UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIDAD 094 D. F. CENTRO

ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES COMUNES EN EDUCACION PRIMARIA EN TERCER GRADO

MARIA DEL CARMEN MONICA GUADARRAMA MORALES

Investigación Documental Presentada

PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN EDUCACION BASICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL BIBLIOTECA SEP

México, D. F. 1988

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

LEPEP-DT-2

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

México, D.F. a 21 de abril de 1988.

C.PROFR. (A) MARIA DEL CARMEN MONICA GUADARRAMA MORALES
PRESENTE:

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Exámenes Profesionales de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo, intitulado

"ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES COMUNES EN EDUCACION PRIMARIA EN TERCER AÑO"

opción INV. DOCUMENTAL, dirigido por el Asesor Titular PROFR. JUAN QUINTIL CASTREJON TELLEZ, y a propuesta del asesor Pedagógico LIC. CIPRIAN A. CABRERA BERNAT, manifiesto a Usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se autoriza a presentarlo ante el H. Jurado que se le designará, al solicitar su examen profesional.

ATENTAMENTE

LIC. JUSTO GONZALEZ HERNANDEZ.

PRESIDENTE DE LA COMISIÓN DE EXAMENES PROFESIONALES DE LA UNIDAD SEAD

S.E.P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDA SEAD
D.F. CENTRO

c.c.p. Depto. de Titulación de LEPEP.

A MIS PADRES

Sr. Jorge Guadarrama Noriega
Sra. Angelina Morales de Guadarrama

A MI TIA

Srita. Socorro Morales Morales

Por el amor y respeto que siento por cada uno de ellos, que siempre me han sabido guiar por el buen camino de la vida.

A MIS HERMANOS

Jorge, Juan, Jaime, Graciela y Claudio O.
Con cariño y con el mejor deseo para que cada uno alcance los objetivos que se han propuesto en su vida profesional.

A MIS MAESTROS DE LA U.P.N.

Con agradecimiento, respeto y cariño porque ustedes me han apoyado en mi licenciatura.

AL PROFESOR JUAN QUINTIL CASTREJON TELLEZ

Especialmente a usted, que siempre tuvo unas palabras de aliento en los momentos más difíciles de mi carrera gracias a la asesoría de mi tesis.

Maestro: le deseo que siempre sea feliz y triunfe en su vida profesional.

A MIS AMIGAS

Teresa Cuevas, Lilia Martínez,
Ernestina Zepeda, Patricia Solis,
Lucía Calderón y Elvira Bacilio.

Con afecto para cada una de ellas, que me alentaban en los momentos difíciles que se me presentaban.

Les deseo que siempre alcancen sus objetivos y la felicidad.

A MI AMIGO

Miguel Mora Salas

Por nuestra amistad, te deseo, que siempre alcances la felicidad y triunfes en todo lo que te propongas.

A TODOS

Aquellos que me ayudaron directa e indirectamente, les doy las gracias.

I N D I C E

INTRODUCCION Página

1. TEORIAS DE APRENDIZAJE 1

1.1 El Conductismo 1

1.2 Otra corriente conexionista. 3

1.3 El concepto de multifactor de la inteligencia. . 7

1.4 Estructura de las habilidades matemáticas. . . . 11

1.5 Concepción estructural de la inteligencia (Piaget) 14

2. DESARROLLO DE LAS FRACCIONES A TRAVES DE LA HISTORIA 21

2.1 Representación egipcia de las fracciones 21

2.2 Algunos conceptos sobre las fracciones comunes . 34

2.3 Clases de fracciones comunes 36

2.4 Suma de fracciones comunes 41

2.5 Sustracción de fracciones comunes. 44

2.6 Multiplicación de fracciones comunes 46

2.7 División de fracciones comunes 50

2.8 Cómo enseñan los maestros las fracciones comunes 52

3. ANALISIS DEL LIBRO DE TEXTO DE TERCER GRADO DE EDUCACION PRIMARIA 56

3.1 Objetivos de aprendizaje de matemática del programa de tercer grado de educación primaria. . . 67

CONCLUSIONES. 87

BIBLIOGRAFIA. 90

I N T R O D U C C I O N

Dentro de mi práctica docente, he observado que los alumnos de educación primaria carecen de los elementos indispensables para entender, razonar y explicar el tema relativo a las fracciones comunes, siendo ésto una limitante para resolver -- las actividades cotidianas, cuando se presentan este tipo de - situaciones.

El problema tiene su origen desde que el educando ingresa al sistema de enseñanza básica, al no contar con una metodología didáctica-pedagógica que lo inicie en el tema, atendiendo a los conceptos de seriación y clasificación de las fracciones comunes, indispensables para su comprensión, en cuanto a la división de la unidad en partes y por lo tanto sustentar las bases para una continuidad en los sucesivos grados que cursará - el alumno.

Lo anterior repercute en deficiencias que a posterior se traducen en obsolecencias que dificultan su grado de aprendizaje y en la aplicación de este tema en los sistemas de enseñanza media y superior. Por lo tanto, al incluir el tema de las fracciones comunes en el Programa de Educación Primaria, desde el primer grado, coadyuvará a que el alumno fortalezca las bases de una compensión razonada sobre el tema, facilitando el - proceso de enseñanza-aprendizaje y la resolución de problemas -

cotidianos sobre el particular.

En el primer capítulo, se presenta el Marco Teórico empleado en esta Tesis, referente al sistema de enseñanza-aprendizaje del tema "Las Matemáticas".

En el segundo, se hace mención al desarrollo del tema de las fracciones comunes, a través de la historia, atendiendo a sus conceptos y propiedades en las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), concluyendo con un examen de los métodos empleados por los maestros en la enseñanza de las fracciones comunes.

El tercer capítulo, plantea el análisis efectuado al libro de texto y al Programa de Educación Primaria, correspondientes a tercer grado.

1. TEORIAS DE APRENDIZAJE.

1.1 El Conductismo.

Como se sabe, dentro de las teorías contemporáneas del aprendizaje, se distinguen dos grandes tendencias: la correspondiente a la interpretación conexionista del aprendizaje y la referente a la interpretación cognoscitiva.

El conductismo en sus inicios describe la conducta en términos de conexiones entre estímulo y respuesta, en el tiempo su concepto de conducta evoluciona hasta concebirla como conexiones entre reforzadores y respuestas. Una noción consecuente de aprendizaje tiene que ver con cierto tipo de cambio en la conducta, concebida de esta manera. El hecho de que dicho fenómeno se convierta en el objeto central de estudio, surge de la adopción del método experimental como el método de investigación en el área de la psicología.

La asimilación del método experimental a la investigación psicológica aparece como reacción al método empleado por la psicología clásica, el introspectivo. La posibilidad de que la sola introspección pudiera llevar a conclusiones no verificables a ojos de todos, hacía dudar de la psicología clásica como

ciencia y es así como tiene lugar el nacimiento del conductismo psicológico experimental, que estudia sólo las conductas observables y medibles.

Así, dentro de la corriente conductista, no sólo en el aspecto puramente psicológico, sino también en el educativo, -- las conductas observables aparecen en el primer plano en el terreno de la investigación.

Más aún, con el tiempo su interés se ha enfocado más hacia los cambios conductuales que se espera que ocurran en el sujeto, después de que éste haya pasado por un proceso educativo determinado; a estos cambios esperados (deseados), se les conoce como objetivos de introcción (conductuales), y la corriente educativa que atiende su estudio se le llama corriente de los - objetivos conductuales.

Naturalmente, la observación manipulación de los objetos a estudiar por la escuela conductista, tiene que encarar -- los problemas más de la definición y especificación de los objetivos conductuales. Tales problemas fueron abordados de dos maneras distintas, caso al mismo tiempo entre la década de los -- años 50s' y los 60s'.

Por otro lado, a principios de los 60s', había gran - - auge en América la instrucción programada; los problemas de comunicación que esta área presentaba llevaron a Roberto Mager y su grupo a elaborar su manual titulado "Preparing Objetivos for Programed Instrution.(1)

1.2 Otra Corriente Conexionista.

El conductismo, así como su correspondiente teoría del aprendizaje y la corriente de los objetivos conductuales, han - sido temas controvertidos, tanto a nivel teórico como a nivel - de aplicación. Una de las críticas más fuertes es a propósito de su concepción del aprendizaje como un mero cambio en la conducta (observable) extrema del individuo, sin considerar en absoluto los posibles procesos internos que él pueda llevarse a - - cabo.

La noción conductista del aprendizaje se ubica dentro - de la corriente conexionista. Pues, dentro de esta misma co- - rriente surge, posteriormente, el conductismo; una nueva concep

(1) Cit. por Mager, Robert F., Preparing Instrucional Objetivos Fearon Publishers, Bemot Calif., 1962, pág. 32

ción del aprendizaje, la cual conserva el carácter conexionista (entre externos y procesos internos del individuo), pero que ya encuentra los procesos que operan en el individuo durante el -- aprendizaje. Es más, para esta nueva tendencia, el aprendizaje consiste en un proceso de transformaciones, influencia por factores externos; se manifiesta como un cambio externo en la conducta en la cual se presenta en forma persistente.

A los estados persistentes establecidos en el individuo por el aprendizaje y que hacen posible las actuales que se observan, se les denomina facultades. Son pues estas facultades o resultados del aprendizaje de los objetivos de estudio que interesan a esta teoría contemporánea del aprendizaje.

Las mismas necesidades de llevar a cabo un estudio sistemático de los resultados del aprendizaje, llevaron a los seguidores de esta teoría moderna a plantearse las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las clases de facultades o resultados del - aprendizaje que existen? ¿Qué tipo de categorías de estas facultades se pueden describir que tengan propiedades comunes?

La clasificación de las facultades propuestas por - - -

Gagné en 1972 (2), contempla cinco categorías primordiales:

Información verbal.

Habilidades intelectuales.

Estrategias cognoscitivas.

Actitudes.

Habilidades motoras.

El órden en que dichas facultades se enlistan aquí, no tienen relación alguna con su grado de complejidad o importancia; ésto último representa, hoy en día, un problema abierto para el investigador de la corriente neoconductista.

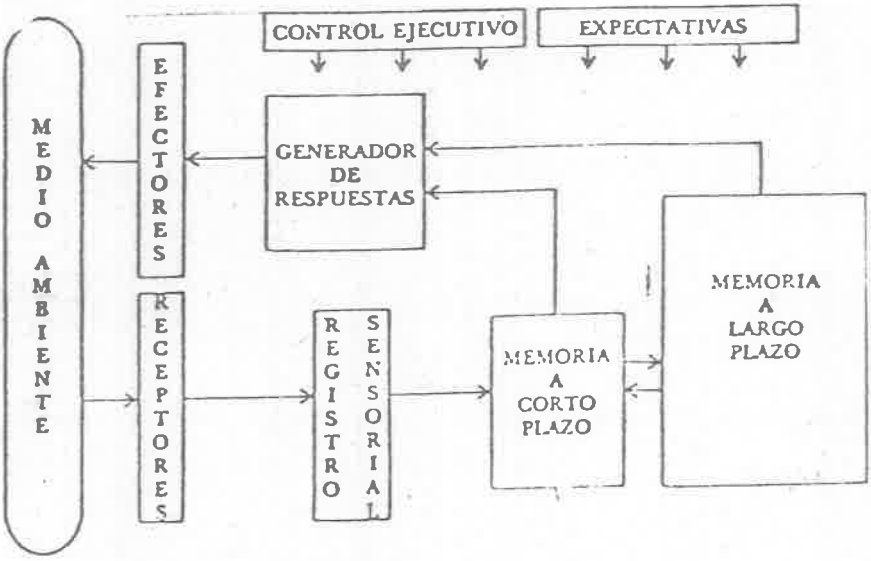
Como ya se ha mencionado con anterioridad, el esquema clasificador de facultades propuestas por Gagné corresponde de una teoría del aprendizaje conexionista del tipo de elementos externos a procesos internos; ha sido elaborado un modelo que representa esta interrelación entre el medio interno y el funcionamiento intelectual interno del individuo. Dicho modelo representa, de hecho, a casi toda teoría del aprendizaje cuyos --

(2) Gagné, Robert M., Principios básicos del aprendizaje para la instrucción, Ed. Diana, México, 1975, pág. 25

principios se refieren básicamente al procedimiento de la infor mación.

