(3,2):S1] tenemos tres cartas y dos son negras (S/I: descripción)
- 26[(0,2)(0,3):n] no hay negras ({F=})
- 27[(2,2)(4,2):S2] de seis, hay cuatro negras (S/I: descripción)
- 28[(0,2)(2,2):S2] hay cuatro cartas y dos son negras ({F+})
- 29[(2,0)(4,0):=] en los dos lados hay negras ({D=})
- 30[(0,2)(1,1):S2] de dos cartas una es negra ({F+})
- 31[(1,1)(1,2):S1] de dos cartas una es negra (S/I: descripción)
- 32[(1,1)(1,1):=] en los dos lados hay una negra y sólo son dos cartas ({F= & N=})

**SUJETO REY                      CUESTIONARIO C1**

- 11[(1,1)(2,1):S2] hay dos negras en tres cartas (S/I: descripción)
- 12[(2,0)(4,0):=] hay dos negras de dos y cuatro negras de cuatro cartas ({D=})
- 13[(0,2)(2,0):S2] hay dos negras de dos cartas ({D-})
- 14[(2,2)(4,2):=] hay dos negras de cuatro y tres

- negras de seis (CAN: vio mal)
- 15[(2,1)(3,1):=] hay dos negras de tres y tres negras de cuatro cartas (S/I: descripción)
- 16[(2,1)(3,2):=] hay dos negras de tres y tres negras de cinco cartas (S/I: descripción)

**SUJETO RIC                      CUESTIONARIO C1**

- 17[(2,1)(3,1):S2] hay más negras por 3/4 de probabilidad ({P+})
- 18[(2,2)(4,4):S1] hay 2/4 de probabilidad ({P'})
- 19[(0,2)(2,0):S2] hay 2/2=1 de probabilidad ({P+})
- 20[(1,0)(1,1):=] es la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 21[(1,1)(2,1):S2] hay 2/3 ({P+})
- 22[(1,1)(2,0):S2] hay p=2/2 ({P+})
- 23[(1,3)(2,2):S2] hay p=2/4 ({P+})
- 24[(1,2)(2,4):=] la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 25[(2,1)(3,2):S2] hay p= 3/5 ({P'})
- 26[(0,2)(0,3):n] no hay probabilidad ({F=})
- 27[(2,2)(4,2):S2] hay p=4/6 ({P+})
- 28[(0,2)(2,2):S2] hay p=2/4 ({P+})
- 29[(2,0)(4,0):=] la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 30[(0,2)(1,1):S2] hay probabilidad 1/2 ({P+})
- 31[(1,1)(1,2):=] (S/I: sin justificación)
- 32[(1,1)(1,1):=] la probabilidad es la misma (S/I: sin argumento)

- 31[(1,1)(1,2):S1] la probabilidad de  $1/2 > 1/3$  de las otras ({P+})  
 32[(1,1)(1,1):=] tienen la misma probabilidad de  $1/2$  ({P=})

**SUJETO TER CUESTIONARIO C1**

- 1[(0,2)(0,3):n] no hay ({F=})  
 2[(2,2)(4,4):S2] hay más opción (S/I: sin argumento)  
 3[(0,2)(2,2):S2] hay dos negras ({F+})  
 4[(1,0)(1,1):S1] allá hay dos cartas, una negra y una blanca, entonces me puedo equivocar al sacarla de ahí, y aquí es la única ({D-})  
 5[(0,2)(1,1):n] sólo hay una negra contra tres blancas, entonces puedo tener menos oportunidad de sacar la negra (S/I: descripción; juntó lados)  
 6[(1,1)(2,0):S2] hay tres negras en total, hay más

- oportunidad (S/I: descripción; juntó lados)  
 7[(1,1)(1,1):n] hay el mismo número de negras que de blancas y no me arriesgo ({F= & D=})  
 8[(1,2)(2,4):S1] menos cartas más oportunidad ({N-})  
 9[(1,3)(2,2):S2] más negras, más chance ({F+})  
 10[(1,1)(1,2):S1] son dos negras contra una carta (CAN: vio mal)  
 11[(1,1)(2,1):S2] son dos contra una (S/I: descripción)  
 12[(2,0)(4,0):=] en las dos hay negras ({D=})  
 13[(0,2)(2,0):S2] sólo aquí\* hay negras ({F+})  
 14[(2,2)(4,2):=] hay buena oportunidad de sacarla en ambos (CAN: ¿vio mal?)  
 15[(2,1)(3,1):S1] menos cartas más oportunidad ({N-})  
 16[(2,1)(3,2):S1] menos cartas más oportunidad ({N-})

**CUESTIONARIO C2**

**SUJETO ADR CUESTIONARIO C2**

- 1[(2,1)(3,1):=] la mayoría son negras ({E=})  
 2[(2,1)(2,2):S2] hay igualdad de colores ({E5})  
 3[(2,2)(2,3):S1] hay igualdad de de colores ({E<})  
 4[(2,1)(4,2):S1] son menos negras y hay mayor probabilidad de que salga una negra ({F-})  
 5[(2,1)(3,2):S1] hay mayor probabilidad puesto que hay menos negras que allá ({F-})

- 6[(0,2)(1,1):S2] allá no hay ninguna y acá sí ({F+})  
 7[(1,1)(1,1):=] hay igualdad de colores ({F= & D=})  
 8[(2,2)(4,4):=] hay una negra y una blanca que se equilibran en las dos partes ({P=})  
 9[(2,3)(5,4):S1] hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos que donde hay más ({F-})  
 10[(1,2)(2,4):S1] hay más probabilidad de que salga una negra donde hay menos que donde hay más ({F-})  
 11[(1,1)(0,3):S1] hay igualdad de colores ({E<})



	SUJETO BLA	CUESTIONARIO C2
3[(2,2)(2,3):S1] existe el mismo número de negras y el mismo número de blancas ({E<})	1[(2,1)(3,1):=]	hay el mismo chance en los dos porque hay más de una carta negra en cada lado ({E= & D=})
4[(2,1)(4,2):S1] de tres cartas son dos negras (S/I: descripción)	2[(2,1)(2,2):=]	en las dos posibilidades hay dos cartas negras ({F=})
5[(2,1)(3,2):S2] de cinco cartas tres son negras (S/I: descripción)	3[(2,2)(2,3):S2]	se tienen dos cartas negras y hay más cartas que allá ({N+ * F=})
6[(0,2)(1,1):=] existe el mismo número de cartas por lo tanto la misma probabilidad de sacar una negra ({N=})	4[(2,1)(4,2):S1]	aunque se tienen menos cartas hay un rey de corazones (CAN: incomprensión; acomodo)
7[(1,1)(1,1):=] la misma posibilidad (S/I: sin argumento)	5[(2,1)(3,2):S2]	hay más cartas y más negras ({N+ & F+})
8[(2,2)(4,4):S1] es menos el número de cartas y por tanto es menos o puede ser menos el error de sacar una blanca en lugar de negra ({N-})	6[(0,2)(1,1):S2]	hay una carta negra, mientras que allá no hay ni una sola negra ({F+})
9[(2,3)(5,4):S2] son más cartas de color negro ({F+})	7[(1,1)(1,1):=]	se tiene la misma posibilidad porque hay dos cartas en cada lado en las cuales son dos negras las que hay ({F= & N=})
10[(1,2)(2,4):S2] son más cartas ({N+})	8[(2,2)(4,4):S2]	hay mayor número de cartas que en S1. En S2 se encuentran cuatro cartas negras mientras que en S1 sólo aparece una (CAN: vio mal)
11[(1,1)(0,3):S1] allá no hay negras ({F+})	9[(2,3)(5,4):S2]	hay un mayor número de cartas negras ({F+})
12[(2,2)(3,2):S2] de cinco tres son negras (S/I: descripción)	10[(1,2)(2,4):S2]	se tiene una carta negra más que allá ({F+})
13[(0,2)(2,0):S2] allá no hay negras ({F+})	11[(1,1)(0,3):S1]	allá no hay ninguna carta negra, mientras que aquí por lo menos hay una ({F+})
14[(2,0)(4,1):S1] sólo hay negras ({D-})	12[(2,2)(3,2):=]	es la misma posibilidad que hay para sacar cartas negras (S/I: sin argumento)
15[(0,2)(0,3):n] en ninguna parte había negra ({F=})	13[(0,2)(2,0):S2]	las dos cartas son negras mientras que allá no hay ninguna ({F+ & D-})
16[(1,1)(1,2):=] la misma posibilidad (S/I: sin argumento)	14[(2,0)(4,1):=]	en S1 sólo hay dos cartas y en S2 hay
17[(1,3)(2,6):=] la misma posibilidad ya que por cada blanca hay una negra ({P=})		
18[(1,1)(2,1):=] de tres, dos son negras y de dos las dos son negras (CAN: vio mal)		
19[(2,1)(3,1):=] la misma (S/I: sin argumento)		
20[(1,1)(3,2):S2] son más cartas y de cinco que hay tres son negras ({N+ & F+})		

- 8[(2,2)(4,4):=] en ambos lados están el mismo número de negras que de blancas 4 y 4 y 2 y 2 ({P=})
- 9[(2,3)(5,4):S2] hay más negras que blancas ({E<>})
- 10[(1,2)(2,4):=] en ninguno de los dos porque en los dos casos hay mayor número de blancas ({E=})
- 11[(1,1)(0,3):S1] hay una negra y allá no hay ({F+})
- 12[(2,2)(3,2):S2] hay mayor número de negras que allá ({F+})
- 13[(0,2)(2,0):S2] sólo hay negras ({D-})
- 14[(2,0)(4,1):S1] sólo hay negras ({D-})
- 15[(0,2)(0,3):n] no hay negras ({F=})
- 16[(1,1)(1,2):S1] sólo compite con una, en cambio allá compite con dos ({D- \* F=})
- 17[(1,3)(2,6):=] hay muchas más cartas blancas en ambos lados ({E=})
- 18[(1,1)(2,1):S2] son dos negras contra una blanca, en cambio allá es una contra una ({E>})
- 19[(2,1)(3,1):S2] tres negras compiten con una blanca (S/I: descripción)
- 20[(1,1)(3,2):=] la misma posibilidad porque en S2 son dos contra tres y en S1 es dos contra uno (CAN: vio mal)

- 4[(2,1)(4,2):S2] hay tres cartas negras, allá hay dos rojas una negra (CAN: vio mal)
- 5[(2,1)(3,2):S2] hay tres cartas negras dos blancas (S/I: descripción)
- 6[(0,2)(1,1):S2] hay una negra una blanca ({E<})
- 7[(1,1)(1,1):=] la probabilidad es la misma hay una carta negra y una blanca ({F= & D=})
- 8[(2,2)(4,4):S2] hay cuatro negras y cuatro blancas (S/I: descripción)
- 9[(2,3)(5,4):S2] hay cinco negros cuatro blancos, allá tres negros dos blancos (S/I: descripción)
- 10[(1,2)(2,4):S1] de tres hay una negra; allá hay dos negras de seis (S/I: descripción)
- 11[(1,1)(0,3):S1] hay una negra y una blanca; allá no hay ninguna negra ({F+})
- 12[(2,2)(3,2):S2] la misma (sic:?) tres negros, dos blancos, allá hay dos negros dos blancos (S/I: descripción)
- 13[(0,2)(2,0):S2] las dos cartas son negras, allá no hay carta negra, son dos blancas ({F+ & D-})
- 14[(2,0)(4,1):=] es la misma porque son dos negros en S1, en S2 hay cuatro negros de cinco ({N- ¥ F+})
- 15[(0,2)(0,3):n] no hay negras ({F=})
- 16[(1,1)(1,2):S1] hay una negra una blanca, allá hay una negra dos blancas (S/I: descripción)
- 17[(1,3)(2,6):S1] hay cuatro una negra, allá dos negras de ocho (S/I: descripción)
- 18[(1,1)(2,1):=] en S2 hay dos negras una blanca, en S1 una negra una blanca (S/I: descripción)

SUJETO EUG CUESTIONARIO C2

- 1[(2,1)(3,1):S2] son tres negras y una blanca (S/I: descripción)
- 2[(2,1)(2,2):S1] sólo hay tres cartas a la primera no sale en la otra si sale ({N-})
- 3[(2,2)(2,3):S1] hay cuatro cartas dos negras dos blancas (S/I: descripción)

- 7[(1,1)(1,1):=] la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 8[(2,2)(4,4):S2] de las ocho hay cuatro negras (S/I: descripción)
- 9[(2,3)(5,4):S2] de las nueve hay cinco negras (S/I: descripción)
- 10[(1,2)(2,4):=] la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 11[(1,1)(0,3):S1] de las dos hay una negra ({F+})
- 12[(2,2)(3,2):S2] de las cinco hay tres negras (S/I: descripción)
- 13[(0,2)(2,0):S2] de las dos, las dos son negras ({D-})
- 14[(2,0)(4,1):=] la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 15[(0,2)(0,3):n] la probabilidad es cero, no hay probabilidad ({F=})
- 16[(1,1)(1,2):S1] de las dos, una es negra (S/I: descripción)
- 17[(1,3)(2,6):S2] de las ocho, hay dos negras (S/I: descripción)
- 18[(1,1)(2,1):S2] de las tres hay dos negras (S/I: descripción)
- 19[(2,1)(3,1):=] la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 20[(1,1)(3,2):S2] de las cinco hay tres negras (S/I: descripción)

- 4[(2,1)(4,2):S2] son cuatro negras sobre dos (S/I: descripción)
- 5[(2,1)(3,2):=] (S/I: sin justificación)
- 6[(0,2)(1,1):S2] sólo aquí hay una negra ({F+})
- 7[(1,1)(1,1):=] es la misma probabilidad (S/I: sin argumento)
- 8[(2,2)(4,4):=] es la misma probabilidad ya que se encuentran intercaladas (S/I: sin argumento; acomodo)
- 9[(2,3)(5,4):S2] el número de cartas negras es mayor ({F+})
- 10[(1,2)(2,4):S2] hay dos probabilidades de sacar una negra ({F+})
- 11[(1,1)(0,3):S1] hay una probabilidad y allá hay cero oportunidades ({F+})
- 12[(2,2)(3,2):S2] hay más número de cartas negras ({F+})
- 13[(0,2)(2,0):S2] es la única probabilidad de que salgan negras son las dos cartas que hay ({D-})
- 14[(2,0)(4,1):S1] es más la probabilidad de no equivocarse ({D-})
- 15[(0,2)(0,3):n] la probabilidad es cero ya que en ninguna existe carta negra ({F=})
- 16[(1,1)(1,2):S1] hay más probabilidad (S/I: sin argumento)
- 17[(1,3)(2,6):S2] hay más probabilidad ya que hay dos cartas ({F+})
- 18[(1,1)(2,1):S2] hay más probabilidad porque tiene dos sobre una (S/I: descripción)
- 19[(2,1)(3,1):S2] hay más probabilidad porque hay tres sobre uno (S/I: descripción)
- 20[(1,1)(3,2):S2] hay tres sobre dos (S/I: descripción)

**SUJETO MAB            CUESTIONARIO C2**

- 1[(2,1)(3,1):S1] como son dos negras hay más probabilidad de sacar una entre tres (S/I: descripción)
- 2[(2,1)(2,2):S2] más número de negras (CAN: vio mal)
- 3[(2,2)(2,3):S1] el número es igual tanto de blancas como de negras ({E<})

