



SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 191

ENSEÑANZA DE LAS CUATRO OPERACIONES BASICAS
DE LAS MATEMATICAS EN LA EDUCACION PRIMARIA

MARIA TERESA RODRIGUEZ DE LEON

MONTERREY, N.L. 1989.



SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 191

✓
ENSEÑANZA DE LAS CUATRO OPERACIONES BASICAS
DE LAS MATEMATICAS EN LA EDUCACION PRIMARIA

MARIA TERESA RODRIGUEZ DE LEON

Tesina presentada para obtener el título
de Licenciado en Educación Básica.

MONTERREY, N.L. 1989.

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

Monterrey, N.L., a 6 de OCTUBRE de 1989.

C. PROFR.(A)

MARIA TERESA RODRIGUEZ DE LEON

Presente.

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su -- trabajo, intitulado: "ENSEÑANZA DE LAS CUATRO OPERACIONES -- BASICAS DE LAS MATEMATICAS EN LA EDUCACION PRIMARIA" -- --

opción TESINA, modalidad ENSAYO --
a propuesta del asesor C. Profr.(a) CRUZ RAUL SENA CAS-
TELLANO , manifiesto a usted que reúne los requisitos --
académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentar su examen profesional.



entamente,
PROFR. ISMAEL VIDALES DELGADO
Presidente de la Comisión de Titulación
de la Unidad 191 Monterrey

S E

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD
191 MONTERREY

mrpt'

A mis padres por apoyarme a seguir
superándome.

Con amor a mi hija Jessika, que es
mi aliciente para forjarme metas
en la vida.

INDICE

	Página
DICTAMEN	
DEDICATORIA	
I. INTRODUCCION	1
II. ASPECTOS GENERALES DE LAS MATEMATICAS	3
A. Las matemáticas en la historia	3
B. Sistemas de numeración	4
C. Las matemáticas como ciencia	5
III. ALGUNOS METODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS	7
A. Enseñanza verbal	7
B. Método descriptivo y constructivo en la enseñanza de la geometría	7
C. La metodología tradicional	8
D. El contenido nuevo	8
E. La pedagogía tradicional en la aritmética elemental	8
F. El nuevo modelo de la pedagogía matemática elemental	8
IV. ALGUNOS LINEAMIENTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS	10
V. IMPORTANCIA DE LAS MATEMATICAS EN LA EDUCACION PRIMARIA	13
VI. LA ADICION O SUMA	16
A. Enseñanza de la adición	16
B. Adición con números enteros	19
VII. LA SUSTRACCION O RESTA	20
A. Enseñanza de la sustracción	20
B. Sustracción con números enteros	23
VIII. LA MULTIPLICACION	25
A. Enseñanza de la multiplicación	25
B. Multiplicación con números enteros	28
IX. LA DIVISION	30
A. Enseñanza de la división	30
B. División con números enteros	34

X. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

35

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

BIBLIOGRAFIA

I. INTRODUCCION

La educación se ha propuesto como objetivo y meta el hombre. Todas las personas de cualquier edad y nivel social tienen derecho a la educación.

La educación es un proceso por el cual las personas entran en contacto con conocimientos científicos, costumbres morales, formas de lenguaje, destrezas técnicas y normas de vida.

La humanidad siempre ha necesitado de las matemáticas, desde las culturas más antiguas hasta la actualidad.

Este trabajo trata de plantear la manera de lograr que la enseñanza de matemáticas en la escuela primaria sea un proceso participativo, orientado hacia ciertos objetivos con el fin de lograr mejorar la realidad del alumno, despertando su interés.

Se tratarán algunos aspectos generales de las matemáticas como son: su historia, algunos sistemas de numeración, el papel que desempeñan las matemáticas como ciencia, y su relación con otras ciencias.

Se mencionará algunos métodos utilizados en la enseñanza de las matemáticas, con el fin de compararlos.

Propondré algunos lineamientos para la enseñanza de las matemáticas, que pueden ser de utilidad en el trabajo diario desarrollado con los alumnos en el salón de clases.

En el tema la importancia de las matemáticas en la educación primaria. Se abordará cómo está cimentada la educación, porqué es importante las matemáticas y sus cuatro operaciones básicas, y cuál es el objetivo de la enseñanza matemática.

En los siguientes capítulos trataré las cuatro operaciones básicas la adición, la sustracción, la división y la multiplicación. Se tratará de conocer de cada una de ellas su significado, su comprensión, su simbología, los mecanismos, algunas formas de enseñarlas, los problemas presentados por cada una de estas operaciones; mediante conceptos matemáticos fáciles, comprensibles y útiles. Para que los alumnos puedan ir descubriendo los procedimientos para resolver los problemas que se le presentan a partir de una actividad dinámica.

Elegí para titularme en Licenciado de Educación Básica, la opción de tesina en la modalidad de ensayo, por considerar esta opción la más adecuada para presentar mi trabajo académico abordando un tema de la práctica docente.

Para la realización de este trabajo seguí los lineamientos de la metodología de la investigación documental.

II. ASPECTOS GENERALES DE LAS MATEMATICAS

A. Las matemáticas en la historia

Las matemáticas aparecen con el hombre mismo, por todas partes se ve la necesidad de conocerlas, al observar el mundo que lo rodea; al pensar en la distancia que recorría de un lugar a otro, el tiempo que necesitaba para sus trabajos. Contar, medir, y construir fueron las primeras ideas acerca de las matemáticas. " En la vida del hombre primitivo existieron múltiples circunstancias que lo condujeron a importantes descubrimientos de carácter matemático." (1)

Pero el hombre no se conformó con esto y ha seguido profundizando para obtener mejores conocimientos de los problemas que se le presentan en el transcurso de su vida, es así como se han ido desarrollando las matemáticas y la sociedad actual se enfrentará a problemas nuevos que debe ir resolviendo. Estos problemas se resolverán por la habilidad del hombre de pensar matemáticamente.

La historia propiamente dicha de las matemáticas comienza en Oriente, hacia el año 2000 a.C. con los babilonios, pues éstos poseían ya conocimientos de la que se podría llamar álgebra elemental. Pero como ciencia en el sentido moderno aparece en Grecia entre los siglos V y IV a.C.