A continuación se ilustra este modelo general.

FIG. 1. ESQUEMA DE LOS PRINCIPIOS BASICOS DEL APREN DIZAJE PARA LA INSTRUCCION.



El modelo básico del aprendizaje y la minoría sobre el que se fundamentan las teorías modernas del procedimiento de -- información.

Este modelo no ha sido el único intento de representar la estructura intelectual y sus mecanismos; en efecto, en el -- contexto de las corrientes psicológicas que se ocupan del estudio de los procesos intelectuales internos, se encuentran ac- - tualmente diversas tendencias. Además del modelo procesamiento de la información, se puede mencionar como uno esencialmente - distinto, del propuesto por Guilford (3).

1.3 El Concepto de Multifactor de la Inteligencia.

Durante muchos años existió la preocupación por la ca-- rencia de una teoría psicológica que fundamentara a la tan avanzada (técnicamente hablando), producción de los tests o pruebas de inteligencia (I.Q.); uno de los primeros intentos de desarrollar el aspecto C.I., teórico, se llevó a cabo en Inglaterra -- por Charles Sperman, quien trataba de probar la existencia de - un factor común a todos los tests, que hasta entonces "cupieran" bajo el título de tests de inteligencia. A lo largo de sus investigaciones, Sperman y sus colaboradores admitieron que, bajo

---

(3) Cit. por Manerns, Williams A., Readings in Measurement and Evaluation and Psyschology, Guilford, J.P., p. 175 - 178, USA, 1976.

todas estas pruebas detectoras de grados de inteligencia, había algo más que un solo factor; conjuntaron entonces la presencia de varios factores.

Aunque a Sperman se le reconoce como un indicador de la corriente multifactor de la inteligencia, son en realidad - - - Thustone y Guilford, a quienes se les atribuye el desarrollo actual de dicha teoría. El hallazgo de los múltiples factores -- (estadísticos), debido a Sperman, dio lugar a un intento de interpretación de los mismos a la luz de la psicología; a lo cual condujo a Thustone a establecer nuevos factores comunes interpretables en términos y determinadas habilidades mentales primarias.

Durante estudios posteriores, tanto Thustone como otros investigadores, detectaron nuevas habilidades intelectuales y - hubo intentos de clasificarlas y jerarquizarlas.

Sin embargo, hacia 1956, Guilford destacó la idea de -- elaborar un esquema jerarquizador para clasificar dichas habilidades, debido esencialmente a que percibió la presencia de un - paralelismo; entre ellas se trataba, según Guilford, de habilidades de distinta naturaleza, por lo que era absurdo intentar -

dar un órden global entre todas ellas. En consecuéncia, elaboró un modelo para la estructura intelectual en el procesamiento de la información y en el cual distingue a tres ejes paralelos de habilidades:

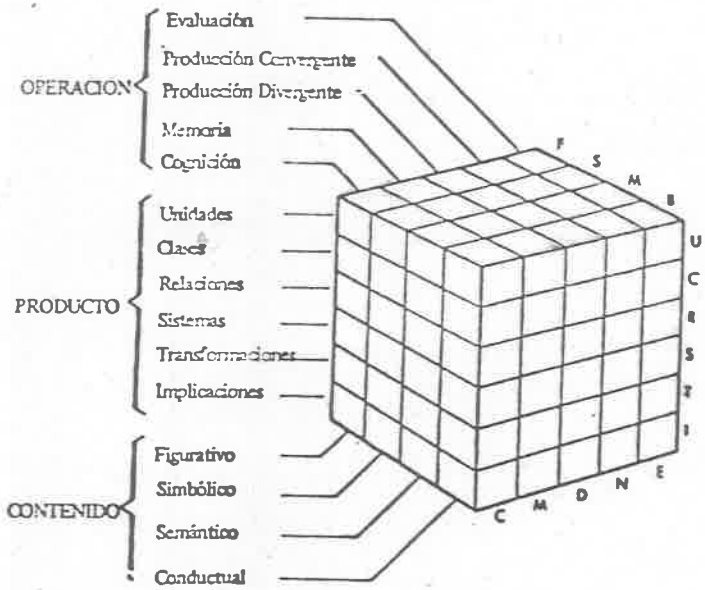
Eje de contenidos o tipo de información.

Eje paralelo de proctos o aspectos de la investigación.

El eje de las operaciones o tipo de procesamiento de la información.

Y para cada uno de estos ejes, distingue varias categorías de habilidades, lo cual se ilustra en la siguiente figura:

FIGURA II. MODELO DE LA ESTRUCTURA INTELECTUAL (GUILFORD)



Una de las aportaciones de este modelo es un valor heurístico en la postulación de nuevas habilidades, imperceptibles bajo la óptica de otros esquemas clasificadores.

Cabe hacer notar que a toda teoría de aprendizaje, a la cual interesa el estudio de la inteligencia humana, le interesa a su vez la investigación sistemática de las habilidades intelectuales. Para Thustone, una habilidad intelectual puede ser definida como un recurso humano, necesario para un buen desempeño en la resolución de "tests correlacionados fuertemente entre

si", mientras que, para Guilford, una habilidad intelectual es la interpretación psicológica de ese recurso humano aparentemente necesario para un desempeño determinado. Pero tanto en uno como en otro, la investigación ha seguido el camino de la clasificación (jerarquizada o no), de sus objetivos de estudio, las habilidades intelectuales.

1.4 Estructura de las Habilidades Matemáticas.

Un grupo de investigadores de la Unión Soviética, se interesó hacia los años de los 40s', en el estudio de las habilidades intelectuales específicas para el área de las matemáticas.

Parten de un concepto de habilidades matemáticas como en aquellos rasgos psicológicos individuales que son necesarios para el aprendizaje de las matemáticas. Cabe aclarar que esta concepción reconoce la existencia de diferencias individuales de órden psicológico, no niega de entrada la posibilidad de desarrollar tales habilidades de todo individuo normal.

Es más, su programa de investigación desde el crear condiciones propias al aislamiento de cada una de las habilidades, hasta el determinar condiciones bajo las cuales sea posible su desarrollo.

El estudio llevado a cabo por este grupo por Krutetki[4] fue en la URSS en los 50s' y traducido al inglés, por la Universidad de Chicago durante los 60s'. En esta publicación presenta el método de investigación, así como problemas matemáticos - detectados de las habilidades; se fundamentan a partir de resultados experimentales, existencia de rasgos psicológicos o habilidades específicas para el desempeño en matemático y no necesariamente transferibles a otros contextos se sustentan la exis-- tencia de las siguientes habilidades matemáticas:

Generalización.

Abreviación del razonamiento.

Investigación de un razonamiento u órden de operaciones.

Respecto a cada una de estas habilidades, los indivi- - duos pueden ser clasificados en tres categorías hábiles, por medio e inhábiles; lo cual permite métodos para el desarrollo de dicha observación si hay o no hay tránsito de los individuos de

---

(4) Cit. por Rojano, María Teresa, trabajo mecanuscrito sin título, Sección de Matemáticas Educativas Centro de Investigación y Estudios Avanzados Patrocinados por la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior.

una categoría a otra.

El esquema propuesto por Krutetki[5] y su grupo, no parece estar completo aún (según lo declarado por ellos mismos), es decir, falta por explorar aún para detectar nuevas habilidades para la matemática y las interrelaciones entre ellas.

A pesar de que no se propone ninguna jerarquía entre -- clases de habilidades matemáticas, cada una de estas clases sí permite jerarquizar a los individuos y estudiar su evolución en cuanto al desarrollo de una determinada habilidad.

En los trabajos de Guilford, descrito aquí en forma muy breve, se puede detectar interés por investigar el funcionamiento de la inteligencia humana y por tanto su enfoque hacia la definición y clasificación de las habilidades intelectuales. Esta es también una característica del estudio llevado a cabo por Krutetki y su grupo sólo que en un contexto más específico, el de la habilidad intelectual referente a el aprendizaje de la matemática. El valor de todas estas habilidades investigaciones indudablemente reconocidas en el campo educativo; sin embargo,

---

(5) Op. Cit., p. 36

el trabajo sobre inteligencia humana que más influencia ha ejercido últimamente, tanto en el terreno epistemológico y en el -- educativo, es el realizado por Jean Piaget, que llevó a cabo en cuatro años.

1.5 Concepción Estructuralista de la Inteligencia (Piaget).

A diferencia de las primeras teorías conexionistas del aprendizaje (la experiencia consiste); por lo tanto, para muchas de estas corrientes de la inteligencia humana, su naturaleza y evolución es un punto medular. Por este motivo, la teoría sobre la inteligencia humana desarrollada por Piaget se sitúa dentro del campo cognoscitivista; sin embargo, debido a su particular concepción de la interacción entre el medio externo y procesos intelectuales internos, así como la estructura que dicha interacción conforme en la inteligencia, su teoría no puede ubicarse en un extremo radical del cognoscitivismo.

Según Piaget, la estructura intelectual de un adulto no es una aplicación a escala de la de un niño; por el contrario, afirma que la evolución de la inteligencia consiste en una transformación contínua de su estructura y que dicha transformación con base a tres funciones: la asimilación, la acomodación y la adaptación. El funcionamiento inteligencia consiste, dice

Piaget, en asimilar lo relacionado a estructuras de transformación, esta estructura es conformada por la inteligencia a partir de la acción (acomodación); al estado de equilibrio entre la asimilación y la acomodación lo llama adaptación. En otras palabras, de equilibrio entre la asimilación y la acomodación, lo llama adaptación. Para comprender un fenómeno, dice, "es necesario constituir las transformaciones que da lugar a dicho fenómeno, para lo cual se requiere de elaborar una estructura de transformaciones, lo que requiere de una fase de invención u orientación"(6).

Se puede señalar, a partir de esta breve descripción, la diferencia esencial entre la noción piagetiana de inteligencia y la concepción conexionista; acerca de esta última, los conocimientos no son más que copias de la realidad que se producen mediante la consolidación de conexiones entre estímulos o refuerzos y respuestas; mientras que, de acuerdo con Piaget, los conocimientos son asimilados de lo real a estructuras de transformación.

---

(6) Piaget, J., Psicología y pedagogía, Editorial Ariel, Barcelona, 1973.

Además de tratar sobre el funcionamiento de la inteli-- gencia en términos generales, la teoría piagetiana distingue -- cuatro etapas secuencias en el desarrollo intelectual, a saber: la etapa psicomotora, la etapa preoperatoria, las operaciones - formales.

