UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD 094 D. F. CENTRO

SITUACIONES DE REPARTO: UNA INTRODUCCION A LAS FRACCIONES

MARTHA DAVILA VEGA

Asesores de Tesis: David Block Sevilla
Juan Q. Castrejón T.

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADA EN EDUCACION PRIMARIA

MEXICO, D. F. 1991

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

ANEXO 4

DICTAMEN DEL TRABAJO
PARA TITULACIÓN.

México, D. F. , a , 16 de abril de 1991

C. PROFR.(A) MARTHA DAVILA VEGA
P R E S E N T E :

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo, intitulado:

"SITUACIONES DE REPARTO: UNA INTRODUCCION A LAS FRACCIONES"

, opción TESIS

a propuesta del asesor C. Profr.(a) DAVID BLOCK SEVILLA

, manifiesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentar su examen profesional.

A T E N T A M E N T E

PROFR. MIGUEL ANGEL IBARRA HERNANDEZ
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION
DE LA UNIDAD UPN

S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD
D. F. CENTRO

ANEXO 4

DICTAMEN DEL TRABAJO
PARA TITULACIÓN.

México, D. F. , a , 16 de abril de 1991

C. PROFR.(A) MARTHA DAVILA VEGA
P R E S E N T E :

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo, intitulado:

"SITUACIONES DE REPARTO: UNA INTRODUCCION A LAS FRACCIONES"

, opción TESIS

a propuesta del asesor C. Profr.(a) JUAN QUINTIL CASTREJON TELLEZ
, manifiesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentar su examen profesional.

A T E N T A M E N T E

PROFR. MIGUEL ANGEL IBARRA HERNANDEZ
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION
DE LA UNIDAD UPN.

UNIVERSIDAD ... NACIONAL

A los maestros, que día a
día se enfrentan a la difícil
tarea de la enseñanza.

A mis hijas Martha y Patricia,
motivo e impulso de mi vida,
fuente de mis alegrías y
refugio de mis tristezas.

AGRADECIMIENTOS

A las autoridades de la escuela República Popular China que permitieron la realización de esta investigación.

A las maestras de los grupos en los que se llevó a cabo este trabajo, quienes me apoyaron y me auxiliaron en todos los aspectos.

Al personal docente en general que en todo momento se ha mostrado dispuesto a colaborar en ésta y en otras investigaciones.

A David Block, que como amigo y asesor me apoyó y dirigió este trabajo desde el inicio hasta su culminación sin escatimar esfuerzos.

A Irma Fuenlabrada , quien revisó y comentó este trabajo y por el apoyo brindado durante todo el tiempo que hemos trabajado juntas.

A Ruth Valencia, quien levantó los registros de observación de las sesiones de trabajo y por su colaboración en la transcripción de las observaciones.

A Myriam Nemirovski y a Olimpia Figueras por sus palabras de aliento y por la confianza depositada en mí.

A Patricia Jardón e Iván Balbuena, quienes me apoyaron en la composición tipográfica de este trabajo.

A Enrique Dávila, quien facilitó el equipo de cómputo en el que se realizó la parte tipográfica de este trabajo.

INDICE

Introducción

El objeto de estudio de este trabajo es fundamentalmente encontrar respuesta a dos preguntas: ¿Es pertinente introducir las fracciones en el primer ciclo de educación básica?; si la respuesta es afirmativa, ¿qué situaciones didácticas propician una mejor aproximación al concepto de fracción?

En el intento de encontrar respuesta a estas preguntas, fue necesario hacer una revisión de los errores más frecuentes que cometen los alumnos al trabajar con fracciones como producto de la enseñanza y la descripción de algunas de las interpretaciones de este concepto que se manejan en el nivel básico. Esta revisión se describe en el Capítulo I en el que de hecho se justifica la oportunidad de este trabajo de investigación.

En el Capítulo II se hace una revisión de algunas de las investigaciones realizadas sobre el proceso de adquisición de la noción de fracción, en el contexto de reparto desde el punto de vista psicogenético.

Otro tipo de investigaciones que se revisaron fueron las de orden didáctico, sobre la enseñanza de la noción de fracción, que se describen en el Capítulo III. Los Capítulos II y III, describen el marco teórico del trabajo de tesis.

En el Capítulo IV, se señalan explícitamente los objetivos y la metodología de la investigación, así como la descripción de la fase experimental y los resultados encontrados. Finalmente en el Capítulo V se encuentran las conclusiones de la investigación y las posibles líneas de continuación del trabajo.

I. Las fracciones: un tema difícil de enseñar y difícil de aprender

Mi experiencia como maestra. A través de mi experiencia como profesora de educación primaria y de las inquietudes de mis compañeros por buscar formas más efectivas para enseñar algunos contenidos matemáticos, incluidos en el currículum de educación básica, me di cuenta que el tema de las fracciones nos preocupa porque no tenemos elementos suficientes para lograr en los alumnos un buen aprendizaje de este contenido.

Muchas veces, los maestros hemos vivido la experiencia de ver que a pesar de las explicaciones que damos a nuestros alumnos para enseñar las fracciones, de las demostraciones que hacemos para que las entiendan y de la resolución conjunta de ejercicios que implican el uso de las fracciones, nuestros alumnos no aprenden, no entienden o tienen dudas que no les permiten resolver correctamente ni la operatoria, ni los problemas.

Personalmente, cuando trabajaba con mis alumnos, había momentos en los que sentía que la forma en la que enseñaba las fracciones no era la adecuada, ya que en muchas ocasiones cuando consideraba que una noción estaba lo suficientemente trabajada, los alumnos seguían cometiendo demasiados errores.

En muchas ocasiones no encontraba como sacarlos del error cuando por ejemplo, me contestaban que $\frac{3}{4}$ era mayor que $\frac{2}{3}$ porque solo comparaban el valor de los numeradores. También, cuando les pedía que representaran una determinada fracción con una figura, observaba que algunos alumnos no lograban hacerlo porque si bien dividían la figura en el número de partes correcto, estas no eran iguales.

En ocasiones, en los ejercicios del libro de texto, las figuras ya estaban divididas por ejemplo, en ocho partes iguales y se trataba de representar dentro de esa figura una fracción como $\frac{3}{4}$. En casos como éste también me encontraba con que algunos alumnos para representar la fracción solicitada sólo sombreaban tres pedazos sin tomar en cuenta si estos pedazos eran o no cuartos.

En cuanto a la operatoria, tenía dificultad para que los alumnos mecanizaran la forma en que se debía operar con las fracciones. Por ejemplo, en la suma un error frecuente era que los alumnos sumaran los numeradores y los denominadores por separado.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{4+3}=\frac{3}{7}$$

En fin, mi preocupación y la de algunos compañeros maestros consistía en tratar de encontrar una solución, una manera de lograr que nuestros alumnos entendieran mejor la mecánica para trabajar las fracciones y pudieran resolver correctamente problemas que las implicaran.

Pero el problema era aún más grave. Cuando algunos de mis alumnos me cuestionaban, por ejemplo, sobre la razón por la que el resultado de una multiplicación de fracciones había salido más chico que las fracciones que se habían multiplicado, no encontraba una justificación y recurría nuevamente a la explicación de la regla de la multiplicación de las fracciones sin que esto, desde luego, aclarara la duda. Esta falta de conocimiento sobre la noción de las fracciones es un problema compartido por muchos docentes.

Mostraré a continuación un fragmento de una observación de clase de 4°. año, en la cual una de las alumnas plantea una pregunta, misma que la maestra no puede contestar por no tener los elementos suficientes para hacerlo[1]. Veamos lo que sucede en la clase:

La maestra intenta enseñar a sus alumnos cómo obtener el número de enteros que hay en una fracción; para ello trabaja con la fracción $\frac{20}{12}$ y tiene dibujados en el pizarrón dos rectángulos. Mirna, la niña en cuestión, pregunta a la maestra:

Mirna: (Interrumpe a la maestra) "Ahí en el doce, ¿lo divide en doce, luego lo divide en veinte o cómo?".

Mta.: "¿Cómo?"

Mirna: "Es que Nina (su compañera) y yo no le entendemos ahí, usted nos dijo que el doce lo divide entre veinte y le saca un entero y después le pone otro entero".

[1] Este fragmento es parte de la ponencia "La formación de profesores de primaria en el área de matemáticas: aportes para una revisión", realizada por Avila, A. Méndez, R. presentada en el Simposio Nacional sobre procesos de la lengua escrita y la matemática. Organizado por la Universidad Pedagógica Nacional del Estado de Aguascalientes (junio de 1990).

Mta.: "¿Aquí? (señala el pizarrón)".

Mirna: "No, en el veinte, es que el doce divide en doce partes ¿no? el entero. Entonces, luego para ocupar veinte ¿cómo le hace?"

Mta.: "Por eso, mira ¿para que tú puedas obtener aquí un entero, dices (señala la división que está en el pizarrón)".

Mirna: "¡No!".

Mta.: "¿Sí?"

Mirna: "¡No!, le estoy diciendo que no, que yo..."

Mta.: (Interrumpe a Mirna) "A ver, ¿cuál es tu pregunta?"

Mirna.: "O sea que usted dice...que el denominador lo divide en doce (al entero) y luego entonces, ¿cómo están veinte ahí?...¿cómo le va a hacer?..."

Mta.: "Bueno, mira, únicamente voy a hacer esto para poder yo obtener mi entero (hace la división oralmente), tengo veinte ¿sí?...Alicia (pregunta a otra alumna), un entero ¿en cuántas partes lo voy a dividir?"

Coro: "¡En doce!".

Mta.: (Anota la división 20 ÷ 12). "En doce. ¿Cuántas veces me cabe el doce en el veinte?"

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{)20} \\ 8 \end{array}$$

Ns.: "Una"

Mta.: "Una ¿y cuántas me sobran?"

Ns.: "Ocho".

Mta.: "Ocho. Esta es parte de otro entero".

Mirna: "Entonces, ¿cómo le hace para sacar los veinte?"

Mta.: "Porque hay una regla que lo está considerando. O sea, mira esto (señala la división), el de arriba te está diciendo que es un entero, pero te sobra, es un entero y me sobran ocho partes... ¿Sí?... ¡Fíjate, es una regla, se puede decir que es una regla porque si el numerador es mayor que el de abajo, siempre puedes obtener enteros... Simplemente haces una división... ¿ya le entendiste?"

Mirna: (En silencio hace un gesto de duda).

Mta.: "Fíjate bien, mientras el numerador sea mayor que el denominador podemos obtener enteros y si te faltan fracciones, partes del numerador, para que puedas completarlas. Es lo que te queda en la división. ¿Sí?

Mirna: (Con gesto de molestia)."¡Ya me volvió a enredar!".

Mta.: "¿Ya te volví a enredar? (se nota nerviosa)"

Mirna: (Molesta) "¡Mejor después nos lo explica!".

Como se puede ver, la maestra maneja la mecánica correspondiente para obtener el número de enteros de una fracción, pero carece de elementos para aclarar la duda de Mirna. La única manera que tiene para "salir" del aprieto es recurrir a la mecánica que conoce.

Otra experiencia, ahora con un grupo de maestros estudiantes de Licenciatura, nos muestra nuevamente el desconocimiento de la noción de fracción:[2]

El maestro coordinador del grupo, solicita a sus alumnos, resuelvan como ellos crean conveniente el siguiente problema: Repartir 2 pasteles entre 3 niños. Mientras los maestros resuelven el problema, el coordinador observa qué es lo que hacen: Una de las maestras del grupo resuelve el problema haciendo la siguiente división:

$$\begin{array}{r} .66 \\ 3\overline{)2\,0} \\ 2\,0 \\ 2 \end{array}$$

Cuando la maestra termina de resolver la división, el coordinador le pregunta señalando el .66 obtenido en la división "¿Y ésto, qué significa?" La maestra contesta inmediatamente "un sexto más un sexto".

En los ejemplos citados, se ve claramente como los maestros frente a determinados problemas con las fracciones, recurrimos a ciertos mecanismos establecidos y que de alguna manera conocemos como son: el algoritmo de la multiplicación; la división del numerador entre el denominador para obtener enteros, o bien esta misma división para encontrar la representación decimal de las fracciones. Sin embargo, a pesar de que

[2] Ejemplo tomado de la experiencia del Profr. Balbuena, H. en el curso: "Matemáticas I" en un grupo de la Universidad Pedagógica Nacional.

conocemos los mecanismos, la manera en que los usamos no es la adecuada para dar respuesta correcta a las preguntas planteadas.

Hasta este momento podemos ver que uno de los problemas en la enseñanza de las fracciones es precisamente la pobreza conceptual que los maestros tenemos sobre la noción de fracción.

Mi experiencia en proyectos de investigación. Después de varios años de trabajar con grupo, tuve la oportunidad de ingresar al Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV-IPN* como maestra comisionada de la S.E.P. Me incorporé al equipo del Laboratorio de Psicomatemática. En este grupo los investigadores realizan proyectos de investigación didáctica y de formación de maestros sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.

Dentro de esta institución tuve acceso a reportes y artículos de investigación sobre el tema, a través de los cuales pude comprobar que la enseñanza de las fracciones preocupa no sólo a los maestros sino también a los investigadores. Que muchos de los errores que había percibido dentro de mi práctica docente y otros más, habían sido detectados por los investigadores y eran objeto de estudio desde años atrás, a partir de diferentes aspectos: psicogenético, didáctico y matemático. Estos estudios dan cuenta de la complejidad de la noción de fracción.

Algunos investigadores como J. Piaget[3] , D. S. Parrat[4], G. Noelthing[5] y otros han realizado investigaciones desde la Psicología Genética en los que han estudiado el desarrollo de los aspectos que subyacen a la noción de fracción como la partición y la proporcionalidad.

Estos estudios han puesto de manifiesto, la existencia de operaciones cognitivas y de nociones que pasan por un largo proceso de desarrollo y que son necesarias para la comprensión de las fracciones. (En el capítulo II se verá con más detalle este aspecto).

Otros grupos de investigación como el equipo de didáctica de la matemática del IREM** de Bourdeaux en Francia y el equipo del Laboratorio de Psicomatemática del DIE-CINVESTAV-IPN en México entre otros, han dedicado algunos de sus trabajos de investigación al estudio de situaciones didácticas con las que se pretende mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción. (En el capítulo III se verá con más detalle este aspecto).

---

[3] Piaget, J., et al.(1960). "Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones" en: The Childs's conception of geometry Routledge and Reagan Paul. London. pp 365-380. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.
[4] Parrat, D. S. "De la fracción sobre el objeto a la fracción relacioal. (resumen mimeo).
[5] Noelthing, G. (1980). "The development of proportional reasoning and the ratio concept" Part I Differentiations of stages. in: Educational studies in mathematics No. 1, D. Reidel Publishing Co., Dordretch, Holland and Boston, USA. (pp 217-253)
* Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
** Institut de Recherches sur l'Enseignement des matemátiques.

En algunas de las investigaciones realizadas por G. Brousseau[6], O. Figueras[7], L. Streefland[8], A. Avila y E. Mancera[9] se han estudiado errores frecuentes sobre el concepto de fracción en alumnos de primaria y secundaria. A continuación presentaré una muestra de los errores más frecuentes, algunos tomados de los trabajos de dichos autores y otros tomados de mi propia experiencia.

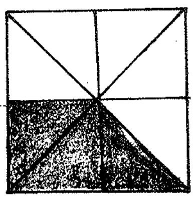
Cuando se les solicita a los alumnos que realicen comparaciones entre fracciones, un error frecuente es el siguiente:

a) $\frac{3}{8} > \frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{2} < \frac{7}{20}$

En ambos casos, se observa que los alumnos ven a la fracción $\frac{a}{b}$ como dos números independientes uno del otro y los comparan a través de las propiedades de los números naturales. En el caso a) $\frac{3}{8}$ y $\frac{3}{5}$, comparan los numeradores; el 3 con el 3 y los denominadores; el 8 con el 5, como los numeradores son iguales, centran su atención en los denominadores, como el 8 es mayor que el 5, concluyen que $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{3}{5}$. En el caso b) $\frac{1}{2}$ y $\frac{7}{20}$, comparan de la misma manera resultando $\frac{1}{2}$ menor que $\frac{7}{20}$.

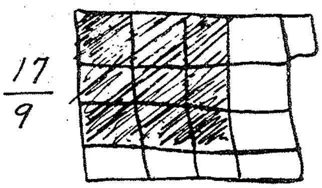
Frente a problemas en los que el alumno debe iluminar una fracción dentro de un entero ya dividido; un error frecuente es que los alumnos sólo se fijan en el número de partes (numerador), que deben iluminar sin que para ellos tenga significado el denominador. Es decir que los ven como dos números sin ninguna relación entre sí. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ lo representan así:

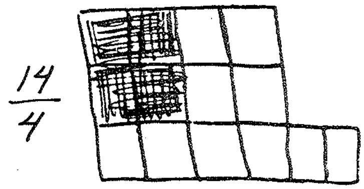
Ilumina $\frac{3}{4}$ de la siguiente figura



6 Brousseau, G. (1976). "Les obstacles épistemologiques et les problèmes mathématiques" en: Publicado en las memorias del CIEAEM, Francia (pp 153-168). Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.
7 Figueras, O. (1988). "Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales". Tesis de doctorado. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México.
8 Streefland, L. (1978). "Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction" en: Educational Studies in Mathematics. (p 51).
9 Avila, A., E. Mancera. (1889)."La fracción: una expresión difícil de interpretar" en: Pedagogía, Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. Educación Matemática. Vol. 6 No 17 (enero-marzo) pp 21-26, México.

Otro error frecuente que suelen cometer los alumnos al representar una fracción es la inversión de sus términos, cuando el numerador es mayor que el denominador. Por ejemplo, cuando se les pide representen gráficamente las fracciones $\frac{17}{9}$ y $\frac{14}{4}$ suelen hacer lo siguiente:





Con las mismas fracciones, algunos alumnos no inviertieron los términos de las fracciones pero explicaron que no se podía representar la fracciones solicitada por lo siguiente:

- "No se puede contestar, porque 17 no cabe en 9 y $\frac{14}{4}$ lo mismo" (Janet 12 años, 1° de secundaria, escuela privada).

- "No se puede resolver porque el numerador es menor que el denominador" (Lilian, 12 años, 1° de secundaria, escuela prinada).

- "No se puede porque es muy chica la cantidad del denominador" (Jazmin, 12 años, 1° secundaria, escuela privada).

Como se puede observar, en los argumentos de los niños y en las representaciones gráficas de $\frac{17}{9}$ y $\frac{14}{4}$ mostradas anteriormente, subyace una conceptualización generada por la enseñanza de las fracciones a través del fraccionamiento de la unidad, es decir, estos alumnos conciben a la fracción como *un entero* que se divide en *X* número de partes y de las cuales se toman siempre un número menor al número en que se dividió la unidad. Tienen dificultad para comprender que el todo repartido puede estar conformado por más de una unidad, por lo que para representar graficamente estas fracciones buscan la manera de interpretar la fracción, convirtiendo $\frac{17}{9}$ a $\frac{9}{17}$, es decir, un entero que se divide en 17 partes de las cuales se toman 9. Hacen lo mismo con $\frac{14}{4}$ convirtiéndolo en $\frac{4}{14}$

En la operatoria de fracciones se encuentran frecuentemente errores en los que se observa que los alumnos trasladan a los números racionales las mismas reglas aplicables en los números naturales, por ejemplo, la suma de fracciones la resuelven sumando por separado numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{3+3}=\frac{3}{6} \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{3+5}=\frac{3}{8}$$

Otra consecuencia de trasladar las propiedades de los naturales a las fracciones, es la de esperar ciertas magnitudes en los resultados. Por ejemplo, al multiplicar dos naturales como ocho por nueve, el producto siempre es mayor que los factores; esto con las fracciones no sucede siempre. El producto de $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ es a veces menor que los factores, por ejemplo, $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Esta concepción se manifiesta con más claridad cuando los alumnos deben elegir el resultado de un producto de fracciones:

Pon una cruz en el inciso con la respuesta correcta.

$$5 \times \frac{2}{3}$$

a) $3\frac{1}{3}$ b) $6\frac{1}{3}$ c) $\frac{6}{3}$

Si se tiene la idea de que los productos deben ser mayores que los factores se puede explicar la selección de la respuesta $6\frac{1}{3}$, ya que ésta es mayor que 5 enteros y que $\frac{2}{3}$.

En cuanto a la división, con los números naturales, siempre que se dividen estos el resultado que se obtiene es menor o igual; al trasladar esta regla a las fracciones, se encuentran respuestas del tipo:

Pon una cruz en el inciso con la respuesta correcta

$$5 \div \frac{2}{3}$$

a) $2\frac{1}{3}$ b) $7\frac{1}{2}$ c) $3\frac{1}{2}$

La respuesta elegida $2\frac{1}{3}$ pue de deberse al hecho de trasladar las reglas de la división de los números naturales a las fracciones, $2\frac{1}{3}$ es menor que $5\frac{1}{3}$.

Este mismo problema se presenta cuando los alumnos trabajan con los decimales. Cuando se les pide que comparen dos números, es frecuente encontrar respuestas como la siguiente:

$$0.25 > 0.5$$

Esta respuesta sería correcta si los números a comparar fueran naturales, pero con los decimales es evidente que los alumnos que responden de esta manera, aún no han entendido su significación.

Al operar con decimales, algunos alumnos también cometen el error que vimos anteriormente en la operatoria de las fracciones: pensar que al multiplicar con decimales el producto debe ser mayor que los factores. Veámos unos ejemplos:

$$.7 \times .2 = 1.4$$

$$8 \div 0.2 = .40$$

G. Brousseau[10], distingue dos tipos de obstáculos a los que se enfrentan los alumnos ante un conocimiento nuevo, los obstáculos epistemológicos, que provienen de aplicar a un conocimiento nuevo, nociones y reglas adquiridas en un conocimiento anterior; y los obstáculos didácticos que provienen de un problema de enseñanza. Algunos de los ejemplos anteriores, pueden ser causados por los obstáculos epistemológicos o didácticos que Brousseau distingue.

Por ejemplo, errores que consisten en afirmar sistemáticamente que el producto es mayor que cualquiera de los factores, o que el cociente es menor que el divisor, o bien errores en los que se considera que un decimal es mayor entre más cifras tiene, necesariamente pueden provenir de la aplicación de reglas que funcionan en los naturales, a las fracciones, es decir, pueden ser manifestaciones de obstáculos epistemológicos.

Errores que provienen, de no considerar que el todo puede estar formado por más de una unidad, pueden ser expresiones de una enseñanza particular, en la que las fracciones se ilustran casi siempre con una sola unidad. Estos errores son manifestaciones de obstáculos didácticos.

La tendencia de destacar la similitud entre los números naturales y las fracciones, se puede identificar como un obstáculo didáctico, por ejemplo: es común que algunos maestros, con el objeto de lograr que sus alumnos no sumen las fracciones con distinto denominador como lo hacen, les digan que así como al sumar enteros "no se pueden sumar manzanas con peras sino que se deben sumar manzanas con manzanas", al sumar fracciones se deben sumar por ejemplo cuartos con cuartos, medios con medios.

Esta explicación, refuerza la tendencia natural de los alumnos de trasladar los conocimientos adquiridos para los naturales a las fracciones (obstáculos epistemológicos), provocando errores como los que se han visto anteriormente.

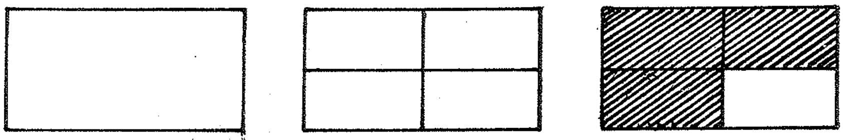
Las fracciones: una noción matemática compleja: En cuanto a la investigación matemática, enfocada al estudio de la complejidad de la noción de fracción, tenemos entre otros a Kieren, E. T.[11] quien con el objeto de encontrar el origen de las dificultades

[10] Brousseau, G. (1976). Op cit.

[11] Kieren, T. E. (1976). "On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers" in: Number and measurement papers from research workshop. R. Lesh (Ed.) Papers from a research corksohp ERIC/SMEAC.

de enseñanza-aprendizaje y de identificar las situaciones en las que la fracción está inmersa, ha realizado una serie de estudios, en los cuales ha demostrado que a la fracción se le puede interpretar de diversas formas y que está implicada en contenidos curriculares de la educación básica que en general se enseñan de manera aislada. A continuación trataré de comentar brevemente algunas de las interpretaciones de la fracción demostradas por Kieren.

En primer lugar haré referencia a la interpretación generada a partir del fraccionamiento de la unidad, que es la más conocida y la que comunmente se usa en la enseñanza de las fracciones. Por ejemplo:



$= \frac{3}{4}$

La fracción $\frac{3}{4}$ se genera a partir de una unidad, que se divide en cuatro partes iguales y de las cuales se toman tres. La fracción $\frac{3}{4}$ representa entonces las partes tomadas de la unidad.

Otra interpretación de la fracción es la de decimal finito o periódico. Cuando se enseñan los números decimales, se dice que estos se pueden representar como fracción y que las fracciones también se pueden representar en forma decimal. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = .75$$

Generalmente para enseñar a los alumnos la conversión de fracciones a decimales, se recurre al procedimiento: dividir el numerador entre el denominador para obtener el número decimal equivalente a la fracción. Estas conversiones se realizan de manera mecánica y no se hace un trabajo en el cual los alumnos puedan entender la relación existente entre $\frac{3}{4}$ y .75, es decir: si $\frac{3}{4}$ se genera de una unidad que se dividió en 4 y de la cual se toman 3, ¿qué relación tiene esta fracción con .75? ¿por qué son iguales $\frac{3}{4}$ y .75?

Entender la equivalencia entre estas dos representaciones de una misma cantidad es un proceso complejo y más complejo aún entender por qué, si se ha visto a la fracción como una unidad que se divide en *X* número de partes y de la cual se toman *Y* número de pedazos, ahora para convertir a decimales se considera al numerador y al denominador como unidades que se dividen entre sí para obtener un número que representa la misma cantidad.

Algo similar sucede cuando se enseña a representar en forma de fracción los números decimales. Por ejemplo:

$$.75 = \frac{75}{100}$$

En este caso, la explicación se limita a mostrar la forma en que se representa el decimal en forma de fracción. Si el número a representar es .7, se dice que este es igual a $\frac{7}{10}$ porque el siete ocupa el lugar de los décimos; si el número es .75, se dice que este es egual a $\frac{75}{100}$ porque el setenta y cinco ocupa hasta el lugar de los centésimos y así sucesivamente. Hasta aquí la explicación es correcta, pero qué sucede cuando los alumnos mecanizan esta explicación y la generalizan. Veamos un ejemplo:

$$\frac{1}{3} = .33 = \frac{33}{100}$$

Como podemos ver, la generalización, lleva a cometer errores como el anterior, generados por la falta de un trabajo que lleve a los alumnos a diferenciar entre las fracciones decimales y las que no lo son.

Por ejemplo $\frac{3}{4}$ es una fracción cuyo denominador es divisor de una potencia de 10 (4 divide a 100), por lo tanto existe un número (25) que multiplicado por 4 da 100; así $\frac{3}{4}$ puede representarse de la siguiente manera:

$$\frac{3 \xrightarrow{\times 25} 75}{4 \xrightarrow{\times 25} 100} \qquad \therefore \qquad \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$$

Por lo tanto $\frac{3}{4}$, es equivalente a una fracción decimal. En cambio $\frac{1}{3}$ no lo es porque 3 no es divisor de ninguna potencia de diez. Esta fracción, $\frac{1}{3}$, solo puede ser aproximada con fracciones decimales: 0.33 ó 0.333 se aproximan a $\frac{1}{3}$.

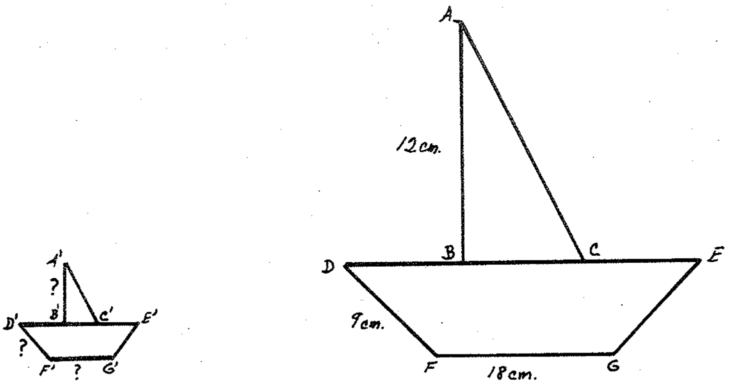
Una tercera interpretación de la fracción es la que le asigna el carácter de razón. Veamos un ejemplo:

"La razón de la población mexicana desempleada con respecto al total es de 25 a 100, es decir, $\frac{25}{100}$ de los ciudadanos son desempleados".

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ de la población son desempleados.}$$

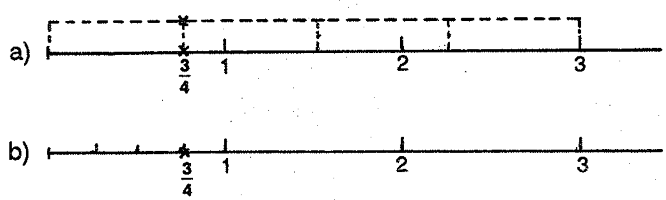
Como se puede ver, la fracción bajo esta interpretación asume uno de sus significados más complejos: relaciona multiplicativamente a dos números y expresa así una comparación entre ellos. Esta interpretación se encuentra en situaciones de proporcionalidad, es decir, en situaciones en las que se plantea la igualdad de dos o más razones.

Una interpretación más es la de operador multiplicativo. Esta interpretación está presente igual que en el caso de la razón en situaciones de proporcionalidad. Veamos un ejemplo:



Sabemos que la escala del dibujo grande con respecto al pequeño es de 1 a 3, es decir $\frac{1}{3}$. Conocemos las medidas del grande y queremos calcular las del pequeño, para ello aplicamos el operador multiplicativo $\times \frac{1}{3}$. Por lo tanto, si el segmento AB mide 12 cm, para obtener la longitud del segmento A'B' multiplicamos $12 \times \frac{1}{3}$; si el segmento FG mide 18 cm, para obtener la longitud del segmento F'G' multiplicamos $18 \times \frac{1}{3}$; si el segmento DF mide 9 cm, para obtener la longitud del segmento D'F'multiplicamos $9 \times \frac{1}{3}$.

Una quinta interpretación de la fracción es la de cociente de dos enteros; por ejemplo, la fracción $\frac{3}{4}$ en vez de significar un entero que se divide en 4 y del cual se toman 3 partes; en esta interpretación significa 3 enteros divididos entre 4. Observemos el siguiente dibujo:



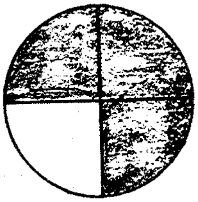
En el dibujo anterior $\frac{3}{4}$ está representado bajo dos de las interpretaciones:

a) Cociente de dos enteros y

b) Fraccionamiento de la unidad

Se puede observar que en ambas interpretaciones, la porción correspondiente a $\frac{3}{4}$ son exactamente iguales, sin embargo, el significado en cada una de las interpretaciones las hace contextualmente diferentes.

Como podemos ver, la noción de la fracción es muy compleja, ya que se le puede interpretar de diversas maneras y está inmersa en una gran gama de contenidos curriculares. Sin embargo, la tendencia de introducir esta noción sólo bajo la interpretación del fraccionamiento de la unidad, y el destacar las similitudes entre los números naturales y las fracciones, no permite, ver las diferencias cualitativas importantes que las fracciones tienen con respecto a los naturales. Por ejemplo, un aspecto escencial a la noción de fracción es el hecho de que ésta expresa una relación entre dos magnitudes o entre una parte y el todo.



