UNIDAD
SEAD
191
UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

LA MATEMATICA EN LA ESCUELA PRIMARIA

JUANA IRMA CHAPA CANTU

MONTERREY, N. L. DE 1988

UNIDAD
SEAD
191
UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

La matemática en la escuela primaria

JUANA IRMA CHAPA CANTU

Investigación Documental presentada para obtener el título de Licenciado en Educación Básica

Monterrey, N.L., 1988

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD 191 MONTERREY

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

Monterrey, N.L., a 6 de Mayo de 1988.

C. PROFRA.
JUANA IRMA CHAPA CANTU
P r e s e n t e .-

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su -- trabajo, intitulado:

LA MATEMATICA EN LA ESCUELA PRIMARIA

opción, TESIS modalidad Investigación Documental a propuesta del asesor C. Profra. PERLA AURORA TREVIÑO TAMEZ, manifesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y - se le autoriza a presentar su examen profesional.

A t e n t a m e n t e,

PROFR. ISMAEL ROBLES DELGADO
Presidente de la Comisión de Titulación
de la Unidad 191 Monterrey

S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD
191 MONTERREY

A mis padres ...

a mis maestros ...

y compañeros ...

a mi esposo...

a mi hija...

Por brindarme lo mejor de ellos mismos en cada momento de mi carrera y de mi vida.

INDICE

Pág.

I. INTRODUCCION

La educación básica en nuestro país se encuentra dividida en - seis grados. Cada uno de los cuales cuenta con un programa que señala los objetivos que han de alcanzarse en cada uno de los- grados.

Para que un maestro conozca bien los seis programas requerirá- de seis años de trabajo cada año con un grado distinto, lo -- cual es muy difícil. Muchos maestros sólo conocemos los progra mas de los grados con que hemos trabajado y esto impide que -- tengamos una visión amplia y clara de lo que enseñamos en la - escuela primaria a través y en cada uno de los grados y sobre- todo porqué lo enseñamos, porqué exactamente ese contenido y - no otro y porqué en el libro se manejan esas actividades que - en muchas ocasiones calificamos de inútiles y no las llevamos- a cabo.

Un niño es aceptado en la escuela primaria a los seis años de- edad y lógicamente al terminarla contará aproximadamente con - doce años de edad. Para lograr brindar una educación integral- en cada uno de esos seis grados, el programa está dividido en- ocho áreas: cinco académicas y tres no académicas. Las cinco - áreas académicas son: Español, Matemáticas, Ciencias Natura--- les, Ciencias Sociales y Educación para la salud; mientras que en las no académicas se encuentran: Educación física, Educa--- ción artística y Educación tecnológica.

Uno de los aspectos académicos que tiene gran importancia y merece nuestra atención es el de las matemáticas, ya que puede detectarse que muchos da los maestros nos enfrentamos a la situación de dificultad que presenta esta área de aprendizaje y surgen entre ellos muchos comentarios sobre el tipo de ejercicios que se presentan en el libro de texto, ya que muchos los califican de demasiado obvios o demasiado entretenidos.

En lo particular me ha interesado el área de las matemáticas, porque a mí me agradan y observo con tristeza que a muchos alumnos no les gustan y se les dificulta muchísimo lograr los objetivos que se proponen en esta área.

Viendo esta situación considero que un estudio como el que a continuación se presenta nos permitirá obtener una visión clara del contenido que se imparte y debe impartirse, y el procedimiento a través del cual el alumno va a aprenderlo más eficientemente.

A través del presente trabajo deseo analizar el fondo y forma de la matemática en la escuela primaria, estudiando el contenido y la metodología de uno de cada uno de sus aspectos en los distintos grados; para lograr establecer una relación vertical de seguimiento, que estimo esencial para percibirla en conjunto y lograr obtener una visión clara de lo que se está enseñando en matemáticas.

Se expone una visión dialéctica de los períodos de la matemática que se han dado a través de la historia, según los autores rusos Aleksandrov, Kolmogorov y otros. Enseguida se presenta el enfoque psicogenético sobre el desarrollo de la inteligencia, lo que es el razonamiento y algunas dificultades que enfrenta el niño en el aprendizaje especialmente en el área de las matemáticas. Se estudia el modelo que se sugiere como método de enseñanza en el área de matemáticas en los programas de educación primaria y se enuncian los aspectos en que esta ciencia es dividida para su estudio. Se especifican los contenidos implícitos en los objetivos de cada grado así como el tipo de ejercicios que aparecen en el libro de texto de los alumnos, como resultado de un análisis hecho a los objetivos de cada grado escolar y los respectivos libros de texto gratuitos, definiéndose previamente en un apartado las nociones básicas correspondientes a cada aspecto; para posteriormente en el último capítulo, realizar un análisis de lo expuesto y llegar a establecer las conclusiones y recomendaciones que se estimen pertinentes.

Considero que el lograr tener estas cuestiones bien definidas contribuirán grandemente a mejorar la actitud en la enseñanza de la matemática, lo cual repercutirá muy favorablemente en el aprendizaje de ésta por parte de los alumnos.

Esta investigación es el resultado del estudio y análisis de - textos y programas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, se trataron de seguir y aplicar- los procedimientos de la metodología de la investigación documental.

La finalidad no es la de presentar innovaciones pero sí, la de hacer ver relaciones fundamentales entre la materia y la psicología, que bien conocidas facilitan enormemente la enseñanza-- aprendizaje de esta ciencia y con ello al buen logro de los objetivos educacionales.

II.- LA MATEMATICA A TRAVES DE LA HISTORIA

A. Concepto y generalidades de la matemática

La matemática como cualquier otra ciencia está inmersa en todas las actividades cotidianas que realizamos. Remontándonos a tiempos prehistóricos, es precisamente de ahí de donde surge y posteriormente se consolida como ciencia. Buscando el significado de matemáticas en un diccionario enciclopédico encontraremos: "Ciencia que estudia, por medio de sistemas hipolético-deductivos, las propiedades de los entes abstractos, tales como figuras geométricas, los números, etc., así como las relaciones que se establecen entre ellos" (1).

La matemática es considerada una ciencia que estudia entes abstractos como figuras geométricas, números y sus relaciones. Esto da la idea de que la matemática es algo muy complejo alejado del mundo real en que nos desenvolvemos y que como requiere de razonamiento sólo los muy inteligentes podran comprenderla. Pero debe cambiarse esta forma de ver a la matemática, sí es cierto que estudia entes abstractos, pero es el hombre el que los ha abstraido de su propio mundo real. Es por ello que debe verse a la matemática como lenguaje, que expresa todo lo cuantitativo que el hombre percibe, lenguaje que comunica lo existente entre los elementos y sus relaciones, y que debe ser comprendido y comprensible para todos los seres humanos, ya que el mismo hombre la ha creado.

En la actualidad se habla de matemáticas modernas, pero estos-términos no significan que haya cambiado su contenido, sino --que a cambiado la forma de su presentación. El estudio de las-matemáticas modernas se basa en la noción de conjuntos y se da mayor importancia a la forma o procedimiento para obtener un -resultado, que al resultado mismo. Esto quizá debido a la in--fluencia de la tecnología, que ha creado máquinas que operan -en fracciones de segundo para dar un resultado exacto, pero --que requieren de un programa detallado de órdenes correctas para procesar la información.

B. Períodos de la matemática

Desde tiempos remotos la matemática tuvo sus orígenes en las -actividades cotidianas que el hombre realizaba y en los requerimientos que el avance de su cultura le solicitaba. La historia de la matemática es muy larga e interesante, y puede ser -estudiada desde distintos puntos de vista; para el desarrollo-del presente trabajo estimo muy conveniente estudiar el enfo--que dialéctico que presentan los autores rusos Aleksandrov, --Kolmogorov y Laurentiev y otros en su libro La matemática: su-contenido método y significado.

Ellos dividen el desarrollo que ha tenido la matemática a través de la historia en cuatro períodos que son:

1. La aparición de la matemática como ciencia pura, teórica independiente.
2. El desarrollo de la matemática elemental de las magnitudes-constantes.
3. La matemática de las magnitudes variables.
4. La matemática contemporánea.

Enseguida se estudiará lo característico de cada uno de esos - períodos, pero antes es preciso transcribir un texto que ayudará mucho a ubicar nuestro estudio.

> "Las cuatro etapas del desarrollo de la matemática mencionadas"..."se corresponden naturalmente con las distintas etapas de nuestra formación matemática";..."Los resultados básicos de la aritmética y la geometría, obtenidos en el primer período del desarrollo de la matemática, constituyen el objeto de la enseñanza primaria, y son de todos conocidos.- Por ejemplo, cuando determinamos la cantidad de material necesario para realizar un cierto trabajo (para recubrir un suelo, pongamos por caso) ya estamos haciendo uso de estos-primeros resultados de la matemática. Los más importantes - logros del segundo período, el de la matemática elemental,- se estudian en los centros de enseñanza media. Los resultados básicos del tercer período, los fundamentos del análisis, la teoría de las ecuaciones diferenciales, el álgebra-superior, etc., constituyen los conocimientos matemáticos - de un ingeniero; se estudian en todos los centros de enseñanza superior, excepto aquellos dedicados exclusivamente a las humanidades. De este modo, todo ingeniero y científico-conoce y emplea las ideas básicas y logros de la matemática del período.
> Por otra parte, las ideas y los resultados del período actual de la matemática se estudian casi exclusivamente en -- los departamentos universitarios de matemáticas y física. - Aparte de los especialistas en matemáticas; dichos resultados son utilizados por los investigadores en los campos de-la mecánica y la física, así como en algunas de las ramas - más recientes de la tecnología" (2).

Como puede apreciarse en el texto anterior, los logros obtenidos en la primera etapa son los que se estudian en la escuela-primaria; por lo que a este período le dedicaremos mayor atención.

1. La matemática como ciencia teórica (de los tiempos más remotos haste el siglo V a. C.)

En este período surgieron y se desarrollaron dos grandes ramas de la matemática: la aritmética y la geometría. En el desarrollc de la aritmética fue fundamental el surgimiento del concepto de número, el llegar a establecer este concepto no fue fácil, tuvieron que pasar muchos años para que el hombre a través de muchas comparaciones entre conjuntos con la misma cantidad de elementos, se percatara de la correspondencia y equivalencia de estos y muchos más para que lo representara graficamente.

Algunos de los primeros símbolos utilizados fueron la mano para el 5, el hombre completo para el 20 que se corresponden concretamente con la cantidad que representan, aquí "el número aparece ya como una propiedad de una colección de objetos" (3), pero no aparece aún como un número abstracto no relacionado con lo concreto. Inclusive algunas culturas tenían distintas representaciones para el mismo número al tratarse de cosas distintas; para llegar a abstraer el número abstracto de las -

colecciones o conjuntos de objetos concretos tuvieron que hacerse a través de generaciones millones de comparaciones de las colecciones entre sí.

"Las operaciones de los números aparecen como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos" (4), esto es, al unir dos o más colecciones surgió la operación de sumar, la multiplicación apareció de la costumbre de sumar por doses o por treses, etc. Como aparece obvio la resta de la idea de quitar elementos de la colección y la división de ir eliminando por doses o por treses, etc.

En el proceso de contar el hombre fue descubriendo ciertas reglas generales, como la de que no importa el orden en que se acomoden las colecciones o por cual elemento se empiece a contar. Además el número no surgió independiente sino relacionado con los demás números ya que una colección de por ejemplo seis elementos puede ser dividido en 5+1 ó 4+2 o 3x2, etc.

Pasando el tiempo la vida social se volvió más intensa y complicada, por lo que hubo la necesidad de formular números más grandes, así que se introducen los símbolos numéricos (esto íntimamente ligado al desarrollo de la escritura) y enseguida los signos para las operaciones aritméticas.

Con la introducción de los símbolos se llegó a la culminación del concepto de número, ya que al mencionar un número por ejem plo el ocho, no se piensa en una colección sino en el símbolo- "8" y con los números se pueden materializar números tan grandes que por enumeración hubiera sido imposible concebirlos.

El símbolo es muy importante ya que es una materialización concreta y sencilla del número y facilita el cálculo de las operaciones con ellas.

Desde tiempos antiguos surgieron diversos sistemas de numeración en distintas bases y utilizando uno o varios de los principios aditivo, multiplicativo y posicional.

Los actuales símbolos "arábigos" fueron llevados de la India a Europa por los árabes en el siglo X y se consolidaron en pocos siglos.

Nuestro sistema de numeración tiene dos particularidades: su base es decimal y su principio es posicional, lo que hace que la escritura de los números sea concisa y sencilla, facilitando grandemente las operaciones de cálculo. La introducción del cero como número fue obra de los indios y esto les permitió desarrollar un sistema posicional, y además son pocos los sistemas que en sus orígenes incluían al cero.

Los vestigios más remotos de la aritmética se conservan en los textos más antiguos de los Babilonios y Egipcios, los cuales poseen problemas resueltos como modelo para dar solución a los que se presentasen; entre ellos ya había algunos de solución de cuadráticas, cúbicas y progresiones que hoy pertenecen al álgebra. El autor señala que de este modo es como se desarrolla la matemática en la escuela primaria y para los que no están especialmente interesados en esta área del conocimiento. Dicho de otra forma, la matemática en niveles básicos se estudia a través de problemas como modelos.

En el siglo III a. C. los griegos ya sabían que la sucesión de números en general y probar teoremas. En este mismo siglo Euclides escribe sus famosos "Elementos", los cuales vienen a ser teoremas generales sobre las propiedades de los números. Al darse este paso de transición de los problemas concretos a los razonamientos abstractos; la aritmética se convierte en una teoría matemática.

La aritmética "es reflejo de propiedades definidas de las cosas reales" (5) y su objeto es el sistema de números con sus relaciones mutuas y sus reglas.

En cuanto al desarrollo de la geometría esta surge también en tiempos prehistóricos de las actividades prácticas cotidianas.

Los primeros hombres llegaron a reconocer las formas geométricas observándolas de la naturaleza, como la luna llena, la rectitud del agua del lago quieta o del tronco de un árbol, pero hay que advertir que ninguna figura llegaba a ser tan pura en-la actualidad que ya nos rodean bordes rectos y lisos, y trián gulos, círculos y cuadrados perfectos en todos los objetos que el hombre actual ha fabricado.

Al igual que para el concepto de número, para llegar a crear - cada uno de los conceptos de figuras geométricas el hombre tuvo que tensar miles de cuerdas, cortar piedras y construir muchos edificios y manufacturar cientos de figuras hasta lograrlo. De este modo surgieron también las nociones geométricas de longitud, área y volumen que en un principio eran determinadas a ojo y por motivos prácticos.

Muchos aseguran que la geometría nació en Egipto ya que debido a las constantes inundaciones del río Nilo frecuentemente te-- nían que delimitar las tierras de cultivo. En los textos más - antiguos de los Babilonios y Egipcios se encuentra un manual - para secretarios escrito por un tal Ahmes que contiene una colección de problemas para calcular capacidades de almacenes, - áreas de porciones de tierra y dimensiones de terraplenes en-- tre otras cosas. En otros textos aparecen con bastante exactitud el cociente de la longitud de una circunferencia a su diámetro, incluso hasta el área de una superficie de una esfera.- En ese tiempo la geometría aún no era teórica y los problemas-geométricos eran al mismo tiempo de cálculo aritmético.

En el siglo VII a. C. la geometría pasó de Egipto a Grecia don de se desarrolla bajo la tutela de grandes filósofos como Tales, Demócrito, y los sucesores de Pitágoras, llegan a establecer deducciones lógicas, llegando a establecer el teorema geométrico y su demostración, así llegaron también a calificar los axiomas. Para el siglo V a. C. ya existían exposiciones sistemáticas de la geometría que no se conservaron por la influencia que tuvieron después los Elementos de Euclides en el III a. C. que no sufren ninguna alteración esencial hasta dos mil años despúes con la revolucionaria geometría de Lobachevski.

La geometría opera con cuerpos geométricos y figuras, su objeto de estudio son las formas espaciales y las relaciones de los cuerpos reales, y aunque el método geométrico posee un alto nivel de abstracción dado que experimenta teóricamente con formas puras, la geometría surgió de la vida práctica del hombre y ha llegado a alcanzar un alto grado de generalización.

La aritmética y la geometría son dos ramas de la matemática que se interaccionan, esto se aprecia claramente en la medición, donde el paso de aplicar la unidad de medida es geométrico y el de calcular el número de veces de esta operación es aritmético. De la medición con unidades que no están contenidas un número entero de veces en la magnitud, a medir surge lo necesidad de fraccionar la unidad y es así como nacen los números fraccionarios.

Otro suceso que marcó la necesidad de seguir desarrollando estas ramas de la matemática era el problema de encontrar la medida de la diagonal de un cuadrado por medio del teorema de Pitágoras. Esto de acuerdo a la numeración existente en ese tiempo era imposible, entonces se tuvo la necesidad de crear los números irracionales (éstos números eran los inconmensurables para los griegos) conformándose así el conjunto de los números reales.

Después se relaciona al conjunto de los números reales con la gráfica de una recta, creando así la idea de continuidad e infinito hacia ambos extremos de la recta. Con esta idea de continuidad y observando que todo cuerpo tiene dos características, las de ser continuo y discreto al mismo tiempo, pero sabiendo que siempre una de éstas es la que predomina (considerando como ejemplo de discreto las patatas y de continuo el puré de patatas) tenemos que se han aceptado estas dos categorías y que para ambas existe su representación dentro de las matemáticas.

2. La matemática elemental

Este período puede subdivirse desde dos puntos de vista. Por su contenido básico pueden distinguirse dos partes: la del desarrollo de la geometría (hasta el s. II d. C.) y la del predominio del álgebra (del II d. C. al XVII d. C.).

Conforme a las circunstancias históricas pueden considerarse - tres desarrollos importantes:

El griego (VII a. C. - III a. C, al VI d. C.)
El oriental (V d. C. al XV d. C.)
El renacimiento europeo (XVI al XVIII d. C.)

Enumerando brevemente los avances alcanzados por la matemática en el florecimiento griego fueron:

El estudio de las secciones cónicas: la elipse, la hipérbola y la parábola.

Lograron la demostración de algunos teoremas relacionados con- los elementos de la geometría proyectiva.

En el siglo I d. C. sentaron las bases de la geometría esférica. Establecieron los elementos pertenecientes a la trigonometría. Se crearon las primeras tablas de sumar.

Llegaron a calcular áreas y volúmenes de diversas figuras complejas.

Los griegos ya sabían que la esfera es la figura geométrica -- que contiene mayor volumen, aunque esto se comprobó en el siglo XIX a través del cálculo integral.

En la geometría los griegos llegaron a alcanzar un nivel superior ya que surgió la geometría de Descartes (de ahí el plano-cartesiano), también elaboraron una selección de problemas que permitieron el desarrollo de la geometría analítica en 1637.

En cuanto al desarrollo en el subperíodo oriental:
Los chinos alcanzaron a resolver sistemas con tres ecuaciones.

En Europa, la matemática se desarrolló de acuerdo a las necesidades del cálculo, especialmente astronómico. Los que lograron mayores éxitos en el aritmética y el álgebra fueron los matemáticos indios, árabes y del Asia Central.

Los indios inventaron nuestro sistema actual de numeración, introdujeron los números negativos y comenzaron a operar con magnitudes irracionales del mismo modo que con las racionales.

La introducción de los números negativos fue muy lenta ya que-muchos consideraban a estos números como absurdos.

Los matemáticos Khaygam (1048-1122) y Tusi (1201-1274) demostraron rigurosamente que todo cociente de magnitudes connensurables o inconmensurables puede ser llamado número.

Los matemáticos del Asia Central encontraron tantos métodos -- aproximados como exactos de las raíces de las ecuaciones; descubrieron la fórmula general del "binomio de Newton", sistematizaron la geometría y calcularon las tablas de senos.

Durante el renacimiento europeo, los árabes tradujeron los libros griegos para los europeos, y fue hasta el siglo XVI cuando se dieron los avances.

Tartaglia y Ferrari encontraron la solución para la ecuación cúbica y la de cuarto grado.

Se inventaron los símbolos algebraicos actuales, en 1591 Vieta utilizó símbolos literales para las cantidades conocidas y las desconocidas también.

En 1585 Stevin escribió sobre las fracciones decimales. Neper escribió sobre los logaritmos en 1614 y Briggs calculó las primeras tablas de logaritmos decimales que fueron publicadas en 1624.

3. La matemática de las magnitudes variables

En el siglo XVI la física se dedicó al estudio del movimiento y como consecuencia de esto surgen en la matemática las magnitudes variables. Donde la variable utilizada en éstas es la imagen abstracta de la magnitud que varía; y una función es la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra.

La rama de la matemática que se ha dedicado al estudio de las funciones es el análisis. El desarrollo del análisis matemático se basó en problemas de la mecánica, la geometría y el álgebra; como en las relaciones entre velocidad y tiempo, área y volúmen y la determinación de tangentes a una curva. El paso definitivo para el avance de esta rama, fueron las bases de la geometría analítica establecidos en la geometría de Descartes (1637).

Algunas ramas en que se subdivide el análisis son:
El cálculo diferencial e integral que fueron consolidados con Newton y Leibnitz quienes formularon un método general para resolver problemas geométricos ya estudiados por matemáticos antiguos. Euler (1707-1783) y Lagrange (1936-1813) crearon el cálculo de variaciones; más tarde, las ecuaciones diferenciales fueron fundadas por Poincaré (1854-1912) y Lyapunov (1857-1918); en tanto que Cauchy (1789-1857) estudió las funciones de las variables complejas. Todas estas ramas de la matemática tuvieron sus orígenes en problemas relacionados con la mecánica, la física y la tecnología.

En el siglo XVII surgió también la geometría proyectiva junto a la geometría analítica; y en este mismo tiempo surgió la teoría de la probabilidad "que tiene como objeto las regularidades que se observan en grandes masas de fenómenos, tales como una serie de disparos de rifle o de lanzamientos de una moneda al aire" (6).

4. La matemática contemporánea

En geometría surgieron las geometrías no euclídeas, que consideran otros espacios como la de Lobachevsky y la de Bolyai.

En el álgebra se da también un cambio cualitativo al introducirse las teorías de Galois (1811-1832) ya que la "magnitud" toma una amplia concepción.

En el análisis, se ha avanzado del estudio de funciones individuales al estudio de una función como variable, a todos estos nuevos estudios se les ha ubicado como análisis moderno para diferenciarlo del clásico.

En la actualidad ha habido una gran revolución con la utilización de las máquinas de cálculo que ahora se ofrecen en presentaciones muy prácticas y que permiten un cálculo muy rápido y exacto; este avance ha permitido realizar investigaciones que antes eran impracticables. Sin embargo, el desarrollo de la matemática moderna se ha "caracterizado por el hecho de que su objetivo no es sólo el estudio de determinados entes; sino también de los caminos y medios por los cuales dichos entes pueden ser definidos" (7).