No se pretende dar aquí una descripción de estas etapas, sólo se mencionan con el fin de poder referirse a ellas en el - siguiente señalamiento, Piaget hace una extrapolación de su - - teoría al terreno de la didáctica de las matemáticas, en la - - cual afirma que las estructuras más generales y abstractas de - la matemática moderna se incorporan mejor a la estructura operatoria natural de la inteligencia, que las estructuras particulares de la matemática clásica(7).

Pone por ejemplo la aparición de las estructuras topológicas en la geometría espontánea del niño, antes que la "aparición" de las estructuras proyectivas o métrico euclideanas (contrariamente al órden histórico en que surgieron éstas). La introducción en los programas de estudio temas de matemáticas mo-

(7) Op. cit.

dernas, a los niveles más precoces. A pesar de las advertencias que el propio Piaget hace respecto al peligro que presenta llevar a cabo estos cambios de manera inadecuada (empleando simbolismos y lenguajes abstractos prematuros) el hecho es que, actualmente, los programas de estudios contemplan temas modernos sin tomar las precauciones necesarias.

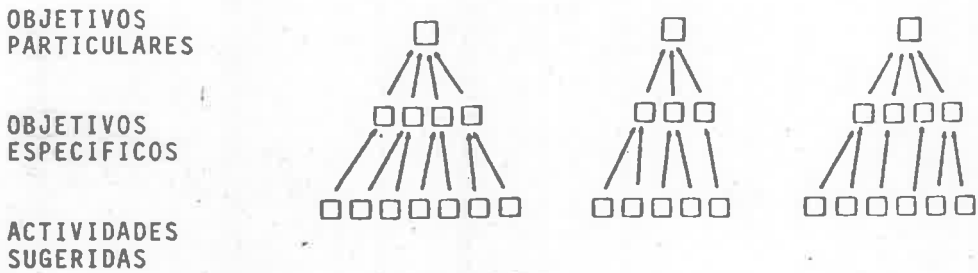
En este punto es importante insistir sobre lo siguiente: un hecho es que Piaget haya mostrado una reciprocidad en el órden de desarrollo de la estructura de las matemáticas vs, las estructuras intelectuales; y otros hechos naturales muy diferentes, es el suponer que porque ello, las estructuras más abstractas sean más asequibles en las primeras etapas de desarrollo como objeto de estudio consciente que las estructuras particulares.

El interés en describir aquí, al menos someramente, la teoría Piagetiana y sus implicaciones pedagógicas, está ligada al hecho que el programa de estudios, cuyo análisis se desarrolla en este trabajo, adolece justamente de el efecto de haber transferido directamente afirmaciones de la teoría de Piaget sobre el funcionamiento y desarrollo de la inteligencia a los objetivos de estudio de la misma, por mencionar un ejemplo, con

base a la modelación que hace Piaget del funcionamiento intelectual en términos de una estructura algebráica, se infiere la recomendación de incluir estructuras como tema de estudio en el programa. Eso da lugar a fuentes críticas por parte de los que pensamos que este tipo de inferencias son aún verdaderos problemas abiertos para la investigación.

Por lo que toca a la descripción que se ha hecho de las demás corrientes, sus objetivos de estudio y sus esquemas clasificadores (Bloom, Nisma, Gagné, Guilford, Krutetki), la intención es proporcionar un programa (aunque un tanto superficial) de las distintas tendencias en el terreno de la investigación educativa, que le permitan ubicar el tipo de análisis que aquí se presenta.

ESQUEMA DE LOS OBJETIVOS Y ACTIVIDADES (*)



(*) Bloom, Benjamín, Taxonomía de los objetivos de la educación, Ed. El Ateneo, Buenos Aires, 1975, p. 18

Así se presenta una atomización progresiva de cada objetivo general hacia los particulares, específicos y actividades correspondientes.

En vista de estas categorías conductistas, se creyó conveniente seleccionar para llevar a cabo el análisis de este esquema clasificador de Bloom, pero en su versión especial para el área de matemáticas.

Es pertinente aclarar que los objetivos del programa describen o intentan describir conductas que se desean lograr en el estudio partiendo del logro de subconductas y este tipo de objetivos, justamente por excelencia de clasificación de la taxonomía de Bloom y Nlsma.

La idea de hacer el análisis con esquema clasificador acorde con la construcción misma del programa ligada al propósito central de dicho análisis la estructura cognoscitivista del programa de la manera más fidedigna. Esto es, si pretendiera hacer el análisis en términos de productos de aprendizaje (según la taxonomía de Gagné), de habilidades matemáticas (según Krutetki), sería necesario una etapa de traducción e interpretación de los objetivos conductuales del programa a estos tipos

de productos o habilidades, lo cual seguramente requería una metodología especial que garantizara la finalidad de dicha traducción e interpretación.

En resumen, las obras de Bloom y Mager, son caminos distintos de abordar una misma problemática y en práctica se ha visto que son complementarios, pues mientras uno se ocupa de la percepción y especificación de los objetivos, el otro se encarga de clasificarlos (en cuanto a nivel cognoscitivo) lo cual mejora o afirma la descripción inicial.

Porterior a la taxonomía de Bloom, y basada en los principios de ésta, se construye otro esquema de clasificación, basándose específicamente en los objetivos educativos del área de las matemáticas. Este nuevo esquema fue elaborado por un grupo de estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas en los Estados Unidos (SMSG), durante su estudio longitudinal y nacional de las habilidades matemáticas.

2. DESARROLLO DE LAS FRACCIONES A TRAVES DE LA HISTORIA.

2.1 Representación egipcia de las Fracciones.

Sin lugar a dudas, remontarnos a la historia de la matemática para indicar su origen, desarrollo y aplicación, puede aportar elementos claves para entender la enseñanza contemporánea de las fracciones, tema que nos ocupa.

Es el caso del valor que tiene la revisión de los interesantes manejos de símbolos que posibilitarían a los egipcios a la exigencia de su organización social.

Muy particularmente el tratamiento que sobre las fracciones unitarias hacían los egipcios estrechamente encontrados en sus orígenes a las referencias concretas (argumentación fundamental en el desarrollo a aplicación de las matemáticas egipcias, subrayamos también la habilidad que poseían para efectuar conversiones de fracciones mayores que la unidad en las sumas de fracciones unitarias y, además, el uso del mecanismo de duplicación (fácil comprobación de las operaciones).

Básicamente, este modelo sigue manteniendo validez y conforma uno de los cimientos en el procedimiento de la enseñanza de las fracciones en los últimos años del nivel de primaria

y de secundaria y enseñanza superior, por lo tanto conviene - - desarrollarlo como puede evidenciar en los párrafos posteriores.

Cuando pretendemos hacer comentarios sobre la matemática desarrollada por los egipcios, así inmediatamente, nos imaginamos una serie de jeroglíficos que componen el papiro de - - - Rhind(8).

Y en verdad, este documento, escrito hacia el 1700 A.C. por el escribano Ahmés, es la principal fuente de conocimiento acerca de cómo contaban, calculaban y medían los egipcios.

Aunque muchos consideran que la contribución en el desarrollo de la matemática hecha por los egipcios es casi despreciable muy discutible tal postulado, pués en el papiro Rind se muestran problemas aritméticos, así como, cálculos con trapezoides, triángulos y trapecios, etc., ya muy evolucionados. Además, cuestiones como estas deben ubicarse en el contexto económico cultural de donde se desarrollan.

A diferencia de los griegos, comentan los historiadores que los egipcios vivieron por muchos años en un clima de tranquilidad, dice Neugegebaur. Los requerimientos matemáticos aún de los organismos económicos más desarrollados de la antigüedad, podrían resolver con una elemental aritmética casera considera-

---

(8) Newman, James. El papiro de Rind, Ed. Sigma, 1974, 97p.

da como matemáticas [9].

En la matemática egipcia resaltaban las operaciones con fracciones unitarias, el cálculo de multiplicación y la división era reducido a sumas y restas, en tanto no fueran capaces de lograr una notación y sus métodos resolución de problemas complicados.

El uso de las fracciones unitarias cobró fuerza en la época y se extendió hasta los griegos. Por ejemplo, Arquímedes escribía: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ cuando se trataba de $\frac{3}{4}$

Neugrabauer dice que "la incidencia de esta práctica es persistente y en trabajos de la talla de Almagesto, los resultados finales se expresan con fracciones unitarias, pese a que las operaciones mismas fueron realizadas en fracciones exagesimales"[10].

Como se ha dicho, el quehacer matemático estuvo impregnado de las situaciones económicas y no es de extrañar que las fracciones que tuvieron más uso fueron aquéllas que presentan en los elementos de ojo de Horus.

---

(9) Cit. por Rojano, Ma. Teresa., op. cit.

(10) Cit. por Gómez Gerardo, Hilda, Lecciones para la enseñanza de las fracciones comúnes, Querétaro, Qro., 1985.

113608

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$.

Supone Broussen probablemente esta elección es debida - al hecho de que es fácil partir una cantidad fluída o pondera-- ble en dos partes y hacer constar la igualdad de partes (11).

Aparte de las fracciones unitarias, la única fracción - distinta que utilizaron los egipcios fue $\frac{2}{3}$, la cual se escri- bía $2\overline{3}$, el denominador de las fracciones se escribía bajo el jeroglífico que significa "parte" y simboliza además de dos maneras: con guión o punto sobre el denominador 8.

Por ejemplo: para la expresión "octava parte" se escribe $\overline{8}$ ó 8., también en la suma de las fracciones el componente simbólico facilitan escribir el resultado de esta operación. -- Veámos, en el caso de sumar $\frac{}{2}$ y $\frac{}{10}$, el resultado se expresa así: $\overline{2}$ $\overline{10.}$

Es decir, se juntan las fracciones, a nuestra manera de ver, se trabaja más en el aspecto simbólico que en su resultado para la suma.

---

(11) Brousean, George, Algunas notas para una epistemología de los decimales, cit. por Gómez Gerardo.

Sólc en ciertos casos se puede escribir el resultado -- con un sólo símbolo, en el caso de sumar $\frac{}{2}$ y $\frac{}{6}$ el resultado es $\frac{}{2}$ $\frac{}{6}$, pero, mediante la operación resulta $\frac{2}{3}$, que los - (dos tercios), $\frac{2}{3}$.

En la suma siguiente, utilizan la expresión:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \overset{=}{3}$$

Se hizo la selección de algunos problemas donde se detalla el proceso algorítmico para solucionar cada una de ellos.

Los problemas son los siguientes:

1. "Dividir 16 entre 3"

Se utiliza una estrategia de acercamiento "por debajo" primero a 3 se le hace corresponder la unidad y por duplicación sucesivamente a 2 y 4 se corresponde con 6 y 12, se presentan - estas operaciones:

1	3
2	6
3	12

El interés es sobre aquellas filas que sumen un número cercano o igual a 16; en este caso 3 + 12 = 15. Se colocan barras para reconocer las filas que intervienen, quedando así:

/ 1	3
2	6
/ 4	12

Como la suma nos dio 15, se procede luego a calcular el correspondiente a 1 (que alcanzaría a 16).