Civilizaciones tan antiguas como la de los babilonios, tenían conocimientos matemáticos, habían creado un sistema de numeración posicional, dividido el círculo en 360°. En geometría ya median perímetros, áreas y volúmenes.

La egipcia fué otra de las civilizaciones que usó las matemáticas, se tiene conocimiento de ello gracias a los papiros de Moscú y Rhind. Construyeron instrumentos que nos indican que tenían conocimientos de geometría práctica. Ejemplo de ello son: un instrumento astronómico, un reloj de sol egipcio que data del año 1500 a.C. Además la construcción de la gran pirámide de Gizeh, construída aproximadamente en el año 2900 a.C., nos indica un gran conocimiento geométrico.

Al decaer Egipto y Babilonia la geometría pasó a poder de los griegos. Los griegos sin embargo transformaron las conclusiones empíricas de sus predecesores, desarrollando una ciencia deductiva, sistemáticamente construída.

Los griegos cambiaron en la matemática, los procedimientos empíricos por razonamiento deductivo; la experimentación por demostraciones lógicas. Algunos investigadores piensan que esto se debió a que los griegos tenían una religión diferente a los orientales; otros señalan que fue consecuencia de la lógica de Aristóteles.

B. Sistemas de numeración

Los sistemas de numeración han sido diferentes a través del tiempo. Entre ellos se encuentra: El sistema de numeración egipcio, este sistema de numeración era aditivo; el sistema babilónico, representado por cuñas; el sistema griego, tenía tres formas, dos estaban representados los números por letras y la otra por símbolos; los números romanos, al igual que los números griegos estaban representados por letras; el sistema maya, usa el valor de posición y un símbolo para el cero; el sistema de numera-

ción chino, era representado por símbolos.

El sistema de numeración utilizado en la actualidad es el de los números indoarábicos. Son muchas las teorías acerca del origen de estos números, pero la más aceptada es la que propone se originaron en la India; los árabes los habían aprendido de los hindúes, y al conquistar España los introdujeron, difundiéndose estos números por toda la Europa Cristiana.

C. Las matemáticas como ciencia

* Los antiguos lograron hacer leyes, aunque algunas veces incorrectas, gracias a la observación y a la experimentación en la solución de problemas. "La experimentación fué, y sigue siendo en muchos aspectos, la piedra angular del descubrimiento matemático". (2)

En un principio la matemática tiene un pobre papel e interviene en ella la aritmética, luego aparece la geometría y el álgebra. Después se pasa a las enumeraciones, a las fórmulas y éstas a su vez son remplazadas por la ecuación diferencial.

La matemática es la ciencia de representaciones, de esquemas y abstracciones, utilizando símbolos y leyes formales. "El campo matemático trata de construir a través de la complejidad, de las vivencias del espacio y los números un mundo único plenamente objetivado." (3)

* La matemática es una ciencia deductiva, esto permite: "Formar alumnos con un pensamiento científico de tal naturaleza y, por otro lado comprender diferencias y similitudes con disciplinas que utilizan otras metodologías". (4)

* A diferencia de otras ciencias las matemáticas son una ciencia que toda persona, en algún momento de su vida ha estado en contacto con ella. Esto hace diferente a las matemáticas de otras ciencias, que si no se les estudia, el hombre no se encuentra en contacto con ellas. La matemática es una de las ciencias más importantes para la humanidad, pues permite al hombre tener un pensamiento científico y deductivo, esto le ayuda para comprender más fácilmente otras disciplinas similares.

Las ciencias en su relación con las matemáticas pasan por cuatro - fases: empírica, cuando se cuentan los hechos; experimental, cuando se los mide; analítica, cuando se los calcula; y axiomática, cuando se los deduce.

"La matemática se busca a través de las diferentes "ciencias," así como las ciencias - la Ciencia - se busca por la matemática y se hace por la matemática que es a la vez el órgano de acción y el modo de percepción".

(5)

III. ALGUNOS METODOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Las matemáticas tienen un método de trabajo y contenidos propios. Para saber de matemáticas es indispensable conocer ambos aspectos. Mencionaré algunos métodos que se utilizan para la enseñanza de las matemáticas.

A. Enseñanza verbal

En matemáticas encontramos muchas definiciones, pero antes de entrar a las definiciones, deberíamos dejar a los alumnos que hagan descripciones de lo que entienden. Así el aprendizaje sería más provechoso.

Debemos dejar que los niños obtengan sus respuestas y las comparen con sus compañeros, así se formará una discusión donde ellos obtengan sus ideas.

Los maestros antes de dar un concepto, debemos saber que ideas tienen los alumnos, para seleccionar las adecuadas e irles erradicando las ideas incorrectas. No debemos preocuparnos mucho de que el alumno se aprenda las definiciones, más nos debe interesar que comprenda ¿qué cosa es...?

B. Método descriptivo y constructivo en la enseñanza de la geometría

Antes de lograr una definición de una figura geométrica partiendo de lo concreto. Se puede hacer que el alumno la identifique haciéndola, recortándola, comparándola. De esto el alumno podrá dar una definición a partir de su experiencia, sin que ningún concepto le sea impuesto. "Cómo el paso de lo concreto a lo abstracto resulta más natural, no a través de las observaciones del objeto, sino de las operaciones con él." (6)

C. La metodología tradicional

Se caracteriza por los rasgos siguientes: "la progresividad del estudio de los números está basado en la acertada idea de una complejidad - - psicogenética creciente de su suscesión." (7)

Se interesa en el estudio de las cuatro operaciones básicas. Utilizando técnicas de gran rigidez que sólo llevan a respuestas condicionadas.

"La metodología tradicional ha podido, extraviarse tanto tiempo y tan profundamente en los más recónditos artificios, es algo que la historia pedagógica deberá aclarar un día." (8)

D. El contenido nuevo

Se basa en la teoría de los conjuntos, en las operaciones con conjuntos, en la numeración y en las operaciones con números.

E. La pedagogía tradicional en la aritmética elemental

Lo esencial de este curso era el estudio de los números naturales. Se enseña la matemática elemental en una forma de militarización. "Así se crean, incluso para la enseñanza de una noción tan abstracta como el número, auténticos modelos teóricos vividos como exigencias universales de la razón." (9)

F. El nuevo modelo de la pedagogía matemática elemental

Está más próxima a la teoría operativa. Aquí se encuentra la renovación pedagógica, la situación experimental, y la formación de estructuras

lógicas en el niño.