III. EL DESARROLLO DEL ALUMNO DE ACUERDO A LA TEORIA PSICOGENETICA

A. Generalidades de la teoría psicogenética

Una corriente psicológica que ha tenido una gran aceptación en nuestros tiempos es la teoría psicogenética de Jean Piaget, la cual es una psicología evolutiva, que estudia al ser humano -- desde su nacimiento; Jean Piaget, realizó interesantes observaciones, entrevistas, encuestas y estudios en sus hijos y muchos niños más, llegando a descubrir las diferentes etapas que van sucediendo a medida que el niño crece y se desarrolla biopsicosocialmente. Sus estudios llegaron a establecer lo más -- aproximadamente posible los distintos períodos del desarrollo y maduración que se van sucediendo, llegando a determinar también las características más sobresalientes de cada estadio.

Los estudios de la psicología psicogenética han sido y son de gran utilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje ya que permiten al educador conocer las características, posibilidades y limitaciones de sus educandos; así como seleccionar las estrategias de enseñanza que permitan al educando desarrollar todas sus posibilidades en potencia. Esto específicamente se aplica en las actividades de enseñanza, para hacerlas lo más interesantes y emotivas posible y lograr con esto mayor eficiencia en el aprendizaje. Sí es importante la ayuda que brinda esta teoría a la mejor aplicación de las actividades de enseñanza -

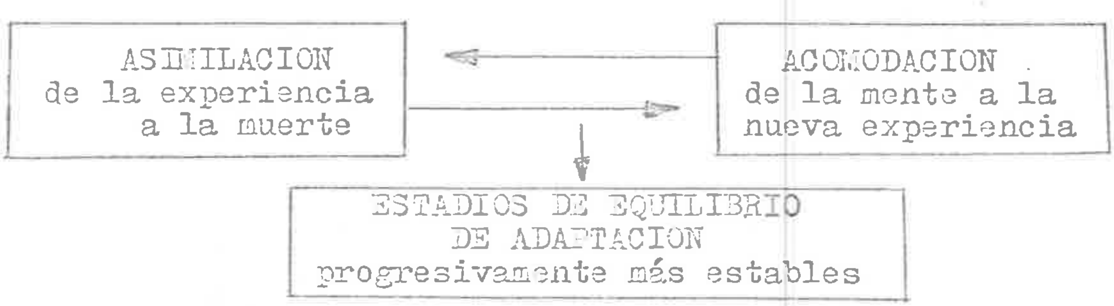
aprendizaje, será ovio que dicha teoría esté implícita en los programas de enseñanza de la educación básica.

La teoría psicogenética de Piaget diferencia etapas de desarrollo, pero en y entre cada una de ellas, él habla de la existencia de tres procesos que dan lugar a una verdadera adaptación mental: el de asimilación, el de acomodación y el de equilibrio, los cuales se caracterizan por la forma en que el pensamiento interactúa sobre las experiencias y viceversa.

La inteligencia es concebida por Piaget como un proceso de adaptación; lo que llama asimilación es un "proceso de actuación sobre el medio con el fin de con_struir un modelo del mismo en la mente" (8); la acomodación es interpretada como el "proceso en virtud del cual el intelecto ajusta continuamente su modelo al mundo para acoplar en su interior cada nueva adquisición" (9); mientras que el equilibrio es un estadio en que los dos procesos anteriores de asimilación y acomodación se interaccionan continuamente.

El diagrama siguiente expresa el proceso de adaptación mental:

Fig. 1 Diagrama del proceso de adaptación (*)



(*) Fuente: UPN. Pedagogía bases psicológicas. México, SEP, 1982. pág. 322.

Es importante advertir que para Piaget el proceso de autorregulación que él llama equilibración es, un factor fundamental en la adquisición del conocimiento lógico-matemático.

Además las aportaciones de Piaget son muy importantes para la enseñanza de la matemática debido a que "Piaget se ha dirigido invariablemente a los problemas epistemológicos de los antiguos griegos, realizando investigaciones en numerosos campos importantes del conocimiento, como la casualidad, el azar, la lógica, la cantidad, la clase, el número, la física y la medición" (10).

B. Desarrollo psíquico e intelectual

1. Desarrollo de la inteligencia

Piaget estudió y estableció las diferentes etapas de muhcos aspectos del sèr humano: la maduración, el juego, el crecimiento físico, el lenguaje, la inteligencia, el desarrollo psicomotor entre otros. El que especialmente nos interesa es la inteligencia. Piaget distingue tres períodos en le desarrollo de la inteligencia:

"a) Período de la inteligencia sensoriomotora, que se extiende desde el nacimiento hasta la aparición del lenguaje" (11), este es el período en que el niño conoce su medio ambiente a través de los sentidos, palpando, probando, olfateando, viendo y escuchando todo lo que le rodea. "Los niños pasan del período sensoriomotor al preoperacional cuando adquieren ideas; sus actos sensoriomotores manifiestos se transforman en representaciones mentales simbólicas encubiertas" (12).

> "b) Período de las operaciones concretas que Piaget subdivide en: subperíodo de preparación funcional pero de estructura preoperatoria. De los 2 hasta los 3½ o 4 años: aparición de la función simbólica. De los 4 a los 5½ años: organizaciones representativas fundadas sea en configuraciones estáticas, sea una asimilación a la propia acción. De los 5½ a los 7 u 8 años: regulaciones representativas articuladas" (13).

Del período preoperacional se pasa al de las operaciones concretas organizando las ideas mentales de acuerdo a las operaciones lógicas simbólicas.

"Subperíodo de la estructuración propiamente operatoria, de los 7 u 8 a los 11 o 12 años" (14), en este subperíodo el niño puede razonar analógicamente pero requiere de la observación, de la experimentación y de la vivencia de los hechos para poder razonarlos y comprenderlos.

> "c) Período de las operaciones formales, desde los 11 o 12 años, con un lapso de equilibrio hacia los 13 o 14. Primero aparecen las combinaciones, las proporciones, la capacidad de razonar y representarse según dos sistemas de referencia

al mismo tiempo. Después en último término, la lógica de -- las proposiciones, la capacidad de razonar con enunciados,- con hipótesis" (15), es en este período cuando ya puede abs traer.

2. Características de las edades de la infancia

A continuación se mencionarán las características más relevantes de las edades de la infancia que transcurren en la escuela primaria (según Gesell) y que pueden ser en algún momento de - utilidad.

Los 6 años, edad de la transición. A esta edad el niño empieza a perder su dentadura de leche; su cuerpo es flexible, sensi-- ble y ágil; pasa pronto de la risa a las lágrimas; sus decisio nes son difíciles, está deseoso de vivir nuevas experiencias y siempre quiere ganar; se identifica con todo lo que pasa a su- alrededor de ahí que aprenda por participación.

Los 7 años, edad de la escampada o calma. El niño a esta edad- experimenta períodos de calma y elaboración en los que el asimila sus impresiones, empieza a tomar conciencia de sí mismo y de los demás, a esta edad le gustan los cuentos y las histo--- rias.

Los 8 años, edad de expansión. El niño es más logrado física-- mente a los 7 años, goza de mejor salud y se cansa menos, mani fiesta mayor amplitud de espíritu y se inicia un período de -- adaptación fácil con tendencia aventurera.

Los 9 años, edad de la motivación personal. Su principal característica es la motivación personal, o sea que en sí mismo encuentra las razones para actuar atareadamente y con empeño. Su individualidad busca reestablecer su equilibrio y reorganizarse.

Los 10 años, nueva edad nodal. Los 10 años constituyen la cumbre de la infancia, es el momento en que se integran sus características, es un período de equilibrio y buena adaptación.

Los 11 años. En esta edad aparecen las transformaciones intelectuales y físicas hacia la adolescencia caracterizándose por cierta inquietud.

Los 12 años. Se revelan sus potencialidades futuras.

Los 13 años. El individuo se absorve en sí mismo porque ya ha entrado a la adolescencia.

C. El razonamiento y sus obstáculos psicológicos

Primeramente considere la siguiente definición que se da del razonamiento: el razonamiento es la "operación de la mente mediante la cual, a partir de conocimientos o de proposiciones dadas, se llega a la conclusión de otra cosa" (16).

En esta definición puede apreciarse la importancia que esta operación tiene para el aprendizaje; sin embargo, al llevarse a cabo ésta, el niño puede encontrar dos obstáculos fundamentales que según Piaget son: el egocentrismo y el sincretismo.

1. Egocentrismo

Como efecto del egocentrismo se manifiestan dos fenómenos: el primero es la dificultad del niño para colocarse en el punto de vista ajeno, mientras que el segundo es la dificultad para asumir las primeras manifestaciones de un razonamiento, esto es, tratar una hipótesis y partir de ella.

Expresiones de la imposibilidad de cambiar de puntos de vista son: el descentrismo, la dificultad que presenta el niño para ponerse en lugar de otra persona; la irreversibilidad mental, que viene a ser un aspecto intelectual del egocentrismo y por último el realismo ingenuo, que no le permite abstraer las cualidades.

En cuanto al siguiente fenómeno de la imposibilidad de asumir las primeras manifestaciones de un razonamiento o bien, tratar una hipótesis y partir de ella, expresan el egocentrismo porque el niño solo puede razonar sobre lo que observa para sí mismo y no puede razonar sobre las asunciones que uno le propone.

2. Sincretismo

La definición que Piaget da de sincretismo.

> "Es la tendencia espontánea de los niños a percibir por visiones globales, en lugar de discernir los detalles, a encontrar analogías inmediatas, sin análisis, entre objetos y vocablos ajenos unos a otros, a vincular entre sí fenómenos naturales heterogéneos a encontrar razón para todo acontecimiento aún fortuito, en suma es la tendencia a relacionar todo con todo" (17).

Analizando esta definición se encuentra que el niño no puede - realizar razonamientos lógicos acertados porque el trata de establecer relaciones entre cualquier tipo de elementos.

Es interesante agregar una observación que se hace en la definición de este término en el diccionario de psicología de Paul Foulquié, de que este tipo de visión es común en los niños y - en los pueblos primitivos y según la concepción de Renan se -- detectan tres actos en el hecho del conocimiento humano que -- son: 1a. visión general y confusa de todo; 2a. visión diferenciada y analítica de las partes; 3a. recomposición de todo. Estos tres actos según él, se corresponden a tres estados del espíritu humano: sincretismo, análisis y síntesis.

3. Transducción

Un fenómeno que es importante estudiar dentro del tema del razonamiento es la transducción, esta palabra ha sido utilizada- por Stern para denominar así la forma que adopta el razonamiento en el niño, ya que tenemos que el razonamiento del niño no- va de lo general a lo particular, ni de lo particular a lo general, sino que va de lo singular a lo singular y de lo espe--

cial a lo especial. Esto es, en cierta forma que el razonamiento del niño es analógico.

Para Piaget la transducción es un pensamiento preconceptual, - y estima que la transducción pura se da en los niños hasta los 11 o 12 años ya que después de ésta edad las experiencias mentales tienden a la reversibilidad y por consecuencia podrá realizar abstracciones y desarrollar posteriormente el razonamiento inductivo y deductivo.

D. El pensamiento operatorio y las nociones matemáticas

Piaget estima que entre los 6 y los 9 años se realiza el cambio del pensamiento intuitivo al pensamiento operatorio y que hacia los 11 o 12 años se inicia la constitución de las operaciones formales y según Osterrieth: "El pensamiento se torna - operatorio por agrupamiento, en un conjunto de implicaciones,- de las relaciones intuitivas antes consideradas aisladamente - por sí mismas" (18).

Ahora de acuerdo con Piaget el agrupamiento responde a cinco - condiciones:

"1. Dos acciones sucesivas pueden coordinarse en una sola. -
2. El esquema de acción actuante ya en el pensamiento intuitivo se vuelve reversible.
3. A un mismo punto se puede llegar, sin alterarlo, por dos vías diferentes.
4. El retorno al punto de partida permite volver a hallar a éste idéntico a sí mismo.
5. Al repetirse la misma acción o bien no agrega nada a sí-misma, o bien es una nueva acción con efecto acumulativo" - (19).

Pero es importante agregar que en el agrupamiento se requiere- de un acto de descentralización completa, y ésta no se ha operado plenamente entre los 9 y los 12 años, esto quiere decir,- que el niño puede llegar a establecer razonamientos pero no logrará generalizarlos, y que éstos estarán sujetos a las situaciones concretas.

Según Legrand la evolución que se da en los niños para llegar- a resolver un problema es la siguiente: "de los 6 a los 8 años, manipuleo sin abstracción; de los 8 a los 10, manipuleo que -- conduce al esquema, luego a la comprensión abstracta; de los - 11 a los 14, utilización del esquema que conduce a la comprensión abstracta," (20) y además hace notar que la solución abstracta de un problema se da en períodos posteriores a la educación primaria.

Por otra parte, la adquisición de la noción de número sucede - hasta los 6 o 7 años y no antes, debido a que aún el niño no - posee la concepción de la conservación de la cantidad y además es incapaz de formar series con las dimensiones abstractas.

Piaget considera al número como un sistema de clases en el que interviene la seriación, de aquí es de donde se deriva la necesidad de que el niño sea capaz de realizar seriaciones correctas antes de introducirse al concepto de número.

Según su edad, el niño al realizar una seriación podrá encontrarse en alguno de los siguientes estadios:

> "1er. estadio: forma simplemente pares y no llega a coordinarlos entre sí; 2o. estadio: empezará por pares o por pequeños conjuntos; después procediendo empíricamente por medio de sucesivas correcciones, construirá la serie; 3er. estadio: hallará un método; buscará primero el bastoncito más pequeño, comparándolo con todos los otros, lo colocará, tomará luego el más pequeño de los que quedan, y así sucesivamente" (21).

El conocimiento de estos estadios permitirá conocer cuando un niño ha logrado dominar el 3o. estadio y estar listo para la adquisición de la noción de número.

Algunas otras conclusiones a las que ha llegado Piaget y que tienen importancia en el aprendizaje de las nociones matemáticas son las siguientes:
"Antes de los 7 u 8 años no hay adquisición de conciencia de las implicaciones lógicas y en el pensamiento de los niños de 7 u 8 años hasta los 11 o 12, nunca la deducción es pura"(22).

Piaget afirma "que existe una distancia en la adquisición de las nociones de conservación de la substancia (hacia los 8 años), del peso (9 o 10 años), del volúmen (11 o 12)" (23).

E. Causas que dificultan el aprendizaje en matemáticas

En el texto de psicología y educación del niño de Leif y Delay, se mencionan causas específicas y no específicas que originan dificultades en el aprendizaje y efectuación del cálculo:

Algunas causas no específicas que se mencionan son:

- la deficiencia intelectual
- los errores pedagógicos: ya sea el aprendizaje prematuro (según Piaget, mientras que el niño no pueda establecer correspondencias y equivalencias no está "maduro" para el cálculo); o bien, "la suba pedagógica".

Algunas causas específicas son:

- alexia de cifras y números
- anarritmia, la pérdida de la posibilidad de realizar operaciones por negligencia por parte de las cifras o por mala posición de éstas, pero conservándose el principio del cálculo.

Es importante identificar el tipo de dificultad que presenta el niño para recurrir a las medidas correctivas más acertadas y adecuadas.

IV. EL AREA DE MATEMATICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

Es importante estudiar brevemente, los objetivos que persigue la escuela primaria en cuanto al área de matemáticas, así como conocer la presentación y sugerencias didácticas que con respecto a la materia se le hacen al maestro, el cual es el nexo que permite la interrelación entre la materia y el alumno.

A. Para qué y cómo enseñar la matemática

La matemática se enseña en la escuela primaria por lo importante que es esta ciencia, ya que se encuentra inmersa en todas las actividades del ser humano incluso en las más cotidianas como contar sus juguetes, calcular los gastos, etc., lo mismo que brinda grandes aportaciones a las ciencias sociales y naturales; es por ello que un buen aprendizaje de la matemática que permita al alumno utilizarla como la valiosa herramienta que ésta es para el hombre, es una de las finalidades que tiene su enseñanza. Pero se pretende que el alumno vea, sienta y maneje a la matemática no como una ciencia exacta y acabada, sino como una forma de expresión, como un lenguaje, un lenguaje que le es útil para plantear y resolver problemas que se presentan y presentarán en su diario vivir.

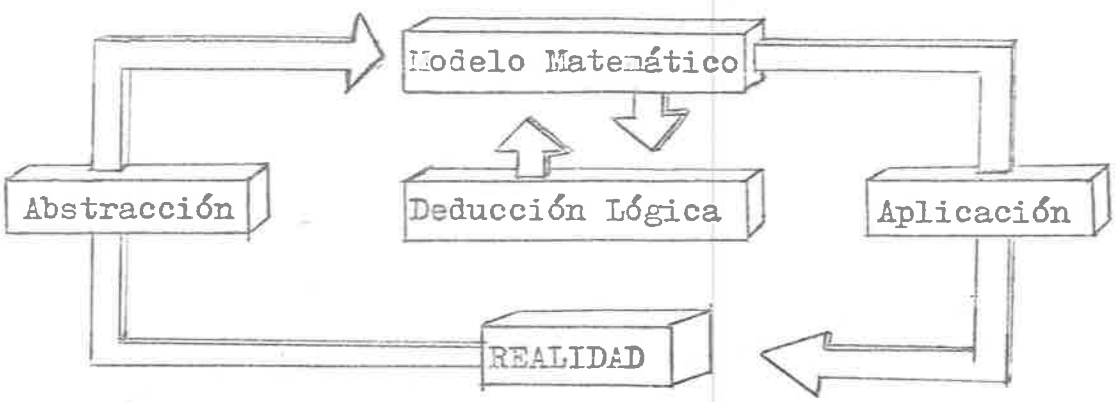
Además de toda esta aplicación social:

> "a la matemática se le reconocen también cualidades formativas. Se considera que el estudio de esta ciencia favorece el desarrollo intelectual del ser humano al mejorar su habi

lidad para descubrir características comunes de fenómenos o sucesos de la realidad, discriminar sus elementos esenciales, establecer leyes acerca de los mismos, ordenar y clasificar, hechos o entidades, crear sistemas teóricos: esto es, abstraer, generalizar y sistematizar" (24).

Ahora bien, ¿De qué manera se sugiere enseñar la matemática? Los libros del maestro sugieren su enseñanza a través de modelos matemáticos ya que esto permitiría llegar a obtener conclusiones más fácilmente que sí se hiciéra sin método directamente de la realidad. El esquema del modelo matemático que se propone es:

Fig. 2. Esquema del modelo matemático (*)



Su funcionamiento es el siguiente:

"Se empieza seleccionando algún suceso o fenómeno de la realidad que interesa estudiar (abstracción); luego se construye un modelo matemático del mismo, de manera que pueda hacerse un análisis de sus propiedades y llegar a algunas conclusiones (deducción lógica). Finalmente, se interpretan y aplican esas conclusiones a la misma realidad de la cual se partió" (25).

El proceso de este modelo es el que sigue todo matemático en su investigación, por eso es importante que el alumno lo viva,

(*) Fuente: SEP. Libro del maestro. Primer grado. México, 1980, pág. 22.

lo recorra, para que al mismo tiempo que desarrolla su razonamiento lógico y su espíritu creativo, también se fomente su interés por esta ciencia.

Finalmente se recomienda que el alumno experimente un aprendizaje multisensorial, esto es, que ponga en juego todos sus sentidos, no sólo su vista y oído, para que de esta manera su aprendizaje sea más firme y duradero.

B. Aspectos en que se divide el estudio de la matemática

La matemática para su estudio en la escuela primaria se ha dividido en los siguientes aspectos:

- el sistema decimal de numeración
- los números enteros, sus propiedades y operaciones
- las fracciones y sus operaciones
- geometría
- probabilidad y estadística
- lógica
- variación funcional

Con respecto a todos estos aspectos, al terminar la educación primaria se requiere que el alumno llegue a dominar los elementos básicos que le permitan comprender su mundo y desenvolverse correctamente y sin dificultades.

En cuanto a los primeros tres aspectos es importante que aprenda a utilizar el sistema decimal de numeración comprendiendo - el principio posicional que le permitirá comprender los algoritmos de las operaciones fundamentales y a emplear éstas para resolver situaciones de su vida diaria.

Para el aprendizaje de la geometría se propone el estudio de - las figuras geométricas y sus propiedades abstraídas directamente de su realidad ya que estas se encuentran inmersas en su mundo.

De ese mismo mundo, surge la motivación para que aprenda a coleccionar y a registrar datos gráficamente así como a formular y comprobar sus afirmaciones aplicando la probabilidad y estadística.

La lógica y la teoría de conjuntos se estudian armónica y conjuntamente con las anteriores, y no en forma directa. Y de la variación funcional se estudian unas nociones ya en sexto grado.

C. Objetivos generales de la matemática en la educación primaria

La matemática que se estudia en la escuela primaria está íntimamente relacionada con el mundo del niño, pero para realmente comprender su finalidad es necesario conocer los objetivos generales del área, siendo estos los que a continuación se transcriben:

"1. Desarrollar su pensamiento lógico, cuantitativo y relacional. El estudio de la matemática debe contribuir al desarrollo de la disposición y capacidad que tiene el niño para hacer observaciones sobre tamaños, formas, número y regularidad; para comparar objetos y sucesos y para extraer conclusiones cualitativas y cuantitativas a partir de dichas observaciones.
2. Manejar con destreza las nociones de número, forma, tamaño y azar en relación con el mundo que le rodea. El educando realizará experimentos sencillos y será capaz de expresar sus resultados. Esto lo llevará a efectuar operaciones aritméticas; a reconocer y apreciar las distintas formas geométricas y su utilidad en la vida diaria; a percibir y calcular el tamaño de los objetos y a considerar algunas situaciones de caracter azaroso.
3. Utilizar la matemática como un lenguaje en situaciones de su experiencia cotidiana" (26).

Una vez más se expresa la idea de que la matemática es parte de su mundo y es allí donde debe iniciarse su estudio y aplicarse lo aprendido.

D. El libro de texto de matemáticas en la escuela primaria

El libro de texto de primer grado aparece dividido en dos partes que contienen 4 unidades cada uno y estan a su vez divididos en cuatro módulos; junto a estos existe un libro recortable dividido también en dos partes, cada uno de los cuales contiene ejercicios de cuatro unidades.

El libro de segundo grado se divide en dos partes cada una de las cuales contiene cuatro unidades divididas a su vez en cuatro módulos, en cada uno de éstos módulos aparecen una sección de dos o tres páginas con ejercicios del área de matemáticas.

En el primer y segundo grado, el libro de texto reúne en forma integrada todas las áreas del conocimiento incluyéndose el área de matemáticas, de la cual aparecen algunas páginas dedicadas a ella en cada módulo. A partir del tercer grado ya se cuenta con un libro específico para esta y cada una de las demás áreas.

