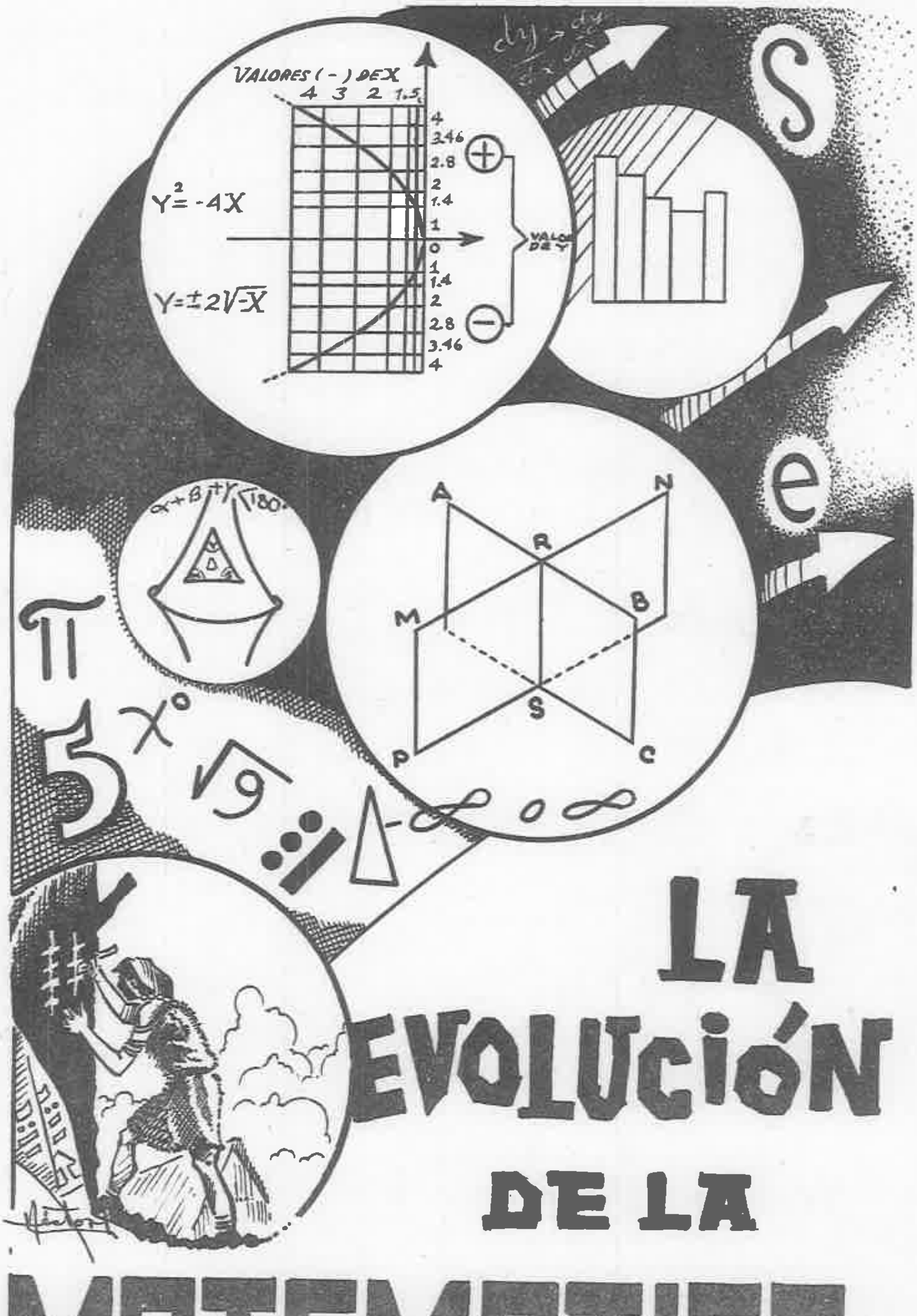
SEAD 096



LA EVOLUCIÓN DE LA MATEMATICA

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
SUBSECRETARIA DE EDUCACION SUPERIOR

Dirección de Capacitación y Mejoramiento
Profesional del Magisterio

Dirección de Licenciatura para Maestros en Servicio
LICENCIATURA EN EDUCACION PRIMARIA
(CENTRO 36) SEAD 096

~~LA~~ EVOLUCION DE LA MATEMATICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN EDUCACION PRIMARIA

P R E S E N T A

MARGARITA RAQUEL VILLASANA CASTILLO

MEXICO, D. F. 1979

A mis padres
con cariño, admiración y gratitud.

A mis hermanos
con afecto y reconocimiento.

A mi esposo e hijas
con agradecimiento y
profundo amor.

A Yolanda Espinosa Puente
con especial cariño por la bondadosa comprensión
que me ha brindado.

A Irmucha, Lupis, Olguis y Leo
mis queridas e inseparables amigas
de hoy y de siempre.

A Laurita, Lucha y Chela
compañeras y amigas, siempre
presentes en mi pensamiento.

I N D I C E

S I M B O L O S	S I G N I F I C A D O
$\therefore$	por tanto
$=$	igual a
$\neq$	no es igual a
$>$	mayor que
$<$	menor que
$\geqslant$	mayor o igual que
$\leqslant$	menor o igual que
$\Longrightarrow$	luego entonces
$\sqrt{}$	raíz cuadrada
π	Pi (3.14159...)
$\vee$	y
$\wedge$	o
$\longrightarrow$	si entonces
$\longleftrightarrow$	si y solo si
$\neg \sim$	no
$\in$	pertenece a
$\notin$	no pertenece a
$\subset$	subconjunto
$\emptyset$	conjunto vacío
U	conjunto universal
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
A'	complemento de A
A x B	A cruz B (producto cartesiano)
f(A)	en función de A

INTRODUCCION

El uso de los números así como las ideas de extensión, de situación y de forma son tan antiguas como el hombre mismo.

Y, sin duda la Matemática tiene sus orígenes en las necesidades de éste. Pero, una vez en marcha, bajo la presión de las aplicaciones necesarias, dicho desarrollo gana impulso en sí mismo y trasciende los confines de una utilidad inmediata.

Hay quien piensa que la Matemática es una ciencia a la cual poco queda por investigar y que solo deben buscarse aplicaciones, pero nada más lejos de la verdad. El hombre necesita cada día más de la Matemática, pues gracias a ella ha podido realizar grandes proezas, como el llegar a la luna, poner satélites en órbita, etc.; ha logrado también que el hombre disfrute mejor su existencia proporcionándole satisfactores tales como el teléfono, la televisión, el avión, etc.; ha construido máquinas que le faciliten el trabajo (computadoras, lavadoras) y ha logrado superar muchas enfermedades; así desde el momento mismo en que a la rama del conocimiento se introduce el empleo de los números, no tarda la Matemática en hacer ver su utilidad. Pero como toda ciencia, en el proceso de su gradual desenvolvimiento y formación, desde que fija las primeras y más simples nociones hasta que se constituye en un sistema de verdades íntimamente relacionadas y demostradas por la experiencia, atraviesa por una diversidad de fases que si se estudian detenidamente pueden servir de guía útil al maestro para su aplicación a la didáctica. Ello me ha hecho tratar de esbozar un desarrollo histórico del proceso en que la Ciencia Matemática fue conformándose a través del tiempo, con las aportaciones de sus investigadores. En algunos casos se sacrificará la secuencia cronológica de los conceptos con el fin de facilitar la comprensión de los mismos. Sin embargo, los campos de la Matemática a que hago referencia en el desarrollo del tema, no representan la totalidad de ellos, todos sabemos que actualmente el mundo está envuelto en un torbellino de números, prueba de ello son los pueblos más adelantados de la Tierra, en los que predomina el conocimiento matemático en todas sus fases.

Creo sinceramente que todo profesor que tenga un conocimiento lo más completo posible de la Matemática, sabrá transmitirla más fácilmente y he elegido este tema precisamente para tratar de ampliar y afirmar mis conocimientos, deseando a su vez que este trabajo sirva para consulta y aclaración de posibles dudas; ya que considero que en la medida en que nos superemos los profesores, se superarán los alumnos.

C A P I T U L O   1

P L A N T E A M I E N T O   G E N E R A L

Según Pugh, la investigación es "una inquisición seria y diligente, con un propósito claro: averiguar los hechos, formular una hipótesis, probar una teoría existente, arrojar nueva luz sobre un punto de vista establecido, ganar perspectiva histórica, establecer estadísticas vitales, comprender un fenómeno físico, o interpretar los resultados de otros por medio de la organización y la síntesis del material para apoyar una conclusión".

Para todo trabajo de investigación se requiere del planteamiento de un problema, seguido de una o varias hipótesis.

Problema es un antecedente para la elaboración de un trabajo de investigación, que sirve como medio para describir los objetivos, el contenido y el procedimiento a seguir. Y, como problema es una pregunta que nos hacemos sobre algo que desconocemos, me he planteado la siguiente interrogante:

"¿HA PERMANECIDO ESTATICO EL OBJETO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA, EN EL TRANSCURSO DE SU HISTORIA?"

He elegido este problema porque considero que al resolverse, se logrará la unificación de la enseñanza de la Ciencia Matemática.

Según el diccionario de la Lengua Española, la hipótesis es "la suposición de una cosa, sea posible o imposible, para obtener de ella una consecuencia".

Podemos decir también que hipótesis es una respuesta tentativa a un problema propuesto, sin saber aún si es cierta o no.

Para resolver el anterior problema, he formulado la siguiente hipótesis:

"LA CIENCIA MATEMATICA HA EVOLUCIONADO"

Surge dicha hipótesis debido a que el motor de las investigaciones de los matemáticos ha variado en el correr del tiempo.

Considero que para el desarrollo del presente trabajo, los objetivos a alcanzar son los siguientes:

1.- Analizar el proceso en que la Ciencia Matemática fue forjándose a través del tiempo, con las aportaciones de sus investigadores.

2.- Describir la evolución del pensamiento científico y las necesidades de las distintas sociedades o pueblos, que hacen posible el desarrollo de la Matemática.

3.- Comprobar que la Ciencia Matemática ha ido avanzando con el paso del tiempo.

C A P I T U L O 2

N U M E R O S, N U M E R A L E S Y S U S O P E R A C I O N E S

2.1 CONCEPTO DE NUMERO

El idioma y el número son dos creaciones maravillosas del hombre y tan importantes que puede decirse, sin temor a equivocarse, que la medida del desarrollo de su uso, marca la medida del desarrollo de la civilización.