" Es cierto que, fuera de una u otra metodología de la enseñanza, debe haber por parte del profesor una amplia visión de los problemas matemáticos que le permita dar valorización diversa a los temas de estas "pequeñas matemáticas" en las cuales el niño debe dar sus primeros pasos. " (10)

IV. ALGUNOS LINEAMIENTOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Al impartir cualquier curso de matemáticas debemos intentar equilibrar tanto el aspecto formativo como el informativo.

Los profesores debemos tener una visión amplia del objetivo de la enseñanza de las matemáticas, para poder darle una dirección a nuestra enseñanza. Es preciso despertar el interés de los alumnos.

A través de las actividades diarias en el salón de clases, se forma el ciudadano del mañana, por eso las actividades deben estar encaminadas a conocer el niño y ayudarlo a adquirir una personalidad bien formada.

En la enseñanza de las matemáticas es necesario que los alumnos comprendan que para resolver un problema se necesita: comprender el problema, hacer un plan para resolverlo, ejecutar el plan y por último examinar la solución obtenida.

Una de las tareas de los maestros es la de ayudar a los alumnos. "El maestro debe ayudarlo, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo". (11)

Al enseñar matemáticas, lo mejor es ir guiando al alumno y ayudándolo en forma natural; sin imponerle reglas, dejando que participe activamente. Al trabajar con los niños, los podemos dirigir haciéndoles preguntas relacionadas con los problemas planteados, con el propósito de concentrar la atención del alumno en la incógnita del problema.

Cuando el maestro hace preguntas y recomendaciones a los alumnos, es

con el fin de ayudarlo a resolver los problemas planteados, y para que posteriormente el pueda resolver problemas por sí mismo.

La habilidad práctica se obtiene mediante la imitación. "El profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica." (12)

Para poder enseñar cualquier conocimiento es necesario conocer bien lo que se quiere enseñar. El maestro no debe improvisar una clase, sino por el contrario estar bien documentado.

Al impartir matemáticas debemos tener presente al plantear problemas que el razonamiento del problema sea el correcto, comprender el propósito de dicho paso, escribir y hablar correctamente.

En el caso de un razonamiento presentado en forma correcta que no llega a ser entendido por los alumnos, nos debemos preguntar si hemos empleado todos los datos, al observar detenidamente los datos podemos deducir si algún elemento útil se nos ha escapado, y si éste es necesario para la solución adecuada del problema.

Para el proceso enseñanza - aprendizaje de las matemáticas debemos dejar de utilizar únicamente los procesos puramente mecanizados, para enfocarnos a procesos donde se trata de poner a los niños en situaciones que les ayudarán a descubrir las estructuras: cómo están constituidas y cómo se enlazan unas con otras en la solución de problemas. "En todas partes, la operación manual debe preceder a la operación aritmética; la expresión del lenguaje corriente debe preceder a la expresión del lenguaje matemático." (13)

Para que el niño pueda adquirir las nociones abstractas, en matemáticas, se sigue un procedimiento en la enseñanza de dicha materia. Primero, es una fase de maduración, donde las situaciones se ensayan más o menos al azar. Segundo, es una fase más estructurada donde se captan las reglas, es aquí donde aparece bruscamente el descubrimiento. Tercero, se explora el nuevo descubrimiento por medio de un procedimiento práctico.

Cuando el alumno se ha familiarizado con los conjuntos, o sea que ya no tiene dificultad para clasificarlos, es el momento de pasar de los conjuntos a los números.

Una vez que el niño entendió lo que es número, conjunto, la igualdad de los números, conjunto vacío y el número cero; es el momento en que se puede pasar a iniciar la noción de adición. Dentro de las cuatro operaciones básicas, la adición es la primera que se enseña, siguiéndole la sustracción, para pasar posteriormente a la multiplicación y división.

V. IMPORTANCIA DE LAS MATEMATICAS EN LA EDUCACION PRIMARIA

En la escuela primaria la enseñanza se cimienta sobre cuatro áreas que son: Español, Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. Además de estas cuatro áreas fundamentales la educación primaria se complementa con las áreas de Educación para la Salud, Educación Artística, Educación Física y Educación Tecnológica. Todas éstas áreas nos ayudan a la formación integral del alumno.

Para obtener mejores resultados en el proceso enseñanza aprendizaje, de cualquiera de las áreas y sobre todo en matemáticas, se tiene que hacer uso de los métodos didácticos que más se adecúen a la problemática de la -práctica docente tomando en cuenta los alumnos, sus intereses, el programa escolar, la escuela y la comunidad. "El profesor al tratar de mejorar los programas, debería, a nuestro parecer, saber escoger de aquí y de allá analogías y estructuras capaces de unificar conceptos diversos, operacio--nes y acciones, y cuestiones de proyección." (14)

Para la educación primaria es muy importante el área de matemáticas, pues es parte fundamental del plan de estudios; ya que a pesar de ser una materia bastante extensa y compleja permite conocer conceptos de espacio, aritmética, geometría, lógica, escalas, probabilidades y estadística.

Las cuatro ramas fundamentales de las matemáticas son: Aritmética, Geometría, Algebra y Trigonometría. De lo anterior es de sumo interés la aritmética, que estudia los números. Dentro de esta rama se encuentran las cuatro operaciones básicas suma, resta, multiplicación y división, ya

que estas operaciones nos dan la base para la formación esencial en el proceso de la enseñanza primaria.

Mediante la enseñanza y aprendizaje adecuado de las cuatro operaciones básicas, el alumno aprende a pensar matemáticamente y desarrolla una mayor capacidad y precisión del pensamiento. Esto le proporciona la oportunidad de adquirir mejores técnicas que le ayuden a resolver nuevos problemas.

La enseñanza de las cuatro operaciones básicas dentro de la educación primaria es indispensable y primordial, ya que estas operaciones se presentan en el programa escolar dentro de los seis grados y son operaciones que en todo momento el alumno necesita, ya que son parte de su realidad inme--diata. Las aplica no solo en el salón de clases sino también en su comuni-dad, al reunirse con sus amistades, al jugar, cuando va de compras, en su hogar al convivir con sus padres y hermanos.