El 3 correspondería con 1, entonces 2 correspondería con $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$, a 1 organizando a manera de tabla sería:

1	3
$\frac{2}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	1

La suma para alcanzar 16, y las fracciones correspon- - dientes:

Dividiendo $3 + 12 + 1 = 16$

Cociente $1 \quad 4 \quad \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3}$

El cociente $5 + \frac{1}{3}$ se estaría representado por los -- egipcios resolver el citado problema lo explicamos a continua-- ción en el cuadro:

PROCESO EGIPCIO		UN MECANISMO EXPLICATIVO		
1	105			
/ $\frac{2}{3}$	70	$\frac{2}{3}$	X 105	= 70
$\frac{1}{3}$	35	$\frac{1}{3}$	X 105	= 35
$\frac{1}{30}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{30}$	X 105	= $\frac{7}{2}$
/ $\frac{1}{15}$	7	$\frac{1}{15}$	X 105	= 7
$\frac{1}{10}$	$10\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	X 105	= $\frac{21}{2}$
$\frac{1}{5}$	21	$\frac{1}{3}$	X 105	= 21
/ $\frac{1}{21}$	5	$\frac{1}{21}$	X 105	= 5

Se relacionan las filas fonde la suma de dos números de la izquierda hace 82, tomando esos números tenemos lo siguiente:

$\frac{2}{3}$ X 105 = 60; es decir que $\frac{2}{3} = \frac{70}{105}$

1 X 105 = 7; es decir que $\frac{1}{15} = \frac{7}{105}$

$\frac{1}{21}$ X 105 = 5; es decir que $\frac{1}{21} = \frac{5}{105}$

Haciendo las sumas resulta:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} = \frac{70}{105} + \frac{7}{105} + \frac{5}{105}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} = \frac{82}{105}$$

Es decir que:

$$\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{21}\right) \times 105 = 82$$

Es la parte que multiplica por 105 "hace" 82.

Como se observa, es una contínua descomposición, teniendo siempre la completación de "partes" a 82.

3. "Divide 2 panes entre 10 hombres" (Problema 2 Secciones II del papiro de Rind)(12).

Se supone de antemano que cada hombre recibe $\frac{1}{5}$, de -- pan, por lo tanto se pasa a comprobar que:

$$\frac{1}{5} \times 10 = 2$$

Se procede de la manera siguiente:

---

(12) Cit. por Buffon Vhace The Rhind Mathemáticas Rapyrus. (Lecciones para la enseñanza de las fracciones comunes) D.I.E.

A $\frac{1}{9}$ le corresponde 1, a 2 corresponderá $\frac{1}{5}$ haciendo a la vez las transformaciones a fracción unitaria y -- así sucesivamente.

El proceso lo mostramos a continuación:

$$2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad / \quad 2 \quad \frac{1}{5}$$

$$4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \qquad 4 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$8 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5} \quad / \quad 8 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{30} = \frac{4}{5}$$

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{15} = \frac{8}{5}$$

Se considera aquéllas filas donde la columna central su ma 10 que le corresponden las sumas de las fracciones siguien-- tes:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{15} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{15}$$

Haciendo la suma de estas fracciones:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + 1 + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} = \frac{5 + 1 + 15}{15}$$

$$= \frac{5 + 3 + 1}{15} = \frac{30}{15} = 2$$

Lo cual comprueba la multiplicación:

$\frac{1}{5} \times 10 = 2$

4. "Multiplicación por ciertas expresiones fraccionales.

MULTIPLICAR $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ por $1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ (13)

Los egipcios tenían diferencias acerca del multiplica-- dor y el multiplicando.

Así, en este caso el multiplicador es el número que se obtiene de $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$ "doblándolo" o "dividiéndolo"

El proceso viene a ser divisiones sucesivas como indica mos enseguida:

$1\frac{1}{4}$ $\frac{1}{28}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{56}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{112}$

El multiplicador es $1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ (suma de la primera co- lumna, y los números correspondientes a ellos se suman como lo

(13) Buffon Vhace, Adold. Op. cit.

indicamos.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{16} + \frac{1}{112} = \frac{1}{2}$$

El resultado o número a encontrar es $\frac{1}{2}$, se concluye:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad X \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

5. Cómo convertir cualquier fracción en sumas de fracciones unitarias?(14)

Primeramente partamos de una explicación del proceso siguiente: los pasos para la conversión de $\frac{3}{15}$, en sumas de fracciones unitarias, para luego hacer una interrelación del algoritmo, egipcio, para la conversión de $\frac{3}{15}$ se procede a los pasos.

Se calcula la fracción más grande entre las fracciones unitarias menores iguales que $\frac{3}{15}$, lo que logra aumentando el denominador hasta elcanzar el primer múltiplo de 3, es decir, hasta 15 y de ésto se deriva o concluye en la fracción $\frac{3}{15}$.

Efectuando la equivalencia $\frac{3}{15} = \frac{1}{15}$ se resta esta fracción a la fracción dada $\frac{3}{15} - \frac{1}{5} = \frac{15 - 13}{65} = \frac{2}{65}$

(14) Cit. por Fibonacci Liber Abaci, Bumbrs and Infinity, p. 11

Con la fracción anterior $\frac{2}{65}$, se repite el paso inicial del proceso, es decir, lograr u obtener la fracción menor o - - igual a $\frac{2}{65}$ la cual es $\frac{2}{66} = \frac{1}{33}$.

Continúa con la sustracción.

$$\frac{2}{65} - \frac{1}{32} \qquad \frac{66 - 65}{2145} = \frac{1}{2145}$$

y se concluye de esta manera el algoritmo de conversión:

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{33} + \frac{1}{2145}$$

Ahora, como hemos explicado el proceso en forma general

Dado $\frac{A}{B}$ fracción y 1 con A B.

$\frac{A}{B} - \frac{1}{N} \quad \left(\frac{NA - B}{BN}\right)$, y este paso se repite, el -- mismo termina NA - B A.

Se hace necesario aclarar que los egipcios no sólo utilizan este camino para encontrar las fracciones unitarias: también en papiro de Rind había listas de fracciones descompuestas en fracciones unitarias.

En síntesis, podría concluir que ciertamente los egip-- cios no habían desarrollado con amplitud las matemáticas y ni - llegado a un alto nivel de abstracción.

Pero no menos cierto es que los procedimientos matemá-

ticos de los egipcios basándose en su realidad dejan de ser importantes, concretamente el interesante manejo de las fracciones (en lo referente a las fracciones unitarias y en la división sobre la unidad), resultaron eficientes para sus objetivos inmediatos.

Sin embargo, la enseñanza actual de las fracciones, continúan remitiéndose a algunos de estos procedimientos concretamente a la división de la unidad.

2.2 Algunos conceptos sobre las Fracciones Comunes.

Las fracciones comunes son aquí definidas desde la teoría propuesta por el departamento de Investigación Educativa -- del Centro de Investigación de Estudios Avanzados del I.P.N.(15)

Las fracciones comunes forman un conjunto de números -- con propiedades, distintas de las propiedades de los números enteros y muchos, de los problemas se originan por no tener claras las definiciones.

Wentworth y Smith define a las fracciones en los términos siguientes: "Llámese fracciones a un número que indica en cuántas partes iguales está dividiendo la unidad o de cuántas - partes se trata.(16)

Utiliza un ejemplo para explicar la definición " $\frac{3}{4}$ " indica que la unidad se ha dividido en 4 partes iguales y que - se trata de 3 de ellas.

Definen los términos denominador y numerador. "El denominador de una fracción es el número que indica en cuántas partes iguales está dividida la unidad". "El numerador, por su --

---

(15) Cip. por D.I.E. Apuntes de fracciones comunes. México, Ediciones México del D.I.E. 1984 p.45

(16) Wentworth Jorge Davidad Aritmética Moderna, p. 86

parte es el número que indica cuántes partes se trata.[17]

Gómez Calderón Javier, Gómez Padilla Lucía y otros autores del texto de matemáticas formativas consideran primero justificar y explicar el concepto de fracción.

Las fracciones numéricas se utilizan para establecer relación y resolver problemas. Luego define y explica el concepto de fracción, toda pareja de enteros (m,n) con n diferente de cero, forma una fracción representada por $\frac{m}{n}$ ($m \neq 0$) entero m es el numerador y el entero n es n denominador.

Una fracción común consta de, dos términos llamados numerador y denominador.

El denominador indica en cuántes partes iguales se ha dividido la unidad principal, y el numerador, cuántas de esas partes se toman.

(17) Gómez Calderón Javier, Gómez Padilla Lucía Matemáticas Formativas p. 147

2.3 Clases de Fracciones Comunes.

Las fracciones forman un conjunto de números con propiedades específicas, distintas de las propiedades de los números enteros.

Las fracciones comunes para el D.I.E.[18] son pequeños números que dividen a uno o más enteros en partes iguales, pueden llegar a formar uno o más enteros.

Las fracciones, tanto comunes como decimales, pueden ser propias e impropias.

Las fracciones propias son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}$$

Toda fracción propia es menor que la unidad.

Fracciones impropias son aquéllas cuyo numerador es mayor o igual que el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}$$

Las fracciones impropias son mayores o iguales que la unidad.

---

(18) Cit. por D.I.E. Apuntes de Fracciones Comunes. México, Ediciones México del D.I.E. 1984. p. 23

Las fracciones equivalentes son aquéllas que tienen el mismo valor, si tenemos una fracción $\frac{p}{q}$ donde p y q son enteros además, $q \neq 0$, podemos presentar otros números que sean equivalentes, para ello tendríamos que tomar la unidad y multiplicarla por dicha fracción es $\frac{p}{q}(1)$. A la unidad la podemos sustituir por el cociente de un número diferente a cero dividido entre sí mismo $\frac{p}{q}$ $(\frac{r}{r})$, que al efectuar la multiplicación, nos quedaría $\frac{pr}{qr}$ es equivalente con $\frac{p}{q}$.

Como se ve, una fracción puede ser representada por una infinidad de formas, ya que r es cualquier entero diferente de cero. Ejemplo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{2}{6} \quad \frac{1}{3} \text{ es equivalente } \frac{2}{6}.$$

Otra de las formas de presentar fracciones equivalentes es dividiendo el número r por el denominador entre un mismo número, teniendo cuidado que dicho número sea divisor del numerador y del denominador.

$$\frac{128}{14} = \frac{128}{14} \div \frac{2}{2} = \frac{64}{7}$$

En consecuencia, tendríamos que multiplicar o se divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número diferente de cero, la fracción que resulta es equivalente a la primera. Es útil que el alumno maneje muy bien la conver-

sión de fracciones en otras equivalencias, ya que, para efec- - tuar sumas o restas, es necesario utilizar dicho concepto, tanto para realizar las operaciones como para expresar el resultado en su expresión simple, lo que llamamos simplificación de -- fracciones.

A continuación presentamos algunas de las propiedades - que tienen las fracciones comunes.

Propiedad No. 1 De varias fracciones que tengan igual denominador, es menor la que tenga mayor numerador, por ejemplo:

$\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{3}{4}$, la mayor $\frac{8}{4}$.

Propiedad No. 2 De varias fracciones que tengan igual numerador, es mayor la que tenga menor denominador, por ejemplo:

$\frac{2}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, la mayor es $\frac{2}{3}$.

Propiedad No. 3 Si a los términos de una fracción propia se suma un mismo número, las fracciones que resultan es mayor que el primero.

Por ejemplo: si la fracción $\frac{5}{7}$. Sumemos un número 2 -- por ejemplo, a los términos y tendremos:

$\frac{5 + 2}{7 \quad 2}$ $\frac{7}{9}$ decimos que $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$

Propiedad No. 4 Si a los términos de una fracción propia se resta un mismo número distinto del inverso aditivo del -

denominador, la fracción que resulta es menor que la primera.