$\frac{3}{4}$

En la figura anterior, la parte sombreada es $\frac{3}{4}$ de la figura completa, "no sólo porque se toman 3 pedazos, sino porque la figura está dividida en 4 partes iguales, más aún, puede decirse que la relación entre la parte sombreada y la figura completa es 3 a 4. Tres veces la figura completa es igual a cuatro veces la parte sombreada.

Considero que, una de las razones por la que se tiene dificultad en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, es por un lado, la misma complejidad de la noción, y por otro, la tendencia de reducir la noción de fracción a una de sus interpretaciones y dentro de ésta, destacar la similitud entre los números naturales y las fracciones (obstáculos didácticos). En aras de facilitar el aprendizaje, se propicia que se interprete a la fracción como dos números naturales sin ninguna relación, reforzando por consiguiente la aplicación de las propiedades de los naturales a las fracciones.

II. El reparto y su relación con las fracciones

Como se ha visto en el primer capítulo, las fracciones tienen una diversidad de interpretaciones en las que subyacen conceptos muy complejos. Frente a este problema, surge la pregunta: ¿Qué experiencias iniciales dentro del aula, pueden ayudar a los niños en la construcción de los aspectos fundamentales de la noción de fracción?

Hay varios factores que nos indican que el reparto ofrece posibilidades interesantes en la enseñanza escolar. Por un lado, no es difícil ver que en las experiencias cotidianas de los niños las situaciones de reparto están presentes.

El reparto es una actividad cotidiana que los niños realizan en sus juegos; reparten dulces, canicas, etc., y utilizan términos como: "me tocó la mitad", "dame la mitad", "mita y mita".

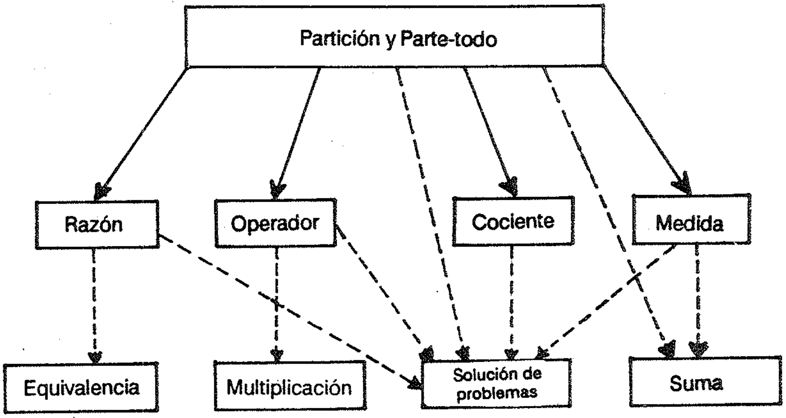
Es muy común que se le pida a un niño que reparta dulces entre sus hermanos y éstos, tienen bastante cuidado de que a todos les toque lo mismo, aunque no falta en algunos casos que se cumpla el viejo dicho que dice: "El que parte y recomparte se queda con la mayor parte".

Esta apreciación empírica, nos hace pensar que los niños, fuera de la escuela, han adquirido cierta experiencia frente a estas situaciones y que los problemas de reparto son significativos para ellos.

Por otro lado, en otro nivel, varios investigadores[12] han destacado importantes vínculos entre la familia de problemas que se derivan del reparto y las diversas

[12] Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. (1983). "Rational number concepts" in: Acquisition of mathematics concepts and processes. R. Lesh & M. Landau (Eds.), New York: Academic Press (pp 92-126).

interpretaciones de la noción de fracción. Beher, Lesh, y Post plantean el siguiente esquema, acerca de las relaciones del reparto sobre las distintas interpretaciones de las fracciones.



En el artículo en el que plantean este esquema, no se explicita ni ejemplifica la relación entre la partición y las distintas interpretaciones de las fracciones. Dicha relación es clara en el caso de la interpretación como 'medida'. El típico pastel partido en 4, del que se toman 3 partes, la ejemplifica. En $\frac{3}{4}$ de pastel, tres cuartos proviene de una partición y ***mide*** una cantidad de pastel. En trabajos didácticos como los de Streefland[13], Block[14], Balbuena[15], pueden verse ejemplos de la relación que tiene la partición con la interpretación de cociente, de operador y de razón.

Por otro lado Kieren[16] , caracteriza a la partición como "un tipo de clasificación o asignación basada en el criterio de "igualdad" o "suficiente ", y destaca su relación con el reparto, afirmando que: "Esta clasificación particular (la partición) tiene una génesis social, la acción de repartir".

En cuanto al lenguaje que utilizan los niños para referirse a la parte que les tocó, o a la partición que van a hacer dice[17]:

"Un tercer aspecto de la partición se relaciona con el lenguaje que describe el acto y los resultados de la partición. Esto puede ejemplificarse con el

---

[13] Streefland, L. (1984). "How to teach fractions so as to be useful". Producido por: Researchgroup on Mathematics Education of the State University of Utrecht. The Netherlands. First Edition.

[14] Block, D. (1987) "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Educación, del Departamento de Investigaciones Educativas. DIE-CINVESTAV-IPN.

[15] Balbuena, H. (1988) "Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa de la Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

[16] Kieren, T. (1983). "La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales". En: Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Edit. by M. Zweng., T. Green,. J. Kilpatrick.,... EE UU. pp. 506-508. Traducido por Figueras, O. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, 1990.

[17] Kieren, T. (1983) Op cit.

lenguaje activo de los niños pequeños al separar una cantidad en dos partes y decir 'aquí está la mitad...' es interesante notar, que dicho lenguaje de los pequeños contiene precursores de ambos aspectos del número racional: el cuantitativo y el relacional"..

Si bien el reparto está inmerso en numerosas situaciones cotidianas y es claro que los niños se inician en esta actividad fuera de la escuela, asignando un nombre y un significado a los resultados de sus repartos; hay que tener en cuenta que esto no significa que dichos repartos tengan desde su inicio las características de la exhaustividad y de la equitatividad que implican a las fracciones. Por ejemplo: cuando dos niños se reparten un chocolate y a uno le toca un pedazo más grande que al otro, dicen que lo partieron a la mitad.

En un estudio realizado con niños de dos a ocho años sobre la noción de fracción, Piaget e Inhelder[19], han puesto de manifiesto que la adquisición de esta noción pasa por un largo proceso. En la evolución de la capacidad de los niños para hacer los repartos, están en juego tanto el proceso mental de maduración como las variadas experiencias de los niños con situaciones de reparto.

Trataré de resumir brevemente el proceso que siguen los niños, señalado por estos autores frente a problemas de reparto de un pastel entre dos o más niños:

- Hasta los 4 ó 4.5 años, los niños tienen mucha dificultad para partir en mitades.
  - Se niegan a partir el todo; los objetos enteros no los pueden concebir como divisibles.
- Logran partir el entero pero lo hacen de la siguiente manera:
  - Cortan pedacitos, los reparten y continúan cortando pedacitos indefinidamente.
  - Cortan dos pedazos, los reparten y se olvidan del resto del pastel.
- Intentan utilizar el todo en su reparto, pero obtienen más partes de las que necesitan; si quieren dos pedazos hacen dos cortes y obtienen tres pedazos. Reparten a cada niño un pedazo y dejan un residuo sin pensar en la posibilidad de repartirlo.
- Logran partir en dos pedazos sin que les sobre nada.
- El proceso de la partición en cuatro es muy semejante al de la partición en dos. Logran hacerlo, cuando aceptan que pueden partir un pedazo producto de una partición anterior.

---

[18] Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1966) "Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones" (Escrito con la colaboración de M. Muller). En: The childs conception of geometry. Routledge and Reagan Paul. London. Repinted 1966, 1970. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

- Partir en tres es un proceso más lento, inician partiendo por mitades hasta obtener cuatro pedazos y el proceso sigue así:

  - Reparten tres pedazos uno a cada niño y dejan un pedazo de residuo.
  - Logran partir el residuo en tres.
  - Logran partir el entero en tres partes desde el primer intento.

- El proceso continúa con la partición en quintos, en donde la dificultad aumenta por el número de cortes y por la imposibilidad de apoyarse en la dicotomía. Si cortan por mitad les faltan tres pedazos; si cortan en cuartos les falta uno. Logran hacerlo por ensayo y error.

- Para partir en sextos se sigue el mismo proceso que con los quintos.

Según las investigaciones de Piaget e Inhelder, los niños logran hacer particiones hasta sextos entre los 7 y 8 años aproximadamente. Sin embargo, el avance que van logrando, no necesariamente es paralelo con el avance de la noción relación parte-todo.

Es muy frecuente, que los niños logren hacer repartos entre dos, tres, cuatro y piensen que hay más pastel en el entero sin partir, que en el entero partido o a la inversa, hay más pastel en el pastel partido que en el entero. En la investigación que realizó Lerner[19], sobre el proceso evolutivo de la noción de fracción en niños de 8 a 11 años aproximadamente se ponen de manifiesto estos hechos.

Como se puede ver, la acción de repartir es compleja e importante para el aprendizaje de la noción de fracción. Cabe preguntarse, si existe una manera de apoyar en la escuela los procesos que llevan a la partición, o si éstos se realizan con total independencia de la enseñanza escolar.

Al respecto, Kieren[20], sugiere la existencia de dos herramientas o mecanismos mentales para construir el conocimiento del número racional: los mecanismos constructivos y los de desarrollo.

Ubica como mecanismos relacionados con el desarrollo, la conservación del número, del todo, la identidad, la reversibilidad; es decir, los que no se pueden enseñar y dependen de la madurez mental.

Identifica como mecanismos constructivos, aquéllos que se pueden apoyar a través de la enseñanza, aquéllos que están relacionados con la experiencia, como por ejemplo, entre otros, la partición y la equivalencia.

---

[19] Lerner, D. "La construcción de la noción de fracción. Implicaciones pedagógicas". República de Venezuela. Ministerio de Educación. Fundación Me-Val. Caracas.
[20] Kieren, T. (1983) Op cit.

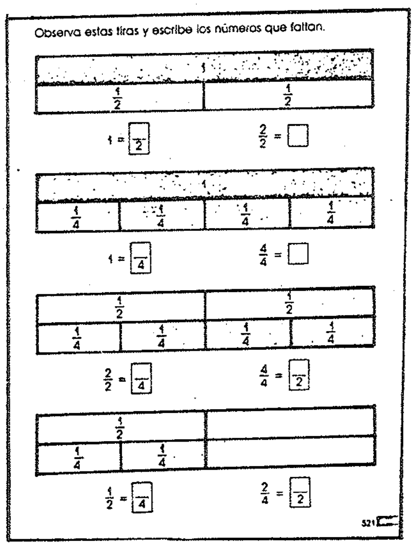
En cuanto a los mecanismos de partición, Kieren[21] plantea que son mecanismos constructivos que tienen una importante relación con las diversas interpretaciones de la fracción que él mismo plantea, desarrolladas en el capítulo anterior de este trabajo.

Hace notar que la acción de repartir está relacionada también con fenómenos discretos o continuos, es decir, que existen situaciones de partición con objetos como canicas, dulces, etcétera, o con superficies, líquidos, etcétera, de los cuales se pueden generar infinidad de situaciones de partición como el reparto.

Concluye sobre la partición lo siguiente[22]:

> "*Los conceptos del número racional son de naturaleza tanto extensiva, como compleja. La partición y la equivalencia se consideran dos mecanismos constructivos que permiten a un niño o a un joven construir tales ideas complejas. Debido a que, estos mecanismos pueden ser enseñados, se les debe dar más atención en la currícula de números racionales*".

Esta postura de Kieren, sustenta las propuestas de enseñanza que pretenden introducir la noción de fracción a partir de la partición de unidades. Sin embargo, muchas veces estas propuestas pasan por alto el complejo proceso a lo largo del cual los niños logran hacer repartos equitativos y exhaustivos. Por ejemplo, en los Libros de Texto, aparecen ejercicios como los siguientes[24]:



[21] Kieren, T. (1983) Ibidem.
[22] Kieren, T. (1983) Ibidem.
[23] "Mi libro de segundo. Parte 2". Libros de Texto Gratuito de educación primaria de la Secretaría de Educación Pública. 4a. ed. pp 521.

En ejercicios como estos, se presentan las figuras ya fraccionadas, con la representación simbólica de la fracción y su nombre; situaciones en las que se obvia el proceso a los niños para adquirir esta noción ya que éstos no participan en las particiones presentadas; los resultados que se obtienen probablemente no los entienden consecuentemente, los nombres y sus representaciones no tienen significado para ellos.

Se procede como si fuera suficiente con que el alumno vea las fracciones e ilumine varias veces unidades previamente divididas para que aprendan esta noción.

Considero que el reparto es una actividad que se debe propiciar dentro del salón de clases, con la condición de que sea el niño quien actúe en la partición, que tenga la oportunidad de probar, equivocarse, volver a probar, de reflexionar en sus resultados. Debe dejar de ser un espectador de los repartos realizados por el maestro frente al grupo y debe dejar de ser un ejecutor de instrucciones tales como: "ilumina", "escribe", "observa", etcétera.

En virtud de que el reparto es una actividad familiar para los niños y de la importancia que tiene en la adquisición de los aspectos fundamentales de la noción de fracción, me propuse explorar esta actividad a través del diseño y experimentación de situaciones didácticas relacionadas con el reparto.

III. La didáctica constructivista: una alternativa de enseñanza

En este capítulo abordaremos la problemática de la enseñanza de las fracciones. El trabajo didáctico que desarrollo en esta tesis se ubica en una corriente en didáctica de las matemáticas con un enfoque constructivista del proceso de aprendizaje. A continuación caracterizaré brevemente esta corriente de investigación.

Desde hace más o menos tres décadas, en Europa, en los IREM* de Francia, se han llevado a cabo investigaciones sobre didáctica de las matemáticas, ubicadas en una corriente identificada como didáctica constructivista.

La didáctica constructivista investiga el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través del estudio de situaciones didácticas diseñadas con el objeto de propiciar la construcción de un determinado conocimiento.

G. Brousseau[24] define a la situación didáctica:

> *"Un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, cierto medio (que eventualmente comprende los instrumentos y los objetos), y un sistema educativo (el profesor) cuya finalidad es que éstos alumnos se apropien de un saber constituido o en vias de constituirse".*

Uno de los elementos fundamentales de estas situaciones, es el planteamiento del problema que exige para su resolución, la búsqueda de estrategias, en las que

* Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques.

24 Brousseau, G. (1982). "Ingenierie didactique". Conferencia dictada en la Segunda Escuela de Verano de Didáctica de las matemáticas. Escuela de Educadores Especializados. OLIVET. (mimeo p 1).

los alumnos utilicen los conocimientos previos y los recursos que tienen en ese momento.

Posteriormente se complejizan los problemas, se añaden ciertas limitaciones de tal manera que se obstaculice el uso de las estrategias iniciales, propiciando así la búsqueda de nuevas estrategias de solución que ayuden en el avance de la construcción del conocimiento.

J. Perez[25], describe el proceso de enseñanza-aprendizaje de la siguiente manera:

> *"El camino que hemos seguido consiste primeramente en construir un proceso de aprendizaje en el que el conocimiento no sea enseñado directa o indirectamente por el maestro, sino que aparezca progresivamente en el niño a partir de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos hayados en el curso de su actividad. Son pues las múltiples acciones en el seno de la situación las que deben provocar por si solas las modificaciones en el alumno y favorecer así la aparición de los conceptos deseados... Si el conocimiento contemplado por el aprendizaje debe aparecer en la medida en que se vuelve necesario para adaptarse a una situación que se ha vuelto problemática (las estrategias empleadas espontáneamente se revelan ineficaces), todos los esfuerzos del didácta deben orientarse hacia esa situación. El problema primordial consiste en primer lugar en saber, en efecto, en qué es realmente problemática la situación".*

En esta cita, J. Perez destaca que la resolución de situaciones problemáticas, con cierto tipo de obstáculos que propician la búsqueda de nuevas estrategias de solución, son fundamentales en esta perspectiva sobre la enseñanza.

Las situaciones didácticas diseñadas bajo esta concepción constructivista giran alrededor de la solución de un problema que implica a un conocimiento específico con el cual el alumno deberá interactuar.

El problema en matemáticas es, afirma Vergnaud[26]: *"...la fuente porque en estas situaciones se elaboran las nociones y se abstraen las propiedades pertinentes; el criterio porque también en estas situaciones se prueban los conocimientos operativos".*

Con esta perspectiva, se busca que las situaciones problema satisfagan las siguientes condiciones:

---

[25] Perez, J. (1982). "Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l'identification des objets et des phénoménes pertinents au cours de l'activité de construction d'un code de désignation à l'école maternelle". Conferencia dicatada en la Segunda Escuela de Verano de Didáctica de las matemáticas. Escuela de Educadores Especializados. OLIVET. (mimeo p 3).

[26] Vergnaud, G. (1981). "Quelques orientations théoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques" en: Recherches en didáctique des mathématiques, la pensee sauvage, Vol. 2.2, Grenoble. pp 215-231. (Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN).

- Que el problema planteado sea claro y significativo para el alumno.

- Que sea realmente un problema, es decir, que las acciones que el alumno deba realizar para su resolución no sean obvias.

- Que la propia situación posibilite al alumno para reconocer si el camino que eligió para resolver el problema es adecuado.

- Que las primeras situaciones permitan llegar a la solución con los conocimientos empíricos o escolarizados que en ese momento el alumno tenga sobre el problema.

- Que las situaciones problema posteriores, paulatinamente planteen obstáculos que obliguen al alumno a buscar otras formas de solución propiciando la evolución de las estrategias iniciales acercándose así al objeto de conocimiento.

Durante el desarrollo de una secuencia de situaciones didácticas, a lo largo del proceso de adquisición del conocimiento, G. Brousseau[27], distingue cuatro fases:

¤ Fase de acción

¤ Fase de formulación

¤ Fase de validación

¤ Fase de institucionalización

Fase de acción. Es el momento en el que los alumnos realizan acciones cuyo objetivo es resolver un problema; el problema puede ser planteado como un juego o como una actividad, por ejemplo, construir una figura o un cuerpo geométrico. Las experiencias y los conocimientos adquiridos con anterioridad, le permiten al alumno comprender el problema planteado y buscar una estrategia de solución que puede ser encontrada a través del ensayo y error.

Fase de formulación. Es el momento en el que el maestro organiza situaciones que propicien una explicitación sobre las acciones realizadas para resolver el problema. Esta explicitación se hace de manera verbal o por escrito, con el objeto de que los alumnos hagan conscientes las acciones que realizaron, se den cuenta del efecto que provoca una acción en el resultado del problema.

Para que esta explicitación tenga sentido para el alumno, el maestro organiza una actividad que la haga necesaria. Por ejemplo, una situación en la que un alumno o un grupo de alumnos envíe un mensaje a otros compañeros, para que éstos resuelvan determinada tarea a través de las indicaciones del mensaje.

---

[27] Brousseau, G. (1970). "Processus de mathématisation" en: *La mathématique à l'école élementaire*, Paris, APMEP, N especial. pp 428-457.

El fracaso en la interpretación del mensaje depende en gran medida de la falta de claridad del mismo o de la falta de información. Estas carencias se detectan al ponerse a discusión los motivos por los cuales se falló en la resolución.

Fase de validación. Es el momento en el que se organizan situaciones para crear en los alumnos la necesidad de demostrar a sus compañeros que la estrategia utilizada para la resolución del problema es correcta o incorrecta. En esta fase se empiezan a establecer reglas, teoremas, etc. Los alumnos siguen aprendiendo a hacer demostraciones.

Fase de institucionalización. Esta fase, se lleva a cabo, después de varias sesiones de trabajo en las que los alumnos han logrado poner en juego las herramientas matemáticas que resuelven el problema. El maestro da a conocer entonces a sus alumnos que esas nuevas herramientas constituyen un nuevo conocimiento. Les asigna el nombre convencional (por ejemplo, suma) y los identifica como un conocimiento establecido.

Llegar a la aproximación matemática de las estrategias de solución de un problema determinado, es un proceso largo que se inicia en la búsqueda de estrategias iniciales y que a lo largo de las fases señaladas por Brousseau culmina con la institucionalización del objeto de conocimiento adquirido.

Es importante señalar que estas cuatro fases constituyen un proceso que se repite en la adquisición de nuevos conocimientos; que no necesariamente aparecen las cuatro fases en una sesión de trabajo y que en ocasiones es difícil de diferenciar con claridad una fase de otra.

Por otro lado, es importante destacar también que el rol que se intenta que el maestro desempeñe en la aplicación de situaciones didácticas con las características mencionadas anteriormente, es el de un coordinador de las actividades. El maestro organiza las situaciones, proporciona los materiales y las consignas necesarias, cuestiona sin validar o invalidar los procedimientos desarrollados por los alumnos, organiza las discusiones de explicitación y validación de los alumnos, ayuda al grupo a concluir y por último a relacionar el nuevo conocimiento adquirido con el objeto de conocimiento establecido.

Investigaciones Antecedentes

Basándose en los principios didácticos desarrollados en este capítulo; en los estudios matemáticos sobre la noción de fracción (Cap. I); y en los estudios psicogenéticos sobre el proceso de adquisición de dicha noción (Cap. II); en el Laboratorio de Psicomatemáticas del DIE-CINVESTAV-IPN, se desarrolló un proyecto de investigación didáctica sobre la enseñanza de las fracciones reportado en la tesis "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria"[28].

[28] Block, D. (1987). "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Educación. DIE-CINVESTAV-IPN.

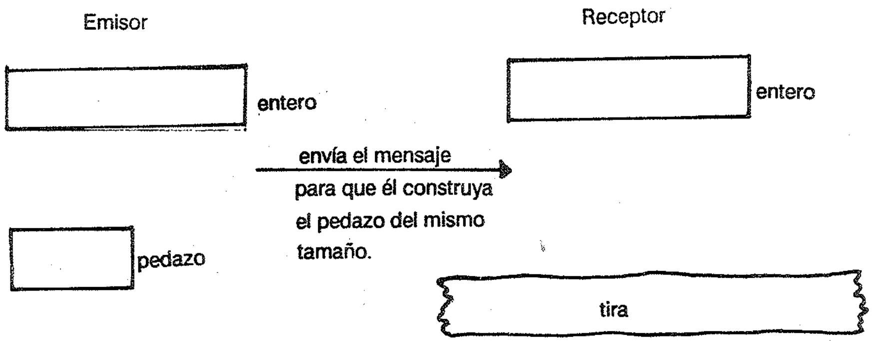
En dicha investigación, se exploraron las posibilidades que ofrecían los problemas que implican a la fracción bajo la interpretación de cociente, para introducir dicha noción.

Los problemas planteados en las situaciones didácticas diseñadas, exigían para su resolución que los alumnos pudieran comparar longitudes, construir un objeto de igual longitud a otro; manejar las variables de igualdad y exhaustividad de un reparto teniendo la relación parte-todo.

Considerando que es aproximadamente entre los 7 y 8 años que los niños logran realizar esas tareas, se decidió hacer la experimentación con un grupo de 3° y uno de 4° dentro de una escuela.

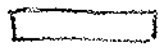
La secuencia de situaciones didácticas constó de tres fases. A continuación presentaremos un resumen de la secuencia realizada por el mismo autor[29] :

> *"Los problemas de la secuencia se articulan en torno a dos actividades básicas: reparto y medición. La situación fundamental es una situación de medición: se organiza el grupo en parejas de equipos 'emisor-receptor'. El emisor tiene varios 'chocolates enteros' (tiras de cartón de determinada longitud) y varios 'pedazos'iguales de esos chocolates (también tiras de cartón, con el mismo ancho que las anteriores). La longitud de estos pedazos es igual a una fracción determinada del entero. El receptor sólo tiene ejemplares de los chocolates enteros y una tira larga de papel para recortar, con el mismo ancho que los anteriores. Los emisores deben enviar un mensaje a los receptores, para que éstos últimos construyan un pedazo del mismo tamaño que el que tienen los emisores (la magnitud que está en juego es la longitud). El mensaje debe poderse decir por teléfono es decir, no se pueden incluir dibujos. Además, se excluye el uso de la regla graduada*



[29] Block, D. (1987) Op cit.

Este problema favorece en principio la puesta en juego progresiva de una medida fraccionaria (del pedazo en función del entero) mediante dos posibles recursos (entre otros):

1) Fraccionamiento de la unidad: buscar qué fracción del entero es igual al pedazo; por ejemplo:  *el pedazo = tres cuartos del entero.*

2) Conmensuración del entero y del pedazo: buscar cuántos pedazos alineados y cuántos enteros alineados coinciden en longitud por ejemplo: 3 enteros miden lo mismo que 4 pedazos o un pedazo es igual a 3 enteros alineados, entre cuatro...subyace la idea de cociente.

Es fácil observar que el procedimiento más susceptible de ser implementado en estas condiciones es el de la conmensuración. No obstante, antepusimos a esta situación otras dos familias de situaciones, cuyo objetivo fue introducir un contexto que diera origen a la existencia del entero y del pedazo y que propiciara a la vez la puesta en juego de la conmensuración; la primera de estas familias consta de actividades de repartir: se reparten cierto número de enteros entre cierto número de niños... se generan pedazos de distinto tamaño[30]*. La segunda familia consta de problemas derivados del reparto y que hace necesario tener en cuenta la relación (de igualdad) entre el total de enteros que se van a repartir y el total de pedazos obtenidos de ese reparto. Por ejemplo, se tienen varios enteros y varios pedazos producto de un reparto y es necesario averiguar cuántos enteros y entre cuántos niños. O bien: se conocen esos datos (número de enteros, número de niños) se tienen los pedazos y es necesario construir los enteros..."*

Al término de la investigación se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los alumnos lograron construir un lenguaje de parejas ordenadas (**a,b**) muy cercano al convencional, en donde "**a**" representa el número de unidades repartidas y "**b**" el número de pedazos. Cabe señalar que los alumnos de 3° si bien lograron construir el lenguaje de parejas ordenadas, lo hicieron con mucha dificultad mostrando además deficiencias conceptuales desde las situaciones de reparto.

- Conciben a la pareja "**a,b**" como el tamaño de un pedazo producto de un reparto, en el que el todo puede estar conformado por una o más unidades y el pedazo es el producto de la división en "**n**" partes del todo.

[30] El aprovechamiento didáctico de estas situaciones de reparto fue señalado con gran acierto por L. Streefland. Ver por ejemplo su trabajo "How to teache fractions so as to be useful".

- Encuentran y justifican pares de números que arrojan como resultado pedazos equivalentes. Sólo faltó llegar a la notación y lenguaje convencional de las fracciones.

Posteriormente como continuación de la investigación que acabamos de describir, se planteó la posibilidad de continuarla pero sólo con los alumnos que estarían ahora en 5° año, aprovechando el avance que éstos habían logrado en la representación simbólica **(a,b)** con el significado medida del pedazo. Se eliminó en esta etapa de la investigación a los alumnos de 4° año por las dificultades que tuvieron en la secuencia didáctica anterior.

El objetivo de esta segunda etapa de la investigación[31], fue indagar las posibilidades de introducir a los alumnos en la suma de fracciones con igual o distinto denominador, tomando como base el trabajo realizado.

En este caso, las situaciones didácticas diseñadas propiciaban que los alumnos encontraran la medida de la unión de dos pedazos de chocolate productos de dos repartos en los que se utilizaron enteros de la misma longitud.

Los resultados obtenidos al término de esta investigación fueron los siguientes:

- Los alumnos lograron sumar fracciones con igual denominador concibiendo al resultado como medida del pedazo unión.

- Logran establecer la equivalencia entre dos fracciones.

- Logran utilizar las relaciones de equivalencia para sumar fracciones con distinto denominador.

- Logran comparar entre dos pares de números dados, cuál de las dos fracciones es mayor o menor, estableciendo las relaciones existentes entre los datos.

Las situaciones didácticas planteadas en las investigaciones descritas, giraron sobre problemas de reparto. Los alumnos lograron abordar los problemas planteados al inicio de la secuencia y avanzar en su aprendizaje de las fracciones, gracias a que contaban con un buen manejo de las condiciones del reparto, la igualdad y la exhaustividad.

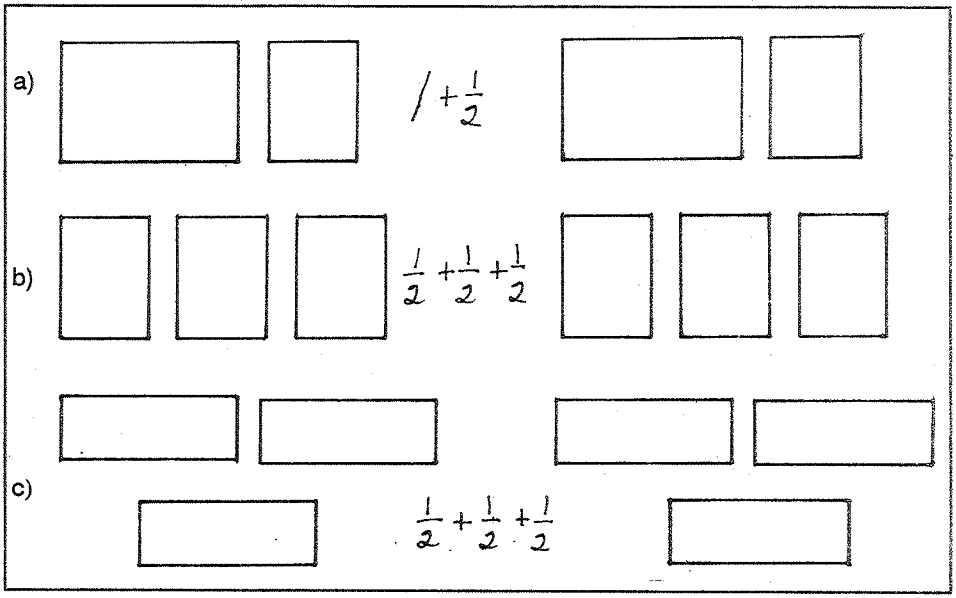
Sin embargo, aunque los alumnos de 3° lograron resolver las situaciones, manifestaban dificultades porque muchos de los niños de esa edad aún no tenían conservación de área y no manejaban adecuadamente la relación parte-todo.

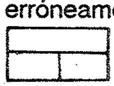
[31] Balbuena, H. 1988. "Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Aprobada para publicarse en la serie: Opus Prima de la Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

En virtud, de que el tema objeto de esta tesis es el reparto como introducción a la noción de fracción y que los resultados de las situaciones de reparto fueron el origen de la idea de hacer esta investigación, abundaremos un poco más sobre este tipo de situaciones, aplicadas en 3° y 4° en la primera fase de la investigación realizada por Block, D.[32] Veamos en términos generales qué fue lo que sucedió en cada una de las situaciones:

Desde el principio de la investigación, se organizaron a los grupos en equipos; y utilizando material (hojas de papel tamaño carta) concretizaban la actividad.