No solamente el alumno de primaria realiza sumas, restas, multiplucaciones y divisiones, éstas son operaciones que se efectúan a diario por casi todas las personas de todas las edades y nivel social; en muy diver-sos tipos de actividades desde el trabajo, el estudio, los quehaceres do-mesticos hasta en el momento de planear un juego, de ahí su importancia.

El objetivo de la enseñanza matemática en la educación primaria es lograr que el alumno desarrolle su pensamiento cuantitativo y lo utilice para la comprensión y transformación de los fenómenos sociales, científicos y culturales que se le presenten. Así mismo el educando comprenda por sí mismo y de forma permanente la interacción de las matemáticas con

su mundo externo. Se pretende que sea capaz de cuestionar las cosas, buscar y captar información. Tomando en cuenta que el alumno aprenda a aprender, de manera que cuando esté en la escuela primaria y después durante toda su vida busque y utilice por sí mismo los conocimientos adquiridos, organice sus observaciones y participe responsable y críticamente en la vida social.

VI. LA ADICION O SUMA

A. Enseñanza de la adición

La adición es la primera de las cuatro operaciones básicas que se enseña al niño de primaria. Su aprendizaje comienza desde el primer grado. Se puede decir que la suma es un pilar de la enseñanza matemática.

Al principio de la enseñanza, el aprendizaje se inicia con los números, mediante acciones operativas; se pasa a los conjuntos, igualdad de conjuntos, comparación de conjuntos; en seguida el número cero. " Una vez que domina todo esto perfectamente, se considera que ha llegado al momento de introducir las operaciones propiamente dichas. " (15)

En un principio la enseñanza de la suma se debe hacer bajo cantidades no numéricas, con objetos reales; esto con el fin de que el niño pueda manipularlos y se vayan formando en él las bases para una construcción lógica.

Después de trabajar con objetos reales, se pasa a los objetos gráficos. Se trabaja con objetos gráficos hasta que el niño comprenda bien que los objetos dibujados no son más que la representación de la realidad. Ya una vez dominado lo anterior, no son necesarias las representaciones gráficas, pues el niño ha adquirido la abstracción del número.

Es de suma importancia que al iniciar la enseñanza de la adición, el alumno comprenda para que sirve la suma, cuándo y dónde la va a aplicar.

Esto se obtiene mediante planteamientos de problemas reales resolviéndolos con ejercicios gráficos, y con objetos, se debe hacer que el alumno - - reflexione sobre el problema e invente él solo sin dificultad otras operaciones del mismo orden.

Una vez logrado que el alumno reflexione, que comprenda perfectamente qué es la adición y utilice adecuadamente sus conocimientos para resolver un problema planteado, es cuando se puede pasar a la mecanización de la - suma. A nivel de la adición la mecanización de esta operación es simple y fácil de ser comprendida por los niños. En lo referente a los problemas razonados, estos son fáciles de identificar, ya que no se prestan mucho a confusión.

Un punto muy importante es hacerle comprender al niño la utilización del signo de adición (+) y que éste debe evocar la acción de poner, reunir, añadir o aumentar.

La dificultad que presenta la adición es cuando se tiene que "llevar" a la siguiente columna. Para su enseñanza, se familiariza al niño con la noción de unidades, decenas, centenas, etc. Que observe que diez unidades forman una decena, por tal motivo las unidades no deben exceder de - nueve.

Posteriormente se pasa a la suma de unidades y decenas en forma gráfica. Ejemplo: Antonio tenía 1 decena y 6 unidades de canicas y su mamá le regaló 2 decenas y 7 unidades de canicas ¿Cuántas canicas tiene ahora?

Tenía	1 decena 0000000000	y	6 unidades 000000
Le regalaron	2 decenas 0000000000 0000000000	y	7 unidades 0000000
Ahora tiene	3 decenas 0000000000 0000000000 0000000000	y	13 unidades 00000000000000

Se le pide al alumno observar las unidades, se le cuestiona para que llegue a la conclusión que con las unidades obtenidas se puede formar una decena; y que ésta la tenemos que "llevar" a la columna de las decenas. Quedando el problema de la siguiente manera:

Ahora tiene	4 decenas 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000	y	3 unidades 000
-------------	---	---	-------------------

Estos ejercicios son con el fin de que el alumno comprenda por que se "lleva" a la siguiente columna. Cuando se ha comprendido lo anterior, ya no son necesarias las representaciones gráficas, ya que puede pasar a la suma con números.

Cuando el alumno ha comprendido el procedimiento de "llevar" e identifica adecuadamente cuando tiene que sumar y realiza las operaciones - - correctamente, se puede decir que ha aprendido a sumar.

B. Adición con números enteros

Los alumnos de primer grado a cuarto grado conocen solamente los números naturales. Por lo tanto la primera operación de adición que se enseña es la de enteros positivos.

Después en quinto grado y sexto grado se le enseña al niño los números enteros. Estos son enteros positivos y enteros negativos, el cero es el punto de partida y es neutro. Al sumarse los números positivos en la recta numérica se desplazan hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda.

En seguida se pasa a la adición de números positivos con negativos. Para hacer más sencillo el aprendizaje de estas operaciones, representamos los datos en la recta numérica. Para que el alumno observe los desplazamientos de los números.

Mediante ejercicios, discusiones con sus compañeros, etc. los alumnos comprobarán y llegarán a las siguientes conclusiones:

Al sumar dos enteros de signo positivo, la suma es de signo positivo.

Al sumar dos enteros de signo negativo, la suma es de signo negativo.

Al sumar dos enteros con diferente signo, se restan y la suma conserva el signo del sumando de mayor valor absoluto.

Al sumar cualquier entero por su simétrico, la suma es igual a cero.

VII. LA SUSTRACCION O RESTA

A. Enseñanza de la sustracción

La enseñanza de la resta se realiza al igual que la suma desde el - - primer año de primaria. Esta operación junto con la suma son la base para toda educación matemática.

La resta presenta más dificultad para su aprendizaje, ya que se puede solucionar con ella diferentes tipos de situaciones. Aquí los procesos que conducen a la utilización de la sustracción tienen niveles de elaboración muy diversos.

