UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD UPN 191

ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS NATURALES

MARIA ESTHER BARRERA DOMINGUEZ

TESINA PRESENTADA PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN EDUCACION BASICA

MONTERREY, N. L. 1988

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
D 191 MONTERREY

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

Monterrey, N.L., a 4 de Junio de 1988.

C. PROFR.(A)

MARIA ESTHER BARRERA DOMINGUEZ
P r e s e n t e.

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su -- trabajo, intitulado:

"ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS NATURALES"

opción TESINA modalidad ENSAYO

a propuesta del asesor C. Profr.(a) SANJUANA RODRIGUEZ -- TOVAR, manifiesto a usted que reúne los requisitos - académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentar su examen profesional.

A t e n t a m e n t e,

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

PROFR. ISMAEL VIDALES DELGADO
Presidente de la Comisión de Titulación
de la Unidad 191 Monterrey

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD
191 MONTERREY

mrpt'

A mis alumnos

que me enseñan a ver la vida

con alegría.

A Miguel

que siempre me anima

a seguir adelante.

INDICE

I. INTRODUCCION

Entendemos como operaciones matemáticas fundamentales: a la adición, sustracción, multiplicación y la división; dentro del conjunto de los números naturales, por ser las más aplicadas en la vida diaria y por consecuencia en la enseñanza primaria.

El propósito de este trabajo no es el de encontrar reglas acerca de - su enseñanza, sólo se trata de centrarlas dentro del énfoque de la matemática moderna y de examinar algunos aspectos que se presentan dentro de su proceso de enseñanza aprendizaje en la escuela primaria siguiendo el programa oficial.

Para tratar el tema se ha seleccionado la opción tesina por considerarla la más apropiada de acuerdo a nuestos objetivos. Auxiliándonos de las técnicas de la investigación documental y redacción en forma de ensayo por se la que mejor permite la combinación de una base teórica firme con aportaciones y deducciones personales.

Primero se tratará de delimitar la importancia del tema en la cotidianeidad de la vida diaria y por consecuencia dentro del plan de estudios de la instrucción primaria.

Los niños que hoy educamos vivirán en un mundo diferente, enfrentando problemas que no podemos predecir, problemas que ameritan el conocimiento - de los métodos matemáticos para su resolución. Necesitarán el cómo y el por qué de los procesos matemáticos para poder reconstruir sus conocimientos y aplicarlos a las nuevas situaciones.

Las aportaciones de Jean Piaget al mundo de la pedagogía forman una buena base para la enseñanza de la matemática en general y por ende de las operaciones fundamentales. En el marco teórico se revisarán algunos de sus principios acerca del proceso del desarrollo cognitivo del infante, al igual que algunas ideas de otros importantes pedagogos de la actualidad.

En el capítulo correspondiente a los conceptos generales se mencionarán los enfoques que puede tener la matemática como ciencia y su proyección en la escuela primaria. Dentro del mismo, centrándonos dentro del aspecto aritmético de la materia, se presentan las cuatro operaciones fundamentales mismas que serán definidas y puntualizadas.

En los últimos capítulos se ubicará por separado a cada una de las operaciones, tratando de cada una: su localización dentro del programa oficial de la enseñanza primaria, sus algoritmos, conceptos y algunos recursos metodológicos auxiliares de la labor educativa y que faciliten el proceso de aprendizaje de los alumnos.

II. IMPORTANCIA DE LA MATEMATICA

Para hablar de la importancia de la enseñanza de las operaciones fundamentales en la escuela primaria, entendidas èstas como la adición, sustracción, multiplicación y división con números naturales; tenemos que ubicarlas primero dentro de la materia de que forman parte: la matemática. Las operaciones fundamentales no son procesos aislados, son una manera de pensar y de operar, un razonamiento matemático que las hace estar intrínsecamente ligadas entre sí mismas y con los demás aspectos que componen la materia.

Es por eso que para hablar de la importancia de su enseñanza tenemos que hacer referencia primeramente a la trascendencia de la matemática en nuestra vida diaria. De esta tan evidente observación se desprende el papel de esta materia dentro del plan de estudios, no sólo de la escuela primaria que es el que nos ocupa, sino de la educación en general.

La enseñanza de la matemática es algo que debemos cuidar y no dejar al azar si queremos tener buenos resultados en nuestra labor docente, y lograr por parte del alumno un mejor aprovechamiento de los conocimientos matemáticos y por consiguiente de su posterior aplicación en su vida de adultos.

A lo largo de la historia de la humanidad se puede observar el papel preponderante que ha desempeñado la matemática. Más aún en nuestros días es común que todo se cuente o se mida: el comerciante, el científico, hasta el artista; todos en general hacemos uso de la matemática para resolver los problemas que se nos presentan cotidianamente. Todas las ciencias, naturales o sociales, utilizan en mayor o menor medida a la matemática.

Aparte de todas las utilidades prácticas ya mencionadas que constituyen el valor informativo de la materia, tenemos también el aspecto formativo. Se considera que el uso de esta ciencia enseña a pensar, ayuda a fomentar el espíritu critico y el razonamiento lógico.

Pero el hecho de que se le reconozca a la matemática sus múltiples valores, no implica el que se le considere superior a las demás ciencias, todas tienen su importancia dentro de la cultura humana, se relacionan, se apoyan unas en otras; se necesitan.

Parte muy importante de nuestra labor como maestros es la de mantener un equilibrio entre las materias de nuestro programa, algo que a menudo olvidamos centrándonos más en las áreas de matemática y español. Hay que darle a la materia su justa medida y su justa importancia sin sacrificar las demás áreas de estudio.