Además de su aspecto lógico, el número tiene un aspecto místico que se perpetúa entre buen número de nuestros contemporáneos.

El concepto de número fue una de las cosas que más trabajo costó al hombre definir, debido a que es una abstracción. Para llegar a él es necesario desprender de los objetos sus características inherentes para poder compararlos con otros, quedando en esencia una idea que los una, por ejemplo: entre conjuntos de animales, piedras, frutos, etc., parece no existir ninguna característica común que los relacione, pero si observamos detenidamente nos encontramos con que el hombre pudo hacerlo desde la antigüedad a través de la comparación cuantitativa (apareando los conjuntos, pudo distinguir si un conjunto tenía más o menos elementos).

El apareamiento que consiste en hacer corresponder a cada elemento de un conjunto, un elemento del otro conjunto, es una de las dos técnicas básicas de la Matemática y es la que llevó al concepto de cardinalidad o de número natural, es decir del número que utilizó para contar.

La segunda técnica elemental de la Matemática es el censo, por medio del cual el hombre solucionó el problema de dar un orden a las cosas.

Se dice que el apareamiento solo es incapaz de fundamentar a la Aritmética; si no se supiera ordenar a los objetos, es decir, disponerlos según la sucesión natural, nuestra mentalidad sería la de las tribus salvajes. Así nació el concepto de número ordinal.

Como consecuencia de hacer corresponder los dedos (o partes del cuerpo) en un orden invariable, con los elementos del conjunto que se trata de contar, la memoria fija el resultado, lo liga con la palabra que designa el dedo (o parte del cuerpo) y acaba, esta palabra, por significar un número.

Una vez que el hombre hizo uso del número, tuvo necesidad de representarlo y para ello se valió de infinidad de simbologías(numerales.)El tratar de operar con dichos numerales dio origen a diferentes sistemas de numeración.

2.2 SISTEMAS DE NUMERACION

Muchos han sido los sistemas de numeración que ha empleado el hombre. Cuando y donde el dominio del hombre sobre el medio es débil, su sistema de numeración refleja su ineptitud.

El hablar y el contar fueron simultáneos; junto a los primeros sistemas de escritura conocidos (sumerio y egipcio, siglo IV a.C.), aparecieron también los primeros sistemas de numeración, los cuales tienen por base el número diez o un número relacionado con él: 5, 20, 60 .... lo que nos hace pensar que los dedos de las manos son el recurso auxiliar más antiguo. Ejemplos de dichos sistemas son:

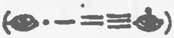
La numeración en la Mesopotamia que era sexagesimal, sistema que todavía hoy utilizamos en la medida de los ángulos y del tiempo.

La numeración de los egipcios fue por medio de jeroglíficos. .

Los principales problemas al crear un buen sistema de numeración son dos: los símbolos que se usarán para la escritura de cualquier número y la dificultad o facilidad de operar con ellos.

Respecto al primer problema, es necesario un número limitado de símbolos para poder conocerlos todos, no importa cuan grande o pequeña sea la cantidad que haya de representarse.

Los nombres y los símbolos para los números se llaman "numerales", es decir, los numerales son los que escribimos o pronunciamos cuando nos referimos a los números.

El segundo problema es que la simbología elegida nos permita operar con facilidad, por ejemplo, el sistema de numeración maya tiene un número limitado de símbolos (), pero a pesar de lo limitado de su simbología no es fácil realizar operaciones con ellos.

Los sistemas de numeración pueden ser posicionales y no posicionales; en los primeros, se toma en cuenta el lugar o posición que ocupa una cifra dentro del numeral y cada símbolo adquiere dos valores: uno absoluto (dado por el símbolo en sí) y otro relativo (de acuerdo con el lugar que ocupa en el numeral). Los no posicionales no toman en cuenta el valor relativo (por ejemplo el sistema egipcio). Analizando estos sistemas vemos que los posicionales son los "mejores" sólo que para estructurarlos fue necesario que el hombre llegara al concepto del cero para poder indicar carençia de unidades de un cierto orden. Por ello su descubrimiento propició un gran avance en la Matemática y corresponde a los mayas y a los indúes tal proeza.

Hoy en día un sistema de numeración posicional podemos crearlo con dos o más elementos, siempre y cuando uno de ellos sea cero. El número de elementos tomado da lo que llamamos base del sistema y así podemos hablar de un sistema binario (dos elementos), quinario (cinco elementos), decimal (diez elementos), etc. Este último es el aceptado mundialmente, aunque el binario ha sido de gran utilidad en las últimas décadas, aplicado al diseño de computadoras electrónicas.

Por último, el hombre llegó al concepto de número, definido a través de axiomas.

Ya Euclides (siglo IV - III a.C.), maestro de Matemática en la escuela de Alejandría, había construído su geometría utilizando un método axiomático, es decir, comenzó por enunciar una serie de verdades que le parecían evidentes por sí mismas y que aceptaba sin demostración previa.

A partir de ellas, las reglas del razonamiento por sí solas proporcionábanle todo lo demás. A estas verdades evidentes las llamamos "axiomas".

El italiano Giuseppe Peano (1858-1932), utilizando este método (más perfecto y acabado) definió al número natural; es decir, con una serie de axiomas aclaró qué se entiende por número natural y qué reglas están permitidas en el conjunto de los números naturales, y con una teoría formalizada opuso frente a una teoría intuitiva.

Los cinco axiomas de Peano:

Axioma 1: 1 es un número natural.

Axioma 2: Todo número natural n tiene asociado en una forma única otro número n' llamado sucesor de n.

Axioma 3: El número 1 no es sucesor de ningún número natural.

Axioma 4: Si dos números naturales tienen sucesores iguales entonces, asimismo, son iguales.- Esto es, si $n' = m'$, entonces $n = m$.

Axioma 5: Supóngase que M es una colección o un conjunto de números naturales con las propiedades:

(i) 1 está en M

(ii) n' está en M siempre que n esté en M.

Entonces, la colección M consiste de todos los números naturales.

2.3 OPERACIONES CON NUMEROS NATURALES

Los pueblos de la antigüedad, aún con sus sistemas de numeración primitivos, lograron efectuar las operaciones fundamentales y todavía más, los sumerios por ejemplo, tenían tablas de multiplicar, de dividir, de potencias cuadradas y cúbicas, así como extracciones de raíces cuadradas y cúbicas.

Llamamos a la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de números naturales "operaciones".

2.3.1 ADICION Y SUSTRACCION

La adición es una operación que combina un primer número con un segundo número para dar un número. Llamamos a los dos primeros sumandos y al resultado suma. Ejemplo:

3	+	2	=	5
sumando		sumando		suma

Por ello se dice que es una operación binaria -- (una operación binaria es aquélla que asocia un solo elemento por cada dos elementos cualesquiera de un conjunto - dado).

La adición surgió de la necesidad de resolver -- problemas como: $5 + 2 = ?$ y tiene las siguientes propiedades:

1a. Cerradura: Para todo número a,b,c, elementos de los naturales, $a + b = c$.

2a. Conmutativa: Para todo número natural a,b, - elementos de los naturales, -- $a + b = b + a$.

3a. Asociativa: Para todo número a,b,c, elementos de los números naturales -- $(a+b)+c = a+(b+c)$.

4a. Elemento Neutro o Idéntico: Para todo número a, elemento de los números naturales, existe 0, que también pertenece al conjunto de los naturales, tal que $a + 0 = a$.

La sustracción es una operación binaria que combina un primer número con un segundo número para dar un número. El primer número es la suma de los otros dos. Ejemplo:

5	-	3	=	2
suma		sumando		sumando

Esta operación le sirvió al hombre para solucionar problemas de la forma $7 + ? = 15$, en la cual se desconoce un sumando y para encontrarlo debemos cambiar a la - forma:

$$15 - 7 = ?$$

minuendo sustraendo diferencia

por ello, a la sustracción se le considera como una operación inversa a la adición y sólo tiene solución con números naturales cuando la suma (minuendo) es mayor o igual al sumando conocido (sustraendo).

La sustracción en el conjunto de los números naturales no presenta las propiedades de cerradura (8-15= un número no natural); conmutativa ($8-5 \neq 5-8$); ni asociativa $\left[(6-3) - 1 \neq 6 - (3-1)\right]$.

2.3.2 MULTIPLICACION Y DIVISION

La multiplicación y la división también son operaciones binarias, es decir, operaciones que combinan un primer número con un segundo número para dar un número. En la multiplicación llamamos a los dos primeros, factores y al resultado, producto. Ejemplo:

$$5 \times 7 = 35$$

factor factor producto

En la división, el primer número es el producto de los otros dos:

$$15 : 3 = 5$$

producto factor factor

Esta operación soluciona problemas de la forma:

$$3 \times ? = 15$$

en la que se desconoce un factor y para encontrarlo cambiamos a la forma:

$$15 : 3 = ?$$

dividendo divisor cociente

La división es pues una operación inversa a la multiplicación y sólo tiene solución dentro del conjunto de los números naturales cuando el dividendo es múltiplo del divisor: $8 : 2 = 4$ porque $2 \times 4 = 8$.

La multiplicación puede interpretarse también como una adición abreviada, cuyos sumandos son iguales: $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$.

Las propiedades que presenta la multiplicación son:

1a. Cerradura: Si a,b,c, pertenece al conjunto - de los números naturales, enton-- ces $a \cdot b = c$.

2a. Conmutativa: Si a,b, pertenece al conjunto - de los números naturales, entonces $a \cdot b = b \cdot a$.

3a. Asociativa: Si a,b,c, pertenece al conjunto- de los números naturales, entonces $a(bc) = (ab)c$.

4a. Elemento Neutro o Idéntico: Si a pertenece al conjunto - de los números naturales — existe 1 que pertenece al — conjunto de los números naturales, tal que $a \cdot 1 = a$.

5a. Distributiva: (con respecto a la adición) Si a,b,c, pertenece al conjunto de los números naturales, - entonces $a(b + c) = ab + ac$.