1. Repartir 3 pasteles entre 2 niños. Este primer problema los alumnos de ambos grupos lo resolvieron sin ninguna dificultad. Aparecieron diferentes tipos de reparto como:



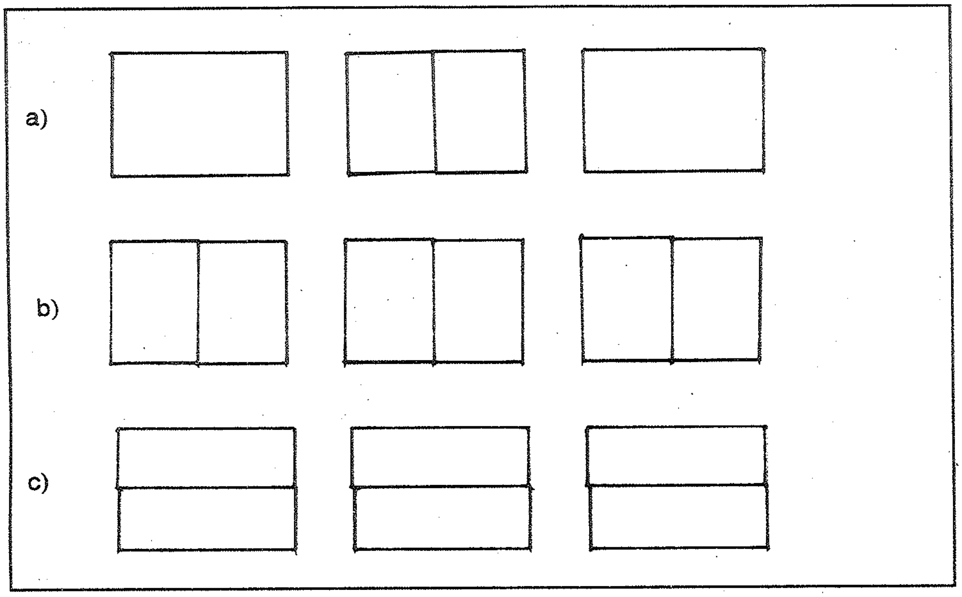
Los alumnos utilizaron durante el desarrollo de la actividad los términos "medios", "cuartos", "tercios", a veces adecuadamente, a veces erróneamente, por ejemplo, cuando un 'pastel' estaba dividido de la siguiente forma:  decían que estaba dividido en 'tercios'.

Las respuestas de los niños a las preguntas del maestro fueron las siguientes:

– Cuando se les preguntó: "¿A todos los niños les tocó lo mismo de pastel? los alumnos aseguraban la igualdad de los repartos sin tener necesidad de verificar.

[32] Block, D. (1987) Op cit.

– Ante la pregunta "¿Se repartió todo el pastel?" los alumnos lo afirmaban verbalmente o lo demostraban reuniendo las partes para formar el todo.



Cuando se les preguntó a los alumnos si la mitad horizontal ( ), era igual a la mitad vertical ( ), los alumnos dudaron de la igualdad, sin embargo, lograron convencerse mediante la superposición de las mitades, de la siguiente manera:

Sólo un equipo del grupo de 3° no aceptó la igualdad de estas dos mitades argumentando que al cambiar de forma ya no era lo mismo., es decir, aún estos alumnos no tienen conservación de área.

Se pudieron apreciar, de las respuestas de los alumnos, diferentes niveles en el proceso de adquisición de la conservación del área y de la relación parte-todo.

- Negar la igualdad cuando las formas cambian.

- Aceptar la igualdad sólo mediante la comprobación empírica (superposición).

Suponer la igualdad a través de razonamientos compensatorios: "son iguales, sólo que éste ( ) es más gordito y éste ( ) es más flaquito".

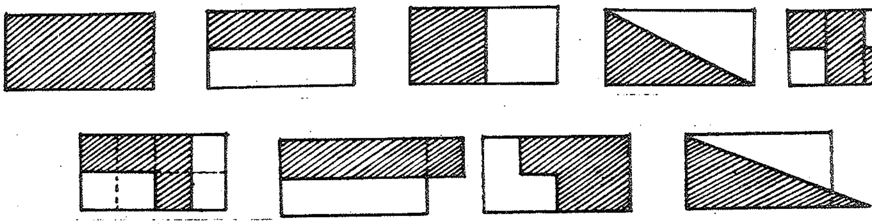
2. **¿Cuáles son mitades?.** Esta actividad se aplicó a raíz de lo que los alumnos hicieron en la situación de reparto anterior:

– Implementar recursos en la comparación de áreas.

– No haber sentido la necesidad de verificar que la unión de las partes forma el todo.

– El uso del término mitad durante el desarrollo de la actividad.

Con esta situación se propuso explorar con más profundidad las concepciones de los niños sobre la noción de mitad. La actividad consistió en elegir de entre los siguientes pedazos aquéllos que fueran mitades de un entero (hoja tamaño carta). Algunos de estos pedazos eran efectivamente mitades aunque sus formas no fueran comunes.



La resolución de esta actividad implica:

– Saber que las dos partes deben ser iguales.

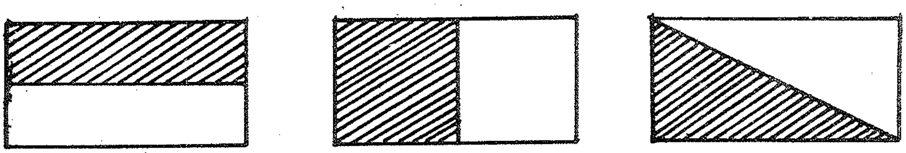
– Saber que las dos partes forman el todo.

– Saber que no importa que las dos partes no tengan la misma forma.

– Inventar recursos para comparar áreas.

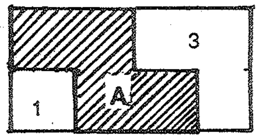
Los resultados obtenidos en 3° al término de esta sesión fueron:

– Todos los alumnos identificaron y aceptaron como mitades a los pedazos que caben exactamente dos veces en la unidad como:



– Algunos alumnos lograron identificar como mitad a la siguiente figura, después de haberla recortado y superpuesto:

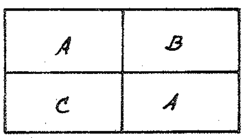
– **Otros alumnos** no aceptaron que la figura A fuera una mitad porque al sobreponerla en el entero éste quedaba dividido en tres partes:

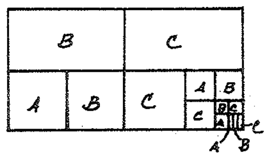


Los alumnos de 4°, lograron identificar las mitades a través de otros recursos como: cuadricular el entero y los pedazos, contar los cuadritos, recortar y compensar.

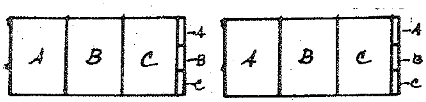
3. Repartir dos pasteles entre dos niños. Este problema también lo pudieron resolver los alumnos de ambos grupos, sin embargo, el reparto entre tres fue difícil, sólo dos equipos de 3° y uno de 4° lograron repartir desde el primer intento en tres partes cada entero y así obtener $\frac{2}{3}$ para cada niño.

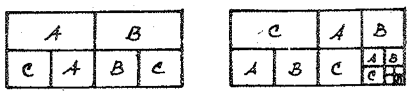
La tendencia general fue cortar por mitades cada vez, obteniendo un pedazo sobrante, después de varios intentos de cortar en dos para obtener tres pedazos, dividieron el pedazo sobrante dibujando rayitas en tres partes más o menos iguales, obteniendo repartos del tipo:

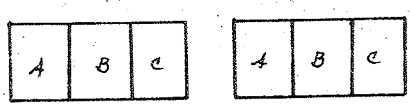


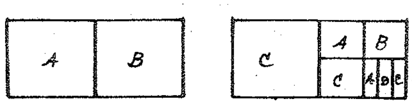


Algunos alumnos de 4° medían la hoja (31 cm) con una regla y, en el mejor de los casos, cuando medían correctamente colocando la regla a partir del cero en la orilla de la hoja, dividían entre tres obteniendo como residuo 1 cm. Algunos alumnos abandonaban en este momento la estrategia recurriendo al doblado por mitades y otros continuaron hasta obtener una tira sobrante de 1 cm de ancho; algunos alumnos abandonaron esta estrategia hasta este momento recurriendo también a la del doblado por mitades; y otros continuaron con la misma estrategia.. Se obtuvieron repartos del tipo:

a) 

c) 

b) 

d) 

A pesar de que los alumnos sabían que los repartos hechos tenían la misma cantidad de pastel (ya que se había repartido todo, no había quedado nada y los pasteles eran del mismo tamaño, como en el caso de la situación 3 pasteles entre 2), en esta situación los alumnos necesitaban verificar la igualdad superponiendo pedazos y haciendo compensaciones.

4. **Repartir *x* pasteles entre *y* niños.** El objetivo de esta situación era que los alumnos reflexionaran sobre la relación existente entre el número de pasteles a repartir, el número de niños entre los que se haría el reparto y el tamaño del pedazos que arrojarían estos repartos.

Para lograr este objetivo se presentó a los alumnos la siguiente lista de repartos:

Equipo 1	2 pasteles entre 3 niños
Equipo 2	2 pasteles entre 4 niños
Equipo 3	1 pastel entre 3 niños
Equipo 4	3 pasteles entre 2 niños
Equipo 5	1 pastel entre 2 niños
Equipo 6	3 pasteles entre 6 niños
Equipo 7	2 pasteles entre 6 niños
Equipo 8	6 pasteles entre 4 niños

Los alumnos debían anticipar, antes de llevar a cabo los repartos con material, qué equipos iban a obtener más pastel, menos pastel o igual cantidad de pastel, más de un pastel o un pastel entero.

Para que los alumnos lograran resolver esta primera actividad de la situación, era necesario que coordinaran las variables: número de pasteles y número de niños, para prever el tamaño del pedazo que le tocaría a cada niño.

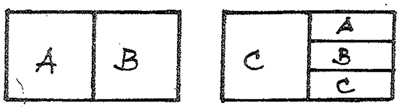
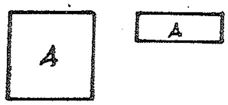
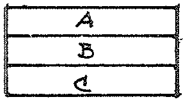
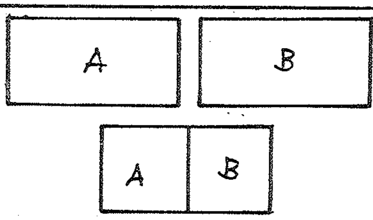
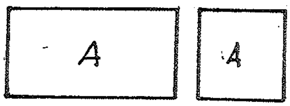
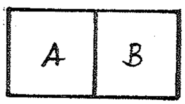
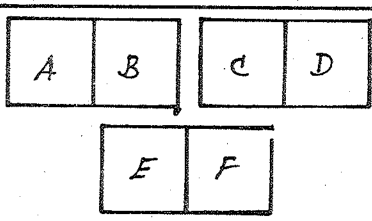
Por ejemplo, para comparar a cuáles niños les toca más pastel si se hacen los siguientes repartos: 8 pasteles entre 3 niños y 3 pasteles entre 8 niños, deben tomarse en cuenta a la vez ambas variables (pasteles y niños). A mayor número de pasteles y menor número de niños, les toca más cantidad de pastel; a menor número de pasteles y mayor cantidad de niños, les toca menor cantidad de pastel.

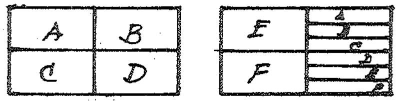
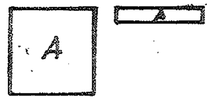
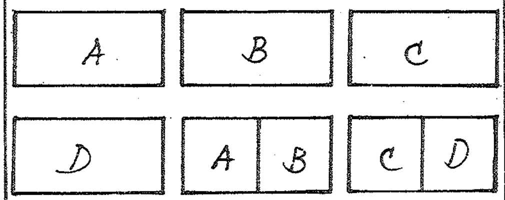
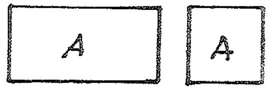
Los alumnos de 3° recurrieron al dibujo como estrategia para poder dar sus anticipaciones, sin cuidar que los pasteles fueran del mismo tamaño.Esto propició que cuando se les preguntó "¿A cuáles equipos les tocó lo mismo de pastel que al equipo 6?", los alumnos, a nivel gráfico, no pudieran encontrar las equivalencias.

Al haber recurrido a la representación gráfica de los repartos, los alumnos tuvieron la necesidad de nombrar de alguna manera lo resultados de sus repartos, encontrando que algunas veces llamaban "un medio" a un tercio o "un pedacito" a un sexto.

Posteriormente cuando se abocaron a realizar los repartos con material no tuvieron ninguna dificultad para llevarlos a cabo.

Los resultados con material fueron los siguientes:

Equipos	Formas de reparto	Le tocó a cada niño
Equipo 1		
Equipo 2		
Equipo 3		
Equipo 4		
Equipo 5		
Equipo 6		

Equipos	Formas de reparto	Le tocó a cada niño
Equipo 7		
Equipo 8		

Durante la confrontación de resultados a simple vista cuatro equipos de 3° lograron encontrar que a los equipos 2, 5 y 6 les había tocado la misma cantidad de pastel. Ningún equipo encontró la igualdad entre los repartos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$. Sólo un alumno de 3° logró encontrar la igualdad entre los repartos de los equipos 3 y 7.

En cambio, en esta misma actividad hubo una notoria diferencia en la forma en que los alumnos de 4° hicieron sus anticipaciones. La mayoría de los alumnos lograron hacer sus anticipaciones mentalmente, sin recurrir a la representación gráfica. Sin embargo, en la confrontación, sólo un equipo logró establecer la equivalencia entre los repartos $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{4}$, ninguno encontró la igualdad entre los repartos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$.

Posiblemente esta diferencia entre 3° y 4° para encontrar la igualdad en los repartos a simple vista, se debió a que en 3° aparecieron diversos cortes que impedían ver con claridad la equivalencia.

Sin embargo, en el desarrollo de esta situación en ambos grupos se pudo observar que para establecer comparaciones, los alumnos coordinaron las dos variables (número de pasteles y número de niños) en dos niveles de conceptualización de esta relación, que nos indican avances en el proceso de aprendizaje.

El hecho de que los alumnos (3° grado) logren desligarse de la situación real del reparto haciendo una representación gráfica del mismo como modelo es un logro, y poder establecer comparaciones a través de la representación mental del reparto (4° grado) es un logro mayor. Estos logros nos indican una evolución en el proceso.

Esta experiencia confirmó la importancia que tiene la familia de problemas de reparto para generar las bases sobre las cuales los alumnos pueden abordar determinados aspectos de la noción de fracción.

Sin embargo, las dificultades que tuvieron los alumnos de 3° grado a lo largo de estas secuencias didácticas, obliga a reflexionar sobre lo siguiente:

¿Cómo evitar que después de tres años de trabajar con fracciones, los alumnos tengan conceptos erróneos como el de mitad, tercios, etcétera?

¿Es pertinente introducir las fracciones en los primeros años de la primaria?

En caso de introducir las fracciones desde los primeros años de la escuela primaria ¿qué situaciones didácticas propician un mayor entendimiento de las fracciones?

Consideramos que si se trabaja sobre la noción de fracción en los primeros años de primaria, una posible alternativa para introducirla es enfrentar a los alumnos con problemas en los que la fracción esté implicada.

A partir de estas reflexiones decidimos realizar la investigación tema de esta tesis con los siguientes objetivos:

- Diseñar, experimentar y analizar situaciones didácticas alrededor de problemas de reparto, que propicien el avance de la construcción de la noción de fracción. Más específicamente:

– Que propicien que los alumnos hagan repartos tomando en cuenta la equitatividad y la exhaustividad.

– Que propicien que el alumno avance en el proceso de construcción de la noción de equivalencia entre dos fracciones, apoyándose en el uso de material concreto.

- Dar al maestro alternativas de situaciones didácticas para introducir al alumno en la adquisición del concepto de fracción.

IV. Una secuencia de situaciones sobre el reparto: Presentación y resultados de la experimentación

1. Objetivos y Metodología de la investigación

1.1 Objetivos

Los objetivos de las situaciones didácticas que se experimentaron son:

- Indagar la posibilidad de introducir la noción de fracción, sin llegar a la representación simbólica en 1°. y 2°. grados de educación primaria, a través de problemas de reparto, implementados con las características didácticas mencionadas en el Capítulo III.

- Propiciar a través de dichas situaciones, que los alumnos realicen repartos tomando en cuenta la equitatividad y la exhaustividad, propiedades que dan lugar a la fracción como la cuantificación de un reparto.

- Averiguar, si las situaciones propician que los alumnos se apropien de los términos "medios", "tercios", cuartos", interpretándolos como la manera de denominar el resultado de un reparto, y no como la forma de nombrar cualquier pedazo.

- Estudiar si a través de la resolución de las situaciones, los alumnos logran descubrir la equivalencia de fracciones como: $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{4}{8}...$

1.2 Metodología

Entre las diferentes familias de problemas que implican a las fracciones, se eligieron los problemas de reparto por ser accesibles e interesantes para los niños y porque proporcionan ciertas bases para avanzar posteriormente en el conocimiento de la noción de fracción en diversas interpretaciones tales como fraccionamiento de la unidad, cociente, operador (Ver Capítulo II y III).

Se diseñaron una serie de situaciones didácticas que incluyeron problemas de reparto en los que la fracción está implicada. Fue necesario también hacer un análisis previo de cada situación, para anticipar las posibles formas con las que los alumnos podrían resolver el problema y para prever los cuestionamientos o actividades que el experimentador podría plantear. El objeto de estos cuestionamientos es propiciar la reflexión de los alumnos sobre aspectos específicos del problema en cuestión. Otra finalidad del análisis previo fue determinar los aspectos de la clase que debían ser prioritariamente observados y registrados.

Experimentación de las situaciones. La etapa de experimentación de esta investigación, se desarrolló en una escuela oficial, con características comunes a la generalidad de las escuelas de este tipo en el Distrito Federal, en horario de clases. Se hizo de esta manera con el objeto de que las condiciones de trabajo fueran las más cercanas a la realidad escolar. Las situaciones didácticas se implementaron en dos grupos, uno de primer grado y otro de segundo grado. Se realizaron ocho sesiones de clase con cada grupo (2 sesiones por semana). Esto permitió obtener resultados más confiables sobre la factibilidad de la aplicación de dichas situaciones didácticas y sobre el proceso de aprendizaje de la noción de fracción en el contexto escolar.

Sin embargo, hay que considerar que quien sustenta este trabajo se hizo cargo de la conducción de las situaciones didácticas en el aula. Esto constituye una característica especial en la experimentación, debido a la experiencia adquirida a lo largo de varios años en los que ha estado integrada al grupo de investigación del Laboratorio de Psicomatemática del DIE-CINVESTAV-IPN.

Además es necesario aclarar que el interés principal en esta investigación, no fue ver la posibilidad de generalizar la aplicación de las situaciones didácticas estudiadas, sino averiguar, en condiciones más controladas, hasta qué grado dichas situaciones ayudan a los alumnos a avanzar en el proceso de aprendizaje de la noción de fracción.

Observaciones y registros de clase. Los registros de clase constituyen la fuente principal de información para realizar el análisis de los resultados de esta investigación. Un observador presenció el desarrollo de todas las clases y registró por escrito desde el principio hasta el término de cada sesión.

Los aspectos del desarrollo de las clases que interesó registrar fueron:

a) La consigna, es decir, indicaciones que el experimentador daba a los alumnos para que realizaran el trabajo.

b) Las participaciones de los alumnos a lo largo de la clase.

c) Las acciones que éstos hicieron para resolver los problemas.

d) Las intervenciones del experimentador durante el tiempo en el que los alumnos resolvían el problema.

e) La confrontación de resultados.

f) Las participaciones de los alumnos en la confrontación.

g) La forma en que se concluía la clase.

Análisis parcial de la información. Al término de cada sesión se analizó lo sucedido en la clase, con el objeto de modificar, si era necesario, las situaciones siguientes o de agregar (como sucedió en este caso) algunas actividades que permitieron conocer con más detalle ciertos aspectos de los conceptos manejados por los alumnos.

Análisis general de la información. Al finalizar la experimentación, se realizó un análisis general a partir de los objetivos iniciales. Interesaba averiguar si las situaciones planteadas habían sido significativas, es decir, si los alumnos habían comprendido las consignas y si tenían recursos para abordar los problemas. En seguida, se procedió a analizar los procedimientos utilizados por los niños para resolver los problemas y finalmente a identificar si en el breve lapso que duró la experimentación, hubo cambios hacia procedimientos de solución más evolucionados.

2. La secuencia de situaciones didácticas.

Los problemas planteados en las situaciones didácticas. Para diseñar la secuencia de problemas que se describirán en este apartado, se tomaron como base las situaciones de reparto aplicadas en la investigación de Block, D.[33] a saber:

– Situaciones en las que los alumnos realizaron repartos concretos. (5 actividades).

– Situaciones en las que los alumnos compararon los resultados de un reparto. (2 actividades).

– Situaciones en las que a partir del resultado de un reparto realizado por otras personas, los alumnos debían determinar el número de unidades repartidas. (1 actividad).

– Situaciones en las que se pone en juego la interpretación que los alumnos hacen del término "mitad". (2 actividades).

– Situación en la que los alumnos, sólo a partir de los datos de dos repartos, debían determinar a qué niños les tocaría más pastel. (1 actividad, en 2o. grado).

[33] Block, D. (1987) Op cit.

Todas las situaciones constan, además del problema de reparto de un segundo problema que consiste en comparar los diferentes tipos de reparto, reconocer su equivalencia y demostrarla con material.

Sesión No.	Fecha	Situación	Objetivos
1	24-V-88	Repartir 3 pasteles entre 2 niños.*	• Que los alumnos identifiquen las dos propiedades del reparto: equitatividad y exhaustividad. • Reconozcan diferentes tipos de reparto equivalentes. • Demuestren la igualdad o desigualdad de los repartos.
2	27-V-88	Repartir 1 pastel entre 2 niños.*	• Que los alumnos identifiquen las dos propiedades del reparto: equitatividad y exhaustividad. • Reconozcan diferentes tipos de reparto equivalentes. • Demuestren la igualdad o desigualdad de los repartos.
3	31-V-88	Repartir 3 pasteles entre 4 niños.*	• Que los alumnos identifiquen las dos propiedades del reparto: equitatividad y exhaustividad. • Reconozcan diferentes tipos de reparto equivalentes. • Demuestren la igualdad o desigualdad de los repartos.
4	2-VI-88	¿Quién tiene más pastel† Selección de mitades de una misma unidad.‡	• Demuestren la igualdad o desigualdad de los repartos hechos en la clase anterior. • Manifiesten su interpretación sobre la mitad de un entero.
5	9-VI-88	Repartir 1 pastel entre 3 niños.* Colorear mitades de diferentes formas de una misma unidad‡	• Descubran que partiendo por mitades siempre obtendrán un pedazo sobrante. • Encuentren una estrategia que les permita hacer un reparto equitativo y exhaustivo. • Manifiesten sus interpretaciones sobre la mitad de un entero.
6	14-VI-88	¿Qué reparto está bien? (1 entre 3)† Repartir 2 pasteles entre 3 niños.*	• Determinen cuáles repartos cumplen con las condiciones de equitatividad y exhaustividad. • Reflexionen sobre su hipótesis "a igual número de pedazos, igual cantidad de pastel". • Realicen repartos equitativos y exhaustivos. • Reconozcan la equivalencia entre los diferentes tipos de reparto realizados.
7	21-VI-88	¿Cuántos pasteles se repartieron? (3 entre 2 y 1 entre 5)†	• Manejen ciertos aspectos de la relación parte-todo, en particular: • Descubran que uniendo los pedazos que se obtuvieron en el reparto, se pueden formar los enteros que se repartieron.
8	21-VI-88	¿Qué mitad corresponde a cada entero?‡	• Manifiesten y confronten su interpretación de mitad.
9	28-VI-88	¿A quién le toca más pastel?**	• Coordinen las variables del reparto: número de pasteles, número de niños.

* Estas situaciones didácticas son las que se analizan completamente, ya que son el objeto de estudio de este trabajo.
** Esta situación didáctica sólo se planteó a los alumnos de 2o. grado.
† Estas situaciones didácticas permitieron conocer un poco mejor el grado en el que los niños coordinaban las variables: equitatividad y exhaustividad, en un reparto, así como su manejo del reparto equitativo y exhaustivo y el concepto de equivalencia.
‡ Estas situaciones didácticas ponen de manifiesto las interpretaciones conceptuales que los niños hicieron sobre el término mitad.
Nota: A lo largo de la experimentación se utilizó como material hojas tamaño carta.

Características generales de las situaciones didácticas implementadas. En las situaciones de reparto se organizó a los grupos en equipos, cuyo número de integrantes dependía del número de niños entre los que se realizarían los repartos. Más adelante se justificará esta organización.

En general las situaciones didácticas constaron de tres momentos: la consigna, el trabajo en equipo y la confrontación colectiva de resultados. En la confrontación de las situaciones de reparto, los alumnos debían opinar acerca de los resultados de cada equipo (¿son correctos? ¿tienen error? ¿a todos les tocó lo mismo?...). El segundo problema de cada situación de reparto (comparar los diferentes tipos de reparto), fué planteado durante la confrontación colectiva. Así mismo, después de que los alumnos verificaban su hipótesis en cuanto a la equivalencia o no de los repartos, se organizaba una segunda confrontación colectiva.

3. Resultados generales de la investigación

3.1 Sesiones preliminares a la experimentación.

Al iniciar la experimentación, se había contemplado aplicar a los grupos de 1°. y 2°. únicamente situaciones de reparto, apoyadas con material concreto. En dichas situaciones, los alumnos tenían que repartir cierto número de pasteles (hojas de papel tamaño carta), entre cierto número de niños.

La primera sesión se realizó en el grupo de 2°. grado conformado por 21 alumnos, que fueron organizados para la clase en equipos de cuatro. La decisión de que los alumnos resolvieran los problemas en equipo respondía a la necesidad didáctica de que los alumnos interactuaran para encontrar estrategias de solución y tuvieran así un primer espacio de socialización de sus estrategias.

Se pensó también en la conveniencia de reducir en lo posible el número de equipos, con el objeto de que la cantidad de repartos diferentes producidos por el grupo, pudieran ser trabajados dentro del tiempo previsto para el desarrollo de la clase (aproximadamente 40 min).

El problema que se les planteó consistía en repartir 3 pasteles entre 2 niños. Se explicó a los alumnos que la actividad consistía en repartir pasteles se tomó el acuerdo con ellos de que los pasteles estarían representados por las hojas de papel y se dió la siguiente consigna:

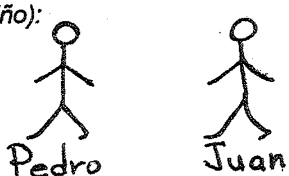
> *"Repartir tres pasteles entre dos niños, que a cada quien le toque lo mismo y que no sobre nada de pastel".*

Se repartieron a cada equipo tres hojas tamaño carta y se pidió que empezaran a trabajar. En la mayoría de los equipos, tres de los integrantes se apoderaron cada uno de una hoja, quedando el cuarto integrante sin pastel. Estos alumnos se acercaron al experimentador para pedir una hoja más. Fue necesario que el experimentador recorriera los equipos aclarando que sólo se iban a repartir tres pasteles entre dos niños.

Una vez aclarado el número de pasteles que se iban a repartir, los alumnos hicieron el reparto, pero, entre los cuatro integrantes del equipo y no entre dos como se había indicado.

Se repartieron otras tres hojas a cada equipo. Tratando de aclarar aún más la consigna del problema, el experimentador pidió a dos integrantes de cada equipo que repartieran los tres pasteles entre sus dos compañeros. Finalmente, lograron repartir los tres pasteles entre dos niños, aunque los alumnos que hicieron el reparto no quedaron contentos porque a ellos no les tocó nada de pastel. No hubo tiempo de hacer más, pues esta actividad, con los problemas que surgieron, se llevó el tiempo previsto.

Tomando en consideración lo que sucedió con los alumnos de 2o. grado, se modificó la consigna con la finalidad de que los alumnos de primero no tuvieran confusiones y lograran hacer el reparto. En primer grado la consigna quedó como sigue:

> *"Van a repartir estos tres pasteles (hojas tamaño carta), entre estos dos niños (el experimentador dibuja en el pizarrón a dos niños y escribe el nombre de cada niño):*
>
> 
>
>
> *que a los dos les toque lo mismo y que no sobre nada de pastel".*

En cuanto a la organización del grupo, igual que en 2°. se formaron cinco equipos de cuatro niños cada uno. Una vez explicada la actividad y tomado el acuerdo sobre los pasteles, se dió la consigna y se inició el trabajo.

En general, los alumnos al recibir los hojas, las cortaron a la mitad, se apoderaron cada uno por lo menos de una de ellas y empezaron a copiar los muñecos y a llenar la hoja con los nombres anotados en el pizarrón. No hubo manera de que los alumnos realizaran el reparto solicitado.

Como puede verse, la modificación de la consigna, en primer año, lejos de ayudar a aclarar el problema, provocó mayor confusión. Tomando en cuenta que, en 2°. grado, la modificación de la consigna que permitió que los alumnos repartieran 3 entre 2, fue el haber pedido a dos de ellos que repartieran los pasteles entre sus dos compañeros. Se decidió repetir la situación, formando equipos con un número de integrantes igual al número de niños entre los que se haría el reparto. En cuanto a la consigna, quedó de la siguiente forma:

> *"Van a repartir estos tres pasteles entre ustedes dos, que a los dos les toque lo mismo y que no sobre nada de pastel".*

Para asegurar que la nueva organización del grupo y la claridad de la consigna fuera lo que permitiera que los alumnos realizaran los repartos, y ésto no se viera modificado por la primera experiencia de los dos primeros grupos, se decidió también reiniciar la experimentación con otros grupos de 1°. y 2°. grados. Efectivamente, con estas modificaciones, los nuevos alumnos lograron realizar los repartos sin mayores dificultades.

3.2 Análisis de las situaciones de reparto.

El análisis que se presenta se hizo básicamente sobre los registros de clase. A fin de que el lector tenga una idea más clara de cómo se desarrollaban las clases, en el anexo, se presenta el registro de una sesión completa. En este apartado se presentarán los resultados generales de las situaciones de reparto de la secuencia.

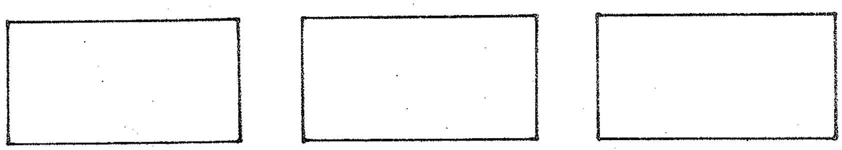
A continuación se muestran los diferentes tipos de repartos realizados por los alumnos de los dos grupos en las situaciones entre 2 y entre 4. Posteriormente, se describirán los repartos entre 3. Esta separación obedece a que la posibilidad de los niños para manejar exitosamente la exhaustividad y equitatividad de un reparto, está en función del número entre el cual se va a repartir. Es decir, es diferente para los niños enfrentarse a un reparto entre potencias enteras de 2 (2, 4, 8, 16...), que repartir entre 3 (esto se sustenta en los resultados encontrados por Piaget, J., Inhelder, B., Lerner, D. descritas en el Capítulo II).