A lo largo de los seis años de estudio de la escuela primaria el alumno irá adquiriendo conocimientos básicos sobre aritmética, geometría, probabilidad y estadística; con distintos grados de dificultad. De manera que al terminar la primaria pueda enfrentarse a los retos que se le presenten, retos que no se pueden predecir; porque de todos es sabido que el mundo en que vivimos está cambiando rápidamente. La resolución de nuevas cuestiones no se llevará a cabo sólo con el mero conocimiento de resultados matemáticos, el que aprendan de memoria las tablas de multiplicar no ayudará de nada al alumno si no sabe como y cuando aplicarlas. Desafortunadamente estos casos se dan con bastante frecuencia, sobre todo en el área de las operaciones aritméticas; en donde vemos limitada la enseñanza a la memorización -

de recetas para la resolución de ecuaciones aisladas de un contexto, alejadas de la realidad. Se piensa que un niño que domina la matemática es aquel que recita de memoria las tablas de mutiplicar y puede resolver "sumas" de cinco o mas cifras, pero al enfrentar a estos niños a lo que llamamos problemas razonados nos encontramos con que no saben como resolverlos.

No discutimos que el niño debe conocer perfectamente el mecanismo de las operaciones, pero ¿ cuál es la utilidad de este conocimiento en la vida diaria si no sabe en que momento aplicarlo?

También es frecuente que el alumno olvide o considere a la materia como algo aburrido o inaccesible, apropiado solamente para mentes privilegiadas. Si la matemática es tan útil, ¿ porqué se les dificulta su aprendizaje?

Debido a estas premisas e interrogantes que se han presentado en nuestro trabajo con los alumnos, he considerado de mucha utilidad para mi práctica docente el revisar algunos conceptos acerca de la enseñanza de las operaciones fundamentales en la escuela primaria esperando que redunde en beneficio de mis propios alumnos.

III. ENFOQUE PSICOGENETICO DEL DESARROLLO MENTAL

La enseñanza de la matemática en la escuela primaria precisa además de las consideraciones didácticas de índole psicológico. Para esto es necesario introducirse en el campo de las estructuras mentales infantiles, ya que el centro de toda actividad pedagógica es el alumno.

A este respecto nos encontramos con las importantes aportaciones de Jean Piaget, el teórico ginebrino que a lo largo de sus profundos y extensos estudios e investigaciones sobre la psicogénesis del conocimiento infantil, logró relacionar las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia.

Las investigaciones piagetanas sobre el desarrollo mental del infante tienen una gran repercusión en la pedagogía, porque ofrecen datos invaluables al educador que busca potenciar al máximo la actividad intelectual del educando. Para ello, el maestro debe conocer como se desarrollan sus estructuras mentales y qué factores de la enseñanza pueden ser positivos o negativos en el alumno y la posterior adquisición del conocimiento.

Para Jean Piaget la matemática es algo más que un medio informativo o de instrucción, al conformar un valioso instrumento para la investigación de las estructuras mentales del niño.

Para Piaget el desarrollo mental es una equilibración progresiva, un continuo paso de un estado de menor equilibrio a otro de equilibrio mayor. Piaget distingue seis estadios o períodos de desarrollo general o embriogenético del organismo, que comprende el desarrollo del sistema nervioso central y de las funciones mentales; distinguiendolo del desarrollo cognitivo, al -

que califica como un proceso en función del desarrollo general de la personalidad y menciona: "el desarrollo es el proceso escencial, en el que cada elemento del proceso de aprendizaje se da como una función del desarrollo total, más que como un elemento que explica el desarrollo." (1)

Para Piaget el conocer un objeto significa poder actuar sobre él, conocer su constitución y poder modificarlo, no solamente el verlo y hacerse una imágen mental suya.

La escencia del conocimiento es una operación porque es una acción interiorizada, que modifica el objeto del conocimiento. Así, una operación podría ser: el contar, medir, clasificar una serie de objetos, etc. Pero estas acciones también pueden ser reversibles, como el sumar y el restar.

> "Las acciones se hacen operatorias desde el momento en que dos acciones del mismo tipo pueden componer una tercera acción que pertenezca todavía al mismo tipo y estas diversas acciones puedan invertirse.... así es como la acción de reunir (suma lógica o suma aritmética) es una operación porque varias reuniones sucesivas equivalen a una sola reunión (composición de suma) y las reuniones pueden ser invertidas y transformadas así en disociaciones (sustracciones)."(2)

Las operaciones a su vez nunca se encuentran aisladas sino que están vinculadas con otras operaciones formando parte de una estructura total. Un ejemplo dado por Piaget es el de los números: un número no existe aislado, sino que forma parte de una serie de números que constituyen una estructura matemática con propiedades determinadas.

---

(1) Universidad Pedagógica Nacional. El niño: aprendizaje y desarrollo. México, 1985. p. 11

(2) Jean Piaget. Seis Estudios de Psicología. México, Ed. Seix Barral, 1984. pp. 76 y 77

Estas estructuras operacionales forman la base del desarrollo del conocimiento que se puede clasificar en cuatro etapas principales. Cada etapa da pié para que se presente la otra, sin que de niguna manera aparezca un cambio brusco o repentino, sino paulatinamente.

La primera etapa es la sensoriomotriz, donde entre otras cosas, el niño va adquiriendo la idea de permanencia, es decir, concibe que un objeto siga existiendo aunque lo haya perdido de vista.

En la segunda etapa aparece la representación preoperacional, ya que no existen todavía operaciones en su cabal definición por la ausencia de la conservación, requisito indispensable para que una operación sea reversible. Por ejemplo, si un niño observa una bolita de plastilina y después a la misma le cambia la forma alargándola, piensa que hay más cantidad de plastilina porque todavía no comprende que la cantidad se conserva.

La tercera etapa es donde se empiezan a manifestar las primeras operaciones, pero sólo de tipo concreto, ya que solamente operan sobre objetos y no sobre hipótesis verbales. Aparecen "las operaciones de clasificación, ordenamiento, la construcción de la idea de número..... y todas las operaciones fundamentales de la lógica elemental de clases y relaciones, de las matemáticas elementales,..."(3)

Es en la cuarta etapa donde el niño puede operar sobre hipótesis y no sólo sobre objetos, obteniendo nuevas estructuras que pueden ser combinatorias y por otra parte más complicadas grupalmente.

---

(3) Universidad Pedagógica Nacional. Op. cit. pp. 13 y 14.