2.3.3 POTENCIACION Y RADICACION

Cuando tenemos una multiplicación en la que to-- dos los factores son iguales, por ejemplo: 2 x 2 x 2, podemos sustituir esta expresión por 2^3 en donde el factor que se repite se llama base y el número de veces que dicho factor se repite se denomina exponente. Así $a^4=a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Esta operación llamada potenciación, desempeña - con relación a la multiplicación un papel comparable al -- que ésta desempeña con relación a la adición. Ley de formación de las potencias de n:

$$n^2 = n\ (n) \qquad n^{3+1} = n^3\ (n) = n^4$$
$$n^{2+1} = n^2\ (n)=n^3 \quad n^{4+1} = n^4\ (n) = n^5$$
$$n^{a+1} = n^a\ (n) = n^{a+1}$$

Una observación muy importante es que todo número elevado a la potencia uno nos da como resultado el mismo número $a^1 = a$ y todo número elevado a la potencia cero- nos da como respuesta la unidad: $a^0 = 1$. Mediante la observación de la ley de formación de las potencias de n pode--

mos llegar a establecer que:

$$a^1 = a \quad y \quad a^0 = 1$$

La ley dice: $a^{n+1} = a^n\ (a)$

Para n = 1	Para n = 0
$a^{1+1} = a^1\ (a)$	$a^{0+1} = a^0\ (a)$
$a^2 = a^1\ (a)$	$a^1 = a^0\ (a)$
$(a)\ (a) = a^1\ (a)$	$a = a^0\ (a)$
$\frac{(a)\ (a)}{a} = \frac{(a^1)\ (a)}{a}$	$\frac{a}{a} = \frac{a^0\ (a)}{a}$
$\therefore\ a = a^1$	$\therefore\ 1 = a^0$

Si analizamos veremos que una de las operaciones inversas de la potenciación es la radicación (la otra es - la logaritmación), la cual resuelve problemas de la forma:

$$\underset{\text{base}}{?}^{\overset{\text{exponente}}{2}} = 9 \quad \text{segunda potencia de ?}$$

Para encontrar la base transformamos a:

El 2 en la raíz cuadrada, no se acostumbra es-- cribir.

$$\sqrt[\overset{\text{índice}}{2}]{\underset{\text{subradical}}{9}} = \ ? \quad \text{raíz}$$

Esta operación sólo tiene solución dentro del - conjunto de los números naturales cuando el subradical es- cuadrado de un número natural si el índice es 2, cubo de - un número natural si el índice es 3, etc. Ejemplo: ---

$\sqrt{16} = 4$ porque $4 \times 4 = 16$

$\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3 \times 3 \times 3 = 27$

2.4 OPERACIONES CON NUMEROS ENTEROS

Hemos definido las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división dentro del conjunto de los números naturales y podemos darnos cuenta que mediante el uso de sus propiedades resolvemos ecuaciones tales como:

$6 (a + 4) = 54$; $3a + 2 = 14$;
$\left[24 : (a - 2) \right] 8 = 32$; $x + 10 = 20$;
$x + 1 = 4$; $x + 1 = 3$; $x + 1 = 2$; $x + 1 = 1$; etc.

Pero hay muchas ecuaciones que aunque sean más sencillas que algunas de las anotadas, no pueden resolverse si solo se conoce el conjunto de los números naturales; por ejemplo: $x + 1 = 0$; $x + 2 = 0$; $x + 3 = 0$; etc.

En el conjunto de los números naturales, no existe ningún número que sumado a 1 dé 0; que sumado a 2 dé 0; etc.

Cuando el hombre tuvo necesidad de resolver tales ecuaciones, surgió el número negativo y con él, el conjunto de los números enteros.

Entre el tiempo en que se inventaron los números naturales y aquél en que se inventaron los números enteros pasaron más de 10 000 años, y aunque cronológicamente el hombre no llegó primero al concepto de número negativo, lo trataremos antes que a los racionales.

Si el hombre inventa nuevos números, indica qué propiedades tienen, cómo se van a llamar y cómo se van a representar y así cómo cada número natural satisface una y solo una de estas ecuaciones:

$$x - 0 = 0 \ ; \ x - 1 = 0 \ ; \ x - 2 = 0 \ \ldots$$

Para resolver las ecuaciones:

$x + 1 = 0$; $x + 2 = 0$; $x + 3 = 0$ . . . utilizamos a los números -1 , -2 , -3 . . . y estos nuevos números junto con los números naturales, forman el conjunto de los números enteros.

$$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4 \ldots\}$$

Llamamos a $-1, -2, -3, \ldots$ enteros negativos, y a los números $1, 2, 3, \ldots$ enteros positivos. Cero es un entero; pero no es ni positivo ni negativo.

El conjunto de los números enteros puede representarse al igual que el conjunto de los naturales sobre una recta a la que se da el nombre de "recta numérica" o "eje numérico".

Recta Numérica: cada punto representa un entero,

y, para cada número entero a, existe un número entero $(-a)$, tal que $a + (-a) = 0$. Este número se llama el "inverso aditivo de a". a y $-a$ también se llaman simétricos.

Al igual que con los números naturales, una vez inventados y representados los números enteros, podemos operar con ellos.

2.4.1 ADICION Y SUSTRACCION

La adición de números enteros tiene las mismas propiedades que la adición de números naturales, más la propiedad nueva que enunciamos anteriormente, es decir:

Si a,b,c, son números enteros, entonces:

$a + b = c$	Cerradura
$a + b = b + a$	Conmutativa
$(a+b)+c = a+(b+c)$	Asociativa
$a + 0 = a$	Elemento Idéntico o Neutro
$a + (-a) = 0$	Elemento Inverso o Inverso Aditivo

Estas propiedades son las que nos permiten efectuar adiciones y sustracciones con números enteros. Por ejemplo:

Ya que $(-3) + 3 = 0$ y $7 = 4 + 3$, entonces:

$$\begin{aligned} 7 + (-3) &= (4+3) + (-3) \\ &= 4 + [3 + (-3)] \\ &= 4 + 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Si definimos a las operaciones de adición y sustracción de enteros semejantes a como las definimos con naturales, tendremos:

La adición de enteros es una operación que combina dos enteros llamados sumandos, para dar un entero, su suma.

La sustracción de enteros es una operación que combina dos enteros, la suma y un sumando, para dar un entero, el otro sumando.

Si: $8 + (-5) = 3$

$\Longrightarrow 3 - 8 = -5$

y $3 - (-5) = 8$

Como puede observarse, restamos un número de otro para encontrar el sumando que falta. Restar 4 de 10 es encontrar qué número debe sumarse a 4 para tener 10 y ya que:

$4 + 6 = 10 \Longrightarrow 10 - 4 = 6$

Restar (-4) de 10 es encontrar qué número debe sumarse a (-4) para tener 10 y ya que:

$(-4) + 14 = 10 \Longrightarrow 10 - (-4) = 14$

2.4.2 MULTIPLICACION Y DIVISION

La multiplicación con números enteros presenta las mismas propiedades mencionadas con anterioridad para los números naturales, es decir:

Si a,b y c son números enteros, entonces:

$ab = c$	Cerradura
$ab = ba$	Conmutativa
$(ab)c = a(bc)$	Asociativa
$a\,(1) = a$	Elemento Idéntico
$a\,(b+c) = ab + ac$	Distributiva

Para entender la multiplicación y la división de enteros, debemos recordar que:

1o. El producto de cualquier entero y cero es cero $\quad a \times 0 = 0 \quad$ a = número entero

2o. Si sumamos un entero con su inverso aditivo, la suma ~~será~~ cero $\quad a + (-a) = 0$

Así, para resolver: $3 \times (-5) = ?$

Pensamos: $3 \times (-5) = -15$

Si probamos que: $\left[3 \times (-5)\right] + 15 = 0$

Entonces:
$$\begin{aligned}\left[3x(-5)\right] + 15 &= \left[3x(-5)\right] + (3x5)\\ &= 3(-5+5)\\ &= 3\,(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

Como ciertamente $\left[3x(-5)\right] + 15 = 0 \Longrightarrow 3x(-5) = -15$

Si definimos a la multiplicación de enteros como una operación que combina dos enteros llamados factores para dar un entero llamado producto, entonces la división de enteros es una operación que combina dos enteros, el producto y un factor para dar un entero, el otro factor, es decir:

Si $(-3)\,(-4) = 12$

entonces: $12 : (-3) = -4$

y $12 : (-4) = -3$

Así pues, dividir $12 : (-3)$ es encontrar qué número debe multiplicarse con (-3) para obtener 12.

2.4.3 POTENCIACION Y RADICACION

La potenciación y la radicación de enteros siguen las mismas leyes que con los naturales y sólo observaremos que:

a) Todo número entero elevado a una potencia par será siempre un entero positivo.

$(-2)^2 = (-2)\,(-2) = 4 \quad (-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

$3^2 = (3)\,(3) = 9 \quad 3^4 = (3)\,(3)\,(3)\,(3) = 81$

b) Todo número entero elevado a una potencia impar, tomará el signo del mismo número.

$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

$3^3 = (3)\,(3)\,(3) = 27$

c) La raíz de cualquier entero positivo con índice par, tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

$\sqrt{9} = \pm\ 3 \qquad \sqrt[4]{16} = \pm\ 2$

d) La raíz de un número negativo no tiene significado en este conjunto, cuando el índice del radical es par, ya que: $\sqrt{-9}$ = No existe ningún número entero que multiplicado por sí mismo nos de -9

$$(3)(3) \neq -9$$
$$(-3)(-3) \neq -9$$

2.5 OPERACIONES CON NUMEROS RACIONALES

Cuando el hombre tuvo necesidad de resolver problemas de la forma 15 : 4 = ? se dio cuenta que el resultado no podía representarlo con un número entero. Si a ello agregamos la necesidad de conseguir una mayor precisión en la medida que la que se tiene si solo se manejan números enteros, se comprenderá fácilmente la extensión de los sistemas numéricos a algo más que el mero contar, y surgen los números racionales, frecuentemente llamados fracciones comunes.

Los babilonios, egipcios y griegos, dejaron pruebas de que conocían las fracciones. Cuando Juan de Luna tradujo al latín, en el siglo XII, la Aritmética de Al-Juarizmi, empleó fractio para traducir la palabra árabe al-kase, que significa quebrar, romper.

Así, el conjunto de números racionales quedó formado por números de la forma $\frac{a}{b}$ donde a,b números enteros con $b \neq 0$, es decir, los números racionales son el cociente de dos números enteros, o bien, pueden representarse como razones de números enteros.