El libro de tercer grado cuenta con ocho unidades y una sección de material recortable incluída en la parte final.

En cuarto grado el libro está dividido en 92 lecciones que se estudian a lo largo del curso y una pequeña sección de material recortable.

El libro de texto de quinto grado de matemáticas está dividido en 80 lecciones que se estudian a lo largo del curso y una pequeña sección de material recortable.

En sexto grado el libro está dividido en dos partes: la primera contiene un total de 52 lecciones a estudiar a lo largo del curso mientras que la segunda contiene tres compendios, uno de aritmética, uno de geometría y otro de probabilidad y estadística.

V.- EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACION EN LA EDUCACION PRIMARIA

A. Conceptos básicos del sistema decimal de numeración

Un sistema decimal es un "sistema de números de base 10 (diez símbolos numéricos diferentes = cifras), representación por sumas de potencias de diez; p. ej. $538 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$. Su invención se atribuye a los hindúes; utilizado en general desde la Edad Media".(27)

Para poder estudiar la definición anterior y lo que es el sistema decimal de numeración, deben diferenciarse bien los términos número y numeral. "Un número es un concepto, una abstracción. Un numeral es un símbolo, un nombre de un número. Un sistema de numeración es un sistema de numerales, no un sistema de números para nombrar los números". (28)

A través de la historia aparecieron muchos sistemas de numeración, algunos muy simples, otros más elaborados. Como ejemplos pueden mencionarse: el sistema de numeración egipcio con sus símbolos:

1 10 100 1,000 10,000

Este sistema empleaba sólo el principio aditivo ya que se colocaban tantos símbolos como se necesitaran, por ejemplo el número 345 se escribiría 

Es sistema de numeración romano cuyos símbolos son:

PRIMARIOS				SECUNDARIOS		
I	X	C	M	V	L	D
1	10	100	1000	5	50	500

Este sistema aún es empleado en nuestros días y utiliza los principios aditivo, sustractivo y multiplicativo, ya que al representar los números un símbolo primario puede repetirse hasta tres veces a la derecha, sumándose su valor; un signo primario a la izquierda se resta, y cualquier signo con una raya encima multiplica su valor por mil. Ejemplos.

9 = IX	40 = XL	90 = XC
8 = VIII	23 = XXIII	34 = XXXIV
2,000 = $\overline{\mathrm{MM}}$	2,435 = $\overline{\mathrm{MM}}$CDXXXV	

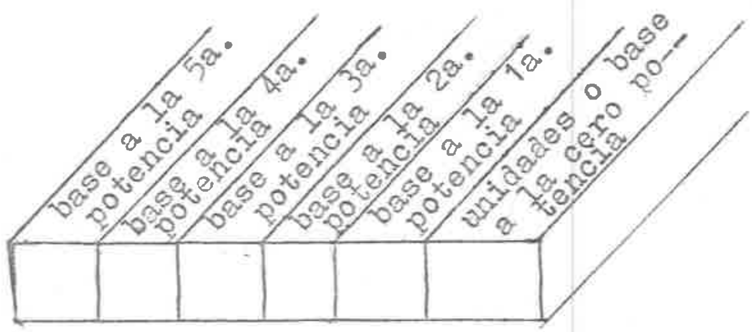
"El sistema de numeración maya fue el primero que empleó un símbolo para el cero y el sistema posicional, es decir, que el valor de un número depende del lugar que ocupe" (29), y su base era vigesimal. Empleaba tres símbolos 

1 5 0

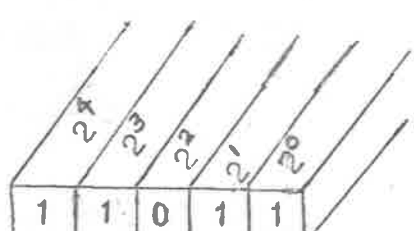
Ejemplos:

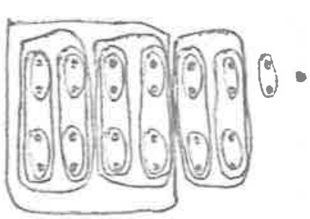
La base de un sistema de numeración nos señala el número de elementos que se agrupan y reagrupan, esto es un sistema de base 2, agruparía los elementos en binas y utilizaría 2 símbolos el cero y el 1; un sistema de base 5, agruparía los elementos de 5 en 5 y utilizaría cinco símbolos: 0, 1, 2, 3, y 4.

El principio posicional consiste en que un mismo numeral toma distintos valores según el lugar que ocupe, pero éste dependerá del valor de la base, y puede establecerse este orden válido para todas las bases; de acuerdo a las potencias sucesivas.



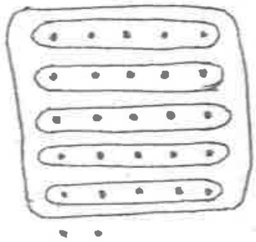
A continuación para comprender esto, representaremos el mismo número en base 2 y en base 5.

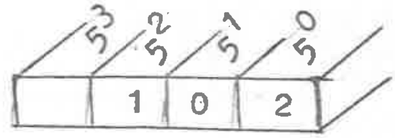




$$(1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$$





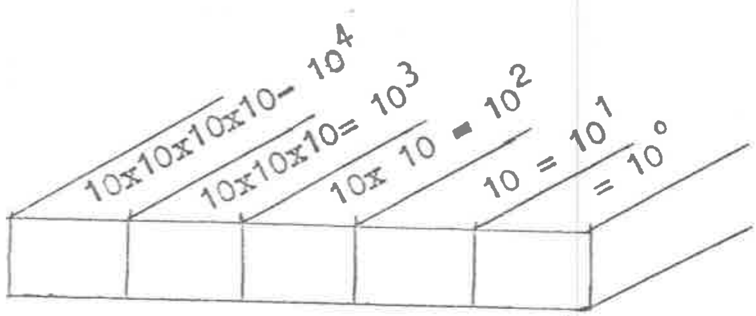
$$(1 \times 5^2) + (0 \times 5^1) + (2 \times 5^0)$$

$$25 + 0 + 2 = 27$$

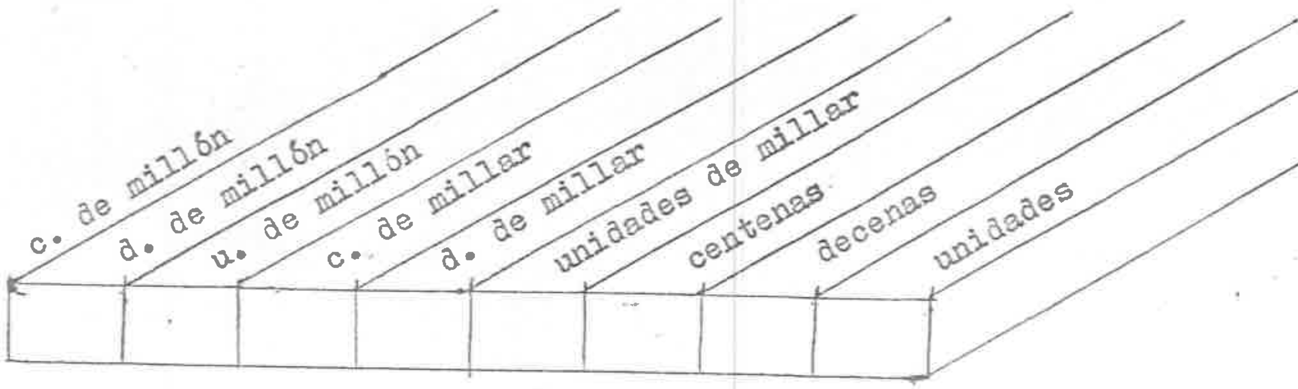
Los componentes esenciales de nuestro sistema decimal de numeración son:

- Su base es diez, esto es, agrupa 10 elementos y les llama decena, agrupa 10 decenas y les llama centenas, agrupa diez -- centenas y les llama millar, agrupa diez millares y les llama decena de millar, a diez decenas de millar le llama centenas de millar y a diez centenas de millar le llama millón y etc.

- Incluye a 10 numerales, que son los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el cero, el valor de posición utiliza potencia sucesivas de la base.



o bien



Del principio posicional se deriva la existencia de dos tipos de valores, el valor absoluto, que es el que nos da el numeral por sí mismo como 4 = 4, el otro valor es el relativo, el que depende del lugar en que se acomode el numeral, el 4 en el lugar de las decenas, tiene un valor relativo de 40, el 4 en el lugar de las centenas, tiene un valor relativo de 400, el 4 en el lugar de los millares, tiene un valor relativo de 4,000.

Gracias al principio posicional, con 10 numerales, se puede registrar cualquier número por mas grande que éste sea.

Hasta ahora sólo se han estudiado los números que sirven para contar, los cuales integran el conjunto de los números naturales, sin embargo, el hombre tiene necesidad de representar cantidades que son parte de un entero, estos son los números fraccionarios, que unidos con los naturales forman el conjunto de los racionales positivos. Pero como el hombre tiene necesidad también de representar deudas, elementos faltantes, profundida des, etc., a estos números racionales positivos se les agrega los racionales negativos y es así como se conforma el conjunto de los racionales, los cuales se definen como los números que se denotan de la forma $\frac{a}{b}$ y que al efectuarse la división su resultado o es un decimal exacto o es un decimal que se repite infinitamente.

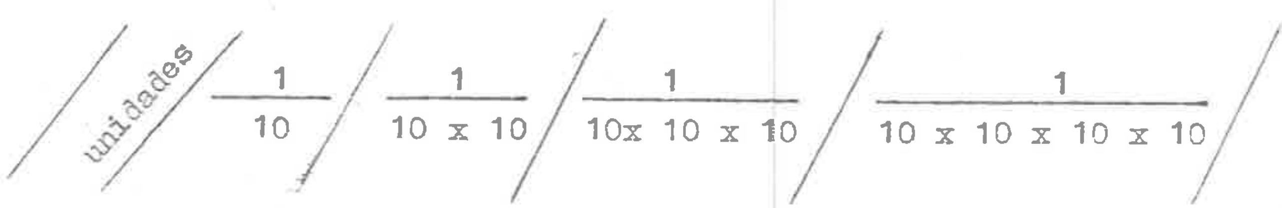
Más éstos no son los únicos números que conoce el hombre, también estan los irracionales (los inconmensurables para los griegos), que en forma decimal son infinitos, esto es, nunca terminan en decimal exacta ni tienen un decimal que se repita, estos son por ejemplo $\sqrt{2}$ y el π. El conjunto de los números racionales unido al de los irracionales integran el conjunto de los números reales.

El conjunto de los números reales puede representarse geométricamente como una línea recta continua e infinita hacia ambos extremos, esta es la llamada recta numérica, en la cual puede graficarse cualquier número real.

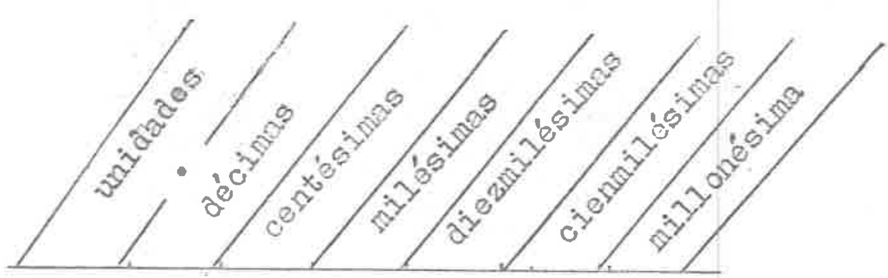
$$\ldots \; -6 \;\; -5 \;\; -4 \;\; -3 \;\; -\tfrac{11}{4} \;\; -2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; \tfrac{1}{2} \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \; \ldots$$

En la recta numérica los números positivos se grafican a la derecha mientras que los negativos se grafican a la izquierda, para representar a los números enteros se toma una unidad y se va colocando sucesivamente, en cada señal de la unidad se registra un número entero, para registrar un número fraccionario, deberá dividirse la unidad el número de veces señalado en el denominador e identificar la cantidad de estos que nos indica el numerador.

Los números racionales pueden escribirse en dos formas: fraccionaria y decimal. La forma fraccionaria esta integrada por
<u>numerador</u> (indica las partes que se tomaron)
denominador (indica las partes en que se dividido el entero)
esto es: $\frac{3}{5}$ significa que se tomaron 3 partes de un entero que se había dividido en quintos. La forma decimal retoma la base 10 y el principio posicional pero ahora entre potencias sucesivas de la base, esto es:



o bien



Terminando las unidades se coloca el punto decimal y a la derecha de éste se registra la cantidad fraccionaria. Para convertir un número de notación fraccionaria a notación decimal, sólo se realiza la división indicada, ejemplo:

$$5 \overline{)30} \quad 0.6, \; 0$$

$\frac{3}{5} = 0.6$ (6 décimas = $\frac{6}{10}$, de acuerdo a su posición)

Como podemos apreciar, el sistema decimal de numeración facilita la notación de los números y nos permite registrar cantidades muy grandes de manera muy sencilla. Pero la mayor eficiencia de éste sistema de numeración, estriba en que facilita ventajosamente las operaciones de cálculo aritmético.

B. Sistema decimal de numeración: su contenido en el programa escolar y su presentación en los libros de texto gratuitos

Primer grado:

En lo concerniente al aspecto del sistema de numeración el contenido que se expresa en los objetivos específicos del primer grado es:

- La clasificación de objetos por su forma y tamaño, considerado aquí por la seriación que efectuará.
- La adquisición del concepto de decena, como la agrupación de diez elementos, dado que se practican diversas agrupaciones, aplicando ésta al sistema decimal de numeración.
- La adquisición de la noción de los números del 1 al 99 incluyendo al cero y a las diversas representaciones de estos números.
- La utilización de la recta numérica para representar gráficamente a los números.

Los ejercicios que aparecen en el libro de primero son: identificación de los conjuntos que poseen más o que poseen menos elementos, se introduce el número 1 por medio de identificación del conjunto donde sólo hay un elemento, luego el número 2 se obtiene agregando otro elemento, y así de esta forma continua hasta el 10, donde además se hace la observación de que se ha formado una decena; a partir de aquí se le pedirá la agrupación por decenas, los números del 11 al 20 serán 1 decena más cierto número de unidades que quedaron fuera de ella, este mismo procedimiento se usará para el resto de los números, pero antes de eso se estudian las decenas.

También se incluyen ejercicios donde numerará de uno en uno los objetos, se introducen al principio posicional al acomodar unidades y decenas correctamente.

En el libro recortable aparecen ejercicios a partir del número 2 en el que el alumno recortará dibujos de objetos y los colocará en el lugar adecuado o bien colocará el número o su suma equivalente, aquí todos los números estan incluídos en sumas, se le proporcionan para recortar y jugar monedas de 10 pesos y de 1 peso, así como tiras de decenas y cuadritos unidades para formar números.

Segundo grado:

Para el segundo grado de la escuela primaria, el contenido que corresponde al sistema decimal de numeración y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado son:

- La adquisición del concepto de centena y la relación entre ésta y el sistema decimal de numeración.
- La adquisición de la noción de los números del 100 al 999.
- La escritura en notación desarrollada de los números hasta el 999.

Los ejercicios que se presentan del sistema decimal de numeración, son agrupaciones, ya sea decenas para registrar la cantidad o bien de una colección de dibujos para que forme decenas y luego registre el resultado; también aparecen algunos ejercicios en que se utilizan monedas, se incluyen también algunos ejercicios de seriación donde debe completar los números del 100 al 200 y también algunos donde debe contar por ejemplo de diez en diez hasta el 500.

Tercer grado:

Para el tercer grado de la escuela primaria el contenido que corresponde al sistema decimal de numeración y que se expresa en los objetivos específicos de ese grado puede resumirse en:

- La representación en diversas formas de los números hasta el 10,000. Realizándose ésto primero con los menores de 1,000, enseguida con los múltiplos de mil y por último con todos los demás números.

En cuanto al sistema decimal de numeración, la presentación de este contenido en el libro de texto, es a través de gráficas - que muestran decenas, centenas a través de un cuadro cuadriculado de 10 x 10 y grupos de 10 centenas con un clip para los - millares, el alumno debe registrar con números las agrupaciones que se le presentan.

Para la notación desarrollada se utiliza el sistema monetario nacional, billetes de $ 100.00 para las centenas, monedas de - $ 10.00 para las decenas y pesos para las unidades. Además en el material recortable se proporcionan cuadros de centenas, tiras de decenas y unidades, así como dibujos a recortar de billetes de $ 100.00, monedas de $ 10.00 y pesos, para que practique formando y manipulando agrupaciones en base diez.

Cuarto grado:

Para el cuarto grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde al sistema decimal de numeración y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ése grado, puede resumirse en:

- La representación en diversas formas de los números hasta -- centenas de millar (999,000).

La presentación del contenido del sistema decimal de numeración en el libro de texto es muy reducida, ya que en la primera lección sólo aparece un ejercicio con tres gráficas de agrupación, y luego un ejercicio para reafirmar la identificación de unidades, decenas, centenas y millares en su lugar correspondiente.

Quinto grado:

Para el quinto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde al sistema decimal de numeración y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado son:

- La aplicación del principio posicional de un sistema de numeración al representar números.
- La representación de los números hasta millones en diversas formas.
- La noción de los números enteros negativos y su ubicación en la recta numérica.

La presentación de este contenido en el libro de texto aparece en las primeras tres lecciones para el principio posicional y la representación de números, donde se obtiene el valor relativo de cada número de acuerdo a su posición y valor de éste para calcular valor total expresado aparece un sólo ejercicio de agrupación en base 4; la representación gráfica de los agrupamientos es a través de un ábaco y en forma vertical aparecen las unidades, decenas, centenas y millares, para acomodarse y conformar el número.

Para introducir al conjunto de los números enteros, se sitúa primero a los positivos en la recta numérica, localizándolos -

por espacios, para extender el conjunto a los enteros negativos se utilizan los puntos simétricos y aparecen tres ejemplos: un termómetro, una escalera en donde subir es positivo y bajar es negativo, y el corte de una isla para ubicar sobre el nivel -- del mar o bajo el nivel del mar.

Sexto grado:

Para el sexto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde al sistema decimal de numeración y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado, puede resumirse en:

- La representación de los números racionales en distintas formas.

Los ejercicios del sistema decimal de numeración se presentan en el texto en las primeras dos lecciones, en las cuales se -- practica la notación desarrollada y localización de puntos medios en distancias entre puntos en la recta numérica.

VI.- LOS NUMEROS ENTEROS, SUS PROPIEDADES Y OPERACIONES EN LA EDUCACION PRIMARIA

A. Conceptos básicos sobre los números enteros, sus propiedades y operaciones

El conjunto de los números está formado por la unión de los números naturales, el cero, y los números negativos, en la recta numérica, este conjunto se representa:

$$\ldots -9\ \ -8\ \ -7\ \ -6\ \ -5\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9 \ldots$$

El cero se encuentra en el centro, ya que no es un número ni negativo, ni positivo, los números que se localizan a la derecha son mayores que los que quedan a la izquierda.

Para establecer el orden entre los números enteros se utilizan los signos $>$ mayor que, $<$ menor que, $=$ igual que, o $\neq$ diferentes o no es igual.

Las relaciones de orden tienen tres propiedades:

- La propiedad reflexiva, esto es, todo número es igual a sí mismo $6 = 6$, $-8 = -8$
- La propiedad simétrica, puede establecerse la relación, tomando a un número o al otro como punto de referencia; $3 < 6$, $6 > 3$, $-3 > -7$, $-7 < -3$.
- La propiedad transitiva, al considerar tres o más números, -

estos pueden relacionarse ordenadamente entre sí:

$$2 < 5 \quad y \quad 5 < 8 \quad \text{entonces} \quad 2 < 8$$

Las operaciones fundamentales son adición, sustracción, multiplicación y división.

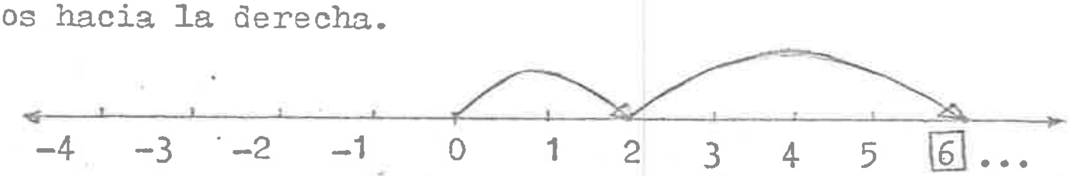
La adición o suma, es la operación que consiste en unir los elementos de dos o más conjuntos ajenos

$$6 \quad + \quad 4 \quad = \quad 10$$

Al efectuar sumas con los números del sistema decimal, se realizan reagrupaciones.

$$\begin{aligned} 268 + 156 &= 200 + 60 + 8 + 100 + 50 + 6 \\ &= 300 + 110 + 14 \\ &= 300 + (100 + 10) + (10 + 4) \\ &= (300 + 100) + (10 + 10) + 4 \\ &= 400 + 20 + 4 = 424 \\ &= 424 \end{aligned}$$

El concepto de suma en la recta numérica es a través de desplazamientos hacia la derecha.

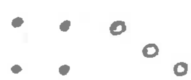


$$2 + 4 = 6$$

Los elementos que intervienen se llaman sumandos y el resultado se llama suma o total.