Se pasa del razonamiento intuitivo al razonamiento lógico. Es donde se comprenden cabalmente las operaciones matemáticas debido a la construcción de grupos y agrupamientos, o sea que los conceptos y relaciones no aparecen aislados sino organizadamente dentro de un conjunto en el que los elementos se equilibran y se solidarizan unos a otros.

La aparición de estas estructuras no se puede determinar de acuerdo con la edad cronológica del niño, así en algunos puede presentarse primero que en otros. Influye grandemente el medio ambiente condicionando las potencialidades innatas del infante. El conocimiento se da por una estrecha interelación entre el sujeto y el objeto actuando el uno sobre el otro, ya sea positiva o negativamente.

Piaget considera cuatro factores que contribuyen al desarrollo del conocimiento: la maduración biológica, la experiencia, la transmisión social y la equilibración. Cada uno de estos factores juega un papel muy importante en el proceso.

La maduración biológica, es aún difícil de explicar: "sabemos prácticamente nada sobre la maduración del sistema nervioso más allá de los primeros 11 meses de la existencia del niño"(4). Pero sabemos que estas etapas son un reflejo de la maduración del sistema nervioso.

La experiencia o la influencia del medio ambiente proviene sólo de los objetos y de las acciones que se realizan sobre los objetos y los modifican.

---

(4) Ibid. p. 15.

El factor de la transmisión social o educación, comprende la información que el niño recibe mediante el lenguaje y lo que un adulto le puede enseñar. Pero para que el niño comprenda esta información debe encontrarse en la etapa adecuada que lo capacite para asimilar lo que se le quiere enseñar.

El cuarto factor, el de la equilibración, es fundamental; regula y equilibra los tres factores anteriores. En esta equilibración el individuo necesita ser activo para obtener un conocimiento. Es un proceso de autoregulación. Aquí toda acción responde a una necesidad, es la manifestación de un desequilibrio. La acción termina cuando las necesidades están satisfechas volviendo a mantenerse el equilibrio necesario.

Para que un aprendizaje se lleve a cabo debe existir una asimilación activa, entendiéndola como asimilación a la integración de la realidad dentro de una estructura. Sin la actividad no se presentará un cambio significativo en el desarrollo del sujeto.

Para que un conocimiento sea generalizable debe ser construido o reelaborado por el mismo individuo para que pueda aplicarlo a situaciones diferentes a las presentadas en el momento de aprenderlo. Una enseñanza verbalista, que no deja lugar a la construcción del conocimiento por parte del alumno sólo puede servir para aplicarse a situaciones muy similares a aquellas en que fue aprendido, además; se olvida rapidamente.

El aprendizaje activo u operatorio no consite sólo en la adquisición de un nuevo conocimiento, sino a la posibilidad de construirlo. El resultado final es solo un eslabón de todo un proceso en el cual lo más importante son la serie de razonamientos que lo han hecho posible, porque ha adquirido una nueva capacidad. Este conocimiento podrá ser vuelto a aplicar en otras situaciones similares y aún en otras diferentes por la capacidad de reconstruir el procedimiento utilizado anteriormente para aplicarlo a las nuevas circunstancias.

Si el niño pregunta: ¿ hay que hacer una suma o una resta ?, es evidente que carece de la capacidad de generalizar, probablemente por no poder reconstruir un aprendizaje operatorio que no se realizó, por provenir de - una enseñanza verbalista en la cual no tuvo la oprtunidad de participar activamente.

Por otra parte, en matemática no se puede entender un concepto si no se han comprendido los anteriores. No podemos introducir un concepto si no conocemos primero las ideas que el niño tenga sobre él, en que etapa del desarrollo se encuentre. El que una hipótesis o concepto sea claro para nosotros como adultos, no quiere decir de ninguna manera que sea claro para el niño o que nosotros podamos explicárselo si él no se encuentra preparado - aún para comprenderlo. Esto puede repercutir también en los conocimientos futuros porque la matemática está formada por razonamientos encadenados, - unos sirven de base a otros, no están aislados. Si el alumno no comprende los conceptos a tratar, será dificil que pueda pasar a los aspectos siguientes por la falta de bases. En cambio, cuando va comprendiendo cada aspecto, el avance le parecerá un proceso natural que ocurrirá de manera espontánea en muchas ocasiones logrando de ese modo una buena estructuración de los - conocimientos.

IV. ASPECTOS GENERALES Y ANTECEDENTES DE LA MATEMATICA

A. Aspectos generales de la matemática

Definir a la matemática de acuerdo con su contenido es practicamente imposible. Es más acertado tratar de definirla de acuerdo a su metodología. La matemática desarrolla, a partir de conceptos fundamentales, teorías que se valen unicamente del razonamiento lógico.

El método usado en matemática es el inductivo-deductivo. El método deductivo cuando actúa como ciencia abstracta, como teoría. La matemática es la ciencia lógica. El método inductivo se utiliza más en la práctica, es el que se sigue en la enseñanza, ya que se hace uso de la intuición en las cuestiones concretas usando casos particulares para llegar a una deducción. En la realidad estos métodos no se pueden aislar, dependen el uno del otro.

Esta manera de pensar, de razonamiento lógico lo debe ir adquiriendo el alumno a lo largo de su instrucción primaria. Planteando en términos matemáticos diversas situaciones de la vida diaria para tratar de resolverlas haciendo después una generalización y aplicarlas después en otras cuestiones también reales. A su vez debe ser capaz de seguir el procedimiento inverso: dado un enunciado matemático, plantear un problema alrededor de él y resolverlo.

La escuela debe respetar los procedimientos naturales del niño. Cuando ingresa a la escuela ya tiene nociones de cantidad, de número, extensión, etc. La enseñanza escolar debe estimular, dirigir y perfeccionar estos conocimientos haciendo ascender al niño peldaño a peldaño en el camino de la lógica y la abstracción.

Para el niño es muy importante el poder manipular los objetos concretos, antes de trabajar con símbolos. Existe un orden a seguir de acuerdo con la manera de razonar de los niños: primero lo concreto, después lo gráfico y al final los símbolos. "Una serie de experiencias bien concatenadas, seguida de la introducción de los símbolos, es ciertamente más eficaz que los esfuerzos por asociar los símbolos a su "significación " mediante explicaciones"(5).