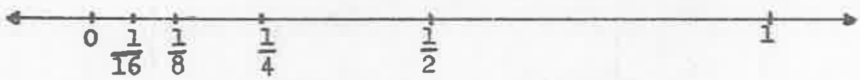
Las seis operaciones y sus propiedades definidas con números enteros, se cumplen con los números racionales, así como otras nuevas.

Propiedades de la Adición y Multiplicación de Números Racionales.

PROPIEDAD	O P E R A C I O N	
Dados los racionales $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{e}{f}$	Adición	Multiplicación

Cerradura	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{e}{f}$
Conmutativa	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$
Asociativa	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$	$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$
Elemento-Idéntico-o Neutro	$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)(1) = \frac{a}{b}$
Elemento-Inverso - Aditivo	$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$	- - - - - - - - - - -
Elemento-Inverso - Multiplicativo.	- - - - - - - - - - -	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$
Distributiva	$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$	

La propiedad de la densidad señala que; "entre dos números racionales cualesquiera siempre existe un tercero", esta propiedad impide que un número racional sea sucesor de otro.



Las propiedades de orden nos marcan:

1) Para dos racionales cualesquiera a y b, es verdadera una y sólo una de las afirmaciones $a > b$, $a = b$, $a < b$. (ley de Tricotomía).

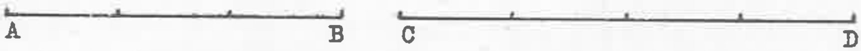
2) De $a \leq b$ y $b \leq c$ se tiene $a \leq c$. En forma semejante, $a < b$ y $b \leq c$ implica que $a < c$. (la desigualdad es transitiva).

Las reglas para la resolución de las operaciones con fracciones datan de la época de Arybhata, siglo VI y Bramagupta, siglo VII; aunque un estudio más amplio y sistemático lo hicieron Mahavira, siglo IX y Bháskara, siglo XII. Dichas reglas son las mismas que se emplean actualmente y que no damos por razones de espacio.

2.6 NUMEROS IRRACIONALES

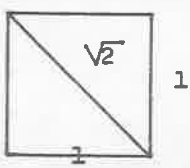
Al medir, el hombre descubrió que los segmentos AB y CD, que son múltiplos de una misma unidad, son conmensurables entre sí.

Ejemplo: Consideremos los segmentos AB y CD de 3 y 4 unidades, respectivamente. La medida de AB será 3/4 cuando CD se tome como unidad; pero la medida de CD será 4/3 cuando AB se tome como unidad:



En general, si dos segmentos AB y CD miden m y n unidades respectivamente, si AB se toma como unidad, la medida de CD será n/m; pero si la unidad es CD, la medida de AB viene a ser m/n.

Una vez escogida la unidad, los segmentos conmensurables con ella tienen por medida una fracción o número racional; pero encontramos que también existen segmentos inconmensurables con la unidad. Por ejemplo, los Pitagóricos descubrieron que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado del cuadrado. Si el lado del cuadrado se toma como unidad su diagonal mide: $\sqrt{2} = 1.4142135623...$, Al que se le llama número irracional porque se escribe con una infinidad de cifras a la derecha del punto, que se suceden irregularmente, sin que se presente jamás un período que se repita a partir de cierto rango.



Así pues, a los segmentos inconmensurables con la unidad corresponden nuestros modernos números irracionales, definidos en forma de fracción decimal no periódica.

En lenguaje moderno : "si un número no es el cuadrado de un número racional, su raíz cuadrada es un número irracional".

Y, en particular, son irracionales las raíces -- cuadradas de números irracionales, porque éstos no son el cuadrado de ningún número racional (ya que los cuadrados - de números racionales deben ser racionales).

También son irracionales las raíces cuadradas de los números racionales que no son cuadrados perfectos (cuadrados de otros números racionales).

Porque si, $\sqrt{\frac{p}{q}}$ fuera racional, tendríamos:

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \quad \therefore \quad \frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

Lo que contradice la hipótesis de que $\frac{p}{q}$ no es el cuadrado de otro número racional o la razón de dos números cuadrados.

En general: "si x no es la potencia enésima de - un número racional, entonces $\sqrt[n]{x}$ es irracional" (n, entero $\geqslant 2$).

Y, en particular, son irracionales las raíces enésimas de números irracionales.

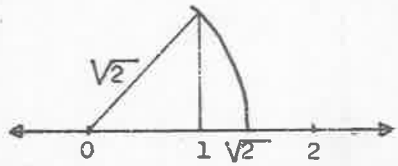
Hay, por supuesto otros números irracionales:

$\pi = 3.14159\ldots$ $\quad \frac{\pi}{2} = 1.57079\ldots$

$e = 2.71828\ldots$

A los números irracionales que no son raíces de una expresión algebraica, por ejemplo π , se les llama -- trascendentales y los que son raíces reciben el nombre de algebraicos, ejemplo: la raíz de la ecuación $x^2 = 2$.

Si observamos una recta numérica, no es muy difícil demostrar que existe un número infinito de puntos que no corresponden a número racional alguno, estos puntos -- corresponden a los irracionales.



Para explicar mejor estos números irracionales - se estructuró la Teoría de las Cortaduras, cuyo autor es - Dedekind (1831-1916).

Dedekind, llama cortadura en el campo de los números racionales a cualquier clasificación de éstos en dos clases c y c', que verifiquen las siguientes condiciones:-

1) Existen números racionales en ambas clases -- (clases no vacías).
2) Un número racional está incluído solamente en una de las clases y no existe racional alguno perteneciente simultáneamente a las dos clases (clases completas).
3) Cualquier número de la clase c es menor que - cualquiera de la clase c' (clases ordenadas).

En toda cortadura puede ocurrir uno y solo uno - de los tres casos siguientes:

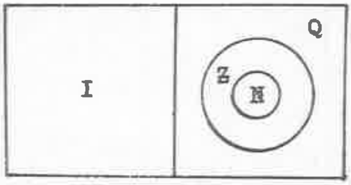
a) Existe un elemento máximo en la clase inferior (c) que pertenece al conjunto. Este elemento máximo sería mayor que cualquier otro - elemento de la clase inferior (c).
b) Existe un elemento mínimo en la clase superior (c') que pertenece al conjunto. Este elemento mínimo sería menor que cualquier otro elemento de la clase superior (c').
c) No existe en el conjunto un elemento máximo - de la sección inferior, ni un elemento mínimo de la superior.

En este último caso la cortadura se identifica - con el número irracional.

2.7 NUMEROS REALES

El sistema de los números naturales es un subcon junto del conjunto de los números enteros, éstos a la vez se encuentran incluídos en el conjunto de los números racionales y éstos con los irracionales forman el conjunto de los NUMEROS REALES.

Gráficamente los podemos representar con un diagrama de Venn-Euler.



R E A L E S

El conjunto de los números reales satura la recta numérica.

En cierto sentido, hemos completado el desarrollo de nuestro sistema de números, porque tenemos ahora un conjunto de números que está en correspondencia biunívoca con el conjunto de todos los puntos de una recta numérica. Los números están ordenados de acuerdo con su posición en el eje numérico. Podemos sumarlos, restarlos, multiplicarlos o dividirlos (excepto con 0) y los números resultantes están en la recta numérica. Hallamos que todas las propiedades anotadas para los demás conjuntos se verifican para los reales.

2.8 NUMEROS COMPLEJOS

Si queremos resolver la ecuación de segundo grado: $x^2 + 8 = 4x$, nos encontramos con que no existe ningún número real que la satisfaga y por lo tanto tendremos que definir una nueva clase de números: los complejos o imaginarios.

Un número del tipo $a + bi$, en donde a y b son reales e $i = \sqrt{-1}$, se llama número complejo.

Si a y b son diferentes de cero, el número $a + bi$ se llama número imaginario. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $a + bi$ se llama número imaginario puro, si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $a + bi$ es un número real. Por tanto el conjunto de todos los números complejos comprende como caso espe-cial a todos los números reales.

Los números imaginarios $6 + 3i$, $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} i$, el número imaginario puro $3i$ y el número real 5, son ejemplos de números complejos.

La letra a se llama parte real de $a + bi$ y bi se denomina parte imaginaria.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales, solamente si $a = c$ y $b = d$. Ejemplo:

$$\text{Si } \underbrace{x - 2}_{a} + \underbrace{4y\, i}_{bi} = \underbrace{3}_{c} + \underbrace{12i}_{di}$$

entonces: $x - 2 = 3$ y $4y = 12$

o sea: $x = 5$ $\quad y = 3$

2.8.1 OPERACIONES FUNDAMENTALES

En general, la suma, la resta, el producto y la división de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se expresan en las fórmulas:

1a. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i\,(b + d)$

2a. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i\,(b - d)$

3a. $(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$

4a. $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)\,(c - di)}{(c + di)\,(c - di)} = \dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2 - d^2}$

Con objeto de despojar a los números complejos de su aspecto "irreal" o "complejo" con el que se fueron abriendo paso en la matemática, a través de la historia, se analizará su aspecto geométrico.

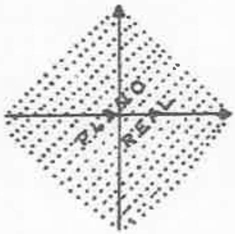
2.8.2 REPRESENTACION GEOMETRICA

Gauss (1777-1855) definió el número complejo como todo par de números (a,b) y representó el plano de los complejos por medio de dos ejes coordenados, siendo el eje horizontal el que corresponde a la parte real y el eje vertical a la parte imaginaria.

$$r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \text{arc tan } \frac{y}{x} = \text{arc tan } \frac{4}{3}$$

Así pues, los números complejos son los elementos del conjunto de los puntos del plano real y por lo tanto no es posible definir una relación de orden.



2.9 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Entendemos por Algebra, la parte de la Matemática que trata en sentido generalizado las propiedades y relaciones de los números, es decir es una generalización de la Aritmética.

Como el Algebra trabaja con números, bien en forma númerica o representados por letras, definiremos a las estructuras numéricas o estructuras algebraicas.

Las estructuras numéricas fundamentales son:

1a. Los números naturales $N = \{1, 2, 3 \dots\}$

2a. El anillo de los números enteros $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1 \dots\}$

3a. El campo de los números racionales $Q = \left\{\frac{b}{a} \middle| a,b \in Z, b \neq 0\right\}$

4a. El campo de los números reales R cuyos elementos son los números decimales.