Por ejemplo: si la fracción $\frac{5}{7}$. Restémosle un mismo número:

$$\frac{5 - 2}{7 - 2} = \frac{3}{5} \qquad \frac{5}{7} > \frac{3}{5}$$

¿Por qué debe ser distinto del inverso aditivo del denominador? Porque el ejemplo se tiene $\frac{5}{7}$, si resto a ambos términos queda $\frac{-2}{0}$.

Propiedad No. 5 Si a los términos de una fracción impropia es sumado un mismo número, la fracción que resulta es menor que la primera.

Si la fracción $\frac{7}{5}$. Sumamos un mismo número, 2 por ejemplo, a sus dos términos tendremos: $\frac{7 + 2}{5 + 2} = \frac{9}{7}$

$$\frac{9}{7} < \frac{7}{5}$$

Propiedad No. 6 Si a los términos de una fracción impropia se resta un mismo número, la fracción que resulta es mayor que el primero.

Sea la fracción $\frac{7}{5}$. Restamos el número 2 a sus dos

$$\frac{7 - 2}{5 - 2} = \frac{5}{3} \quad \text{decimos que } \frac{5}{3} > \frac{7}{5}$$

Propiedad No. 7 Si el numerador de una fracción se multiplica por un número, sin variar el denominador, la fracción queda multiplicada por dicho número y si se divide, la fracción queda dividida por dicho número. Por ejemplo:

$\frac{4}{}$ si multiplicamos 4 por 5 nos dará $\frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$

y $\frac{20}{3} = \frac{4}{3} \times 5$ tomando la fracción $\frac{20}{5}$ y dividimos a 20 entre 4, nos quedará $\frac{20 : 4}{5} = \frac{5}{5} = 1$ que es lo mismo que:

$\frac{20}{5} = 4$ ya que $\frac{20}{5} \div 4$ es igual a $\frac{20}{5} \times \frac{1}{4}$ dando como resultado $\frac{20}{20} = 1$.

Para saber cuál de dos fracciones dadas es mayor y cuál es menor, se hicieron fracciones equivalentes a las dadas y que tengan el mismo denominador aplicando después la propiedad.

Propiedad No. 8 Si el denominador de una fracción se multiplica o se divide por un mismo número, la fracción queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por el mismo número.

Propiedad No. 9 Si los términos de una fracción de multiplican o se dividen por un mismo número la fracción no varía (19).

---

(19) Baldor Aurelio Aritmética Teórica Práctica 2ed. México Ed. Cocide, S.A. Madrid 1985 p. 236 a 239.

2.4 Suma de Fracciones Comunes.

La suma de varias fracciones es posible, si se encuen-- tran expresadas en la misma unidad fraccionaria, es decir, si - tienen el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Se suman los numeradores y dicha suma es el numerador - del resultado que tendrá el mismo denominador.

Se sacan los enteros, si los hay o se simplifica.

Sumas de fracciones comunes que tienen distinto denominador, primero se reduce a un común denominador, presentando a cada sumando como otra fracción equivalente de tal forma que -- los numeros sumados tengan el mismo denominador; después se procede como en el caso anterior:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$$

Para sumar números mixtos, se suman primero, separada-- mente, los enteros y las fracciones y después se suman los re-- sultados obtenidos.

$1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$ Se puede hacer, porque $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, sustituyendo estas equivalencias, se tendrá

que:

$1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, utilizando la propie--

dad conmutativa de la suma se tendrá:

$1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} = 1 + 3 + \frac{1}{3} = 1 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; ahora pode

mos aplicar la propiedad asociativa $(1 + 3) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) =$

$4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ para realizar la suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ se tendrá que

hacer como ya se explicó más arriba.

La suma de números mixtos pueden efectuarse también reduciendo primero a fracción impropia y después sumando las fracciones con diferente denominador.

$$4\frac{2}{5}+5\frac{1}{4}+5\frac{1}{2} = \frac{14}{3}+\frac{21}{4}+\frac{3}{2}+\frac{56}{12}+\frac{63}{12}+\frac{18}{12} = \frac{137}{12} \quad 11\frac{5}{12}.$$

Propiedades de la suma de Fracciones.

Propiedades conmutativa y asociativa de la adición de fracciones. Las propiedades conmutativas y asociativas de la adición con números naturales tiene también validez cuando se trata de la adición de fracciones.

Propiedad Conmutativa. Tomemos las fracciones

$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{5}{4}$ o bien $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$, como se puede ver al realizar la suma hacemos:

$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3 + 2 + 5}{4}$; el numerador es la suma de números enteros. Es válida la conmutatividad nos resulta que: $\frac{2 + 3 + 5}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}$

La propiedad asociativa en las sumas de fracciones conmutativa:

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5}{8} + (\frac{1}{8} + \frac{7}{8}) + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} + \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{1}{8} + (\frac{5}{8} + \frac{7}{8}) + \frac{1}{8} + \frac{12}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$$

La propiedad asociativa en la suma de fracciones comunes es válido:

$$\frac{5}{8} + (\frac{1}{8} + \frac{7}{8}) = (\frac{5}{8} + \frac{1}{8}) + \frac{7}{8} \qquad \frac{5}{8} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} =$$

$\frac{5 + 1 + 7}{8}$, el numerador es una suma de números enteros, - por lo que es válido la asociatividad en $\frac{5 + (1 + 7)}{8} =$

$\frac{(5 + 1) + 7}{8} = \frac{5 + 8}{8} = \frac{6 + 7}{8}$, realizando las sumas de los numeradors sería que: $\frac{13}{8} = \frac{13}{8}$.

Propiedad del Neutro Aditivo.

En la suma de números fraccionarios no negativos, que - son los que se estudian en la escuela primaria, existe el neu-- tro aditivo que la fracción cuyo numerador sea cero y el denominador cualquier otro número entero que no sea cero. Por ejem-- plo:

$$\frac{3}{4} + \frac{0}{12} + \frac{9}{12} + \frac{9}{12} + \frac{0}{12} + \frac{9 + 0}{12} = \frac{9}{12}$$

2.5 Sustracción de fracciones comunes.

Como en el caso de la adición, la sustracción de dos -- fracciones es posible si se encuentran expresadas en la misma - unidad fraccionaria, es decir, si tienen el mismo denominador. Además, es el minuendo debe ser mayor o igual al sustraendo, -- dado que en la escuela primaria no estudiamos las fracciones negativas.

Sustracción de Fracciones con el mismo denominador.

Para restar dos fracciones que tienen el mismo denominador, basta hallar la diferencia de los numeradores para obtener el numerador del resultado, pués el denominador es el denominador común.

Ejemplo: $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7 - 5}{9} = \frac{2}{9}$

Sustracción de fracciones con distinto denominador.

Para restar dos números mixtos, se emplea cualquiera de los dos procedimientos siguientes:

Primero: Reducir el minuendo y el sustraendo a fracción impropia y proceder después como el caso anterior.

Ejemplo:

$$5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} = \frac{21}{4} - \frac{5}{2} = \frac{21 \quad 10}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

Segundo: Restan separadamente los enteros y las fracciones y sumar, los resultados obtenidos.

Al emplear procedimientos, debe tenerse mucho cuidado; porque en ocasiones, la fracción del minuendo es menor que la del sustraendo, ese caso se hace necesario transformar el minuendo a fin de hacer la resta o utilizar el primer procedimiento.

Por ejemplo:

$$3\frac{1}{4} - 1\frac{1}{3} = (3 - 1) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = 2 = \frac{3 - 4}{12}$$

Como la fracción del minuendo es menor que la fracción $\frac{1}{3}$, del sustraendo, se llega a la resta 3 - 4 que es imposible con números naturales. Entonces:

$3\frac{1}{4}$ debe transformarse en $2 + \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$, o sea, $2\frac{5}{4}$ para poder aplicar este procedimiento.

Veamos:

$$3\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 2\frac{5}{4} - 1\frac{1}{3} = (2 - 1) + (\frac{5}{4} - \frac{1}{3}) + 1 + \frac{15 - 4}{12} = 1 + \frac{11}{12}$$

Caso particular. Cuando el minuendo o el sustraendo es un número entero, se expresa en forma de fracción con denominador, la unidad y después se realiza la sustracción:

$$4 - \frac{1}{5} = \frac{20}{5} - \frac{1}{5} = \frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}$$

2.6 La multiplicación de fracciones comunes.

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores procedimiento a presentar el producto en sus expresiones.

Por ejemplo:

$$\frac{13}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{4 \quad 5} = \frac{12}{20}$$

Cuando necesitamos multiplicar más de dos fracciones, - multiplicamos la primera por la segunda, el resultado la tercera y así sucesivamente, hasta multiplicar la última; lo que - - equivale a obtener una fracción cuyo numerador es el producto - de los numeradores cuyo denominador es el producto de los denominadores: $\frac{2 \times 3 \times 1}{3 \times 4 \times 2}$ y como en el numerador son dos productos de números enteros por lo tanto, es válida la asociatividad.

Si tenemos que encontrar el producto $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$, vemos - que tendremos que multiplicar los números enteros 2 y 3; ésto - es 2 X 3, que será el numerador del producto. Para que el denominador tendremos que multiplicarlo 2 X 4 quedando $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$, encontrando que el numerador y el denominador son números enteros y el numerador y el denominador son producto de - números enteros y, como el producto de números enteros es conmutativo, también el producto de números fraccionarios es conmutativo.

En el producto de fracciones es muy útil las propieda-- des asociativa y conmutativa de los números enteros, ya que se puede simplificar el producto de fracciones, por ejemplo: sea - el producto de las fracciones.

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{10}{4} = \frac{3 \times 4 \times 10}{5 \times 6 \times 4} = \frac{3 \times 10 \times 4}{6 \times 5 \times 4}$ ó visto de otra manera: $\frac{3}{6} \times \frac{10}{5} \times \frac{4}{4}$ como $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $\frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\frac{4}{4} = 1$. Se pueden multiplicar los equivalentes:

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = 1.$

Más arriba se habló de fracciones equivalentes y en donde se concluía que para encontrar una fracción equivalente a -- otra dada se multiplica o se divide el numerador y el denominador por un mismo número y la fracción que resulta era equivalente a la primera. Analicemos qué es lo que sucede:

Tomemos a la fracción $\frac{3}{5}$ y encontremos otra fracción - equivalente a ella.

Multipliquemos al numerador y al denominador por 4; tendremos $\frac{3 \times 4}{5 \times 4}$, ahora, separemos estos productos sus factores:

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{4}$ en donde a $\frac{4}{4}$ es la unidad, ya que todo número entero diferente de cero dividido entre sí mismo es la unidad.

En conclusión: $\frac{3}{5} \times 1$ es igual a $\frac{3}{5}$, esto es porque - existe en un número fraccionario $\frac{1}{1}$ que multiplicado por otra fracción no la modifica, o sea que, existe el neutro multiplicativo para el producto de fracciones y uno de sus usos es encontrar fracciones equivalentes a otra dada teniendo como denominador un número que sea múltiplo éste.

Por ejemplo: encontramos una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ y que tenga como denominador 12. Tomamos a $\frac{3}{4}$ y lo multiplicamos por la unidad representado como $\frac{3}{3}$ ya que 12 = 4 X 3, que dónde $\frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$.