Estas experiencias le servirán al niño para descubrir y tratar de corregir sus propios errores, ya que conocerá la verdad por sí mismo y no porque el maestro se lo diga. El aprenderá de sí mismo y de sus propios compañeros, haciendo lo aprendido más difícil de olvidar.

B. Definiciones de las operaciones fundamentales

Dentro de la aritmética, entre otras cosas, se suma, se resta, se multiplica, se divide; pero sobre todo son estas cuatro operaciones las que más se manejan, por lo que se denominan operaciones fundamentales. Sus nombres son: adición, sustracción, multiplicación y división, que para efectos de este trabajo serán manejadas dentro del conjunto de los números naturales únicamente.

Los números naturales constituyen el primer conjunto de números que el hombre utilizó. Tiene la particularidad, que debemos tener en cuenta, de que sólo es cerrado con respecto a la adición y la multiplicación. Es decir, cualquier operación que se haga de suma o multiplicación con una pareja de

---

(5) Z.P. Dienes. La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria. Barcelona, Ed. Teide, 1972. p. 6.

números naturales, tendrá como resultado siempre otro número natural. Esta propiedad no se cumple con la sustracción y la división, ya que aunque la operación se realice con números naturales, su solución no siempre lo será.

Adición.

En primaria se define a la operación de adición partiendo de la reunión de conjuntos. Si tenemos 2 conjuntos, A y B, decimos que el conjunto A tiene a elementos y el conjunto B tiene b elementos; entonces la reunión de los dos conjuntos forma el conjunto $A \cup B$ (A unión B) que tiene a b elementos (siempre y cuando A y B sean conjuntos ajenos). Ejemplo:

$$A = \underbrace{\{ \triangle , \square , \bigcirc \}}_{3} \qquad B = \underbrace{\{ * , \diamondsuit \}}_{2}$$

$$A \cup B = \underbrace{\{ \triangle , \square , \bigcirc , * , \diamondsuit \}}_{3 + 2}$$

Además de la propiedad de cerradura del conjunto con respecto a la operación podemos mencionar las siguientes propiedades inherentes a la adición:

. Propiedad conmutativa: Sean a y b dos números naturales cualesquiera, entonces $a + b = b + a$ Ejemplo: $5 + 3 = 3 + 5$.

. Propiedad asociativa: Sean a, b y c tres números naturales cualesquiera, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$. Ejemplo: $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$.

. Elemento neutro: Siendo a cualquier número natural, entonces $a + 0 = a$, siendo entonces el 0 el elemento neutro de la adición. Ejemplo : $6 + 0 = 6$.

Sustracción.

La sustracción puede definirse desde distintos puntos de vista, pero la definición que más nos interesa es aquella que la considera como la operación inversa de la adición por ser la más cercana a la manera de pensar de los niños y también la que más utilizará a lo largo de sus estudios. Esta definición nos dice que:

$\underline{a} - \underline{b}$ es el número $\underline{n}$ tal que $\underline{n} + \underline{b} = \underline{a}$.

$8 - 3 = 5$ ------------- $5 + 3 = 8$.

Es conveniente aclarar que los números naturales no son cerrados con respecto a la sustracción, y que esta operación tampoco cumple con las propiedades conmutativa ni asociativa. Tiene un elemento neutro, el 0 (como sustraendo) ya que al restárselo a cualquier otro número, el resultado será el mismo número: $a - 0 = a$. $8 - 0 = 8$.

La multiplicación.

La multiplicación se define en primaria como una suma de sumandos iguales, por ejemplo: $5 + 5 + 5 + 5$ es igual a 4 veces el $5 = 4 \times 5$

Cumple con la propiedad de cerradura, la conmutativa, la asociativa y la distributiva con respecto a la adición (y su inversa la sustracción). Esta propiedad enuncia que, si $\underline{a}$, $\underline{b}$ y $\underline{c}$ son números naturales, entonces:

$$a(b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$3 \times (4 + 2) = (3 \times 4) + (3 \times 2).$$

El elemento neutro es el 1 ya que $\underline{n} \times 1 = n$. Ejem. $6 \times 1 = 6$. También encontramos a la propiedad multiplicativa del $\underline{0}$. Cualquier número multiplicado por cero su resultado será cero. $\underline{n} \times 0 = 0$. $4 \times 0 = 0$.

La división.

La división es la operación inversa de la multiplicación, en la que siendo $\underline{a}$, $\underline{b}$ y $\underline{c}$ números naturales, con $\underline{b}$ diferente de 0, entonces:

$$\underline{a} \div \underline{b} = \underline{c} \quad \text{si} \quad \underline{c} \times \underline{b} = \underline{a}.$$

La división entre 0 no está definida. El elemento neutro de la operación, es el 1, como divisor. El 0 dividido entre cualquier número es igual a 0. Ejem. $0 \div 7 = 0$.

C. Antecedentes de la enseñanza de la Matemática

Durante mucho tiempo la enseñanza de la matemática se limitó a manejar unicamente objetos regulares o ideales, porque se le consideraba como una ciencia exacta aplicable a fenómenos u objetos suceptibles de ser medidos con exactitud. Se impartía sólo como la enseñanza de procesos mecanizados.

De unos años a la fecha, han surgido diferentes puntos de vista, tanto de la matemática como ciencia como de su enseñanza, despojándola de la rigidez que la caracterizaba para hacerla mas aplicable a las ciencias del hombre y de la naturaleza. Estas nuevas teorías pedagógicas de la materia se practican en la actualidad en diversos paises, sobre todo europeos.

"El nuevo punto de vista consiste en mirar a estos procesos como formando un enlace de estructuras cada vez mas complejas; se trata de poner a los niños en situación de descubrir cuales son estas estructuras, como están construidas y como se enlazan unas con otras."(6)

A estas teorías se les critica que se les da demasiado énfasis a los razonamientos lógicos, pero que los alumnos no saben hacer cálculos."La respuesta correcta pasa a segundo plano, la aptitud escencial consiste en saber encontrar el camino."(7)

(6) Ibid. p. 2
(7) Idem.