5a. El campo de los números complejos $C = \{a+bi \mid a,b \in R, i^2 = -1\}$

Las operaciones de suma y producto en estas estructuras satisfacen las siguientes propiedades:

Para todo a,b,c:

1) La suma es conmutativa: $a + b = b + a$

2) La suma es asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$

3) Vale la ley de la cancelación para la suma: $a + c = b + c$ implica $a = b$

4) El producto es conmutativo: $ab = ba$

5) El producto es asociativo: $(ab)c = a(bc)$

6) Vale la ley de la cancelación para el producto: $ac = bc$ y $c \neq 0$ implican $a = b$

7) Existe un elemento neutro para el producto, el 1, tal que $1a = a$

8) El producto distribuye la suma $a(b+c) = ab+ac$

Excepción hecha de los números naturales, para las restantes estructuras se cumplen además:

9) Existe un elemento neutro para la suma, el cero, tal que $0 + a = a$

10) Para cada a existe un inverso aditivo, $-a$, tal que $-a + a = 0$

La propiedad 11, se cumple sólo para Q, R y C.

11) Para cada a existe un inverso multiplicativo, a^{-1}, tal que $a^{-1} \cdot a = 1$

Las propiedades 12 a 15, se cumplen en todas las estructuras, excepto en la de los números complejos en donde no existe una relación de orden $<$, que satisface:

12) El orden es transitivo $a < b$, $b < c$, implican $a < c$.

13) Vale la tricotomía para el orden: Dados a y b se satisface una y solo una de las condiciones: $a < b$; $a = b$; $b < a$

14) El orden es compatible con la suma: $a < b$ implica $a + c < b + c$.

15) El orden es compatible con el producto: $a < b$ y $0 < c$ implican $ac < bc$

Una estructura algebraica con dos operaciones que satisfacen las propiedades 1 a 10, es llamada ANILLO CONMUTATIVO CON UNITARIO. Si además se satisface la propiedad 11, entonces la estructura es llamada CAMPO. Estructuras como las anteriores en las que además existe un orden que satisface las propiedades 12 a 15, se denominan ANILLO ORDENADO Y CAMPO ORDENADO.

CAPITULO 3
GEOMETRIA

La Geometría es, con la Aritmética una de las primeras ciencias que ha estudiado el hombre. En efecto, desde los comienzos de la civilización, los objetos que rodearon al hombre, los hechos que acompañaron su vida, fueron formándole el concepto de rectas, curvas, figuras planas, cuerpos, formas y volúmenes diferentes. También se fueron descubriendo propiedades geométricas, y una de las primeras que llegó a establecer, fue que el camino más corto para llegar de un punto a otro, es la línea recta.

Por supuesto, en un comienzo fueron simples observaciones aisladas, de formas, de tamaño y de propiedades comprobadas prácticamente, y tuvieron que transcurrir siglos para que esos conocimientos empezaran a ordenarse hasta constituir la Geometría.

Se considera que en el pueblo egipcio está la cuna de la Geometría, pues debido al desbordamiento anual del río Nilo debían medirse constantemente las tierras de cultivo para calcular los tributos que sus dueños debían pagar al rey.

Se cree que de ahí viene el nombre de Geometría, que etimológicamente significa medir la tierra (geo=tierra, metría=medir).

Pero, fue el pueblo griego el que tuvo la gloria de dar a la Geometría un carácter netamente científico, reuniendo todos los conocimientos diseminados y adquiridos en forma empírica a través de los siglos, induciendo las leyes, demostrando razonadamente y en forma general las propiedades ya conocidas y deduciendo otras nuevas.

Entre los primeros geómetras griegos, se destacan Thales de Mileto (uno de los siete sabios de Grecia), Pitágoras, Euclides, Arquímides y Apolonio.

Hacia fines del siglo IV, sale a luz el libro que debía inmortalizar a Euclides (siglo IV-III a.C.), de quien dice un historiador moderno que es el matemático más famoso de todos los tiempos entre todas las naciones; pues toda persona que estudia Geometría, tiene como maestro a - Euclides. De este libro se han hecho tantas ediciones que-sólo lo aventaja la Biblia.

Los Elementos constan de 13 libros en donde Eu-- clides transmite a la humanidad todo lo que hasta entonces se sabía de esa materia.

Cabe destacar que los matemáticos griegos utilizaron sólo dos instrumentos geométricos: la regla y el compás.

Después de la Caída del Imperio Romano hasta la-época del Renacimiento, los conocimientos en Matemática sufren un notable estancamiento, hasta que a fines del siglo XVI, se abre una nueva era de progresos importantes en la-ciencia de la Geometría.

En efecto con la negación del postulado de Euclides que dice: "por un punto dado fuera de una recta, sólo-es posible trazar una paralela a la recta dada y sólo una". Surgen las geometrías no Euclidianas, cuyos principales autores son Rieman, Lobatchewsky y Bolyai.

También Descartes (1596-1650), rompiendo las tradiciones, dio las bases de la Geometría Cartesiana (Geometría Analítica) y así aunque la Geometría es una de las ramas más antiguas de la Matemática, en la actualidad ha encontrado nuevas áreas de aplicación en campos tan diversos como la exploración del espacio y el diseño de proyectiles.

3.1 GEOMETRIA CARTESIANA

La Geometría Cartesiana (Geometría Analítica) -- fundamentada por Renato Descartes en el siglo XVII fue una admirable conjunción del álgebra y de la geometría.

El único escrito matemático publicado por Descartes, es la "Geométrie", tercero y último de los ensayos -- que figuran como apéndices de su célebre "Discurso del Método".

Una diferencia esencial entre los elementos geométricos (segmentos) y los elementos algebraicos (letras), que impedía su comparación es que mientras que con las letras pueden realizarse las operaciones aritméticas en número ilimitado obteniéndose nuevas combinaciones de letras, con los segmentos tales combinaciones quedan limitadas a las líneas, superficies y sólidos, es decir, a casos en que la "dimensión" del resultado no supera al número tres, pues en los demás casos ese resultado, por no poderse expresar mediante figuras geométricas, deja de ser inteligible. Para eliminar tal limitación, Descartes utiliza un recurso técnico de una simplicidad asombrosa: el segmento unitario. Operando convenientemente con él permite que toda combinación de segmentos, cualquiera que sea su dimensión, se reduzca a un segmento único. Esa unidad irá sobreentendida, y de hecho ni ella ni sus operaciones aparecerán, pues, y esta es la segunda etapa del genial proceso de Descartes, bastará indicar con una letra a cada uno de los datos e indicar el resultado con las respectivas combinaciones de las letras, de acuerdo con las letras del álgebra.

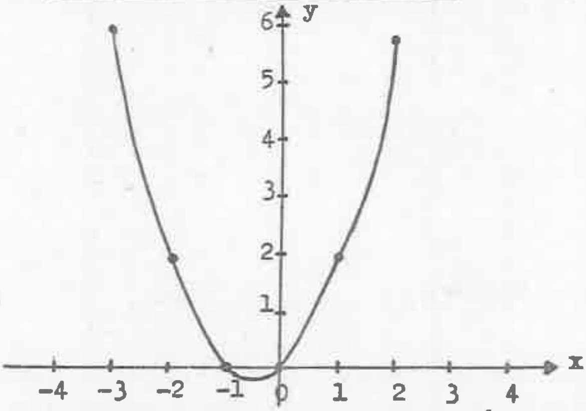
De ahí que a cada problema geométrico corresponderá una ecuación y la resolución de ella dará lugar a la solución o análisis del problema geométrico.

El método de las coordenadas, fundamento de la ulterior geometría analítica, no tuvo difusión inmediata, ya que el escrito de Descartes sólo figuraba como apéndice de una obra no exclusivamente matemática, editada en Holanda y en francés; a mediados del siglo apareció la versión latina y su método se difundió y perfeccionó rápidamente.- La aplicación del álgebra a la geometría tratada por Descartes se hizo sobre problemas de geometría plana; pero en 1679 aparece la primera idea de las coordenadas en el espacio logrando su desarrollo a mediados del siguiente siglo.

Así pues los métodos algebraicos pueden usarse en la resolución de problemas geométricos, y recíprocamente los métodos de la geometría analítica pueden usarse para obtener una representación geométrica de las ecuaciones y de las relaciones funcionales.

Ejemplo: Una función $f : R \rightarrow R$ con $f(x) = x^2 + x$, se puede representar gráficamente:

x	f(x)	(x,y)
-3	$(-3)^2 + (-3)$	(-3,6)
-2	$(-2)^2 + (-2)$	(-2,2)
-1	$(-1)^2 + (-1)$	(-1,0)
0	$(0)^2 + 0$	(0,0)
1	$(1)^2 + 1$	(1,2)
2	$(2)^2 + 2$	(2,6)



Como puede observarse, en geometría es necesario aplicar un método especial o un artificio, a la solución de cada problema; en geometría analítica por el contrario una gran variedad de problemas se pueden resolver fácilmente por medio de un procedimiento uniforme asociado con el uso de un sistema coordenado.

CAPITULO 4
LOGICA Y CONJUNTOS
4.1 LOGICA

La teoría general del razonamiento exacto consta de dos partes: lógica inductiva y lógica deductiva.

Aristóteles, gran filósofo griego, fue el primero en sistematizar la lógica deductiva. Leibniz, filósofo y matemático alemán, fue quien primero exploró el empleo de los símbolos en lógica. George Boole, matemático inglés desarrolló más ampliamente la lógica simbólica, en el siglo XIX. Bertrand Russell y Alfred Noth Whitehead, dieron una de las contribuciones más valiosas al sistema formal de la lógica, a principios del siglo XX; su tratado "Principia Mathematica" conduce a los fundamentos de la Matemática pura.

En este capítulo analizaremos las nociones del razonamiento inductivo y del deductivo y, se presentarán símbolos y reglas para poder desarrollar la lógica simbólica.

El razonamiento que basándose en un número limitado de ejemplos, lleva a la conclusión de que algo es cierto siempre, se denomina lógica inductiva, ésta se caracteriza por el razonamiento que a partir de observaciones específicas conduce a conclusiones generales.

La lógica deductiva es el proceso de llegar a una conclusión válida a partir de suposiciones o premisas que se aceptan como parte del análisis. En la lógica deductiva no nos preocupamos por la verdad de la conclusión sino, en lugar de ello, lo que nos interesa es si la conclusión se desprende o no de las premisas. Si la conclusión se desprende de las premisas, decimos que nuestro razonamiento es válido; de otro modo, decimos que nuestro razonamiento no es válido.