Primero la más sencilla, cuando el enunciado sugiere directamente la realización de la sustracción. Ej. Yo tenía 18 canicas perdí 5 ¿Cuántas me quedan? Esta forma de sustracción evoca en el alumno rápidamente la acción de quitar.

Los siguientes casos son los que presentan mayor dificultad, el alumno se enfrenta a situaciones donde el enunciado parece sugerir una adición. Ej. Hugo tenía 16 canicas, ahora tiene 29 canicas ¿Cuántas se han añadido? Luis tiene 4 colores ¿Cuántos le faltan para tener 8 colores?

"Si en el primer ejercicio la sustracción es la representación de un gesto realmente ejecutado, no es lo mismo cuando la operación, en su mayor elaboración, obliga a calcular cantidades desconocidas sin tener en cuenta aquéllo que verdaderamente se añade o suprime, o

incluso a veces, sin que sea de ningún modo, cuestión de poner o quitar nada" (16)

La enseñanza de la sustracción debe comenzar con objetos reales. Ej. Se le pide al niño que realice con su material lo que el maestro indique, ponemos unas tijeras y un borrador, quitamos el borrador ¿Qué hay ahora? etc. Después se utiliza menos material y más sencillo, se sigue con representaciones gráficas, hasta que el alumno pueda trabajar con operaciones numéricas.

En la primera etapa de la enseñanza lo importante es que el alumno comprenda que operación tiene que utilizar. Los primeros razonamientos se realizan con operaciones simples. Que reconozca en la sustracción la operación que nos permite encontrar la diferencia de dos números, y observe la relación inversa entre la adición y la sustracción.

Después de esto se sigue con operaciones numéricas. Primero se le enseña al alumno a restar quitando. Ej. Antonio tenía 5 manzanas, se comió 2 ¿Cuántas manzanas tiene ahora? Aquí el alumno se ayuda con palitos o sus dedos, pone primero cinco, a éstos les quita dos y obtiene el resultado. Este procedimiento sirve para empezar pues es el que más claro responde a la interrogante. El problema de este procedimiento es al trabajar con números mayores pues sería muy tardado.

Otro procedimiento es enseñar la resta como la operación contraria a la suma. Se empieza por encontrar el número perdido $4 + \underline{\quad} = 7$. Donde para encontrarlo se hace una sustracción $7 - 4 =$. Pasamos a la sustrac-

ción en forma vertical, el alumno es ubicado en el sustraendo y tiene que "llegar" al minuendo. Este procedimiento es el que se usa en los grupos superiores y tiene la ventaja de ser más rápido.

La dificultad presentada en el procedimiento anterior es cuando una cifra del minuendo es menor que la del sustraendo, por que no se puede "llegar". Antes de enseñar a "pedir" y después "pagar", se pueden realizar restas en forma desarrollada, para que el alumno comprenda este procedimiento. Ej. María tenía \$ 97, de los cuales gastó \$ 59. ¿Cuánto dinero le

queda ahora?
 $97 - 59 =$

$$\begin{array}{r} 90 + 7 \\ - 50 + 9 \\ \hline \end{array}$$

Es claro que siete es menor que nueve y no se puede empezar a realizar la operación. Entonces se representa el número 97 de manera diferente. Se toma una decena del grupo correspondiente a las decenas y se pasa a la columna de las unidades, quedando reagrupado el número 97 de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 80 + 17 \\ - 50 + 9 \\ \hline 30 + 8 = 38 \end{array}$$

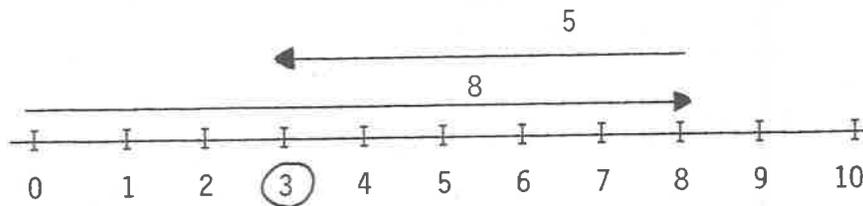
Al trabajar con los números escritos en notación desarrollada se observa que si se aumenta una decena en las unidades del minuendo, las decenas del minuendo pierden una decena. Al realizar la operación en forma

directa es más complicado hacer la sustracción en el minuendo que aumentar una decena en las decenas del sustraendo, es por eso que la diferencia se mantiene igual. Lo anterior se realiza con el fin de que el alumno comprenda que es lo que se hace al "pedir" y al "pagar".

B. Sustracción con números enteros

Las sustracciones que el alumno de primaria aprende son:

Sustracciones con números enteros positivos, tanto en forma horizontal, vertical y en la recta numérica donde los movimientos se inician en el cero, el minuendo se desplaza hacia la derecha para después desplazarse el sustraendo hacia la izquierda y obtener la diferencia o resta donde termina el desplazamiento del minuendo. Ej. $8 - 5 =$



En los grupos superiores los alumnos aprenden restas tanto con enteros positivos como con enteros negativos. La resta puede efectuarse como una suma en la que el segundo sumando (en la resta es el sustraendo) se sustituye por su simétrico. Ej.

$$\begin{array}{l}
 6 - 3 = \quad 6 + \overline{3} = \underline{3} \\
 \underline{9} - \underline{10} = \quad \underline{9} + 10 = \underline{1} \\
 8 - \underline{2} = \quad 8 + 2 = 6 \\
 \underline{9} - 4 = \quad \underline{9} + \underline{4} = \underline{13} \\
 13 - 5 = \quad 13 + 5 = 18
 \end{array}$$

Aprenden las propiedades del cero en la resta. Si a cualquier número se le sustrae cero, nos queda el número inicial. Si cualquier número se sustrae de sí mismo, la diferencia es cero. Ej.

$$9 - 0 = 9$$

$$\bar{5} - 0 = \bar{5}$$

$$8 - 8 = 0$$

$$\bar{3} - \bar{3} = 0$$

VIII. LA MULTIPLICACION

A. Enseñanza de la multiplicación

La enseñanza de la multiplicación empieza en el segundo grado (oficialmente). Para enseñar esta operación se debe evitar caer en el error de empezar por la memorización de las tablas de multiplicar. Pues si empezamos con la memorización, lo que se logra es hacer que el alumno tome temor hacia la materia si no logra rápido aprenderlas. Lo mejor sería preocuparnos porque el niño comprenda qué es la multiplicación, para qué sirve, cuándo y dónde la va aplicar. Esto se puede lograr trabajando con objetos y problemas sencillos. Se obtiene una mejor participación, que encargándoles a los alumnos, muchas veces las tablas de multiplicar. Con lo anterior no se quiere restar importancia al hecho de aprenderse de memoria las tablas, pues éstas son muy necesarias para agilizar la resolución de las multiplicaciones.