En símbolos si p, q y r son números enteros con $q \neq 0$ y $r \neq 0$, podemos tener una fracción equivalente a $\frac{p}{q}$ y que tenga un denominador un múltiplo de q.

$$\frac{p}{q} \times 1 \; \frac{p}{q} \times \frac{r}{r} = \frac{pr}{pr}$$

Tomemos una fracción distinta de cero y tratemos de encontrar un número fraccionario que al ser multiplicado por ésta nos dé como producto la unidad. Por ejemplo: tomemos la fracción $\frac{3}{7}$ y busquemos otra que $\frac{3}{7} \times \frac{r}{s} = 1$. Multipliquemos -- $\frac{3r}{7s} = 1$ como la unidad igual al cociente de un número dividido entre sí mismo, a excepción del cero, tenemos que 3r = 7s y - - ésto se dará sólo cuando r = 7 y s = 3, ya que 3 X 7 = 21 y - - 7 X 3 = 21 de donde el número $\frac{r}{s} = \frac{7}{3}$. Comprobando - - - - - $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{21}{21}$ que es la unidad.

De lo anterior, se deduce que todo número fraccionario distinto de cero tiene un inverso multiplicativo.

Hay otra propiedad de números fraccionarios que une al producto con la suma, la cual recibe el nombre de propiedad distributiva que se explica con el siguiente ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2+3}{4}\right) = \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

El resultado anterior se ha obtenido efectuando primero la suma indicada dentro del paréntesis, también puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} = \frac{2}{6} + \frac{6}{12} + \frac{4+6}{12} = \frac{10}{12}$$

simplificando $\frac{5}{6}$.

Analicemos qué pasa cuando uno de los dos factores es una diferencia de dos fracciones. Así por ejemplo:

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{20} - \frac{8}{15} = \frac{36-32}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}\right.$$

El resultado anterior se ha obtenido efectuando primero la sustracción indicada dentro del paréntesis; pero también puede obtenerse aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción.

2.7 La división de fracciones comunes es una operación que tiene por objeto encontrar un número, llamado cociente que multiplicado por el divisor, dé como resultado el dividendo.

La aplicación de esta definición nos permite encontrar

el cociente de dos fracciones.

Dividir: $\frac{1}{8} \div \frac{1}{4}$

El cociente de $\frac{1}{8}$ entre $\frac{1}{4}$ debe ser número que, multiplicado por el divisor $\frac{1}{4}$, dé el dividendo $\frac{1}{8}$.

Pensando un poco, podemos concluir que único número que cumple esa condición es $\frac{1}{2}$, porque $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

Para encontrar el cociente de dos fracciones es un poco difícil, sobre todo con fracciones más complicadas; se han encontrado que se obtiene el mismo resultado, si se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo.

$$\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{8} = \frac{4}{1}$$

dividir $\frac{6}{12} \div \frac{3}{4}$.

El cociente es $\frac{2}{3}$, porque $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ $\frac{6}{12}$

Multiplicando el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor se obtiene el mismo resultado.

$$\frac{6}{12} \div \frac{3}{4} = \frac{6}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{6}{12} = \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Para dividir dos fracciones, basta multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

2.8 Cómo enseñan los maestros las Fracciones Comunes.

En las entrevistas que realicé sobre la enseñanza aprendizaje de las fracciones comunes en la escuela primaria, dentro de la zona escolar No. 52 donde la mayoría de escuelas son particulares de las cuales dos solamente son oficiales y por tal motivo en éstas se me permitió entrevistar a los maestros, ya que en las particulares desconfiaron sus autoridades de la finalidad de mi investigación que era para otros fines y por lo que no me permitió investigar.

En las escuelas oficiales entrevisté a 25 maestros utilizando preguntas que dieran confianza para que me respondieran lo más veraz posible.

Les comentaba, por ejemplo, que yo no sabía cómo empezar a enseñar los temas de fracciones comunes, que me ayudaran a tratar a que mis alumnos las comprendieran para que en los grados superiores no se les dificultaran, les comenté que ya les había dado los conceptos generales, pero que me faltaba que les enseñara las operaciones, que la suma con fracciones comunes con el mismo denominador no se me dificultaban, pero que, tanto la suma como la resta con fracciones con distinto denominador, no las podía enseñar.

Los compañeros me contestaron de diferentes formas, de las cuales la mayoría aceptaron que no comprenden bien las fracciones comunes y por tal motivo ellos opinan que son temas

muy complejos y no los pueden explicar a los alumnos de manera sencilla y razonable, por lo que prefieren no meterse en problemas.

En observaciones realizadas en los libros y cuadernos de trabajo de los alumnos de las escuelas encontré que los temas de fracciones eran dejados como tarea a los alumnos y pocos maestros, 6 en total, los revisaban; también fueron pocos los cuadernos de los alumnos que tenían mecanizaciones acerca de las fracciones comunes.

Lo que más sorprende, es que ningún cuaderno que pude revisar encontré problemas donde intervinieran las operaciones con números racionales. Por lo que pude observar que para realizar las sumas de fracciones con distinto denominador, lo hacen en forma mecánica, esto es, que encuentran el común denominador multiplicando los denominadores de los sumandos para encontrar los sumandos tienen que dividir el denominador común entre el denominador de cada sumando y multiplicar el cociente que resulte por el numerador del sumando de que se trate.

Por ejemplo: se va a sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ el común denominador sería el 24 y los sumandos serán $24 \div 2$ igual a 12, que será multiplicado por uno, quedando como primer sumando $\frac{12}{24}$, el segundo sería $24 \div 3$ igual a 8; $8 \times 1 = 8$ el segundo sumando $\frac{8}{24}$, el tercer sumando se encuentra $24 \div 4 = 6$; $6 \times 1 = 6$.

Sumando los tres $\frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{6}{24} = \frac{26}{24}$ después se simplifica la fracción quedando $\frac{13}{12}$ y encontrando los enteros - - $1\frac{1}{12}$.

Para la resta se sigue un mecanismo similar.

La multiplicación es una de las operaciones que menos - dificultad presenta a los maestros para ser enseñadas a los niños, ya que sólo basta multiplicar los numeradores de los factores y el producto será el numerador de la fracción: producto - de los denominadores de los factores será el denominador de la fracción. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

Cuando pregunté a un compañero que por qué el producto $\frac{6}{24}$ es menor que el factor $\frac{3}{4}$ no pudo contestar diciendo que eso no es importante y que los niños no lo preguntaban.

La división la enseñan como "producto cruzado", donde - el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor es el numerador del cociente y el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor es el denomina-- dor del cociente, por ejemplo:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$$

Tan mecánicamente es la enseñanza que ponen el esquemita anterior, con flechitas, para que el niño las siga. Por lo anterior, se deduce que los compañeros entrevistados en la enseñanza de las operaciones con fracciones de manera mecánica sin importarles que los niños no comprendan qué significa cada una de ellas.

En algunos cuadernos de los niños encontré que tenían prácticamente "recetas" para poder realizar las operaciones, siendo lo menos grave, ya que en otros casos, como ya se dijo, ni siquiera los enseñan.

Un maestro en particular me comentó que él enseña las cuatro operaciones en un solo día y les pone un ejemplo de cada una de las fracciones comunes y después les deja el pizarrón lleno de ejercicios y con esos los entretiene toda la tarde y lo que no terminen que se lleven a sus casas y lo efectúen de tarea y con esta tarea les califica una unidad en la boleta de evaluaciones.

113608

-113608

3. ANALISIS DEL LIBRO DE TEXTO DE TERCER GRADO

En el libro de texto de tercer grado que la S.E.P. da a la niñez Mexicana, está integrado por ocho unidades de las cuales fueron analizadas de la siguiente manera:

En la primera unidad se encuentran los siguientes temas.

Cómo contar las cosas.

En el libro se encuentran diferentes cosas, por ejemplo frutas y útiles para que formen grupos de diez en diez o sea -- las decenas.

Es un conjunto de diez unidades.

Tomando como base las unidades enseguida de las decenas forman conjuntos para llegar a las centenas.

Realizando pequeñas sumas por medio de conjuntos aje--- nos.

Por medio de pequeños problemas los alumnos razonan.

+ De un lado a otro.

Por medio de dibujos que tengan la mitad iluminada pa-- ra demostrar que hay simetría.

+ Mitad y mitad.

Por medio de un limón entero, se les enseña qué es un - entero y qué es una mitad.

+ Partiendo en tres.

Por medio de un jitomate les enseñan qué es un tercio, que tres tercios forman un entero.

+ El que parte comparte.

Por medio de figuras geométricas partiendo en cuatro, - en quintas partes, en sextas partes.

+ Grande y chico.

Por medio de ilustraciones que tengan un medio, un cuarto, un tercio y un quinto.

Y preguntan cuál es más grande.

En la segunda unidad, encontramos los siguientes temas.

Sumas de dos sumandos que tengan hasta unidades de mi-- llar.

Restas que tengan millares y multiplicaciones de donde se encuentren unidades simples y unidades de millar.

Lo que cabe en un metro.

Se les habla a los alumnos que hay decímetros, centíme-

tros en el metro y marca ejercicios.

De unidades a decenas.

Por medio de pequeños problemas que los hace razonar a los alumnos para ellos es muy difícil encontrar las unidades simples y las decenas simples.

Cuerdas y figuras.

Por medio de juegos tradicionales como el avión, los niños se dan cuenta de las figuras geométricas.

Con regla y compás.

Los alumnos tienen que realizar figuras donde ocupen la regla y el compás.

+ Repartamos juntos.

Por medio de pequeños problemas, los alumnos se dan - - cuenta que un pastel puede repartir en partes iguales.

Partiendo un pastel redondo en barra tiene que partirse en cuantas partes se quiera con una igualdad.

+ Más o menos.

Por medio de fracciones, el alumno tiene que darse cuenta cuál es mayor y cuál es menor.

+ Se presentan decenas y centenas.

Con pequeñas restas donde se presentan unidades y centenas simples.

En las alturas de México.

Nos damos que las alturas de los volcanes y de las montañas son diferentes en nuestra República Mexicana.

Por la orillita.

Por medio de figuras geométricas, nos damos cuenta que el perímetro de cualquier figura se obtiene sumando todos los lados.

+ Pedazos de colores.

Pinta las siguientes partes que se te indiquen en las fracciones.

Simétrico o no simétrico.

De la página 72, nos remiten a la página 259, donde se encuentra el material didáctico de la simetría de las figuras. También se dan cuenta que no todas las figuras tienen simetría.

Información de barras.

Para que los alumnos tengan la idea cómo se forman las gráficas de barras.

Juegos de azar.

En la tercera unidad.

Más allá del millar.

Por medio de operaciones, nos damos cuenta que hay que más allá millar.

+ Juntando partes.

En este tema ya se habla de las sumas de fracciones con un metro, hay que hacer con fracciones.

Haciendo cuentas.

Sumas.

Para que los niños tengan más habilidades en las operaciones.

Problemas con sumas.

Como las vías del tren.

Por medio de éste se trabajan las líneas rectas, las líneas curvas y paralelas.

Restando en columnas.

Se presentan por medio de problemas.

Después del tema de la resta se pasa a las líneas.

Representamos lo que investigamos.

Se retoman las gráficas de barras.

Unidad Cuarta.

Muchas veces.

Les enseñan las sumas con mismo número para que se den cuenta que es más fácil multiplicar y más rápida la suma.

Acumulando puntos.

Son sumas por medio de objetos.

Triángulos especiales.

Por medio de un cuadrado se dan cuenta de los triángulo rectángulo.

Cuánto falta, cuánto sobra.