La lógica en general, y la lógica simbólica en particular, es el estudio sistemático del proceso de razonamiento preciso. Manipular símbolos, que es uno de los procedimientos de la lógica, no es la misma cosa que pensar. Lo que los métodos de la lógica pueden hacer por nosotros es clarificar nuestros tipos de pensamiento, guiarnos en la corrección de nuestros procesos de razonamiento y ayudarnos a evitar errores.

La finalidad de la lógica simbólica es la de reducir procedimientos verbales complicados en simples dispositivos de letras y símbolos.

De igual forma que los números son los elementos básicos de la Aritmética, las proposiciones simples son los elementos de la Lógica.

En la lógica aprendemos las reglas para la manipulación de las sentencias.

PROPOSICIONES

Una proposición es un enunciado declarativo que es verdadero o falso; pero que no puede ser ambas cosas a la vez.

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas; las proposiciones compuestas están formadas por dos proposiciones simples relacionadas por medio de un término llamado conectivo lógico.

Los conectivos lógicos son:

"o", disyunción ($\vee$)

"y", conjunción ($\wedge$)

"si entonces", implicación o condicional ($\longrightarrow$)

" si y solo si", equivalencia o bicondicional ($\longleftrightarrow$)

" no", negación ($\neg$ $\sim$)

A partir de ellos podemos formar nuevas proposiciones y calificarlas con su valor de verdad (F o V). Lo cual efectuamos mediante una tabla de verdad y así tenemos tablas de verdad de la conjunción, disyunción, negación, implicación y equivalencia.

Una conjunción es una proposición que se obtiene mediante la colocación de la palabra "y" entre dos proposiciones dadas. La siguiente tabla, es una tabla de verdad -

que nos muestra cómo se asignan valores verdaderos a la --conjunción $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

La disyunción se forma por medio de la colocación de la palabra "o" entre dos proposiciones dadas y podemos - escribirlo $p \vee q$. Una disyunción es verdadera, siempre que-al menos una de las proposiciones sea cierta. En la tabla - que sigue se observa una tabla de verdad que define los valores de verdad de una disyunción.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Cuando tenemos las palabras "es falso que" ante - una proposición dada, obtenemos su negación. Si una proposición es cierta decimos que su negación es falsa, y si la -- proposición es falsa, decimos que su negación es verdadera. Se muestra en la tabla siguiente.

p	$\sim p$
T	F
F	T

La implicación expresada mediante $p \rightarrow q$ es una -- declaración condicional en la que p representa la hipótesis mientras q significa la conclusión. En esta tabla se define el procedimiento para aplicar la calificación de verdadera-o falsa a una implicación.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

La equivalencia es una proposición $p \leftrightarrow q$ que significa que $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$. En la tabla siguiente definimos $p \leftrightarrow q$, como verdadera, siempre que p y q tengan el mismo valor de verdad; de lo contrario, $p \leftrightarrow q$ será falsa.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Siempre que pueda demostrarse que una proposición formada por medio de conectivas es cierta en todos los valores verdaderos posibles, decimos que la proposición es una TAUTOLOGIA. En la tabla que sigue se demuestra que $p \leftrightarrow \sim(\sim p)$ es una tautología.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \leftrightarrow \sim(\sim p)$
T	F	T	T
F	T	F	T

4.2 CONJUNTOS

Las cuestiones concernientes a los fundamentos de la Matemática que nacieron en el siglo XIX, aunque maduraron en el siglo XX, son: la Teoría de los Conjuntos, la Lógica Matemática y la Axiomática.

La Teoría de los Conjuntos es obra de Georg Cantor (1845-1918), quien llegó a ella a través de cuestiones técnicas. Sus investigaciones sobre los conjuntos culminaron en 1897 con la "teoría de los conjuntos transfinitos". En estas investigaciones aparecen conceptos importantes, algunos fundamentales para la Matemática. Ciertas paradojas nacidas de esa teoría, fueron uno de los puntos de partida acerca de los fundamentos de la Matemática que agitóel primer tercio del siglo XX.

Los conjuntos se han usado durante muchos años al enseñar a los niños a contar y resolver preguntas que implican la noción de cantidad. El uso de conjuntos de objetos concretos es de valor para comprender el concepto de número.

El concepto de conjuntos es fundamental en todas las ramas de la Matemática. Intuitivamente, un conjunto es una lista o colección de objetos bien definidos, y estos objetos se llaman elementos o miembros del conjunto.

Usualmente para denotar conjuntos se utilizan letras mayúsculas y sus elementos se representan con letras minúsculas.

$$A = \{a, b, c\}$$

Los conjuntos pueden definirse por enumeración o por comprensión.

Por enumeración: $A = \{1, 3, 5, 7\}$

Por comprensión: $B = \{x \mid x \text{ es par}\}$

Si un objeto x es elemento de un conjunto A, se escribe $x \in A$ y se lee x pertenece a A. Si un objeto m no es elemento de A, entonces se escribe $m \notin A$.

Igualdad de Conjuntos: El conjunto M es igual al conjunto N, si ambos tienen los mismos elementos, es decir si cada elemento que pertenece a M pertenece también a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A, lo cual podemos simbolizar como: $M = N$.

Subconjuntos: M es un subconjunto de N si $x \in M$ implica $x \in N$, lo cual lo denotamos: $M \subset N$, que se lee M subconjunto de N o M está contenido en N.

Con esta definición, podemos decir que $A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

El conjunto vacío (conjunto que carece de elementos) se considera subconjunto de cualquier conjunto y se denota: $\emptyset \subset A$.

Todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo: $A \subset A$.

B es un subconjunto propio de A si: $B \subset A$ y $B \neq A$.

Conjunto Universal (U): Si $U \neq \emptyset$ es un cierto — conjunto cuyos subconjuntos están en consideración, suele-decirse que el conjunto dado es un conjunto universal. — Ejemplo: En geometría plana, el conjunto universal es el - de todos los puntos del plano.

4.2.1 OPERACIONES FUNDAMENTALES

Unión: La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a-ambos, y se denota: $A \cup B$. Es decir, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

Ejemplo:

$$A = \{a,b,c,d,e\}$$
$$B = \{e,f,g\}$$
$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$$

Intersección: Sean A y B los conjuntos dados. — El conjunto de todos los elementos que pertenecen tanto a-A como a B se llama intersección de A y B denotándose: - $A \cap B$.

Así pues: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{2,3,5,8\}$$
$$A \cap B = \{2,3\}$$

Dos conjuntos A y B se llaman disjuntos o ajenos si no tienen ningún elemento común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo:

$$A = \{1,3,5\}$$
$$B = \{2,4\}$$
$$A \cap B = \emptyset$$

Por lo tanto A y B son conjuntos disjuntos.

Diferencia: La diferencia A - B, en ese orden, - de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B, esto es:

$$A - B = \{x \mid x \in A, \quad x \in B\}.$$

Ejemplo:

$$S = \{a,b,c,d\}$$

$$T = \{f,b,d,g\}$$
$$S - T = \{a,c\}$$

Complemento: Sea U el conjunto universal en el cual los conjuntos A y B son subconjuntos de U.

$A \subset U$, $B \subset U$ entonces

$A' = B$ (A complemento = B)

$B' = A$ (B complemento = A)

$$A' = \{x \mid x \in U, \quad x \in A\}$$

Leyes de Operaciones con Conjuntos

(1.1) $(A')' = A$

(1.2) $\emptyset' = U$ (1.2') $U' = \emptyset$

(1.3) $A-A = \emptyset$, $A-\emptyset = A$, $A-B = A \cap B'$

(1.4) $A \cup \emptyset = A$ (1.4') $A \cap U = A$

(1.5) $A \cup U = U$ (1.5') $A \cap U = \emptyset$

(1.6) $A \cup A = A$ (1.6') $A \cap A = A$

(1.7) $A \cup A' = U$ (1.7') $A \cap A' = \emptyset$

Leyes Asociativas

(1.8) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (1.8') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Leyes Conmutativas

(1.9) $A \cup B = B \cup A$ (1.9') $A \cap B = B \cap A$

Leyes Distributivas

(1.10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (1.10') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de De Morgan

(1.11) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (1.11') $(A \cap B)' = A' \cup B'$

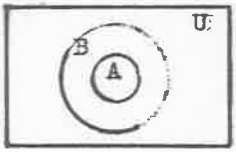
(1.12) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ (1.12') $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

Diagramas de Venn-Euler

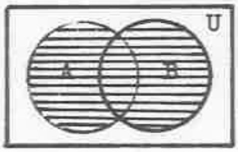
Mediante los diagramas de Venn, se pueden ilustrar de manera sencilla las relaciones entre conjuntos. Ellos representan a un conjunto con un área plana.

Ejemplos:

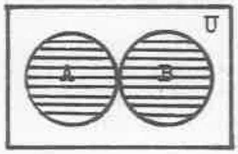
$A \subset B$



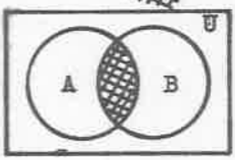
$A \cup B =$



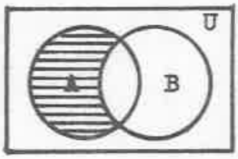
$A \cup B =$



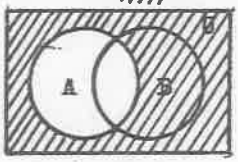
$A \cap B =$



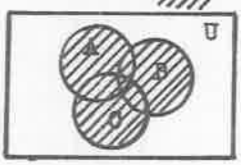
$A - B =$



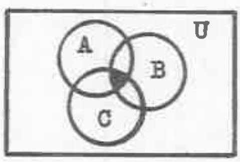
$A' =$



$(A \cup B) \cup C =$



$(A \cap B) \cap C =$



Si comparamos la unión de conjuntos con la tabla de la disyunción, la intersección de conjuntos con la conjunción y el conjunto complemento con la negación, observamos que se comportan de la misma manera.