Lo primero que se enseña al alumno, basándonos en su experiencia con la suma, es la idea de cuántas veces tenemos el mismo sumando. Sin trabajar todavía el símbolo de multiplicación. Ej. Un globo cuesta \$8 - - ¿Cuánto cuestan tres globos? Tres globos cuestan $\underline{8} + \underline{8} + \underline{8}$ o también 3 veces $\underline{8}$ pesos.

La multiplicación se puede entender, en el sentido de reunión de partes iguales. Lo primero para su comprensión es representarla con objetos. Ej. $3 \times 4 = \underline{\quad}$. Donde se representa el cuatro tres veces:

** ** **

** ** **

$$4 + 4 + 4 = 12$$

$$3 \text{ veces } 4 = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$

El alumno observa que al sumar un mismo sumando. $4 + 4 + 4 = 12$. Esta adición puede ser remplazada por una multiplicación, $3 \times 4 = 12$.

Por lo tanto llega a la conclusión que una adición de sumandos iguales se puede convertir en una multiplicación. Inversamente una multiplicación la podemos convertir en una adición de sumandos iguales. Y la multiplicación es la forma más corta de representar una suma reiterada.

"Cuando se efectúa una multiplicación, se cambia el universo sobre la marcha, y esto es precisamente lo que introduce una dificultad a propósito de este concepto. En un producto uno de los factores se refiere a los conjuntos, el otro a conjuntos de conjuntos."(17)

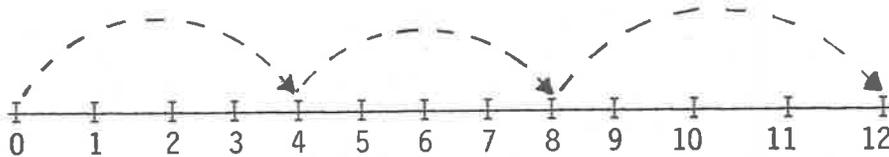
Si se considera a la multiplicación como una serie de adiciones, entonces su operación inversa es una serie de sustracciones. Lo mejor es considerar a la multiplicación como la reunión directa de cantidades en una sola, y su operación inversa es una participación. Este segundo punto de vista es el que mejor responde a la enseñanza de la multiplicación.

Una representación gráfica de 3×4 , considerando a la multiplicación como la reunión directa de cantidades en una sola, es hacer una -

tabla que contenga 3 columnas, con 4 puntos cada una y después contar el número de puntos.



Otra forma de representar la multiplicación, es en la recta numérica, donde se le indica al alumno que se dan saltos de igual longitud, 3×4 . Dar tres saltos de cuatro unidades.



Ya que se logró captar el concepto de lo que es la multiplicación, se pasa al aprendizaje de las tablas, tomando éstas como el producto de la reunión de cantidades.

Empezando con multiplicaciones sencillas por una cifra, y poco a poco con cantidades mayores. Al plantear operaciones con dos cifras, se indica al niño que debe empezar a multiplicar por el lado derecho, o sea el de las unidades. Al multiplicar la siguiente cifra, la de las decenas, se deja un espacio vacío. Es importante que el alumno sepa el por qué de ésta situación. Una forma de explicarlo es exponiendo la multiplicación en forma desarrollada. Ej.

$$\begin{aligned}
 29 \times 13 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 29 \times 13 &= (29 \times 10) + (29 \times 3) = \\
 &\quad 290 \quad + \quad 87 \quad = 377
 \end{aligned}$$

Para que se dé cuenta, que al multiplicar en forma desarrollada se multiplicó $(29 \times 10) + (29 \times 3)$, y que al hacerlo en forma directa si no se deja un espacio para las unidades, se estaría multiplicando por uno y no por diez. Este mismo procedimiento es aplicable a operaciones con tres o más cifras.

En lo referente a aumentar las que se "llevan", ya se tiene conocimientos de este procedimiento pues es aplicable el utilizado en la adición, con la variante que se aumenta hasta que ya se multiplicó. Lo importante es que el alumno entienda los procedimientos para que los aplique en problemas prácticos.

B. Multiplicación con números enteros

Al multiplicar factores positivos. El producto es positivo.

$$3 \times 7 = 7 + 7 + 7 = 21$$

Al multiplicar factores negativos. El producto es positivo.

$$\bar{3} \times \bar{7} = (\bar{7}) - (\bar{7}) - (\bar{7}) = +7 + 7 + 7 = 21$$

Al multiplicar factores con signo diferente. El producto es negativo.

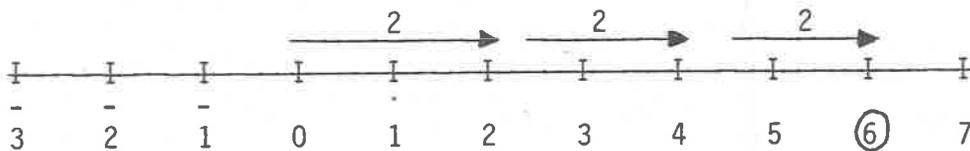
$$3 \times \bar{7} = +(\bar{7}) + (\bar{7}) + (\bar{7}) = \bar{7} + \bar{7} + \bar{7} = \bar{21}$$

Para comprobar que al multiplicar factores de signo diferente el producto es negativo, se puede desarrollar la siguiente tabla:

$$\begin{array}{r} 5 \times 2 = 10 \\ 5 \times 1 = 5 \\ 5 \times 0 = 0 \\ 5 \times \underline{1} = \underline{-5} \\ 5 \times 2 = 10 \end{array}$$

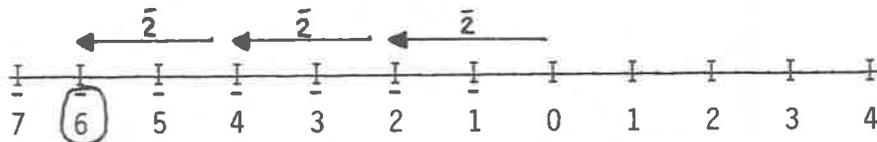
Donde se observa, cuando el segundo factor disminuye, el producto disminuye.