A estas críticas se ha respondido con la observación de que se tiene poco tiempo de haberse implantado esta metodología, que los maestros todavía no la dominan, que los padres influyen negativamente y que la mayoría de los alumnos no llevaron esta propuesta desde el inicio de sus estudios.

En resumen podemos decir, que esta técnica se encuentra todavía en la fase de experimentación, es muy pronto para pedir resultados concretos. Sólo podemos afirmar que ha aportado cosas nuevas a la matemática y a la pedagogía, y ha despertado el interés por buscar nuevas soluciones al problema de la enseñanza de la matemática.

V. ENSEÑANZA DE LA ADICION

La enseñanza de la adición empieza desde el 1er. grado de primaria dentro de un programa integrado, en donde la matemática se relaciona con las demas áreas del plan de estudios.

La operación de suma se encuentra íntimamente ligada con el aprendizaje de los números (del 2 en delante), ya que se desea que la adquisición de éstos sea una acción operativa y no sólo el seguimiento de una serie.

Así el conocimiento del número 6, por ejemplo, se lleva a cabo a partir de una colección de 5 objetos concretos, a los que se les agrega uno mas. De este modo dicha colección tendrá 5 mas 1 objetos, y representa el número 6. Después de eso se escribe su representación gráfica con signos, 5 1 6. Esta colección de 6 elementos se puede descomponer a su vez en otras, de manera que decir 6 es lo mismo que decir 4 mas 2, ó 3 mas 3, 2 mas 2 mas 2,etc.

Después de trabajar con objetos concretos, se pasa a los objetos gráficos, donde los niños mediante dibujos y con los signos correspondientes vuelven a realizar lo hecho con objetos anteriormente. Para dejar al final sólo las representaciónes simbólicas sin objetos o dibujos que la expliquen.

El concepto de número no termina aquí, pero esta parte es la que más se relaciona con la operación de adición y con su introducción en la escuela primaria.

Desligándonos de la enseñanza de los números, la operación de suma se sigue practicando a lo largo de la instrucción primaria, primero con objetos, después con dibujos, y por último con signos únicamente, procurando -

tratarlas dentro de problemas que no deben limitarse a situaciones de orden económico, o aquellas en que se compran cosas, hay que abrirnos hacia otros campos y tratar de abarcar más de la realidad, viendo otras situaciones en las que intervenga de alguna manera la suma.

Otra forma gráfica de sumar es la que se realiza en la recta numérica. Como ya es sabido se trata de una línea recta donde se colocan los números a intervalos constantes de izquierda a derecha comenzando con el cero. Las primeras veces esta se puede trazar en el piso, donde el niño jugaría a dar saltos o pasos partiendo siempre del cero. Así para realizar la suma sig. 8 + 4 = _. El niño tendría que dar primeramente ocho pasos y después otros cuatro para ver a cual número llega. Mas adelante ya no sería necesario el dar saltos reales, sólo imaginarlos trazando la recta numérica en la libreta o pizarrón y marcarlos con distintos colores, cosa que mas adelante tampoco será necesaria.

Si el niño puede sumar unidades podrá hacerlo también con decenas, - centenas, etc., tomando a estas como grupos de cosas. De esta manera - 70 - 20 son 7 decenas ó 7 grupos de diez mas 2 grupos de diez, son 9 grupos de diez que son 9 decenas igual a 90.

El formar grupos de objetos y el reagrupar es básico, nos ayuda a comprender mejor el mecanismo de la adición cuando tratamos con cantidades mayores. "Reagrupar es un término más preciso que "llevar" y "tomar"."(8)

---

(8) Max Bell, et.al. El Curso Conciso en Matemáticas para los Profesores de Escuela Primaria. Ed. SMSG, 1966. p.71

Ejemplo: para sumar 36 mas 28 estamos sumando 3 decenas mas 6 unidades a 2 decenas mas 8 unidades.

XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX		XXXXXX
3 decenas	mas	6 unidades
XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX		XXXXXXXX
2 decenas	mas	8 unidades

al unir estos grupos tenemos:

XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX		XXXXXXXXXXXXXX
5 decenas	mas	14 unidades

estas 14 unidades podemos agruparlas en 1 decena mas 4 unidades quedando de la siguiente manera.

XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX		XXXXXXXXXX		XXXX
5 decenas	mas	1 decena	mas	4 unidades.

6 decenas mas 4 unidades igual a 64.

La realización de esta clase de ejercicios son muy importantes para que los niños comprendan bien el concepto y puedan después generalizarlo y aplicarlo en las operaciones con centenas o millares más adelante, donde ya no será necesario el trabajar con objetos.

VI. ENSEÑANZA DE LA SUSTRACCION

La enseñanza de la sustracción empieza al igual que la adición desde el primer grado, pero plantea más dificultad que esta ya que es la solución para tres tipos diferentes de situaciones: ¿cuánto queda?, ¿cuánto falta? , y ¿cuál es la diferencia?.

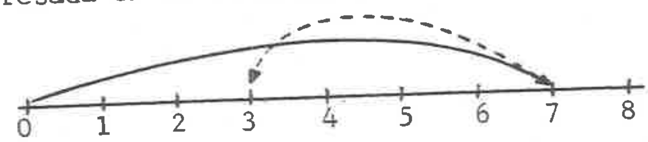
La primer interrogante se aborda mediante el proceso de quitar, así 8 - 3 sería: si tengo 8 objetos y quito 3, ¿ cuántos me quedan?. Esta manera es la que más comúnmente se presenta a los niños al enseñar la sustracción, es algo válido pues responde a una interrogante . El problema se presenta cuando el alumno se enfrenta a los otros tipos de situaciones, y no ha aprendido a abordarlas, situaciones en las que necesita saber: ¿cuánto le falta para tener 12 años si tiene 6?, ¿cuál es la diferencia del costo entre un lápiz de $60 y uno de $100?. Las cuestiones anteriores son situaciones que el niño resuelve cotidianamente, a veces sin relacionarlas con la operación de sustracción, pero que cuando involucra cantidades mayores es más difícil de resolver mentalmente.