La sustracción es una operación inversa a la suma que nos permite encontrar el sumando que falte, esto es: $\boxed{} + 4 = 12$ es igual a $12 - 4 = \boxed{8}$ La sustracción puede manejarse con dos ideas, la de quitar unidades o la de averiguar las unidades faltantes para completar una cierta cantidad.

$$11 - 5 = \boxed{6}$$



$$4 + \boxed{3} = 7$$

Al efectuar sustracciones con los números del sistema decimal, se realizan reagrupaciones.

$$528 - 154 = 500 + 20 + 8 - 100 - 50 - 4.$$

$$= (500 - 100) + (20 - 50) + (8 - 4)$$

como no es posible

$$= (400 - 100) + (100 + 20) - 50 + (8 - 4)$$

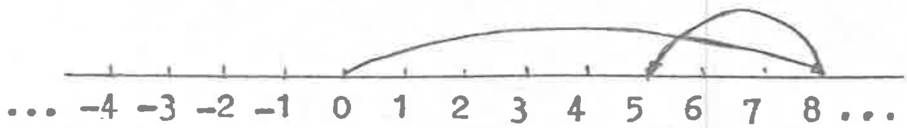
$$= 300 + (120 - 50) + 4$$

$$= 300 + 70 + 4$$

$$= 374$$

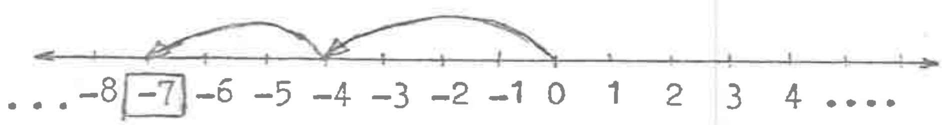
El concepto de sustracción en la recta numérica se maneja como saltos hacia la izquierda.

$$8 - 3 = 5$$

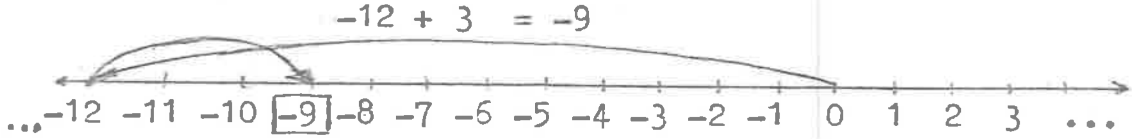


La sustracción en la recta numérica es muy útil al restar (o - sumar números enteros negativos, Ejemplos:

$$-3 + (-4) = -7$$

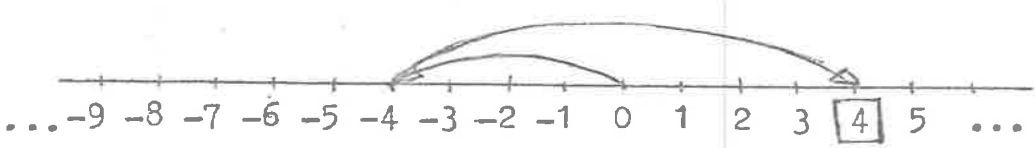


$$-12 + 3 = -9$$



Algunos autores manejan el concepto de los números negativos - como opuestos de los positivos: el opuesto de 5 es -5, para -- luego manejar el -(-6) como el opuesto de -6, es 6, esto tiene aplicación en la resta.

$$-4 - (-8) = 4$$



Los elementos que integran la resta son: 48 minuendo

20 sustraendo

28 diferencia o resta

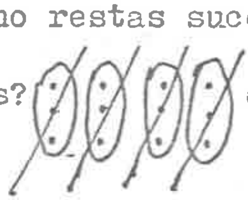
La multiplicación es una operación considerada como una suma a breviada, ya que el signo de "por" (x) puede interpretarse como "tantas veces".

∷ + ∷ + ∷ + ∷ + ∷ + ∷ = 6 veces el 4 = 6 x 4 = 24

La multiplicación al efectuarse en el sistema de numeración - también reagrupa elementos.

$$\begin{aligned}678 \times 4 &= (600 \times 4) + (70 \times 4) + (8 \times 4)\\ &= 2{,}400 + 280 + 32\\ &= 2000 + (400 + 200) + (80 + 30) + 2\\ &= 2000 + 600 + 110 + 2\\ &= 2000 + (600 + 100) + 10 + 2\\ &= 2000 + 700 + 10 + 2\\ &= 2{,}712\end{aligned}$$

Los números que se multiplican reciben el nombre de factores y el resultado producto.

La división es considerada como una operación inversa a la multiplicación, permite encontrar el factor desconocido $3 \times \boxed{} = 12$ y puede comprenderse como restas sucesivas, ¿cuántas veces puedo quitar grupos de tres?  cuatro veces $3 \times \boxed{4} = 12$

$12 \div 3 = \boxed{4}$

La división en nuestro sistema decimal de numeración, también es a través de reagrupaciones.

$$761 \div 6 = \frac{700}{6} + \frac{60}{6} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{600}{16} + \left(\frac{100}{6} + \frac{60}{6}\right) + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{600}{6} + \frac{160}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{600}{6} + \frac{120}{6} + \left(\frac{40}{6} + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{600}{6} + \frac{120}{6} + \frac{41}{6}$$

$$= \frac{600}{6} + \frac{120}{6} + \frac{36}{6} + \frac{5}{6}$$

$= 100 + 20 + 6$ y sobran 5

$= 126$ y sobran 5

Los elementos que intervienen en una división son:

761	÷ 6	= 126	y	sobran	5
dividendo	divisor	cociente			residuo

Otra operación importante es la potenciación que se interpreta como una multiplicación abreviada de factores iguales.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = \underset{\text{base}}{3}^{\overset{\text{exponente}}{4}} = 81 \quad \text{potencia}$$

donde el factor que se repite recibe el nombre de base, las veces que se multiplica es el número pequeño al extremo derecho superior que es llamado exponente, y su resultado es la potencia.

Las propiedades más importantes de las operaciones son: la pro piedad conmutativa, la propiedad asociativa y la distributiva

La propiedad conmutativa es la que nos dice que podemos cambiar el orden de los sumandos o factores sin que por esto se altere el resultado, esta propiedad es válida en la adición y en la - multiplicación, pero no lo es en sus inversas la sustracción y la división respectivamente.

En la adición tenemos que:

$$6 + 3 = 3 + 6$$
$$9 = 9$$

Y en la multiplicación

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

o bien

$$12 = 12$$

La propiedad asociativa nos permite al operar con tres o más - números ir operando de dos en dos sin importar cual es primero y cual es después, sin que esto altere el resultado.

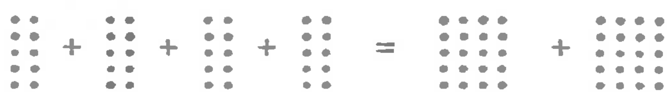
En suma:

$$(5 + 2) + 4 = 5 + (2 + 4)$$

$$7 + 4 = 5 + 6$$

$$11 = 11$$

En la multiplicación



$$(2 \times 5) \times 4 = 2 \times (5 \times 4)$$

$$10 \times 4 = 2 \times 20$$

$$40 = 40$$

Esta propiedad asociativa al igual que en la conmutativa solo se cumple en la adición y en la multiplicación.

La propiedad distributiva con respecto a la suma nos señala que multiplicar un número por una suma, equivale a multiplicar ese número por cada uno de sus sumandos.

$$4\ (3 + 2) = (4 \times 3) + 4 \times 2)$$

Como vemos estas tres propiedades son válidas para la suma y - la multiplicación de números naturales, pero también existen -

otras propiedades como:

- El elemento neutro que en la suma es el cero, y en la multiplicación el 1, ya que: $a + 0 = a$
  $a \times 1 = a$

- En el conjunto de los números enteros, podemos hablar de inversos aditivos:

  $8 + (-8) = 0$ él inverso aditivo de 8 es -8

  $(-12) + 12 = 0$ él inverso aditivo de -12 es 12

- En el conjunto de los racionales podemos hablar de inversos multiplicativos.

  $6 \times \frac{1}{6} = 1$ El inverso multiplicativo de 6 es $\frac{1}{6}$

  $-3 \times -\frac{1}{3} = 1$ El inverso multiplicativo de -3 es $-\frac{1}{3}$

Todas estas propiedades nos permiten operar los números sin -- que los resultados se alteren.

B. Números enteros, sus propiedades y operaciones: su contenido en el programa escolar y su presentación en los libros de - texto gratuitos

Primer grado:

Para el primer grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a los números enteros, sus propiedades y operaciones es el siguiente:

- La adquisición del concepto de adición. Este se adquiere -- primeramente a través de la manipulación de colecciones, enseguida con sumas cuyo resultado no exceda de 19, luego con múltiplos de 10, después con dos dígitos completando la decena, más tarde con dos dígitos completando decenas y unidades, por último con resultados que no excedan de 100 y que den solución a problemas razonados.

- La adquisición del concepto de sustracción, primero como proceso de quitar, enseguida con decenas, luego con números de dos dígitos y por último como procedimiento para resolver -- problemas.

Los ejercicios correspondientes a las operaciones y sus propiedades aparecen íntimamente relacionados con los números, ya que en cada número se presentan los distintos sumandos de éste, -- luego aparecen ejercicios en el que se encuentran dibujos y números para relacionar en forma correcta, y por último operaciones ya con símbolos en los que debe colocar la respuesta en base a los objetivos que se le presentan, la suma se da después de unidades y saltos en la recta numérica en decenas y por último en decenas con unidades aplicado a problemas de tienditas, muy relacionados con su vida real.

Para la resta primero aparece el colocar el sumando que falta, relacionado esto directamente con objetos concretos o rectas - numéricas, posteriormente se introducen ejercicios en los que va a tachar objetos que se quitan y colocar el número que que-da de ellos como respuesta, después de operaciones con dígitos, se introduce la resta con decenas y por último ejercicios con unidades y decenas; una observación es, que no se manejó la -- recta numérica como pasos hacia atrás.

En la segunda parte del libro recortable se presenta una tabla de sumar que debe llegar con números que recortará de la parte inferior.

Segundo grado :

Para el segundo grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a los números enteros, sus propiedades y operaciones es el siguiente:

- El establecimiento de las relaciones de orden, primeramente entre números menores que 100 y posteriormente entre números menores que 1,000.

- La solución de adiciones, primero en ejercicios y problemas de dos cifras cuya suma no exceda de 100, enseguida de tres sumandos que tampoco exceda de 100, después dos sumandos pero con reagrupación de unidades y decenas y posteriormente - ejercicios y problemas que impliquen operación con tres su-- mandos y reagrupación de unidades, decenas y centenas.

- La solución de sustracciones, primeramente con la idea de -- quitar y después relacionándola con la suma, primero, empleando decenas en el minuendo y en el sustraendo, luego con números menores que 200 y después con números menores que 1000 y por último aplicando esta operación en la solución de problemas.

- La solución de multiplicaciones, para esto primeramente deberá adquirir la noción de multiplicación como la suma de sumandos iguales y en el transcurso del grado deberá llegar a resolver problemas que impliquen multiplicaciones por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10.

Los ejercicios que se presentan de los números enteros, sus propiedades y operaciones para las relaciones de orden son conjuntos de figuras de distintos colores para compararlas y registrar esa relación.

Para la adición se presentan primero ejercicios concretos en que se muestra la operación de agregar y posteriormente aparecen problemas razonados auxiliados con escaparates de tiendas con artículos marcados.

Para la resta se presentan ejercicios donde debe de tachar para obtener el resultado. Y para la multiplicación primero aparecen ejercicios en que se grafican objetos por grupos de dos, tres o cuatro, y él debe registrar cuantos grupos y de cuántos elementos cada uno, posteriormente vienen ejercicios relacionados implícitamente con el área, ya que aparecen regiones cuadriculadas de 5 x 7, etc..

Tercer grado :

Para el tercer grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a los números enteros, sus propiedades y operaciones, se expresa en el objetivo general: "Resolver problemas relacionados con su entorno que impliquen operaciones con números naturales, sin que los resultados excedan de 10,000".

Y a través de los siguientes objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

- La resolución de problemas que impliquen adición, primero -- "sin Llevar" y luego "llevando" con números de tres cifras y después de cuatro.

- La resolución de problemas que impliquen sustracción, primero "sin prestar" y luego "prestando", con números de tres cifras y posteriormente de cuatro.

- La resolución de problemas que impliquen multiplicación de - un dígito por hasta números de cuatro cifras.

- La resolución de problemas que impliquen división primeramente "exacta entre números de dos cifras entre un dígito y posteriormente "inexacta" de números de dos cifras y hasta cuatro cifras entre un dígito.

Los ejercicios que se presentan de los números enteros, sus --

propiedades y operaciones son los siguientes: aparecen ilustraciones donde se explican los algoritmos de cada una de las operaciones y luego aparece un esquema con los mismos pasos para ser llenado por el alumno, aparecen muchas mecanizaciones de multiplicación y división que pueden ser resueltos, auxiliado por su material recortable, también presentan problemas razonados, algunos en secuencia como las compras y la cooperación entre mercados y ferias.

Cuarto grado :

Para el cuarto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a los números enteros, sus propiedades y operaciones, se expresa en el objetivo general: "Resolver problemas relacionados con su vida diaria, que impliquen adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales hasta el millón".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

- El establecimiento de las relaciones de orden primero entre números hasta 10,000 y luego hasta el millón.
- La resolución de problemas que impliquen adiciones, sustracciones y multiplicaciones con números enteros.
- La resolución de problemas que impliquen división entre núme

ros naturales, de los números que conoce (hasta el millón) - entre números de hasta dos cifras, primeramente encontrando los multiplos del divisor, luego utilizando el algoritmo respectivo y por último mecanizando la operación.

Los ejercicios que se presentan de números enteros, sus propiedades y operaciones en el libro de texto consisten en un ejercicio para establecer las relaciones de orden entre números, - aparecen varios ejercicios para mecanización y complemento del número faltante de adiciones y multiplicaciones.

Se presentan muchos ejercicios para afianzar la propiedad distributiva, propiedad que se utiliza para luego obtener resultados aproximados de multiplicaciones y aplicar esto posteriormente en las divisiones.

Aparece un buen número de multiplicaciones por tres factores - (lo cual empleará posteriormente para calcular el volúmen).

La división se presenta primero con dibujos que la hacen muy - concreta, luego se estudia ésta relacionada con el concepto de múltiplo, del cual se presentan varios ejercicios utilizando - la recta numérica y colocando en la parte superior de cada marca el resultado y en la inferior de donde se obtuvo; continuando con la división, se presenta ilustrativamente su algoritmo, y de la misma manera presenta la división entre dos cifras; -- se presentan pocos ejercicios de mecanización de divisiones y muy pocos problemas razonados.

Quinto grado :

Para el quinto grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a los números enteros, sus propiedades y operaciones se expresa en el objetivo general: "Resolver problemas en los que aplique sus conocimientos sobre adición, sustracción, multiplicación y división de naturales hasta millones".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

- La adquisición del concepto de número entero y su notación en la recta numérica.
- El establecimiento de las relaciones de orden entre los números enteros, esto es, se incluye a los negativos.
- La solución de adiciones con números enteros y aplicando las propiedades conmutativa y asociativa.
- La solución de sustracciones con números enteros.
- La solución de multiplicaciones con números enteros y aplicando las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva.
- La resolución de problemas que impliquen división, aplicando para su solución el algoritmo respectivo.

De números enteros, sus propiedades y operaciones en el texto se presentan ejercicios que consisten en: la ubicación de los números enteros en la recta (los positivos arriba o bien a la derecha y los negativos hacia abajo o bien a la izquierda), y se presentan ejemplos como termómetros, nivel del mar, etc., - para que el alumno los ubique y localice los puntos realizando pequeñas sumas y luego efectuarlas en rectas numéricas que ya se le presentan graficadas y después sin recta, también se le presentan ejercicios en donde el alumno deberá identificar y - aplicar las propiedades conmutativa y asociativa.

La multiplicación se presenta unicamente con enteros positivos y se explican muy concretamente las propiedades conmutativa, a sociativa y distributiva y con buena cantidad de ejercicios.

Se explica gráficamente el algoritmo de la división y se ejemplifica la división por restas sucesivas, también se explican los elementos integrantes de la división.

Sexto grado:

Para el sexto grado de la escuela primaria el contenido que co rresponde a los números enteros, sus propiedades y operaciones es el siguiente:

- El establecimiento de las relaciones de orden entre los núme ros enteros, auxiliándose con la ubicación de estos en la -- recta numérica.

- La resolución de problemas que impliquen las operaciones fun damentales utilizando modelos.

- La solución de sustracción de enteros aplicando la propiedad del inverso aditivo.

- La expresión de números en notación exponencial.

- La resolución de problemas que impliquen conversiones de monedas.

Los ejercicios que se presentan de números enteros, sus propiedades y operaciones en el texto consisten: en la escritura de signos de orden entre dos números, enseguida se realizan prácticas de operaciones mentales señalando únicamente el resultado aproximado y luego rectificar el resultado realizando la operación, esto tiene aplicación en la división.

Se practica la idea de que restar un entero es sumar su inverso aditivo y se relaciona concretamente con subir y bajar escalones o bien aumentar y disminuir temperatura.

En cuanto a exponentes aparece una sola lección y se da énfasis al cuadrado y al cubo que se utiliza en áreas y volúmenes.

Para conversión a otros sistemas monetarios se presenta una lección con un listado de valores que se utiliza para hacer los ejercicios de conversión. Para la resolución de problemas siguiendo modelos, se presentan algunos en una lección titulada modelos, pero hay que ver que se utilizan implícitamente en otras lecciones.

En la sección de aritmética del compendio se explican las operaciones como abreviación de la agrupación de objetos y también la función de cada propiedad.

VII.- LAS FRACCIONES Y OPERACIONES EN LA EDUCACION PRIMARIA

A. Conceptos básicos de las fracciones y operaciones

Una fracción se define como "un número que se representa por la expresión $\frac{a}{b}$ (a dividido por b); a se denomina numerador, b se le llama denominador, siendo $b \neq 0$". (30)

Existen diversos tipos de fracciones que son:

- La fracción común, que consta de numerador y denominador distinto de cero. Ejemplo: $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$
- La fracción decimal, cuyo denominador es una potencia de diez. Ejemplos: $\frac{2}{10} = 0.2$, $\frac{2}{100} = 0.02$
- La fracción propia, cuyo valor es menor al de la unidad. Ejemplos: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$
- La fracción impropia, en la que su valor es mayor que la unidad. Ejemplos: $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{5}$
- La fracción primitiva, en la cual el numerador siempre es el 1. Ejemplos: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$
- La fracción derivada, en la que el numerador es un número distinto de 1. Ejemplos: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$
- La fracción de igual denominador. Ejemplos: $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$
- Número mixto, es el que esta formado por un número entero y una fracción propia. Ejemplo: $10\frac{1}{3}$

Como vemos una fracción es un número racional de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, por lo que pueden representarse con un punto en la recta numérica y entre ellas existe un orden.

$$\ldots \quad -2 \quad -\frac{6}{4} \quad -1 \quad \frac{-1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{6}{4} \quad 2 \ldots$$

Para establecer el orden entre dos fracciones existe un procedimiento muy sencillo que consiste en multiplicar con productos cruzados:

$$18 \quad \frac{3}{4} \quad \times \quad \frac{5}{6} \quad 20$$

$$24 \quad \frac{3}{6} \quad \times \quad \frac{4}{8} \quad 24$$

$$63 \quad \frac{7}{8} \quad \times \quad \frac{2}{9} \quad 16$$

Una vez realizado lo anterior podemos establecer fácilmente el orden entre cada pareja:

$\frac{3}{4}$ es menor que $\frac{5}{6}$

$\frac{3}{6}$ es igual a $\frac{4}{8}$

$\frac{7}{8}$ es mayor que $\frac{4}{8}$

El hecho de que dos fracciones esten unidas por el signo de igual, significa que son equivalentes por representar al mismo punto en la recta numérica. Conservando la equivalencia, una fracción se puede:

- ampliar, multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número: $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$

- Simplificar, dividiendo el numerador y el denominador por un mismo número: $\frac{5}{15} \quad \frac{5 \div 5}{15 \div 5} = \frac{1}{3}$

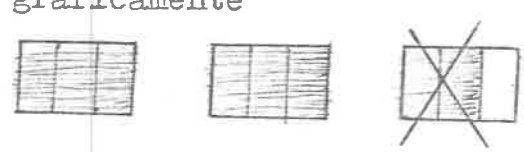
Las operaciones fundamentales con fracciones son:

- Adición, que algebraicamente se define como $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

  esto es: $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ gráficamente

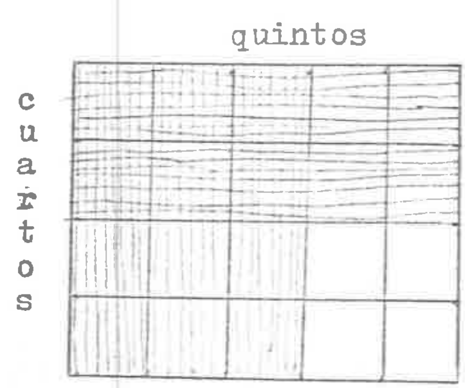
- Sustracción, su definición algebraica es $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

  esto es: $\frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3}$ gráficamente



- Multiplicación, algebraicamente su definición es $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \quad \frac{a \cdot c}{c \cdot d}$

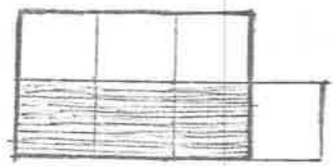
  esto es $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ gráficamente



se interpreta como $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{4}$

- División, su definición algebraica es $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

esto es $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$ Se interpreta: tomando un medio como las tres cuartas partes, requeriríamos $\frac{4}{6}$ para for-- mar un entero



Una equivalencia también puede interpretarse como una proporción, esto es $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ 3 de 4 es equivalente a tomar 6 de 8.

Ahora bien, si en una proporción, consideramos que una de las fracciones sea centesimal, estaremos calculando el porcentaje, esto es: $\frac{20}{100} = \frac{300}{1,500}$ 20 de 100 es equivalente a 300 - de 1500. En otras palabras el 20 % de 1,500 es 300.

Vemos pues que la equivalencia de fracciones nos permite for-- mar el concepto de proporción, y a su vez éste nos permite cal culer el porcentaje utilizando el procedimiento de productos - cruzados.

80,000

$$\frac{40}{100} = \frac{\boxed{}}{2,000}$$

80,000
la respuesta es 800.

B. Fracciones y operaciones: su contenido en el programa escolar y su presentación en los libros de texto gratuitos

Primer grado:

Para el primer grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a las fracciones y operaciones y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado es el si-- guiente:

- La adquisición de las nociones de mitad y cuarta parte y la asociación a éstas de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

La enseñanza de las fracciones aparece en primer año hasta la séptima unidad, en que debe dividir objetos concretos y luego figuras geométricas en mitades trazando una línea, ejercicios- similares aparecen para dividir en cuartas partes; y es en la octava unidad en donde aparecen ejercicios en los que se pre-- sentan figuras geométricas divididas para que el niño escriba los símbolos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

En la segunda parte del libro recortable aparece un ejercicio con figuras geométricas que deberá recortar para doblar y lue- go partir en mitades, en otro deberá recortar varios rectángu- los y cuadrados y colocar los que son cuartos del cuadrado de la parte superior, en otros ejercicios se presentan dos círcu- los uno dividido en medios y otro en cuartos, y dos cuadrados en la misma forma para recortar y comparar éstos.

Segundo grado:

Para el segundo grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a las fracciones y sus operaciones y que se expresa en los objetivos específicos de ese grado es el siguiente:

- La asociación de fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{10}$ a mitades, cuartas y décimas partes respectivamente.

- El establecimiento de las relaciones de orden y equivalencia entre esas fracciones.

- La resolución de ejercicios y problemas que impliquen adición de medios y cuartos.

Los ejercicios que se presentan de fracciones y operaciones son primeramente concretos con mitades de naranja y cuartas partes de tomates, luego aparece el juego de la liebre y la tortuga para sumar medios y cuartos respectivamente, después aparece una reglita para medir en medios y cuartos.