- 8[(2,2)(4,4):=] la misma probabilidad ya que son en S2 cuatro negras y cuatro blancas y en S1 dos negras y dos blancas. Es la misma porque son pares y múltiplos ({P=})
- 9[(2,3)(5,4):S2] allá no porque sólo hay dos negras y tres blancas, aquí porque hay cinco negras y cuatro blancas. Como hay más negras es mayor la posibilidad ({F+})
- 10[(1,2)(2,4):=] en S1 de tres hay una negra y dos blancas y en S2 de seis hay dos negras y cuatro blancas (S/I: descripción)
- 11[(1,1)(0,3):S1] hay una negra, allá no hay ninguna ({F+})
- 12[(2,2)(3,2):S2] hay tres negras y dos blancas, allá son igual la posibilidad de sacar blancas que negras cuatro cartas ({E>})
- 13[(0,2)(2,0):S2] las dos cartas son negras, en cambio allá no hay negras ({F+ & D-})
- 14[(2,0)(4,1):S1] hay puras negras ({D-})
- 15[(0,2)(0,3):n] no hay ({F=})
- 16[(1,1)(1,2):S1] de dos cartas una es negra, allá hay menos posibilidad ya que de tres cartas hay una negra ({D-})
- 17[(1,3)(2,6):S2] de ocho cartas hay dos negras, hay dos posibilidades de sacar negras, allá en cambio de cuatro hay una negra ({F+})
- 18[(1,1)(2,1):=] en S2 hay mayor posibilidades (sic) de tres cartas hay dos; en S1 de dos cartas hay una de sacar negra. Es la misma posibilidad ({D=})
- 19[(2,1)(3,1):=] en S1 hay dos posibilidades de tres y en S2 hay tres posibilidades de cuatro ({D=})

20[(1,1)(3,2):] hay en S2 tres posibilidades de sacar negras de cinco, en S1 hay una de dos (CAN: sin elección)

SUJETO MAP CUESTIONARIO C2

- 1[(2,1)(3,1):=] hay mayoría de negras en los dos lados ({E=})
- 2[(2,1)(2,2):S1] la mayoría son negras ({E>})
- 3[(2,2)(2,3):S1] son menos cartas con igual de negras e igual de blancas y allá son más cartas con minoría negra ({E< & N-})
- 4[(2,1)(4,2):S1] hay mayores posibilidades porque son menos y mayoría negras ({N- \* E=})
- 5[(2,1)(3,2):S2] mayores posibilidades: la mayoría son negras y hay más cartas ({F+ \* E=})
- 6[(0,2)(1,1):S2] allá no hay negras, aquí hay posibilidad ({F+})
- 7[(1,1)(1,1):=] la misma posibilidad (S/I: sin argumento)
- 8[(2,2)(4,4):=] la misma probabilidad hay igual número de negras de acuerdo a la cantidad de cartas ({P=})
- 9[(2,3)(5,4):S2] mayor número de negras ({E<>})
- 10[(1,2)(2,4):=] (S/I: sin justificación)
- 11[(1,1)(0,3):S1] hay negras, allá no ({F+})
- 12[(2,2)(3,2):S2] hay mayor número de negras ({E>})
- 13[(0,2)(2,0):S2] hay un 100% de posibilidades de que saque una negra ({P+})
- 14[(2,0)(4,1):S1] todas son negras ({D-})
- 15[(0,2)(0,3):n] no existen negras ({F=})

- 11[(1,1)(0,3):S1] probabilidad de 1/2 ({F+})  
 12[(2,2)(3,2):S2] probabilidad de 3/5 ({P+})  
 13[(0,2)(2,0):S2] probabilidad segura 2/2 ({P+})  
 14[(2,0)(4,1):S1] probabilidad 2/2 ({P+})  
 15[(0,2)(0,3):=] probabilidad 0/3 y 0/2 ({P=})  
 16[(1,1)(1,2):S1] probabilidad de 1/2 ({P+})  
 17[(1,3)(2,6):=] probabilidad de 2/8 = 1/4 ({P=})  
 18[(1,1)(2,1):S2] probabilidad de 2/3 > 1/2 ({P+})  
 19[(2,1)(3,1):S2] probabilidad 3/4 > 2/3 ({P+})  
 20[(1,1)(3,2):S2] probabilidad de 3/5 > 1/2 ({P+})

## SUJETO SIL CUESTIONARIO C2

- 1[(2,1)(3,1):S2] hay más cartas negras ({F+})  
 2[(2,1)(2,2):S1] son dos cartas negras y una blanca y allá no, porque hay dos negras y dos blancas ({E>})  
 3[(2,2)(2,3):S1] hay igual número de cartas negras y blancas y allá no porque hay dos negras y tres blancas ({E<})  
 4[(2,1)(4,2):=] en las dos abundan las negras ({E=})  
 5[(2,1)(3,2):=] hay la misma probabilidad porque hay más cartas negras que blancas ({E=})  
 6[(0,2)(1,1):S2] allá no hay ninguna negra, acá solo una ({F+})  
 7[(1,1)(1,1):=] en las dos hay una negra y una blanca ({F= & D=})  
 8[(2,2)(4,4):S1] hay menos cartas negras y blancas que allá ({N-})  
 9[(2,3)(5,4):=] existen variadas en las dos (S/I: descripción)

- 10[(1,2)(2,4):S2] hay más cartas negras que allá ({F+})  
 11[(1,1)(0,3):S1] allá no hay negras ({F+})  
 12[(2,2)(3,2):S2] hay más cartas negras que allá ({F+})  
 13[(0,2)(2,0):S2] todas son negras y allá no porque todas son blancas ({F+ & D-})  
 14[(2,0)(4,1):S1] todas son negras y allá no porque aunque sólo hay una blanca existe la posibilidad de que salga ({D-})  
 15[(0,2)(0,3):n] no existen negras ({F=})  
 16[(1,1)(1,2):S1] hay una negra y una blanca y allá no porque existen dos blancas y una negra ({E<})  
 17[(1,3)(2,6):S2] hay más negras ({F+})  
 18[(1,1)(2,1):S2] hay más negras ({F+})  
 19[(2,1)(3,1):=] en las dos existe sólo una blanca ({D=})  
 20[(1,1)(3,2):S2] hay más negras ({F+})

- negras),... en S1 hay dos probabilidades de que saques blanca,... predominan las blancas; es la misma probabilidad: puedo sacar negra de cualquiera; parejas del 50% ( $\{E = \neg N-\}$ )
- 13[(3,1)(0,7):S1] (S/I: sin justificación)
- 14[(2,2)(2,3):S1] el cincuenta, el cincuenta,... una a una,... aquí compartes el riesgo, en cambio allá aumenta más el riesgo de que sea blanca ( $\{E<\}$ )
- 15[(2,2)(3,1):S2] (S/I: sin justificación)
- 16[(3,2)(5,1):S2] (S/I: sin justificación)
- 17[(1,2)(4,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 18[(2,1)(3,2):S1] (S/I: sin justificación)
- 19[(2,0)(6,0):=] (S/I: sin justificación)
- 20[(2,2)(3,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 21[(3,4)(4,3):S2] hay más probabilidades porque ahí sobra una blanca, el riesgo de que salga más blanca es en S1 que en S2, aquí de alguna forma se balancea y van ganando 25% las negras... parejas de 100%, sobra una negra ( $\{E>\}$ )
- 22/1[(4,1)(6,2):S2] hay más negras ( $\{F+\}$ )
- 22/2[(4,1)(6,2):=] en las dos hay posibilidades rotundas de que salga negra ( $\{E=\}$ )
- 22/3[(4,1)(6,2):S2] yo diría que S2, ¿cómo la ves?... porque hay más negras (CAN: no es su opinión)
- 22.1[(5,1)(6,2):=] se balancean, da igual ( $\{E=\}$ )
- 22.2[(4,1)(5,2):=] me sigue dando igual ( $\{E=\}$ )
- 22.3[(4,1)(4,2):S1] allá son dos proporciones, más probabilidades de que me salga blanca, a pesar de que es la misma cantidad de negras, y aquí son sólo una ( $\{D- * F=\}$ )
- 23[(2,0)(0,6):S1] (S/I: sin justificación)
- 24[(2,2)(3,3):=] tanto en S1, tanto en S2, puedes sacar blanca, puedes sacar (negra)... igual número (de posibilidades) ( $\{P=\}$ )
- 25[(1,2)(3,5):=] a pesar de que en S2 haya más (negras), pero predominan las blancas, en cualquiera de los dos momentos puede salir ésta... En S2 predominan más blancas, sobran dos, allá una (pero) me da igual ( $\{F+ \neq R+\}$ )
- 26[(14,7)(18,9):=] son el cincuenta el cincuenta los dos, mitad de cada uno o sea pues cincuenta, o sea en los dos predominan los negros ( $\{E= \& P=\}$ )
- 27[(3,3)(2,22):S1] aquí es la misma cantidad de posibilidades ( $\{E<\}$ )
- 28[(2,3)(3,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 29[(13,7)(18,12):S2] S2 en última instancia porque hay más negros, pero la misma cantidad sobran: están terminando 6 negros, está la misma proporción guardada, pero por la cantidad, puede ser S2, a pesar de que se incrementen los blancos ( $\{((F+ \neg D-) * R=\}$ )
- 30[(1,5)(10,14):S2] por lo menos son cuatro posibilidades de blancas, pero aquí hay más cantidad de negras, si se incrementa la cantidad de cartas, no importa la cantidad, pero entre más negras, más posibilidades ( $\{((F+ \neg N-) * R=\}$ )
- 31[(12,8)(4,24):S1] (S/I: sin justificación)
- 32[(2,2)(2,3):S1] (S/I: sin justificación)

- 11[(1,1)(3,1):S2] allí estoy al 50%, pero aquí ya tengo 75% ({E>})
- 12/1[(1,2)(2,4):S1] cuando ya está tan disperejo el asunto... ahí hay más cartas pero el número de negras es menor en proporción, acá tengo más ó menos un tercio ({N-})
- 12/2[(1,2)(2,4):S2] aquí también predomina la blanca... pero no me daría igual, me definiría porque aquí tengo dos oportunidades de negra, contra una aquí, en último de los casos me iría a S2 ({F+ \* E=})
- 13[(3,1)(0,7):S1] ahí no hay problema (S/I: sin argumento)
- 14[(2,2)(2,3):S1] aquí hay una a una, allí aumentan tus posibilidades de blanca, aquí la proporción es una a una, estás emparejado a tus... al azar ({E<})
- 15[(2,2)(3,1):S2] hay más ({F+})
- 16[(3,2)(5,1):S2] (S/I: sin justificación)
- 17[(1,2)(4,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 18[(2,1)(3,2):S1] (S/I: sin justificación)
- 19[(2,0)(6,0):=] aquí es claro (S/I: sin argumento)
- 20[(2,2)(3,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 21[(3,4)(4,3):S2] (S/I: sin justificación)
- 22[(4,1)(6,2):S1] aquí tienes UNA sola posibilidad de blanca, no puede ser ({D-})
- 22.1[(5,1)(6,2):S1] digo, por favor (S/I: sin argumento)
- 23[(2,0)(0,6):S1] (S/I: sin justificación)
- 24[(2,2)(3,3):=] hay igual número de probabilidades de sacar una que otra, está balanceado... hay igual número de posibilidades ({P=})
- 25[(1,2)(3,5):S2] tengo tres posibilidades de negra, aunque haya más blancas, aunque hay más cartas ({F+ - (D- & N-)})
- 26[(14,7)(18,9):=] es la mitad de cada uno... siempre hay el doble de negros ({P=})
- 27[(3,3)(2,22):S1] es la misma cantidad, y allá nada más hay dos oportunidades contra muchísimas blancas, y aquí está emparejado ({E<})
- 28[(2,3)(3,2):S2] (S/I: sin justificación)
- 29[(13,7)(18,12):=] son el mismo número que sobra de blancas en las dos ({R=})
- 30[(1,5)(10,14):=] está en la misma proporción... hay cuatro blancas más en proporción ({R=})
- 31[(12,8)(4,24):S1] (S/I: sin justificación)
- 32[(2,2)(2,3):S1] (S/I: sin justificación)
- 33[(1,2)(18,9):S2] hay más posibilidades de negras ({E<>})
- 34[(10,15)(18,9):S2] (S/I: sin justificación)
- 35[(1,3)(2,4):S2] aquí tengo DOS posibilidades de que sean negras, contra cuatro... ya puedo tener más oportunidades, en cambio ahí nada más hay un negro ({F+})
- 36[(2,2)(11,11):=] está en la misma proporción, o sea estoy jugándole al cincuenta ({P=})
- 37[(9,14)(9,20):S1] (S/I: sin justificación)
- 38[(3,2)(5,1):S2] (S/I: sin justificación)
- 39[(10,16)(13,13):S2] (S/I: sin justificación)
- 40[(3,2)(18,2):S2] (S/I: sin justificación)

- 33[(1,2)(18,9):S1] son menos canicas y una negra. Ahora son mucho menos ({N-})  
 34[(10,15)(18,9):S2] (S/I: sin justificación)  
 35[(1,3)(2,4):S1] aquí son tres blancas con una negra, o sea de las cuatro bolas que echas, de esas te puede salir la negra, definitivamente ({F1})  
 36[(2,2)(11,11):=] (S/I: sin justificación)  
 37[(9,14)(9,20):S1] (S/I: sin justificación)  
 38[(3,2)(5,1):S2] (S/I: sin justificación)  
 39[(10,16)(13,13):S2] (S/I: sin justificación)  
 40[(3,2)(18,2):=] tiene las mismas blancas y tienes aquí también tres negras que te puedes sacar el premio luego luego y acá también tienes más ({D= & E=})

SUJETO V (DEL BINOMIO T-V)  
 CUESTIONARIO C3

- 1[(2,3)(1,5):S2] no me interesa... acá nada más hay una negra: yo lo echo a la suerte ({F1})  
 2[(1,2)(3,3):S2] allá no hay mucho de qué agarrarse, si habría opción, pero menos, aquí habría más posibilidad de tomar, más posibilidad de ganar ({E<})  
 3[(2,1)(2,3):S1] allá hay demasiadas cartas y habría menos posibilidad de encontrar una ({N-})  
 4/1[(1,3)(2,6):S1] hay menos posib..., o sea, hay menos cartas, aunque en unas hay una, pero más pierde allá de que pueda perder ({N- → F+})  
 4/2[(1,3)(2,6):=] es lo mismo, tienes más blancas y tienes pierde, acá igual ({E=})

- 4/3[(1,3)(2,6):S1] hay más probabilidad aquí, porque allá, por ejemplo, hay más probab... posib... probab... probabilidad de que... porque hay más blancas, entonces posiblemente tome acá la negra porque hay menos cartas  
 ({(D- & N-) \* E=})  
 5[(1,2)(2,3):S2] allá vería pocas cartas pero tomaría una que no es, acá hay dos posibilidades pero hay más posibilidad... (en) dos negras puedes llegar a tomar una negra en vez de una blanca ({F+ → N-})  
 6[(1,2)(3,5):S2] (S/I: sin justificación)  
 7[(1,2)(3,5):S1] son menos cartas, hay una posibilidad pero es más segura que ahí. Ahí tengo tres negras, sin en cambio cinco blancas, iría a la de pierde, tomaría una blanca  
 ({(N- → F+) & D-})  
 8[(3,1)(6,2):S1] aquí nada más hay una blanca ({D-})  
 9[(3,1)(5,2):S1] tengo tres negras y una blanca, hay más posibilidades de agarrar una negra que una blanca... allá (también), pero no me convence mucho (CAN: no es su opinión)  
 10[(4,0)(5,1):S1] (S/I: sin justificación)  
 11[(1,1)(3,1):S2] (S/I: sin justificación)  
 12[(1,2)(2,4):=] es exactamente lo mismo, la mitad de esto ({P=})  
 13[(3,1)(0,7):S1] (S/I: sin justificación)  
 14[(2,2)(2,3):S1] (S/I: sin justificación)  
 15[(2,2)(3,1):S2] (S/I: sin justificación)  
 16[(3,2)(5,1):S2] (S/I: sin justificación)  
 17[(1,2)(4,2):S2] (S/I: sin justificación)