A estas situaciones responde mejor el ver la sustracción como la operación inversa de la adición, para llegar a esto se parte de sumas en las que se desconoce uno de los sumandos conociendo el resultado, que comúnmente se conoce como el número perdido, así 6 + _ = 12 sería ¿cuánto le falta al 6 para llegar al 12? (refiriéndose a alguna cuestión en particular), con su correspondiente resta 12 - 6 = 6.

La situación puede presentar variantes, pero la operación es la misma. Es conveniente presentarle al alumno las diferentes situaciones con la misma frecuencia para que ellos lo vean también así.

En la recta numérica se trabaja la sustracción como movimientos hacia la izquierda, se inician los movimientos en el cero y se dirigen primeramente a la derecha hacia la cantidad marcada en el minuendo, y se retrocede la cantidad de lugares expresada en el sustraendo. Ejem:

7 - 4 = _



En esta como en las demás operaciones son muy importantes las ideas de grupos y de reagrupación, cuando se trabaja de decenas en adelante, porque cuando los números son pequeños es fácil encontrar el sumando desconocido, en este caso la resta o diferencia. Pero cuando los números son mas grandes, es mas útil expresarlos en forma desarrollada para comprender mejor el procedimiento de sustracción, sobre todo cuando se trata de algún caso con dificultad, las cuales podemos decir que son tres: 1o. las unidades del minuendo son menores que las del sustraendo, 2o. las decenas del minuendo son menores que las del sustraendo y 3o. las unidades y las decenas del minuendo son menores que las del sustraendo. Estos son los casos principales que después se generalizan para cantidades mayores.

Es conveniente ir presentando los casos anteriores en el orden mencionado para evitar confunciones y graduar las dificultades. Aquí expondremos sólo el primer caso como ejemplo ya que los demás se basan en los mismos mecanismos de agrupaciones y reagrupaciones de los que se ha hablado antes. Y teniendo como antecedente los casos de restas con decenas que se trabajan - de manera semejante a las sumas con decenas.

Suponiendo que tengamos que restar 376 a 593 tendríamos:

$$\begin{array}{r} 593 \\ -\ \underline{376} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500 - 90 - 3 \\ -\ \underline{300 - 70 - 6} \end{array}$$

Como no nos es posible restar 6 a 3, tenemos que reagrupar las decenas de manera que las unidades del minuendo sean iguales o mayores que las del sustraendo. Lo mas fácil es tomar un grupo de 10 perteneciente a las decenas y pasarlo a las unidades de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 500 - 80 - 13 \\ -\ \underline{300 - 70 - \ \ 6} \end{array}$$

El anterior procedimiento es más fácil de comprender para los niños que el comunmente usado de "pedir prestado", que aunque tiene una base lógica es imposible que parezca razonable la explicación de que le pedimos prestado a las decenas del minuendo y luego eso se lo devolvemos al sustraendo. Algo que los niños no entienden porque no es lógico.

Lo que sucede en realidad es que estamos agregando la misma cantidad a cada uno de los miembros de la sustracción, por lo que la diferencia se mantiene, como ejemplificamos enseguida,

$$\begin{array}{r} 593 \\ -\ \underline{376} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500 - 90 - 13 \\ -\ \underline{300 - 80 - \ \ 6} \end{array}$$

Se agrega un grupo de 10 en las unidades del minuendo y un grupo de 10 en las decenas del sustraendo, es por eso que la diferencia se mantiene.

Este procedimiento probablemente sea más difícil de enseñar y explicar que el anterior, porque se requiere una mayor capacidad de abstracción por parte del alumno. Sin embargo es el que la gente más acostumbra porque permite una mayor rapidez en los cálculos. Además es conveniente que los niños lo conozcan también como otra alternativa de realizar la operación, en este caso será mejor tratarlo de una manera más real y no "pidiendo prestado".

VII. ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACION

Existen diferentes enfoques para la enseñanza de la multiplicación, en uno de ellos se le trata como una operación aislada de las demás y se basa en la memorización de las tablas de multiplicar y en la mecanización de la operación. En el otro caso se parte de la operación de adición, ya que está intimamente ligada a ella por tratarse de una suma abreviada de sumandos iguales y obedece a ciertas reglas relacionadas con la adición.

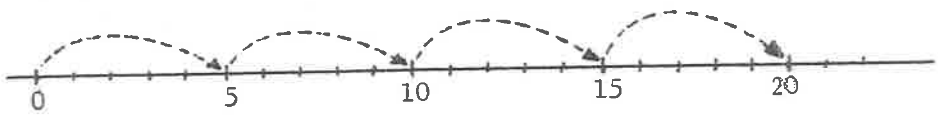
Este segundo enfoque es el más adecuado ya que va de acuerdo con los mecanismos de la operación dentro de la matemática, respondiendo a su definición y respeta el razonamiento lógico de los niños y su capacidad de abstracción al usar estructuras previas para construir un nuevo conocimiento.

La enseñanza de la multiplicación se inicia en el programa oficial a partir del segundo grado tomando en cuenta la ejercitación que se hizo con la suma en el año anterior. Es el momento en que basándonos en la mayor maduración que el niño ha adquirido en la forma abstracta de pensar para empezar a abreviar pasos sin que pierda de vista el sentido de las operaciones. Pasando de esta manera de las sumas a las multiplicaciones.

Antes de tratar de que el alumno memorice las tablas o resultados se debe ver la importancia y la utilidad de la operación. Si se comprende primero el porqué, su mecanización mas adelante será más sencilla y natural. Orientando las prácticas por medio de juegos entretenidos y sencillos problemas prácticos se obtienen mucho mejores resultados que obligando a los niños a escribir las tablas x número de veces.