+ Son restas de fracciones, con el mismo común denomina-- dor.

Problemas de fracciones.

De lados iguales.

El perímetro de figuras geométricas.

La familia del barrio.

Se retoma otra vez la gráfica de barras.

Unidad No. Cinco.

Productos especiales.

Multiplicaciones.

Rectángulos de colores.

Retomamos otra vez las gráficas de barras.

Un triángulo famoso y otro no tanto.

Trazos de triángulos rectángulos a partir de rectas.

Agrupando y agrupando.

Por medio de multiplicaciones.

En la feria.

Son problemas de razonamiento de multiplicación.

¿Cuántas partes caben?

Ponen una figura totalmente lisa y otra con partes coloreadas para formar un entero.

¿Será posible?

Es un juego de azar.

Unidad No. Seis.

¿Cuánto le toca a cada quién?

Por medio de dibujos y figuras se enseñan a dividir a -

los alumnos, también por problemas de razonamiento.

Lo de antes y lo de ahora.

Son divisiones y multiplicaciones.

Con el compás.

Trazar círculos en los cuales los alumnos tienen que encontrar el centro.

El compás sirve para medir.

Por medio del compás podemos medir figuras.

Cuántes partes caben y cuántas sobran.

+ Fracciones comunes por medio de sumas con enteros.

Cuadritos.

Forman figuras.

Unidad No. Siete.

Se reparte y sobra.

Problemas de división.

+ Diferentes fracciones para una misma parte.

Primero ponen ilustraciones que el alumno se dé cuenta de que las fracciones son iguales.

Cuadritos en columnas.

Son para que el alumno obtenga el área de las figuras.

Problemas de toca y sobra.

Cuentas fáciles.

Son divisiones con un dígito.

Unidad No. Ocho.

Hay más que repartir.

Divisiones en donde el alumno pueda aplicar sus conocimientos de restas.

Problemas de razonamiento.

Del rectángulo al triángulo.

Sacar el área del triángulo y el rectángulo.

+ Otros nombres de fracciones.

Son fracciones decimales.

El día de tianguis.

Son problemas.

+ Los temas de fracciones están marcados con "+"

Tratar que el niño aprenda el concepto de fracción que es nuestro objeto de estudio, haciendo que observe dibujos si--

métricos iluminados en una de sus mitades, dejando que los alumnos iluminen la otra mitad. En esta actividad no se hace más y por tanto, los educandos no llegan a conclusiones de qué es una mitad, sino hasta la siguiente actividad, les anuncian que un limón está partido en dos mitades y así con varios objetos.

Siguen tratando que el niño obtenga el conocimiento de partes iguales.

Se observa que siempre van a presentar al entero como un objeto, ésto es, no presentan a un entero como un conjunto, por ejemplo: el grupo de alumnos que trabajan en el salón como un entero y que el niño encuentre una parte de este grupo, en la segunda unidad siguen con esa misma teoría, y así hasta la tercera; en la cuarta aparecen problemas de aplicación, pero siempre tomando a la unidad como entero, siempre tomando partes de una unidad. Así, seguimos encontrando.

Hasta la sexta unidad se empieza a introducir la división que no es ligada a las fracciones.

Aquí se puede hacer una reflexión, si a la expresión $\frac{p}{q}$ con p, q números enteros y $q \neq 0$, se puede ver como una fracción y como una división, porque no se liga la división con las fracciones, ya que al dividir estamos encontrando partes de un todo. Por ejemplo, cuando dividimos entre cuatro, estamos encontrando la cuarta parte del dividendo y así podemos poner una infinidad de ejemplos.

Como se ve, y siguiendo el órden del programa, analizamos cómo se estudian las fracciones en este grado.

Aunque en primero y segundo grados ya han visto algo de fracciones, en el tercero empiezan por dar la idea de fracción común.

3.1 Objetivos de aprendizaje de Matemáticas del Programa de Tercer Grado de Educación Primaria.

Objetivos Generales.

Al término de este grado escolar el alumno será capaz de:

Resolver problemas relacionados con su entorno que impliquen operaciones con números naturales, sin que los resultados excedan de 10,000.

Resolver problemas relacionados con su entorno que requieran sumar o restar fracciones de igual denominador.

Trazar figuras en las que aplique sus nociones de simetría paralelismo o perpendicularidad.

Resolver problemas relacionados con su entorno que impliquen la obtención de áreas o perímetros.

Registrar, organizar, graficar e interpretar datos obtenidos de investigaciones hechas en su escuela, su familia o su comunidad.

Clasificar resultados de algunos experimentos aplicando nociones de posible, imposible, más posible, menos posible o igualmente posible.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 1

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Representar números naturales menores que 1,000 en diversas formas aplicando las ideas de unidad, decena y centena.

Resolver problemas que impliquen adición: "sin llevar" y sustracción: "sin prestar", con números hasta de tres cifras.

Aplicar la noción de las fracciones:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ en las resoluciones de algunos problemas.

Trazar algunas figuras abstraídas de objetos.

Aplicar la noción de simetría axial al colorear o recortar algunas figuras.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 2

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Representar en diversas formas los múltiplos de 10,000.

Resolver problemas que impliquen adición "llevando" y sustracción "prestando", de números hasta de tres cifras.

Aplicando la noción de las fracciones:

$\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{10}$ en la resolución de algunos problemas.

Trazar figuras abstraídas de objetos, ayudándose con diferentes instrumentos.

Medir segmentos de resta utilizando el metro, el decímetro y el centímetro.

Clasificar figuras en simétricas y no simétricas, con respecto de un eje.

Interpretar gráficas de barras que representen datos recolectores en el medio escolar.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 3

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Representar en diversas formas números naturales hasta el 10,000.

Resolver problemas que impliquen adición "llevando" y sustracción "prestando", con números hasta el 10,000.

Resolver problemas que impliquen adición de fracciones de igual denominador sin que éste exceda de diez.

Resolver problemas que impliquen medición y cálculo del perímetro de algunas figuras.

Aplicar la noción de paralelismo y perpendicularidad - entre rectas al dibujar algunas figuras.

Interpretar gráficas de barras elaboradas con datos recolecados en la zona escolar.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD.
No. 4

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Resolver problemas que impliquen multiplicación de un dígito.

Resolver problemas que impliquen sustracción de fracciones, de igual denominador, sin que éste exceda de diez.

Aplicar la idea de paralelismo y perpendicularidad en la definición de rectángulo y de triángulo rectángulo.

Resolver problemas que impliquen el cálculo del perímetro de algunas figuras de lado congruentes.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 5

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Resolver problemas que impliquen multiplicación de un - dígito por un número hasta de cuatro cifras, sin que el producto exceda de 10,000.

Exprese números naturales como fracciones y algunas - - fracciones como números naturales.

Trazar rectángulos y triángulos rectángulos, de medi-- das dadas.

Determinar cuántas veces una región rectangular cabe -- en otra.

Utilizar las palabras posibles e imposibles, para cla-- sificar algunos eventos.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 6

Al terminar esta unidad, el alumno será capaz de:

Resolver problemas que impliquen división exacta de números hasta de dos cifras, entre un dígito.

Exprese algunas fracciones como números mixtos y números mixtos como fracciones.

Medir segmentos de recta utilizando el compás.

Determinar en centímetros cuadrados el área de algunas superficies rectangulares.

Utilizar las expresiones más posibles o menos posibles para calificar los resultados de un experimento que tenga dos resultados.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 7

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Resolver problemas que impliquen división inexacta de números hasta de dos cifras entre un dígito.

Identificar pares de fracciones equivalentes.

Determinar el área de algunos rectángulos en función de la medida de sus lados.

Utilizar las expresiones más posibles y menos posibles para calificar los resultados de un experimento aleatorio que tenga más de dos resultados.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
UNIDAD No. 8

Al término de esta unidad, el alumno será capaz de:

Resolver problemas que impliquen división inexacta de números hasta de cuatro cifras entre un dígito.

Determinar el área de algunos triángulos aplicando sus conocimientos sobre el área del rectángulo.

Expresar fracciones de denominador 10 ó 100 como decimales y algunos decimales como fracciones de denominador 10 ó 100.

Resolver series de problemas que impliquen más de una operación que se deriven de una misma situación.

Calificar algunos resultados aleatorios como igualmente posible.

UNIDAD No. 1

Objetivos de la unidad.

Aplicar la noción de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, en la resolución de algunos problemas.

ANTECEDENTES.

Colorée simétricamente algunas figuras (L. A Mat.pp 34 35).

Colorée simétricamente una figura humana ya coloreada - en una de sus mitades.

Colorée simétricamente figuras ya coloreadas en una de sus mitades.

Doble por mitad una hoja de papel y recorte, a partir - del doblez, un motivo cualquiera.

Desdoble la hoja y observe el efecto logrado.

Pinte simétricamente la figura recortada.

ACTIVIDADES.

Asocie las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$ a mita-

des, terceras, cuartas, quintas y sextas partes de objetos y figuras, según corresponda (1A. Mat. pp 36 a 42).

Tome una tira de papel o barra de plastilina.

Corte el listón en dos partes iguales.

Diga si cada parte es una mitad del listón.

Recorte por la línea punteada el rectángulo dividido en mitades (L. A. Mat. p 251).

Superponga las partes obtenidas e indique si son "iguales".

Diga si cada parte es una mitad de rectángulo.

Escriba en cada parte la fracción $\frac{1}{2}$.

Siga un procedimiento similar para estudiar las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$, apoyándose en el material correspondiente de tu libro de (L.A. Mat. pp. 251 y 253).

Ponga sobre la mesa partes del rectángulo.

Señale la parte que corresponda a una fracción indicada por el maestro.

Escriba la fracción que corresponda a cada una de las partes "iguales" en que esté dividida una figura que haya señalada por el maestro o alguno de los compañeros.

Establezca relación de órden entre las fracciones si- - guientes (L.A. Mat. p.43).

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.

Compare de dos en dos sus partes de rectángulo y señale cuál es el más grande y cuál la más chica.

Complete con las palabras mayor o menor expresiones como: $\frac{1}{2}$ es _____ que $\frac{1}{5}$

Ordene sus pedazos del rectángulo del más grande al más chico y viceversa.

Ordene las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$ de mayor a menor y viceversa.

Resuelva problemas que impliquen relación de órden pa-- res de fracciones.

UNIDAD No. 2

Objetivo.

Aplicar la noción de las fracciones $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ en la resolución de algunos problemas.

ANTECEDENTES.

Dibuje figuras en su cuaderno, usando la regla y el compás.

Dibuje líneas rectas usando la regla.

Dibuje arcos y círculos utilizando el compás.

Trace figuras utilizando la regla y el compás.

Comente con sus compañeros en qué objetos observa formas como las que dibujó.

ACTIVIDADES.

Asocie fracciones $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{10}$ a séptimas, octavas, novenas y décimas partes de objetos y figuras según corresponda (La. A. Mat. pp 61 a 64).

Siga un procedimiento similar al señalado en la unidad No. 1, para $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$ apoyándose en el material correspondiente en su libro. (L. A. Mat. pp 253).

Establezca relaciones de órden entre las fracciones:

$\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{10}$.

Siga un procedimiento similar al señalado en la unidad No. 1 para estudiar el órden entre las fracciones:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD No. 3

Resolver problemas que implique adición de fracciones de igual denominador sin que éste exceda de diez.

ANTECEDENTES.

Obtenga perímetros de algunas figuras.