Tercer grado:

Para el tercer grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a las fracciones y sus operaciones se expresa en el objetivo general.

"Resolver problemas con su entorno que requieran sumar o restar fracciones de igual denominador."

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguien te contenido:

- La adquisición de la noción de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ y su aplicación en la resolución de problemas.

- La identificación de fracciones equivalentes.

- La resolución de problemas que impliquen adición y sustracción de fracciones con igual denominador.

- La conversión de fracciones a números mixtos y viceversa.

- La conversión de fracciones con denominador 10 o 100 a números decimales y viceversa.

De la sección de material recortable del libro de texto de matemáticas se emplea para fracciones y sus operaciones, una serie de rectángulos de la misma medida dividido uno en medios, otro en tercios... y así hasta décimos, los cuales se pueden emplear en el transcurso del año para resolver ejercicios tanto de fracciones mixtas donde debe colocar las partes en un rectángulo de la misma medida y ver las que le quedan, o bien para resolver sumas y restas.

Aparecen primeramente ejercicios con figuras no geométricas y geométricas divididas para que el alumno registre con número y letra la fracción correspondiente, también presentan ilustraciones donde se muestra la resta de fracciones con igual denominador tachando partes, para la equivalencia de fracciones se muestran ilustraciones que las comparan, así como ejercicios para utilizar su material recortable.

Aparecen ejercicios en donde un decímetro se divide en fracciones para realizar y registrar sus mediciones, así como también ejercicios donde el alumno debe iluminar lo que se le indica o bien comparar lo iluminado para luego anotar el resultado. También se incluyen problemas razonados para ser resueltos por suma o resta de fracciones.

Cuarto grado:

Para el cuarto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a las fracciones y sus operaciones se expresa con el objetivo general.

"Resolver problemas relacionados con su vida diaria que impliquen adición o sustracción de números racionales expresados en forma fraccionaria o decimal".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido.

- El establecimiento de las relaciones de orden entre fracciones.

- El establecimiento de las relaciones de orden entre fracciones comunes y decimales.

- La resolución de problemas que impliquen adición y sustracciones de igual y distinto denominador.

- La conversión de fracciones equivalentes de distinto denominador a fracciones equivalentes con igual denominador.

- El manejo de las medidas de peso y volumen utilizando fracciones comunes y decimales.

Los ejercicios que se presentan de fracciones y sus operaciones en el texto consisten en dibujos de figuras geométricas divididas en distintas partes e iluminadas con distintos colores que muestran la adición y sustracción de estas.

Para sumar o restar se utiliza la conversión a fracciones equivalentes a través de dibujos y segmentos de recta numérica acomodados para compararlos. Primero para sumar y restar fracciones de igual denominador en la recta numérica y luego la utilización de los segmentos divididos en distintas fracciones para completar el procedimiento de conversión a fracciones equivalentes y realizar la operación. Se presentan algunos problemas razonados para ser resueltos por fracciones.

Quinto grado :

Para el quinto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a las fracciones y sus operaciones se expresa con el objetivo general:

"Resolver problemas de multiplicación y división de números racionales expresados por medio de fracciones o en notación decimal, así como señalar las relaciones de equivalencia y desigualdad entre fracciones".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

- El establecimiento de las relaciones de orden y de equivalencia entre fracciones.
- La resolución de problemas que impliquen adición y sustracción de fracciones con distinto denominador y con números decimales.
- La resolución de problemas que impliquen multiplicación y división de fracciones, aplicando para la solución de esta última la propiedad del inverso multiplicativo.

De fracciones y sus operaciones los ejercicios que se presentan en el texto consisten en identificación de la fracción: iluminada y de sus elementos numerador y denominador.

La equivalencia de fracciones se maneja por productos cruzados, para establecer las relaciones de orden se ubican las fracciones en rectas numéricas, algunas rectas ya tienen las partes señaladas, otras deben de completarse por el alumno; también se presentan ejercicios donde debe establecer la relación de orden a través de conversión a fracciones equivalentes de igual denominador.

La suma y restas de fracciones se ejemplifican aplicando la -- conversión a fracciones equivalentes de igual denominador.

Aparece un ejercicio para obtener fracciones decimales equivalentes, a partir de fracciones comunes en la misma lección esas fracciones decimales se escriben como números decimales y vice versa. Luego aparecen ejercicios para registrar la notación - faltante, ya sea fracción, fracción decimal, expresión decimal o su nombre.

La multiplicación de una fracción por un entero y de una fracción por otra fracción se muestran muy objetivamente con gráficas de figuras y posteriormente con ejercicios a resolver me-- cánicamente; enseguida se ejercita la obtención del inverso -- multiplicativo para luego aplicar este concepto en la división de fracción, la cual aunque con muy pocos ejemplos también se ilustra gráficamente.

Luego aparece la medición de segmentos delimitados por fracciones, y problemas razonados que se resuelven por medio de operaciones con fracciones.

Sexto grado:

Para el sexto grado de la escuela primaria el contenido que co rresponde a las fracciones y sus operaciones y que se expresa en los objetivos específicos de ese grado es el siguiente:

- La comparación de racionales expresados, como fracciones utilizando para ello la recta numérica.

- La resolución de problemas que impliquen operaciones con fracciones.

- La aplicación de la equivalencia entre fracciones (proporción) para resolver algunos problemas, y derivándose de ahí el cálculo de porcentajes que aparece en el programa en la cuarta unidad y se continua su estudio en la VI, VII y VIII unidad.

Los ejercicios que se presentan de fracciones y sus operaciones en el texto consisten en una lección donde se repasa la equivalencia desde la comparación de gráfica hasta encontrar otras fracciones equivalentes, las fracciones se aplican mucho en probabilidad y la proporción se aplica en el cálculo de porcentajes, tema que se estudia en una lección y se aplica implícitamente en otras.

Dentro de el compendio de aritmética de la segunda parte, aparece una sección de fracciones en la cual se explica la esencia de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones así como el procedimiento para obtener fracciones equivalentes.

VIII. LA GEOMETRIA EN LA EDUCACION PRIMARIA

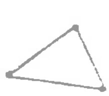
A. Conceptos básicos de la geometría

Por definición, la geometría es el "estudio del tamaño, configuración, posición relativa y dirección de objetos espaciales" (31) En un sentido más amplio, es una de las ramas de la matemática en la que se verifican leyes. Existen la geometría Euclídea y las geometrías no euclídeas.

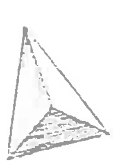
Euclídes fue un escritor científico que vivió en el siglo III a. C. y escribió los "Elementos", un libro que presenta a la geometría organizada y lógicamente, sirvió de texto durante más de dos mil años, actualmente sus postulados y teorías existen, pero se han enriquecido con el desarrollo del álgebra y el empleo de los números en la medición, cosas que en la época en que Euclides vivió no existía.

- Punto: es un elemento que no tiene dimensiones, y su imagen nos la puede dar la punta de una aguja.

Recta: una línea solo tiene longitud y ésta es generada por el desplazamiento de un punto.



Plano: que posee dos dimensiones longitud y ancho, un plano se obtiene al unir tres puntos no alineados.



Tetraedro: que es una figura tridimensional que tiene longitud, ancho y altura, se forma mediante la unión de cuatro puntos en el espacio.

Cualquier figura se obtiene mediante la unión de un número finito de las figuras anteriores.

Tenemos que por dos puntos sólo puede trazarse una línea recta, está será infinita hacia ambos extremos.

En una recta se pueden obtener segmentos si se limitan ciertas partes por marcas denominadas extremos.

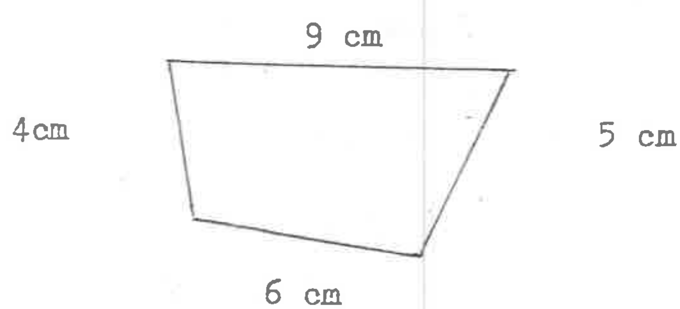
El hecho de fraccionar una recta en segmentos congruentes, ha permitido realizar la medición. Medir es obtener el número de veces que una unidad de medida (aceptada por el mundo entero - como el metro o la yarda) cabe en un determinado segmento.

Las equivalencias de múltiplos y submúltiplos de las medidas de longitud del sistema métrico decimal se expresan en la siguiente tabla.

Fig. 3 Equivalencias del Sistema Métrico decimal de longitud (*)

	km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
kilómetro	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
hectámetro	0.1	1	10	100	1000	10000	100000
decámetro	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
metro	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
decímetro	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100
centímetro	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10
milímetro	0.000001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1	1

Las medidas de longitud, permiten establecer la medida de segmentos de recta o lados de figuras, al sumar las medidas de las longitudes de los lados de una figura se obtiene su perímetro.

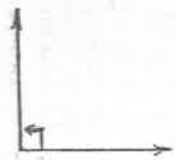


9 cm + 4 cm + 6 cm + 5 cm = 24 cm

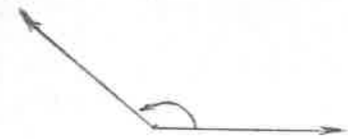
*.Fuente: Carlos Bosh, Carlos Hernández y Elena Oteiza. Matemáticas 1 2o. reimpresión, México, Ed. Publicaciones Cultural S. A., 1980, p. 328

Cuando unimos dos semirectas en un punto llamado origen formamos un ángulo.

agudo



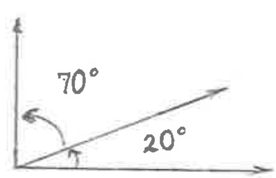
recto



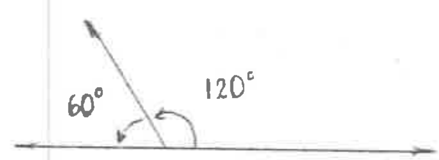
obtuso

Los ángulos se miden en grados y como instrumento se emplea el transportador, según su medida los ángulos se clasifican en: agudos cuando miden menos de 90°, rectos cuando miden exactamente 90° y obtusos cuando miden más de 90°.

Dos ángulos pueden sumarse, si su suma da como resultado 90° se dice que esos dos ángulos son complementarios, y si su suma da 180° esos ángulos se denominan suplementarios.

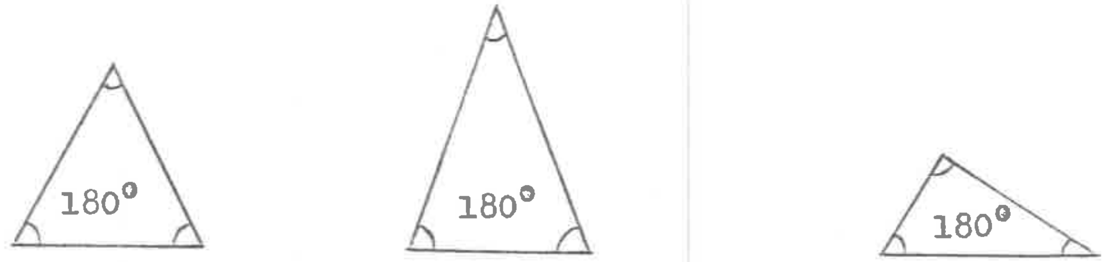


complementarios



suplementarios

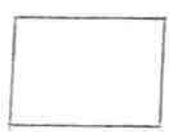
Un triángulo es una figura geométrica que tiene tres lados y tres ángulos. Según la medida de sus ángulos y de sus lados los triángulos se clasifican en: equilátero si sus tres lados y sus tres ángulos son iguales, isósceles si dos de sus lados y dos de sus ángulos son iguales y escaleno si ninguno de sus lados y de sus ángulos son iguales.



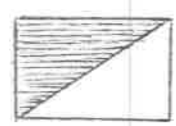
equilátero isósceles escaleno

Una observación importante es que la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es 180°.

Ahora bien, para calcular el área de un cuadrilátero se multiplica la base por la altura, y como de un cuadrilátero podemos obtener dos triángulos, el área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la altura y dividiendo entre dos.

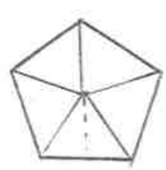


$A = b \times h$

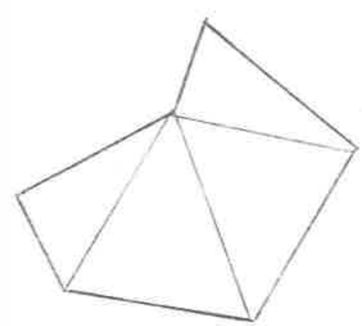


$A = \frac{b \times h}{2}$

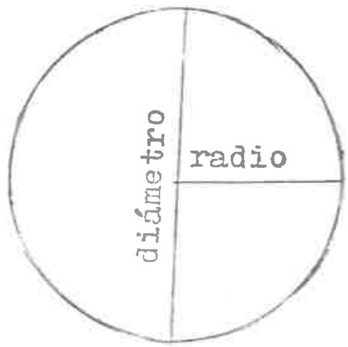
Conociendo como se obtiene el área de un triángulo podemos obtener el área de cualquier figura regular o irregular.



En los polígonos regulares la altura recibe el nombre de — apotema



Si se traza un ángulo de cero grados y se gira por medio de un compás se obtiene un círculo. Un círculo es el conjunto de puntos que quedan dentro de la circunferencia, mientras que la circunferencia es el contorno que delínea al círculo. La distancia del centro a cualquier punto — — — — —



de la circunferencia se llama radio, la línea que divide a la mitad al círculo es llamado diámetro. Si extendiéramos la circunferencia y la midiéramos con el diámetro ésta sería 3.14 veces aproximadamente el diámetro, a esta medida se le conoce con el nombre de π .

El perímetro de un círculo o sea la circunferencia se obtiene multiplicando el π por el diámetro.

$$C = \pi \times d$$

"Para calcular su área podemos imaginarlo como caso límite de un polígono regular cuyo número de lados va aumentando. Cuando el número de lados crece, el perímetro del polígono se convierte en longitud de la circunferencia, y la apotema se convierte en radio. Así resulta: área del círculo $= \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$". (32)

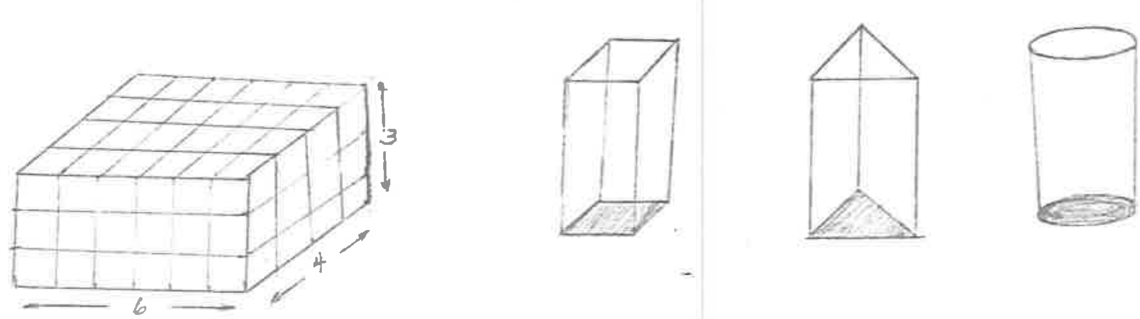
Esto és, el área del círculo se obtiene multiplicando el cuadrado del radio por el número π .

"La unidad de área es el cuadrado, que tiene como lado la unidad de longitud. Si esta unidad es el centímetro líneal, la unidad de área (o superficie) es el centímetro cuadrado. Como hemos dicho al tratar el sistema métrico decimal, las unidades de dicho sistema son: el m^2, dm^2, cm^2, mm^2, Dm^2, Hm^2 y Km^2" (33)

Fig. 4 Equivalencia del sistema métrico decimal de superficie (*)

	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	Dm^2	Hm^2	Km^2
mm^2	1	100	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000
cm^2	0.01	1	100	10000	1000000	100000000	10000000000
dm^2	0.0001	0.01	1	100	10000	1000000	100000000
m^2	0.000001	0.0001	0.01	1	100	1000	1000000
Dm^2	0.00000001	0.000001	0.0001	0.01	1	100	10000
Hm^2	0.0000000001	0.00000001	0.000001	0.0001	0.01	1	100
Km^2	0.000000000001	0.0000000001	0.00000001	0.000001	0.0001	0.01	1

Con varios tetraedros podemos formar un cubo, el cubo es la unidad fundamental del volúmen, ya que acomodados nos permiten — calcular el volúmen de los cuerpos sólidos.

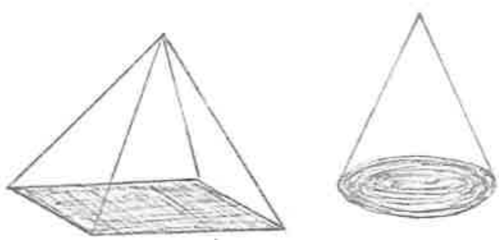


Volumen = área de la base x altura

(*) Fuente: Carlos Bosch, et. al. Op. cit. pág. 388

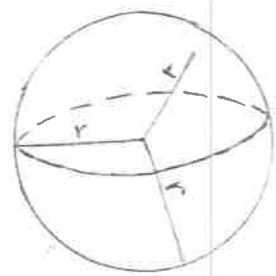
Para calcular el volumen de paralelepípedos y prismas, así como de cilindros, el procedimiento es calcular el área de la base y posteriormente multiplicarlo por la altura.

Al calcular el área de pirámides o conos, también se multiplican el área de la base por la altura, pero se divide entre 3.



$$\text{Volumen} = \frac{\text{área de la base x altura}}{3}$$

La fórmula para obtener el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi \times r^3$.



"La unidad de volumen es el cubo que tiene como aristas la unidad de longitud. Si esta unidad es el centímetro lineal la unidad de volumen será el centímetro cúbico. En el sistema métrico decimal las unidades de volumen son: m^3, dm^3, cm^3, mm^3, Dm^3, Hm^3 y Km^3". (34)

Las relaciones que existen entre ellas se dan en la siguiente tabla:

Fig. 5 Equivalencia del sistema métrico decimal de volumen: (*)

	mm^3	cm^3	dm^3	m^3	Dm^3	Hm^3	Km^3
mm^3	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}
cm^3	$\frac{1}{10^3}$	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
dm^3	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^3}$	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}
m^3	$\frac{1}{10^9}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^3}$	1	10^3	10^6	10^9
Dm^3	$\frac{1}{10^{12}}$	$\frac{1}{10^9}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^3}$	1	10^3	10^6
Hm^3	$\frac{1}{10^{15}}$	$\frac{1}{10^{12}}$	$\frac{1}{10^9}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^3}$	1	10^3
Km^3	$\frac{1}{10^{18}}$	$\frac{1}{10^{15}}$	$\frac{1}{10^{12}}$	$\frac{1}{10^9}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^3}$	1

Para terminar diremos que en un recipiente que tiene un volu-- men de 1 dm^3 tiene una capacidad de un litro. Así que pueden - establecerse las siguientes equivalencias.

$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

La geometría proyectiva es una geometría no euclídea, esto se- comprueba al ver que la sombra proyectada de un lápiz no man-- tiene la propiedad métrica.

(*) Fuente: Carlos Bosch. et. al. Op. cit. p. 401

"La geometría proyectiva como tal, fue creada en el siglo -- XVII por el arquitecto e ingeniero Gerard Desorguez. (...)

Una de las diferencias importantes entre la geometría pro-- yectiva y la euclidiana reside en el enfoque de los paralelos. En la geometría euclidiana las líneas paralelas nunca- se encuentran no tienen ningún punto en común. En la proyectiva sí. Se intersectan en lo que se denomina el punto ideal". (35)

Además, la geometría proyectiva nos permite realizar las rotaciones y traslaciones de figuras en el espacio.

B. Geometría: su contenido en el programa escolar y su presentación en los libros de texto gratuitos

Primer grado:

Para el primer grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a geometría y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado es el siguiente:

- La clasificación de objetos por su forma y su tamaño, llegando a establecer de dos segmentos dados cual es el más largo- y cual el más corto.

- La identificación de las líneas rectas y curvas, así como de las figuras geométricas: círculo, cuadrilátero y triángulo.

- La adquisición de la habilidad para el trazo de rectas, círculos, cuadrados y triángulos, empleando para ello diversos- recursos.

. La adquisición de la habilidad para efectuar la medición de- longitudes de diversos objetos, utilizando unidades arbitrarias.

Los ejercicios que se proponen en el libro de texto son: identificación de las figuras más grandes o más pequeñas, y las -- que posean alguna característica especial de color, textura o- forma, colorear cuadriláteros, trazar recta en el suelo con -- cuerda tensada, el trazo de triángulos en el suelo con cordeles, y el trazo de círculos con una cuerda de diámetro en el - suelo del patio; también se introduce a la medición a través - de ejercicios en los que deberá contar las veces que una unidad cabe en otras, y en dividir determinados cables en unidades determinadas.

En la segunda parte del libro recortable aparece el ejercicio- en que recortando una reglita deberá medir los segmentos de la parte superior.

Segundo grado:

Para el segundo grado de la escuela primaria el contenido que- corresponde a geometría y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado es el siguiente:

. La medición primeramente de objetos de la escuela, después - de segmentos de rectas hasta llegar a medir el contorno de -

cuadriláteros y triángulos utilizando para ello primeramente el metro, enseguida el decímetro y posteriormente el centímetro.

- El establecimiento de las relaciones existentes entre el metro, el decímetro y el centímetro.

- El trazo de figuras geométricas con respecto a un eje.

Los ejercicios que se presentan de geometría en el libro de texto son: primeramente la confección de un metro para efectuar medidas de áreas grandes, luego aparece la medición en decímetros y por último en centímetros elaborando para ello una reglita con los centímetros y los números bien señalados; después aparecen barras y figuras geométricas a las que debe medir el contorno. Se presentan ejercicios donde debe realizar conversiones entre metro, decímetro y centímetro, así como la correcta iluminación de figuras simétricas.

Tercer grado:

Para el tercer grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a geometría se expresa en los objetivos generales: "Trazar figuras en las que aplique sus nociones de simetría, paralelismo o perpendicularidad".

Resolver problemas relacionados con su entorno que impliquen -

la obtención de áreas o perímetros.

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

. La aplicación de la simetría axial al colorear figuras y después llegar a clasificarlas en simétricas o no simétricas -- con respecto a un eje.