Para lograr una mejor comprensión, se puede recurrir a ejemplos gráfi cos que ilustren el proceso a seguir. Uno de ellos puede ser la representación mediante conjuntos ordenados en determinado número de filas e hileras. El otro método se refiere a la realización de la operación en la recta numérica donde se dan "saltos" a intervalos constantes, que dependen de los números a multiplicar. Ejemplo, representación de 4 x 5

XXXXX
4 XXXXX
XXXXX
XXXXX
5



Al igual que en las demás operaciones, la multiplicación debe iniciarse con ejemplos sencillos, en este caso con ejercicios por un dígito, para después llegar a casos más complicados en los cuales se trabaja con cantidades mayores en las que se requiere un mecanismo especial para la resolución del problema. Volviendo nuevamente a las reagrupaciones como las usadas anteriormente, auxiliándonos aparte de las propiedades de la multiplicación, de las cuáles el alumno conocerá su nombre a su tiempo, lo que nos importa en este caso es que comprenda su aplicación en el algoritmo de la operación.

Ejemplo :

25 x 7 = (20 + 5) x 7	Reagrupación
(20 x 7) + (5 x 7)	Propiedad distributiva
140 + 35	Multiplicación
175	Suma

El objetivo a seguir en la realización de este algoritmo, u otros que se realicen, de ninguna manera será su memorización. Lo que se intenta es - que el alumno lo comprenda y sepa el porqué del mecanismo a seguir, ya que el que se usa cotidianamente y que el alumno debe emplear es más directo al eliminar varios de los pasos mencionados. La comprensión debe quedar bien -

cimentada para que en conocimientos y aplicaciones posteriores se logren generalizaciones adecuadas por parte de los alumnos.

Al llegar a las operaciones con números de mas de dos cifras se harán mas evidentes los niveles de comprensión logrados en los casos anteriores y no se deberá recurrir a las explicaciones tradicionales donde se les dice a los niños que los números se van acomodando en escalerita o dejando un lugar sin mayor explicación. Estos casos se inician primeramente multiplicando decenas cerradas vistas como grupos y reagrupandolas para tener multiplicaciones mas simples. Ejem.

15 x 20 es igual a 15 x 2 decenas = 30 decenas = 300.

Después se pasa a los casos con decenas y unidades, ejem;

15 x 25 = (15 x 20)+(15 x 5)

15 x 2 decenas + 15 x 5

30 decenas + 75

300+75 = 375.

Es mas usual explicar lo anterior de forma vertical, de la sig. manera.

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 25 \\ \hline 75 \\ 300 \\ \hline 375 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 20 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 5 \\ \hline 75 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ 300 \\ \hline 375 \end{array}$$

El mismo procedimiento es utilizado para las multiplicaciones por números de 3 o mas cifras, y una vez más, se puede constatar que es necesario que el alumno comprenda los estados anteriores para adquirrir este conocimiento. Ya que lo importante es que entienda el procedimiento y su significado y pueda aplicar este conocimiento en situaciones prácticas.

VII. ENSEÑANZA DE LA DIVISION

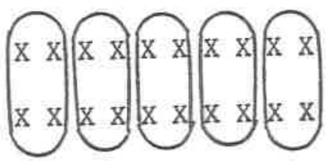
Para que el niño logre una cabal comprensión del procedimiento a seguir en la operacioón de división, se necesita que haya comprendido bien las anteriores tres operaciones, no sólo la multiplicación. Es común observar a niños que no llegan al resultado correcto al realizar una operación de este tipo, por no saber ejecutar la resta necesaria en el algoritmo.

La enseñanza de la operación se inicia a partir del tercer grado de primaria como un sinónimo de la idea de repartir en partes iguales.

Se empieza con divisiones sencillas que el alumno pueda resolver mentalmente, pero siempre partiendo de situaciones concretas, para después introducir los significantes gráficos, realizando la operación de forma horizontal ($\div$) o usando la galera ($\overline{}$) en la forma vertical. Marcando la relación que tiene con la operación de multiplicar.

En la ejemplificación gráfica se puede usar la repartición de un conjunto en subgrupos que contengan la misma cantidad de elementos, ejem.

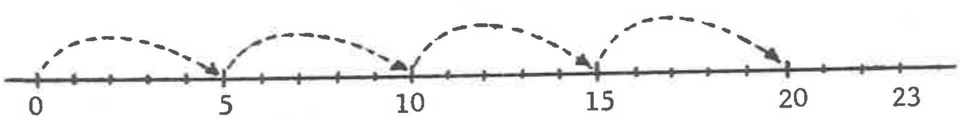
$20 \div 5 = 4$



5 grupos de 4 elementos cada uno.

También se puede hacer en la recta numérica, aquí el resultado estaría dado por el número de saltos o intervalos iguales que se necesitan y cuya amplitud marca el divisor, para llegar al número que se necesita, o al mas cercano sin llegar a pasarse en caso de que la división no sea exacta,

Ejem: 23 - 5 4 y sobran 3.



Se necesitan 4 saltos de valor 5 para llegar al # 20, que es el número menor mas cercano faltando 3 mas para el 23. Haciendo notar que el residuo, "lo que sobra", debe ser menor que el divisor.

Para pasar a casos más complicados entre una cifra en los que el resultado consta de mas de un dígito, se usa el mismo procedimiento de reagrupaciones usado con anterioridad. Para que la idea quede más clara, se inicia dividiendo número terminados en cero, (sin unidades) repartiendo sólo decenas, una vez comprendido se pasa a números con decenas y unidades.

> "Será muy útil que el maestro insista en que, al emplear el algoritmo, empezamos dividiendo los "paquetes"mas grandes, digamos, los millares; y que los millares que sobran, es decir, el residuo, se abren para agruparse a los siguientes paquetes, a saber, las centenas; y después se continúa con las decenas hasta el final dividir las unidades" (9).