ACTIVIDADES.

Interprete fracciones como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$.

Reúna un grupo de rectángulos que representen fracciones de igual denominador, por ejemplo, tres rectángulos que representen $\frac{1}{5}$ cada uno.

Una esos rectángulos para formar rectángulo mayor.

Asocie a ese nuevo rectángulo la suma correspondiente:

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.

Represente ayudado por su maestro esa suma con una fracción de numerador diferente de uno $\frac{3}{5}$.

Haga ejercicios similares con otros conjuntos de frac--

ciones.

Resuelva ecuaciones como $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} =$

Represente una fracción dada que tenga denominador diferente de 1, con una suma de fracciones de numerador 1; y luego la represente con sus pedazos de rectángulo. Por ejemplo:

$$\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}.$$

Colorée en algunas figuras las partes que correspondan a fracciones como $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, etc.

Escriba las fracciones que correspondan a las partes coloreadas de algunas figuras.

Construya con una cuerda o listón una cuarta parte de metro, una décima parte, etc.

Mida con ellos diversos segmentos y anote las medidas que obtengan.

Compare por parejas las medidas obtenidas y determine cuál es la menor y cuál la mayor.

Ordene las medidas de mayor a menor y viceversa.

Resuelva problemas que impliquen adición de fracciones de igual denominador.

Exprese con sus palabras una situación problemática ---

que implique una adición de fracciones como $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$.

Señale cuáles son los datos conocidos y cuál el que se busca.

Exprese el problema con una ecuación como:

$\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$

Resuelva la ecuación.

Resuelva la ecuación ayudándose con partes de rectángulo.

Anote la solución de la ecuación.

Indique la solución del problema utilizando la solución de la ecuación.

Resuelva otros problemas del mismo tipo.

Invente y resuelva otros problemas similares.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD No. 4

Resolver problemas que impliquen sustracciones de fracciones de igual denominador sin que éste exceda de diez.

ANTECEDENTES.

Resuelva problemas que impliquen multiplicación de números menores que 10. (L.A. Mat. pp 115 a 121).

ACTIVIDADES.

Resuelva problemas que impliquen sustracción de fracciones de igual denominador sin que éste exceda de 10 (L.A. Mat. - pp 126-129).

Exprese con sus palabras o dramatice, una situación problemática que implique una resta, por ejemplo: $\frac{8}{10} - \frac{3}{10} =$

Señale cuáles son los conocidos y cuáles el que se busca.

Exprese el problema con una ecuación $\frac{8}{10} - \frac{3}{10} =$

Resuelva la ecuación ayudándose con sus partes de rectángulo.

Represente el minuendo con un conjunto de partes de rectángulo.

Quite de ese conjunto las partes que indica el sustraendo.

Observe cuántas partes quedaron y anote la solución de la ecuación.

Invente y resuelva otros problemas del mismo tipo.

Resuelva ecuaciones como las siguientes:

$\frac{5}{4} - \frac{2}{4} =$ _____ y $\frac{1}{6} +$ ___ $= \frac{5}{6}$.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
No. 5

Exprese números naturales como fracciones y algunas - - fracciones como números naturales.

ANTECEDENTES.

REsuelva problemas que impliquen multiplicación de un - número hasta de cuatro cifras por un dígito, sin que el producto exceda de 1,000.

ACTIVIDADES.

Exprese números naturales como fracciones y algunas fracciones como números naturales. (L.A. Mat. pp. 150 a 153).

Superponga en un rectángulo unidad, hasta cubrirlo exactamente, mitades, terceras o cuartas partes de rectángulo, etc.

Observe en cada caso con cuántas partes se cubre el - - rectángulo y complete expresiones como las siguientes:

$1 = \frac{\quad}{2}$ $\quad \frac{2}{2}$ $\quad 1 \frac{\quad}{5}$ $\quad \frac{5}{5}$

Haga lo mismo con conjuntos de dos o más unidades y complete expresiones como:

$3 = \frac{\quad}{4}$ $\quad \frac{12}{4} =$ $\quad 5 \frac{\quad}{10}$ $\quad \frac{50}{10} =$

Resuelva problemas en los que expresen números naturales como fracciones algunas fracciones como números naturales.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
No. 6

Exprese algunas fracciones como números mixtos y núme-- ros mixtos como fracciones.

ANTECEDENTES.

Mida segmentos de recta utilizando el compás.

Trace un segmento de recta.

Abra el compás con una distancia en centímetros entre - sus puntos.

Apoye el compás en uno de los extremos del segmento y - trace un arco sobre él.

ACTIVIDADES.

Exprese algunas fracciones impropias como mixtos y como fracciones impropias.

Tome un conjunto de partes de rectángulos que correspon da una fracción mayor que 1 y menor que 2 y vaya cubriendo con ellos un rectángulo-unidad.

Observe que con los pedazos de rectángulo se cubre el rectángulo - unidad y sobran algunas partes.

Interprete el resultado anterior como la suma del núme-

ro uno y una fracción.

$$\frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4}.$$

Escriba sumas como $1 + \frac{2}{4}$ en la forma $1\frac{2}{4}$.

Siga un procedimiento similar para estudiar otras fracciones impropias.

Complete expresiones como las siguientes: manipulando sus partes de rectángulo si es necesario.

$$\frac{5}{3} = \qquad \frac{7}{2} = \qquad 1\frac{3}{8} = \frac{\quad}{8} \qquad 2\frac{1}{4} = \frac{\quad}{4}.$$

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
No. 7

Identificar partes de fracciones equivalentes.

ANTECEDENTES.

Resuelva problemas que impliquen divisiones inexactas entre división inexacta entre dígito, con cociente de un dígito (L. A. Mat. pp 193 1 197).

ACTIVIDADES.

Identifique pares de fracciones equivalentes (L.A. Mat. pp 198 a 201).

Ponga sobre su mesa un recorte de rectángulo que corres

ponda a $\frac{1}{2}$.

Intente cubrir exactamente ese recorte con terceras partes de rectángulo, luego con cuartas partes y así sucesivamente, hasta emplear décimas partes. En los casos en que cubra exactamente la mitad con sus recortes complete.

expresiones como: $\frac{1}{2} =$

Siga un procedimiento similar para completar igualdades como las siguientes:

$\frac{1}{3} =$ $\frac{1}{4} =$

Determine si dos fracciones dadas son o no equivalentes ayudándose con sus recortes, si es necesario.

OBJETIVOS DE LA UNIDAD
No. 8

Expresar fracciones de denominador 10 ó 100 como decimales y algunos decimales como fracciones de denominador 10 ó 100.

ANTECEDENTES.

Determine el área de algunos triángulos no rectángulos formados por otros triángulos cuya área conoce. (L.A. Mat. pp - 227 a 231).

ACTIVIDADES.

Represente décimas partes en notación decimal o con - - fracciones de denominador 1C. (L.A. Mat. pp. 232 a 233).

Forme grupos de décimas partes con sus recortes.

Asocie a cada grupo la fracción de denominador 10 que - le corresponda; por ejemplo $\frac{4}{10}$ para cuatro décimas partes.

Represente en notación decimal el número de partes que hay en cada grupo de los que formó, por ejemplo: 4 para las cuatro décimas partes.

Complete igualdades como $\frac{6}{10}$ = y 3 =

Observe que un décima parte de un metro y que por ello se puede decir que 1 decímetro es $\frac{1}{10}$ de metro, o bien 1 me-- tro.

Mida diversos objetos con un decímetro y exprese sus resultados en notación decimal; por ejemplo: La altura de la silla es de 7 metros.

C O N C L U S I O N E S

Se puede empezar a trabajar en el tema de las fracciones con algún problema de reparto o como hacen con el problema, de simetría de tal manera que el alumno se vea involucrado en una situación problemática, ya que quien ha de aprender sea el que piense, sea el que elabore el conocimiento.

Por ejemplo: Repartir un montón de 24 objetos pequeños en dos partes, para ver cuánto es la mitad, la tercera si se reparte en tres partes iguales, en la cuarta, en la sexta y la octava partes iguales o la décima parte según como se quiera repartir. Se puede hacerlo a través de objetos, también repartiendo el grupo de alumnos en dos mitades, si el número de alumnos es impar se ocupará a uno como ayudante, en fin, de acuerdo con el número de alumnos que se tengan y con un poco de ingenio del maestro.

Por qué "el educando podrá objetivar según sus iniciativas y según sus posibilidades". (20)

Se podrá separar al grupo en tercios, cuartos, quintos, etc.

Después de varios ejercicios se podrá pasar a la repre-

---

(20) Junquería Mumé , Didáctica del cálculo Ed. Labor. Barcelona Madrid 1969 p. 4.

sentación gráfica como lo hacen en el libro de texto.

Es muy importante que desde un principio se vea a las fracciones como divisiones y que el entero no sea solamente una unidad, sino que el entero pueda ser un conjunto para que cuando se llegue a estudiar el tanto por ciento, en grados superiores se facilite su asimilación.

No se tiene que olvidar que al dividir se está encontrando una parte de lo que se tiene como dividendo, en otras palabras, al dividir en ciertos números de objetos entre cuartos, estamos encontrando la cuarta parte de dicho número, ya que dividir entero en cuatro es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{4}$, o sea entendiéndolo de otra forma, es encontrando la cuarta parte de un número.

El material didáctico es muy importante, ya que el niño debe tener muy claro el concepto de fracción en un principio es recomendable usar objetos como materiales, ésto es decir el conocimiento objetal para que el niño vaya construyendo el conocimiento. Después se podrá utilizar el dibujo, de preferencia cuadrículas, dibujando figuras para iluminar partes para llegar así a la parte más abstracta que es la simbólica.

En tercer grado, que es el grado que se está analizando, no se estudian las operaciones, por lo que tendrán que hacer gran cantidad de ejercicios para que sea aquí donde se afirmen los conceptos generales de las fracciones y lleguen a com--

prender la suma, la resta, la multiplicación y la división, de operaciones fundamentales.

BIBLIOGRAFIA.

Análisis de la metodología de un programa de matemáticas. Sección de Matemáticas - Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N. Septiembre 1979.

BALDOR, Aurelio. Aritmética Teórica práctica. 2 ed., México, Ed. Cocide, S.A. Madrid, 1985. 639 p.

CASTELNURO, Emma. Didáctica de las matemáticas modernas. México, ED, Varazen -- 1962 118 p.

D.I.E. Apuntes de fracciones comunes. México, Ediciones del D.I.E. 1984. 45 p.

DINES, Z.P. y E.W. Golding. Los primeros pasos de las matemáticas. Lógica y juegos lógicos. México, Ed. Teide. Barcelona 1980 139 p.

DINES, Z.P. y E.W. Golding. Los primeros pasos de las matemáticas 2 Conjuntos, números y potencias. Ed. Teide. Barcelona 1980. 170 p.

DINES, Z.P. y E.W. Golding. Los primeros pasos de las matemáticas 3 Exploración del espacio y práctica de la medida. Ed. Teide. Barcelona 1980 116 p.

JUNQUERIA Muné, José. Didáctica del cálculo. Barcelo, Ed. Labor, 1969. 772 p.

Programa de la S.E.P.

UPN. Contenidos de aprendizaje. Anexo -- México. Ed. Universidad Pedagógica Nacional. 1983. 165 p.

VILLALPANDO, Manuel José. Manual de psicotécnicas pedagógicas. 19 ed. México, Ed. Porrúa, S.A. 1976. 361 p.