. La medición de segmentos en metros, decímetros y centímetros para aplicar esta al cálculo de perímetros, y llegar a resolver problemas que impliquen ambos conocimientos.

. La adquisición de las nociones de paralelismo y perpendicularidad y aplicarlas en la definición de rectángulo y triángulo rectángulo y al trazar dichas figuras.

. La determinación de áreas de rectángulos y triángulos si--- guiendo esta secuencia; primeramente la determinación de las veces que una región rectangular cabe en otra; enseguida, a- través de la medición o bien trazando rectángulos de medidas dadas se calcula el área dibujando centímetros cuadrados; y- por último calculando sólo a través de la medida de los la-- dos del rectángulo y del triángulo aplicando sus conocimientos sobre el rectángulo.

Los ejercicios que se presentan de geometría en el libro de --

texto son friguras diveras a las que deberá trazarles el eje - de simetría, así como mitades de figuras para que el alumno -- las complete simétricamente y se le propone recortar figura en papel doblado, se presentan fotografías de diversos objetos y al frente las figuras geométricas que se pueden abstraer de -- ellos. Se incluyen dibujos que muestran los procedimientos co- rrectos para trazar perpendiculares y paralelas así como rectán gulos, triángulos rectángulos y círculos

- Aparecen también dibujos de parques, plazas y parcelas con - sus medidas para que el alumno calcule su perímetro. Para las áreas vienen rectángulos con marcas a cada centímetro para que el alumno cuente los centímetros cuadrados de área y luego rec tángulos con medidas a escala para que obtenga su área en me- tros cuadrados así como problemas razonados.

Luego se presentan rectángulos divididos a la mitad diagonal - para calcular el área de triángulos rectángulos percibiendo -- que es la mitad del rectángulo y hay que dividir entre dos, -- primero en rectángulos cuadicualados y luego en triángulos a - escala.

Cuarto grado:

Para el cuarto grado de la escuela primaria el contenido que - corresponde a geometría se expresa en el objetivo general:

"Resolver problemas que impliquen el trazo de algunas figuras, la medición de segmentos de rectas, ángulos, superficies y volúmenes, el uso de algunas medidas de peso y de capacidad, así como el trazo y análisis de figuras a escala".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido.

- En cuanto a las figuras a escala aparece primeramente el dibujo en papel cuadriculado y posteriormente su reproducción analizando sus propiedades.

- En cuanto a simetría aparece la identificación de figuras geométricas y el trazo de sus ejes de simetría, luego viene la clasificación de figuras geométricas según su número de ejes de simetría, y por último la aplicación de este concepto para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes.

- Para el cálculo de áreas y volúmenes, primeramente se pide calcularlas en unidades arbitrarias y posteriormente utilizando las unidades cuadradas y cúbicas del sistema métrico decimal.

- En cuanto al estudio de la rotación, primeramente aparece la realización de rotación para observar sus propiedades, luego viene la identificación de rectángulos y cuadrados por sus simetrías de rotación, luego viene la determinación de mayores, menores o iguales amplitudes de diferentes giros mediante la rotación y por último la clasificación de polígonos según el valor angular que tomen las rotaciones que realice.

- La localización de puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Los ejercicios que se presentan de geometría en el libro de texto consisten en: varios ejercicios donde él deberá dibujar a escala un modelo que se le presenta en una hoja cuadriculada; se le presentan figuras a las que debe trazar el eje de simetría; luego presentan figuras con más ejes de simetría y otras figuras a las que el debe identificar los ejes y luego se presentan los triángulos para que los clasifique de acuerdo a su número de ejes.

Se presentan figuras simétricas que ilustran problemas de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes donde debe aplicar este concepto para su cálculo. La introducción al cálculo, de volúmenes se hace muy concreta, primero a través de objetos como muñecos y comparaciones entre popote, vaso y jarro, luego en figuras formadas por cubos y por último de prismas triangulares graficados por prismas rectangulares con sólo la mitad iluminada.

Para la rotación vienen muchos ejercicios en los que recortando algunas figuras del material recortable, superponiéndolas -

en un dibujo del ejercicio y sujetándolo con un alfiler, puede realizar las rotaciones que se le piden y contestar las cuestiones que se le plantean.

La localización de puntos en el plano se presenta en el juego de rescatar a los naúfragos (dando las coordenadas) luego ejercicios a través de planos de pueblecitos donde deberá localizar algunas partes contando cuadras, después se analiza el camino que siguen algunas rectas trazadas en un plano.

Quinto grado:

Para el quinto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a geometría se expresa en el objetivo general:

"Resolver problemas que impliquen el trazo de algunas figuras, dibujos a escala, cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, así como medición de ángulos".

Y a través de los objetivos específicos el contenido que se desglosa es el siguiente:

. La localización de puntos en el plano cartesiano.

. La determinación del área de algunas figuras regulares y del trapecio.

. La determinación del volúmen de algunos prismas.

De geometría los ejercicios que se presentan el el libro de -- texto consisten en: planos de ciudades para ubicar lugares para introducir al estudio del plano cartesiano con sus cuatro - cuadrantes luego pasan al juego de los naúfragos donde ya se - emplea el plano cuadriculado y más abstracto que los planos.

Para la determinación de las áreas se presentan figuras divididas en regiones cuadradas y otros en regiones triangulares, -- luego ambas se conjuntan en el cálculo del área del trapecio,- cuyo concepto se muestra muy gráficamente, lo mismo podemos -- decir del volumen, solo que con menos ejemplos, pero aquí se - sigue utilizando la triangulación de las bases de algunas figuras para obtener primero su área de la base y luego el volu--- men. También se presentan algunos problemas razonados de volumen y capacidad.

Sexto grado:

Para el sexto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a geometría y que se expresa en los objetivos específicos del programa de ese grado es el siguiente:

- La resolución de problemas que impliquen el cálculo del perímetro del círculo.

- La resolución de problemas que impliquen el cálculo del área lateral y total de prismas, cilindros, pirámides y cuerpos --

irregulares.

. La resolución de problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas, cilindros y cuerpos irregulares, y también problemas en los que además de ésto aplique también sus conocimientos sobre escalas.

Los ejercicios de geometría que se presentan en el libro de texto consisten en: la comprobación de que $\pi = 3.14$ veces la longitud del diámetro. Antes de entrar al tema del área de polígonos se estudia la obtención de polígonos inscritos en la circunferencia y una vez estudiado esto se pasa al área de las figuras, analizando ésto a partir de la división en triángulos a partir del vértice central y así llegar a deducir las fórmulas para polígonos regulares de cualquier número de lados hasta llegar a deducir también la del círculo. Para el cálculo de capacidad y área total se utiliza como ejemplo 2 tinacos uno de forma de prisma cuadrangular y otro de prisma circular.

También aparece un ejercicio donde debe encontrar las áreas de las diferentes figuras presentadas para poder obtener probabilidades. En un ejercicio se presenta un problema de construcción en donde debe calcular el volumen de una loza y de allí obtener proporciones de material. Luego aparece un ejercicio para encontrar la relación entre el volumen de un prisma y una pirámide con la misma base y altura. En otro ejercicio se pide calcular el volumen de tres cimientos, uno cuadrangular y dos trapezoidales. El volumen del cono se estudia tratando de en—

contrar la capacidad de un silo cónico.

La sección de geometría que aparece en el compendio, hace referencia a la necesidad de adoptar unidades de medidas y menciona brevemente las equivalencias de 1 m (lineal), 1 m^2 (cuadrado), 1m^3 (cúbico) en sus temas expone que la geometría no permite medir para resolver problemas de la vida diaria; también pueden establecer equivalencias y cálculos más exactos con unidades más pequeñas: habla sobre el cálculo de áreas y volúmenes pesando o sumergiendo los objetos en el agua; habla sobre las esclas y las reproducciones que pueden realizarse; y por último proporciona un formulario que incluye todas las figuras, y sus fórmulas de perímetro, área y volumen.

IX. LA PROBABILIDAD Y ESTADISTICA EN LA EDUCACION PRIMARIA

A. Conceptos básicos de la probabilidad

En la vida real hay situaciones en las que existe seguridad -- porque siempre suceden y son correctas. Por ejemplo que 6 X 4= 24, que el día dura 24 horas, que el peso es la fuerza ejercida por la gravedad, que las cosas pesadas se hunden en el agua, que la madera no es buena conductora del calor, etc. , todos - estos fenómenos son llamados deterministas; sin embargo hay -- otro tipo de fenómenos en que no se sabe con certeza lo que va a pasar, por ejemplo: al participar en una rifa, no se sabe -- que número será el ganador, al lanzar una moneda o un dado no- se sabe lo que caerá, a estos eventos son a los que se llama - azarosos.

"La parte de la matemática concerniente al problema de qué tanta oportunidad o de qué tan probable es la ocurrencia de un -- evento es llamada probabilidad" (36).

Al analizar el experimento de lanzar una moneda al aire, pueden ocurrir dos cosas: que caiga "águila" o que caiga "sol". - "El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento es llamado espacio de muestreo del experimento" (37) que en este caso sería el conjunto {águila, sol}.

De este espacio muestral, se obtienen cuatro subconjuntos: - - $\{$águila$\}$, $\{$sol$\}$, $\{$águila, sol$\}$, $\emptyset$.

Cada uno de estos subconjuntos del espacio muestral recibe el-nombre de evento.

Si se realizara el experimento repetidas veces, y se registraran los resultados, al final de un gran número de lanzamientos se podría llegar a establecer una probabilidad frecuencial de-cada evento, una observación que debemos hacer es que a mayor-número de lanzamientos esta probabilidad se hace más exacta. - El resultado del experimento se acercaría mucho a estos resultados.

- evento $\{$águila$\}$, su probabilidad sería 1/2.
- evento $\{$sol$\}$, su probabilidad sería 1/2.
- evento $\{$águila, sol$\}$, esto es, apostar a que caería alguna de esos dos, es un evento seguro y su probabilidad sería 1.
- evento $\emptyset$, esto es, afirmar que la moneda no caerá, evento -- que es imposible (a menos que sucediera algo deliberadamen-- te) y su probabilidad sería 0.

La probabilidad de un evento siempre se encuentra entre 0 y 1, y la suma de las probabilidades de los posibles resultados del espacio muestral siempre es 1 esto es, considerando el espacio muestral $\{$águila, sol$\}$ se tendría que $1/2 + 1/2 = 1$.

Para calcular sin dificultad la probabilidad de un fenómeno -- aleatrorio, puede utilizarse un procedimiento muy sencillo dado por la regla de Laplace:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Su aplicación es muy sencilla, considerando como ejemplo el -- lanzar un dado y apostar a que saldrá un 3.

El espacio muestral es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La probabilidad de que caiga 3 es 1/6 esto es $= \frac{1 \text{ caso favorable}}{6 \text{ casos posibles}}$

La probabilidad de que caiga un número par sería 3/6.

B. Conceptos básicos de la estadística

Buscando la definición de estadística en un diccionario se encontrará una larga lista de aplicaciones y de medidas que pueden obtenerse procesando la información que recopila; en pocas palabras, la estadística es una ciencia que recopila y procesa información obtenida de ciertos datos de un universo, ya sea - éste grande o pequeño.

Las medidas que pueden obtenerse se dividen en medidas de tendencia central y medidas de dispersión. Las primeras estudian- que es lo más común o frecuente en una población, mientras que las segundas estudian las formas en que los datos varían.

La estadística, recopila información de una población, enseguida esa información es ordenada y clasificada.

Ejemplo: se pesa a un grupo de 12 niños y se obtienen los siguientes datos.

35, 38, 36, 32, 35, 29,

42, 40, 35, 40, 38, 35 (todos kilogramos)

estos datos primero se ordenan:

29, 32, 35, 35, 35, 35,

36, 38, 38, 40, 40, 42

luego se concentran en una tabla.

peso	frecuencia
29	1
32	1
35	4
36	1
38	2
40	2
42	1

Se distinguen dos tipos de datos en estadística: datos discretos y datos continuos. Los datos discretos son los que tienen unidades aisladas, por ejemplo número de hermanos; y los datos continuos, son los que pueden variar en un conjunto de muchos valores por ejemplo las medidas (nota: en el ejemplo anterior-

los kilogramos se tomaron como discreto por no haberse dado —
gramos).

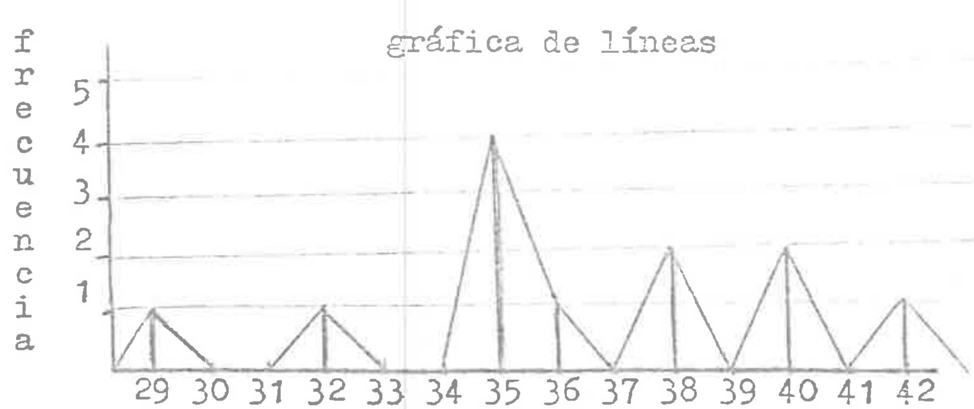
Cuando los datos son continuos, por ejemplo la distancia que hay entre la escuela y el domicilio de cada alumno, en que sería muy difícil encontrar valores iguales, los grupos se dividen en "clases", si se toman de 100 en 100 metros quedaría:

alumnos que viven a menos de 100 m.
alumnos que viven entre 100 y 200 m.
alumnos que viven entre 200 y 300 m.
etc., luego se buscaría el número de alumnos (frecuencia) de cada una de estas clases.

Una vez que se tienen los resultados en una tabla, los resultados pueden graficarse: en una gráfica de líneas si los datos son discretos, en una gráfica de barras si los datos son continuos, o en un polígono de frecuencias, ambos tipos de datos.

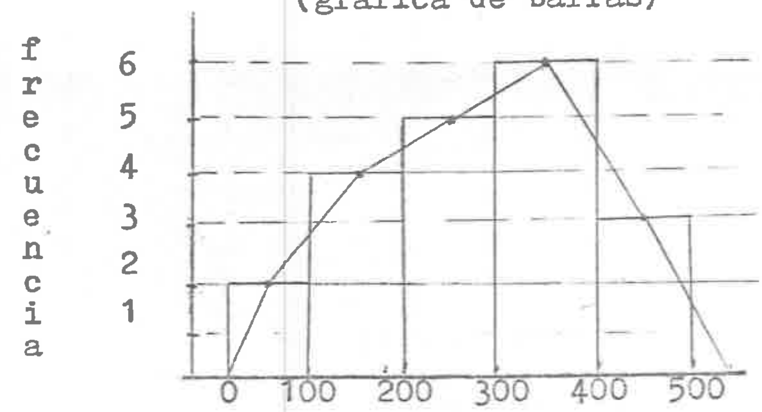
Tomando los siguientes cuadros graficamos

peso	frecuencia
29	1
32	1
35	4
36	1
38	2
40	2
42	1
total	12



distancia	frecuencia
0-100	2
100-200	4
200-300	5
300-400	6
400-500	3
	20

(gráfica de barras)



Para trazar el polígono de frecuencia los puntos se unen en la gráfica de líneas, mientras que en la gráfica de barras se localiza el punto medio de cada clase y es ahí donde se señala - cada punto y posteriormente se une mediante una línea.

Las medidas básicas y más usuales son las de tendencia central: media aritmética, mediana y moda.

La media aritméticas, es el valor promedio, para obtenerlo se - suman los datos y se divide entre la cantidad de éstos.

La mediana es el valor localizado en el centro, para encontrarlo se van eliminando los valores extremos, esto es, se elimi-- na, el más grande y el más chico, sucesivamente, si quedarán dos valores, se tomaría el promedio de ellos como mediana.

La moda es el valor que aparece con más frecuencia. Retomando- el ejemplo de los pesos en kilogramos tendríamos:

Media aritmética = 36.25 Kg.

peso	frecuencia	suma
29	1	29
32	1	32
35	4	140
36	1	36
38	2	76
40	2	80
42	1	42
	12	

Suma total 435

$435 \div 12 = 36.25$

La mediana es: 35.5 Kg.

29
32
35
35
35
35
36
38
38
40
40
42

$$\begin{array}{r} 35 \\ + \underline{36} \\ 71 \end{array} \div 2 = 35.5$$

La moda es 35 Kg. que es el valor que tiene mayor frecuencia.

C. Probabilidad y estadística: su contenido en el programa escolar y su presentación en los libros de texto gratuitos

Primer ciclo escolar :

En el primer ciclo que incluye los grados de primero y segundo de la escuela primaria se estudia una estadística implícita -- muy elemental, en donde el alumno registra por medio de la iluminación de recuadros el número de compañeros existentes en el salón o pequeñas investigaciones como las actividades que les-gustan, las enfermedades que han padecido o bien los resultados del registro climático.

En la segunda parte del libro recortable aparece un ejercicio en el que deberá recortar cuadritos rojos y azules para representar cosas del campo y la ciudad, y en otro más se dan para recortar tablas en las que registrará un registro climático.

Tercer grado:

Para el tercer grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a probabilidad y estadística se expresa en el objetivo general:

"Registrar, organizar, graficar e interpretar datos obtenidos de investigaciones hechas en su escuela, su familia o su comunidad.

Calcular resultados de algunos experimentos aplicando sus nociones de posible, imposible, más posible, menos posible o igualmente posible". Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

En estadística el contenido se puede resumir a la interpretación de gráficas de barras, elaboradas primeramente con datos del medio escolar, enseguida con datos de toda la zona escolar y después de su comunidad.

Mientras que en probabilidad, primero aparece la utilización de las palabras posible e imposible para calificar algunos eventos, después, el empleo de las expresiones más posible y menos posible para calificar resultados de experimentos, al principio con sólo dos resultados y después con más de dos; y por último la utilización de la expresión igualmente posible.

Ejercicios de estadística en el libro de texto, consisten en la presentación de gráficas en columnas cuadriculadas y coloreadas para que el alumno las interprete y conteste las preguntas que se le formulan, en probabilidad tiras gráficas en que los niños emplean los términos que se van a estudiar y luego ilustraciones con casos a calificar y en donde él registrará el término correcto a utilizar.

Cuarto grado:

Para el cuarto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a probabilidad y estadística se expresa en el objetivo general:

"Desarrollar la idea de probabilidad como iniciación al estudio sistemático de los fenómenos al azar.
Interpretar situaciones, mediante la elaboración y el análisis de diversas gráficas".
Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

En cuanto a lo concerniente a estadística únicamente se presenta la interpretación de gráficas de barras resultado de investigaciones. Mientras que en lo que respecta a probabilidad aparece primeramente la identificación de experimentos azarosos y de sus eventos, para luego determinar la mayor, menor o igual probabilidad de eventos observando su frecuencia.

Los ejercicios de probabilidad y estadística que se presentan en el texto consisten: en estadística, iluminar barras en una gráfica cuadriculada conforme a los datos que se le dan, y el de responder a unas preguntas para interpretar dicha gráfica, y se le inicia al redondeo y formación de escalas ayudando a realizar esto gráficamente.

La probabilidad se relaciona con las áreas, se le presentan distintas figuras en donde tiene mayor probabilidad de caer algo.

Quinto grado :

Para el quinto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a estadística y probabilidad se expresa en el objetivo general:
"Sistematizar sus conocimientos sobre los fenómenos aleatorios al cuantificar la probabilidad de algunos eventos.
Recolectar, organizar y representar gráficamente datos para interpretar situaciones".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

En lo correspondiente a estadística, viene la interpretación de gráfica de barras, la interpretación de datos representados en un plano cartesiano y posteriormente este contenido se conjunta en la elaboración de gráficas poligonales. Y en lo que respecta a probabilidad, viene la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas así como la determinación de la probabilidad de algunos eventos.

De estadística y probabilidad los ejercicios que se presentan en el texto consisten en: exponer resultados de algunas investigaciones para que con preguntas guía el alumno procese la información para formar las clases de frecuencia y confirmar primeramente una gráfica de barras, luego una gráfica de líneas y por último un diagrama poligonal.

Para probabilidad se analizan algunos fenómenos como lanzar una moneda, sacar paletas o pelotas de un conjunto con diversas cantidades de distintos colores, así como sacar un pato de un color determinado de un conjunto, dado en su texto y aplicando las fracciones determinará la probabilidad de cada evento.

Sexto grado:

Para el sexto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a probabilidad y estadística y que se expresa en - los objetivos específicos del programa de ese grado es el si-- guiente:

En lo que corresponde a estadística aparece la aplicación del- concepto de promedio al interpretar informaciones estadísti--- cas, el estudio de algunas muestras para de ahí determinar las características de una población y por último ver la importan- cia del analísis de la información cuantitativa.
En tanto que en probabilidad se presenta la distinción de fenó menos deterministas de los azarosos y la cuantificación de al- gunos eventos, conociendo sólo una parte del conjunto, inclu-- yendo la relación con áreas.

Algunos de los ejercicios que se presentan en el texto son: un ejercicio en donde se analiza un fenómeno de azar y uno deter- minista para observar la diferencia.

En otro se analiza que un fenómeno esta formado por varios - - eventos y se muestra como encontrar la probabilidad de estos - eventos.

Otro ejercicio presenta la situación de que a partir de una -- muestra se obtengan las proporciones reales de una población. El concepto de proporción por medio de muestra se presenta en- otro ejercicio donde se plantea el problema de la fabricación- de 100 pares de zapatos tenis para alumnos de sexto.

En el tema de probabilidad y estadística que se presenta en el compendio de la segunda parte, se incluyen los siguientes subtemas:

El azar, la probabilidad, la regularidad estadística, la predicción probabilística, los eventos y los conjuntos, la probabilidad de un evento, la probabilidad empírica y la probabilidad teórica, el cálculo de probabilidades, eventos imposibles y eventos seguros y por último la inferencia estadística.

X. LA LOGICA EN LA EDUCACION PRIMARIA

A. Conceptos básicos de la lógica

Buscando el significado de lógica en un diccionario encontraremos que es la "ciencia cuyo objeto de estudio son las formas, estructuras o esquemas del pensamiento formal" (38).