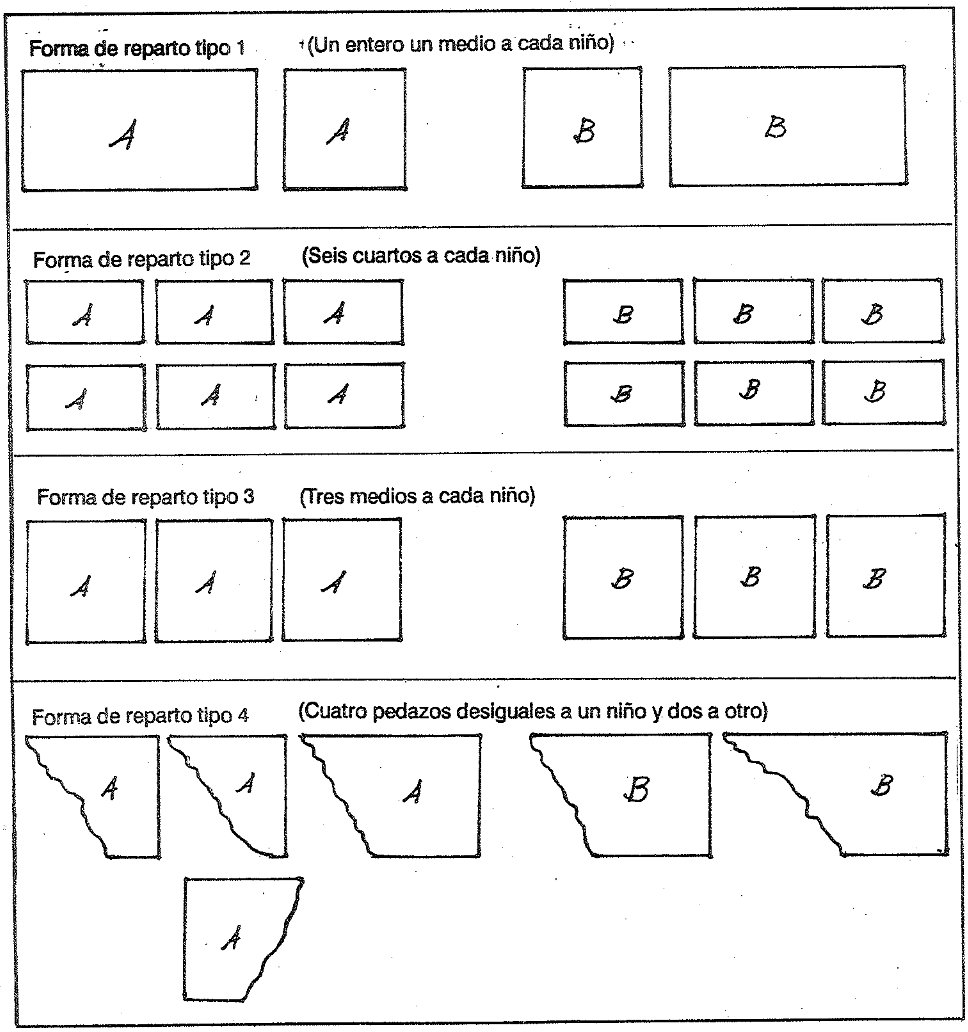
a) Situaciones de reparto entre 2 y entre 4

A lo largo de la experimentación, se observó que en los repartos entre 2 y entre 4, ni los alumnos de primero ni los de segundo, tuvieron alguna dificultad para realizarlos, una vez que para ellos quedó claro lo que iban a hacer y entre quiénes se haría el reparto. La estrategia que prevaleció para realizar los repartos fue partir por mitades, es decir, en potencias enteras de 2. Esta tendencia permitió que se generaran diferentes formas de repartir.

Situación: 3 pasteles entre 2 niños. Se generaron entre los dos grupos cuatro tipos de reparto:

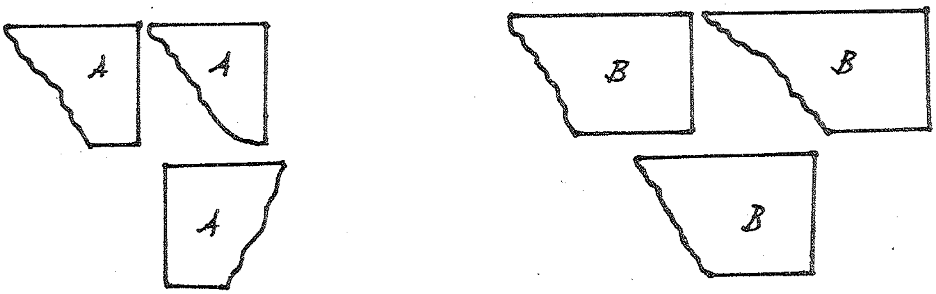
1° y 2° grados	Situación 3 pasteles entre 2 niños (A, B)
Pasteles a repartir	





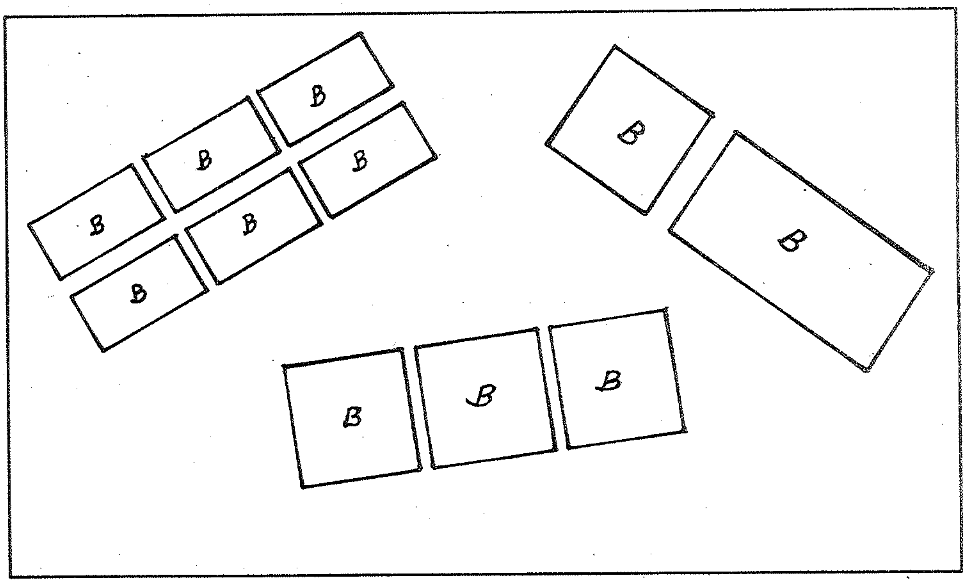
Los repartos del tipo 1, 2 y 3 aparecieron tanto en 1o. como en 2o. En la confrontación, estos repartos fueron aceptados por el grupo como buenos argumentando que al interior de cada equipo tanto al niño A como al niño B, le había tocado lo mismo y no había sobrado nada de pastel.

En primer año, uno de los equipos hizo el reparto del tipo 4, que el grupo rechazó, argumentando que no estaba bien porque a un niño le había tocado más pastel: uno tenía cuatro pedazos y el otro sólo dos. Al preguntar el experimentador qué se podía hacer para que les tocara lo mismo, Erika respondió: "pasándole un pedazo al otro niño"; pasa al pizarrón, lo hace y el grupo acepta entonces que así a los dos niños les ha tocado lo mismo (tres pedazos).



En este grupo, de no haber aparecido el reparto tipo 4, se hubiera podido creer que los alumnos, para determinar la equitatividad de los repartos, controlaban las variables, tamaño y número de pedazos. Recuérdese que en los repartos tipo 1, 2 y 3, aceptan en cada caso, que a los dos niños les tocó lo mismo de pastel. Sin embargo, el reparto 4, lo aceptan también cuando cada niño tiene tres pedazos, sin importarles el tamaño de los mismos. Es decir, para determinar la equitatividad del reparto, centran su atención en el número de pedazos, dejando de lado su tamaño.

Una vez que todos los equipos mostraron la forma en que hicieron su reparto, los pedazos de 'pastel' que les había tocado a cada uno de los niños de los equipos, quedaron pegados en el pizarrón. El experimentador, les plantea el segundo problema (comparación de los diferentes tipos de reparto).



Ante la pregunta: "¿Les tocó lo mismo de pastel a todos los niños? Los alumnos de primero y segundo grados argumentan la equivalencia o desigualdad de la siguiente forma:

Argumentos de equivalencia:
Primer año.

Erika: "Están igual porque a cada uno le tocó lo mismo (se refiere a todos los diferentes repartos), porque es de lo mismo y le tocaron seis pedazos a cada quien (se refiere al reparto tipo 2 [$\frac{6}{4}$] a cada niño)".

Erika: "Les tocó igual (nuevamente se refiere a todos los repartos), parecen más porque les tocaron más pedazos (señala el reparto tipo 2 [$\frac{6}{4}$])".

Erika: "Lo cortaron más chiquito (se refiere al reparto tipo 2 [$\frac{6}{4}$] contra los repartos tipo 1 y 3 [$1\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$]), pero les tocó lo mismo".

Erika: "Es lo mismo, solo que la hoja está grande (señala el entero del reparto tipo 1 [$1\frac{1}{2}$]) y aquí en pedazos chicos (señala los repartos tipo 2 y 3 [$\frac{6}{4}$ y $\frac{3}{2}$])".

Segundo año:

Carlos: "Es igual, si juntamos estas dos mitades (señala dos mitades del reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$]) quedan igual (señala el entero del reparto tipo 1 [$1\frac{1}{2}$])".

Carlos: "Son iguales (se refiere a los los repartos tipo 1 y 3 [$1\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$])), si partimos la hoja que está ahí (señala el entero del reparto tipo 1 [$1\frac{1}{2}$]), entonces son iguales".

Argumentos de desigualdad:
Primer año:

Francisco: "Les tocó más porque lo cortaron (el pastel) dos veces (se refiere al reparto tipo 2 [$\frac{6}{4}$])".

Raúl: "A los que tienen dos (pedazos) les tocó menos (se refiere al reparto tipo 1 [$1\frac{1}{2}$])".

Niños: (Varios niños dicen) "Van a comer más pastel los que tienen seis pedazos (reparto tipo 2 [$\frac{6}{4}$]) porque tienen muchos pasteles"

Exp.: (Pregunta a Aurelio, un niño que durante toda la discusión no ha comentado nada al respecto) "¿Y tú qué dices Aurelio? Fíjate, eran tres pasteles y los repartimos entre dos niños. De todos estos repartos que hicieron cuál eliges? (señala los repartos 1, 2 y 3 [$1\frac{1}{2}$, $\frac{6}{4}$ y $\frac{3}{2}$])".

Aurelio: "El que tiene menos".

Exp.: ¿"El que tiene menos? ¿Por qué eliges ése?"

Aurelio: "¿Porque no me gusta el pastel?"

Exp.: (Pide a Aurelio le señale en el pizarrón el reparto que elige).

Aurelio: (Pasa y señala el reparto tipo 1 [1 $\frac{1}{2}$])

Segundo año:

Alejandra: "Le tocó más al equipo tres porque tiene tres pedazos (se refiere al reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$])".

Alma: "Les tocó menos porque Marisol y Héctor sólo cortaron uno (un pastel) y nosotros cortamos tres (pasteles). (Se refiere a los repartos tipo 1 y 3 respectivamente [1 $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$])".

Marisol: "Nos toca más porque tenemos un pastel entero y un medio y ellos solo tienen tres pedazos (se refieren a los repartos tipo 1 y 3 respectivamente [1 $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$])".

Austria: "Como no está cortada (se refiere al entero del reparto tipo 1 [1 $\frac{1}{2}$]) es menos"

Israel: "Si la cortas es igual (se refiere a cortar la hoja del reparto tipo 1 [1 $\frac{1}{2}$])".

Como se puede observar, en esta primera sesión, sólo dos alumnos Erika de primero y Carlos de segundo manifiestan con seguridad que a todos los niños les ha tocado la misma cantidad de pastel independientemente del número de pedazos que tengan y de su forma. Los demás alumnos piensan que las cantidades de pastel que les tocó a cada uno de los niños varía dependiendo del número de pedazos que les tocó.

En segundo año se diversifican las opiniones. Carlos piensa que los diferentes tipos de repartos son equivalentes; unos cuantos alumnos opinan que sólo serían equivalentes si los pedazos los cortan (quedando entonces igual en forma y tamaño), pero que si no los cortan son diferentes; una niña opina que ella tiene más pastel porque tiene un pastel entero y una mitad y los demás tienen menos porque sólo tienen pedazos; el resto del grupo al igual que los alumnos de primero opinan que tienen más pastel los que tienen más pedazos.

Posteriormente, el experimentador pide a los alumnos busquen la manera de demostrar a sus compañeros que lo que dicen con respecto a la desigualdad o equivalencia de los repartos es verdad. Para ello, entrega a los equipos los pedazos correspondientes a los repartos que se están comparando; en algunos casos, si es necesario el experimentador entrega tres hojas nuevas para que demuestren sus hipótesis. Los alumnos encuentran es esta sesión las siguientes estrategias o argumentos para validar sus hipótesis.

Estrategias para demostrar la equivalencia (centrando la comparación entre los repartos tipo 1 y 3 [$1\ \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$]):

Primer año:

Erika: "La hoja la partimos a la mitad y las otras también. (Corta por mitad las tres hojas nuevas) Y quedan igual. (Separa tres medios. Junta dos de los medios con los que se quedó y los pone en el pizarrón junto a la hoja entera del reparto tipo 1 [$1\ \frac{1}{2}$]). Quedan igual".

Erika: "Es lo mismo sólo que la hoja está grande (señala el reparto tipo 1 [$1\ \frac{1}{2}$]) y aquí en pedazos chicos (señala los repartos 2 y 3 [$\frac{6}{4}$ y $\frac{3}{2}$])".

Segundo año:

Silvia: "El pastel entero (del reparto tipo 1 [$1\ \frac{1}{2}$]) lo partimos a la mitad y ya quedó igual (muestra el reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$])".

Exp.: "Y si no lo parten ¿de todos modos les toca igual?".

Silvia, Carlos y Alberto: "Sí es lo mismo".

Argumentos para demostrar la desigualdad:
Primer año:

Niños: (La mayoría) "No. Tienen más los que tienen tres (pedazos)".(Se refieren al reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$]).

Segundo año:

Alejandra: "Nosotros tenemos más porque tenemos seis" (pedazos).

Israel y Olmo: Tienen sobre la mesa recortados en medios lo que le había tocado al equipo cinco (reparto tipo 1 [$1\ \frac{1}{2}$]) y a un lado lo que le había tocado al equipo 3 (reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$]).

Israel: "Si lo recortamos el entero en dos (se refieren al reparto tipo 1 [$1\ \frac{1}{2}$]), ya están iguales y tienen lo mismo y si no lo cortamos, el equipo cinco tiene menos pastel (reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$])".

Olmo: "Sólo recortado" (es igual). (se refiere al reparto tipo 1 [$1\ \frac{1}{2}$]).

Marisol y Héctor: (Tienen sobre la mesa por un lado el reparto tipo 1 [$1 \frac{1}{2}$] y por el otro el reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$]).

Marisol: "Tenemos más, porque tenemos un pastel entero y una mitad y el equipo tres tiene tres pedazos" ([$\frac{3}{2}$]).

Alejandra: "Ellos cortaron una hoja (se refiere al reparto tipo 1 [$1 \frac{1}{2}$]), y como tres es más que dos, nosotros tenemos más" (se refiere al reparto tipo 3 [$\frac{3}{2}$]).

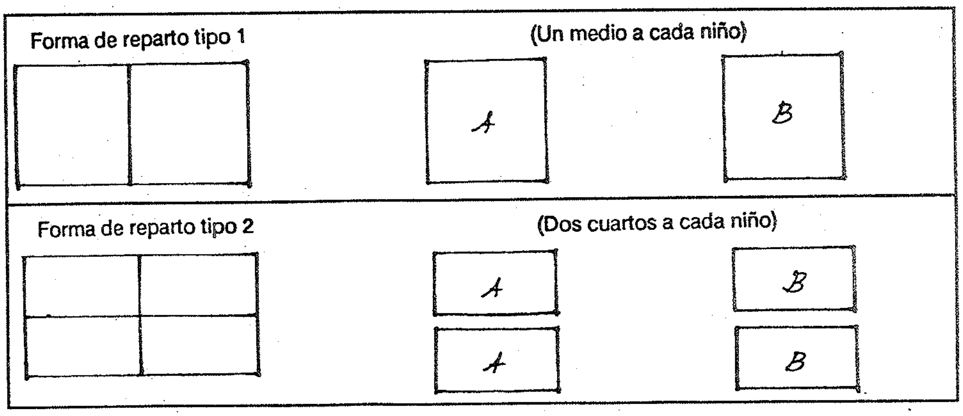
En esta etapa de validación de sus hipótesis, en primer año Erika se sostiene en su afirmación e intenta convencer a sus compañeros uniendo dos medios y comparándolos con el entero del otro reparto. Sin embargo, el resto del grupo no logra ver la equivalencia que Erika considera tan evidente.

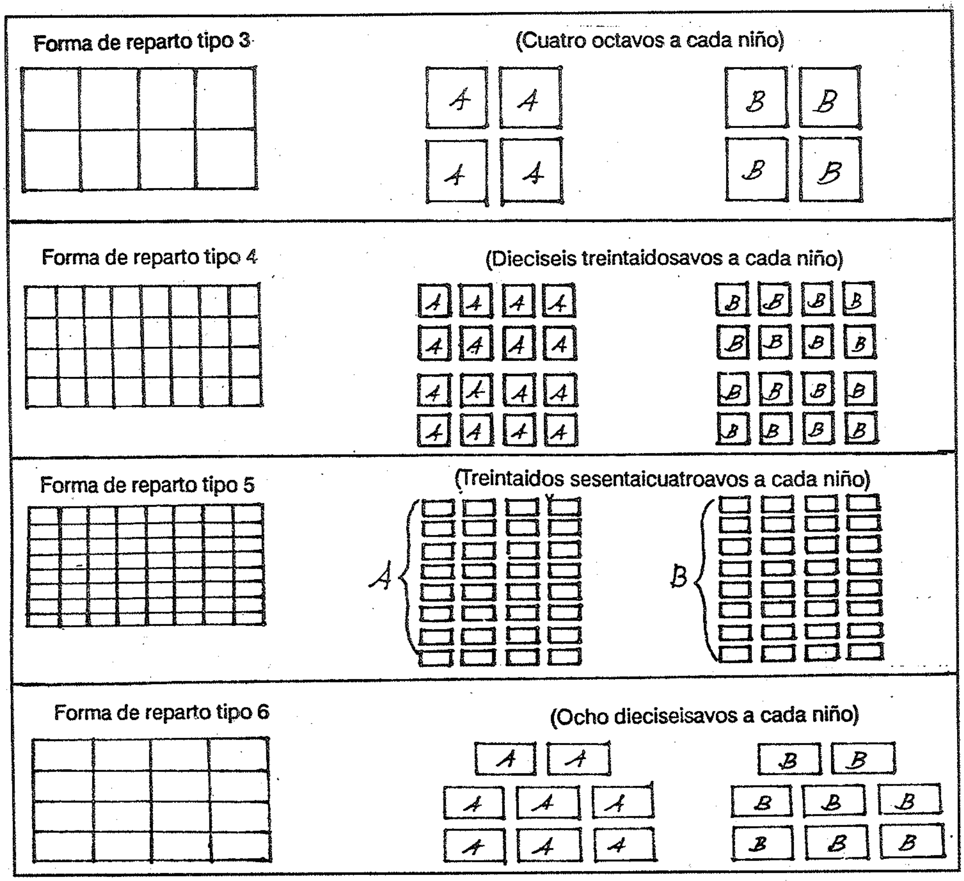
En segundo año, después del trabajo en equipo en busca de estrategias que les permitan demostrar sus hipótesis, Silvia y Alberto se unen a Carlos y manifiestan estar convencidos de la equivalencia de los repartos. Logran demostrarlo cortando el entero en medios y obteniendo así tres medios iguales a los del otro tipo de reparto; afirman también que es lo mismo cortado o sin cortar.

Otros alumnos, aceptan la equivalencia de dichos repartos ($1 \frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$) solo si se corta el entero en mitades. Afirman que solo cortados serían iguales y si no se cortan tiene más el que tiene tres pedazos.

Marisol continúa convencida de que el tener un pastel sin cortar le garantiza tener más pastel que los que tienen sólo pedazos. Héctor se une a la idea de Marisol. El resto del grupo sigue pensando que tienen más pastel los que tienen tres pedazos, apoyándose básicamente en el argumento "el tres es más grande que el dos".

Situación: 1 pastel entre 2 niños. Se generaron entre los dos grupos seis tipos de reparto:





En primer año, los alumnos produjeron sólo los repartos del tipo 1 y 2 y en segundo realizaron los repartos tipo 2, 3, 4, 5 y 6. Como se puede observar, para resolver el primer problema (repartir 1 pastel entre 2 niños), los alumnos continúan utilizando la estrategia de partir por mitad obteniendo repartos equitativos y exhaustivos. Siguiendo la secuencia mostrada en la sesión anterior, los grupos aceptan al interior de cada equipo que los repartos están bien hechos porque a los dos niños de cada equipo les tocó lo mismo y no sobró nada de pastel.

Al plantear el experimentador en ambos grupos el segundo problema (comparación de los diferentes tipos de reparto), la mayoría de los alumnos afirman nuevamente que tienen más pastel los niños que tienen mayor número de pedazos; sin embargo en esta segunda sesión, otros niños además de Carlos (2°.) y Erika (1°.), expresan que los diferentes tipos de reparto son iguales. Algunos lo manifiestan sólo verbalmente y otros se desesperan intentando convencer a sus compañeros de su equivalencia, mostrándola a través del material.

Con el objeto de mostrar la dinámica de la discusión que se generaba en los grupos al plantear el segundo problema, esta vez se mostrá el registro completo de la clase que corresponde a esta segunda parte de la situación didáctica.

Comparación de los diferentes tipos de reparto

Primer año:

Exp.: "¿Al niño que le tocó ésto (señala lo que le tocó al niño A del reparto tipo 1 [$\frac{1}{2}$]), le tocó lo mismo que a éste niño (señala lo que le tocó al niño A del reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$])?"

Obs.: La mayoría de los niños opinan que le tocó más a Raúl (niño A del reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$]). Otros opinan que les tocó igual.

Antonio: "No, no. No tienen lo mismo".

Exp.: A ver Antonio, ¿por qué no les tocó igual?"

Antonio: "Porque Raúl (niño A del reparto tipo 1 [$\frac{1}{2}$]) tiene dos (pedazos) y Virginia uno (niña A del reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$])".

Erika: "Les tocó lo mismo, solo que lo cortaron a la mitad y salieron dos pedazos".

Niños: (Algunos) "Les tocó lo mismo".

Exp.: "¿Cómo podemos saber si les tocó lo mismo?"

Erika: "Porque tenían la hoja y luego la partieron y tienen más chiquitos pero es lo mismo".

Grupo: (Se queda un momento en silencio).

Exp.: "Si Raúl se come estos dos pedazos (señala el reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$]) y Virginia éste (señala el reparto tipo 1 [$\frac{1}{2}$]) ¿se comen lo mismo o no?"

Niños: (Algunos) "Sí, se comen lo mismo".

Obs.: Los niños que decían que les había tocado más al niño que tenía dos pedazos se quedan callados.

Exp.: "¿Seguros que se comen lo mismo?"

Niños: (Más niños que la vez anterior afirman) "Sí".

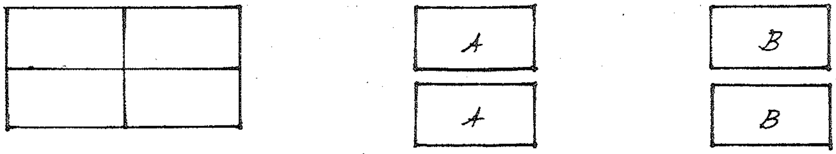
Exp.: "¿Cómo podemos estar seguros que es lo mismo?"

Erika: (Sobrepone en el medio del reparto tipo 1 [$\frac{1}{2}$], los dos cuartos del reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$]) "Es lo mismo, nada más que están más chiquitos".

Segundo año:
Una vez que se tenían a la vista del grupo los diferentes tipos de reparto:

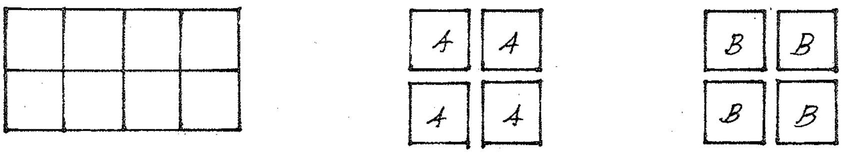
Forma de reparto tipo 2

(Dos cuartos a cada niño)



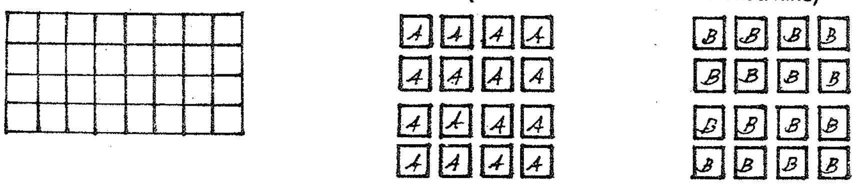
Forma de reparto tipo 3

(Cuatro octavos a cada niño)



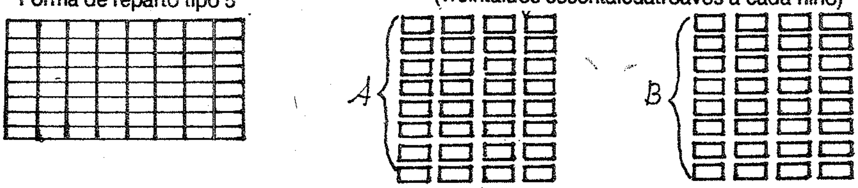
Forma de reparto tipo 4

(Dieciseis treintaidosavos a cada niño)



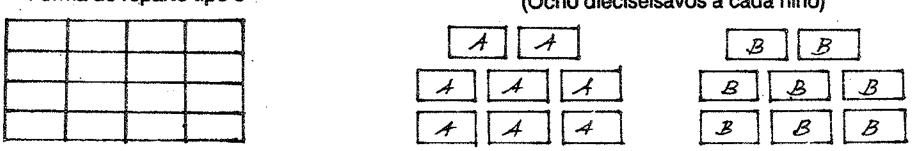
Forma de reparto tipo 5

(Treintaidos sesentaicuatroavos a cada niño)



Forma de reparto tipo 6

(Ocho dieciseisavos a cada niño)



Exp.: (Dice al grupo): "Fíjense lo que les voy a preguntar. Aquí están los pedazos que le tocaron a este niño, aquí los que le tocaron a éste, y aquí los que le tocaron a éste y a éste (va señalando los repartos tipo 5, 2, 4, 3 y 6 producidos por los alumnos). ¿Les tocó lo mismo a todos?"

Austria: "Tiene más el equipo dos (reparto tipo 5 [$\frac{32}{64}$]), porque tiene treinta y dos pedazos".

Claudia: "Tiene menos el equipo...(reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$])".

Israel: "Tenemos más los que tenemos treinta y dos pedazos" (reparto tipo 5 [$\frac{32}{64}$]).

Observ.: Todos los niños gritan, se paran de sus lugares, van al pizarrón corriendo para señalar lo que dicen, se crea cierto desorden, no se entiende nada y se deja de defender lo que dicen los niños.

Exp.: (Pone orden). "A ver, el equipo tres me va a decir, ¿Son iguales?"

Equipo 3: "No, no son iguales, tienen más que todos, los que tienen treinta y dos".

Exp.: "El equipo cuatro ¿qué piensa?".

Equipo 4: "Tienen más los que tienen treinta y dos".

Exp.: "El equipo cinco ¿qué piensa?".

Marisol: "Están igual porque todos ocupamos una hoja".

Austria: "De todos modos son más treinta y dos pedazos".

Exp.: (Dice al grupo) "Dicen que éste tiene más (señala el reparto tipo 5 [$\frac{32}{64}$]) ¿Quién tiene menos?".

Equipo 2: "Los que tienen dos" (pedazos). (Se refieren al reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$]).

Exp.: "¿Y éste?" (Señala el reparto tipo 6 [$\frac{8}{16}$]).

Equipo 3: "Si los cortamos más, queda igual que el de treinta y dos" (se refieren al reparto tipo 6 [$\frac{8}{16}$]).

Exp.: (Pregunta al equipo 3) "¿Entonces tienen igual?" (Señala los repartos [$\frac{32}{64}$] y [$\frac{8}{16}$]).

Equipo 3: "!No!, tienen más los de treinta y dos" (pedazos).

Equipo 1 (Carlos): (Dice con tono de enojo) "Todos tienen lo mismo, nada más que los pedazos son más chicos" (los niños del equipo uno lo apoyan; Carlos continúa) "Es igual porque si los cortamos quedan igual".

Mariana: "Todos tienen lo mismo porque ocupamos una sola hoja".

Exp.: (Calla al grupo) "Miren lo que dice Mariana, dice que todos tienen igual porque ocupamos una sola hoja"

Obs.: No hacen caso y gritan que no, que los que tienen más son los que tienen 32 pedazos y los que tienen menos son los que tienen dos pedazos.

Exp.: "Bueno, les voy a repartir lo que les tocó al niño del equipo cinco (reparto tipo 2 [$\frac{2}{4}$]) y al niño del equipo tres (reparto tipo 6 [$\frac{8}{16}$]) para que busquen una manera de demostrar que tienen más, o tienen menos, o tienen igual" (Entrega a cada equipo los pedazos que corresponden a cada reparto [$\frac{8}{16}$] y [$\frac{2}{4}$] preguntándoles) "¿Ustedes qué piensan? ¿tienen igual? (si el equipo responde "No, tiene más el de ocho pedazos" o "Tienen igual", les dice): "Demuéstrenle a sus compañeros lo que dicen, que tienen más o tienen menos o tienen igual".

Observ.: Una vez que los equipos tienen el material se disponen a trabajar.

Ignacio: (Acomoda los [$\frac{8}{16}$] por un lado y los [$\frac{2}{4}$] por otro) "Aquí es más (dice a su compañero señalando los [$\frac{8}{16}$]), tenemos ocho y aquí (señala los [$\frac{2}{4}$]) menos porque son dos".

Lilia: (Dice a Mariana y Marisol) "Ustedes dicen que es lo mismo, ustedes demuéstrenlo".

Héctor: (Sobrepone [$\frac{4}{16}$] en cada cuarto).

Mariana: (Dice a Marisol) "Ahora nosotros lo llevamos a explicar".

Lilia: "!Ah no!, nosotros lo llevamos".

Marisol: "Sí, sí, que ellos lo lleven (se refiere a Héctor y Lilia).

Ignacio: (Dice a su compañero) "Entonces así estamos bien, yo tengo mucho porque tengo ocho y tú tienes poco porque tienes dos".

Observ.: Mientras los equipos tratan de encontrar cómo demostrar lo que dicen, el experimentador va con cada equipo y les pregunta si ya encontraron como demostrarlo. Pide que le expliquen lo que hicieron.

Exp.: (Pasa al frente al equipo cuatro para que explique).

Fabiola: "Tienen igual".

Obs.: El grupo se desordena, algunos gritan que no es igual.

Ignacio: "No, no tenemos igual, yo tengo ocho y ella dos".

Austria: "Ella tiene menos porque tiene dos y el ocho es más que el dos".

Exp.: (Calma al grupo) "Fabiola dice que tienen igual. ¿Por qué Fabiola?".

Fabiola: "Porque es lo mismo".

Observ.: (Los niños se alborotan otra vez, gritan, se paran, corren y dicen quién tiene más y quién tiene menos).

Exp.: (Calma al grupo nuevamente). "¿Quién va a comer más pastel?"

Austria: "El que tiene ocho".

Exp.: "A ver, el equipo tres explíquenos qué hicieron".

Equipo 3: (Pasa al pizarrón).

Lupita: "Si estos dos (muestra los [$\frac{2}{4}$]) los doblamos así (a la mitad) y así (otra vez a la mitad) y lo cortamos, quedan igual que el otro (el reparto de [$\frac{8}{16}$])".

Exp.: "¿Entonces son iguales?"

Lupita: "No. Si lo cortan tienen igual, si no, tienen menos".

Exp.: "Si cortan éstos (muestra los [$\frac{2}{4}$]), ¿van a tener más pastel?".

Lupita: "Sí".

Exp.: "¿Y ustedes qué piensan?" (Pregunta al grupo).

Niños: (Algunos gritan) "Si los cortan tienen más pastel".
"Si los cortan es igual al de ocho".
(Otros gritan) "Es igual".

Exp.: "Ahora pase el equipo dos".

Olmo: "Este tiene más porque tiene ocho y éste menos porque son dos".

Exp.: "Si se comen el pastel ¿quién va a comer más?".

Equipo 2: "Los que tienen ocho".