Así el algoritmo se va acomodando en forma de galera dejando marcada la resta que se efectúa en cada caso. Ejemplo:

```
      218
3  / 654
    -6
     05
     -3
      24
     -24
      00
```

Para la división entre dos cifras es de mucha ayuda la recta numérica y la acomodación de objetos en hileras. En la recta se recomienda ir marcan sólo los múltiplos del divisor hasta llegar al número deseado. Se observa

---

(9) S.E.P. Matemática. Libro para el maestro para el Tercer grado. México (s.e.) 1972. p.79.

la cantidad de intervalos y se anotan en el algoritmo para realizar la resta y pasar a la etapa siguiente. En estos pasos es importante dejar la resta indicada para no perder de vista la justificación de los residuos. Cuándo se considere que esta etapa está superada, es cuando se recomienda omitir la escritura de este paso haciendolo mentalmente para abreviar el algoritmo.

Otra opción es escribir la "tabla"del divisor para utilizarla de manera similar a la recta y ayudarse en el cálculo de los resultados. Para lo - cual es conveniente utilizar el mismo divisor varias veces, ya que el objetivo no es que se haga una tabla por problema, sino que se ejercite el algoritmo y su posterior simplificación.

Estos procedimientos evitan que el alumno se canse al tratar de adivinar la respuesta por el método del tanteo que durante mucho tiempo se aplicó, ya cuando el alumno entienda el procedimiento sabrá calcular mejor sin la necesidad de ayudarse de la recta o las tablas haciendolo mentalmente.

Al igual que en las demás operaciones, es importante recalcar su utilidad fuera de la escuela, en la vida diaria, intercalando ejemplos prácticos que permitan generalizar y puntualizar el uso cotidiano de esta operación para lograr una mayor comprensión y compatibilidad con las estructuras mentales del alumno.

IX. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

1. Las operaciones fundamentales no son hechos aislados, sino que forman - parte fundamental del razonamiento matemático.

2. La enseñanza de los razonamientos matemáticos tiene dos fines: el informativo, aporta los conocimientos que el hombre necesita en la vida y para comprender mejor las otras ciencias. Y el formativo, enseña a pensar y desarrolla el razonamiento lógico.

3. Para que nuestra actividad educativa tenga éxito debemos de conocer mejor el proceso de desarrollo mental de infante y la manera como interactua con los objetos de conocimiento. Para lo que nos es de gran utilidad las investigaciones de Jean Piaget.

4. Para Piaget la esencia del conocimiento es una operación, una acción interiorizante; el conocer un objeto significa poder actuar sobre él, conocer su constitución y poder modificarlo. El individuo necesita ser activo para obtener un conocimiento y después generalizarlo aplicándolo a - situaciones diferentes a las presentes en el momento de aprenderlo.

5. Los factores que contribuyen al desarrollo del conocimiento son: la maduración biológica, la experiencia, la transmisión social y la equilibración que es quién regula a los otros factores.

6. Para que el niño comprenda un concepto matemático debemos partir de las ideas que él ya posee, de la etapa de desarrollo en que se encuentra y - esa comprensión dependerá también de que tan bien afianzados tenga los conceptos anteriores al visto, ya que todos se encuentran interrelacionados.

7. El método usado en la enseñanza de la matemática es el inductivo-deductivo, empezando con lo concreto, después lo gráfico y por último lo abstracto, los símbolos.

8. La manera de ver y enseñar la matemática ha cambiado. Actualmente existen varias teorías al respecto aplicadas a su enseñanza en varios países, a estas se les critica porque enfatizan mucho los procedimientos lógicos pero que descuidan el cálculo, siendo que tienen la misma importancia.

9. La operación de adición es base fundamental para la comprensión de las demás operaciones. Su enseñanza-aprendizaje se encuentra ligada con el concepto de número.

10. El órden lógico para la enseñanza de las operaciones básicas es: primero la adición, después la sustracción, la multiplicación y la división, ya que cada una necesita de las anteriores para su comprensión.

11. Los procesos de agrupación y reagrupación son básicos e indispensables para la enseñanza de las cuatro operaciones fundamentales.

12. Los algoritmos son auxiliares importantes para alcanzar la comprensión y el razonamiento del proceso de las operaciones. Sin embargo no se deben imponer o mecanizar porque perderían su finalidad.

13. La enseñanza de las operaciones básicas debe estar siempre ligada a las soluciones de problemas concretos y reales donde los alumnos puedan aplicarlas y generalizar sus conocimientos.

BIBLIOGRAFIA

A.N.U.I.E.S. Manual de Didáctica de las Matemáticas. México, (s.e.) 1972. 147 p. (Programa Nacional de Formación de Profesores).

BELL, Max, et. al. El Curso Conciso en Matemáticas para los Profesores de Escuela Primaria. IX. Tr. de Edward Begle y Howard Fehr. United States of América, Ed. SMSG 1966 (c. 1966). 572 p. (Estudios de Matemáticas).

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la Matemática Moderna. Tr. de Felipe - Robledo Vázquez. México, Ed. Trillas 1979. 186 p.

DIENES,Z.P. La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria.Tr. y prólogo de Alvaro Buj Gimeno. 4a. ed. Barcelona, Ed. Teide 1972. 95 p.

FREGOSO, Arturo. Introducción al Lenguaje de la Matemática. México, Ed. C.E.M.P.A.E., 1972. 248 p.

GUILLEN DE REZZANO, Clotilde. Didáctica Especial. 10 ed. Buenos Aires, Ed. Kapelusz 1966. 313 p.

MONTEMAYOR, F.J. Técnica para la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria. Monterrey, (s.e.) 1969. 395 p.

PIAGET, Jean. Seis Estudios de Psicología. Tr. de Nuria Petit. 4a. ed. México, Ed. Seix Barral 1984 (c. 1967). 227 p. (Biblioteca Breve).

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Matemáticas. Libro del Maestro para el Tercer Grado. 8a. ed. México, (s.e.) 1972. 124 p.

----------------------. Libro para el Maestro Primer Grado. México (s.e.) 1980. 381 p.

----------------------. Libro para el Maestro Segundo Grado. México (s.e.) 1981. 459 p.

----------------------. Libro para el Maestro Tercer Grado. México (s.e.) 1985. 250 p.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Contenidos de Aprendizaje. México, (s.e.) 1983. (c. 1983). 262 p.

----------------------. El Niño Aprendizaje y Desarrollo. México, (s.e.) 1985. 254 p.