La multiplicación en la recta numérica, los factores de signo igual se desplazan hacia la derecha. $3 \times 2 = 6$



Los factores de signo diferente se desplazan hacia la izquierda.

$$3 \times \bar{2} = \bar{6}$$



En el programa oficial de educación primaria, se marca multiplicaciones con números enteros positivos; los enteros negativos no los marca. Aunque en algunas primarias si se enseñan.

IX. LA DIVISION

A. Enseñanza de la división

La división es la última de las cuatro operaciones básicas en enseñarse. Debido a que tiene un mayor número de dificultad para su solución, ya que el alumno tiene que utilizar sus conocimientos de adición, sustracción y multiplicación. Su enseñanza empieza en el tercer grado de primaria.

La división para su aprendizaje tiene dos sentidos: Primero, cuando se efectúa una partición. Ej. Antonio tiene 36 dulces y los quiere repartir a 6 niños. ¿Cuántos dulces le tocan a cada uno? Segundo, cuando se hace una división, pero en realidad lo que se realiza es una serie de -- sustracciones para constatar la respuesta. Ej. ¿Cuántas cajas pueden llenarse con 40 manzanas, si cada caja contiene 8 manzanas?

Los dos sentidos no tienen nada en común. Es necesario enseñar primero, el sentido de una cantidad que se reparte; conociendo el número en que se va a repartir, para obtener el contenido de cada parte. Debido a que éste es el de más fácil comprensión y se capta mejor el sentido de participación de la división.

Con el método anterior se aprecia que la multiplicación (reunión) y la división (participación) son operaciones inversas.

Es conveniente empezar la enseñanza con operaciones sencillas, donde el alumno pueda resolverlas mentalmente. Pero nunca olvidándonos de plantear los problemas con situaciones cotidianas.

Se familiariza al niño a resolver problemas, primero donde se marque claramente que la operación a realizar es una división. Ej. Tengo 12 cuadernos y los quiero repartir a 6 niños. ¿Cuántos cuadernos le tocan a cada uno?

Una vez dominado lo anterior se puede pasar a situaciones en que la operación utilizada es lo contrario de lo que sucede en el planteamiento. Ej. 4 niños tienen la misma cantidad de canicas, las reúnen y entre los 4 tienen 16 canicas. ¿Cuál es la parte de cada uno?

Antes de enseñar la operación numérica es conveniente hacer algunos ejercicios gráficos con el fin de que el alumno observe la repartición. Ej. Queremos repartir 12 objetos en 3 partes iguales. $12 \div 3 = \underline{\quad}$

$$\begin{array}{l} 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \end{array} \quad 12 \div 3 = 4$$

Después operaciones con residuo. Ej. Reparte 17 objetos en 4 partes.

$$17 \div 4 = \underline{\quad}$$

$$\begin{array}{l} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array} \quad 17 \div 4 = 4 + 1$$

Al llegar a la operación numérica se enseña que para resolver una división se emplea una multiplicación. Ej. $46 \div 6 =$. Se resuelve recordando que número multiplicado por 6 es igual o se acerca a 46, pero no debe ser mayor. Donde se tiene que utilizar los múltiplos del 6.

$$\begin{array}{l} 6 \times 7 = 42 \quad \text{y} \quad 42 < 46 \\ 6 \times 8 = 48 \quad \text{y} \quad 48 > 46 \end{array}$$

No se puede utilizar el producto mayor entonces el resultado es - -
 $46 \div 6 = 7 + 4$.

Después de hacer ese tipo de divisiones pasamos a la división en forma vertical. Surge el problema de que tanto la suma, la resta y la multiplicación se iniciaban por las unidades, en tanto que la división se - - empieza repartiendo por la izquierda. Hay que explicar a los niños que se empieza por la izquierda para repartir primero el número de mayor valor, y lo que sobre pase para agruparse al siguiente número y así sucesivamente hasta terminar con las unidades, pues el residuo o sea lo que sobra debe ser menor que el divisor.

Es necesario en un principio ir anotando el algoritmo de la división para mayor comprensión.

$$\begin{array}{r} 216 \\ 4 \overline{) 865} \\ \underline{- 800} = 200 \times 4 \\ 065 \\ \underline{- 40} = 10 \times 4 \\ 25 \\ \underline{- 24} = 6 \times 4 \\ 01 \end{array}$$

Pero una vez dominado esto, ya no es necesario la escritura de la resta, pues el alumno la puede realizar mentalmente.

Cuando se divide con un dígito es fácil para el alumno calcular el resultado, porque conoce bien los múltiplos del 1 al 9. Pero al trabajar el divisor con dos dígitos resulta más difícil ya que no conoce bien los múltiplos de números mayores. Una opción para la solución podría ser - escribir los múltiplos del divisor.

$$42 \overline{) 986}$$

Se separan dos cifras de 986, empezando de izquierda a derecha. Nos da 98 decenas.

$$42 \times 2 = 84 \quad \text{y} \quad 84 < 98$$

$$42 \times 3 = 126 \quad \text{y} \quad 126 > 98$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 42 \overline{) 986} \\ \underline{- 84} \\ 146 \end{array}$$

Nos sobran 14 decenas a estas se le suman las 6 unidades de 986, y tenemos 146 unidades.

$$42 \times 3 = 126 \quad \text{y} \quad 126 < 146$$

$$42 \times 4 = 168 \quad \text{y} \quad 168 > 146$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 42 \overline{) 986} \\ \underline{- 84} \\ 146 \\ \underline{- 126} \\ 20 \end{array}$$

Este procedimiento sería temporal solo se utilizaría para ejercitar al alumno en el cálculo.

Lo importante es que el alumno conozca la utilidad de la división para que la pueda aplicar en la solución de problemas cotidianos.