> "La lógica se define como un conjunto de reglas, operaciones o ambas cosas, que evita los errores del pensamiento. Los lógicos reconocen la existencia de dos tipos de lógica que se excluyen mutuamente, la deductiva y la inductiva: La lógica deductiva ayuda a asegurar que las ideas concuerdan entre sí; además se ocupa solamente de "signos" o "marcas", nunca del mundo real o la "verdad". La lógica deductiva deduce conclusiones específicas a partir de premisas generales que se aceptan siempre como un acto de fé. La lógica inductiva ayuda a asegurar que las ideas concuerden con el mundo real, y no entre sí; busca la "verdad" en base a la información sensorial. La lógica inductiva saca conclusiones generales a partir de observaciones sensoriales específicas que no se aceptan nunca como un acto de fé" (39).

En su principio, la lógica deductiva se ocupa del estudio de proposiciones; las proposiciones pueden ser simples, compuestas y categóricas.

Una proposición simple es una frase que afirma o niega una sola cosa y de la que podemos decir si es verdadera (V) o falsa (F). Son ejemplos de proposiciones simples:

a: Juan estudia matemáticas. (Su valor depende de a qué Juan nos referimos) b: 2 + 3 = 8 - F

c: La luna es satelite de la tierra - - - - - - - - - - - - V

d: Llueve (es verdadera si en ese momento llueve, sino, es falsa).

Una observación es que las proposiciones se denotan con letras minúsculas seguidas de dos puntos (a:, b:, c:, d:, etc.) mientras que los conjuntos más adelante se designarán con letras mayúsculas (A, B, C, D, etc.).

En las matemáticas modernas se presentan íntimamente relacionados los conceptos de lógica con las representaciones geométricas de conjuntos, esto gracias a dos matemáticos: Leonhard Euler y John Venn. El primero de ellos representó a las proposiciones categóricas por medio de círculos, el segundo de ellos vió la posibilidad de tomar al sujeto y al predicado de estas oraciones no en forma individual, sino como representantes de una clase (conjunto), es así que actualmente se denominan gráficas Venn-Euler a las representaciones geométricas de las proposiciones lógicas, en ejemplos posteriores se verá cómo es esto.

Las proposiciones compuestas son las proposiciones formadas por proposiciones simples unidas por algún conectivo lógico, o bien modificada por la expresión "no" o "no es cierto". Las proposiciones compuestas son: la negación, la disyunción, la conjunción, la implicación y la equivalencia.

La negación es una proposición simple a la que se le ha agregado la partícula "no", esta proposición niega lo que se afirma en una primera:

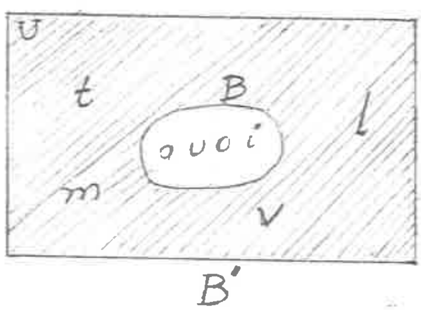
a: Juan estudia matemáticas - - - - - - - - - - - - - - - - - V

~a: Juan no estudia matemáticas - - - - - - - - - - - - - - - F

b: Letras que son vocales de la palabra "automóvil"

~b: Letras que no son vocales de la palabra "automóvil"

La proposición ~b (que se lee: no be) puede representarse en diagramas de Venn-Euler de la siguiente manera.



Al conjunto que contiene los elementos que hacen verdadera a la negación se le denomina complemento (B´).

Una negación siempre tiene un valor contrario al que tiene la primera proposición:

c:"a" es una letra que es vocal de la palabra "automóvil" - -V

~c:"a" es una letra que no es vocal de la palabra "automóvil"-F

La conjunción es una proposición compuesta que se obtiene uniendo dos proposiciones simples por medio del conectivo "y".

Ejemplos:

a: Hay habitantes en la luna - - - - - - - - - - - - - - - - - F

b: Hay habitantes en Alaska - - - - - - - - - - - - - - - - - V

a $\wedge$ b: Hay habitantes en la luna y en Alaska - - - - - - - - F

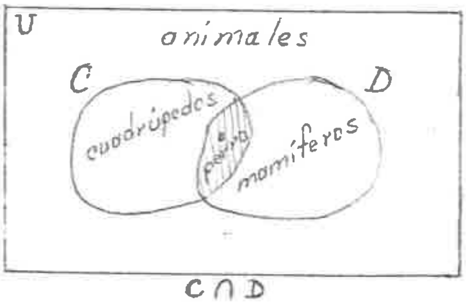
c: El perro es cuadrúpedo - - - - - - - - - - - - - - - - - - V

d: El perro es mamífero - - - - - - - - - - - - - - - - - - - V

c $\wedge$ d: El perro es cuadrúpedo y mamífero - - - - - - - - - - V

Para que una conjunción sea verdadera, las dos proposiciones -- simples que la integran tienen que ser verdaderas, si alguna de estas o las dos son falsas, la conjunción es falsa.

La conjunción verdadera c $\wedge$ d, se representa en diagramas de -- Venn-Euler:



C $\cap$ D

Podemos apreciar que el elemento que hace verdadera a la conjunción c $\wedge$ d, está contenido en el conjunto resultado de la intersección ($\cap$) de los animales cuadrúpedos con el conjunto de los-animales mamíferos.

La disyunción es una proposición compuesta que se obtiene al -- unir dos proposiciones simples con el conectivo "o".

Ejemplos:

a: El perro es mamífero - - - - - - - - - - - - - - - - - - V b: El perro es cuadrúpedo - - - - - - - - - - - - - - - - V

a $\vee$ b: El perro es mamífero o es cuadrúpedo - - - - - - - - - V

c: Nuevo León es un país - - - - - - - - - - - - - - - - F

d: Nuevo León es la capital de México - - - - - - - - - - F

a $\vee$ b: Nuevo León es un país o es la capital de México - - - F

e: El maíz es un cereal - - - - - - - - - - - - - - - - - V

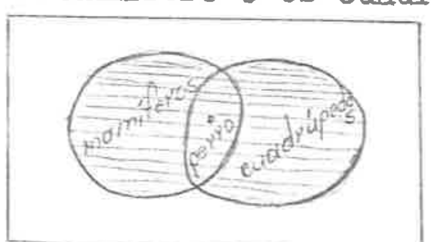
f: El frijol es un tubérculo - - - - - - - - - - - - - - F

e $\vee$ f: El maíz es un cereal o el frijol es un tubérculo - - - V

Para que una disyunción sea falsa, se necesita que las dos proposiciones simples que la integran son falsas a la vez, ya que con una proposición simple que sea verdadera toda la disyunción se hace verdadera, y con mayor razón cuando las dos proposiciones simples son verdaderas.

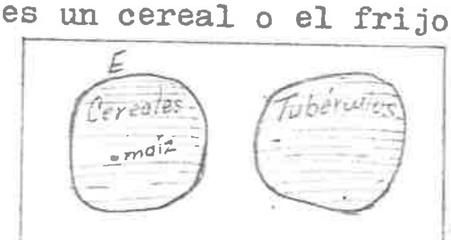
Graficando en diagramas de Venn-Euler las dos disyunciones verdaderas se tendría:

a $\vee$ b: El perro es mamífero o es cuadrúpedo



A U B

e $\vee$ f: El maíz es un cereal o el frijol es un tubérculo



E U F

Como puede observarse, los elementos que hacen verdaderas a las proposiciones se encuentran en la unión ($\bigcup$) de los conjuntos, - no importando si estos son ajenos (que no tengan elementos en - común) o se intersectan.

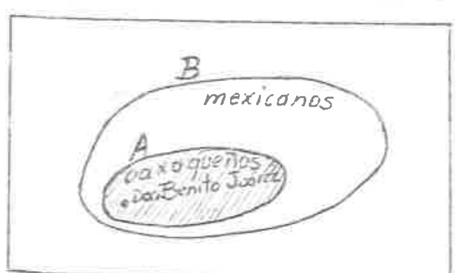
Una implicación es una proposición compuesta constituída por -- dos proposiciones simples unidas por medio del conectivo --- "Si ... entonces"; este tipo de proposición es muy útil ya que- nos permite hacer deducciones lógicas.

a: Don Benito Juárez es Oaxaqueño - - - - - - - - - - - - - V

b: Don Benito Juárez es Mexicano - - - - - - - - - - - - - - V

$a \rightarrow b$: Si Don Benito Juárez es Oaxaqueño entonces es Mexicano V

Gráficamente en diagramas de Venn-Euler:



$A \subset B$

Los elementos que hacen verdadera a la implicación están contenidos en un subconjunto de un conjunto equivalente o mayor.

En una implicación pueden identificarse una primera parte como- antecedente o hipótesis y una segunda como consecuente o tesis, el valor de verdad de la implicación dependerá del que poseen - el antecedente y el consecuente, y lo explicamos enseguida con- un ejemplo:

a: te portas bien.

b: te compro un helado.

$a \rightarrow b$: Si te portas bien, te compro un helado.

Suponiendo que esto es lo que le dice la mamá de Juan a su hijo:

"Si Juan se portó bien, esto es, si "a" es verdadera, Juan tiene derecho al helado, luego si su mamá le compra el helado (b es verdadera) habrá cumplido su promesa, y por lo tanto, la proposición "$a \rightarrow b$" es verdadera cuando "a" y "b" son verdaderas".

a	b	$a \rightarrow b$
V	V	V

"Por otro lado, si su mamá no le compra el helado (b es falsa) entonces habrá faltado a su promesa y habrá mentido, o sea "$a \rightarrow b$" es falsa si "a" es verdadera pero "b" es falsa".

a	b	$a \rightarrow b$
V	F	F

"Analicemos ahora qué pasa si Juan se portó mal (a es falsa). Si su mamá no le compra el helado (b es falsa), Juan no tiene que reclamar nada puesto que ella cumplió con su palabra y en este caso "$a \rightarrow b$" es verdadera".

a	b	$a \rightarrow b$
F	F	V

"Por último si su mamá sí le compra el helado (b es verdade- ra) Juan quedará muy contento y lo mas importante su mamá no faltó a su palabra puesto que ella dijo lo que haría en caso que Juan se portara bien, pero no dijo lo que haría si Juan se portaba mal, esto es, si "a" es falsa y "b" es verdadera, entonces la proposición "a→b" es verdadera" (40).

a	b	a → b
F	V	V

Del ejemplo anterior se tiene que la implicación será falsa sólo cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso y en todos los demás posibles casos será verdadera.

La equivalencia une a dos proposiciones simples mediante el conectivo "sí y solo sí". Ejemplos

a: Hoy es domingo - V

b: Mañana es martes - - - - - - - - - - - - - - - - - - - F

a ⟷ b: Hoy es domingo si y sólo si mañana es martes - - - - F

c: el sol es una estrella - - - - - - - - - - - - - - - V

d: el sol es un cuerpo celeste luminoso - - - - - - - - V

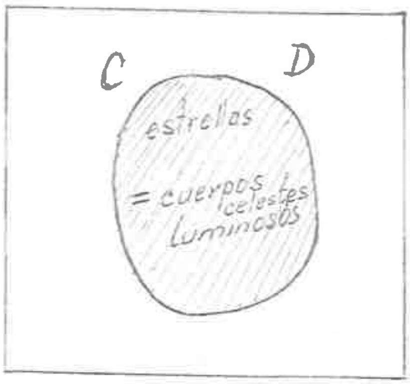
c ⟷ d: el sol es una estrella si y sólo si es un cuerpo celeste luminoso - - - - - - - - - - - - - - - - - - V

e: La ballena respira por branquias - - - - - - - - - - F

f: La ballena es un pez - - - - - - - - - - - - - - - - F

e ⟷ f: La ballena respira por branquias si y sólo si es un pez - V

Graficando el segundo ejemplo en diagramas de Venn-Euler se - encuentra que:



$C = D$

Los elementos que hacen verdadera a la equivalencia, pertenecen al mismo conjunto. Y como puede verse en- los ejemplos anteriores la equiva-- lencia será verdadera cuando ambas- proposiciones sean verdaderas o ambas falsas.

Otra forma de ver a la equivalencia es como una doble implicación ($\longleftrightarrow$).

En las proposiciones categóricas, al sujeto siempre se califica con los cuantificadores "todos", que es universal, y "algunos" que es particular, estos sujetos van unidos al predicado por medio de conectivos que expresan si está "incluído en" -- (afirmativa) o "excluído de" (negativa). De la combinación de los dos cuantificadores con los diferentes calidades de conectivos, se conforman los cuatro tipos de proposiciones categóricas:

Fig. 6 Proposiciones categóricas (*)

Diferencias de cantidad			Diferencias de calidad	
			(Afirmativas)	(Negativa)
			incluído en P	excluído en P
	(Universal)	Todos los S	Todo S está incluido en P Forma A	Todo S está excluido en P Forma E
	(Particular)	Algunos S	Algunos S están incluidos en P Forma I	Algunos S están excluidos en P Forma O

Para comprender mejor este cuadro, es conveniente conocer los siguientes sinónimos:

> "todos equivale a este, cada, lo contrario de ninguno; algunos equivale a pocos, muchos; está incluido en equivale a es, está en, está contenido en; está excluido de equivale a no es, no está en, no está contenido en. Por tanto, todas las formas de proposiciones se presentan con muchas variantes, como, por ejemplo, (A) "cada S es P", (E) "ningún S es P" (I) "pocos S están contenidos en P" y (O) "muchos S no son P" (41). Sin embargo, todas las formas que podamos encontrar pueden reducirse a las de la tabla anterior.

* Fuente: Jozef Cohen. Procesos del pensamiento. Temas de psicología. Volumen 8. 3a. reimpresión, México, Ed. Trillas 1980, pág. 24.

Algunos ejemplos son:

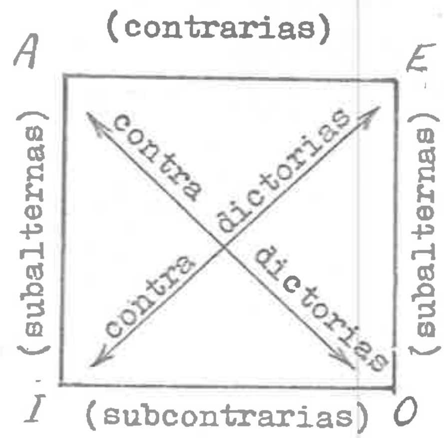
"Todos los romanos eran patriotas. (Forma A)
Cuando llueve, el agua corre. (Forma A)
El que duda está perdido. (Forma A)
Ningún pájaro nada. (Forma E)
Los reptiles no son mamíferos. (Forma E)
El nunca llega tarde. (Forma E)
Algunas alumnas son inocentes. (Forma I)
Me gustaba antes de que se hiciera rico. (Forma I)
Existen ballenas que comen hombres. (Forma I)
Algunos rusos no son comunistas. (Forma O)
Hay cosas que no son gratis. (Forma O)
No todo lo que brilla es oro. (Forma O)" (42).

Para encontrar el valor de verdad de una proposición categórica con respecto a las demás, existe una tabla de verdad que puede tomarse como modelo y en la que (V) es verdadera, (F) es falsa y (D) es desconocida:

formas de proposición

A	E	I	O
V	F	V	F
F	V	F	V
D	F	V	D
F	D	D	V
F	D	D	V
D	F	V	D
F	V	F	V
V	F	V	F

Para conocer la relación existente entre estas cuatro formas de proposiciones categóricas podemos observar el siguiente cuadro:



B. Lógica: su contenido en el programa escolar y su presentación en los libros de texto gratuitos.

Cuarto grado:

Para el cuarto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a lógica se expresa en el objetivo general: "Utilizar adecuadamente los conectivos "y","o" y los cuantificadores "todos", "alguno" o "ninguno" al interpretar algunas proposiciones".

Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

- La determinación de la falsedad y veracidad de proposiciones dadas.
- La determinación de conjuntos a proposiciones que utilicen -

los conectivos "y", "o".

Los ejercicios que aparecen de lógica en el texto son: la presentación de proposiciones con gráficas ilustradas para que el alumno califique su proposición y registre el resultado, para la determinación de conjuntos de preposiciones con los conectivos "y", "o", presentan gráficas de barcas o bien de ropa, las primeras combinadas y las segundas para combinar y registrar anotando o dibujando los resultados.

Quinto grado:

Para el quinto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a lógica se expresa en el objetivo general: "Utilizar adecuadamente los conectivos "y", "o" y los cuantificadores "todos", "algunos" o "ninguno" al interpretar alguna proposición".
Y a través de los objetivos específicos se desglosa el siguiente contenido:

- La observación de semejanzas y diferencias entre figuras geométricas y no geométricas para posteriormente utilizar esto con cuantificadores.
- La interpretación de proposiciones en que emplean cuantificadores (esto a través de la observación de características en figuras).

- La definición de conjuntos mediante proposiciones que emplean los conectivos "y","o".
- La interpretación de proposiciones negativas para formar conjuntos.

De lógica, los ejercicios que se presentan en el texto consisten en clasificaciones partiendo de un conjunto de figuras que se le presentan, en donde debe elegir las proposiciones con cuantificadores que expresen lo verdadero.

Sexto grado:

Para el sexto grado de la escuela primaria el contenido que corresponde a lógica es el siguiente:

- La determinación de la falsedad o veracidad de algunas negaciones.
- La calificación de implicaciones como falsas o verdaderas.
- La interpretación de proposiciones con cuantificadores.

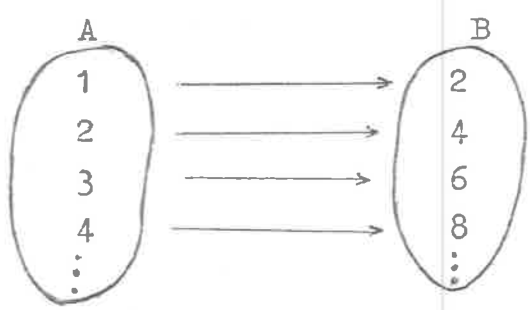
En la primera parte aparecen los siguientes ejercicios: en base a una ilustración evaluar con F y V proposiciones con cuantificadores, relacionar el antecedente con el consecuente para formar una implicación, en otro ejercicio deberá calificar las implicaciones y también calificar a la que se obtiene al invertir las proposiciones simples que la integran.

XI. LA VARIACION FUNCIONAL EN LA EDUCACION PRIMARIA

A. Conceptos básicos de la variación funcional

La variación funcional es el resultado de aplicar el concepto de función a las proporciones. Primeramente se estudiará a la función como aquella relación que se establece entre dos conjuntos en el que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un sólo elemento del segundo conjunto.

Un ejemplo de función es: el doble de un número. Tomando sólo el conjunto de los números naturales quedaría



La relación que se establece entre esos dos conjuntos es funcional porque el doble de 1 es solamente el 2, el doble de 2 es el 4 solamente, de 3 es el 6 y así sucesivamente, esto es, a cada elemento del conjunto A le corresponde un sólo elemento del conjunto B.

En una función intervienen dos tipos de variables: la dependiente y la independiente. Las variables independientes son las que toman su valor del primer conjunto (Conjunto A) que se llama dominio, mientras que las variables dependientes toman -

su valor del segundo conjunto (Conjunto B) que recibe el nombre de contradominio.

Cuando el concepto de función se aplica a las proporciones es cuando surge la variación funcional propiamente dicha.

Antes de estudiar a la variación funcional es necesario comprender lo que es una razón y lo que es una proporción.

Para comparar cantidades existen dos métodos:

> Uno consiste en "encontrar la diferencia entre las dos cantidades. Por ejemplo, si una persona tiene 22 años y otra tiene 33, la diferencia en sus edades es 11 años. Por lo tanto se puede decir que la primera persona es 11 años más joven que la segunda, que la segunda es 11 años mayor que la primera.
>
> Un segundo método para comparar estas dos mismas edades, sería el de decir que una persona tiene 2/3 la edad de la otra. Cuando se comparan cantidades por este método, se está usando el concepto de razón. En efecto, estamos diciendo que por cada dos años de vida de la persona más joven, la persona mayor ha tenido tres años de vida. Podríamos decir que la razón en años de la edad de la primera persona a la edad de la segunda persona es 2 a 3.
>
> Usando símbolos se puede escribir la razón de sus edades como $\frac{2}{3}$, 2:3, 2/3, o 2÷3.
>
> La razón de dos cantidades semejantes se define como el cociente de la primera cantidad dividida entre la segunda. Hay que notar que este cociente se expresa usualmente en sus términos más simples. Así la razón de 20 a 50 se escribe como 2:5 no como 20:50". (43)

Una "proporción es solamente una proposición en la cual una razón es igual a otra razón. Así, 1/2 = 3/6 ó 1:2 = 3:6 es una proporción". (44)

"En la proporción a:b = c:d (que se lee "a" es a "b" como -- "c" es a "d"), las letras a, b, c, d, se llaman primer término, segundo término, tercer término y cuarto término, respectivamente. Los términos "a" y "d" se llaman los extremos (porque son los más apartados) y "b" y "c" se llaman los medios (porque son los términos intermedios) (...)

Una de las propiedades básicas de una proporción, es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Esta idea se puede expresar algebraicamente como sigue:

Teorema:

Si b y d $\neq$ 0 y si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces a.d = b.c.".(45)

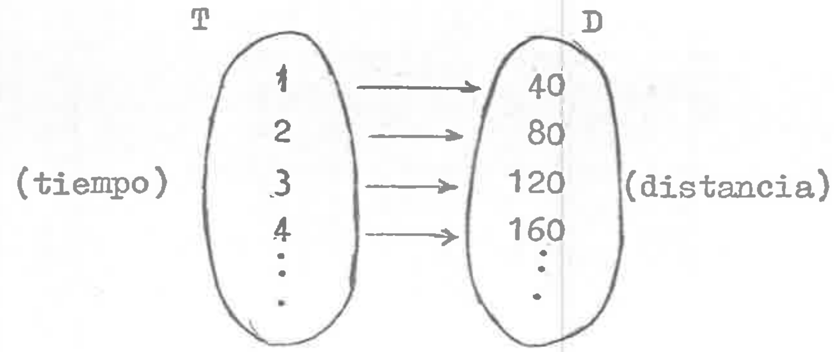
Un ejemplo de la vida cotidiana en que se aplica el concepto de proporción interpretado como una función, esto es, variación funcional es:

"Supongamos que estamos viajando a velocidad constante de 40 Km por hora. Entonces es fácil advertir que existe una correspondencia entre el espacio o distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrer dicha distancia".(46)

Tenemos que viajando a una velocidad constante de 40 Km/h

en 1 hora se recorrerían 40 Km.
en 2 horas se recorrerían 80 Km.
en 3 horas se recorrerían 120 Km.
en 4 horas se recorrerían 160 Km.
en 5 horas se recorrerían 200 Km.
etc.

Interpretando esto como una función tendríamos que a cada tiempo le corresponde una sola distancia.