La unión de conjuntos y la disyunción:

Sea F el conjunto de flores y sean A y B los subconjuntos siguientes:

$A = \{rosas\}$ $\qquad\qquad$ $B = \{claveles\}$

$A \cup B = \{x \mid x \text{ es una rosa o un clavel}\}$

Considérense ahora las propiedades p y q de los conjuntos A y B, respectivamente.

p = "ser rosa"

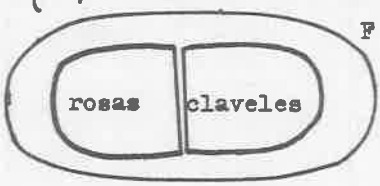
q = "ser clavel"

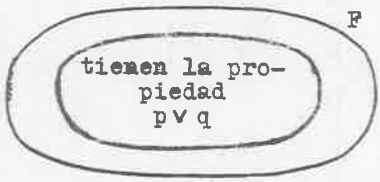
La disyunción de las propiedades p,q, es:

$p \vee q$ = "ser rosa o ser clavel"

Entonces:

$A \cup B = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } p \vee q\}$





$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

x tiene la - propiedad p	x tiene la - propiedad q	x tien la - propiedad $p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

La intersección de conjuntos y la conjunción:

En el conjunto P de todas las personas considérense los subconjuntos siguientes:

$A = \{\text{americanos}\}$ y $B = \{\text{católicos}\}$

$A \cap B = \{\text{americanos que son católicos}\}$

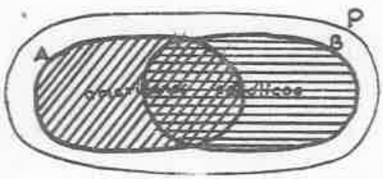
Sea p la propiedad "ser americano" y q la propiedad "ser católico".

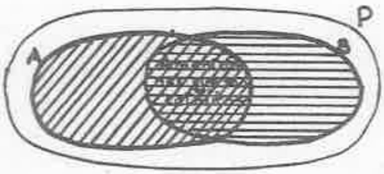
Por tanto:

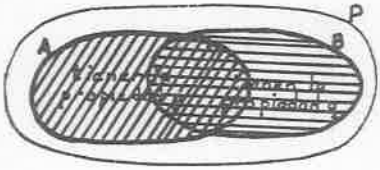
$p \wedge q =$ "ser americano y ser católico"

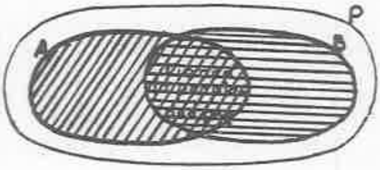
Por eso:

$A \cap B = \{x \mid x \text{ tiene la propiedad } p \wedge q\}$









$X \in A$	$X \in B$	$X \in A \cap B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

x tiene la propiedad p	x tiene la propiedad q	x tiene la propiedad $p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

El Conjunto Complemento y la Negación:

En el conjunto E = {españoles} consideremos el - subconjunto A = {españoles que tienen televisor} ."Los españoles que no tienen televisor" forman el conjunto complemento de A respecto de E.

Se representa: A'

Se lee:

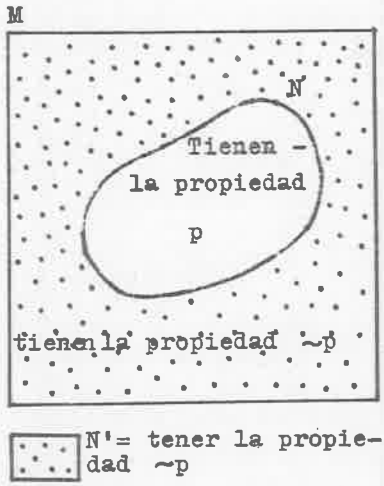
Complemento del conjunto A

A' = {españoles que no tienen televisor}

Propiedad característica de A = "tener televisor"

Propiedad característica de A' = "no tener televisor".

Es decir, la negación de la propiedad del conjunto A es la propiedad que define al conjunto complemento de A.



Conjunto Producto:

Si $A = \{a,b\}$ y $B = \{b,c,d\}$, entonces el conjunto de pares ordenados distintos:

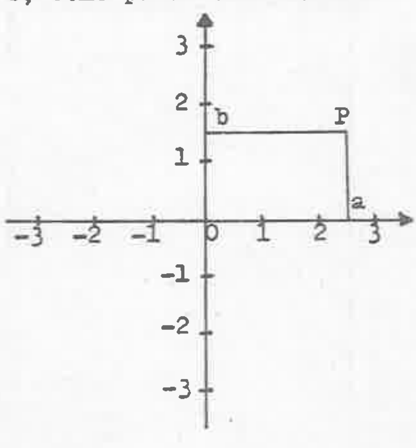
$$C = \{(a,b),\ (a,c),\ (a,d),\ (b,b),\ (b,c),\ (b,d)\}$$

en el cual el primer componente de cada par es un elemento de A, en tanto que el segundo es un elemento de B, se llama conjunto producto de los conjuntos dados. $C = A \times B$ (en ese orden). Es decir, $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A,\ y\ \ y \in B\}$.- Se lee A cruz B, igual a (x,y) tal que x pertenezca a A e y pertenezca a B.

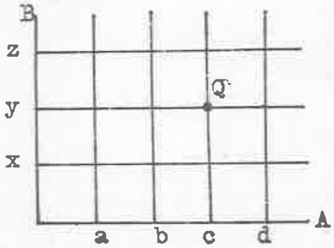
Si el conjunto A tiene n elementos y el conjunto B tiene m elementos, entonces $A \times B$ tiene nm elementos. Si uno de los conjuntos es vacío, entonces $A \times B$ es vacío. Además, el producto cartesiano $A \times B$ no es conmutativo $A \times B \neq B \times A$.

El conjunto producto $A \times B$ se llama también producto cartesiano de A y B, por el matemático Descartes, quien en el siglo XVII fue el primero en investigar el conjunto $R \times R$. También por la misma razón, se llama plano cartesiano a la representación de $R \times R$.

Diagramas de Coordenadas: En el plano cartesiano $R \times R$ siguiente, cada punto P representa un par ordenado (a,b) de números reales. Una recta vertical por P corta al eje horizontal en a y una recta horizontal por P corta al eje vertical en b, como puede observarse:



El producto cartesiano de dos conjuntos que no tengan muchos elementos, se puede representar en un diagrama de coordenadas en forma semejante. Por ejemplo, Si $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{x,y,z\}$, entonces el diagrama de coordenadas A x B será:



Aquí los elementos de A se representan sobre el eje horizontal y los de B sobre el eje vertical. Las líneas verticales que pasan por los elementos de A y las horizontales que pasan por los elementos de B se cortan en doce puntos, que representan, como es claro, el producto A x B. El punto Q es el par ordenado (c,y).

4.2.2 CONCEPTO DE FUNCION

El concepto de función es muy antiguo en nuestra cultura y en nuestra ciencia, pero a pesar de ello, no fue sino hasta hace muy poco tiempo que se tuvo una definición clara y precisa.

Frecuentemente decimos que algo cambia en función de otra cosa, o que una magnitud, como el peso, es una función de otra, como el volumen. Durante muchos años, ésta fue la única interpretación que se le dió al concepto de función; actualmente decimos:

Definición: Una función es una terna formada por:

a) Un primer conjunto llamado dominio de la función.

b) Un segundo conjunto llamado codominio de la función.

c) Una regla de correspondencia que tenga las siguientes propiedades:

1a. A cualquier elemento del dominio se le puede asociar un elemento del codominio.

2a. Ningún elemento del dominio ha de quedarse sin su asociado en el codominio.

3a. Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

Es decir, si A y B son dos conjuntos y f es una regla que cumple con las propiedades a,b,c; entonces la terna (A,B,f) es una función y lo denotamos:

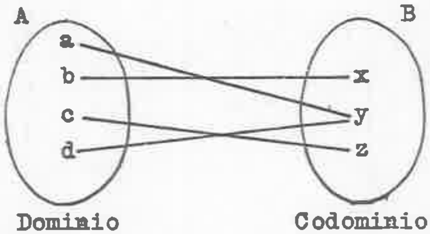
$$f : A \longrightarrow B$$

(f es una función de A en B

Ejemplo de función:

Sean $A = \{a,b,c,d\}$
$B = \{x,y,z\}$

y $f : A \longrightarrow B$ la definida por el diagrama.



Otro ejemplo:

Si X = conjunto de todos los números Reales

Y = Conjunto de los números Reales

y k = a cada número real se le asocia su cuadrado

entonces la terna (X,Y,k) es una función que se denota:

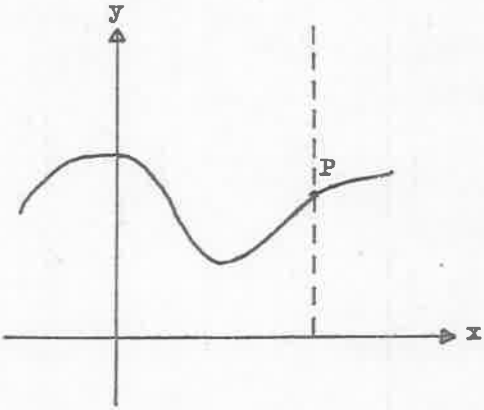
$$k : X \longrightarrow Y$$

Además si $x \in X$, entonces podemos denotar por $k(x)$ al único número real que la regla le asocia a x y que es su cuadrado x^2, es decir: $k(x) = x^2$.

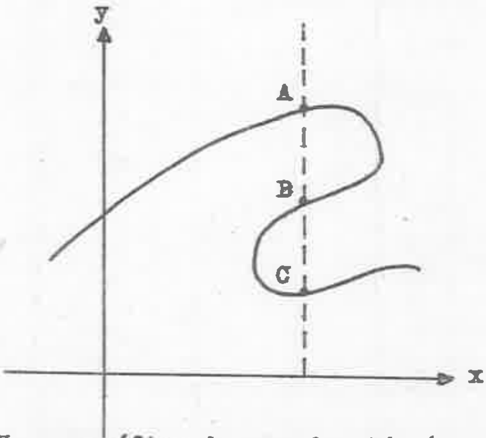
Dada la función $f : A \longrightarrow B$ podemos encontrar su gráfica G de f, la cual tiene las siguientes propiedades:

1) $G(f) \subset A \times B$.
2) $G(f) = \{(x,y) \in A \times B \mid x \in A, \; y = f(x)\}$
3) Si $x \in A$ entonces $[x,f(x)] \in G(f)$.
4) Si (x,y_1) y (x, y_2) son elementos de G(f) entonces $y_1 = y_2$

Ejemplo:



Gráfica de una función



No es gráfica de una función (porque la perpendicular al eje x corta a la curva en más de un punto).