Exp.: Ustedes qué piensan, ¿quién se llenaría más pronto si se comen el pastel?, el niño que tiene dos pedazos o el que tiene ocho".

Niños: "El que tiene ocho".

Carlos: (Con tono de obviedad) "Es lo mismo, se llenarían igual".

Niños: "No, se llenaría más el que tiene ocho pedazos".

Exp.: "A ver, pasa el equipo uno".

Equipo 1: (Carlos y Silvia traen sobre un cuaderno [$\frac{1}{4}$] y sobrepuestos [$\frac{4}{16}$]. Lo muestran a sus compañeros).

Exp.: "A ver explíquenlo".

Carlos: "Estos, si los doblamos y los cortamos (muestra [$\frac{1}{4}$]) en cuatro pedacitos quedan igual" (muestran los [$\frac{4}{16}$] encimados en el cuarto).

Exp.: (Pregunta a Carlos) "¿Si los cortamos se hace más o menos?".

Carlos: "Queda igual (dice enojado y continúa) Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces si gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana".

Concepción: "Si los cortamos queda igual, pero si no los cortamos no queda igual".

Observ.: El experimentador repite al grupo lo que dijo Carlos. Solo el equipo cinco está de acuerdo con Carlos.

Exp. "Ahora el equipo cinco pase a explicar cómo le hicieron".

Marisol y Mariana: (Pasan con un libro; sobre el libro traen los [$\frac{2}{4}$] y sobre éstos en cada uno sobrepuestos [$\frac{4}{16}$]).

Marisol: "Son iguales".

Mariana: "Quedan igual en todos".

Exp.: "¿Son iguales porque éstos (señala los [$\frac{4}{16}$]) caben en uno de éstos (señala [$\frac{1}{4}$])?".

Mariana y Marisol: (Asienten).

Niños: (Algunos) "!No!, el que tiene ocho tiene más".

Exp.: "Bueno, como todavía no nos ponemos de acuerdo, síganle pensando en cómo demostrar que tiene más uno que otro o que tienen igual" (Da por terminada la sesión).

Como puede verse, a través de estos fragmentos de la clase, los alumnos de primer año continúan centrados en el número de pedazos que les tocó a cada niño para determinar la desigualdad de los repartos, sólo Erika sostiene su hipótesis y vuelve a demostrar con material esa equivalencia sin lograr convencer a sus compañeros.

En segundo año, además de Carlos otros alumnos (Silvia, Mariana y Marisol) manifiestan ver la equivalencia de los repartos [$\frac{2}{4}$ y $\frac{8}{16}$] (por lo menos en esta sesión), y logran demostrarlo a través de la superposición de los pedazos. Héctor y Lilia, aunque sobreponen $\frac{4}{16}$ sobre $\frac{1}{4}$, no expresan nada sobre la equivalencia (al menos no se tiene registrado), sin embargo por sus acciones parece que intentan demostrarla o tal vez sólo estén haciendo lo mismo que sus compañeras Mariana y Marisol.

Carlos, en esta ocasión en el intento de convencer a sus compañeros (y al experimentador) de la equivalencia de los repartos, busca otro argumento más convincente: "Queda igual (dice enojado y continúa). Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces si gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana". Con este argumento, Carlos manifiesta claramente haber construido la relación 'igual número de pasteles e igual número de niños implica pedazos iguales', independientemente del número de cortes y de la forma de los pedazos. La dificultad para convencer a sus compañeros lo lleva incluso a plantear la única situación en la que los pedazos podrían ser desiguales: que el número de pasteles repartidos fuera desigual. Sin embargo, no logra convencer a la mayoría de sus compañeros que continúan centrados en el número de pedazos para determinar la equivalencia o desigualdad de los repartos o en la hipótesis de que sólo cortando los $\frac{2}{4}$ en $\frac{4}{16}$ cada uno, los repartos $\frac{2}{4}$ y $\frac{8}{16}$ serían entonces equivalentes; si no se cortan, afirman, sigue teniendo más pastel el que tiene mayor número de pedazos.

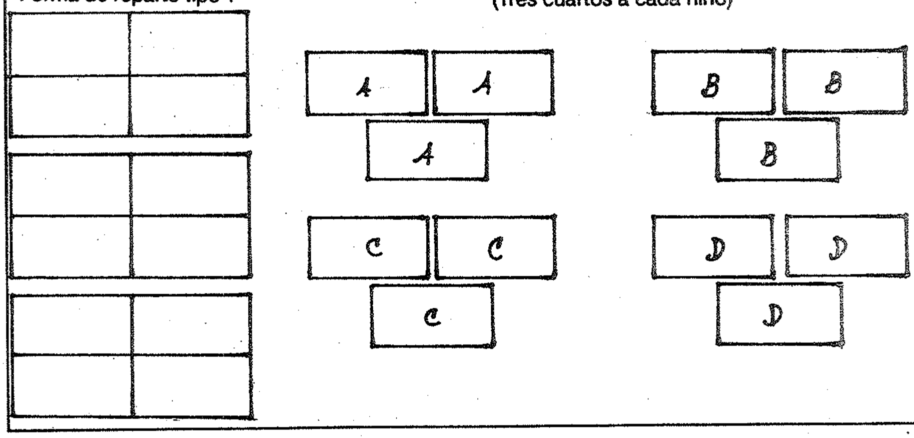
Otra característica que se puede observar en las situaciones que se han mostrado ('3 pasteles entre 2 niños' y '1 pastel entre 2 niños'), es que la tendencia general para realizar los repartos sigue siendo el corte por mitades. Es importante destacar que los alumnos no establecen de antemano esta estrategia de corte. Se dan a la tarea de cortar (siempre por mitades), sin un acuerdo previo explícito, obteniendo repartos equitativos y exhaustivos. Sin embargo, a pesar de no existir explícitamente entre ellos dicho acuerdo, al interior de los equipos los alumnos realizan un número determinados de cortes hasta que obtienen pedazos iguales en forma y tamaño.

Situación 3 pasteles entre 4 niños. Se generaron entre los dos grupos cinco tipos de reparto:

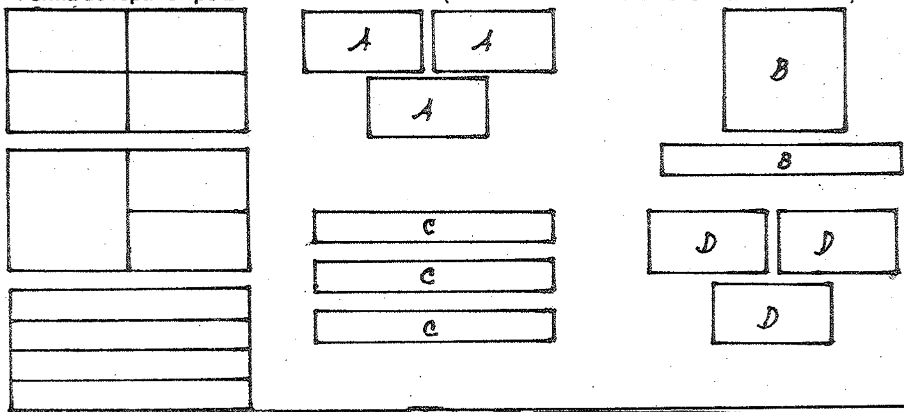
Situación 3 pasteles entre 4 niños (A, B, C, D)

Forma de reparto tipo 1

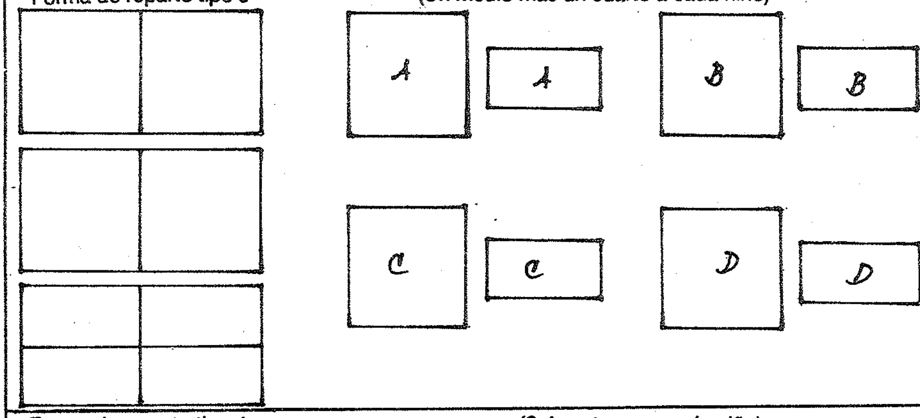
(Tres cuartos a cada niño)



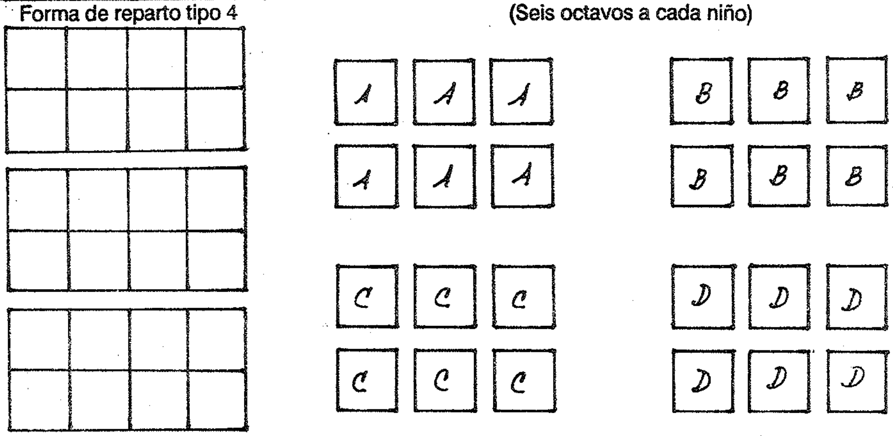
Forma de reparto tipo 2 (Tres cuartos de diferente forma a cada niño)

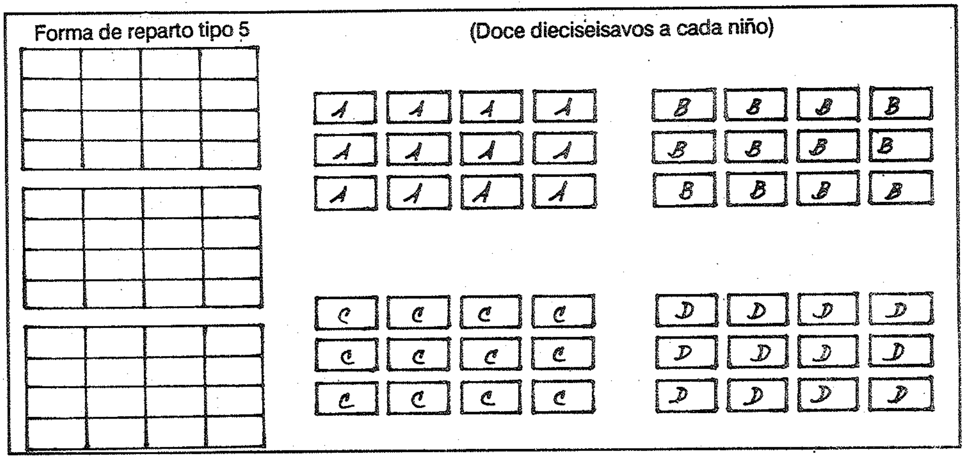


Forma de reparto tipo 3 (Un medio más un cuarto a cada niño)



Forma de reparto tipo 4 (Seis octavos a cada niño)



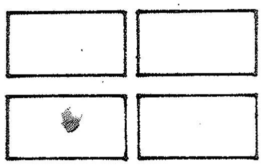


En esta sesión, a diferencia de las anteriores, en primer año los pedazos obtenidos dentro de un mismo equipo fueron diferentes, es decir, aunque realizaron un reparto equitativo y exhaustivo, los pedazos que les tocaron a los niños, no tenían la misma forma y tamaño. A continuación se mostrará el fragmento del registro de clase en el que se puede ver cómo hicieron los alumnos este tipó de reparto:

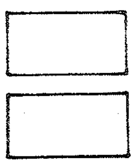
Obs.: Mientras los alumnos realizan el reparto de los 3 pasteles entre los 4 niños, el experimentador se acerca a los equipos, ve lo que hacen y les hace algunas preguntas.

Exp.: Se acerca al equipo cinco y observa lo que hacen.

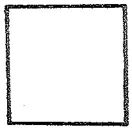
Equipo 5: (Francisco, tiene una hoja que dobla en cuartos y corta).



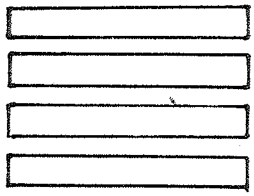
José: (Corta una hoja en medios, le da una mitad a Victoria y él corta a la mitad la media hoja con la que se quedó)



Victoria: (No corta la media hoja que le dió José, la deja sobre su banca y espera).



Antonio: (Corta una hoja en $\frac{4}{4}$ a lo largo, los cortes están un poco chuecos).



Obs.: Cuando terminan de cortar cada quien se queda con lo que cortó.

Exp.: "¡Todos tienen lo mismo de pastel?"

Victoria: "No, todavía no".

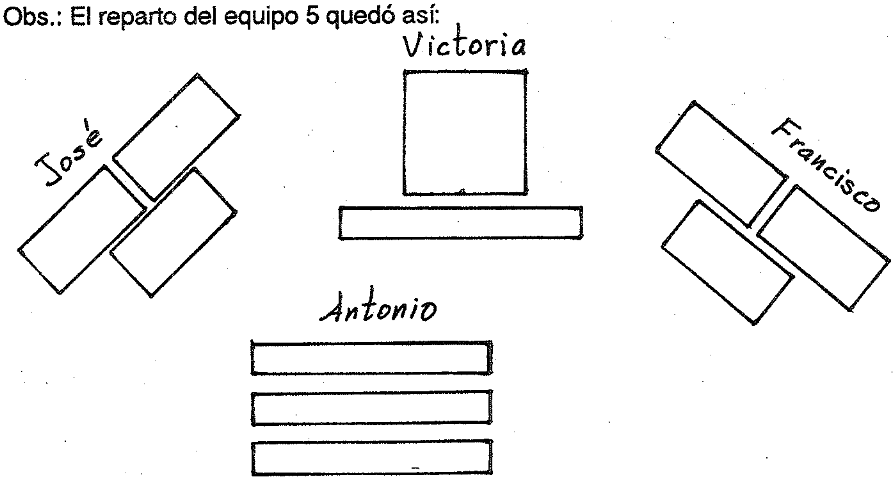
Exp.: "Apúrense pues" (se va con otro equipo).

Antonio: (Da a Victoria el cuarto largo que le salió más chueco).

Francisco: (Da un cuarto ancho a José).

Antonio: "Ya maestra".

Obs.: El reparto del equipo 5 quedó así:

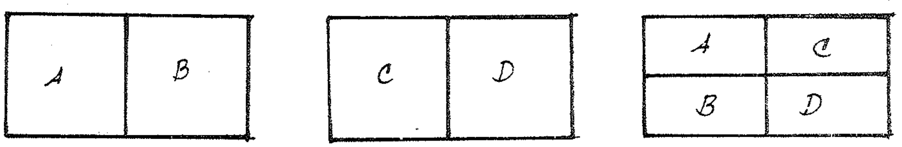


Ninguno de los alumnos de este equipo manifestó explícitamente inconformidad por los resultados de su reparto aunque al interior del equipo tenían formas diferentes. Solo Victoria protestó porque el pedazo (cuarto alargado) que le había dado Antonio estaba un poco chueco y como éste no se lo quiso cambiar decide esconderlo bajo de su banca. Finalmente cuando el equipo pasó a explicar cómo hicieron su reparto, no le quedó más remedio a Victoria que sacar el pedazo escondido.

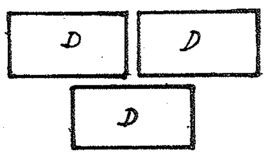
En otros dos equipos, después de haber cortado dos hojas en medios y una hoja en cuartos, y repartido un medio y un cuarto a cada uno, algunos niños cortaron su medio por la mitad quedándose finalmente con $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, y los niños que no cortaron su medio se quedaron con $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Aparentemente, los alumnos estaban convencidos de que a pesar de que al interior del equipo los resultados del reparto tenían formas diferentes, les había tocado lo mismo. Veamos qué es lo que sucede en uno de estos equipos:

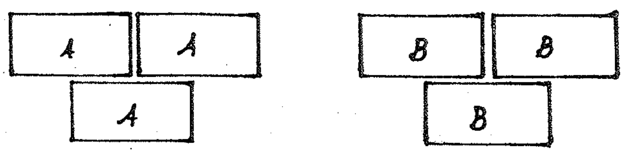
Obs.: En el equipo 1 Erika, Ramón, Kurt y Alberto se habían repartido los pasteles de la siguiente forma:



Alberto: (Corta su medio a la mitad obteniendo quedándose finalmente con $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$).



Erika y Ramón: (Cortan el medio que les había tocado a la mitad quedándose cada uno con $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.



Kurt: No corta su medio y se queda con $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

Exp.: (Se acerca al equipo 1 y les pregunta) "¿Cuánto les tocó a cada quien?"

Niños: (Muestran al experimentador los pedazos que tienen).

Exp.: "¿Y a todos les tocó igualito?"

Erika, Ramón y Alberto: "Sí".

Kurt: (No contesta).

Exp.: (Le dice a Kurt) "¿A ti te tocó igualito que a ellos?" (señala los pedazos de sus compañeros).

Kurt: (No contesta, se agacha).

Erika: "Es lo mismo, nada más que él no lo partió" (señala el medio de Kurt).

Exp.: "¿Si? ¿es lo mismo?" (pregunta a Kurt).

Kurt.: (Se agacha y dice): "Es que no lo corté".

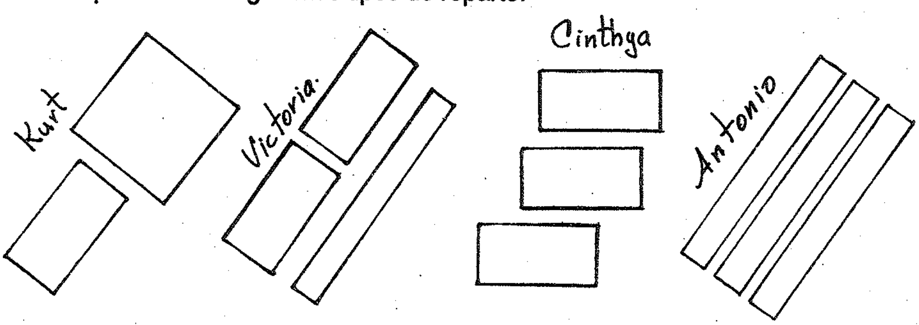
Exp.: "Pero así como lo tienes ¿es lo mismo?"

Kurt: (No contesta).

Erika y Ramón: (Contestan por Kurt) "Es lo mismo, nada más que le falta cortarlo".

Nuevamente Erika, como en las ocasiones anteriores manifiesta estar totalmente convencida de la equivalencia de los resultados que obtuvieron en su reparto. Ramón y Alberto, al parecer también están convencidos de dicha equivalencia, sin embargo, Kurt aunque de manera explícita no manifiesta estar de acuerdo con sus compañeros, en ningún momento decide cortar su medio en cuartos para así tener el mismo número de pedazos que sus compañeros, tal vez realmente haya pensado que tenía lo mismo que ellos aunque su medio no estuviera cortado.

En la confrontación, el experimentador decidió sólo hacer pasar a explicar cómo habían hecho su reparto a aquellos equipos que tuvieran diferentes pedazos, quedando en el pizarrón los siguientes tipos de reparto:



*En la confrontación Victoria corta el medio en cuartos. Ver anexo.

Veamos lo que sucede en primer año cuando el experimentador plantea el segundo problema (comparación de los diferentes tipos de reparto):

Exp.: "Fíjense bien en lo que les voy a preguntar: a un niño le tocó ésto (señala lo que le tocó a Kurt), a otro ésto (señala lo que le tocó a Cinthya), a otro así (señala lo que le tocó a Antonio), y a Victoria así (señala lo que le tocó a Victoria). ¿A todos les tocó lo mismo?"

Niños: (Todos a la vez gritando): "!No, no!, a éste no.(Señalan al pizarrón)".

Exp.: "¿A cuál no?".

Niños: (Pasan varios alumnos corriendo al pizarrón y señalan lo que le tocó a Kurt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).

Exp.: "¿A éste no? (Señala el $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$)".

Niños: "!No!".

Exp.: "¿Y a éstos? (Señala lo de Cinthya [$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$]), Antonio (señala [$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$] alargados]) y Victoria (señala [$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$] anchos y $\frac{1}{4}$ alargado]) ¿les tocó lo mismo?"

Niños: (La mayoría) "!Sí!".

Exp.: "¿Cómo saben?"

Niños: (La mayoría) "Porque tienen tres pedazos".

Exp.: "A ver, vamos a ver. A éste (señala lo de Victoria [$\frac{2}{4}$ anchos y $\frac{1}{4}$ alargado]) y a éste (señala lo de Antonio [$\frac{3}{4}$ alargados]) ¿les tocó lo mismo?"

Erika: "No, porque éstos (señala los cuartos anchos de Victoria) están más gorditos y éstos (señala los cuartos largos) están más delgaditos".

Exp.: "¿Entonces? ¿Ustedes qué opinan? (pregunta al grupo) ¿Cómo son éstos? (señala los cuartos anchos y largos) ¿iguales?"

Niños: (Algunos) "No" (Otros) "Sí".

Gabriela: "No, porque uno está flaquito" (se refiere a los cuartos largos).

Ramón: "No porque dos están más chiquitos (se refiere a los cuartos anchos)".

Es importante destacar que en esta sesión ante la diversidad de las formas de los resultados del reparto; en un primer momento el grupo se centra en el número de pedazos para determinar la equitatividad de los mismos. Posteriormente, cuando se centra la comparación sólo en dos tipos de repartos con igual número de pedazos pero con diferentes formas, los alumnos, incluso Erika, quien hasta ahora había sido la única que ha manifestado tener claridad sobre la equivalencia desde la primera sesión, en esta ocasión, igual que sus compañeros argumenta la desigualdad de los repartos considerando ahora, la forma de los pedazos.

Demostración de sus hipótesis:

Exp.: "Bueno, les voy a entregar a cada equipo lo que le tocó a Antonio ($\frac{3}{4}$ largos) y lo que le tocó a Victoria ($\frac{2}{4}$ anchos y $\frac{1}{4}$ largo); como ustedes dicen que no son iguales, van a buscar una manera de demostrármelo a mí y a sus compañeros" (Reparte $\frac{3}{4}$ largos y $\frac{2}{4}$ anchos y un largo a cada equipo. Recorre los equipos mientras estos trabajan y pregunta): "¿Qué pasó, son iguales o no son iguales?".

Equipo 3: (Sin hacer nada con los pedazos) Dicen que no son iguales porque los largos están muy flacos.

Equipo 2: (Tienen separado lo que le tocó a Victoria de lo que le tocó a Antonio) Dicen que son iguales porque los dos tienen tres pedazos.

Exp.: Pide al equipo dos que demuestre que son iguales.

Equipo 5: No hacen nada con los pedazos, pero dicen que tienen lo mismo porque son tres pedazos.

Exp.: Pide al equipo cinco busque una manera de demostrarlo.

Equipo 1 Erika y Ramón: (Toman lo que le tocó a Victoria y cortan los dos cuartos anchos a la mitad y un cuarto largo a la mitad)

Ramón: "Es lo mismo, a los dos les tocó igual".

Erika: "Es lo mismo, nada más que así (junta dos de los pedazos que cortó y forma un cuarto ancho), son más gorditos".

Exp.: (Se acerca al equipo cuatro y observa lo que hacen).

Equipo 4 Raúl, Claudia y Mariana: (Cortan a la mitad un cuarto ancho y un cuarto largo. Sobreponen los pedazos del cuarto ancho sobre un cuarto largo y los pedazos del cuarto largo sobre el cuarto ancho.

Exp. Llama la atención del grupo y pide que observen lo que hicieron los equipos uno y cuatro.

Claudia: "A los dos (niños) les tocó lo mismo" (muestra como cortaron el cuarto ancho y lo sobreponen sobre el cuarto largo).

Erika: "Si éstos (señala en el pizarrón los cuartos largos) los cortamos así (muestra cómo), nos quedan así (muestra un cuarto largo cortado a la mitad) y salen dos pedazos. Y a éste también (señala un cuarto ancho) si lo doblamos también salen dos"

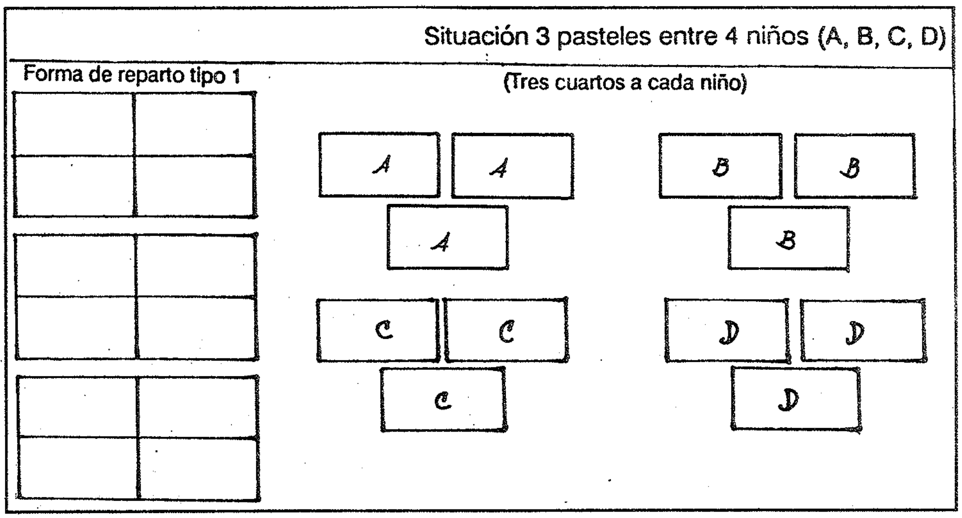
Como se puede ver, Erika, Ramón y Mariana que en otras situaciones han manifestado ver la equivalencia entre los repartos comparados, en esta ocasión, frente a la diversidad de formas de los pedazos retroceden en un primer momento y se centran primero en el número de pedazos y después en su forma para determinar la equivalencia o desigualdad de los repartos. Sin embargo, en la búsqueda de argumentos para demostrar sus hipótesis, apoyados con el material, logran rectificar su argumento y recuperar su hipótesis inicial.

Los alumnos que están convencidos de la desigualdad o equivalencia de los repartos centrándose en el número de pedazos o en sus formas, no sienten una vez más la necesidad de hacer nada con el material y se mantienen en su hipótesis.

Para los alumnos como Claudia y Raúl que muy probablemente están en una etapa de 'transición', es posible que la experiencia de trabajar con material en la búsqueda de argumentos para demostrar sus hipótesis, aunada al hecho de escuchar y ver las demostraciones teóricas y empíricas sobre la equivalencia planteadas por Erika, les hayan permitido reflexionar sobre ella y ayudado a modificar su hipótesis inicial descubriendo la equivalencia de los repartos.

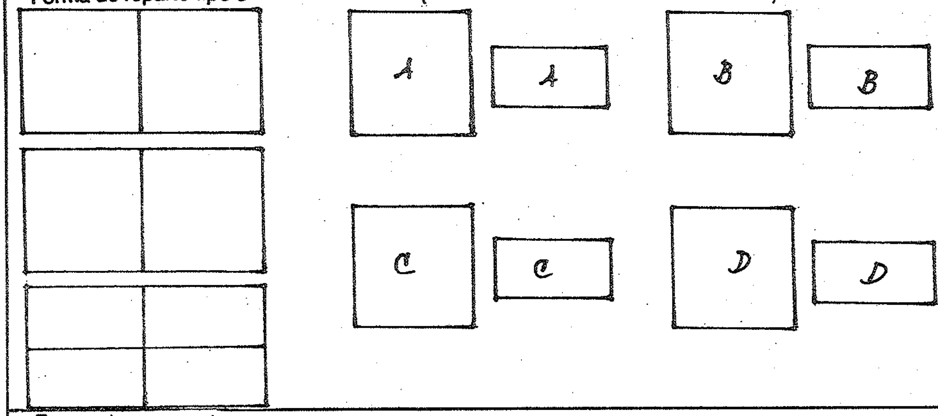
Veamos qué sucedió con esta misma situación ('repartir 3 pasteles entre 4 niños') con los alumnos de segundo año. En este grupo, a diferencia del de primero, los alumnos al interior de cada equipo, produjeron repartos equitativos y exhaustivos con pedazos iguales en forma y tamaño.

El tipo de repartos producidos en segundo fueron los siguientes (1, 3, 4 y 5):



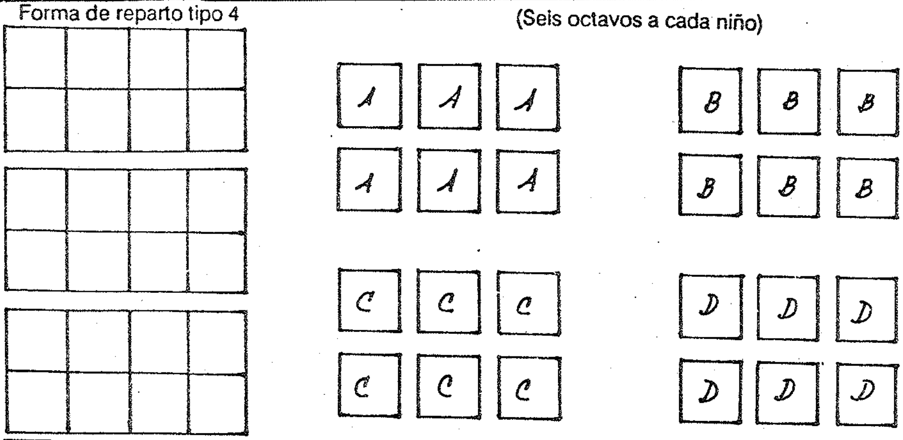
Forma de reparto tipo 3

(Un medio más un cuarto a cada niño)



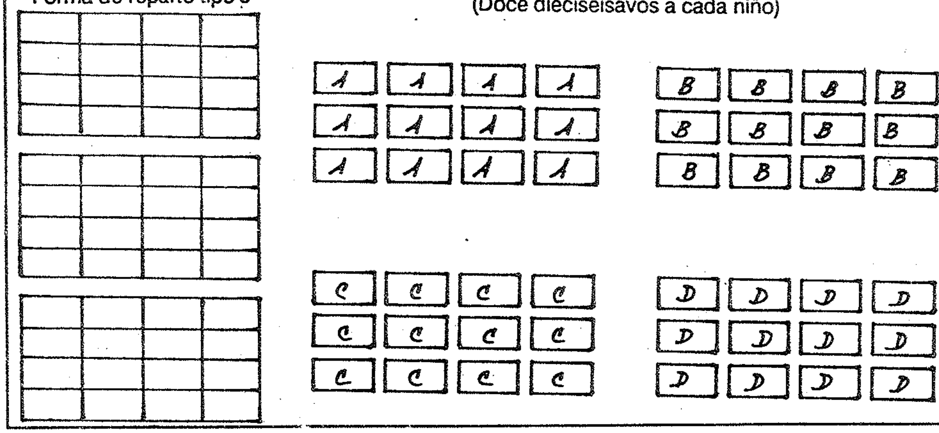
Forma de reparto tipo 4

(Seis octavos a cada niño)



Forma de reparto tipo 5

(Doce dieciseisavos a cada niño)



Exp.: (Tiene en el pizarrón pegados los diferentes tipos de repartos producidos por los alumnos. Plantea la comparación entre ellos)."¿A los cuatro equipos les tocó igualito de pastel?"