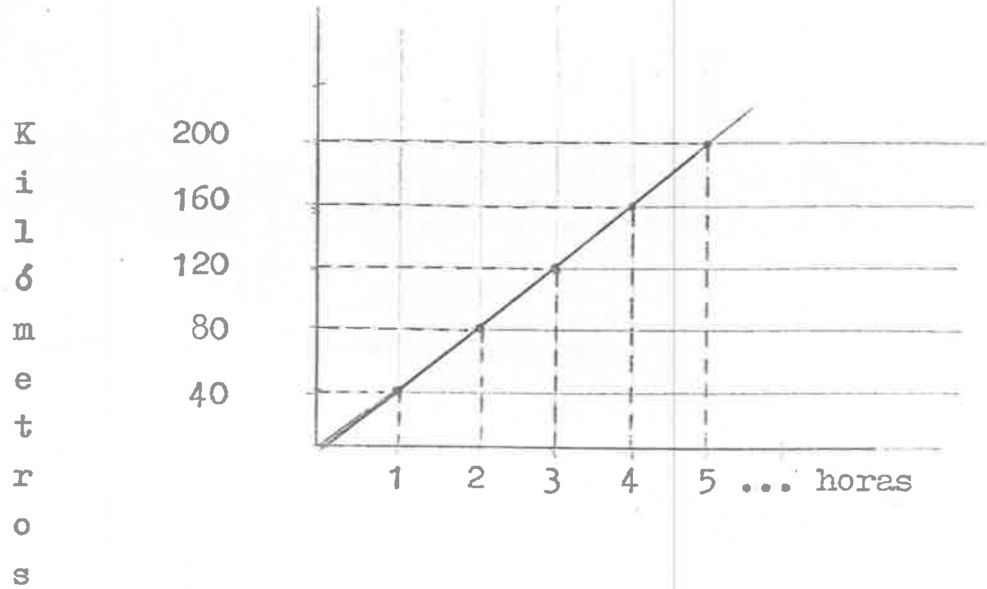


Interpretando esto como proporción tendríamos que todas las razones que podemos establecer son equivalentes.

$$\frac{1}{40} = \frac{2}{80} = \frac{3}{120} = \frac{4}{160} = \frac{5}{200} = \ldots.$$

En este ejemplo es fácil comprender que la distancia está en -- función del tiempo, esto es que la distancia recorrida dependerá del tiempo que se viaje, es en esta idea donde se aplica la- variación funcional; además podemos apreciar que a más tiempo - se recorrerá mayor distancia, a este tipo de variación se le -- llama variación directamente proporcional.

La variación directamente proporcional puede graficarse en un - plano cartesiano, la variable independiente, en este caso el -- tiempo se registra en el eje horizontal, mientras que la variable dependiente que es la distancia se registran en el eje vertical y se grafica en el plano cada pareja de tiempo y espacio- con un punto, veamos:



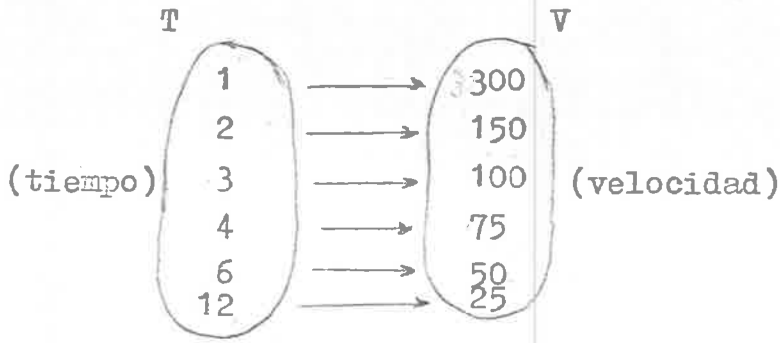
Vamos a encontrar que todas las gráficas de funciones directamente proporcionales van a ser líneas rectas.

Otro tipo de variación es la inversamente proporcional que se aplica en el siguiente ejemplo. "Supongamos que se desea recorrer una distancia de 300 Km que existe entre dos ciudades - A y B; ¿cuál debe ser la velocidad promedio si se desea hacer el recorrido en 1, 2, 3, 4, 6 y 12 horas?". (47)

Tenemos que para recorrer 300 Km de distancia:

en 1 hora la velocidad sería de 300 Km/h.
en 2 horas la velocidad sería de 150 Km/h.
en 3 horas la velocidad sería de 100 Km/h.
en 4 horas la velocidad sería de 75 Km/h.
en 6 horas la velocidad sería de 50 Km/h.
y en 12 horas la velocidad sería de 25 Km/h.

Interpretando esto como una función tendríamos que a cada tiempo le corresponde una sóla distancia.

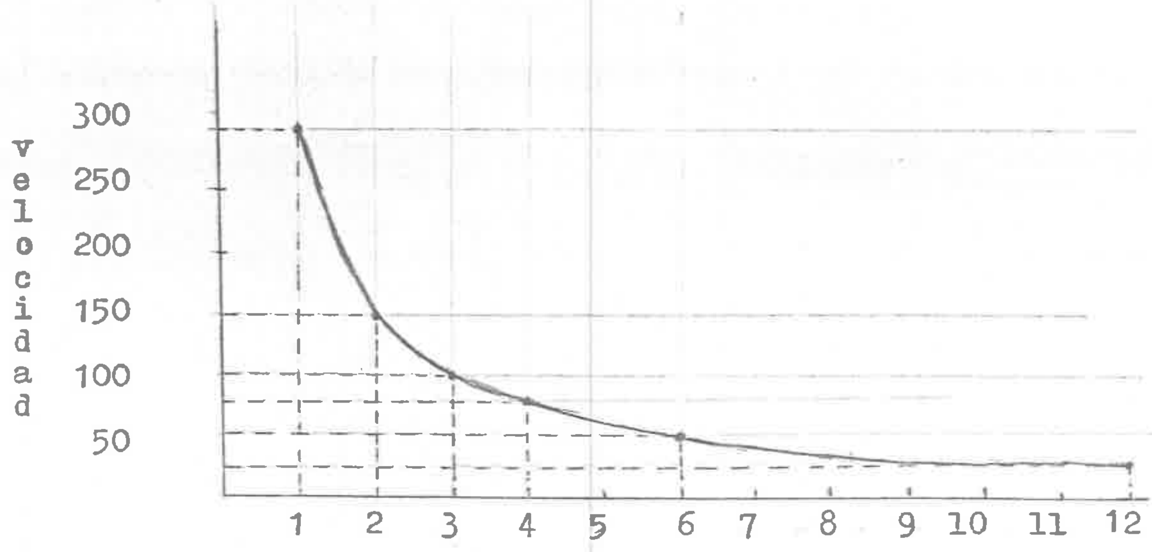


Intérpretando esto como proporción tendríamos que todas las razones son equivalentes.

$$300 \times 1 = 2 \times 150 = 3 \times 100 = 4 \times 75 = 6 \times 50 = 12 \times 25$$

En este ejemplo es fácil comprender que la velocidad está en — función del tiempo que se desee tardar esto es, a menos tiempo- mayor velocidad o lo que es lo mismo a más tiempo menor velocidad, a esta variación en la que a más de una variable se tiene- menos de la otra es a la que se denomina variación inversamente proporcional.

La variación inversamente proporcional puede graficarse en un - plano cartesiano, la variable independiente que en este caso es el tiempo se registra en el eje horizontal mientras que la va-- riable dependiente, la velocidad se grafica en el eje vertical- y se grafica en el plano cada pareja de tiempo y velocidad, vamos.



Al graficar variaciones inversamente proporcionales vamos a encontrar que su gráfica siempre es una curva.

B. Variación funcional: su contenido en el programa escolar y - su presentación en los libros de texto gratuitos

Sexto grado:

El contenido que corresponde a variación funcional sólo aparece en sexto grado y en dos objetivos específicos:

- Resolver problemas que impliquen repartos proporcionales.
- Resolver problemas de variación funcional directa e inversa.

Los ejercicios que corresponden a variación funcional en el libro de texto son: un ejercicio en que se analiza el costo de -- las tortillas (por kilos) varía de más a más, o sea que a más - kilos mayor costo y que el precio está en función del costo por kilo; en otro ejercicio debe calcular la cantidad de kilómetros recorridos en función de los litros de gasolina utilizados; se presenta la realización de un experimento, el de colocar canicas en una bolsita suspendida de una liga o elástico para llegar a concluir que a mayor peso menor alargamiento, llegando a graficar en un plano la relación entre peso y alargamiento.

XII. ANALISIS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A. Análisis

Ya se ha analizado el programa de matemáticas en cada uno de los aspectos y a través de los seis grados de educación primaria. Podemos ver que contiene realmente los elementos básicos del desarrollo de las matemáticas en su primer período, dentro de la clasificación que Aleskandrov y otros presentan ya que contiene la enseñanza de los números y las operaciones fundamentales; incluye en geometría el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; los problemas tratan de resolverse a través de modelos, como se tenían en tiempos de los Babilonios y Egipcios. Además si se observa como surge el concepto de número en la historia se tiene que fue a través de muchas comparaciones. En la teoría psicogenética de Piaget se afirma que debe de superarse la seriación para poder introducir al niño a la noción de número y en el programa de primer año se incluyen muchos ejercicios de clasificación y seriación antes de introducir los números. Aquí puede verse claramente que existe un buen comienzo ya que muchas de las causas de la dificultad en el cálculo como ya se mencionó suelen deberse a fallas en el dominio del sistema de numeración.

También puede observarse que las operaciones fundamentales se enseñan en forma muy semejante a como estas surgieron en la historia.

De acuerdo con la teoría psicogenética, el niño entre los 6 y- los 12 años se encuentra en el período operacional. De los - - 5 1/2 a los 7 u 8 años, predominan las regulaciones representativas articuladas y predomina el pensamiento intuitivo. De los 8 a los 11 o 12 años, corresponde al período de la estructuración propiamente operatoria en el que predomina el pensamiento operatorio. Esto es, que puede razonar analógicamente sobre -- hechos o fenómenos que observa y experimenta, obteniendo experiencias que le permitirán aprender al vivir otras experien--- cias similares y aportar además lo que él ha captado de las anteriores, de esta manera se estará enriqueciendo y madurando.

Lo anterior es tomando en cuenta en el método de enseñanza que se propone al maestro en el programa, ya que ahí sugieren un - aprendizaje "multisensorial", esto es, que el alumno deberá -- adquirir los conocimientos a través de todos sus sentidos y no sólo el del oído como anteriormente sucedía.

B. Conclusiones

Las conclusiones a las que puedo llegar después de haber realizado este trabajo son las siguientes:

1.- El programa del Plan de Estudios de la educación primaria- está basado en la teoría psicogenética, esta teoría evolutiva concuerda con el enfoque dialéctico de la matemática.

2.- En la escuela primaria se enseñan los contenidos de la matemática como ciencia teórica, siendo éste el primer período del desarrollo histórico.

3.- La educación primaria transcurre entre los 6 y 12 años del niño edad que corresponde al período operatorio en la clasificación del desarrollo de la inteligencia según Piaget.

4.- El razonamiento básico para el aprendizaje de la matemática, deberá ser intuitivo primeramente y analógico posteriormente para lograr un aprendizaje eficiente.

5.- El modelo de enseñanza propuesto reúne todos los requisitos de la teoría psicogenética y contiene la forma en que se estudió a la matemática en el primer período.

6.- La noción de número se adquiere una vez que se domina la clasificación y seriación, y por agrupación de unidades en decenas, de decenas en centenas, de centenas en millares y de millares en millones; se estudia la relación con la recta numérica y las propiedades de ser infinito y denso, los libros en su material recortable, proporciona material concreto a manipular y al igual que sus ilustraciones muy objetivas lo ponen en contacto con experiencias que refuerzan mucho la base decimal y el principio posicional de nuestro sistema de numeración.

7.- En el transcurso de la escuela primaria se estudian las — cuatro operaciones fundamentales y las propiedades de las- operaciones conmutativa, asociativa y distributiva, todo - esto bien relacionado con objetos concretos. Estas opera-- ciones se aplican en problemas razonados muy relacionados- con la realidad, resolviéndose éstos mediante la formación de modelos.

8.- De fracciones y sus operaciones se estudia como la necesidad de precisar más exactamente medidas y porciones, se estudia su orden, equivalencias y operaciones fundamentales- que se aplican en problemas que se resolverán mediante modelos; estudiándose también su forma en notación decimal - y se llega a establecer proporciones.

9.- De la geometría en la escuela primaria, vemos que sí se - estudian todos los elementos básicos que se estudiaron en- el período de la matemática teórica, también vemos que la- noción de perímetro y área se introducen en segundo año, - aproximadamente a los siete u ocho años de edad, mientras- que la de volumen se inicia en cuarto grado, aproximadamente a los 9 años, edad indicada en la teoría de Piaget. Se- estudian los perímetros, áreas y volúmenes de todas las figuras excepto la esfera. Las unidades del sistema métrico- decimal se inician desde la necesidad de establecer una -- unidad de medida.

10.- En estadística y probabilidad es en donde puede apreciarse que se incluye y basa en el plano cartesiano, el cual surgió en el segundo período del de la matemática elemental, ya que ésta rama de la matemática no presentó desarrollo en el primer período; el alumno llega a elaborar y a interpretar gráficas, así como a distinguir los fenómenos deterministas de los azarosos, y podrá calcular la probabilidad de eventos.

11.- La enseñanza de la lógica comienza en el cuarto grado pues de acuerdo con Piaget antes de los 7 u 8 años el alumno no puede dominar las implicaciones lógicas.

12.- De variación funcional sólo se dan nociones en el sexto grado ya que el desarrollo de esta ciencia sucedió hasta en el tercer período de la historia y además de que este aspecto requiere de mayor capacidad de razonamiento.

13.- Los libros de texto fomentan la comprensión a base de observación objetiva y de mucha experimentación y manipulación concreta de material.

14.- Los objetivos generales de la matemática en la escuela primaria si conciben a ésta como lenguaje, lenguaje que surge del mundo real y vuelve a él para explicarlo.

C. Recomendaciones

Como producto de este trabajo creo que podemos manifestar como necesarias las siguientes recomendaciones:

1.- Como podemos apreciar, el programa de educación básica está fundamentado en la teoría psicogenética de Jean Piaget, y desafortunadamente los maestros conocemos poco sobre esta teoría, de aquí surge la necesidad de que los maestros la conozcamos a fondo para desempeñar conciensudamente nuestra labor.

2.- Los libros de texto favorecen mucho la comprensión, pero también deberían de contener suficientes ejercicios de fijación del aprendizaje, para que este alcance buen nivel de ejecución y no sólo en comprensión de los procesos como muchas de las veces sucede.

3.- Es importante hacer la conciencia de que todos los contenidos que se proponen son importantes, ya que serán básicos para aprendizajes posteriores, y que no debe eliminarse ninguno por el hecho de que no nos parezca importante,

4.- Otro punto que también contribuiría a facilitar y a mejorar la enseñanza de la matemática sería la inclusión en algún lugar del programa, de ejemplos de operaciones o problemas graduados en dificultad para que el maestro conside re en ese orden los modelos y con mayor facilidad proponga similares a los alumnos.

5.- Un tema que pienso que debería tratarse más a fondo es el de los sistemas de pesas y medidas: métrico decimal e inglés, con sus conversiones y equivalencias, el que más se maneja así es el métrico decimal de longitudes más, sin embargo, considero que son básicas también las equivalencias y conversiones del sistema métrico decimal de área, volumen y capacidad y peso, así como nociones del sistema inglés, ya que en algunos oficios como la carpintería y la soldadura se utilizan mucho, además de que somos un país limítrofe con Estados Unidos.

6.- En cuanto al método que se propone para la enseñanza de la matemática, busca también el establecimiento de modelos que de acuerdo con Legrand, el alumno de 8 a 10 años puede ya obtener y comprender; sólo faltaría agregar una explicación entre la realidad y la abstracción, aclarando que la obtención de la experiencia sea lo más concreta posible para tratar de evitar que los obstáculos de que se hablaban egocentrismo y sincretismo enturbien el proceso de aprendizaje.

CITAS BIBLIOGRAFICAS

1) Diccionario enciclopédico Salvat. (T. 8), México, Ed. Salvat. Editores, pág. 2158.

2) A.D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev, et.al. La matemática: su contenido, método y significado 5a. ed., - España, Ed. Alianza Universidad, 1981. págs. 79-80.

3) Ibid. pág. 24

4) Ibid.-pág. 26

5) Ibid. pág. 27

6) Ibid pág. 75

7) Ibid. pág. 87

8) UPN. Pedagogía bases psicológicas. México, SEP, 1982, pág. - 323.

9) Idem.

10) Jozef Cohen. Procesos del pensamiento. Temas de psicología. Volúmen 8. 3a. reimpresión, México, Ed. Trillas, 1980. pág. 62.

11) Joseph Leif y Jean Delay. Psicología y educación del niño. Argentina, Ed. Kapelusz, 1968. pág. 367.

12) Jozef Cohen. Op cit. pág. 66

13) Joseph Leif y Jean Delay. Op. cit. pág. 369

14) Joseph Leif y Jean Delay. Op. cit. pags. 369-370

15) Ibid. pág. 370

16) Paul Foulquié. Diccionario de pedagogía. México, Ed. Alhambra mexicana, 1981. pág. 385.

17) Joseph Leif y Jean Delay. Op. cit. pág. 334.

18) Ibid. pág. 344

19) Idem

20) Joseph Leif y Jean Delay. Op. cit. pág. 345.

21) Ibid. pág. 333

22) Ibid. pág. 341

23) Idem.

24) SEP. Libro del maestro. Primer grado. México, 1980. pág. 21.

25) Idem.

26) SEP. Op. cit. pág. 24

27) Diccionarios Rioduero. Matemática, España, Ed. Rioduero, -- 1975, pág. 191.

28) Estudios de matemáticas. V. IX, Estados Unidos de América. 1966. pág. 24

29) Carlos Bosch, Carlos Hernandez y Elena de Oteiza. Matemática I. 2da. reimpresión, México, Ed. Publicaciones Cultural, S. A., 1980. pág. 135.

30) Diccionarios Rioduero. Op. cit. pág. 97

31) Ibid. pág. 105

32) Carlos Bosch, Carlos Hernández y Elena de Oteiza. Op. cit. pág. 396.

33) Ibid. pág. 388

34) Ibid. pág. 401

35) Gran enciclopedia temática de la educación. V. IV, México, Ed. Ediciones técnico educativas, 1986. pág. 229.

36) Ibid. pág. 205

37) Idem.

38) Misael A. Aragón, René Benitez y Santiago Valiente. Diccionario de matemáticas para educación primaria. Colección del estudiante moderno. México, Ed. Ediplesa, 1979, pág. 52.

39) Jozef Cohen. Op. cit. pág. 22

40) Carlos Bosch. Op. cit. pág. 37-38

41) Idem

42) Jozef Cohen. Op. cit. pág. 24

43) Miguel A. Garza, José L. Guerra y Pablo Rivera. Algebra II. 2o. Semestre. Preparatoria Núm. 15. pág. 333-334.

44) Ibid. pág. 336.

45) Ibid. pág. 337-338

46) Ibid. pág. 341

47) Ibid. pág. 348

BIBLIOGRAFIA

ALEKSANDROV, A.D.; KOLMOGOROV, A.N; LAURENTIEV, M. A. et al. La matemática: su contenido, método y significado. 5a. - ed., España, Ed. Alianza Universidad, 1981.

ARAGON, Misael A.; BENITEZ, Rene y VALIENTE, Santiago. Diccionario de matemáticas para educación primaria. Colección del estudiante moderno. México, Ed. EDIPLESA, 1979.

BOLL, Marcel. Historia de las matemáticas. 8a. ed., México, Ed. Diana, 1981.

BOSCH, Carlos; HERNANDEZ, Carlos y DE OTEIZA, Elena. Matemáticas 1, 2da. reimpresión, México, Ed. Publicaciones Culturales, S. A., 1980.

COHEN, Jozef. Procesos del pensamiento. V. 8, Temas de psicología. 3a. reimpresión, México, Ed. Trillas, 1980.

CUEVAS, Silvia. Didáctica de la aritmética y la geometría. V. - 13, Nuevas biblioteca pedagógica. c 1969 5a. ed., México, Ed. Ediciones Oasis, S. A., 1972.

Diccionario enciclopédico Salvat. (T. 8), México, Ed. Salvat -- Editores.

Diccionarios Rioduero. Matemática. Versión y adaptación por - - Walter Stróbl.

Estudios de Matemáticas. V. IX, Estados Unidos de América.

FOULQUIE, Paul. Diccionario de pedagogía. México, Ed. Alhambra Mexicana, 1981.

GARZA, Miguel A.; GUERRA, Josel y RIVERA, Pablo. Algebra II. -- 2o. semestre. México. Preparatoria Núm. 15.

Gran enciclopedia temática de la educación. V. III, México, Ed. Ediciones técnico educacionales, 1986.

LEIF, Joseph y DELAY, Jean. Psicología y educación del niño. Argentina, Ed. Kapelusz, 1968.

MAIER, Henry. Tres estudios sobre el desarrollo del niño: Erikson, Piaget y Sim. Argentina, Ed. Talleres gráficos.- Didal, S. A., 1979.

MAILLO, Adolfo. Enciclopedia de didáctica aplicada. Tomo III, - España, Ed. Labor, 1974.

MOISE, Edwin E. y DOWNS, Floyd L. *Geometría moderna*. tr. Mariano García. Estados Unidos de América, Ed. Fondo Educativo Interamericano, 1970.

PETERS, Max. y SCHAFF, William L. *Algebra: un enfoque moderno*. tr. Roberto Treviño González. 1a. ed., México, Ed. Reverté Mexicana, 1972.

PIAGET, Jean. *Seis estudios de psicología*. 7a. ed., México, Ed. Seis Barra, 1974.

SEP. *Libro para el maestro. Primer grado*, México, 1980.

---. *Libro para el maestro. Segundo grado*, México, 1981

---. *Libro para el maestro. Tercer grado*. México, 1982.

---. *Libro para el maestro. Cuarto grado*. México, 1982.

---. *Libro para el maestro. Quinto grado*. México, 1982.

---. *Libro para el maestro. Sexto grado*. México, 1982.

---. *Mi libro recortable. Primer año. Parte* I. México, 1984.

---. *Mi libro recortable. Primer año*. Parte II. México, 1980

---. *Mi libro de primero. Parte I*. México, 1980

---. *Mi libro de primero. Parte II*. México, 1981.

---. *Mi libro de segundo. Parte I*. México, 1982.

---. *Mi libro de segundo. Parte II*. México, 1981.

---. *Matemáticas. Tercer grado*. México, 1982.

---. *Matemáticas. Cuarto grado*. México, 1984.

---. *Matemáticas. Quinto grado*. México, 1972.

---. *Matemáticas. Sexto grado*. México, 1974.

UPN. *Pedagogía: bases psicológicas*. México, SEP, 1982.