CUESTIONARIO C4

## SUJETO Q1 (EQUIPO)

## CUESTIONARIO C4

- 1[(2,2)(3,1):S2] hay más probabilidad de sacar negra ya que hay más negras que blancas ({E>})
- 2[(2,3)(1,5):S1] allá hay muchas blancas ({D-})
- 3[(3,4)(4,3):=] hay equilibrio en los dos grupos (CAN: incomprensión; acomodo)
- 4[(3,2)(5,1):S2] hay más negras que blancas que en S1 ({R+})
- 5[(2,0)(6,0):=] en los dos grupos sólo hay negras ({D=})
- 6[(2,2)(2,3):S1] es el mismo número de negras y blancas ({E<})
- 7[(1,2)(3,5):S2] hay más negras ({F+})
- 8[(2,1)(2,3):S1] hay más estabilidad ({E<>})
- 9[(3,1)(5,2):S2] hay más negras ({F+})
- 10[(1,1)(3,1):S2] es un grupo que domina los negros ({E>})
- 11[(1,3)(2,6):=] da igual para blancas porque hay menor posibilidad de sacar negras ({E=})
- 12[(1,2)(4,2):S2] hay más negras ({F+})
- 13[(3,1)(6,2):=] hay equilibrio en ambos grupos ({P=})
- 14[(1,2)(3,3):=] en S2 hay un equilibrio y en S1 hay más blancas (CAN: absurdo)
- 15[(2,2)(3,3):=] ambos tienen el mismo equilibrio ({P=})
- 16[(2,1)(3,2):=] en ambos grupos hay igual número de negras ({R=})
- 17[(1,2)(2,3):=] da igual aunque hay más probabilidad de sacar blancas ({E=})
- 18[(2,2)(3,2):S2] hay más negras ({F+})
- 19[(3,2)(5,1):S2] hay más negras ({F+})
- 20[(1,2)(2,4):=] da igual aunque hay más posibilidad de sacar blanca en ambos grupos ({E=})
- 21[(1,3)(2,4):=] da igual aunque hay más posibilidad de sacar blanca ({E=})
- 22[(4,1)(6,2):S2] hay más negras ({F+})
- 23[(2,2)(2,3):S1] hay equilibrio y en S2 hay más posibilidad de sacar blanca ({E<})
- 24[(1,2)(3,5):S2] da igual que saques blanca, S2 porque tres posibilidades de sacar negra ({F+ \* E=})
- 25[(2,1)(3,2):=] da igual ya que hay más cantidad de negras tanto en S1 como en S2 ({E=})
- 26[(2,3)(1,5):S1] aunque hay más posibilidad de sacar blanca ({F+ \* E=})
- 27[(3,1)(5,2):S2] hay más negras ({F+})
- 28[(3,1)(5,3):=] da igual porque están equilibrados en S1 y S2 ({R=})
- 29[(1,2)(3,5):=] da igual aunque hay mayor posibilidad de blancas ({E=})
- 30[(1,3)(2,6):=] da igual que no se saque negra ({E=})

**SUJETO Q3 (EQUIPO)**  
**CUESTIONARIO C4**

- 1[(2,2)(3,1):S2] hay mayoría de negras que de blancas ({E>})
- 2[(2,3)(1,5):S1] hay mayoría de negras ({F+})
- 3[(3,4)(4,3):S2] hay mayoría de negras ({E<>})
- 4[(3,2)(5,1):S2] la mayoría de las cartas es negra y sólo hay una blanca ({D- \* E=})
- 5[(2,0)(6,0):=] la posibilidad es la misma ya que no hay ninguna blanca ({D=})
- 6[(2,2)(2,3):S1] es la misma probabilidad de sacar tanto negra como blanca. No hay un número mayor ni menor de negras ni de blancas ({E<})
- 7[(1,2)(3,5):S1] el número de cartas es menor y hay una posibilidad de negra y dos de blancas y en S2 hay un número mayor de cartas ({N-})
- 8[(2,1)(2,3):S1] el número de cartas negras es mayor que el de blancas ({E<>})
- 9[(3,1)(5,2):=] los números de cartas negras son mayores y menores las blancas ({E=})
- 10[(1,1)(3,1):S2] tiene más negras que blancas ({E>})
- 11[(1,3)(2,6):=] los números de negras son menores que los de blancas ({E=})
- 12[(1,2)(4,2):S2] el número de negras es mayor que el de blancas ({E<>})
- 13[(3,1)(6,2):=] los números de negras son mayores que los de blancas ({E=})
- 14[(1,2)(3,3):S2] es la misma probabilidad tanto de que salga negra como blanca ({E<})
- 15[(2,2)(3,3):=] en ambos lados el grado de probabilidad es mayor tanto de negras como de blancas ({P=})
- 16[(2,1)(3,2):S1] por el número de cartas ({N- \* E=})
- 17[(1,2)(2,3):=] las cartas blancas es mayor en ambos casos ({E=})
- 18[(2,2)(3,2):S2] hay mayoría de negras que de blancas ({E>})
- 19[(3,2)(5,1):S2] hay más cartas negras y sólo una carta blanca ({D- \* E=})
- 20[(1,2)(2,4):=] da igual porque las cartas blancas es mayor ({E=})
- 21[(1,3)(2,4):S2] el número de posibilidades de sacar negra es de dos contra cuatro (S/I: descripción)
- 22[(4,1)(6,2):=] da igual porque el número de negras es mayor y esto hace que la probabilidad aumente ({E=})
- 23[(2,2)(2,3):S1] es el mismo número de probabilidades para sacar tanto negras como blancas ({E<})
- 24[(1,2)(3,5):=] en ambos lados hay mayor cartas blancas ({E=})
- 25[(2,1)(3,2):S1] de tres cartas me aseguran que dos posibilidades (S/I: descripción)
- 26[(2,3)(1,5):S1] de cinco cartas dos me aseguran que hay probabilidad de sacar negra (S/I: descripción)
- 27[(3,1)(5,2):=] hay más números de cartas negras ({E=})
- 28[(3,1)(5,3):=] hay más negras que blancas ({E=})
- 29[(1,2)(3,5):S1] por el número de cartas ({N- \* E=})
- 30[(1,3)(2,6):=] en ambos lados es mayor el número de blancas ({E=})

- 14[(1,2)(3,3):S2] (S/I: sin justificación)
- 15[(2,2)(3,3):=] (S/I: sin justificación)
- 16[(2,1)(3,2):=] da igual la posibilidad de sacar en S1 o en S2 (S/I: sin argumento)
- 17[(1,2)(2,3):S2] hay más posibilidad de tomar negra (iluminado el 3b de S2 y en círculos 1n de S1 y 2n de S2) (S/I: sin argumento)
- 18[(2,2)(3,2):S2] hay mayor posibilidad de sacar negra (S/I: sin argumento)
- 19[(3,2)(5,1):S2] es más frecuente negra porque existe un mayor número de negras ({F+})
- 20[(1,2)(2,4):S1] existe una posibilidad más de sacar negra porque hay dos blancas ({R+})
- 21[(1,3)(2,4):S2] hay mejor probabilidad de tomar negras porque hay dos posibilidades más ({F+})
- 22[(4,1)(6,2):=] da igual tomar negra en S1 o S2 (muy marcados el 4n de S1 y el 6n de S2) ({E=})
- misma cantidad de negras ({F=})
- 7[(1,2)(3,5):S2] el acierto en el premio será mayor (S/I: sin argumento)
- 8[(2,1)(2,3):S1] en S2 tenías la misma posibilidad de sacar una negra ó una blanca ({E<>})
- 9[(3,1)(5,2):S1] tengo muy poca oportunidad de sacar una blanca ({D-})
- 10[(1,1)(3,1):=] tuve una corazonada y fue al azar (CAN: incomprensión; atracción)
- 11[(1,3)(2,6):S1] existe mayor opción de que salga negra en S2 (CAN: absurdo)
- 12[(1,2)(4,2):S2] hay más oportunidad de que salga negra en S2 que en S1 (S/I: sin argumento)
- 13[(3,1)(6,2):=] hay la misma oportunidad (S/I: sin argumento)
- 14[(1,2)(3,3):=] sería la misma posibilidad de sacar negra (S/I: sin argumento)
- 15[(2,2)(3,3):=] hay la misma oportunidad (S/I: sin argumento)

**SUJETO Q6 (EQUIPO)**  
**CUESTIONARIO C4**

- 1[(2,2)(3,1):S2] hay mejor oportunidad de sacar el premio en S2 que en S1 (S/I: sin argumento)
- 2[(2,3)(1,5):S1] hay en S2, hay menos posibilidad de sacar el premio (S/I: sin argumento)
- 3[(3,4)(4,3):=] tienen la misma certeza (CAN: incomprensión; acomodo)
- 4[(3,2)(5,1):S2] es más seguro ya que tiene mayor cantidad de negras ({F+})
- 5[(2,0)(6,0):=] hay nada más negras ({D=})
- 6[(2,2)(2,3):=] cualquiera de los dos, porque tienen la

- 17[(3,1)(5,2):S1] existe mayor número de cartas negras que de blancas... allá también... pero hay mayor posibilidad aquí, nada más es una la diferencia ({D- \* E=})
- 18[(1,2)(2,4):=] en tanto a negras se refiere, S2... pero también podría ser de igual manera... mayor número de cartas blancas en los dos ({E= - F+})
- 19/1[(1,1)(1,2):=] existen tanto blancas como negras (S/I: descripción)
- 19/2[(1,1)(1,2):S1] ahí hay mayor número de blancas ({D-})
- 20[(2,1)(5,2):=] en S2 existe mayor número de negras y es menor el de blancas, en S1 también existe mayor número de negras y en blancas es muy menor el número ({E=})
- 21[(2,2)(4,2):S2] existe mayor número de negras que de blancas, en tanto que allá existe igual ({E>})
- 22[(1,2)(3,5):=] existe mayor número de blancas ({E=})
- 23[(2,0)(6,0):=] (S/I: sin justificación)
- 13.1[(3,1)(4,1):=] existe la posibilidad en las dos de sacar una negra, ya que es mayor el número de cartas negras que de blancas ({E=})
- 24[(1,2)(3,5):S2] existe mayor número de negras (S: ¿que allá?) sí ({F+})
- 25[(3,3)(3,18):=] existe el mismo número de canicas negras ({F=})
- 26[(9,12)(15,12):S2] existe mayor número de canicas negras ({F+})
- 27[(1,1)(3,1):S2] existe mayor número de canicas negras... (intervención)... que en S1 ({F+})
- 28[(8,14)(13,15):S2] existe mayor número de canicas negras que en S1 ({F+})
- 29[(1,4)(5,20):S2] existe mayor número de canicas negras que en S1 ({F+})
- 30[(2,1)(3,4):S2] existe mayor número de canicas negras que en S1 ({F+})
- 31[(19,3)(20,8):S1] existe menor número de blancas y mayor es el número de canicas negras, pero... (?) ({D- \* E=})
- 32[(2,1)(4,2):=] existe menor número de canicas blancas y mayor número de canicas negras, existe la posibilidad en las dos de sacar la negra ({E=})
- 33[(1,4)(10,13):S2] existe mayor número de canicas negras, aunque mayor es el número de canicas blancas, pero hay más posibilidad... porque hay más negras en S2 que en S1 ({F+ \* E=})
- 34[(3,2)(11,11):S1] existe mayor número de canicas negras, y en S2 tanto las canicas negras como las blancas son iguales ({E>})
- 35[(9,11)(6,23):S1] existe mayor número de canicas negras que en S2, aunque mayor sean las canicas blancas (11>9) ({F+ \* E=})
- 36[(12,12)(14,14):=] existe número igual de... tanto canicas blancas como de negras ({P=})
- 37.1[(1,2)(1,3):=] (S/I: sin justificación)
- 37.3[(1,2)(3,4):=] (S/I: sin justificación)
- 37.4[(1,2)(2,4):=] (S/I: sin justificación)
- 38.3[(1,1)(2,2):=] (S/I: sin justificación)
- 38.5[(2,2)(4,4):=] (S/I: sin justificación)
- 38.6[(2,2)(3,2):=] (S/I: sin justificación)
- 39.1[(2,1)(4,2):=] existe mayor número de canicas negras y menor es el número de canicas blancas ({E=})

- sé, quizás es más probable que salga más... negro  
 ({F+ \* E=})
- 21[(2,2)(4,2):S2] tiene más elementos, aunque allá sean igual: 50% de que salga tanto blanca como negra, y aquí hay más negras  
 ({F+ ¬ E5})
- 22[(1,2)(3,5):S1] aunque nada más tiene un elemento, allá tiene más pero la mayoría son blancos igual que acá, pero aquí hay menos  
 ({(N- ¬ F+) \* E=})
- 23[(2,0)(6,0):S1] son menos elementos y todas son negras (S: en S2 también): ¡pues por eso! ({N- \* D=})
- 24[(1,2)(3,5):S1] tiene menos elementos... S2 tiene muchas más blancas que negras y S1 igual, pero tiene menos elementos ({N- \* E=})
- 25[(3,3)(3,18):S1] tiene los mismos elementos blancos y negros, y allá tiene mucho más blancos... es más fácil que se perdieran las negras ({E<})
- 26[(9,12)(15,12):S2] (allá) hay más blancas que negras ({E<>})
- 27[(1,1)(3,1):S1] es uno a uno ({E5})
- 28[(8,14)(13,15):S2] únicamente son dos de más de blancas, no es mucha la diferencia, y allá es un poquito más grande ({R+})
- 29[(1,4)(5,20):S1] son menos elementos, allá son mucho más ({N-})
- 30[(2,1)(3,4):S2] nada más es una la diferencia de... una de más blancas, en S1 hay más negras y en S2 más blancas (a pesar de eso) ({F+ ¬ E<>})
- 31[(19,3)(20,8):=] los dos tienen más negras que blancas ({E=})
- 32[(2,1)(4,2):S2] tiene más negras, son más elementos y

- tiene más... allá también, pero nada más es una de más de negras, y aquí son más negras que blancas  
 ({R+ \* E=})
- 33[(1,4)(10,13):S2] son más elementos. Es que allá nada más es una negra, entonces perdería entre las otras cuatro... aquí hay más negras que allá ({F+})
- 34[(3,2)(11,11):S2] tiene los mismos elementos blancos y negros. Y allá... también podría ser, tiene más negras, bueno una más, pero S2 ({E5 ¬ E>})
- 35[(9,11)(6,23):S1] son menos elementos... y nada más son dos de más de blancas, y allá son el triple de, de negras ({N- & R+})
- 36[(12,12)(14,14):=] hay los mismos elementos en las dos ({P=})
- 37.1[(1,2)(1,3):=] hay una negra ({F=})
- 37.3[(1,2)(3,4):=] es una de más de blancas ({R=})
- 37.4[(1,2)(2,4):=] son más blancas ({E=})
- 38.3[(1,1)(2,2):=] tienen los mismos elementos. En la de referencia son dos blancas, dos negras, aquí una a una ({P=})
- 38.5[(2,2)(4,4):=] tienen los mismos elementos. Aquí dos blancas, dos negras, aquí cuatro con cuatro ({P=})
- 39.2[(2,1)(3,2):=] nada más es una de más de negras ({R=})
- 40.5[(7,14)(9,18):=] tiene lo doble de canicas blancas que negras, y aquí igual ({P=})