Austria: "Ellos repartieron en doce (señala el reparto del tipo 5 [$\frac{12}{16}$]) y el otro en tres (señala el reparto del tipó 1 [$\frac{3}{4}$]). Les tocó más a ellos ($\frac{12}{16}$) y menos a éstos ($\frac{3}{4}$) (señala los repartos tipo 5 y 1).

Carlos: "Les tocó igual. Si pegamos estos dos quedan iguales (toma $\frac{2}{4}$ del reparto tipo 1 y los une). Miren (muestra a sus compañeros los $\frac{2}{4}$ unidos y señala el medio del reparto tipo 3 [$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$])".

Austria: "No es igual, porque está cortado (se refiere a los $\frac{2}{4}$ del reparto tipo 1). Si no lo cortan es igual" (igual al reparto tipo 3 [$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$]).

Carlos: "Si pego los doce de cuatro en cuatro (se refiere a los $\frac{12}{16}$ del reparto tipo 5), son iguales a los tres pedazos (se refiere a los $\frac{3}{4}$ del reparto tipo 1). (Va al pizarrón y une $\frac{4}{16}$ junto a $\frac{1}{4}$). Miren, y entonces a todos les toca igual"

Niños: "!No!, tiene más el que tiene doce".

Es de destacar el manejo de la equivalencia que tiene Carlos y la facilidad que tiene para reconstruir mentalmente los pedazos y ubicarlos dentro de otros. Este manejo, implica la construcción de la relación: 'a igual número de pasteles e igual número de niños, corresponde igual cantidad de pastel independientemente de la forma y tamaño de los mismos'. Esta relación implica a su vez la noción de conservación de área.

Demostración de sus hipótesis:

Exp.: "Les voy a dar lo que les tocó al equipo ... (reparto tipo 3 [$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$]), al equipo ... (reparto tipo 1 [$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$]) y al equipo ...(reparto tipo 5 [$\frac{12}{16}$]). Me van a demostrar que al equipo ... le tocó más, menos o igual que al equipo ..., según lo que ustedes crean. Demuéstrenme lo que crean que sea cierto" (reparte el material).

Equipo 5 Mariana: (Sobrepone $\frac{2}{4}$ sobre $\frac{1}{2}$) Dice que les tocó lo mismo.

Lilia: "¿Qué vamos a hacer con los chicos?" (se refiere a los $\frac{12}{16}$ del reparto tipo 5).

Mariana: "A ponerlos igual, encima" (entre los cuatro acomodan los $\frac{12}{16}$ sobre los $\frac{2}{4}$ que están sobrepuestos en el $\frac{1}{2}$).

Héctor: "¡Entonces es lo mismo!".

Equipo 1: (Sobre su banca unen $\frac{4}{16}$, y junto ponen $\frac{1}{4}$, unen $\frac{2}{4}$ y junto ponen $\frac{1}{2}$).

Observ.: Los equipos 2, 3 y 4 colocan por separado los repartos y continúan diciendo que "el que tiene más pastel es el que tiene doce pedacitos ($\frac{12}{16}$) porque tiene más y el que tiene menos es el que tiene dos pedazos" ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$). Pasan los equipos a explicar lo que hicieron para demostrar la equivalencia o desigualdad de los repartos.

Equipo 5 Mariana: "Todos tenemos igual (muestra los pedazos sobrepuestos)".

Equipo 3: "No, porque ellos lo recortaron" (uno de los niños del equipo 3 dijo a Mariana).

Mariana: (Explica que $\frac{8}{16}$ caben en $\frac{1}{2}$. Muestra sus arreglos de pedazos sobrepuestos con la ayuda del experimentador) "Son iguales".

Exp.: (Pregunta al grupo) "¿Qué pasó?"

Equipo 3: No son iguales porque esos están cortados" (se refiere a los repartos $\frac{3}{4}$ y $\frac{12}{16}$).

Exp.: "Pero ellos dicen que son iguales miren (muestra el arreglo del Equipo cinco).

Equipo 3: Insisten en que los repartos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ tienen menos pastel que el reparto que tiene 12 pedacitos.

Algunas conclusiones sobre los repartos entre 2 y entre 4. En cuanto al primer problema planteado en las situaciones didácticas ('repartir pasteles entre 2 y entre 4 niños'), en general se puede decir, que los alumnos de primero y de segundo grados, aunque a nivel de equipo no establecen una estrategia de reparto de manera explícita, son capaces de realizar repartos entre 2 y entre 4 correctamente, es decir, equitativa y exhaustivamente a través de una estrategia privilegiada: 'partir por mitades'. Por otra parte, logran determinar al interior de los equipos, cuándo un reparto cumple con estas dos condiciones y aceptan como buenos a aquellos repartos que dan como resultado pedazos iguales en forma y tamaño.

En cuanto al segundo problema planteado en las situaciones didácticas ('comparar diferentes tipos de repartos equivalentes'), se pueden identificar cuatro grupos de alumnos que se diferencian por el nivel de explicación que sustentan en cuanto a la equivalencia de los repartos:

- Los alumnos que han construido la relación: a igual número de pasteles y de niños corresponde igual cantidad de pastel, independientemente de la forma de los pedazos y del número de cortes. La construcción de esta relación implica por supuesto ser conservadores de área. Por ejemplo, Carlos de segundo año manifiesta en todas sus intervenciones haber construido dicha relación considerando que la única forma en la que sería posible que a los niños no les tocara lo mismo de pastel sería en el caso de que la variable número de pasteles cambiara: "Queda igual. (dice enojado y continúa) Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces si gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana".

- Los alumnos que manifiestan estar en proceso de construir esta relación, son aquéllos que en determinadas situaciones preven la equivalencia poniendo en juego la relación descrita anteriormente, pero dudan de ella frente a otras situaciones en las que las formas de los pedazos no son usuales o en las que, la gran cantidad de pedazos les dificulta hacer visualmente la comparación de los diferentes tipos de repartos. A estos alumnos la prueba empírica les ayuda a recuperar su hipótesis inicial de equivalencia. Erika es un ejemplo claro de este grupo de alumnos.

- Los alumnos que al ver los distintos tipos de reparto no preven la equivalencia (se centran en el número de pedazos), pero la aceptan frente a los argumentos o demostraciones con material que algunos de sus compañeros presentan.

  De estos alumnos puede decirse que conservan el área porque al *ver* la coincidencia entre los pedazos superpuestos, después de haber ajustado los cortes y las formas, aceptan que hay igualdad. Sin embargo, no se puede decir de estos alumnos que manejen la relación 'a igual número de pasteles y de niños corresponde igual cantidad de pastel', puesto que antes de la demostración empírica no pueden prever la equivalencia. Héctor, Mariana y Marisol son un ejemplo de este grupo de niños.

- Los alumnos que **no** conservan el área y que por lo tanto no han podido construir la relación 'número de pastelesnúmero de niñostamaño del pedazo'. Para estos alumnos, el tener el material a su disposición no les ayuda para ver esa relación de equivalencia, y los argumentos teóricos y empíricos de sus compañeros tampoco les dicen nada. Ignacio es un ejemplo de este grupo de niños.

  Dentro de este grupo de alumnos, considero que existe un subgrupo que llega a plantearse la posibilidad de la equivalencia si se cortan los pedazos pero la niegan en cuanto se vuelven a unir. De estos alumnos se puede decir que al menos se plantean una manera de igualar los diferentes tipos de reparto. Lupita y Concepción son un ejemplo de este subgrupo de alumnos.

  Lo que no permite a estos alumnos aceptar la equivalencia entre los diferentes tipos de repartos es el hecho de que, para ellos, cuando varía la forma de una superficie, el área no se conserva. Es por esto que para ellos es necesario partir físicamente a los pedazos para generar una equivalencia y si los pedazos no se parten la equivalencia no se da. Es decir, no basta con sobreponer los pedazos y ver la coincidencia del área, es necesario partirlos para que el número de pedazos y las formas sean iguales.

Es claro, que el grado en el que el material ayuda a establecer la relación de equivalencia entre los repartos, depende de los niveles de explicación que los alumnos manejen sobre esta relación. Para los alumnos que han construido la relación 'número de pastelesnúmero de niñostamaño del pedazo', tanto como para aquéllos que aún no conservan el área, el material no les es útil. A los primeros, porque pueden prever la equivalencia a partir de dicha relación, sin necesidad de material, y a los segundos debido a que están convencidos de que el número de pedazos y/o la forma, determinan la cantidad repartida. Para estos alumnos, dos pedazos son más que uno, así coincidan al superponerlos.

Es a los alumnos que conservan el área pero que aún no construyen la relación 'número de pastelesnúmero de niñostamaño del pedazo', a quienes el material les permite verificar la equivalencia de los distintos repartos.

Por otro lado, cabe destacar, que en más de una ocasión las intervenciones acertadas de Carlos, Erika y uno que otro alumno más sobre la equivalencia de los diferentes tipos de repartos generados por los alumnos, se produjeron de manera espontánea a lo largo de las confrontaciones sobre la solución del primer problema (repartir pasteles).

Desde el punto de vista de las acciones didácticas era necesario poner a los alumnos en una situación de validación de sus propias convicciones. Para ello el experimentador proporcionaba a los equipos los pedazos correspondientes a dos tipos de reparto equivalente pero de diferente forma, para que las dos posturas que estaban en juego: la equivalencia de los repartos y la no equivalencia fueran defendidas por los alumnos, en función de lo que cada quien creía. Es decir, se trataba de que encontraran argumentaciones para defender sus puntos de vista.

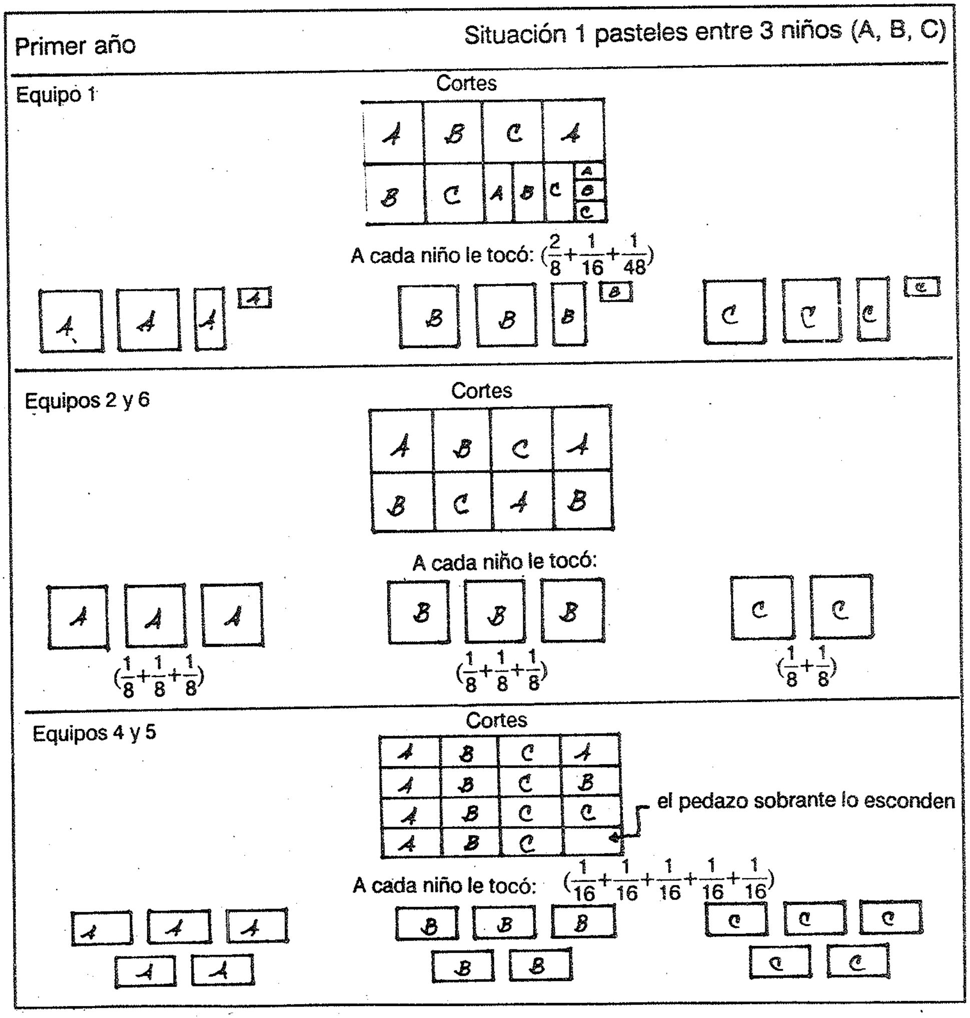
Es importante destacar el valor didáctico de esta búsqueda de argumentaciones para defender sus hipótesis y el valor de las confrontaciones colectivas. Los alumnos aprenden a exponer lo que piensan, a buscar argumentos, pruebas para defender sus puntos de vista y para convencer a sus compañeros. Son muchas veces los argumentos de algunos alumnos los que motivan la búsqueda de nuevos argumentos por parte de otros alumnos. Cuando sus propios argumentos no son suficientes para convencerlos, buscan otros más contundentes, recurriendo incluso, a veces a situaciones hipotéticas ("...si a unos les hubiera dado cinco pasteles y a otros seis, entonces..."). En algunos casos uno o dos alumnos empiezan a dudar de sus hipótesis iniciales ante las evidencias aportadas por sus compañeros. Ciertamente, en estos niveles la búsqueda de argumentaciones más convincentes se dió aún muy poco, como en el caso de Carlos de 2o. año.

b) Repartos entre 3

Como ya se ha dicho, en las situaciones de repartos entre 2 y entre 4, la estrategia privilegiada para resolver el problema fue la de partir por mitades. Esta tendencia natural, llevó a los alumnos a producir repartos equitativos y exhaustivos pero sin ser concientes de que este tipo de cortes los llevaría a realizar repartos exitosos. Dicha tendencia y la falta de conciencia de los resultados que obtendrían se manifiestan con más claridad cuando realizan repartos entre tres.

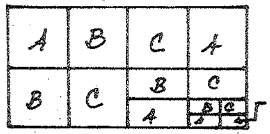
La estrategia que en las primeras situaciones, propiciaba que lograran resolver el problema, en las situaciones de reparto entre tres, les genera un problema más: 'el pedazo sobrante'.

Situación: 1 pastel entre 3 niños (1er grado). Los diferentes tipos de reparto que se muestran fueron producidos por los alumnos de primer año:



Equipo 7

Cortes

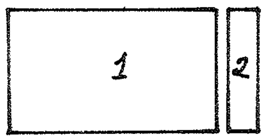


el pedazo sobrante lo esconden

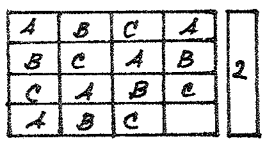
A cada niño le tocó: $(\frac{2}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})$

Equipo 3

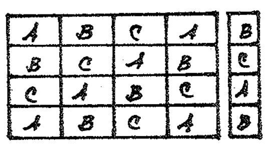
Este equipo corta una tira (2) a lo ancho de la hoja. Esta tira no corresponde a la tercera parte del 'pastel':



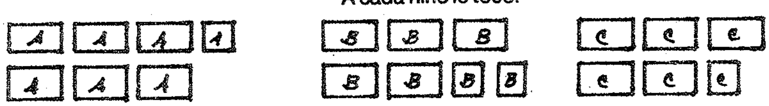
Posteriormente, en el pedazo 1, usan la estrategia de partir por mitades obteniendo dieciseis pedazos iguales, mismos que reparten uno a uno sobrándoles un pedazo:



Retoman la tira 2 y la parten por mitades, obteniendo 4 pedazos iguales pero más chicos que los anteriores. Reparten el pedazo sobrante del reparto anterior y los 4 nuevos pedazos que obtuvieron de la siguiente manera:



A cada niño le tocó:



(7 pedazos) (7 pedazos) (6 pedazos)

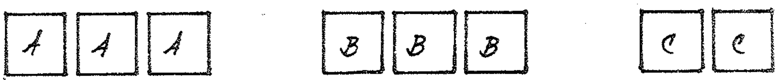
En primer año, sólo el equipo uno, logró en su primer intento repartir equitativa y exhaustivamente. Esto lo logran después de haber hecho varios cortes por mitades y frente al problema del pedazo sobrante deciden cortarlo en tres partes más o menos iguales.

Los equipos cuatro, cinco y siete también cortan por mitades obteniendo un pedazo sobrante que no saben como repartir y deciden en principio esconderlo.

Siempre que los alumnos terminaban de repartir el pastel, el experimentador se acercaba a los equipos y les hacía preguntas como: "¿Cuánto les tocó?, ¿Cómo le hicieron?, ¿A todos les tocó igualito?, ¿No sobró nada de pastel?, ¿Entonces está bien el reparto o está mal?"

Estas preguntas propiciaron que los alumnos reflexionaran sobre el problema del pedazo sobrante (la no exhaustividad), o la desigualdad del reparto (la no equitatividad). Este cuestionamiento hizo que el equipo uno confirmara su resultado. Para los otros equipos, el cuestionamiento propició que buscaran una manera de resolver el problema. Veamos como el equipo dos resuelve finalmente el reparto '1 pastel entre 3 niños':

Equipo 2: Los tres alumnos del equipo se repartieron el pastel así: ($\frac{3}{8}$; $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{8}$).



Exp.: (Se acerca al equipo 2 y los cuestiona) "¿Cuánto les tocó a cada quién?".

Niños: (Muestran al experimentador lo que tienen).

Exp.: "¿Y a todos les tocó igual?".

Niños: "No".

Exp.: "¿Y cómo le van a hacer?".

Alberto: "Hay que repartirlo otra vez". (Dice a sus compañeros).

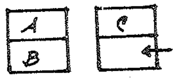
Niños: (Juntan los octavos. Uno de los niños reparte de uno en uno los octavos. Cuando ha repartido $\frac{2}{8}$ a cada uno, le sobran $\frac{2}{8}$. Se queda viendo los $\frac{2}{8}$ sin decir nada).

Exp.: "¿Y ahora? ¿Cómo le van a hacer?".

Kurt: "Lo repartimos".

Exp.: "A ver, repártanselos".

Kurt: (Toma los dos octavos, los dobla a la mitad y los corta obteniendo cuatro pedazos que reparte de uno en uno sobrándole nuevamente otro pedazo.



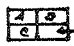
pedazo sobrante

Se queda viendo el pedazo sobrante un momento y después,ve a sus compañeros, juega con el por un momento y se lo muestra al experimentador).

Exp.: "¿Y ahora?".

Alberto: (Dice a Kurt): "Repártelo".

Kurt: (Dobla el pedazo sobrante, nuevamente por mitad hasta obtener cuatro pedazos. Reparte uno a uno quedándole otra vez un pedazo sobrante).



pedazo sobrante

Exp.: "¿Y ahora, qué van a hacer con ese pedacito?".

Niños: (Se ven entre sí).

Kurt: "Ese ya no vale".

Exp.: "¿Ese ya no se puede repartir?".

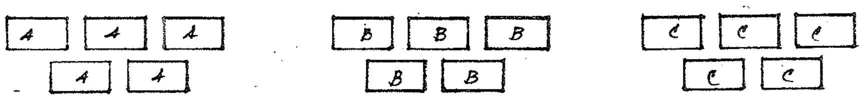
Alberto: "No".

Kurt: "No ya no vale" (Mete el pedacito sobrante rápidamente abajo de la banca).

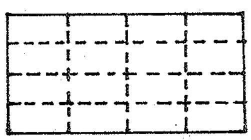
Los equipos cuatro, cinco y siete que en su primer intento de reparto, habían escondido el pedazo sobrante, al ser cuestionados por el experimentador, resolvieron el problema de dos maneras: a veces el último pedacito lo cortaban en tres partes desiguales o definitivamente lo eliminaban.

A manera de ejemplo revisemos lo que sucedió en el equipo cinco:

Equipo 5: Los tres alumnos del equipo se repartieron el pastel así: (cada uno tiene $\frac{5}{16}$).



Equipo 5: (Explica al experimentador cómo hicieron el reparto con una hoja entera).



Exp.: (El experimentador los cuestiona con una hoja doblada en $\frac{16}{16}$) "A ver, cuántos pedacitos les salieron aquí?" (muestra la hoja a los alumnos).

Niños: (Cuentan los 16 pedazos) "Uno, dos, ... dieciseis".

Exp.: "Dieciseis. Y ustedes ¿Cuántos tienen por todos?"

Niños: (Se ven unos a otros y no responden).

Exp.: "A ver, (Cuenta todos los pedazos que tienen los niños). ¿Cuántos son por todos?".

Niños: "Quince".

Exp.: "¿Y?"

Niños: (Se ven unos a otros sin contestar).

Ignacio: (Le dice a su compañera muy quedito) "Sácalo".

Paty: (Se levanta, va hasta donde tiene su mochila y saca del fondo de ésta el pedazo que faltaba. Se lo da al experimentador).

Exp. "!Ah, mira, ahí estaba! ¿Y ahora? ¿Cómo le van a hacer?"

Paty: "¿Repartirlo?".

Exp.: "A ver, ¿Cómo?".

Paty: (Toma el pedazo que habían escondido y lo cortan por mitades hasta obtener cuatro partes. Reparte una a cada niño quedándole un pedazo sobrante que deja sobre la mesa).

Exp.: "¿Y?"

Ignacio: (Toma el pedazo sobrante, lo corta a la mitad, da una a Paty, la otra mitad la vuelve a cortar a la mitad, le da un pedazo a su otra compañera y él se queda con la otra parte).

Exp.: "¿Ahora ya no les sobró pastel?"

Niños: "No".

Exp.: "¿Y los tres tienen igualito?".

Niños: (Cuentan los pedazos que tiene cada quien) "Sí, son siete".

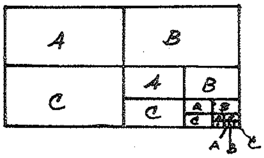
Exp.: "¿Todos tienen lo mismo de pastel?".

Niños: "Si son siete" (cuenta los pedazos de cada quien nuevamente).

Situación: '1 pastel entre 3 niños' (2o. año). Los diferentes tipos de reparto que se muestran fueron producidos por los alumnos de segundo año:

Segundo año — Situación 1 pasteles entre 3 niños (A, B, C)

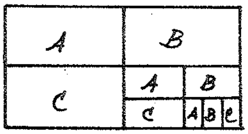
Cortes Equipo 5



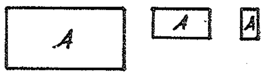
Le tocó a cada niño:

$(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{768})$

Cortes Equipo 4

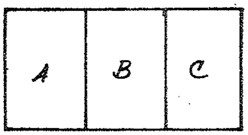


Le tocó a cada niño:



$(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48})$

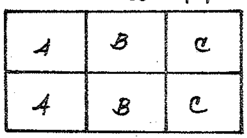
Cortes Equipo 1



Le tocó a cada niño:

$(\frac{1}{3})$

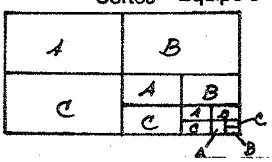
Cortes Equipo 2



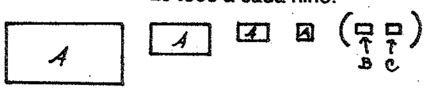
Le tocó a cada niño:

$(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})$

Cortes Equipo 3



Le tocó a cada niño:



$(+\frac{1}{256})$

$(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128})$

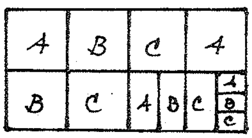
Equipo 6:
Cortan la hoja sucesivamente en $\frac{4}{4}, \frac{8}{8}, \frac{16}{16}, \frac{32}{32}$. Cada vez que hacen un corte reparten y obtienen uno o dos pedazos sobrantes. Juntan los pedazos y vuelven a cortar hasta llegar a $\frac{32}{32}$. Reparten. Cada niño se queda con $\frac{10}{32}$ y sobran 2 pedazos. Cortan algunos pedazos irregularmente hasta que cada niño tiene 8 pedazos.

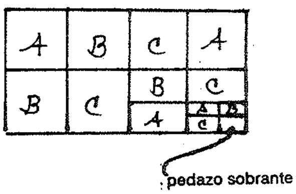
En segundo año como se puede observar, cuatro de seis equipos, logran repartir '1 pastel entre 3 niños' equitativa y exhaustivamente, de estos cuatro equipos, sólo dos parten en tres partes más o menos iguales y reparten un pedazo a cada uno. Los otros dos equipos, llegan a la exhaustividad pero pierden la equitatividad.

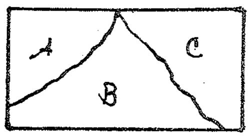
Entre el grupo de primero y segundo, hay una diferencia en los repartos entre 3. En general, en la situación '1 pastel entre 3 niños', sólo un equipo de primero y en contraste cuatro de segundo, logran repartir desde el primer intento equitativa y exhaustivamente, aunque aún no todos parten de entrada entre tres. Los demás equipos de ambos grupos o bien pierden la exhaustividad eliminando el pedazo sobrante (es lo más frecuente), o bien pierden la equitatividad cortando el pedazo sobrante en tres partes desiguales.

En esta sesión, en ninguno de los dos grupos fue posible confrontar dos tipos de reparto, uno que cumpliera con las condiciones de equitatividad y exhaustividad contra otros que cumplieran sólo con una de estas condiciones. En la siguiente sesión una de las actividades que se realizaron ('¿Qué reparto está bien?') se dedicó a la realización de esta confrontación. La finalidad de la sesión fue indagar de una manera más controlada lo que los alumnos pensaban acerca de los repartos no equitativos y exhaustivos.

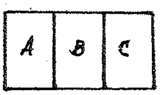
Situación: '¿Qué reparto está bien?'. Se presentaron en primer año los siguientes tipos de reparto

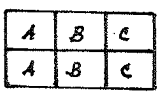


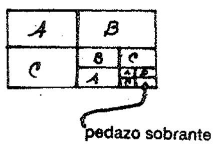




En segundo año se presentaron los siguientes tipos de reparto.







En ambos grupos, el experimentador, frente a los alumnos realizó cada uno de los repartos y posteriormente preguntó si los repartos estaban bien hechos. Tanto en primero como en segundo identificaron como bien hechos a los repartos equitativos y exhaustivos (1, 4 y 5) y como malos a los que no cumplían con alguna de estas condiciones (2, 3, 6 y 7).

En ambos grupos, se preguntó en el caso de los repartos equitativos y exhaustivos (1, 4 y 5): "¿Cómo le podemos hacer para saber si es cierto que no sobró nada de pastel?" Tres alumnos de primer año encontraron una manera de comprobarlo:

Alberto: "Los junto todos"

Exp.: "¿Lo podrías hacer aquí en el pizarrón?".

Alberto: "Sí"

Exp.: "A ver, pasa al pizarrón a hacerlo. Mira aquí te pongo una hoja completa" (pega un 'pastel' en el pizarrón)

Alberto: (Toma los pedazos del reparto 1 y los acomoda sobre la hoja muy irregularmente, en unos lados se salen los pedazos de la hoja y en otros lados falta cubrirla). "Ya" (Dice al terminar de pegar todos los pedazos del reparto 1 sobre la hoja).

Exp.: "Muy bien. ¿Hay uno de ustedes que lo pueda hacer mejor todavía?"

Antonio: "Yo" (Pasa al pizarrón y acomoda un poco mejor los pedazos pero deja huecos sin cubrir) "Así".

Exp.: "A ver, ¿los demás qué dicen? ¿así nos podemos asegurar de que no sobró nada de pastel?

Erika: "No, porque no lo tapó todo".

Niños: (Algunos) "No". (Otros) "Le falta taparlo todo". (Otros) "Sí".

En este fragmento de clase, por lo menos, algunos alumnos de primero manifestaron que para comprobar la exhaustividad era necesario unir las partes y tener así el todo repartido.

En cambio, ante la misma pregunta "¿Cómo le podemos hacer para saber si es cierto que no sobró nada de pastel?", en el grupo de segundo año sólo un alumno argumenta:

Alejandro: "Porque lo partieron a la mitad (son tercios) y a cada uno le toca lo mismo" (se refiere al reparto marcado con el número 4).

Niños: (Los demás no contestan).

En ambos grupos, los alumnos arguementan que para que los repartos 2 y 6 (no exhaustivos) estén bien "hay que repartir el pedazo (sobrante), para que no sobre nada". Repartos como el 3 y el 7 no fueron en ningún momento producidos por los alumnos: estos repartos el experimentador los planteó para cuestionar el manejo que la mayoría de los alumnos hacía sobre la equitatividad de los repartos, centrándose en el número de pedazos que a cada niño le había tocado y no en el tamaño de los mismos.

En el fragmento del registro de clase de primer año que a continuación se muestra, se puede observar que ante la notoria diferencia de los tamaños de los pedazos (repartos marcados con 3 y 7), los alumnos rechazan el reparto a pesar de que a cada niño le había tocado igual número de pedazos.

Exp.: "¿Está bien o mal como repartió este equipo?".

Grupo: "Mal" (a coro).

Exp.: "¿Por qué?".

Niños: (La mayoría a gritos) "Porque no les tocó igual". "Porque a uno le tocó más poquito". "Porque ése (señala el pedazo A), está màs chiquito y éste (señala el pedazo B), está más grandote".

Exp.: "Pero si todos tienen un pedazo, tienen lo mismo".

Erika: (Se levanta de su lugar y va al pizarrón corriendo) "Pero éste (señala el pedazo B) está más grandote y éste (señala el pedazo A) está más chiquito".

Exp.: (Les pregunta a los demás niños) "¿Ustedes qué piensan les tocó igual a los tres niños?".

Grupo: "No".

Exp.: "¿A quién le tocó menos?".

Grupo: "A ése" (señalan el pedazo A).

Como se puede ver, si bien los alumnos en las situaciones anteriores, tendieron a centrarse solo en el número de pedazos para determinar la equitatividad sin tener en cuenta el tamaño de los mismos, cuando las diferencias de tamaño son muy evidentes a simple vista, sí consideran esta variable.

Situación: '2 pasteles entre 3 niños'. En la situación '2 pasteles entre 3 niños', la dificultad del problema aumentó significativamente para los alumnos. Todos los equipos, salvo uno, continuaron usando la estrategia de partir por mitades enfrentándose a los dos primeros pedazos sobrantes. En lugar de centrarse en repartir estos dos pedazos, volvían a cortar por mitades todos los pedazos y repartían nuevamente. Esto provocó que algunos equipos generaran una gran cantidad de pedacitos que luego se repartían de uno en uno entre los tres niños.

En los equipos donde se generaron muchos pedacitos, la única posibilidad que tenían para determinar la equitatividad de los repartos, era garantizar que a cada uno le había tocado el mismo número de pedazos. Dada la cantidad de pedacitos, no era posible reconstruir los pasteles ni verificar la equivalencia de los pedazos. Consecuentemente, el observador no logró hacer un registro detallado de lo que cada equipo estaba haciendo para repartir los dos pasteles.

Sin embargo, en ésta situación se pudo observar que en general, los alumnos continuaron usando la estrategia de partir por mitades para repartir. El problema de los dos primeros pedazos sobrantes los llevaba a:

- Pensar que se habían equivocado al repartir, por éso volvían a reunir todos los pedazos y los repartían de nuevo;

- A cortar nuevamente todos sus pedazos por mitad, varias veces, con la idea de que en algún momento llegarían a obtener los pedazos necesarios sin que les sobrara ninguno;

Finalmente, la estrategia y los cuestionamientos del experimentador, para enfrentarlos al problema del pedazo sobrante, propició las siguientes respuestas:

- Cortaban en tres partes desiguales después de haber cortado varias veces por mitad y haberse dado cuenta que siempre les quedaría un pedazo sobrante. (sobre todo en 2o. grado)

- Eliminar el pedazo sobrante. (sobre todo en 1er. grado)

Estas formas de resolver el problema los hacía perder una de las dos condiciones del reparto: la exhasutividad o la equitatividad.