C A P I T U L O   5

P R O B A B I L I D A D   Y   E S T A D I S T I C A

Fermat (1601-1665), matemático francés, fue uno de los iniciadores en el llamado cálculo de las probabilidades, cuyos primeros problemas, que se resuelven en el siglo XVII se refieren a los juegos de azar. El primero de esos problemas es el problema de los dados, nacido de la siguiente "observación", realizada por un jugador: si se tira un dado cuatro veces consecutivas, la probabilidad de que aparezca un 6 es mayor que la de que no aparezca; mientras que si se tiran 24 veces consecutivas dos dados simultáneamente, la probabilidad de que salga un doble 6 es menor que la de que no salga un doble 6. El otro problema es el problema de las partidas, que consiste en averiguar cómo debe dividirse la apuesta entre dos jugadores de igual habilidad, si se suspende la partida antes de finalizar, conociendo el número de puntos que cada jugador había conquistado antes de suspenderse el juego.

En forma distinta aunque con resultados concordantes Fermat y Pascal resolvieron la cuestión.

Aunque el cálculo de probabilidades comenzó con los juegos de azar, la teoría de la probabilidad ha ido ganando cada vez mayor importancia hasta que en la actualidad, contribuye de manera esencial a facilitar los estudios de las Ciencias Naturales y Sociales y muchos de los problemas prácticos del mundo de los negocios, la industria y el gobierno.

El cálculo de probabilidades es la parte de la Matemática que se dedica al estudio de los resultados posibles de experimentos aleatorios.

Experimento aleatorio es un experimento cuyo resultado no se puede predecir con exactitud. Ejemplo: Tirar una moneda al aire y ver si cae águila o sol.

Experimento determinista es aquél cuyo resultado se puede predecir con exactitud. Ejemplo: De una caja que sólo contiene bolas blancas extraer una y observar su color.

La probabilidad ayuda al hombre a predecir los -acontecimientos utilizando los datos aportados por la estadística.

La Estadística tiene como objetivos:

A) Establecer las condiciones bajo las cuales deben hacerse los experimentos aleatorios para obtener los datos necesarios para un estudio.
B) Analizar los datos obtenidos.
C) Obtener conclusiones que sirvan de base a los estudios.

A través de examinar y solucionar multitud de -- problemas similares, ha sido posible encontrar leyes que - permitan abstraer los elementos particulares de cada problema naciendo de esta manera una álgebra de eventos.

Evento es algo que puede ocurrir o no ocurrir en un fenómeno aleatorio y aceptamos que ocurre o no ocurre,- según sea el resultado que se presenta en un fenómeno de - azar. Los eventos se anotan con letras mayúsculas y operando con ellos encontramos que forman una álgebra. Si denotamos por E (universo) a toda la familia de eventos considerados, podemos relacionar la terminología de eventos con - la de conjuntos y con la de la lógica.

a) El evento seguro es el conjunto E de todos -- los resultados que ofrece el fenómeno en cuestión.
b) Un evento es un subconjunto A de E.
c) El contrario de un evento A es el complemento A' de A en E (A' es el conjunto de todos los elementos de E, que no están en A).
d) La notación $A \subset B$ indica que cuando ocurre A necesariamente ocurre B, en conjuntos la usamos para decir que $A \subset B$.
e) La notación $A \cap B$ indica el evento que ocurre sí y sólo sí, A y B (ambos) ocurren, en - conjuntos la usamos para la intersección A y B.

f) La notación $A \cup B$ indica el evento que ocurre sí y sólo sí ocurre A u ocurre B (ocurre sí y sólo sí al menos uno de los dos ocurre). En conjuntos la usamos para la unión de A y B.

g) El evento imposible es el conjunto vacío (denotado por $\emptyset$).

h) La notación $A \cap B = \emptyset$ denota que A y B son incompatibles; en conjuntos A y B son ajenos.

También se aprecia que cumple con las dos operaciones del Algebra Booleana; para cualquier evento A,B,C:-

	UNION	INTERSECCION
1o.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2o.	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3o.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4o.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5o.	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$

C A P I T U L O   6
A N A L I S I S   Y   A P R O B A C I O N   D E   L A   H I P O T E S I S

El hombre desde su aparición, ha sido curioso; y de la observación del cielo y de los objetos que lo rodean así como de su vida misma, surgieron multitud de preguntas; ¿por qué llueve?, ¿a qué distancia se encuentra el Sol?, - ¿en qué época del año se debe sembrar?, etc. Estas preguntas necesitaban respuestas no sólo para satisfacer su curiosidad, sino para mejorar su forma de vivir. Los mayas, por ejemplo, lograron un calendario perfecto, gracias a — las observaciones que del cielo hicieron para lograr buenas cosechas; los egipcios adelantaron en geometría, debido al desbordamiento anual del río Nilo que les creaba la necesidad de medir sus tierras cada vez que ello ocurría. En un principio al hombre le bastó el concepto de "pocos", "muchos", para resolver sus problemas matemáticos, pero, a través de una larga evolución que ha durado siglos, ha tenido que ampliar esos conceptos, se ha visto obligado a definir qué es "uno", qué es "dos", qué es "más de dos", logrando crear números cada vez más grandes y también más pequeños, hasta llegar poco a poco al concepto de infinito, y aún más, hablar del transfinito.

La breve descripción del avance de la Matemática que se ha sintetizado en este trabajo, nos hace ver que el campo de dicha ciencia ha sufrido cambios, ha crecido de - tal manera que para poder entenderlo se han tenido que generalizar sus conceptos y llevarlos a un nivel más alto de abstracción.

El contenido de la Matemática actual es tan amplio, que no es posible que alguien lo abarque por completo; se dice que el último hombre que conoció toda la Matemática de su tiempo fue Henri Poncairé, que murió en 1912.

Sin embargo, hacia 1935, un grupo de matemáticos franceses, utilizando el seudónimo de Nicolás Bourbaki, decidieron hacer investigaciones rompiendo los moldes que la tradición mantenía a la ciencia en su país. En 1939 empezaron a aparecer los Elementos de matemáticas, obra que ha alcanzado resonancia mundial. Actualmente se sabe que sus iniciadores fueron André Weil, Henri Cartan, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, Laurent Schwarz y otros.

Pero la Matemática no habría alcanzado los progresos que tiene en la actualidad, sin haber atravesado las etapas rudimentarias que dieron base a su desenvolvimiento. Esto, nos lleva a concluir que el objeto de estudio de la Matemática a través de la historia, nunca ha permanecido estático, por lo tanto se aprueba la hipótesis:

"LA CIENCIA MATEMATICA HA EVOLUCIONADO".

C O N C L U S I O N E S

- Una de las características más extraordinaria de la Matemática es que establece relaciones profundas entre conceptos aparentemente distantes entre sí.

- La geometría sufrió un retraso de siglos por aceptar como dogmáticas las limitaciones impuestas por los griegos.

- La teoría de conjuntos y la lógica matemática abrieron nuevos rumbos e infundieron un nuevo espíritu.

- La llamada matemática moderna, no es una ciencia que ignore los principios de la matemática antigua, sino que lo moderno consiste en el enriquecimiento, multivalencia y actualización de los antiguos conceptos.

- La Matemática siempre avanza al ritmo de la cultura general de un pueblo.

- La Matemática no se ha desarrollado en su totalidad, actualmente vive una de sus fases.

- La enseñanza de la Matemática debe responder al espíritu y necesidades de nuestra época.

- Mientras mejor conozca el maestro la evolución de la Matemática, más fácil será su misión de transmitirla.

P R O P O S I C I O N E S

- El profesor de educación primaria debe situar a la enseñanza de la Matemática en el nivel del pensamiento pedagógico actual.

- El profesor de grupo de escuela primaria debe tomar en cuenta que la enseñanza de la Matemática debe ser sensible a las grandes tranformaciones de nuestra época y preveer las necesidades del futuro.

- El profesor de enseñanza primaria debe tener presente la aplicación de la Matemática en los problemas de la vida diaria.

- Es necesario que los profesores de educación primaria , conozcan la evolución de la Matemática, para que puedan tener un concepto más claro de lo que significa la matemática moderna.

- Es necesario que todos los profesores se actualicen para que estén a tono con las necesidades de nuestro tiempo.

B I B L I O G R A F I A

AYRES, Frank Jr.
<u>Teoría y Problemas de Algebra Moderna</u>. Libros McGraw-Hill. Colombia. 1969.

BABINI, José
<u>Historia Sucinta de la Matemática</u>. Editorial Espasa-Calpe. Buenos Aires - México. 1952.

BOLL, Marcel
<u>Historia de las Matemáticas</u>. Editorial Diana. México. 1976.

FREGOSO, Arturo
<u>Introducción al Lenguaje de la Matemática</u>. Editorial ---- CEMPAE. México. 1972.

FULKS, Watson
<u>Cálculo Avanzado</u>. Editorial Limusa - Wiley, S.A. México. - 1970.

GALVAN, Federico (traductor)
<u>Conjuntos</u>. Colección Temas de Matemáticas. Nacional Council of Teachers of Mathematics. Editorial Trillas. México. 1975

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR
<u>Estudios de Matemáticas-Volumen IX</u>. Editorial SMSG. E.U.A. 1966.

LEHMANN, Charles
<u>Geometría Analítica</u>. Editorial UTEHA. México. 1956.

LIPSCHUTZ, Seymour
<u>Teoría y Problemas de Teoría de Conjuntos y temas afines</u>.- Libros Mc Graw-Hill. Colombia. 1969.

LLUIS y otros
<u>Algebra Superior</u>. Editorial Trillas. México. 1973.

QUILLET
Diccionario Enciclopédico-Tomo Segundo. Editorial Cumbre,-S.A. México. 1977.

REES, Paul K, y SPARKS, Fred W.
Algebra. Editorial Reverté, S.A. México. 1964.

REPETTO, Celina y otros
Matemática Moderna. Geometría 3. Editorial Kapelusz, S.A.-Buenos Aires. 1968.

ROLDAN Gloria y otros
Delta Matemática. Libro de Consulta. Nivel 6. Depto. de --Investigaciones Educativas de Santillana, S.A. de Edicio--nes. España. 1972.

TURNER, V Dean y PROUSE, howard l.
Introducción a las Matemáticas. Licenciatura en Educación-Pre-escolar y Primaria. Editorial Trillas. México. 1976.