SUJETO W (DEL BINOMIO W-Z)  
 CUESTIONARIO C6

- 1[(2,1)(3,2):S2] hay tres posibilidades, y allí nada más hay dos, (aunque) a lo mejor es lo mismo, porque

- 34[(3,2)(11,11):S1] allá no porque es el mismo número de posibilidades de sacar una negra o una blanca, acá hay una posibilidad más de sacar negra a blanca ({E>})
- 35[(9,11)(6,23):S1] (S/I: sin justificación)
- 36[(12,12)(14,14):=] (S/I: sin justificación)
- 37.4[(1,2)(2,4):=] se duplica, hay dos... hay cuatro blancas, dos negras, sería como un mismo resultado, más o menos, en cosas de azar ({P=})
- 38.5[(2,2)(4,4):=] como que se duplica: cuatro blancas, cuatro negras ({P=})
- 39.1[(2,1)(4,2):=] (S/I: sin justificación)
- 40.5[(7,14)(9,18):=]  $7 \times 2 = 14$ ,  $9 \times 2 = 18$ , así es como saqué más o menos la probabilidad, como que es un múltiplo la que está abajo, es el mismo aumento, un porcentaje de posibilidades iguales, es su doble ({P=})
- 41[(2,4)(3,6):=] es su doble, y su doble ({P=})

SUJETO X CUESTIONARIO C6

- 1[(2,1)(3,2):S2] hay más probabilidad de negra, porque acá son tres, y allá son dos ({F+})
- 2[(3,1)(3,4):S1] hay más probabilidad de que salga una negra y menos de que salga una blanca ({E<>})
- 3[(3,2)(5,3):S2] hay más probabilidad de negra, allá (también, pero) casi saldría la misma probabilidad, por una diferencia de blanca, acá ya son a dos probabilidades ({R+ \* E=})
- 4[(1,2)(2,4):S1] aquí una probabilidad de negra, allá dos probabilidades. Allá hay dos oportunidades menos de

- que me salga la negra, y acá... una menos ({R+})
- 5[(1,5)(3,3):S2] tengo la misma probabilidad tanto en blanca como en negra, allá nada más tengo una probabilidad de que salga la negra ({E<})
- 6[(1,1)(2,1):S2] tengo dos probabilidades. Bueno, casi lo mismo, en S2 hay una probabilidad más pero vendría siendo muy parecida (S: ¿y el premio?) en S2 ({F+ \* D=})
- 7[(2,1)(3,4):S1] es más rápido que mi probabilidad sea negra, estoy dos a uno... allá a tres probs de que sea y cuatro de que no, rápido: menos cartas para elegir ({N- & E<>})
- 8[(2,1)(5,3):S1] allá ya hay tres que no sea negra, aquí nada más hay una ({D-})
- 9[(1,1)(1,2):S1] estoy a una probabilidad de que no sea, allá estoy a dos probabilidades de que no sea... hablando de probabilidad de que sea negra, hay una (en cada lado), sin embargo ahí están las dos que no sea ({D- \* F=})
- 10[(2,3)(3,4):S1] aquí hay tres probabilidades que no sea y allá cuatro: aquí es menos la cantidad de probabilidad de que salga blanca ({D-})
- 11[(3,3)(4,4):S1] en S1 estoy a tres, a tres, en S2 a cuatro, a cuatro... (para el millón) S1 por el menor número de diferencia de probabilidad, sería mejor que nada más hubiera tres ({D- \* P=})
- 12[(1,5)(3,4):S2] tiene más número de cartas negras ({F+})
- 13[(3,1)(4,1):S2] tiene más... tengo más probabilidad

- número de canicas negras  
({E<>})
- 27[(1,1)(3,1):S2] tengo dos probabilidades más de que sean negras y allá tengo la misma probabilidad ({E>})
- 28[(8,14)(13,15):S2] aquí hay menos diferencia de blancas... aquí me faltarían dos canicas negras para que fuera la misma probabilidad de que me salieran blancas o negras, ahí estoy a seis canicas newgras para las catorce bl ({R+})
- 29[(1,4)(5,20):S1] hay menos cantidad de blancas, y aunque nada más es una la canica negra, allá son demasiadas blancas para tan poquititas negras ({D- ~ F+})
- 29.1[(1,4)(6,20):S1] (S/I: sin justificación)
- 29.2[(1,4)(7,20):S1] (S/I: sin justificación)
- 29.3[(1,4)(19,20):S1] (S/I: sin justificación)
- 29.4[(1,4)(20,20):S1] allá son demasiadas canicas ({N-})
- 29.5[(1,4)(5,20):S1] si me pongo a hacer multiplicaciones, divisiones y restas, podría sacar una igualdad, veinticinco es a cinco lo que cinco es a uno, pero yo hablo de rapidez, es más fácil que salga aquí ({N- \* P=})
- 29.6[(1,4)(21,20):S1] ya sería diferente, allá tres malas a una buena, acá como siete buenas a catorce malas, pero en sí (S1) ({N- ~ E<>})
- 29.7[(1,4)(40,20):=0] (S: ¿cuántas negras le tengo que echar a S2 en la 29 para que sea igual a S1?) por lo menos unas cuarenta negras ({N- ~ E<>})
- 30[(2,1)(3,4):S1] hay más negras que blancas ({E<>})
- 31[(19,3)(20,8):S1] hay mucho más canicas negras que blancas, allá hay muchas negras, pero también hay un poco más de canicas blancas ({R+ & (D- ~ F+)})
- 32[(2,1)(4,2):=] igual, no en número, pero en posibilidades igual ({P= ~ N-})
- 33[(1,4)(10,13):S2] la posibilidad es igual en cuanto al número de blancas: son tres de diferencia. Sin embargo aquí hay más canicas negras que allá ({F+ \* R=})
- 34[(3,2)(11,11):S1] por mayor número de canicas negras (que blancas) ({E>})
- 35[(9,11)(6,23):S1] hay muy poca diferencia de canicas negras hacia las blancas, nada más es por dos canicas, allá son veintitres a seis: diecisiete ({R+})
- 36[(12,12)(14,14):S1] nada más por número de cantidades menor, S1, porque son iguales. En probabilidades están las dos a igual probabilidad de que salga, pero en cantidades es mejor S1 ({N- \* P=})
- 37.3[(1,2)(3,4):=] por la diferencia de una carta que hay (en cada lado para que sean iguales blancas y negras) ({R=})
- 37.4[(1,2)(2,4):=] en cantidad son diferentes, la probabilidad, pero en sí... cuatro a dos, dos a una ({P=})
- 38.3[(1,1)(2,2):=] por un lado sí y por un lado no, sí porque a cada negra le corresponde una blanca ({P=})
- 38.5[(2,2)(4,4):=] a cada negra le corresponde una blanca ({P=})
- 39.2[(2,1)(3,2):=] aquí a cada dos canicas negras le corresponde una blanca, acá a cada tres negras le corresponden dos blancas. La diferencia es de una canica

- 32[(2,1)(4,2):S1] (S/I: sin justificación)
- 33[(1,4)(10,13):S2] (S/I: sin justificación)
- 34/1[(3,2)(11,11):S2] *aunque hay más cantidad de canicas, pero hay más negras* (F+ - N-)
- 34/2[(3,2)(11,11):S1] (lo convence el argumento de W) (E>)
- 35[(9,11)(6,23):S1] (S/I: sin justificación)
- 36[(12,12)(14,14):=] (S/I: sin justificación)
- 37.4[(1,2)(2,4):=] *por como dice W, se está duplicando* (CAN: no es su opinión)
- 38.5[(2,2)(4,4):=] *sí, está bien (como dice W: se duplica)* (CAN: no es su opinión)
- 39.1[(2,1)(4,2):=] (CAN: no es su opinión)
- 40.5[(7,14)(9,18):S2] *ya habría más oportunidad aquí porque son dos cartas más* (F+).



**ANEXO 6: INTERPRETACIONES CLASIFICADAS  
POR COMBINACION, UBICACION Y TIPO DE RESPUESTA**

Se presentan en este anexo todas las estrategias de las respuestas interpretadas para cada situación de combinación y caso y para cada tipo de respuesta (según si se trata de una respuesta correcta o de alguna de las dos respuestas incorrectas posibles). Asimismo, se presentan las estrategias clasificadas según los totales parciales de cada una de estas tres variables y según el gran total. El anexo se divide en las siguientes ocho partes:

- COMB-UBIC-TIPO: respuestas para cada situación de combinación, caso y tipo de respuesta;
- COMB-UBIC-////: respuestas para cada situación de combinación y ubicación, independientemente del tipo de respuesta;
- COMB-////-TIPO: respuestas para cada situación de combinación y tipo de respuesta, independientemente de la ubicación;
- ////-UBIC-TIPO: respuestas para cada situación de ubicación y tipo de respuesta, independientemente de la combinación;
- COMB-////-////: respuestas para cada situación de combinación, independientemente de la ubicación y del tipo de respuesta;
- ////-UBIC-////: respuestas para cada situación de ubicación, independientemente de la combinación y del tipo de respuesta;
- ////-////-TIPO: respuestas para cada tipo de respuesta, independientemente de la combinación y de la ubicación;
- ////-////-////: todas las respuestas, independientemente de la combinación, de la ubicación y del tipo de respuesta.

Dentro de cada una de esas partes se reportan las situaciones correspondientes, según:

La combinación:

Si  $K = nfdrp$ , entonces las diecisiete combinaciones posibles son:

K-1= 11211	K-6= 11111	K10= 11101	K14= 11120
K-2= 12122	K-7= 11122	K11= 11102	K15= 11110
K-3= 01211	K-8= 11121	K12= 10120	K16= 11100
K-4= 11011	K-9= 11112	K13= 11010	K-0= 00000
K-5= 10122			

una estrategia  $E_1$  es dominante si aparece en una composición de dos o más estrategias en una de las siguientes posiciones:

conjugante  $(E_2 \& E_2)$  ó  $(E_2 \& E_1)$   
 excluyente  $(E_1 \neg E_2)$   
 compensante  $(E_1 * E_2)$

una estrategia  $E_2$  es dominada si aparece en una composición de dos o más estrategias en una de las siguientes posiciones:

excluida  $(E_1 \neg E_2)$   
 compensada  $(E_1 * E_2)$   
 en contrapeso:  $(E_1 \forall E_2)$  ó  $(E_2 \forall E_1)$

Este tipo de participación se marca de acuerdo con la siguiente nomenclatura: Si  $E_1$  es una estrategia simple y  $k$  es un número natural, entonces en este renglón:

$kE_1$  es el número de veces en que ocurrió  $E_1$  como estrategia simple;  
 $k+E_1$  es el número de veces en que ocurrió  $E_1$  como estrategia dominante;  
 $k-E_1$  es el número de veces en que ocurrió  $E_1$  como estrategia dominada

Tanto en las estrategias simples como en la distribución, el orden está dado por las que tienen que ver con las estrategias de un elemento  $N$  (casos totales),  $F$  (casos favorables),  $D$  (casos desfavorables) o con las estrategias de dos elementos  $E$  (estrategias de equilibrio),  $R$  (estrategias sustractivas),  $P$  (estrategias de proporcionalidad).

**Ejemplo:**

Se presenta como ejemplo la lectura de uno de los párrafos de la primera parte de este anexo:

K11, U3.4; resp LC: 21 sin + 29 con = 50  
 simples: N: 6{N-}; D: 6{D-}; P: 9{P+} 2{P'}  
 compuestas: {&}: 1P+&(); {-}: 1{N--F+} 1{D--F+};  
 {\*}: 1{N-\*E=} 1{D-\*E=} 1{D-\*E=}  
 múltiples: 1{P+&(D-\*E=)}  
 primitivas: 1{F-}  
 distribuc: N: 6N- 2+N-; F: 1F- 2-F+; D: 6D- 3+D-; E: 3-E=;  
 P: 9P+ 2P' 1+P+

En la combinación K11 en la ubicación U3.4 hubo 50 respuestas: 21 de ellas sin interpretación y 29 con ella.

Entre las 29 respuestas interpretadas, hubo 6+6+10+1= 23 estrategias simples, 1+1+1+1+= 4 compuestas, 1 múltiple y 1 primitiva.

Las 23 simples fueron: 6 respuestas interpretadas como {N-}, 6 como {D-}, 9 como {P+} y 2 como {P'}.

Las 4 compuestas fueron: dos en exclusión: 1 como {N--F+} y 1 como {D--F+}; y dos en compensación: 1 como {N-\*E=} y 1 como

compuestas: {&}: 1{N-&R+};  
 {\*}: 3{F+\*E=}  
 distribuc: N: 1+N-; F: 1F+  
 3+F+; D: 2D-;  
 E: 3-E=; R: 1R+  
 1+R+

K-2, U3.2; resp LI: 0 sin +  
 1 con = 1  
 primitivas: 1{F1}  
 distribuc: F: 1F1

K-3, U1.3; resp II: 1 sin +  
 0 con = 1

K-3, U1.3; resp LC: 0 sin +  
 59 con = 59  
 simples: F: 15{F+}; D:  
 17{D-}; P:  
 18{P+}  
 compuestas: {&}: 6{F+&D-}  
 1{F+&P+}; {\*}:  
 1{F+\*N=} 1{D-\*N=}  
 distribuc: N: 2-N=; F: 15F+  
 8+F+; D: 17D-  
 7+D-; P: 18P+  
 1+P+

K-3, U2.1; resp II: 1 sin +  
 1 con = 2  
 simples: N: 1{N=}  
 distribuc: N: 1N=

K-3, U2.1; resp LC: 1 sin +  
 52 con = 53  
 simples: F: 40{F+}; E:  
 1{E<}; P: 9{P+}  
 compuestas: {&}: 2{F+&E<}  
 distribuc: F: 40F+ 2+F+; E:  
 1E< 2+E<; P: 9P+

K-3, U2.1; resp LI: 2 sin +  
 0 con = 2

K-3, U2.2; resp II: 2 sin +  
 1 con = 3  
 simples: P: 1{P'}  
 distribuc: P: 1P'

K-3, U2.2; resp LC: 15 sin +  
 37 con = 52

simples: F: 8{F+}; E:  
 9{E<}; P: 12{P+}  
 compuestas: {\*}: 8{F+\*N=};  
 distribuc: N: 8-N=; F: 8F+  
 8+F+; E: 9E<;  
 P: 12P+

K-3, U2.2; resp LI: 2 sin +  
 0 con = 2

K-3, U2.3; resp LC: 7 sin +  
 3 con = 10  
 simples: E: 3{E<}  
 distribuc: E: 3E<;

K-3, U2.4; resp LC: 5 sin +  
 5 con = 10  
 simples: F: 3{F+}; E:  
 2{E>}  
 distribuc: F: 3F+; E: 2E>

K-3, U2.5; resp II: 1 sin +  
 0 con = 1

K-3, U2.5; resp LC: 4 sin +  
 39 con = 43  
 simples: F: 9{F+}; D:  
 15{D-}; P:  
 13{P+}  
 compuestas: {&}: 1{F+&D-};  
 {\*}: 1{F+\*N=};  
 distribuc: N: 1-N=; F: 9F+  
 2+F+; D: 15D-  
 1+D-; P: 13P+

K-3, U3.2; resp II: 0 sin +  
 1 con = 1  
 simples: E: 1{E=}  
 distribuc: E: 1E=

K-4, U2.1; resp LC: 0 sin +  
 38 con = 38  
 simples: F: 30{F+}; E:  
 1{E<}; P: 7{P+}  
 distribuc: F: 30F+; E: 1E<;  
 P: 7P+