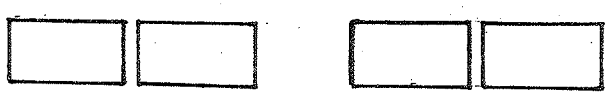
De los dos únicos equipos (2o. grado), que en la sesión anterior ('1 pastel entre 3 niños') habían logrado cortar de entrada en tres partes más o menos iguales para repartir entre 3, en esta sesión sólo un equipo conservó la estrategia.

Un equipo de primer año en su primer intento para repartir los 2 pasteles entre 3 niños, obtuvo resultados no equitativos. Las acciones que los niños realizaron después de darse cuenta de que no les tocó lo mismo de pastel (porque un niño tiene más pedazos que otro), muestran claramente que los niños piensan que partiendo más veces por mitad los pedazos que cada uno tenía, obtendrán en algún momento la misma cantidad. Solo hasta el segundo intento se dan cuenta de que además deben redistribuir los pedazos. Se les presenta entonces el problema del pedazo sobrante. Veamos como hizo el reparto un equipo de 1er grado en la situación '2 pasteles entre 3 niños':

Observ.: Una vez que el equipo dos tiene sus dos hojas, dos niños toman una hoja y las cortan por mitad.

Virginia: (Da una mitad a Kurt).

Verónica: (Corta las dos mitades que tiene en cuartos).



Virginia y Verónica: (Dicen a Kurt que también corte a la mitad su media hoja).

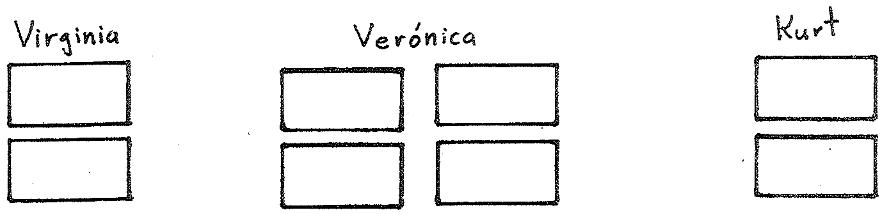
Aos.: (Cortan hasta que todos tienen cuartos).

Verónica: (Ve lo que tiene ella [$\frac{4}{4}$] y lo que tienen sus compañeros. Le da $\frac{1}{4}$ a Virginia y se lo quita, después se lo da a Kurt y se lo quita quedándose ella con los $\frac{4}{4}$)

Virginia: (Trata de quitarle $\frac{1}{4}$ a Verónica, ésta no se deja).

Virginia y Kurt: (se enojan con Verónica).

Observ.: Cada niño se queda con lo siguiente:



Exp.: "A ver, ¿qué pasó? ¿Ya terminaron?"

Niños: (No contestan).

Exp.: "¿Eso les tocó a cada quien?".

Niños: (No contestan).

Exp.: "¿Los tres tienen igualito?"

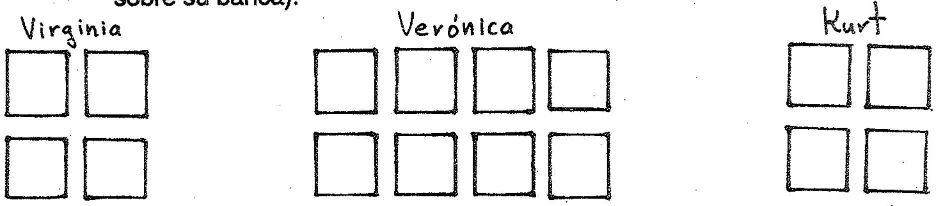
Kurt: "No, ella tiene más" (señala a Verónica).

Virginia: (Intenta arrebatarle $\frac{1}{4}$ a Verónica, ésta no se deja).

Kurt: "Vamos a cortarlos así todos". (Toma uno de sus cuartos y lo dobla a la mitad).

Verónica y Virginia: (También cortan por mitad todos sus cuartos).

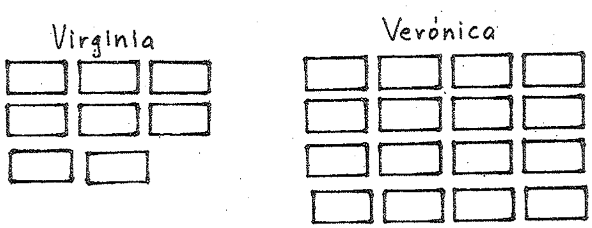
Observ.: (Cuando terminan, acomodan cada quien los pedazos que obtuvieron sobre su banca).



Niños: (Se quedan viendo lo que tiene cada uno).

Verónica: "Vamos a cortarlos otra vez" (Toma un octavo y lo corta a la mitad).

Aos.: (Cortan todos los octavos en dieciseisavos. Acomodan los pedazos que obtuvieron sobre su banca).



Aos.: (Ven lo que tienen cada quien, se ven entre sí).

Virginia: "Pero ahora, hay que revolverlos todos y luego los repartimos".

Alumnos: (Revuelven todos los dieciseisavos y los reparten uno a uno entre los tres hasta que a la que reparte le quedan $\frac{2}{16}$ en la mano. Estos pedazos sobrantes, los cortan a la mitad y se los reparten.

Cortan el pedazo sobrante a la mitad y una de ellas a la mitad y los reparten).

Algunas conclusiones sobre el reparto entre 3. En éstas situaciones de reparto se pone en evidencia que la construcción de la estrategia para partir entre 3 aparece más tardíamente que la construcción de la estrategia para partir entre 2, como lo ha demostrado J. Piaget en sus investigaciones. Al repartir 1 pastel entre 3 niños, sólo dos equipos de segundo logran partir el entero en tres pedazos de entrada y de estos dos equipos, sólo uno mantiene esta estrategia cuando la dificultad del problema crece con el aumento del número de pasteles a repartir. El resto de los alumnos continúa utilizando la estrategia de partir por mitades para hacer sus repartos.

Tanto en primero como en segundo, los alumnos que utilizan la estrategia de partir por mitades tienen la hipótesis de que en algún momento 2^n llegaría a ser múltiplo de 3. Esta hipótesis se pone en evidencia con más claridad en uno de los equipos de primer año, el de Virginia, Verónica y Kurt, en la situación '2 pasteles entre 3 niños'.

Sin embargo, unos alumnos más pronto que otros debido a la estrategia que utilizan, se enfrentan inevitablemente al pedazo sobrante, ya sea por sí mismos o por los cuestionamientos del experimentador.

Como ya se ha visto, la manera en que resuelven el problema del pedazo sobrante fue: a) cortándolo en tres partes más o menos iguales, b) cortándolo en tres pedazos desiguales o c) eliminándolo. Las dos últimas estrategias provocaban que los alumnos perdieran alguna de las dos condiciones básicas del reparto, la equitatividad o la exhaustividad.

La cantidad de pedazos obtenidos, producto del tipo de cortes realizados, hizo difícil que los alumnos se dieran cuenta de la pérdida de alguna de las dos condiciones del reparto, por lo que nuevamente se centraron en el número de pedazos para determinar la equivalencia o no equivalencia de los repartos.

Es importante destacar que debido a la mayor dificultad que presentó la situación '2 pasteles entre 3 niños', disminuyó el número de equipos que en '1 pastel entre 3 niños' logró hacer el reparto exitosamente, conservando la equitatividad y la exhasutividad.

V.Conclusiones

1. Procedimientos y concepciones de los alumnos en los problemas de reparto.

Repartos reales: Un problema significativo para alumnos de 1° y 2°. Como se ha podido ver a lo largo de este trabajo, los alumnos de primero y segundo grado pueden abordar problemas de reparto. Se ha visto también que, para que los problemas de reparto tengan sentido para los alumnos y den lugar a la movilización de sus recursos previos, es necesario que los repartos no sean hipotéticos sino reales, es decir, si se van a repartir 3 pasteles entre 4 niños, debe haber en el equipo 4 niños. No conciben hacer un reparto entre menos o más niños de los que hay en el equipo.

Cortes por mitad. La estrategia de partir por mitades utilizada por los alumnos para resolver el problema, es al parecer la estrategia que ya han logrado dominar, ya que sin establecer un acuerdo previo explícito, todos los alumnos desde el primer momento en el que inician el reparto hacen este tipo de cortes. Esta estrategia, si bien les permite resolver exitosamente los repartos entre 2 y entre 4, no les resulta igual de funcional en los repartos entre 3.

En los repartos entre 3, casi todos los alumnos usan la estrategia de partir por mitades, sin darse cuenta de que con ese tipo de cortes no podrán resolver en este caso el problema, puesto que siempre les quedará un pedazo sobrante.

La manera en que intentan resolver el problema del pedazo sobrante es en la mayoría de los casos partiendo nuevamente con cortes sucesivos por mitad. Sólo después de hacer varios intentos de repartirlo cortando por mitades, se dan cuenta de que deben partir el pedazo sobrante en tres partes. Sin embargo, no todos llegan a cortarlo en tres pedacitos más o menos iguales, algunos alumnos, como se ha visto lo hacen siguiendo la estrategia de partir por mitades obteniendo 3 pedacitos desiguales perdiendo consecuentemente la equitatividad.

Número de cortes. La estrategia de partir por mitades para realizar los repartos propicia que los alumnos obtengan diferentes resultados dependiendo éstos de la forma en que reparten y del momento en el que deciden implícitamente dejar de cortar. Es probable que la forma en que hacen los cortes esté influida por: a) las primeras acciones realizadas por los alumnos para repartir y b) las hipótesis que manejan influyan en el número de cortes. A continuacón se explicarán éstas posibles causas:

a) Si en un reparto en el que el número de pasteles alcanza para repartir de entrada uno a cada niño (por ejemplo 3 pasteles entre 2 niños), suele suceder que se repartan un pastel a cada niño y el pastel sobrante lo corten sólo una vez por mitad y cada niño se quede con una parte.

   En los repartos en donde los pasteles no alcanzan para repartir de entrada uno a cada uno (3 pasteles entre 4 niños), sucede que cortan sólo las veces necesarias para que a cada niño le toque su parte. Primero 2 pasteles por mitad, reparten una a cada uno y el tercer pastel cortarlo dos veces por mitad ($\frac{4}{4}$) y repartir uno a uno.

   También sucede que al recibir el material, decidan de manera implícita, cortar los pasteles en mitades sucesivas hasta que todos estén cortados en pedazos del mismo tamaño para repartirlos en un segundo momento uno a uno a cada niño.

b) El número de cortes puede estar influido también por la hipótesis que algunos niños manejan, a saber: a mayor número de pedazos mayor cantidad de pastel. El deseo de obtener más pastel que los compañeros de otros equipos, los lleva a hacer más y más cortes.

Equitatividad y exhaustividad. Como se ha podido observar, en las situaciones de reparto entre 2 y entre 4 los alumnos logran repartir equitativa y exhaustivamente e identifican al interior de cada uno de los equipos, cuando los repartos cumplen o no con estas dos condiciones.

En las situaciones de reparto entre 3, una buena parte de los alumnos (sobre todo en primer año), pierden alguna de estas dos condiciones al realizar los repartos. En este caso reconocen no haber cumplido con la condición de la exhaustividad cuando no logran repartir el pedazo sobrante. En los casos en los que el pedazo sobrante lo cortan en tres partes desiguales, no se dan cuenta de que no cumplen con la condición de equitatividad.

Repartos equivalentes. Como se ha visto, los alumnos de primero y segundo grado fueron capaces de resolver exitosamente el primer problema planteado (repartir equitativa y exhaustivamente *X* pasteles entre 2 y 4 niños), produciendo a partir de su estrategia de partir por mitades una variedad de formas de repartir equivalentes.

Esta diversidad de resultados permitió plantear el segundo problema (comparación de diferentes tipos de reparto equivalentes), al que los alumnos se enfrentaron y a través del cual se pudieron detectar diferentes niveles de explicación sobre la equivalencia o *no* equivalencia de los repartos.

Por un lado se tiene a los alumnos que al enfrentarse a la comparación de dos repartos equivalentes con formas diferentes, afirman y argumentan la *no* equivalencia de los mismos y por otro a los alumnos que ven con toda claridad dicha equivalencia sosteniéndola y demostrándola a través de diferentes recursos.

Los alumnos que afirman que los tipos de reparto a comparar no son equivalentes lo manifiestan utilizando los siguientes tipos de argumentos.

- Argumentos que se centran en el número de pedazos dejando de lado la forma y el tamaño de los mismos ("tiene más el que tiene más pedazos").

- Argumentos que se centran en la forma y/o tamaño de los pedazos. Al comparar dos repartos equivalentes con el mismo número de pedazos pero de diferente forma, toman en cuenta entonces la forma y el tamaño de los mismos ("Este tiene más porque es más gordito y éste tiene menos porque es más flaquito).

- Argumentos en los que aceptan la equivalencia si y solo si los pedazos no se hubieran cortado, pero la niegan porque se han cortado (por ejemplo: un medio partido en dos cuartos ya no es equivalente a un medio sin partir por el solo hecho de haberse partido).

El problema que subyace a estos tres tipos de argumentos utilizados por los alumnos para demostrar la *no equivalencia* de los repartos es la falta de conservación de área. El no ser conservadores, propicia que los alumnos consideren que hay más o menos pastel cuando los pedazos están cortados que cuando no lo están.

A nivel de material concreto, la equivalencia entre los repartos trabajados no resultó evidente para aquellos alumnos que todavía no logran coordinar las variables: 'número de pedazos y tamaño de los mismos' que son inversamente proporcionales; se centran entonces en el número de pedazos y comparan los cardinales de cada reparto como lo hacen con los números naturales: la mitad de un pastel es menor que la misma mitad del pastel partida en dos pedazos porque el "uno" es más chico que el "dos", por lo tanto tiene más pastel la mitad que está formada por dos pedazos.

A estos alumnos, el material concreto a la vista y a la mano no les ayuda para descubrir la equivalencia entre esos repartos. Están convencidos de que mientras más pedazos tengan más cantidad de pastel tienen, o de que la equivalencia no se da por el simple hecho de que los pedazos están cortados. En consecuencia, cuando se les pide que verifiquen su hipótesis de *no* equivalencia con el material, no sienten la necesidad de hacer nada con él. Sus compañeros no logran convencerlos de la equivalencia a pesar de los esfuerzos que realizan por demostrárselas a través de la superposición de los pedazos, haciéndolos coincidir, y mucho menos a través de sus argumentos orales sobre la equivalencia de los repartos.

En el otro extremo se tiene a los alumnos que a simple vista logran ver la equivalencia de los diferentes tipos de repartos presentados y que además logran establecer una relación que da cuenta del avanzado nivel de explicación que tienen sobre este problema.

Carlos, claramente en todas sus intervenciones demostraba tener conservación de área; consideraba que todos los repartos eran iguales porque se había repartido la misma cantidad de pastel entre el mismo número de niños y que la diferencia entre los repartos estaba en que los pedazos eran más chicos o más grandes pero que en realidad era la misma cantidad.

Atrás de las expresiones de Carlos subyace algo más importante. Carlos no sólo manifestó ser conservador de área a través de sus demostraciones de equivalencia de los repartos comparados a nivel empírico, es decir, cortando y superponiendo los pedazos de papel para mostrar la coincidencia, sino que, a través de sus argumentos, de una manera al principio implícita, demostró el manejo de la relación: 'a igual número de pasteles e igual número de niños corresponde igual tamaño del pedazo; independientemente de la forma en que se hagan los cortes'.

El manejo de dicha relación, permitió a Carlos no sólo ver la equivalencia de los repartos al comparar físicamente los pedazos, sino anticipar que si se aumentaba o disminía el número de pasteles, conservando la variable número de niños entre los que se haría el reparto, la cantidad de pastel que le tocaría a cada niño cambiaría; pero que si estas variables eran las mismas para todos los equipos, independientemente de la forma en que repartieran, del número de pedazos obtenidos y de la forma o tamaño que éstos tuvieran, la cantidad de pastel era la misma, es decir, los repartos eran equivalentes:

> *"Queda igual (dice enojado y continúa). Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces si gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana".*

Para los alumnos como Carlos que son conservadores de área y además manejan la relación 'número de pasteles, número de niños, tamaño del pedazo', el material concreto ya no es necesario para convencerse de la equivalencia de los repartos (al menos en estos casos). Hacen uso del material solo para demostrar a sus compañeros su hipótesis. Para ellos, dicha equivalencia tiene ya el carácter de necesaria y evidente y por lo tanto no necesitan ya de demostraciones empíricas.

Es evidente la diferencia entre los niveles de explicación sobre la equivalencia que tiene Carlos y la mayoría de los alumnos que manifiestan no tener conservación de área. Sin embargo no todos los alumnos se encuentran en estos extremos. Existe otro grupo de alumnos que son conservadores de área, pero que todavía no logran manejar la relación 'número de pasteles, número de niños, tamaño del pedazo'

Este grupo de alumnos, logra ver a primera vista la equivalencia en ciertos tipos de reparto, recurren a las comprobaciones empíricas para demostrar a sus compañeros la equivalencia de estos repartos. Sin embargo, el hecho de que estos alumnos demuestren ser conservadores de área, no significa que puedan ver la equivalencia en todos los casos.

Cuando los resultados de los repartos son muy variados (gran cantidad de pedazos, pedazos con formas poco usuales difíciles de ubicar a simple vista dentro de otros pedazos), estos alumnos, regresan a su esquema anterior centrándose en el número de pedazos o en su forma y tamaño para determinar la equivalencia o *no* equivalencia de los repartos, .

Es para estos alumnos a los que les es de gran utilidad el uso del material concreto para descubrir a través del corte y de la superposición de los pedazos la equivalencia de esos repartos, recuperando así la explicación de equivalencia que sostenían antes de enfrentarse a comparar formas de reparto poco usuales. Erika es un ejemplo claro de este grupo de alumnos que son conservadores de área pero que aún no manejan la relación 'a igual número de pasteles e igual número de niños, corresponde igual tamaño del pedazo; independientemente de la forma en que se hagan los cortes'.

Frente a estos diferentes niveles de explicación al segundo problema planteado, se puede concluir que, independientemente de que los alumnos de estos grados sean capaces de hacer repartos equitativos y exhaustivos, es un requisito indispensable que sean conservadores de área para que puedan ver la equivalencia entre los diferentes resultados de un mismo reparto (cuando se trabaja con superficies).

En cuanto a la utilidad del material concreto, se puede concluir que para los alumnos que están en los extremos: por un lado los que aún no son conservadores y por otro lado los que ya manejan la relación 'número de pedazos número de niños, tamaño del pedazo', tener el material concreto para descubrir la equivalencia no les es útil, por distintas razones a unos que a otros.

Es para los alumnos que están en una etapa de transición, es decir para quienes son conservadores pero que aún no construyen la relación mencionada, para quienes el material concreto es de gran utilidad para comprobar de manera empírica que hay equivalencia.

Queda claro también, que la construcción de la relación 'número de pasteles, número de niños, tamaño del pedazo', implica ser conservador de área. Sin embargo, ser conservador de área no necesariamente implica manejar la relación mencionada.

Cabe preguntarse ahora: ¿cómo logró Carlos construir esta relación? Las situaciones didácticas a las que se enfrentó Carlos ¿propiciaron la construcción de esta realción? ¿en qué momento Carlos logró hacer consciente dicha relación?

Considerar que la serie de situaciones didácticas planteadas a estos grupos lograron que Carlos construyera la relación mencionada sería un error, como lo sería también pensar que la noción de conservación de área la adquirirían los alumnos a través de situaciones como éstas. Es sabido ya que la adquisición de este tipo de nociones y relaciones dependen de la madurez mental de cada individuo y de una experiencia con el mundo físico que va más allá de unas cuantas sesiones de clase en la escuela.

Lo que seguramente sí logró construir Carlos a partir de las situaciones didácticas planteadas, de las discusiones que se dieron al interior de los grupos sobre la equivalencia o no de los repartos fue la explicitación consciente de la relación mencionada, producto de la reflexiones que hizo sobre el problema, en la búsqueda de argumentos que lograran convencer a sus compañeros de su hipótesis.

Finalmente, se deja a nivel de hipótesis el hecho de que, si bien la construcción de ciertas operaciones y relaciones como la conservación de área, la relación 'número de pasteles número de niños, tamaño del pedazo' no se dan como consecuencia de las situaciones didácticas planteadas, se considera que estas situaciones pueden formar una parte importante de la experiencia que ayudará a los niños en el proceso de construcción de las mismas.

2. Valor didáctico de las situaciones planteadas

Otro elemento que considero importante de destacar es el valor didáctico de las confrontaciones colectivas para los alumnos. Se logró generar dentro del salón de clases un ambiente de confianza y de respeto mutuo, en donde los alumno sintieron que podían expresar con libertad sus ideas sin el temor de que éstas fueran a ser rechazadas por el experimentador y por sus compañeros.

Más aún, se vieron obligados y a la vez motivados a expresar sus ideas, a defenderlas a probarlas y a intentar probar los errores de los otros. Esto los llevó, por un lado, a construir explicitaciones cada vez más claras y por otro a aprender a refutar hipótesis que consideraban erróneas y a defender y demostrar las suyas.

Es importante destacar que los alumnos de primero y segundo grado fueron capaces de expresar lo que sabían acerca del problema planteado, de expresar sus ideas sobre el mismo y de buscar argumentos para defenderlas. Ideas que desde el punto de vista del maestro pueden ser consideradas erróneas, pero que son un paso necesario en la adquisición del conocimiento.

Los mismos niños fueron quienes validaron o invalidaron las hipótesis de sus compañeros buscando argumentos para demostrar el error o la veracidad de sus propias hipótesis y, a través de las diferentes situaciones, frente a la necesidad de convencer a sus compañeros elaboraron argumentos cada vez más contundentes (para ellos), que reflejan una comprensión del problema y un involucramiento en el mismo. Esto les permitió reflexionar y avanzar en la elaboración de sus hipótesis, a través de la experiencia, de las discusiones, de las demostraciones con material y de los argumentos basados en la reflexión de los propios alumnos sobre el problema.

La actividad central del maestro en este tipo trabajo no es el de dar información simple y llanamente, sino el de organizar la actividad a través de la cual los alumnos van a aprender, el de coordinar las discusiones en las que los propios alumnos son los que van marcando las metas que el maestro debe irse planteando sobre el contenido que se está manejando, el de presentar los contra-ejemplos más adecuados posible, que permitan a los alumnos cuestionar sus hipótesis y los lleven a reflexionar sobre el problema, a buscar otra explicación que los aproxime al objetivo deseado.

Lograr todo esto es una tarea difícil sobre todo para los maestros que tradicionalmente acostumbran ser ellos los que dicen a sus alumnos qué se debe hacer, cómo se debe hacer, si lo hicieron bien o mal y quien dice incluso,lo que los alumnos deben decir y cómo lo deben decir.

Es necesario romper con el esquema en el que el maestro es el poseedor del saber y los niños son como una página en blanco en la que el maestro va a imprimir todos los conocimientos que estos deben aprender. Es necesario tomar en cuenta que los alumnos antes de ingresar a la escuela han tenido una gran cantidad de experiencias a lo largo de su vida, que tienen una gran cantidad de conocimientos, ideas, hipótesis acerca del mundo que les rodea, adquiridas a través de sus observaciones de las acciones propias sobre las cosas y de las acciones que realizan para poder desenvolverse dentro de su realidad. Todas estas experiencias han aportado conocimientos en los niños que deben ser considerados para que, a partir de ellos, se inicie la enseñanza hacia conocimientos más formales dentro de la escuela.

3. ¿Conviene enseñar las fracciones en los primeros grados de la primaria?

Esta experiencia muestra los importantes obstáculos a los que se enfrentan los niños en las situaciones de reparto, incluso utilizando material concreto y aún en el caso más simple de los medios, como por ejemplo el hecho de considerar que un medio cortado a lo largo tiene menos cantidad de pastel "porque está flaquito" y el otro tiene más cantidad de pastel "porque está gordito" Este sólo hecho indica lo prematuro e infructuoso que resulta introducir la noción de fracción a nivel simbólico, incluyendo la equivalencia basada en cuerpos o superficies en los primeros grados de la educación primaria, como se ha venido planteando en los currículos oficiales. Los alumnos, como se ha demostrado, no tienen aún los elementos indispensables, en particular la conservación de área, para poder abordar este conocimiento.

Considero por lo tanto que ha sido un acierto que en la propuesta de la reforma educativa se excluya del programa la enseñanza de las fracciones en los primeros grados de la educación primaria. Creo además que es conveniente se inicie la introducción de este contenido a partir de problemas de reparto con material concreto como los que se trabajaron en esta investigación, previamente al uso de la representación simbólica, para que el alumno conciba al resultado obtenido de un reparto como una fracción del todo repartido, reconozca poco a poco las equivalencias entre los diferentes tipos de repartos, asocie estos resultados con las denominaciones establecidas para posteriormente pasar a la representación simbólica de las fracciones que en ese momento tendrán un significado para los alumnos.

Cabe preguntarse, ¿por qué considero conveniente que se inicie la enseñanza de las fracciones a partir de tercero, si a lo largo de la experiencia se ha mostrado la capacidad que tienen los alumnos de los primeros grados de primaria para abordar este tipo de problemas, lo fructífero que resultó la interacción de los alumnos con las situaciones, con el material y la interacción entre los propios alumnos en las discusiones que se dieron en las confrontaciones?

Por un lado, considero más adecuado se inicie la enseñanza de las fracciones a partir de tercer año, ya que, como se ha podido observar a través de las hipótesis explicitadas por los niños que participaron en esta experiencia, la mayoría aún no tiene la noción de conservación de área; mientras que en el trabajo realizado por Block, D.[34], en general los alumnos de tercer año de primaria son ya conservadores; por lo tanto si se aborda la enseñanza de este tema en 3°, las dificultades que en esta experiencia se presentaron con los alumnos de 1o. y 2o. se salvarían.

Por otro lado, si bien considero que este tipo de experiencias posiblemente favorezcan el proceso de construcción de las nociones y relaciones antes mencionadas, considero también riezgoso que actividades como estas se propongan dentro de los programas de los primeros grados por la tendencia de los maestros a exigir soluciones y respuestas 'correctas' a pesar de que los alumnos aún no tengan los elementos necesarios para llegar a ellas.

Considero importante para la formación de las nuevas generaciones de maestros y para aquéllos que estén en servicio, se incluya en los currículos de las escuelas formadoras de maestros y en los programas de capacitación, análisis de situaciones didácticas como ésta y como muchas otras en donde se manifiesta la capacidad de razonamiento de los niños y la importancia de que el maestro conozca el proceso de desarrollo intelectual de los mismos.

[34] Block, D. (1987) op cit.

Anexo A

Análisis Previo

Segunda Sesión — 24 de mayo de 1988

Tema: Fracciones — 2o. año

Situación Didáctica: Repartir tres pasteles entre 4 niños

Material: Hojas de papel tamaño carta que representan a los pasteles

Consigna Inicial: "Vamos a repartir estos tres pasteles entre ustedes cuatro, que a los cuatro les toque lo mismo y que no sobre nada de pastel".

Confrontación: Cada equipo deberá explicar al resto del grupo la forma en que hicieron el reparto. El resto del grupo deberá indicar si el reparto está bien hecho o no, es decir si cumple con las condiciones de equitatividad y exhaustividad (que a todos les toque lo mismo y no sobre nada de pastel).

Consigna para la demostración de las hipótesis de los alumnos: "Busquen la manera de demostrar a sus compañeros que lo que dicen ustedes es verdad" (Si dos diferentes tipos de reparto son iguales o no)

Plan de trabajo:

- Formar equipos de 4 niños cada uno.
- Dar la consigna y entregar el material.
- Trabajo en equipos.
- Confrontación

- Comparación de los diferentes tipos de reparto.
- Consigna para la demostración de hipótesis.
- Confrontación.

Desarrollo de la actividad:

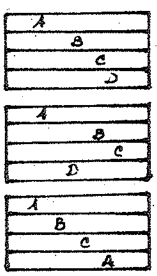
Se formarán los equipos de cuatro niños cada uno. Se dará la consigna y se repartirá el material. Cada equipo deberá tener 3 hojas blancas tamaño carta que representarán los pasteles que se van a repartir entre los cuatro integrantes del equipo.

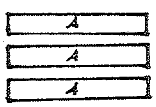
Trabajo en equipo. Mientras los equipos realizan los repartos, el experimentador deberá recorrer los equipos para detectar los diferentes tipos de reparto que se produzcan, con el objeto de pasar sólo aquéllos equipos que hayan producido diferentes formas de reparto evitando así que se prolongue demasiado la actividad. También cuestionará a los alumnos sobre la forma en que realizaron los repartos y lo que piensan acerca de los resultados obtenidos.

Confrontación colectiva. En esta etapa de la situación, los equipos que hayan realizado diferentes tipos de reparto, detectados por el experimentador pasarán a explicar a sus compañeros la manera en que repartieron los 3 pasteles entre los 4 niños. Se pegará el resultado obtenido en el pizarrón y se preguntará al resto del grupo si algún otro equipo repartió de la misma manera. Estos mostrarán a sus compañeros el resultado que obtuvieron.

Al terminar cada equipo de mostrar cómo hicieron su reparto, el experimentador preguntará al grupo si el reparto cumple con las condiciones de la consigna: "Si a todos los niños del equipo les tocó lo mismo de pastel y si no sobró nada". En el caso de que algún alumno o equipo no acepte como bueno algún reparto, el experimentador pedirá que explique por qué no considera que ése reparto esté bien hecho y qué se deberá hacer para que sea un reparto correcto.

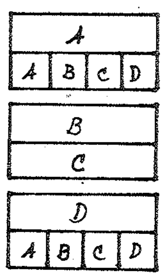
Seguramente, aparecerán diferentes formas de repartir como ha sucedido en sesiones anteriores, pero si sólo apareciera una o dos formas, el experimentador presentará los siguientes tipos de reparto:

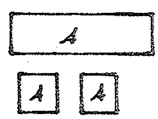




Le tocaría a cada niño:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$





Le tocaría a cada niño:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

Se les explicará la forma en que se realizaron esos repartos, y se les preguntará cada vez que se termine de mostrar como se repartieron los pasteles, si el reparto cumple con las condiciones de equitatividad y exhaustividad.

Comparación de los diferentes tipos de reparto. Una vez que se tengan todos los repartos diferentes pegados en el pizarrón, el experimentador preguntará: si a todos los niños de todos los equipos les ha tocado lo mismo de pastel. Ya sea, que los alumnos opinen: que sí les ha tocado lo mismo, o que no les ha tocado lo mismo, el experimentador solicitará que expliquen por qué piensan de esa manera.

Seguramente la mayoría de los alumnos aún se centrarán en el número de pedazos para determinar la equivalencia o desigualdad de dos repartos. Nuevamente se les solicitará busquen una manera de demostrar sus hipótesis con el objeto de que los alumnos que pueden ver la equivalencia de dichos repartos la demuestren a sus compañeros.

Es posible que a los alumnos que están más próximos en su proceso de adquisición de conservación de área, estas demostraciones les ayuden a ver la equivalencia de los repartos confrontados.

Trabajo en equipos. Para que los alumnos demuestren sus hipótesis acerca de la equivalencia o desigualdad de los resultados de los repartos. El experimentador repartirá a los equipós lo que le tocó a un niño de dos diferentes tipos de reparto, con la consigna: demuestren a sus compañeros que la cantidad de pastel que les tocó a estos dos niños es igual o es diferente según el caso.

Confrontación colectiva. En esta última etapa de la situación, los alumnos presentarán al grupo los argumentos encontrados para demostrar a sus compañeros la validez de su hipótesis.

Probablemente, muestren la equivalencia superponiendo los pedazos de ambos repartos como lo hicieron en la sesión anterior o recortando los pedazos, obteniendo así pedazos en forma y tamaño iguales para demostrar su equivalencia.