B. División con números enteros

Las operaciones con números enteros que se realizan son: divisiones exactas o sea que el residuo es cero; divisiones inexactas, ya que su residuo no es cero.

Cuando el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, el cociente es de signo positivo. Ej.

$$\overline{36} \div \overline{4} = 9$$

$$20 \div 4 = 5$$

Cuando el dividendo y el divisor tienen diferente signo, el cociente es de signo negativo. Ej.

$$24 \div \overline{6} = \overline{4}$$

$$\overline{30} \div 15 = \overline{2}$$

En el programa oficial de primaria solo marca la enseñanza de la - - división con números positivos.

X. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

- 1) Para obtener mejores resultados en la enseñanza de matemáticas, es necesario planear adecuadamente el trabajo para lograr despertar el interés de los alumnos ayudándolos a desarrollar un pensamiento activo.
- 2) Debemos conocer y comprender el desarrollo mental del niño. Los factores que forman éste desarrollo son: una fase de maduración, otra es la experiencia donde se captan las reglas y una fase exploratoria.
- 3) Hacer ejercicios que favorezcan el desarrollo del razonamiento lógico; producir el hábito de analizar cada problema; lograr que el alumno comprenda que un problema no es una operación de números únicamente, sino que debemos encontrar ejercicios en que se le obligue a reflexionar en la búsqueda de su solución. Se puede empezar con pequeños problemas simples. Al principio se trabaja con objetos, después se pasa a operaciones gráficas y por último a las operaciones numéricas.
- 4) Es necesario acostumbrar a los alumnos a que lean detenidamente el problema para una mejor solución del mismo. Se le puede ejercitar con textos cortos, para comentar lo descrito. Debemos acostumbrarlo a comprender y retener lo que lee.
- 5) Hay que entrenar al alumno para que adopte una actitud de investigación frente a los problemas que se le planteen ya sea a partir de los datos o a partir de la pregunta.

6) Es indispensable para la enseñanza de las cuatro operaciones básicas seguir el orden marcado en el programa oficial. El orden lógico es: primero la adición, luego la sustracción, siguiendo la multiplicación y por último la división: ya que para proseguir con la enseñanza de otra operación debe estar bien afianzada la vista con anterioridad, ya que todas se encuentran interrelacionadas entre sí.

7) Se debe tener cuidado de que el alumno comprenda perfectamente las operaciones que se le enseñan para no dejar dudas. Para esto es necesario enseñar cada concepto de manera analítica y detallada.

8) Para la enseñanza de matemáticas, no se debe abusar de los problemas de rutina, pues se limitaría la enseñanza a una ejecución mecanizada de las operaciones. Es necesario combinar la enseñanza con problemas prácticos para que el alumno razone sobre la incógnita, los datos y llegue a la solución de los problemas.

9) Es necesario que los maestros adecúemos los problemas matemáticos para que tengan relación entre sí, y no sean hechos aislados. Para poder enseñar matemáticas se debe conocer bien lo que se quiere enseñar.

10) Debemos lograr una verdadera comprensión de las cuatro operaciones básicas. Para que el alumno aprenda a utilizar adecuadamente cada una de ellas en las diferentes situaciones que se le presenten, ya sea en la escuela o en su vida diaria.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) UPN - SEP. Matemáticas I (volúmen 1 antología.) México, 1980. p. 123.
- (2) Ibid. p. 155
- (3) Z.P. Dienes. La matemática moderna en la enseñanza primaria. 4a.ed. Barcelona, Ed. Teide, 1972. p. VII.
- (4) UPN - SEP. Op. cit. p. 5.
- (5) SEP. Matemáticas I (antología.) México, 1976. p. 23.
- (6) Emma Costelnuovo. Didáctica de la matemática moderna. 5a. ed. México, Ed. Trillas, 1979. p. 87
- (7) Joseph Mazure. El aprendizaje de la matemática moderna. Barcelona, Ed. Planeta, S.A. 1981. p. 30.
- (8) Ibid. p. 31 - 32
- (9) Ibid. p. 45.
- (10) Emma Costelnuovo. Op. cit. p. 35.
- (11) G. Polya. Cómo plantear y resolver problemas. 13a. ed. México, Ed. Trillas, 1986. p. 25.
- (12) Ibid. p. 27.
- (13) Joseph Mazure. Op. cit. p. 31.
- (14) Emma Costelnuovo. Op. cit. p. 55.
- (15) Francine Jaulin. Las cuatro operaciones básicas de las matemáticas. Madrid, Ed. Pablo del Río Editor, 1980. p. 20.
- (16) Ibid. p. 11.
- (17) Z. P.Dienes. Op. cit. p. 43.

BIBLIOGRAFIA

- COSTELNUOVO, Emma. Didáctica de la matemática moderna. 5a. ed. Tr. de Felipe Robledo Vázquez. México, Ed. Trillas, 1979 (c 1963) 210 p.
- DIENEZ, Z.P. La matemática moderna en la enseñanza primaria. 4a. ed. Tr. de Alvaro Buj Gimeno. Barcelona, Ed. Teide 1972 (c 1965) 98 p.
- JAULIN, Francine. Las cuatro operaciones básicas de las matemáticas. Tr. de Mercedes Tejedor. Madrid. Ed. Pablo del Río Editor, 1980. 137 p.
- LARROYO, Francisco. Historia General de la Pedagogía. 11a. ed. México, Ed. Porrúa, 1969. 599 p.
- MAZURE, Joseph. El aprendizaje de la matemática moderna. Tr. de María Rosa Ley Valle. Barcelona, Ed. Planeta, S.A. 1981 (c 1974) 170 p.
- POLYA, G. Cómo plantear y resolver problemas. 13a. ed. Tr. de Profr. Julián Zugazagoitia. México, Ed. Trillas, 1986. (c 1965) 215 p.
- SEP. Matemáticas I (antología). México, 1976. 360 p.
- UPN - SEP. Matemáticas I (volumen 1 antología). México, 1980. 299 p.
- ZUÑIGA, Enrique, Jorge Arturo Zúñiga y Héctor Ignacio Zúñiga. Descubramos la matemática. Quinto grado de primaria. México, Ed. Ediciones Pedagógicas, S.A. de C.V. 1987 (c 1985) 195 p.