K-4, U2.1; resp LI: 1 sin +  
 0 con = 1

K-4, U2.3; resp LC: 8 sin +  
 7 con = 15

simples: N: 1{N-}; D:  
1{D-}; E: 7{E<>}  
distribuc: N: 1N-; D: 1D-;  
E: 7E<>

K-5, U2.4; resp II: 0 sin +  
1 con = 1  
simples: F: 1{F=}  
distribuc: F: 1F=

K-5, U2.4; resp LC: 3 sin +  
9 con = 12  
simples: N: 2{N-}; D:  
1{D-}; E: {5E>};  
P: 1{P+}  
distribuc: N: 2N-; D: 1D-;  
E: 5E>; P: 1P+

K-5, U2.4; resp LI: 0 sin +  
1 con = 1  
primitivas: 1{E5}  
distribuc: E: 1E5

K-5, U2.5; resp II: 1 sin +  
2 con = 3  
simples: F: 2{F=}  
distribuc: F: 2{F=}

K-5, U2.5; resp LC: 3 sin +  
37 con = 40  
simples: D: 23{D-}; P:  
14{P+}  
distribuc: D: 23D-; P: 14P+

K-5, U3.2; resp II: 1 sin +  
2 con = 3  
simples: F: 1{F=}; E:  
1{E=}  
distribuc: F: 1F=; E: 1E=

K-5, U3.2; resp LC: 3 sin +  
1 con = 4  
compuestas: {\*}: 1{D-\*E=}  
distribuc: D: 1D-; E: 1-E=

K-5, U3.4; resp LC: 0 sin +  
1 con = 1  
compuestas: {\*}: 1{D-\*F=}  
distribuc: F: 1-F=; D: 1D-

K-6, U2.2; resp II: 1 sin +  
0 con = 1

K-6, U2.2; resp LC: 4 sin +  
8 con = 12

simples: E: {5E<>}; R:  
3{R+}  
distribuc: E: 5E<; R: 3R+

K-6, U2.2; resp LI: 0 sin +  
2 con = 2  
simples: N: 1{N-}  
compuestas: {-}: 1{D--E<}  
distribuc: N: 1N-; D: 1D-;  
E: 1-E<

K-6, U2.3; resp II: 1 sin +  
1 con = 2  
compuestas: {W}: 1{N-WE<}  
distribuc: N: 1-N-; E: 1-  
E<>;

K-6, U2.3; resp LC: 3 sin +  
13 con = 16  
simples: F: 5{F+}; E:  
{6E<>}; P: 1{P+}  
primitivas: 1{N+&F+}  
distribuc: N: 1+N+; F: 5F+  
1+F+; E: 6E<>;  
P: 1P+

K-6, U2.3; resp LI: 0 sin +  
4 con = 4  
simples: N: 2{N-}  
compuestas: {-}: 1{N--E<>}  
primitivas: 1{F-}  
distribuc: N: 2N- 1+N-; F:  
1F-; E: 1-E<>

K-6, U2.4; resp LC: 5 sin +  
6 con = 11  
simples: F: 4{F+}; P:  
1{P+}  
primitivas: 1{N+&F+}  
distribuc: N: 1+N+; F: 4F+  
1+F+; P: 1P+

K-6, U2.4; resp LI: 0 sin +  
3 con = 3  
simples: N: 1{N-}  
primitivas: 1{E5} 1{N-&E5}  
distribuc: N: 1N- 1+N-; E:  
1E5 1+E5

K-6, U3.2; resp LC: 2 sin +  
3 con = 5

compuestas:  $\{\&\}$ :  $1D-\&()$ ;  
 $\{-\}$ :  $2(N-\neg F+)$ ;  
 $\{*\}$ :  $2\{N-*E=\}$   
 $1\{R+*E=\}$   $1()\ast E=$   
múltiples:  $1\{D-\&(N-\neg F+)\}$   
 $1\{(N-\neg F+)*E=\}$   
distribuc: N:  $5N- 4+N-$ ; F:  
 $2-F+$ ; D:  $1D-$   
 $1+D-$ ; E:  $4-E=$ ;  
R:  $2R+ 1+R+$

distribuc: N:  $1+N-$ ; F:  $1F-$ ;  
D:  $9D- 1+D-$ ; P:  
 $1P+$

K-9, U3.4; resp II: 0 sin +  
6 con = 6  
simples: E:  $6\{E=\}$   
distribuc: E:  $6E=$

K10, U3.2; resp II: 3 sin +  
12 con = 15  
simples: E:  $7\{E=\}$ ; R:  
 $5\{R=\}$   
distribuc: E:  $7E=$ ; R:  $5R=$

K-9, U3.4; resp LC: 7 sin +  
12 con = 19  
simples: D:  $5\{D-\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $1(F+\&R+)$ ;  
 $\{-\}$ :  $2\{D-\neg F+\}$   $1D-$   
 $\neg()$ ;  
 $\{*\}$ :  $1\{N-*E=\}$   
 $1\{D-*E=\}$

K10, U3.2; resp LC: 5 sin +  
15 con = 20  
simples: F:  $7\{F+\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $1(N-\&D-)$ ;  
 $\{-\}$ :  $2\{F+\neg N-\}$   
 $1(F+\neg N-) 1F+\neg()$ ;  
 $\{*\}$ :  $2\{F+*E=\}$   
 $2\{F+*R=\}$   $1()\ast R=$   
múltiples:  $1\{F+\neg(N-\&D-)\}$   
 $1\{(F+\neg N-)*R=\}$   
distribuc: N:  $4-N-$ ; F:  $7F+$   
 $8+F+$ ; D:  $1-D-$ ;  
E:  $2-E=$ ; R:  $3-$   
R=

múltiples:  $1\{D-\neg(F+\&R+)\}$   
primitivas:  $2\{R-\}$   
distribuc: N:  $1+N-$ ; F:  $3-$   
 $F+$ ; D:  $5D- 4+D-$   
; E:  $2-E=$ ;  
R:  $2R- 1-R+$

K10, U3.2; resp LI: 0 sin +  
9 con = 9  
simples: N:  $3\{N-\}$ ; D:  
 $2\{D-\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $1\{N-\&D-\}$ ;  
 $\{-\}$ :  $1\{N-\neg F+\}$ ;  
 $\{*\}$ :  $1\{D-*E=\}$   
primitivas:  $1\{F1\}$   
distribuc: N:  $3N- 2+N-$ ; F:  
 $1F1 1-F+$ ; D:  $2D-$   
 $2+D-$ ; E:  $1-E=$

K-9, U3.4; resp LI: 1 sin +  
11 con = 12  
simples: F:  $8\{F+\}$ ; R:  
 $2\{R+\}$   
primitivas:  $1\{N+\}$   
distribuc: N:  $1N+$ ; F:  $8F+$ ;  
R:  $2R+$

K11, U3.4; resp II: 7 sin +  
19 con = 26  
simples: E:  $10\{E=\}$ ; R:  
 $6\{R=\}$ ; P:  $2\{P'\}$   
compuestas:  $\{-\}$ :  $1\{E=-N-\}$   
distribuc: N:  $1-N-$ ; E:  $10E=$   
 $1+E=$ ; R:  $6R=$ ;  
P:  $2P'$

K-9, U3.5; resp LC: 0 sin +  
12 con = 12  
simples: D:  $9\{D-\}$ ; P:  
 $1\{P+\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $1\{N-\&D-\}$   
primitivas:  $1\{F-\}$

K11, U3.4; resp LC: 21 sin +  
29 con = 50

K14, U3.2; resp L2: 5 sin +  
 20 con = 25  
 simples: F: 13{F+}; P:  
 1{P'}  
 compuestas: {-}: 3{F+~N-};  
 {\*}: 1{F+\*E=}  
 primitivas: 1{N+} 1{D+}  
 distribuc: N: 1N+ 3-N-; F:  
 13F+ 4+F+; D:  
 1D+; E: 1-E=;  
 P: 1P'

simples: P: 31{P=}  
 compuestas: {-}: 1{P=-N-}  
 distribuc: N: 1-N-; P: 28P=  
 3P= 1+P=

K16, U3.3; resp L1: 3 sin +  
 16 con = 19  
 simples: N: 6{N-}; D:  
 3{D-}; P: 2{P'}  
 compuestas: {\*}: 4{N-\*P=}  
 1{D-\*P=}  
 distribuc: N: 6N- 4+N-; D:  
 3D- 1+D-; P: 2P'  
 5-P=

K15, U3.4; resp IC: 6 sin +  
 18 con = 24  
 simples: E: 5{E=}; P:  
 9{P=} 1{P'}  
 compuestas: {&}: 1{E=&P=};  
 {-}: 1{E=-F+}  
 1{P=-N-}  
 distribuc: N: 1-N-; F: 1-  
 F+; E: 5E= 2+E=;  
 P: 5P= 1P' 4P=  
 2+P=

K16, U3.3; resp L2: 4 sin +  
 17 con = 21  
 simples: F: 11{F+}; P:  
 2{P'}  
 compuestas: {-}: 3{F+~D-};  
 {\*}: 1{F+\*P=}  
 distribuc: F: 11F+ 4+F+; D:  
 3-D-; P: 2P' 1-  
 P=

K15, U3.4; resp L1: 2 sin +  
 7 con = 9  
 simples: D: 2{D-};  
 compuestas: {\*}: 2{N-\*E=}  
 1{N-\*P=};  
 primitivas: 1{F-} 1{D-~N+}  
 distribuc: N: 3+N- 1-N+; F:  
 1F-; D: 2D- 1+D-  
 ; E: 2-E=; P:  
 1-P=

K-0, U3.3; resp IC: 20 sin +  
 35 con = 55  
 simples: N: 2{N=}; F:  
 7{F=}; P: 7{P=}  
 1{P'}  
 compuestas: {&}: 7{N=&F=}  
 11{F=&D=}  
 distribuc: N: 2N= 7+N=; F:  
 7F= 18+F=; D:  
 11+D=; P: 7P=  
 1P'

K15, U3.4; resp L2: 4 sin +  
 6 con = 10  
 simples: F: 5{F+}  
 compuestas: {\*}: 1{R+\*E=}  
 distribuc: F: 5F+; E: 1-E=;  
 R: 1+R+

K-0, U3.3; resp L1: 1 sin +  
 0 con = 1

K-0, U3.3; resp L2: 3 sin +  
 0 con = 3

K16, U3.3; resp IC: 14 sin +  
 32 con = 46

K-3, U2.3; resp ////: 7 sin  
 + 3 con = 10  
 simples: E: 3{E<>}  
 distribuc: E: 3E<>

K-3, U2.4; resp ////: 5 sin  
 + 5 con = 10  
 simples: F: 3{F+}; E:  
 2{E>}  
 distribuc: F: 3F+; E: 2E>

K-3, U2.5; resp ////: 5 sin  
 + 39 con = 44  
 simples: F: 9{F+}; D:  
 15{D-}; P:  
 13{P+}  
 compuestas: {&}: 1{F+&D-};  
 {\*}: 1{F+\*N=}  
 distribuc: N: 1-N=; F: 9F+  
 2+F+; D: 15D-  
 1+D-; P: 13P+

K-3, U3.2; resp ////: 0 sin  
 + 1 con = 1  
 simples: E: 1{E=}  
 distribuc: E: 1E=

-----

K-4, U2.1; resp ////: 1 sin  
 + 38 con = 39  
 simples: F: 30{F+}; E:  
 1{E<}; P: 7{P+}  
 distribuc: F: 30F+; E: 1E<;  
 P: 7P+

K-4, U2.3; resp ////: 8 sin  
 + 7 con = 15  
 simples: F: 3{F+}; E:  
 4{E<>}  
 distribuc: F: 3F+; E: 4E<>

K-4, U2.4; resp ////: 53 sin  
 + 91 con = 144  
 simples: N: 2{N-}; F:  
 22{F+}; D:  
 4{D=}; E:  
 18{E>}; P:  
 23{P+} 7{P'  
 compuestas: {&}: 1{F+&E>};  
 {\*}: 6{F+\*D=}  
 primitivas: 4{E5} 1{F+~E5}  
 1{E5~F+} 2{F+\*F1}

distribuc: N: 2N-; F: 22F+  
 8+F+ 3-F+ 2-F1;  
 D: 4D= 6-D= E:  
 18E> 4E5 1+E> 1+E5  
 1-E5; P: 23P+  
 7P'

K-4, U3.2; resp ////: 0 sin  
 + 2 con = 2  
 simples: F: 1{F+}; E:  
 1{E=}  
 distribuc: F: 1F+; E: 1E=

K-4, U3.4; resp ////: 32 sin  
 + 61 con = 93  
 simples: N: 2{N-}; F:  
 15{F+}; D:  
 8{D=}; E: 8{E=}  
 P: 12{P+} 4{P'  
 compuestas: {&}: 3{D=&E=};  
 {~}: 1{E=~F+};  
 {\*}: 1{N-\*D=}  
 1{F+\*D=} 2{F+\*E=}  
 primitivas: 1{F-} 3{N+\*D=}  
 distribuc: N: 2N- 1+N- 3+N+;  
 F: 15F+ 1F- 3+F+  
 1-F+; D: 8D=  
 3+D= 5-D=; E:  
 8E= 4+E= 2-E=;  
 P: 12P+ 4P'

-----

K-5, U2.2; resp ////: 39 sin  
 + 70 con = 109  
 simples: N: 8{N-}; F:  
 4{F=}; D: 6{D-  
 }; E: {28E<};  
 P: 10{P+} 1{P'  
 compuestas: {&}: 1{N-&E<};  
 {~}: 1{F=~D-};  
 {\*}: 7{N-\*F=}  
 2{D-\*F=}  
 primitivas: 1{N+} 1{N+\*F=}  
 distribuc: N: 8N- 1N+ 8+N-  
 1+N+; F: 4F=  
 1+F= 10-F=;  
 D: 6D- 2+D- 1-D-;  
 E: 28E< 1+E<; P:  
 10P+ 1P'

K-5, U2.3; resp ////: 5 sin  
 + 9 con = 14

distribuc: N: 1-N-; F:  
1+F+; E: 4E> 1-  
E> 1+E5

K-7, U3.2; resp ////: 0 sin  
+ 2 con = 2

simples: R: 1{R+}  
compuestas: {&}: 1{N-&R+}  
distribuc: N: 1+N-; R: 1R+  
1+R+

K-7, U3.4; resp ////: 2 sin  
+ 3 con = 5

simples: E: 1{E=}  
compuestas: {&}: 1R+&();  
{-}: 1{D-&F+};  
{\*}: 1{D-\*E=}  
múltiples: 1{R+&(D-&F+)}  
distribuc: F: 1-F+; D: 2+D-  
; E: 1E= 1-E=;  
R: 1+R+

K-8, U3.2; resp ////: 6 sin  
+ 32 con = 38

simples: N: 5{N-}; F:  
7{F+}; D: 1{D-};  
E: 7{E=}; R:  
2{R+}

compuestas: {&}: 1{N-&N-}  
1{)&D-}; {-}:  
2{N-&F+} 1{E=-N-}  
1F+&(); {\*}:  
2{N-\*E=} 1{F+\*E=}  
1{R+\*E=} 1{)\*E=};  
{#}: 1{F+\*R+}

múltiples: 1{D-&(N-&F+)}  
1{F+&(N-&D-)}  
1{(N-&F+)\*E=}

primitivas: 1{N+}  
distribuc: N: 5N- 1N+ 4+N- 2-  
N-; F: 7F+ 2+F+  
3-F+; D: 1D-  
1+D- 1-D-; E:  
7E= 1+E= 5-E=;  
R: 2R+ 1+R+ 1-R+

K-9, U3.4; resp ////: 8 sin  
+ 29 con = 37

simples: F: 8{F+}; D:  
5{D-}; E: 6{E=};  
R: 2{R+}

compuestas: {&}: 1{F+&R+};  
{-}: 2{D-&F+} 1D-  
&(); {\*}:  
\*E=} 1{D-\*E=}

múltiples: 1{D-&(F+&R+)}  
primitivas: 1{N+} 2{R-}  
distribuc: N: 1N+ 1+N-; F:  
8F+ 3-F+; D: 5D-  
4+D-; E: 6E= 2-  
E=; R: 2R+ 2R-  
1-R+

K-9, U3.5; resp ////: 1 sin  
+ 15 con = 16

simples: D: 9{D-}; P:  
1{P+}

compuestas: {&}: 1{N-&D-};  
{#}: 2{N-#F+}  
1{F+\*D-}

primitivas: 1{F-}  
distribuc: N: 1+N- 2-N-;  
F: 1F- 3-F+; D:  
9D- 1+D- 1-D-;  
P: 1P+

K10, U3.2; resp ////: 8 sin  
+ 36 con = 44

simples: N: 3{N-}; F:  
7{F+}; D: 2{D-}  
; E: 7{E=};  
R: 5{R=}

compuestas: {&}: 1{N-&D-}  
1{N-&D-}; {-}:  
1{N-&F+} 2{F+&N-}  
1{F+&N-} 1F+&();  
{\*}: 2{F+\*E=}  
2{F+\*R=} 1{D-\*E=}  
1{)\*R=}

múltiples: 1{F+&(N-&D-)}  
1{(F+&N-)\*R=}

primitivas: 1{F1}  
distribuc: N: 3N- 2+N- 4-N-;  
F: 7F+ 1F1 8+F+ 1-  
F+; D: 2D-  
2+D- 1-D-; E:  
7E= 3-E=; R: 5R=  
3-R=;



R: 1+R+; P: 5P=  
 1P' 4P= 2+P= 1-P=

P: 28P= 4P' 3P=  
 1+P= 6-P=

K16, U3.3; resp ////: 21 sin  
 + 65 con = 86  
 simples: N: 6{N-}; F:  
 11{F+}; D: 3{D-};  
 P: 31{P=}  
 4{P'}  
 compuestas: {-}: 3{F+-D-}  
 1{P=-N-}; {\*}:  
 4{N-\*P=} 1{F+\*P=}  
 1{D-\*P=}  
 distribuc: N: 6N- 4+N- 1-N-;  
 F: 11F+ 4+F+; D:  
 3D- 1+D- 3-D-;

K-0, U3.3; resp ////: 24 sin  
 + 35 con = 59  
 simples: N: 2{N=}; F:  
 7{F=}; P: 7{P=} 1{P'}  
 compuestas: {&}: 7{N=&F=} 11{F=&D=}  
 distribuc: N: 2N= 7+N=; F:  
 7F= 18+F=; D:  
 11+D=; P: 7P= 1P'

TERCERA PARTE: COMB-////-TIPO

**RESPUESTAS PARA CADA SITUACION DE  
 COMBINACION Y TIPO DE RESPUESTA,  
 INDEPENDIENTEMENTE DE LA UBICACION**

K-1, ////; resp LC: 14 sin +  
 14 con = 28  
 simples: F: 5{F+}; R:  
 4{R+}  
 compuestas: {&}: 2{F+&D-}  
 1{F+&D-}; {-}:  
 1{)-N-};  
 {\*}: 2{D-\*E=}  
 múltiples: 1{(F+&D-)-N-}  
 distribuc: N: 1-N-; F: 5F+  
 3+F+; D: 5+D-;  
 E: 2-E=; R:  
 4R+;

4{E<}; R:  
 1{R+}; P: 1{P+}  
 compuestas: {&}: 1{N-&R+};  
 {\*}: 3{F+\*E=}  
 distribuc: N: 1+N-; F: 14F+  
 3+F+; D: 2D-;  
 E: 4E< 3-E=; R:  
 1R+ 1+R+; P: 1P+

K-2, ////; resp LI: 0 sin +  
 1 con = 1  
 primitivas: 1{F1}  
 distribuc: F: 1F1

K-2, ////; resp II: 0 sin +  
 2 con = 2  
 simples: E: 2{E=}  
 distribuc: E: 2E=

K-3, ////; resp II: 5 sin +  
 3 con = 8  
 simples: N: 1{N=}; E:  
 1{E=}; P: 1{P'}  
 distribuc: N: 1N=; E: 1E=;  
 P: 1P'

K-2, ////; resp LC: 20 sin +  
 26 con = 46  
 simples: F: 14{F+}; D:  
 2{D-}; E:

K-3, ////; resp LC: 32 sin +  
 195 con = 227

R: 5{R+}; P: 3{P+}  
 compuestas: {\*}: 2{F+\*E=} 1{R+\*E=} 2{N+&F+}  
 primitivas: N: 2+N+; F: 10F+ 4+F+; E: 6E<> 5E< 3-E=;  
 distribuc: R: 5R+ 1+R+; P: 3P+

K-6, ////; resp LI: 2 sin + 11 con = 13  
 simples: N: 4{N-}  
 compuestas: {-}: 1{N-~E<>} 2{D-~F+} 1{D-~E<}  
 primitivas: 1{F-} 1{E5} 1{N- &E5}  
 distribuc: N: 4N- 2+N-; F: 1F- 2-F+; D: 3+D-; E: 1E5 1-E<> 1-E< 1+E5;

K-7, ////; resp II: 0 sin + 1 con = 1  
 simples: E: 1{E=}  
 distribuc: E: 1E=

K-7, ////; resp LC: 4 sin + 13 con = 17  
 simples: E: 2{E<>} 4{E>}; R: 1{R+}  
 compuestas: {&}: 2{N-&E<>} 1{N-&R+} 1R+&(); {-}: 1{N-~F+} 1{D-~F+}; {\*}:  
 1{D-\*E=} 1{R+&(D-~F+)}  
 múltiples: N: 4+N-; F: 2-F+; D: 2+D-; E: 2E<> 4E> 2+E<> 1-E=; R: 1R+ 2+R+

K-7, ////; resp LI: 1 sin + 4 con = 5  
 simples: F: 1{F+}  
 compuestas: {-}: 1{F+~N-} 1{F+~E<>}  
 primitivas: 1{E5-E>}

distribuc: N: 1-N-; F: 1F+ 2+F+; E: 1-E<> 1-E> 1+E5

K-8, ////; resp II: 0 sin + 9 con = 9  
 simples: E: 7{E=}  
 compuestas: {-}: 1{E=-N-}; {¥}: 1{F+¥R+}  
 distribuc: N: 1-N-; F: 1-F+; E: 7E= 1+E=; R: 1-R+

K-8, ////; resp LC: 4 sin + 10 con = 14  
 simples: F: 7{F+}  
 compuestas: {&}: 1{N-&D-}; {-}: 1F+~(); {\*}:  
 1{F+\*E=} múltiples: 1{F+~(N-&D-)}  
 primitivas: 1{N+}  
 distribuc: N: 1N+ 1-N-; F: 7F+ 2+F+; D: 1-D-; E: 1-E=

K-8, ////; resp LI: 2 sin + 13 con = 15  
 simples: N: 5{N-}; D: 1{D-}; R: 2{R+}  
 compuestas: {&}: 1{()&D-}; {-}: 2{N-~F+}; {\*}:  
 2{N-\*E=} 1{R+\*E=} 1{()\*E=} 1{D-&(N-~F+)}  
 1{(N-~F+)\*E=} distribuc: N: 5N- 4+N-; F: 2-F+; D: 1D- 1+D-; E: 4-E=; R: 2R+ 1+R+

K-9, ////; resp II: 1 sin + 9 con = 10  
 simples: E: 6{E=}  
 compuestas: {¥}: 2{N-¥F+} 1{F+¥D-}  
 distribuc: N: 2-N-; F: 3-F+; D: 1-D-; E: 6E=;

simples: F:  $42\{F=\};$  P:  $4\{P=\}$   
 compuestas:  $\{\&\}: 2\{F=\&P=\};$   
 distribuc: F:  $42F= 2+F=;$  P:  $4P= 2+P=$

K12, ////; resp L2: 0 sin +  
 3 con = 3  
 primitivas:  $2\{N+\}$   $1\{D+\}$   
 distribuc: N:  $2N+;$  D:  $1D+$

K13, ////; resp IC: 12 sin +  
 36 con = 48  
 simples: D:  $21\{D=\};$  P:  $13\{P=\}$   
 compuestas:  $\{-\}: 2\{D=-N-\}$   
 distribuc: N:  $2-N-;$  D:  $21D=$   
 $2+D=;$  P:  $13P=$

K13, ////; resp L1: 0 sin +  
 5 con = 5  
 simples: N:  $1\{N-\};$  P:  $1\{P'\}$   
 compuestas:  $\{*\}: 2\{N-*D=\}$   
 $1\{N-*P=\};$   
 distribuc: N:  $1N- 3+N-;$  D:  $2-D=;$  P:  $1P' 1-P=$

K13, ////; resp L2: 0 sin +  
 10 con = 10  
 simples: F:  $4\{F+\}$   
 compuestas:  $\{*\}: 4\{F+*D=\}$   
 primitivas:  $2\{N+*D=\}$   
 distribuc: N:  $2+N+;$  F:  $4F+$   
 $4+F+;$  D:  $6-D=$

K14, ////; resp IC: 15 sin +  
 50 con = 65  
 simples: E:  $16\{E=\};$  P:  $29\{P=\}$   $1\{P'\}$   
 compuestas:  $\{-\}: 1\{E=-N-\}$   
 $1\{E=-F+\};$   $\{\mathbb{W}\}: 2\{N-\mathbb{W}F+\}$   
 distribuc: N:  $3-N-;$  F:  $3-F+;$  E:  $16E=$   
 $2+E=;$  P:  $20P=$   
 $1P' 9P=$

K14, ////; resp L1: 6 sin +  
 28 con = 34  
 simples: N:  $14\{N-\};$  D:  $3\{D-\};$  R:  $3\{R+\};$   
 compuestas:  $\{\&\}: 1\{N-\&D-\};$   
 $\{-\}: 2\{N-\neg F+\}$   
 $1\{D-\neg F+\};$   
 $\{*\}: 1\{N-*P=\}$   
 $1\{D-*P=\}$   $1\{()\} *E=$   
 múltiples:  $1\{(N-\&D-)*E=\}$   
 primitivas:  $1\{F1\}$   $1\{F-\}$   
 distribuc: N:  $14N- 4+N-;$   
 F:  $1F1 1F- 3-F+;$   
 D:  $3D- 3+D-;$  E:  $1-E=;$  R:  $3R+;$   
 P:  $2-P=$

K14, ////; resp L2: 5 sin +  
 20 con = 25  
 simples: F:  $13\{F+\};$  P:  $1\{P'\}$   
 compuestas:  $\{-\}: 3\{F+*N-\};$   
 $\{*\}: 1\{F+*E=\}$   
 primitivas:  $1\{N+\}$   $1\{D+\}$   
 distribuc: N:  $1N+ 3-N-;$  F:  $13F+$   
 $4+F+;$  D:  $1D+;$  E:  $1-E=;$   
 P:  $1P'$

K15, ////; resp IC: 6 sin +  
 18 con = 24  
 simples: E:  $5\{E=\};$  P:  $9\{P=\}$   $1\{P'\}$   
 compuestas:  $\{\&\}: 1\{E=\&P=\};$   
 $\{-\}: 1\{E=-F+\}$   
 $1\{P=-N-\}$   
 distribuc: N:  $1-N-;$  F:  $1-F+;$  E:  $5E= 2+E=;$   
 P:  $5P= 1P' 4P=$   
 $2+P=$

K15, ////; resp L1: 2 sin +  
 7 con = 9  
 simples: D:  $2\{D-\}$   
 compuestas:  $\{*\}: 2\{N-*E=\}$   
 $1\{N-*P=\}$   
 primitivas:  $1\{F-\}$   $1\{D--N+\}$   
 distribuc: N:  $3+N- 1-N+;$  F:  $1F-;$  D:  $2D- 1+D-;$   
 E:  $2-E=;$  P:  $1-P=$

////, U2.1; resp LC: 1 sin  
+ 106 con = 107  
simples: F:  $83\{F+\}$ ; E:  
 $4\{E<\}$ ; P:  $17\{P+\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $2\{F+\&E<\}$   
distribuc: F:  $83F+ 2+F+$ ; E:  
 $4E< 2+E<$ ; P:  
 $17P+$

////, U2.1; resp LI: 3 sin  
+ 0 con = 3

////, U2.2; resp II: 10 sin  
+ 6 con = 16  
simples: F:  $4\{F=\}$ ; P:  
 $1\{P'\}$   
compuestas:  $\{-\}$ :  $1\{F=-D-\}$   
distribuc: F:  $4F= 1+F=$ ; D:  
 $1-D-$ ; P:  $1P'$

////, U2.2; resp LC: 52 sin  
+ 110 con = 162  
simples: N:  $8\{N-\}$ ; F:  
 $8\{F+\}$ ; D:  $6\{D-\}$   
}; E:  $44\{E<\}$   
R:  $3\{R+\}$ ; P:  
 $22\{P+\}$   $1\{P'\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $1\{N-\&E<\}$   
 $\{*\}$ :  $7\{N-*F=\}$   
 $8\{F+*N=\}$   $2\{D-*F=\}$   
distribuc: N:  $8N- 8+N- 8-N=$ ;  
F:  $8F+ 8+F+ 9-F=$ ;  
D:  $6D- 2+D-$ ; E:  
 $44E< 1+E<$ ; R:  
 $3R+$ ; P:  $22P+ 1P'$

////, U2.2; resp LI: 3 sin  
+ 4 con = 7  
simples: N:  $1\{N-\}$   
compuestas:  $\{-\}$ :  $1\{D--E<\}$   
primitivas:  $1\{N+\}$   $1\{N+*F=\}$   
distribuc: N:  $1N- 1N+ 1+N+$ ;  
F:  $1-F=$ ; D:  $1+D-$   
; E:  $1-E<$ ;

////, U2.3; resp II: 1 sin  
+ 1 con = 2  
compuestas:  $\{\mathbb{W}\}$ :  $1\{N-\mathbb{W}E<\}$   
distribuc: N:  $1-N-$ ; E:  $1-$   
E<>

////, U2.3; resp LC: 33 sin  
+ 37 con = 70  
simples: N:  $1\{N-\}$ ; F:  
 $8\{F+\}$ ; D:  $1\{D-$   
}; E:  $22\{E<\}$ ;  
P:  $1\{P+\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $2\{N-\&E<\}$ ;  
 $\{-\}$ :  $1\{N--F+\}$ ;  
primitivas:  $1\{N+\&F+\}$   
distribuc: N:  $1N- 3+N- 1+N+$ ;  
F:  $8F+ 1+F+ 1-F+$ ;  
D:  $1D-$ ; E:  $22E<$ ;  
 $2+E<$ ; P:  $1P+$

////, U2.3; resp LI: 1 sin  
+ 6 con = 7  
simples: N:  $2\{N-\}$ ; F:  
 $1\{F+\}$   
compuestas:  $\{-\}$ :  $1\{N--E<\}$   
 $1\{F+-E<\}$   
primitivas:  $1\{F-\}$   
distribuc: N:  $2N- 1+N-$ ; F:  
 $1F+ 1F- 1+F+$ ; E:  
 $2-E<$

////, U2.4; resp II: 11 sin  
+ 8 con = 19  
simples: F:  $1\{F=\}$ ; D:  
 $4\{D=\}$ ; P:  $1\{P'\}$   
primitivas:  $2\{F+\mathbb{W}F1\}$   
distribuc: F:  $1F= 2-F+ 2-F1$ ;  
D:  $4D=$ ; P:  $1P'$

////, U2.4; resp LC: 54 sin  
+ 99 con = 153  
simples: N:  $2\{N-\}$ ; F:  
 $29\{F+\}$ ; D:  $1\{D-$   
}; E:  $29\{E>\}$ ;  
P:  $25\{P+\}$   $4\{P'\}$   
compuestas:  $\{\&\}$ :  $1\{F+\&E>\}$ ;  
 $\{*\}$ :  $6\{F+*D=\}$   
primitivas:  $1\{N+\&F+\}$   $1\{F+-E5\}$   
distribuc: N:  $2N- 1+N+$ ; F:  
 $29F+ 9+F+$ ; D:  
 $1D- 6-D=$ ; E:  
 $29E> 1+E> 1-E5$ ;  
P:  $25P+ 4P'$

////, U2.4; resp LI: 1 sin  
+ 15 con = 16

////, U3.2; resp L1: 6 sin  
 + 28 con = 34  
 simples: N: 14{N-}; D:  
 3{D-}; R: 3{R+}  
 compuestas: {&}: 1{N-&D-};  
 {-}: 2{N-~F+}  
 1{D-~F+};  
 {\*}: 1{N-\*P=}  
 1{D-\*P=} 1{ }\*E=  
 múltiples: 1{(N-&D-)\*E=}  
 primitivas: 1{F1} 1{F-}  
 distribuc: N: 14N- 4+N-;  
 F: 1F1 1F- 3-F+;  
 D: 3D- 3+D-; E:  
 1-E-; R: 3R+;  
 P: 2-P=

////, U3.2; resp L2: 5 sin  
 + 20 con = 25  
 simples: F: 13{F+}; P:  
 1{P'}  
 compuestas: {-}: 3{F+~N-};  
 {\*}: 1{F+\*E=}  
 primitivas: 1{N+} 1{D+}  
 distribuc: N: 1N+ 3-N-; F:  
 13F+ 4+F+; D:  
 1D+; E: 1-E=;  
 P: 1P'

////, U3.3; resp IC: 34 sin  
 + 67 con = 101  
 simples: N: 2{N=}; F:  
 7{F=}; P: 38{P=}  
 1{P'}  
 compuestas: {&}: 7{N=&F=}  
 11{F=&D=}; {-}:  
 1{P=-N-}  
 distribuc: N: 2N= 1-N- 7+N=;  
 F: 7F= 18+F=;  
 D: 11+D=; P:  
 35P= 1P' 3P= 1+P=

////, U3.3; resp L1: 4 sin  
 + 16 con = 20  
 simples: N: 6{N-}; D:  
 3{D-}; P: 2{P'}  
 compuestas: {\*}: 4{N-\*P=}  
 1{D-\*P=}  
 distribuc: N: 6N- 4+N-; D:  
 3D- 1+D-; P: 2P'  
 5-P=

////, U3.3; resp L2: 7 sin  
 + 17 con = 24  
 simples: F: 11{F+}; P:  
 2{P'}  
 compuestas: {-}: 3{F+~D-};  
 {\*}: 1{F+\*P=}  
 distribuc: F: 11F+ 4+F+; D:  
 3-D-; P: 2P' 1-  
 P=

////, U3.4; resp IC: 6 sin  
 + 18 con = 24  
 simples: E: 5{E=}; P:  
 9{P=} 1{P'}  
 compuestas: {&}: 1{E=&P=};  
 {-}: 1{E=-F+}  
 1{P=-N-}  
 distribuc: N: 1-N-; F:  
 1-F+; E:  
 5E= 2+E=;  
 P: 5P= 1P' 4P=  
 2+P=

////, U3.4; resp II: 15 sin  
 + 47 con = 62  
 simples: D: 8{D=}; E:  
 26{E=}; R:  
 6{R=}; P: 2{P'}  
 compuestas: {&}: 3{D=&E=};  
 {-}: 1{E=-N-}  
 1{E=-F+}  
 distribuc: N: 1-N-; F: 1-  
 F+; D: 8D= 3+D=;  
 E: 26E= 5+E=; R:  
 6R=; P: 2P'

////, U3.4; resp LC: 58 sin  
 + 95 con = 153  
 simples: N: 6{N-}; F:  
 18{F+}; D:  
 11{D-}; R:  
 4{R+}; P: 22{P+}  
 5{P'}  
 compuestas: {&}: 2{F+&D-}  
 1{F+&R+} 1R+&()  
 1P+&();  
 {-}: 1{N-~F+}  
 3{D-~F+} 1{D-~F+}  
 1D-~();  
 {\*}: 2{N-\*E=}  
 1{F+\*D=} 4{F+\*E=}

QUINTA PARTE: COMB-////-////

RESPUESTAS PARA CADA SITUACION DE  
COMBINACION,  
INDEPENDIENTEMENTE DE LA UBICACION Y DEL TIPO DE RESPUESTA

K-1, ////; resp ////: 14 sin  
+ 14 con = 28  
simples: F: 5{F+}; R:  
4{R+}  
compuestas: {&}: 2{F+&D-}  
1{F+&D-}; {-}:  
1{-N-};  
{\*}: 2{D-\*E=}  
múltiples: 1{(F+&D-)-N-}  
distribuc: N: 1-N-; F: 5F+  
3+F+; D: 5+D-;  
E: 2-E=; R: 4R+

K-2, ////; resp ////: 20 sin  
+ 29 con = 49  
simples: F: 14{F+}; D:  
2{D-}; E: 4{E<}  
2{E=}; R: 1{R+};  
P: 1{P+}  
compuestas: {&}: 1{N-&R+};  
{\*}: 3{F+\*E=}  
primitivas: 1{F1}  
distribuc: N: 1+N-; F: 14F+  
1F1 3+F+; D: 2D-  
; E: 4E< 2E= 3-  
E=; R: 1R+ 1R+;  
P: 1P+

-----  
K-3, ////; resp ////: 41 sin  
+ 198 con = 239  
simples: N: 1{N=}; F:  
75{F+}; D: 32{D-  
}; E: 3{E<>}  
10{E<} 2{E>}  
1{E=}; P: 52{P+}  
1{P'}  
compuestas: {&}: 7{F+&D-}  
2{F+&E<}  
1{F+&P+};  
{\*}: 10{F+\*N=}  
1{D-\*N=}  
distribuc: N: 1N= 11-N=;  
F: 75F+ 20+F+;  
D: 32D- 8+D-;  
E: 3E<> 10E< 2E>

1E= 2+E<; P:  
52P+ 1P' 1+P+

K-4, ////; resp ////: 94 sin  
+ 199 con = 293  
simples: N: 4{N-}; F:  
71{F+}; D:  
12{D=}; E:  
4{E<>} 1{E<}  
18{E>} 9{E=};  
P: 42{P+} 11{P'}  
compuestas: {&}: 1{F+&E>}  
3{D=&E=}; {-}:  
1{E=-F+};  
{\*}: 1{N-\*D=}  
7{F+\*D=} 2{F+\*E=}  
primitivas: 1{F-} 4{E5}  
1{F+-E5} 1{E5-F+}  
3{N+\*D=} 2{F+\*F1}  
distribuc: N: 4N- 1+N- 3+N+;  
F: 71F+ 1F- 11+F+  
4-F+ 2-F1 D:  
12D= 3+D= 11-D=;  
E: 4E<> 1E< 18E>  
9E= 4E5 1+E> 4+E=  
2-E= 1+E5 1-E5;  
P: 42P+ 11P'

K-5, ////; resp ////: 55 sin  
+ 133 con = 188  
simples: N: 11{N-}; F:  
8{F=}; D: 31{D-  
}; E: 7{E<>}  
28{E<} 5{E>}  
1{E=}; P: 25{P+}  
1{P'}  
compuestas: {&}: 1{N-&E<};  
{-}: 1{F=-D-};  
{\*}: 7{N-\*F=}  
3{D-\*F=} 1{D-\*E=}  
primitivas: 1{N+} 1{E5}  
1{N+\*F=}  
distribuc: N: 11N- 1N+ 8+N-  
1+N+; F: 8F=  
1+F= 11-F=;  
D: 31D- 4+D- 1-D-;

compuestas:  $\{\&\}: 1\{N-\&D-\}$   
 $1\{N-\&D-\}; \quad \{-\}: 1\{N-\neg F+\}$   
 $2\{F+\neg N-\}$   
 $1\{F+\neg N-\} \quad 1F+\neg(\quad);$   
 $\{*\}: 2\{F+*E=\}$   
 $2\{F+*R=\} \quad 1\{D-*E=\}$   
 $1(\quad)*R=$   
múltiples:  $1\{F+\neg(N-\&D-\)}$   
 $1\{(F+\neg N-)*R=\}$   
primitivas:  $1\{F1\}$   
distribuc: N:  $3N- \quad 2+N- \quad 4-N-;$   
F:  $7F+ \quad 1F1 \quad 8+F+ \quad 1-$   
 $F+; \quad D: 2D- \quad 2+D-$   
 $1-D-; \quad E: 7E= \quad 3-$   
 $E=; \quad R: 5R= \quad 3-R=$

K11, ////; resp ////: 35 sin  
+ 63 con = 98  
simples: N:  $6\{N-\}; \quad F:$   
 $4\{F+\}; \quad D: 7\{D-$   
 $\}; \quad E: 10\{E=\};$   
R:  $6\{R=\}; \quad P:$   
 $9\{P+\} \quad 10\{P'\}$   
compuestas:  $\{\&\}: 1P+\&(\quad);$   
 $\{-\}: 1\{N-\neg F+\}$   
 $1\{F+\neg D-\} \quad 1\{D-\neg F+\}$   
 $1\{E=-N-\};$   
 $\{*\}: 1\{N-*E=\}$   
 $2\{F+*E=\} \quad 1\{D-*E=\}$   
 $1\{D-*E=\} \quad 1(\quad)*R=$   
múltiples:  $1P+\&(D-*E=)$   
 $1\{(F+\neg D-)*R=\}$   
primitivas:  $1\{F-\} \quad 1\{N+\&F+\}$   
distribuc: N:  $6N- \quad 2+N- \quad 1-N-$   
 $1+N+; \quad F: 4F+$   
 $1F- \quad 4+F+ \quad 2-F+;$   
D:  $7D- \quad 3+D- \quad 1-D-;$   
E:  $10E= \quad 1+E= \quad 5-E=;$   
R:  $6R= \quad 1-R=; \quad P:$   
 $9P+ \quad 10P' \quad 1+P+$

K12, ////; resp ////: 3 sin  
+ 51 con = 54  
simples: F:  $42\{F=\}; \quad P:$   
 $4\{P=\}$   
compuestas:  $\{\&\}: 2\{F=\&P=\}$   
primitivas:  $2\{N+\} \quad 1\{D+\}$   
distribuc: N:  $2N+; \quad F: 42F=$   
 $2+F=; \quad D: 1D+;$   
P:  $4P= \quad 2+P=$

K13, ////; resp ////: 12 sin  
+ 51 con = 63  
simples: N:  $1\{N-\}; \quad F:$   
 $4\{F+\}; \quad D:$   
 $21\{D=\}; \quad P:$   
 $13\{P=\} \quad 1\{P'\}$   
compuestas:  $\{-\}: 2\{D=-N-\};$   
 $\{*\}: 2\{N-*D=\}$   
 $1\{N-*P=\} \quad 4\{F+*D=\}$   
primitivas:  $2\{N+*D=\}$   
distribuc: N:  $1N- \quad 3+N- \quad 2-N-$   
 $2+N+; \quad F:$   
 $4F+ \quad 4+F+;$   
D:  $21D= \quad 2+D= \quad 8-D=;$   
P:  $13P= \quad 1P'1-P=$

K14, ////; resp ////: 26 sin  
+ 98 con = 124  
simples: N:  $14\{N-\}; \quad F:$   
 $13\{F+\}; \quad D: 3\{D-$   
 $\}; \quad E: 16\{E=\};$   
R:  $3\{R+\}; \quad P:$   
 $29\{P=\} \quad 2\{P'\}$   
compuestas:  $\{\&\}: 1\{N-\&D-\};$   
 $\{-\}: 2\{N-\neg F+\}$   
 $3\{F+\neg N-\} \quad 1\{D-\neg F+\}$   
 $1\{E=-N-\}$   
 $1\{E=-F+\}; \quad \{*\}: 1\{N-*P=\} \quad 1\{F+*E=\}$   
 $1\{D-*P=\} \quad 1(\quad)*E=;$   
 $\{\forall\}: 2\{N-\forall F+\}$   
múltiples:  $1\{(N-\&D-)*E=\}$   
primitivas:  $1\{N+\} \quad 1\{F1\} \quad 1\{F-$   
 $\} \quad 1\{D+\}$   
distribuc: N:  $14N- \quad 1N+ \quad 4+N-$   
 $6-N-; \quad F: 13F+$   
 $1F1 \quad 1F- \quad 4+F+ \quad 6-F+;$   
D:  $3D- \quad 1D+ \quad 3+D-;$   
E:  $16E= \quad 2+E= \quad 2-E=;$   
R:  $3R+; \quad P: 20P=$   
 $2P' \quad 9P= \quad 2-P=$

K15, ////; resp ////: 12 sin  
+ 31 con = 43  
simples: F:  $5\{F+\}; \quad D:$   
 $2\{D-\}; \quad E: 5\{E=\};$   
P:  $9\{P=\} \quad 1\{P'\}$   
compuestas:  $\{\&\}: 1\{E=\&P=\};$   
 $\{-\}: 1\{E=-F+\}$   
 $1\{P=-N-\};$   
 $\{*\}: 2\{N-*E=\}$   
 $1\{N-*P=\} \quad 1\{R+*E=\}$

6D- 3+D- 1-D-;  
 E: 44E< 1+E< 1-E<;  
 R: 3R+; P: 22P+  
 2P'

compuestas: {&}: 1{F+&D-};  
 {\*}: 1{F+\*N=};  
 distribuc: N: 1-N=; F: 9F+  
 2F= 2+F+; D:  
 38D- 1+D-; P:  
 27P+

////, U2.3; resp ////: 35  
 sin + 44 con = 79  
 simples: N: 3{N-}; F:  
 9{F+}; D: 1{D-};  
 E: 22{E<};  
 P: 1{P+}  
 compuestas: {&}: 2{N-&E<};  
 {-}: 1{N-&F+}  
 1{N-&E<};  
 1{F+&E<}; {W}:  
 1{N-&WE<}  
 primitivas: 1{N+&F+} 1{F-}  
 distribuc: N: 3N- 4+N- 1-N-  
 1+N+; F: 9F+  
 1F- 2+F+ 1-F+;  
 D: 1D-; E: 22E<  
 2+E< 3-E<; P:  
 1P+

-----  
 ////, U3.1; resp ////: 3  
 sin + 51 con = 54  
 simples: F: 42{F=}; P:  
 4{P=}  
 compuestas: {&}: 2{F=&P=}  
 primitivas: 2{N+} 1{D+}  
 distribuc: N: 2N+; F: 42F=  
 2+F=; D: 1D+;  
 P: 4P= 2+P=

////, U2.4; resp ////: 66  
 sin + 122 con =  
 188  
 simples: N: 5{N-}; F:  
 29{F+} 1{F=};  
 D: 1{D-} 4{D=};  
 E: 29{E>}; P:  
 25{P+} 7{P'}  
 compuestas: {&}: 1{F+&E>};  
 {-}: 1{F+&N-};  
 {\*}: 6{F+\*D=}  
 primitivas: 6{E5} 1{N+&F+}  
 1{N-&E5} 1{F+&E5}  
 1{E5-F+} 1{E5-E>}  
 2{F+WF1}  
 distribuc: N: 5N- 1+N- 1-N-  
 1+N+; F: 29F+  
 1F= 10+F+ 3-F+ 2-  
 F1; D: 1D- 4D=  
 6-D=; E: 29E>  
 6E5 1+E> 1-E> 3+E5  
 1-E5; P: 25P+  
 7P'

////, U3.2; resp ////: 55  
 sin + 191 con =  
 246  
 simples: N: 22{N-}; F:  
 32{F+} 1{F=};  
 D: 8{D-}; E:  
 35{E=}; R: 9{R+}  
 5{R=}; P: 29{P=}  
 2{P'}  
 compuestas: {&}: 1{N-&D-}  
 3(N-&D-) 2{N-&R+}  
 1(F+&D-) 1{&D-}  
 {-}: 3{N-&F+}  
 2(N-&F+) 5{F+&N-}  
 1(F+&N-) 1{D-&F+}  
 2{E-&N-} 1{E-&F+}  
 2F+&() 1{()&N-};  
 {\*}: 2{N-\*E=}  
 1{N-\*P=} 7{F+\*E=}  
 2{F+\*R=} 2{D-\*E=}  
 1{D-\*P=} 1{R+\*E=}  
 2{()\*E= 1{()\*R=};  
 {W}: 2{N-WF+}  
 1{F+W R+}  
 múltiples: 1{D-&(N-&F+)}  
 2{F+&(N-&D-)}  
 1{(F+&D-)&N-}  
 1{(N-&D-)\*E=}  
 1{(N-&F+)\*E=}  
 1{(F+&N-)\*R=}  
 primitivas: 2{N+} 3{F1} 1{F-}  
 1{D+}  
 distribuc: N: 22N- 2N+ 12+N-  
 13-N-; F: 32F+  
 1F= 3F1 1F- 18F+

////, U2.5; resp ////: 9  
 sin + 78 con = 87  
 simples: F: 9{F+} 2{F=};  
 D: 38{D-}; P:  
 27{P+}



SEPTIMA PARTE: ////-////-TIPO

RESPUESTAS PARA CADA TIPO DE RESPUESTA, INDEPENDIENTEMENTE DE LA COMBINACION Y DE LA UBICACION

////, ////; resp IC: 70 sin + 219 con = 289	simples: N: 17{N-}; F: 189{F+}; D: 86{D-}; E: 22{E<>} 48{E<} 29{E>}; R: 11{R+}; P: 133{P+} 10{P'}
simples: N: 2{N=}; F: 49{F=}; D: 21{D=}; E: 21{E=}; P: 93{P=} 3{P'}	compuestas: {&}: 1{N-&D-} 2(N-&D-) 2(N-&E<>) 1{N-&E<} 2{N-&R+} 9{F+&D-} 1(F+&D-) 2{F+&E<} 1{F+&E>} 1{F+&P+} 1(F+&R+) 1R+&() 1P+&(); {-}: 2{N-~F+} 2{F+~N-} 1(F+~N-) {3D-~F+} 1(D-~F+) 2F+~() 1D-~() 1(~)N-; {*}: 7{N-*F=} 2{N-*E=} 10{F+*N=} 7{F+*D=} 10{F+*E=}
compuestas: {&}: 7{N=&F=} 11{F=&D=} 2{F=&P=} 1{E=&P=}; {-}: 2{D=-N-} 1{E=-N-} 2{E=-F+} 2{P=-N-}; {W}: 2{N-WF+}	compuestas: {&}: 3{D=&E=}; {-}: 1{F=-D-} 2{E=-N-} 1{E=-F+}; {W}: 2{N-WF+} 1{N-WE<>} 1{F+W&D-} 1{F+WR+}
distribuc: N: 2N= 7-N- 7+N=; F: 49F= 4-F+ 20+F=; D: 21D= 13+D=; E: 21E= 4+E=; P: 77P= 3P' 16P= 5+P=	múltiples: 1{R+&(D-~F+)} 1{P+&(D-*E=)} 2{F+~(N-&D-)} 1{D-~(F+&R+)} 1({F+&D-})~N- 1((F+~N-)*R=)
////, ////; resp II: 46 sin + 95 con = 141	primitivas: 1{N+} 2{F-} 2{R-} } 2{N+&F+} 1{F+~E5} 3{N+*D=}
simples: N: 1{N=}; F: 8{F=}; D: 12{D=}; E: 45{E=}; R: 11{R=}; P: 4{P'}	distribuc: N: 17N- 1N+ 17+N- 6-N- 11-N= 5+N+; F: 189F+ 2F- 51+F+ 7-F+ 10-F=; D: 86D- 27+D- 2-D- 10-D=; E: 22E<> 48E< 29E> 2+E<> 3+E< 1+E> 20-E= 1-E5; R: 11R+ 2R- 4+R+ 1-R+ 3-
compuestas: {&}: 3{D=&E=}; {-}: 1{F=-D-} 2{E=-N-} 1{E=-F+}; {W}: 2{N-WF+} 1{N-WE<>} 1{F+W&D-}	primitivas: 1{N+} 2{F-} 2{R-} } 2{N+&F+}
primitivas: 2{F+W&F1}	
distribuc: N: 1N= 5-N-; F: 8F= 7-F+ 1+F= 2- F1; D: 12D= 2-D- 3+D=; E: 45E= 1- E<> 6+E=; R: 11R= 1-R+; P: 4P'	
////, ////; resp LC: 238 sin + 638 con = 876	

OCTAVA PARTE: ////-////-////

TODAS LAS RESPUESTAS, INDEPENDIEMENTE  
DE LA COMBINACION, DE LA UBICACION Y DEL TIPO DE RESPUESTA

////, ////; resp ////: 405 sin + 1144 con = 1549

simples:	N:	54{N-}	3{N=};		
	F:	235{F+}	57{F=};		
	D:	97{D-}	33{D=};		
	E:	22{E<>}	48{E<}	29{E>}	66{E=};
	R:	18{R+}	11{R=};		
	P:	133{P+}	32{P'}	93{P=}	
compuestas:	{&}: 2{N-&D-}	9{F+&D-}	7{N=&F=}	11{F=&D=}	
		3{N-&D-}	1{F+&D-}	2{N-&E<>}	1{N-&E<}
		2{F+&E<}	1{F+&E>}	1{F+&R+}	1{F+&P+}
		3{D=&E=}	1{E=&P=}	1D-&( )	1R+&( )
				1P+&( )	
	{-}: 5{N-~F+}	6{F+~N-}	2{N-~F+}	1{F+~N-}	6{D-~F+}
		3{F+~D-}	1{F=-D-}	1{F+~D-}	2{D=-N-}
		1{N-~E<>}	1{F+~E<>}	1{D-~E<}	2F+~( )
		3{E=-N-}	3{E=-F+}	2{P=-N-}	1( )~N-;
	{*}: 7{N-*F=}	10{F+*N=}	11{F+*D=}	3{D-*F=}	
		3{N-*D=}	1{D-*N=}	6{N-*E=}	7{N-*P=}
		13{F+*E=}	2{F+*R=}	1{F+*P=}	2( )*E=
		7{D-*E=}	2{D-*P=}	3{R+*E=}	1{D-*E=}
	{W}: 4{N-~WF+}	1{F+~WD-}	1{N-~WE<>}	1{F+~WR+}	
múltiples:	{&( )}: 1{D-&(N-~F+)}		1{R+&(D-~F+)}	1{P+&(D-*E=)}	
	{~( )}: 2{F+~(N-&D-)}	1{D-~(F+&R+)}			
	{( )~}: 1{(F+&D-)-N-}				
	{(&)*}: 1{(N-&D-)*E=}				
	{(-)*}: 1{(N-~F+)*E=}	1{(F+~N-)*R=}	1{(F+~D-)*R=}		
primitivas:	6{N+}	3{N+&F+}	1{N+*F=}	5{N+*D=}	1{D-~N+}
	6{F-}	3{F1}	2{F+~F1}	2{D+}	2{R-}
	6{E5}	1{N-&E5}	1{E5-F+}	1{E5-E>}	1{F+~E5}
distribuc:	N:	54N-	40N-	22N-	
		3N=	7N=	11N=	
		6N+	9N+	1N+	
	F:	235F+	69F+	27F+	
		57F=	21F=	11F=	
		6F-			
		3F1		2-F1	
	D:	97D-	38D-	8D-	
		33D=	16D=	19D=	
		2D+			
	E:	22E<>	2+E<>	3-E<>	
		48E<	3+E<	1-E<	
		29E>	1+E>	1-E>	
		66E=	10+E=	32-E=	
		6E5	3+E5	1-E5	
	R:	18R+	6+R+	2-R+	
		11R=		4-R=	
		2R-			
	P:	133P+	2+P+		
		93P=	5+P=	10-P=	
		32P'			

**ANEXO 7: RESULTADOS POR SUJETO:**

**RENDIMIENTO Y ESTRATEGIAS**

En este anexo se presentan los resultados de cada uno de los 64 sujetos, en dos partes. La primera parte se dedica al rendimiento, medido mediante los porcentajes de éxito mínimo seguro y máximo posible, en cada uno de los seis niveles de dificultad. La segunda parte muestra cuántas veces utilizó cada sujeto cada una de las estrategias definidas.

**PRIMERA PARTE: RENDIMIENTOS**

Los sujetos están agrupados por cuadros según el cuestionario que resolvieron. Para cada uno, y para cada nivel, se presenta:

- n: el número de respuestas con elección correcta;
- mín: el porcentaje mínimo seguro de éxito, calculado como el número de justificaciones correctas, como porcentaje de n;
- máx: el porcentaje máximo posible de éxito, calculado como el número de elecciones correctas con justificación no incorrecta, como porcentaje de n
- niv: el nivel alcanzado por el sujeto; es el máximo nivel en el que el sujeto alcanza el 50% mínimo seguro de éxito.

CUESTIONARIO C2

	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III	NIVEL IV	NIVEL V	NIVEL VI	
SUJ	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	nivel
Adr	2 100,100	1 0,0	3 100,100	1 100,100	0 --,--	1 0,0	I+
Als	4 100,100	1 100,100	7 14,86	3 0,100	1 100,100	1 0,0	II+
Bet	3 100,100	1 100,100	6 17,67	1 100,100	1 0,100	0 --,--	II+
Bla	4 100,100	0 --,--	4 25,50	0 --,--	0 --,--	0 --,--	I
Ces	4 100,100	1 100,100	5 20,60	4 50,100	1 0,100	0 --,--	IV-
Cla	4 100,100	1 100,100	7 86,100	4 50,50	2 0,100	1 0,0	IV
Eug	4 100,100	0 --,--	7 14,100	0 --,--	1 0,100	0 --,--	I
Flo	4 100,100	1 100,100	3 33,100	4 75,100	0 --,--	1 0,0	IV-
Hil	4 100,100	0 --,--	8 0,100	2 0,100	0 --,--	0 --,--	I
Mab	4 100,100	1 100,100	7 14,86	1 0,100	1 0,100	0 --,--	II
Maf	4 100,100	0 --,--	7 57,86	2 50,50	1 0,100	0 --,--	IV
Mal	4 100,100	1 100,100	6 67,83	3 33,100	0 --,--	1 0,0	III
Map	4 100,100	1 100,100	7 57,86	3 67,100	0 --,--	0 --,--	IV
Pa2	4 75,100	1 100,100	8 63,100	3 100,100	2 0,100	1 0,100	IV
Ram	4 100,100	1 100,100	8 100,100	4 75,75	2 100,100	0 --,--	V?
Sil	4 100,100	1 100,100	7 57,86	1 0,0	1 0,100	0 --,--	III

CUESTIONARIO C3

	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III	NIVEL IV	NIVEL V	NIVEL VI	
SUJ	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	nivel
J	2 0,100	2 0,100	17 18,88	5 40,40	7 14,71	8 0,25	0
M	2 0,100	2 50,100	17 29,94	4 75,100	6 0,100	9 0,33	IV-
T	2 0,100	2 0,100	13 0,100	2 50,100	4 0,100	5 0,60	0+
V	2 0,100	1 0,100	15 20,100	2 50,50	4 0,75	5 0,40	0+

CUESTIONARIO C4

	NIVEL I	NIVEL II	NIVEL III	NIVEL IV	NIVEL V	NIVEL VI	
SUJ	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	n mín,máx	nivel
Q1	0 --,--	1 100,100	7 71,100	5 40,40	4 0,50	2 0,0	III
Q2	0 --,--	0 --,--	7 57,100	2 0,50	2 0,0	0 --,--	III
Q3	0 --,--	1 100,100	9 100,100	5 20,20	4 0,50	3 0,67	III
Q4	0 --,--	1 100,100	9 44,100	3 100,100	3 67,100	2 0,0	V-
Q5	0 --,--	1 0,100	7 43,100	2 0,50	3 0,33	2 0,50	0
Q6	0 --,--	1 100,100	3 33,100	2 0,100	2 0,100	2 0,50	II

CUESTIONARIO C1

SUJ	{N}		{F}		{D}		{E}		{R}		{P}			composiciones pri					
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	P'	&	-	*	¥	@	mi
Agu	1	1	6	1	4	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0
Ale	2	2	11	1	3	0	0	0	0	0	16	0	0	2	0	3	0	0	0
Ang	2	0	6	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Bea	3	4	15	0	8	1	1	1	0	0	0	0	0	2	3	3	2	0	2
Bra	1	0	4	0	2	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	1	0	0	0
Car	1	1	4	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Con	0	0	11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Cri	2	0	1	1	3	0	0	0	0	0	12	0	5	0	0	1	0	0	0
Edi	0	1	7	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	1
Edu	0	1	3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
Fat	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fau	3	0	3	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gab	2	0	9	1	1	1	1	0	0	0	15	0	2	2	0	2	0	0	1
Ger	0	0	4	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1
Gua	5	0	13	0	4	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
Jae	2	2	4	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
Jai	0	0	4	0	3	0	3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
Jam	1	0	6	1	0	1	0	0	0	0	12	0	7	0	0	2	0	0	1
Jor	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	26	0	0	0	0	0	0	0	0
Jua	0	0	3	0	3	0	0	0	0	0	15	0	5	0	0	0	0	0	0
Jud	6	1	10	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	1
Mar	3	0	9	0	5	2	1	0	0	0	6	0	0	0	0	2	0	0	1
May	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	4	0	4	0	0	0	0	0	0
Mig	1	0	2	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
Pal	0	0	4	0	2	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
Paz	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	3	0	0	1	0	0	1
Raf	2	1	12	1	5	0	0	0	0	0	6	0	0	2	0	2	0	0	0
Ray	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Reb	1	0	19	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Rey	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ric	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8	0	2	0	0	0	0	0	0
Rub	2	0	7	0	5	0	0	0	0	0	20	0	1	2	0	0	0	0	1
Ter	3	0	5	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2

CUESTIONARIO C6

SUJ	{N}		{F}		{D}		{E}		{R}		{P}			composiciones pri					
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	P'	&	-	*	¥	@	mi
I	0	0	11	2	5	0	21	6	1	0	2	0	0	1	2	6	0	0	2
O	9	2	11	3	2	2	7	6	5	0	5	0	0	3	6	7	1	2	5
W	4	0	3	2	2	0	1	2	0	0	6	2	0	0	2	4	0	0	0
X	5	3	8	5	14	3	11	5	10	2	8	4	0	3	8	11	1	2	0
Z	2	3	8	2	2	1	1	0	0	0	0	1	0	0	6	1	0	0	0