Observaciones. Las observaciones del registrador deberán centrarse en:

- Diferentes formas de reparto que se produzcan.
- Diálogos de los niños al interior del equipo mientras realizan el reparto
- Argumentos de los alumnos para defender sus puntos de vista en cuanto a la equitatividad o desigualdad de los repartos.
- Formas que los alumnos que tienen conservación de área encuentran para demostrar sus aseveraciones.

- Argumentos de los alumnos que no aceptan la equivalencia para defender su postura.

- Intervenciones del experimentador.

Anexo **B**

Registro de clase

31 de mayo de 1988,

Tiempo 40 min

Tercera sesión, Primer año

Situación: Repartir 3 pasteles entre 4 niños.

Se formaron 5 equipos de 4 niños. En el equipo 3 faltó un alumno y ocupó su lugar Lucio que ha venido cambiando de equipo sustituyendo a los que faltan.

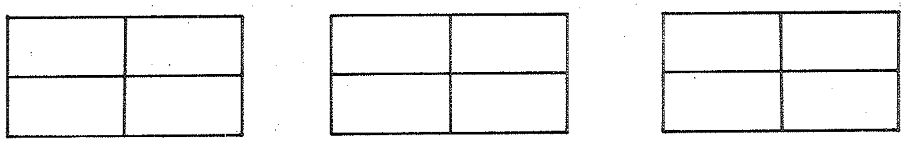
Equipo 1:	Kurt Alberto Erika Ramón	Equipo 3:	Gabriela Lucio Paulina Patricia
Equipo 2:	Verónica Liliana Oliva Virginia	Equipo 4:	Mariana Cinthya Claudia Raúl

Equipo 5: José
Victoria
Antonio
Francisco

Exp.: (Reparte a cada equipo 3 hojas tamaño carta a la vez que daba la consigna) "Vamos a repartir estos tres pasteles entre ustedes cuatro, que a los cuatro les toque lo mismo y que no sobre nada de pastel". (Repite la consigna).

Obs.: En cuanto los equipos reciben las hojas empiezan a realizar el reparto.

Equipo 3: Paulina, Patricia y Lucio toman cada uno una hoja y la cortan en cuartos:



Patricia: (Da a Gabriela 2 pedazos y se queda con 2). "¿Cuánto tienes tú?" (le dice a Paulina).

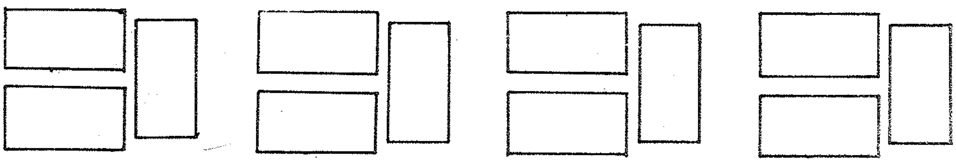
Paulina: (Muestra los cuatro cuartos).

Patricia: (Le quita a Paulina $\frac{1}{4}$) "¿Y tú?" (le pregunta a Lucio).

Lucio: (Muestra, sus $\frac{4}{4}$, ve lo que tiene Gabriela y le da $\frac{1}{4}$, quedándose él con $\frac{3}{4}$).

Patricia: "Ahora sí, ya cada quien tiene tres pedazos". (El reparto del equipo 3 quedó así):

Paulina Patricia Lucio Gabriela

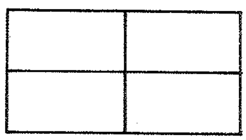


Obs.: Mientras los alumnos trabajan el experimentador se acerca a los equipos, ve lo que hacen y les hace algunas preguntas.

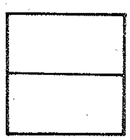
Exp.: (Se acerca al equipo 5 y observa lo que hacen).

Equipo 5:

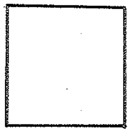
Francisco: (Tiene una hoja que dobla en cuartos y corta).



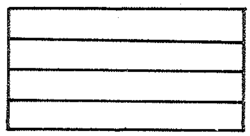
José: (Corta $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$).



Victoria: (Tiene $\frac{1}{2}$ sobre su banca).



Antonio: (Corta una hoja en $\frac{4}{4}$ a lo largo; los cortes están un poco chuecos).



Obs.: Cuando terminan de cortar cada quien se queda con lo que cortó.

Exp.: "¿Todos tienen lo mismo de pastel?"

Victoria: "No, todavía no".

Exp.: "Apúrense pues". (Se va con otro equipo).

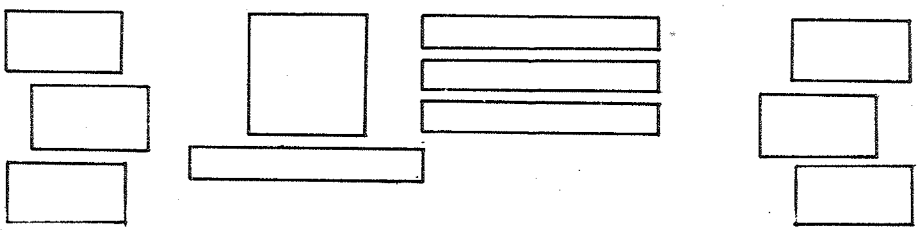
Antonio: (Da a Victoria el cuarto que le salió más chueco).

Francisco: (Da $\frac{1}{4}$ a José).

Antonio: "Ya maestra".

Obs.: El reparto del equipo 5 quedó así:

José Victoria Antonio Francisco



Victoria: (Trata de que Antonio le cambie su pedazo chueco por uno de los que él tiene).

Antonio: (No acepta el cambio).

Victoria: (Mete el cuarto chueco abajo de su banco).

Equipo 1:

Erika y Ramón: (Cada uno dobla en medios una hoja y cortan).

Kurt: (Dobla en cuartos una hoja y corta).

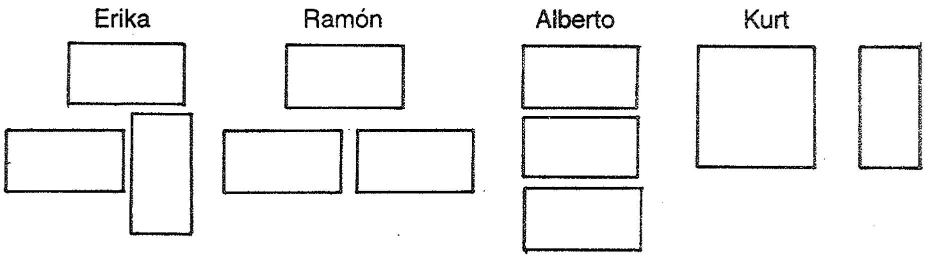
Ramón: (Toma las mitades que cortaron él y Erika y reparte una mitad a cada niño del equipo).

Erika: (Toma los cuartos que cortó Kurt y reparte uno a cada uno).

Alberto: (Observa cómo reparten. Toma el medio que le tocó, lo dobla a la mitad y lo corta).

Erika y Ramón: (Cortan el medio en $\frac{2}{4}$).

Obs.: El reparto del equipo 1 quedó así:



Exp.: (Se acerca al equipo 1) "¿Ya terminaron?"

Erika: "Ya".

Exp.: "¿Cuánto le tocó a cada quién?"

Kurt: (Muestra su mitad y su cuarto).

Erika, Ramón y Alberto: (Muestran sus $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$).

Exp.: "¿Y a todos les tocó igualito?".

Erika, Ramón y Alberto: "Sí".

Kurt: (No contesta).

Exp.: (Le dice a Kurt) "¿A tí te tocó igualito que a ellos?" (señala los pedazos de sus compañeros).

Kurt: (No contesta, se agacha).

Erika: "Es lo mismo, nada más que él no lo partió" (señala el medio de Kurt).

Exp.: "¿Sí? ¿Es lo mismo?".

Kurt: (Se agacha y dice) "Es que no lo noté".

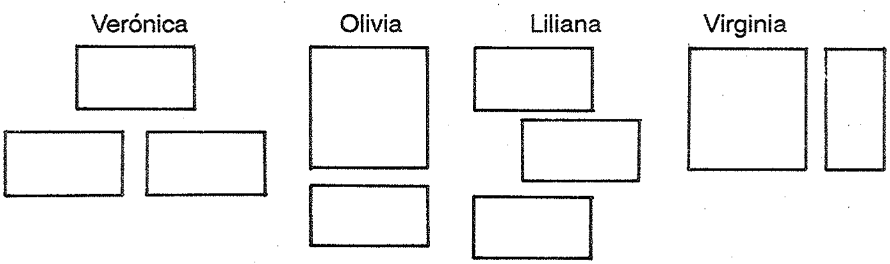
Exp.: "Pero así como lo tienes ¿es lo mismo?".

Kurt: (No contesta).

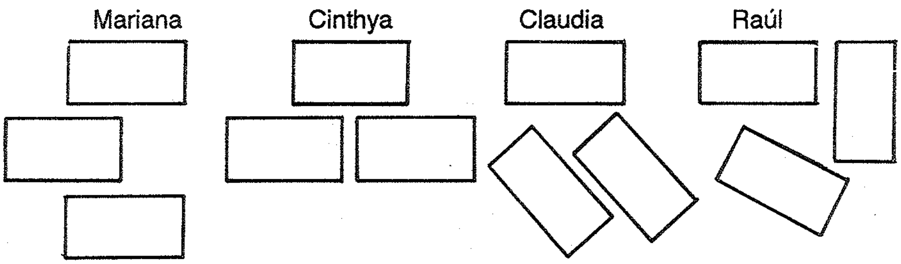
Erika y Ramón: "Es lo mismo, nada más que le falta cortarlo".

Obs.: Mientras los equipos 3, 5 y 1 hicieron su reparto, los niños del equipo 2 y 4 también hicieron lo suyo; el Experimentador ha estado en cada equipo haciendo intervenciones similares.

Equipo 2: (Cortaron los 3 pasteles a la mitad, repartieron una mitad a cada uno, los 2 medios sobrantes los cortaron nuevamente a la mitad y repartieron un cuarto a cada uno. Dos niños cortan a la mitad el medio que les tocó). El reparto quedó así:



Equipo 4: (cortan en medios y luego en cuartos las tres hojas, juntan todos los cuartos y reparten de uno en uno a cada quien). El reparto quedó así:



Exp.: (Toma los pedazos que le tocaron a Kurt y los muestra al grupo diciendo): "A ver niños, levanten la mano los niños que les tocó igualito que a Kurt. Levanten sus pedazos sólo los niños que tienen lo mismo que Kurt".

Niños: (Algunos niños levantan $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ y un cuarto).

Exp.: "Vamos a pegar en el pizarrón uno de éstos que les tocó". (Pide a Kurt que pase al pizarrón y pegue lo que le tocó y que expliquen al grupo cómo hicieron para repartirse los pasteles).

Kurt: (Pega en el pizarrón su medio y su cuarto, toma una hoja que el experimentador le da para que explique cómo hicieron el reparto y dice): "Lo doblamos así". (Dobla frente al grupo la hoja a la mitad).

Exp.: (Repite lo que dijo Kurt y muestra el doblez). "¿Y luego?" (pregunta a Kurt).

Kurt: "Luego la otra y la otra" (se refiere a las otras dos hojas).

Exp.: "¿Y luego? ¿Qué hicieron cuando ya los tenían así cortados?" (en mitades).

Kurt y Erika: "Uno cada quien" (dicen a la vez).

Exp.: "¿Y luego?".

Erika: "Cortamos dos (mitades) otra vez a la mitad y nos tocó uno a cada quien".

Exp.: "¿Y por qué Kurt tiene así (señala $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) y ustedes así (muestra los $\frac{3}{4}$ de Erika, Ramón y Alberto).

Erika: "Porque éste (señala el medio de Kurt) lo cortamos".

Obs.: Mientras Kurt y Erika explican a los demás alumnos, algunos platican, otros juegan con sus pedazos y otros están escuchando.

Exp.: (Levanta la voz como llamando la atención) "A ver, fíjense bien, a quiénes les tocó así como le tocó a Alberto". (Muestra los $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ de Alberto).

Niños: (La mayoría de los niños levantan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ iguales a los de Alberto).

Exp.: "A ver" (revisa los pedazos que muestran los niños). "Como a la mayoría les tocó así (vuelve a mostrar los pedazos de Alberto), que pase Cinthya a pegar lo que le tocó".

Cinthya: (Pasa y pega los $\frac{3}{4}$ en el pizarrón).

Exp.: "Y me pueden explicar cómo le hicieron los niños que les tocó así". Pide al equipo 4 explique cómo le hizo.

Claudia: (Pasa al frente, toma la hoja que le da el experimentador y dice) "Cortamos así (dobla la hoja a la mitad) y luego así (dobla la hoja nuevamente a la mitad) y luego nos tocó tres a cada quien".

Exp.: "Los otros dos pasteles, ¿los cortaron igual?".

Claudia: "Sí y nos tocaron tres a cada quien"

Exp.: (Se dirige al equipo 5, toma lo que le tocó a Antonio [$\frac{3}{4}$ alargados], los muestra al grupo y pregunta): "Y a quién le tocó así como le tocó a Antonio, miren lo que le tocó a Antonio".

Niños: (Nadie levanta la mano, ven los pedazos de Antonio).

Obs.: (Al pasar el experimentador con Antonio, se da cuenta que Olivia del equipo 2, tiene $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$)

Exp.: Pide a Antonio que pegue lo que le tocó, en el pizarrón.

Antonio: (Pasa y pega sus cuartos alargados).

Exp.: "Ahora del equipo dos, que pase Olivia a pegar lo que le tocó".

Olivia: (Pasa y pega $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$)

Exp.: "¿Eso te tocó?".

Olivia: "Sí".

Exp.: "A ver, los niños del equipo dos. ¿Esto le tocó a Olivia?" (señala lo que Olivia pegó en el pizarrón).

Equipo 2: "Sí".

Exp.: "¿Están seguros?".

Equipo 2: "Sí".

Exp.: Pide que expliquen cómo se repartieron los pasteles.

Equipo 2: Al explicar su reparto se dan cuenta que Olivia tiene un pedazo de más.

Exp.: "¿Entonces a Olivia le tocó este pedazo ($\frac{1}{2}$) y éste ($\frac{1}{4}$) nada más?".

Niños Eq. 2: "Sí":

Exp.: "A ver Voctoria (del equipo 5), va a pasar a pegar lo que le tocó".

Victoria: (En el reparto que hicieron le tocó $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ alargado. Pasa y pega s+olo el medio).

Exp.: "¿Estás segura?".

Victoria: "Sí".

Exp.: "Bueno, ahora el equipo cinco nos va a explicar cómo le hicieron para repartir los tres pasteles".

Francisco: (Pasa y explica): "Lo doblamos a la mitad, y luego a la mitad" (dobla la hoja en $\frac{4}{4}$, el experimentador ayuda a Francisco a cortar los cuartos).

Exp.: "¿Y luego José?".

José: "Lo doblamos así (dobla otra hoja en $\frac{2}{2}$) y luego así (dobla la hoja en $\frac{4}{4}$) y lo corté".

Exp.: (Ayuda a José a cortar la hoja en cuartos. Llama la atención de los niños que empiezan a levantarse de sus bancas y a jugar). "¿Y Antonio cómo le hizo?".

Antonio: (Toma otra hoja) "Así (dobla la hoja a lo largo por la mitad) y luego la corté" (el experimentador le ayuda a cortar).

Exp.: (Llama la atención del grupo). "Fíjense bien cómo le hizo el equipo cinco".

Antonio: "Y luego los doblé así" (dobla cada medio alargado otra vez a la mitad a lo largo).

Exp.: (Ayuda a Antonio a cortar). "¿Y luego?, después que ya tenían todos sus pedazos ¿cómo se lo repartieron?".

Francisco: "Cada uno se quedó con tres pedazos".

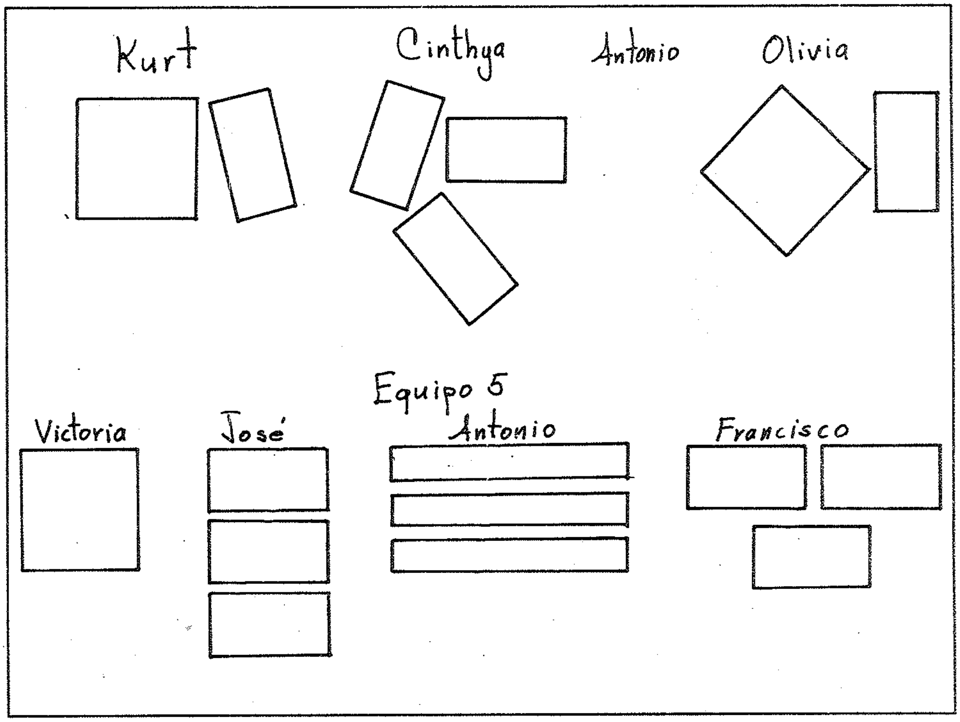
Exp.: "A ver, enséñenme lo que les tocó a ustedes".

José, Francisco y Antonio: (Van a su lugar por sus pedazos y los pegan en el pizarrón junto al pedazo de Victoria).

Exp.: Llama la atención al grupo que está inquieto. "A ver, quién me puede decir en dónde se equivocaron estos niños".

Lucio: "Aquí" (corre al pizarrón y señala el $\frac{1}{2}$ de Victoria).

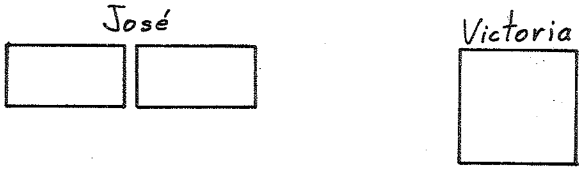
Obs.: En el pizarrón están pegados los siguientes resultados de reparto.



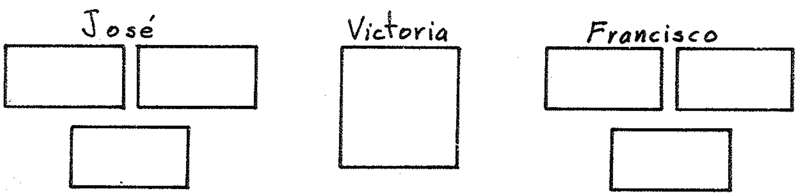
Exp.: "¿Le tocó igualito a Victoria que a sus compañeros?".

Raúl: "No, le tocó menos porque le tocó más a éste, (pasa y señala los $\frac{3}{4}$ que le tocaron a José) y a éste porque lo cortó en paletas (señala los $\frac{3}{4}$ alargados de Antonio).

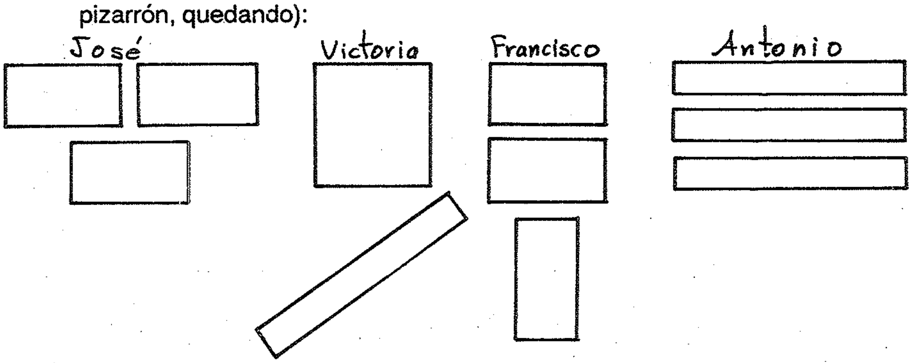
Exp.: "A ver, fíjense bien, yo estaba viendo cuando se repartieron los pasteles y le hicieron así: José cortó una hoja así (dobla una hoja a la mitad y la muestra), una parte se la dió a Victoria y la otra se la quedó él, Victoria no la cortó y José sí la cortó (corta una mitad en cuartos y los va pegando en el pizarrón).



luego, Francisco cortó el otro pastel así (dobla en cuartos y corta) y le dió un pedazo a José y él se quedó con tres. (Pega en el pizarrón, quedando así):



y Antonio cortó el otro pastel así (dobla y corta en cuartos alargados), le dió uno a Victoria y Francisco se quedó con tres pedazos (los pega en el pizarrón, quedando):



(Pregunta al equipo 5) ¿Sí le hicieron así o no?".

Equipo 5: "Sí".

Exp.: "¿Dónde está el otro pedazo, Victoria?".

Victoria: (Va a su lugar y saca el pedazo chueco que escondió, regresa y se lo da al experimentador).

Exp.: "Ya ves, a tí te tocó entonces esto (pega en el pizarrón junto al medio de Victoria el cuarto alargado). "¿Así está bien como lo repartieron?" (pregunta al grupo).

Erika: "No, este pedazo está muy ancho" (señala el medio de Victoria).

Victoria: "Hay que cortarlo".

Exp.: "¿Cómo?".

Victoria: (Quita el medio del pizarrón y lo corta en $\frac{2}{4}$, los pega junto al $\frac{1}{4}$ alargado).

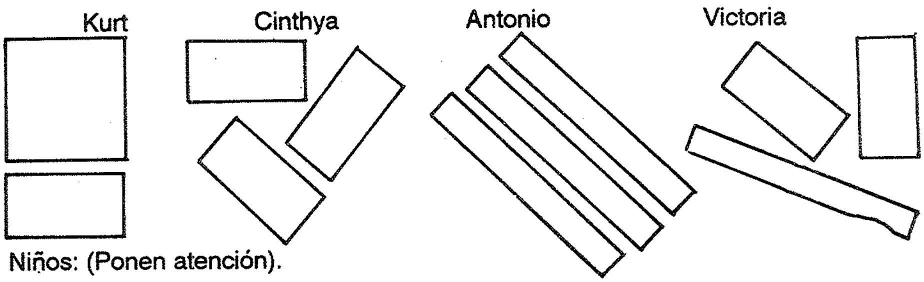
Exp.: "¿Así ya está bien?".

Niños: (La mayoría a coro dice): "Sí".

Patricia: "No, todavía no está bien porque los pedazos están muy anchos".

Luciano: "Está bien porque todos tienen tres".

Exp.: "A ver, fíjense bien en lo que les voy a preguntar. (Mientras lo dice despega del pizarrón algunos de los repartos dejando solamente los siguientes):



Niños: (Ponen atención).

Exp.: "Fíjense bien en lo que les voy a preguntar: a un niño le tocó ésto (señala lo que le tocó a Kurt), a otro ésto (señala lo que le tocó a Cinthya), a otro así (señala lo que le tocó a Antonio) y a Victoria así (señala lo que le tocó a Victoria). ¿A todos les tocó lo mismo?".

Niños: (Todos a coro, gritando) "No, no, a éste no".

Exp.: "¿A cuál no?".

Niños: (Pasan varios alumnos y señalan lo que le tocó a Kurt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).

Exp.: "¿A éste no?" (señala lo de Kurt).

Niños: "No".

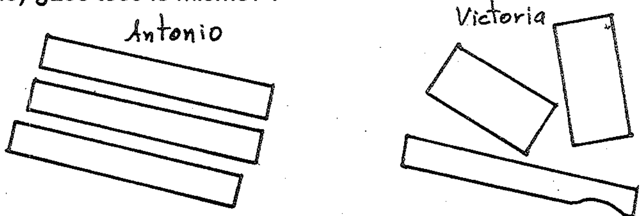
Exp.: "¿Y a éstos? (señala lo de Cinthya, Antonio y Victoria), ¿les tocó igual?".

Niños: (La mayoría) "Sí".

Exp.: "¿Cómo saben?".

Niños: "Porque tienen tres pedazos" (la mayoría).

Exp.: "A ver, vamos a ver, a éste (señala lo de Victoria) y a éste (señala lo de Antonio) ¿Les tocó lo mismo?".



Erika: "No, porque éstos (señala los cuartos anchos) están más gorditos y éstos (señala los cuartos alargados) están más delgaditos".

Exp.: "¿Entonces?, ustedes ¿qué opinan? (pregunta al grupo) ¿Cómo son éstos? (señala los cuartos largos y anchos) ¿Iguales?".

Niños: (Algunos) "No". (Algunos) "Sí".

Gabriela: "No, porque uno está flaquito".

Ramón: "No, porque dos están más chiquitos".

Exp.: "Bueno, les voy a entregar a cada equipo lo que le tocó a Antonio y lo que le tocó a Victoria, como ustedes dicen que no son iguales, van a buscar unamanera de demostrármelo a mí y a sus compañeros" (reparte $\frac{3}{4}$ largos y $\frac{2}{4}$ anchos y $\frac{1}{4}$ largo a cada equipo).

Exp.: (Recorre los equipos y pregunta) "Qué pasó, son iguales o no son iguales?".

Equipo 3: (Sin hacer nada con los pedazos) Dicen que no son iguales porque los largos están muy flacos.

Equipo 2: (Tienen separado lo que le tocó a Victoria de lo que le tocó a Antonio) Dicen que son iguales porque los dos tinen tres pedazos.

Exp.: Pide al equipo 2 que demuestre que son iguales.

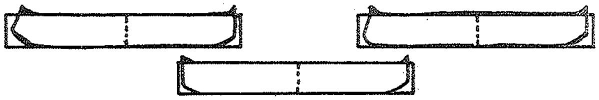
Equipo 5: No hacen nada con lospedazos, pero dicen que tienen lo mismo porque son tres pedazos.

Exp.: Pide al equipo 5 busque una manera de demostrarlo.

Equipo 1:

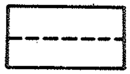
Erika y Ramón: (Cortan los cuartos ancho a la la mitad y un cuarto largo a la mitad).

(Sobreponen los pedazos que obtuvieron sobre los cuartos largos)

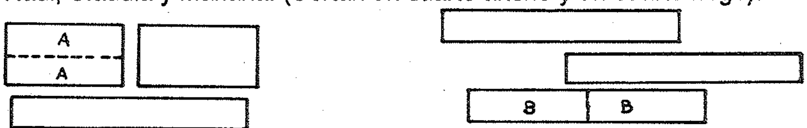


Ramón: "Es lo mismo, a los dos les tocó igual".

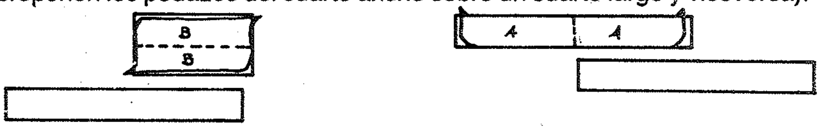
Erika: "Es lo mismo, nada más que así (junta $\frac{2}{8}$) son más gorditos".



Equipo 4: Raúl, Claudia y Mariana: (Cortan un cuarto ancho y un cuarto largo).



(Sobreponen los pedazos del cuarto ancho sobre un cuarto largo y viceversa).



Exp.: Llama la atención del grupo y pide que observen lo que hicieron los equipos 1 y 4.

Claudia: "A los dos (niños) les tocó lo mismo (muestra cómo cortaron el cuarto ancho y lo sobreponen sobre el cuarto largo).

Erika: "Sí éstos (señala en el pizarrón los cuartos largos) los cortamos así (muestra cómo), nos quedan así (muestra un cuarto cortado) y salen dos pedazos. Y a éste también (señala un cuarto ancho) si lo doblamos también salen dos".

Obs.: El grupo está muy disperso.

Exp.: Llama la atención al grupo y repite lo que los equipos 1 y 4 hicieron. "¿Entonces, a Antonio (3 cuartos largos) y a Victoria (2 cuartos anchos y un largo) les tocó lo mismo?".

Grupo: "Sí".

Exp.: "¿A los dos les tocó igual de pastel?".

Grupo: "Sí".

Exp.: Da por terminada la sesión.

BIBLIOGRAFIA

Avila, A., E. Mancera. (1989)."La fracción: una expresión difícil de interpretar" en: Pedagogía, Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. Educación Matemática. Vol. No 17 (enero-marzo), México.

Balbuena, H. (1988). "Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa. Aprobada para publicarse en la serie: Opus Prima de la Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. (1983). "Rational number concepts" in: Acquisition of mathematics concepts and processes. R. Lesh & M. Landau (Eds.), New York: Academic Press.

Block, D. (1987) "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Educación, del Departamento de Investigaciones Educativas. DIE-CINVESTAV-IPN.

Brousseau, G. (1970). "Processus de mathématisation" en: La mathématique à l'école élementaire, París, APMEP, N especial.

Brousseau, G. (1976). "Les obstacles épistemologiques et les problèmes mathématiques" en: Publicado en las memorias del CIEAEM, Francia. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

Brousseau, G. (1982). "Ingenierie didactique". Conferencia dictada en la Segunda Escuela de Verano de Didáctica de las matemáticas. Escuela de Educadores Especializados. OLIVET.

Figueras, O. (1988). "Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales". Tesis de doctorado. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México.

Kieren, T. E. (1976). "On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers" in: Number and measurement papers from research workshop. R. Lesh (Ed.). Papers from a research corksohp ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1983). "La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales". En: Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education. Edit. by M. Zweng., T. Green,. J.

Kilpatrick.,... EE UU. pp. 506-508. Traducido por Figueras, O. sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN,1990

Mi libro de segundo. Parte 2. Libros de Texto Gratuito de educación primaria de la Secretaría de Educación Pública. 4a. ed.

Lerner, D. "La construcción de la noción de fracción. Implicaciones pedagógicas". República de Venezuela. Ministerio de Educación. Fundación Me-Val. Caracas.

Noelthing, G. (1980). "The development of proportional reasoning and the ratio concept" Part I Differentiations of stages. in: Educational studies in mathematics No. 1, D. Reidel Publishing Co., Dordretch, Holland and Boston, USA.

Parrat, D. S. "De la fracción sobre el objeto a la fracción relacioal. (resumen mimeo).

Perez, J. (1982). "Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l'identification des objets et des phénoménes pertinents au cours de l'activité de construction d'un code de désignation à l'école maternelle". Conferencia dicatada en la Segunda Escuela de Verano de Didáctica de las matemáticas. Escuela de Educadores Especializados. OLIVET.

Piaget, J., et al.(1960). "Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones" en: The Childs's conception of geometry Routledge and Reagan Paul. London. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1966) "Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones" (Escrito con la colaboración de M. Muller). En: The childs conception of geometry. Routledge and Reagan Paul. London. Repinted 1966, 1970. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

Streefland, L. (1978). "Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction" en: Educational Studies in Mathematics.

Streefland, L. (1984). "How to teach fractions so as to be useful". Producido por: Researchgroup on Mathematics Education of the State University of Utrecht. The Netherlands. First Edition.

Vergnaud, G. (1981). "Quelques orientations théoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques" en: Recherches en didáctique des mathématiques, la pensee sauvage, Vol. 2.2, Grenoble. (Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN).