UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

SEP
Unidad SEAD
261
HERMOSILLO

SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Unidad SEAD 261

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
BIBLIOTECA
SEP

Las Matematicas
En La
Escuela Primaria

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN EDUCACION PRIMARIA

PRESENTA

Ubaldo Galaz Samaniego

HERMOSILLO SONORA MEXICO 1980

D E D I C A T O R I A

A MI ESPOSA,
con cariño.
****

A MIS PADRES, con el cariño y respeto que siempre me han merecido.
****

A MIS HIJOS, como muestra de mi esfuerzo por ser su ejemplo.
****

INDICE GENERAL

Pág.

CAPITULO II

CAPITULO III

P R E S E N T A C I O N.

El presente trabajo deriva de una situación generalizada en los alumnos de la escuela primaria: EL DEFICIENTE GRADO DE RENDIMIENTO ESCOLAR EN EL AREA DE MATEMATICAS.

Esta situación permite formular algunos planteamientos:

1o.- ¿Los deficientes resultados, son producto de un inadecuado manejo del programa del área de matemáticas en la escuela primaria?

2o.- ¿La enseñanza tradicional no ha dejado paso a las nuevas técnicas didácticas y el profesor de grupo sigue confiando en los métodos memorísticos y mecanicistas, descartando la participación activa y directa de sus alumnos en el proceso enseñanza-aprendizaje?

3o.- ¿Debe descartarse totalmente la enseñanza tradicional y ceñir el proceso enseñanza-aprendizaje a las nuevas técnicas, o es posible encontrar puntos de coincidencia que permitan conciliar ambas?

A estos planteamientos se trata de responder en este trabajo, aunque desde un punto de vista general, con el propósito de incentivar al maestro hacia un juicio crítico comparativo entre las fórmulas de la enseñanza tradicional y las técnicas actuales, referidas a la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.

La tendencia de la Matemática hacia la formalización y desarrollo del razonamiento, exige un cambio en la didáctica de esta materia; un cambio que se podría resumir como la primacía del arte de aprender sobre el arte de enseñar, surgiendo, desde este punto de vista la -

necesidad de llegar a una serie de actividades siempre-relacionadas, que faciliten el dinamismo de reversibilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje, actividades en las cuales el alumno será el principal participante. De esta consideración, resulta errónea la programación clásica en compartimientos separados, ya que dicha presentación no está acorde con la génesis del pensamiento matemático de la humanidad y la evolución genética del -- pensamiento del niño, cuyo desarrollo es concéntrico y no radial y su percepción globalizadora, no fragmentada.

La pretendida innovación de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, se fundamenta en algunas consideraciones importantes. Se admite desde hoy, que el mundo del futuro exigirá a todos ciertos conocimientos, y nó solamente a los que van a proseguir estudios superiores, sino incluso también a aquéllos que no pasen del certificado de estudios primarios. Los cambios en la estructura programática deben conllevar una transformación en el quehacer del maestro y de los niños. En la clase debe predominar, desde ahora, la situación de enseñanza después que la de aprendizaje. La enseñanza frontal, que se dirige a toda la clase, deja paso a la enseñanza por pequeños grupos, facilitando la - individualización. Es conveniente introducir la técnica de discusión entre los niños cuando surge un error al - que se le busca su origen. Las reglas de este juego matemático son fáciles y no habrá dificultad de que la -- verdad surja de la discusión. De esta forma la verdad - se admite por sí misma, más que por el maestro encargado de arbitrarla.

Sin embargo, esto no elimina, ni mucho menos, - la acción del maestro. Este debe estar en permanente vigilia para encauzar la actividad y actuar en el momento oportuno, siempre con una previsión detallada del desarrollo de la clase. Sabemos que es tentador interponerse y facilitar inmediatamente el proceso cuando los niños cometen un error, para decirles en el acto cómo deben hacerlo. Se trata ahora de que el maestro sepa conducir al niño hasta que descubra por sí mismo la situación correcta. De esta forma los niños fijan mejor la solución, que cuando es el maestro quien dice lo que deben hacer.

Una metodología basada en las consideraciones anteriores lleva implícita una serie de condicionamientos desde el punto de vista de la auténtica actividad de los niños y facilita, realmente, la verdadera autoformación.

El trabajo consta de dos partes. La primera hace referencia a un contenido programático de la escuela tradicional, por asignaturas, Aritmética y Geometría, con sugerencias didácticas para el tratamiento de los temas. La segunda presenta un enfoque actual de las matemáticas en la escuela primaria, también con ideas metodológicas recomendadas por la nueva didáctica.

Se incluye, además, un anexo con notas que amplían algunos conceptos, pies de página y fe de erratas.

________o________

P R O L O G O

En el plan de estudios y programas de la escuela primaria, hemos de considerar la Matemática en uno de los principales planos dada su importancia. - De allí la inquietud constructiva en la renovación - de las técnicas, métodos y programas de enseñanza, - tendiente a la consecución de los objetivos prefijados en el área de matemáticas en la escuela primaria. Estos objetivos están explícitamente indicados en -- los programas de cada grado; toca al maestro interpretarlos, estudiarlos y fijar adecuadamente el proceso que ha de seguir para llegar a ellos, conduciendo el aprendizaje en forma tal, que el alumno vaya - descubriendo por sí mismo el conocimiento.

El programa de matemáticas en la escuela primaria fija como objetivo general: "dotar a los alumnos de los conocimientos e instrumentos que le permitan mejorar su comprensión e interpretación de los - fenómenos en forma cuantitativa y relacional". Habremos de interpretar este objetivo en el sentido de -- que el alumno podrá explicarse a sí mismo, mediante- el razonamiento lógico, el "porqué" de los fenómenos, y la relación que puede establecer entre unos y otros, para llegar a conclusiones de carácter general. Resalta aquí, el método eminentemente deductivo de - la enseñanza de las matemáticas.

Para comprender el objetivo general de la enseñanza de las matemáticas a nivel primario, se precisa hacer referencia a los objetivos particulares - contenidos en cada unidad programática. Estos objetivos son los siguientes.

Numeración.- Es muy conveniente que el niño adquiera el concepto de número en la forma más natural y acorde con su sincretismo, es decir, como algo relacionado con conjuntos de cosas familiares a él; que el niño se dé cuenta de la necesidad de un sistema de numeración que evite tener que inventar un signo para cada número y llegue, así, a la comprensión e interpretación de los sistemas posicionales de base.

Operaciones y aplicaciones.- Se ha de conseguir que el alumno adquiera el "concepto" de las operaciones matemáticas para que llegue a su resolución nó por simple mecanización, sino mediante el razonamiento. Así, comprenderá la adición por medio de juntar colecciones y la sustracción como una operación inversa de aquélla. Llegará al concepto de multiplicación por medio de la adición de sumandos iguales y comprenderá la división como una operación inversa de la multiplicación. Se pretende que el alumno comprenda el algoritmo de las operaciones para que pueda explicarse las formas de resolución.

Geometría.- Se estima importante que el alumno adquiera los conceptos geométricos básicos: el -- punto, la línea, las figuras cerradas y no cerradas, superficies planas o curvas y los cuerpos. Entenderá la geometría como una ciencia eminentemente dinámica en la que el movimiento de un elemento geométrico engendra otro elemento menos simplificado. Que el alumno desarrolle su capacidad de abstracción y su intuición. Que sea capaz de manejar los instrumentos de - medición y las unidades de medida para cada caso en-particular y para casos generales.

Lógica.- En ningún otro campo como en el de las matemáticas necesitará el alumno tánto de su capacidad deductiva. El programa de matemáticas incluye algunos tipos de razonamientos que tienen como finalidad robustecer el desarrollo intelectual del alumno.

Registros estadísticos y probabilidad.- Este objetivo llevará al alumno a lo que podría llamarse: "matemática aplicada", es decir, que utilice sus conocimientos matemáticos para obtener o transmitir alguna información relacionada con un fenómeno dado. El alumno será capaz de interpretar adecuadamente la información estadística contenida en gráficas o registros de diferente estructura.

Debemos entender, por lo tanto, que la suma de los objetivos particulares llevará al objetivo general de la Matemática en la Escuela Primaria: preparar al alumno con los conocimientos, habilidades y capacidades suficientes para enfrentarse a la resolución de los problemas que le presente la vida real en forma práctica, segura y eficaz, e interesarlo en el razonamiento constante, no sólo en las matemáticas, sino en todas las ciencias, como un medio de llegar a la verdad, por la verdad misma.

CAPITULO I

DIDACTICA DE LA ARITMETICA

La Aritmética es la ciencia de los números. De esta definición parte el programa de enseñanza de esta asignatura, en el cual habrán de considerarse las nociones preliminares: definición de número, de magnitud y su medida, de las igualdades y desigualdades, de unidad y cantidad, de las unidades de diferentes órdenes, para estudiar después las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división.

Los caracteres de divisibilidad, el máximo común divisor, el mínimo común múltiplo, los números primos, conducen al importante estudio de las fracciones, a las que deberá prestarse toda la atención, en especial a la simplificación de fracciones, lo que permite realizar con mayor facilidad las operaciones corrientes y que conduce al estudio de razones, proporciones, y números decimales.

<u>IDEA DE UNIDAD Y DE NUMERO ENTERO</u>.- Podemos preguntarnos cuántas letras hay en una palabra, cuántos insectos en un enjambre, cuántos objetos en una colección. Para valuar, por ejemplo, la cantidad de canicas contenidas en un saco, podemos sacarlas del mismo una a una. Obtenemos sucesivamente grupos de canicas de los que cada uno es mayor que el precedente en una canica o "una unidad". Para distinguir cada grupo formado, se lo designa con un vocablo particular. Así, se dice: una canica, dos canicas, tres canicas, cuatro canicas, cinco canicas. El saco contiene cinco canicas; cinco es un número entero, una canica es una-

unidad. Dos, tres, cuatro, son también números enteros porque son determinados de la misma manera que - cinco, por la repetición de la unidad. Por lo tanto, se da el nombre de unidad a cada uno de los objetos- de una colección. La unidad es la base para contar o medir. El número entero expresa la cantidad de unidades que constituye una colección, es decir, número - entero, es el resultado de contar o medir. Contar es buscar cuántas unidades hay en una colección de obtetos.

IDEA DE MAGNITUD.- Se llama magnitud todo lo que puede aumentarse o disminuirse, como la longitud de una carretera, la duración de un recorrido, la velocidad de un vehículo, el número de hojas de un libro, etc. Se llaman más especialmente magnitudes matemáticas, aquellas por las cuales se pueden definir la igualdad y la suma, como las superficies, los volúmenes, los ángulos, las fuerzas, las cantidades de calor, etcétera.

MEDIDA DE UNA MAGNITUD Y NUMERO ENTERO.- Propongámonos medir la longitud A B de una mesa, designando por A y B sus dos extremos. De A a B podemos - llevar, de cabo a cabo, una, más una, más una veces- la longitud del metro. Tres es el número que mide la longitud de la mesa. El mestro es la unidad empleada. Medir una longitud es buscar cuántas veces contiene- la longitud tomada por unidad. De manera general: medir una magnitud es buscar cuántas veces está contenida en ella otra magnitud de la misma especie tomada como unidad. Un número entero expresa la medida - de una magnitud.

NUMEROS CONCRETOS Y NUMEROS ABSTRACTOS.- El- número, seguido de la indicación de la unidad que lo constituye, se llama número concreto. Ejemplos: cinco kilogramos, tres libretas, ocho días, etc.

Pero los números son esencialmente abstractos, es decir, que se les considera abstracción hecha de - la magnitud que representan. El número tres, por ejem plo, mide una magnitud cualquiera que contiene tres - veces su unidad: mide una longitud si se trata de tres metros, un peso si se trata de tres kilogramos. Los - números no seguidos de la unidad se llaman números -- abstractos. Ejemplos: tres, cinco, siete.

NUMEROS IGUALES Y DESIGUALES.- Debiendo un ma estro distribuir entre sus alumnos un paquete de cier tos libros, ha de comparar el número de éstos con el- número de alumnos. Dará un libro a un alumno, otro a- otro alumno y así sucesivamente.

Tres casos se pueden presentar:

1o.- Todos los libros han sido distribuidos y cada a- lumno ha recibido uno. S e dirá que el número de li-- bros es igual al número de alumnos. Los números de ob jetos de dos colecciones son iguales cuando se pueden hacer corresponder uno a uno los objetos de estas co- lecciones.

2o.- Los libros no han sido todos distribuidos cuando cada alumno ha recibido el suyo. Se dice que el núme- ro de libros es mayor que el número de alumnos.

3o.- Puede suceder que no haya bastantes libros para- distribuir; entonces el número de libros es menor que el número de alumnos. En estos últimos casos, los dos números son desiguales.

PRINCIPIOS.- Hagamos corresponder uno a uno - los objetos de tres colecciones a, b, c. Si a es i-- gual a b y b es igual a c, se tiene que a es igual a c. Si dos números son iguales a un tercero, son iguales entre sí.

Si a es menor que b y b es menor que c, se - tiene, en consecuencia, que a es menor que c, o bien que c es mayor que b y b es mayor que a, de donde, c es mayor que a.

Si un número es mayor que otro, es mayor que todos los números menores que este otro.

SERIE NATURAL DE LOS NUMEROS ENTEROS.- Si a- una canica se le agrega otra canica, se obtiene una- colección de dos canicas; si se agrega entonces otra canica más, el número es dos más uno, o tres. Conti nuando así se tendrá la serie natural de los números enteros: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

La serie natural de los números enteros se- forma agregando cada vez uno al número anterior.

NUMERACION DECIMAL.

Sistema de numeración es un conjunto de procedimientos para nombrar y escribir los números lo - más simplemente posible. Hay que distinguir, por lo- tanto, la numeración hablada y la numeración escrita.

NUMERACION HABLADA.- Permite nombrar todos - los números con reducido número de palabras. Vamos a proponernos contar, por ejemplo, cierto número de mo nedas de un peso. Las colocamos en pilas de diez pesos. Después formamos cuadros con diez hileras de - diez pilas. Completamos seis cuadros que equivalen a seis billetes de a mil pesos; nos quedan siete hileras de pilas de diez pesos que valen siete billetes- de cien pesos; nos sobran tres pilas de diez pesos - que equivalen a tres billetes de diez pesos y una pi la incompleta de cuatro monedas de un peso. El con-junto de las monedas tendrá un valor de: seis billetes de mil pesos; siete billetes de cien pesos; tres billetes de diez pesos y cuatro piezas de un peso. - Podrá decirse: seis-mil, siete-cientos, tres-diez, - cuatro pesos.

CONVENCIONES FUNDAMENTALES.- De la operación que acaba de describirse se pueden deducir las reglas importantes de nuestro sistema de numeración. - Cada uno de los nueve primeros números se designan - con un nombre particular; el siguiente es el diez.

LAS ORDENES.- Para evitar el empleo de nombres nuevos, se formaron en la operación de enumeración precedente, grupos de diez unidades; se emplearon sucesivamente unidades cada vez mayores: la pieza de un peso, los billetes de diez, cien y mil pesos. Se llama unidad de 1er. orden una unidad simple; unidad de 2do. orden una decena, que vale diez unidades simples; unidad de 3er. orden una centena, que - vale diez decenas; unidad de 4to. orden un millar, - que vale, a su vez, diez centenas, etc.

Generalizando, se conviene que diez unidades de un orden cualquiera, forman una unidad del orden inmediato superior. El número diez desempeña, -- por consiguiente, papel primordial, es la base del - sistema llamado, por ello, sistema de numeración decimal.

LAS CLASES.- Para restringir el número de palabras que designan los órdenes, se agrupan éstos en clases. Una clase reune tres órdenes, por ejemplo: - las unidades, las decenas, las centenas de millar, - forman la clase de los millares. Basta encontrar una palabra nueva para cada clase nueva. No es corriente untilizar las clases de unidades superiores a los millones (billones, trillones, etc.).

El uso ha introducido modificaciones en la denominación de los números usuales. En vez de dos--diez, tres-diez...se dice veinte, treinta... en vez-de diez-uno, diez-dos, se dice once, doce, etc.

NUMERACION ESCRITA.- Se han establecido algunas reglas que permiten, con un número limitado de - signos, escribir todos los números enteros. La numeración escrita es más perfecta que la numeración oral puesto que en el sistema decimal se limita al empleo de diez signos, incluyendo el cero. Los signos empleados reciben el nombre de cifras. Con ellas se representan los primeros diez números a partir de cero. - Las cifras distintas de cero se llaman cifras significativas.

CONVENCIONES.- Volvamos a t omar el número - que nos ha servido de ejemplo cuando nos referimos a la numeración hablada. Enunciamos las unidades del - nombre al cual pertenecen, según el orden siguiente: seis-mil (6 mil), siete cientos (7cientos), tres diez, (3 diez, treinta), cuatro pesos (4 pesos). Escribamos el número respetando ese orden , pero sin indicar las unidades: escribimos 6,734. Sólo el lugar ocupado por la cifra 3 indica que esta cifra ocupa unidades de 2do. orden; el cuarto lugar ocupado por - la cifra 6 indica unidades de 4to. orden. Se escriben los números según ciertas reglas: toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades -- del orden inmediatamente superior al orden de las unidades que representa esta otra cifra; la primera - cifra de la derecha representa unidades simples; el-cero señala el lugar de las unidades que no existen: 3,070. Se separan las clases por comas o por espacios en blanco. Así, se escribe 2,945,224 o bien, : 2 945 224, dividiendo el número en grupos de tres cifras a partir de la derecha (el último grupo puede ser incompleto).

VALOR ABSOLUTO Y VALOR RELATIVO.- Valor absoluto de una cifra es el que tiene por sí misma, es el que posee cuando está sola. Su valor relativo es el que adquiere por el lugar que ocupa en el número. Así, en 47,541 la cifra 5 tiene por valor 5 centenas ó 500 unidades. Repitamos el ejemplo ya usado dos veces: se han formado colecciones parciales de:

6 billetes de mil pesos que valen 6,000 pesos
7 billetes de cien, que equivalen a 700 pesos
3 billetes de diez pesos que valen 30 pesos
4 monedas de un pesos que equivalen a 4 pesos

reunidas dan un total de 6,734 pesos y se puede escribir: 6,734 = 6,000 + 700 + 30 + 4, donde 6,000, 700, 30 y 4 son valores relativos de las cifras 6, 7 3 y 4 del número. Por consiguiente, un número es lo mismo que la suma de los valores relativos de sus cifras.

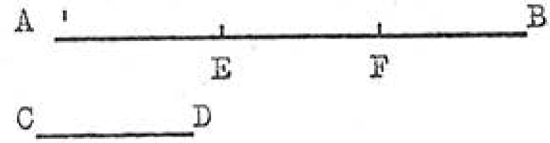
MEDIDA DE MAGNITUDES.

Las magnitudes mensurables son aquellas por las cuales se pueden definir la igualdad y la suma.- Vamos a elegir, como ejemplo, longitudes.

Las dos longitudes A ______________ B
AB y CD pueden coincidir, C ______________ D
es decir, superponerse de manera que C coincida con A y D con B. Estas dos longitudes se llaman "iguales"

AB = CD

Llevemos sobre una longitud AB a partir de A una regla de longitud CD
Señalemos E sobre
la longitud en el-



punto donde llega el extremo D de la regla. Continuesmos llevando cabo a cabo la longitud de la regla sobre AB hasta llegar al punto B. Hemos repetido tres- veces la operación. La longitud AB es, pues, igual a la suma de tres longitudes iguales a CD.

$$AB = CD + CD + CD$$

3 expresa la medida AB, siendo CD la unidad. Si CD - fuese igual a un metro diríamos que AB "mide" tres - metros..

UNIDADES PRINCIPALES Y SECUNDARIAS.- Siendo- una longitud una magnitud continua, la unidad ha sido fijada arbitrariamente. La unidad principal de las - medidas de longitud es el metro. Para medidas de --- grandes longitudes, se evita el empleo de números -- muy grandes tomando por unidades longitudes 10, 100, 1000 veces mayores que el metro. Estas longitudes -- son múltiplos del metro.

A veces será necesario medir longitudes más- pequeñas que el metro; se elige entonces una unidad- 10, 100, 1000 veces menor que el metro. Estas longitudes son submúltiplos del metro.

Se ha fijado la unidad principal, sus múltiplos y sus submúltiplos para la medida de otras magnitudes, como la masa de un cuerpo, la capacidad de- un recipiente, el precio de una mercancía, que son - igualmente magnitudes mensurables.

DEFINICION.- Medir una magnitud es determi-- nar con la ayuda de otra de la misma especie tomada- como unidad cuántas veces aquélla contiene a ésta o-

C U A D R O I

Unidades	Símbolos	valores
Megámetro	Mm	1,000,000 m = 1,000 Km
Kilómetro	Km	1,000 m
Hectómetro	Hm	100 m
Decámetro	Dm	10 m
Unidad principal : Metro		1 m
Decímetro	dm $\frac{1}{10}$ =	0.1 m
Centímetro	cm $\frac{1}{100}$ =	0.01 m
Milímetro	mm $\frac{1}{1000}$ =	0.001 m
Micra	μ $\frac{1}{1000000}$	0.000001 m
Angström	Å $\frac{1}{10000000000}$	0.0000000001 m

a uno de sus múltiplos o submúltiplos.

DEFINICION DE METRO.- El metro es la longitud igual a 1,650,763.73 longitudes de onda, en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles 2p(10) y 5d(5) del átomo de kriptón 86 -- (decisión de la Conferencia General de Pesas y Medidas de 1960).

Antes, el metro era la distancia a cero grados centígrados de dos señales trazadas en la superficie del patrón internacional de platino iridiado que ha sido depositado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas situada en el pabellón Breteuil, en Sevres, y que ha sido aprobado en la Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1889.

La longitud del metro corresponde casi exactamente a la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.

MEDIDAS DE MASA.- La balanza permite apreciar la igualdad de masas. La unidad principal de masa es el kilogramo.

El kilogramo es la masa del patrón internacional de platino iridiado, depositado en el Pabellón de Breteuil, en Sevres. La masa del kilogramo es aproximadamente (es 27 mg más pesada) la de una cantidad de agua destilada tomada a 4 grados centígrados (máximo de densidad) que llenase un recipiente cúbico de un decímetro de arista interiormente. (El volumen de un decímetro cúbico corresponde casi exactamente a la capacidad del litro). El kilogramo tiene también múltiplos y submúltiplos.

MEDIDAS DE CAPACIDAD.- Sirven para determinar el contenido de los recipientes, es decir, para valo-

C U A D R O II

Unidades	Símbolos	Valores
Tonelada Métrica	t	1,000 kg
Quintal Métrico	q	100 kg
Unidad principal: Kilogramo	kg	1 kg
Hectogramo	hg	$\frac{1}{10}$ = 100 g
Decagramo	Dg	$\frac{1}{100}$ = 10 g
Gramo	g	$\frac{1}{1000}$ kg = 1 g
Decigramo	dg	$\frac{1}{10}$ kg = 0.1 g
Centigramo	cg	$\frac{1}{100}$ g. = 0.01 g
Miligramo	mg	$\frac{1}{1000}$ g = 0.001 g

C U A D R O III

Unidades	Símbolos	Valor
Hectolitro	Hl	100 l
Decalitro	Dl	10 l
Unidad principal: litro	l	
Decilitro	dl	$\frac{1}{10}$ l = 0.1 l
Centilitro	cl	$\frac{1}{100}$ l = 0.01 l
Mililitro	ml	$\frac{1}{1000}$ l = 0.001 l

rar su volumen interior.

Dos recipientes tienen la misma capacidad si- se los puede llenar completamente con una misma cantidad de líquido. Se mide la capacidad de un vaso contando cuántas veces es necesario verter dentro, para- llenarlo, el contenido de un recipiente determinado- cuya capacidad se toma como unidad. La unidad principal de capacidad es el litro.

El litro es el volumen ocupado por un kilogramo de agua pura a su máximo de densidad (4 grados centígrados) y a presión atmosférica normal.

MONEDAS.- Los valores de dos objetos son iguales si sus propietarios juzgan que pueden intercam-- biarlos. En el comercio, las mercancías se cambian -- contra una mercancía intermediaria, la moneda. Aceptada por todos, facilita enormemente los cambios. El - precio es el equivalente, en moneda, de una mercancía. La moneda de oro es moneda internacional. Cada país- tiene su unidad monetaria y su valor depende del tipo de cambio fijado internacionalmente.

NUMEROS DECIMALES.

Primero formamos el concepto de unidad como- un solo elemento, después el concepto de unidad compuesta, convencional, de conjunto. Hemos insistido en el concepto de que en nuestro sistema de numeración:- diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.

Procede ahora presentar nuevamente la unidad- entera, pero susceptible de ser dividida en partes iguales. Procédase a contar las partes. Por ejemplo: - el conjunto de diez elementos que utilizamos para for

C U A D R O IV

Unidades monetarias

País	Moneda	País	Moneda
Afganistán	Afghani	Alemania	Deutsche mark
Argentina	Peso	Australia	Libra
Bélgica	Franco	Belice	Dólar
Bolivia	Peso	Brasil	Cruzeiro
Bulgaria	Lev	Canadá	Dólar
Colombia	Peso	Costa Rica	Colón
Cuba	Peso	Chile	E scudo
China	Yuan	Dinamarca	Corona
Ecuador	Sucre	E gipto	Libra
España	Peseta	E. Unidos	Dólar
Filipinas	Peso	Finlandia	Markka
Francia	Franco	G. Bretaña	Libra
Grecia	Dracma	Guatemala	Quetzal
Haití	Gourde	Holanda	Guilder
Honduras	Lempira	Hungría	Forint
India	Rupia	Irak	Dinar
Indonesia	Rupia	Iran	Rial
Irlanda	Libra	Italia	Lira
Japón	Yen	México	Peso
Nicaragua	Córdova	Noruega	Corona
Panamá	Balboa	Paraguay	Guaraní
Perú	Sol	Polonia	Zloty
Portugal	Escudo	Rumanía	Leu
Salvador	Colón	Sudafrica	Rand
Suecia	Corona	Suiza	Franco
Thailandia	Baht	Turquía	Lira
U. Soviética	Rublo	Uruguay	Peso
Venezuela	Bolívar	Vietnam	Piastra

mar el concepto de unidad de segundo orden, puede -- servirnos para ejemplificar que cada uno de los elementos que lo forman es una parte de la decena y como son diez elementos iguales los que forman la decena, cada uno es una décima parte; lomismo que cada - una de las decenas que utilizamos para formar la centena, es una décima parte de ésta.

Los ejercicios con unidades, decenas y centenas pueden preparar el razonamiento para la escritura de los decimales.

Se ha demostrado que la unidad es la décima- parte de la decena; que ésta es la décima parte de - la centena.¿Cómo representaremos por escrito una décima parte de la unidad entera? así:

1 centena 1 decena 1 unidad 1 décima

Como la unidad entera la hemos llamado uni-- dad de primer orden, las unidades menores que ella - constituyen los subórdenes. Las décimas constituyen- el primer suborden y para separarlas de los órdenes- se utiliza un punto . (punto decimal) que indica que allí terminan las unidades enteras.

Cabe luego considerar aislada la décima como unidad de 1er. suborden y efectuar los ejercicios de integración de cantidades, llegando a formar la unidad entera y aún a rebasarla. Estos ejercicios deben hacerse objetivamente.

1 décima + 1 décima = 2 décimas .1 + .1 = .2
4 décimas + 5 décimas + 1 décima = 10 décimas.= 1 entero; .4 + .5 + .1 = 1
5 décimas + 6 décimas + 3 décimas = 14 décimas; .5 + .6 + .3 = 1.4, porque diez décimas = un entero.

Por analogía se llegará a considerar que la décima también es susceptible de dividirse en diez -

partes iguales llamadas centésimas, que constituyen el segundo suborden, y así sucesivamente. Se reco -- miendan ejercicios como los siguientes:

10 décimas = .1 + .1 + .1 + .1 + .1 + .1 + .1 + .1 + .1 + .1 = 1 entero = 1.

10 centésimas = .01 + .01 + .01 + .01 + .01 + .01 + .01 + .01 + .01 + .01 = 1 décima.

1 décima = 10 centésimas; luego, 1 entero = 100 centésimas. 1 centena = 100 unidades.

Ha de llegarse a la conclusión de que los órdenes de unidades enteras expresan cantidades cada vez mayores, sin ningún límite, y que los subórdenes de decimales expresan cantidades cada vez menores, también sin límite.

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

En realidad, las operaciones de adición y sustracción se inician durante la enseñanza de los números dígitos. En las cuatro operaciones fundamentales tenemos que considerar dos clases de dificultades: las que se refieren al mecanismo de la operación; y las que se relacionan con el sentido de la operación, es decir, las que nos permiten traducir situaciones dadas, al lenguaje numérico.

No podemos aislar unas de otras, pues, de nada sirve saber efectuar las operaciones si no se sabe cuándo aplicarlas; y tampoco serviría de nada saber que podemos resolver una situación problemática por medio de una multiplicación, si no sabemos efectuar esa operación.

La enseñanza de las operaciones debe iniciarse siempre con una situación problemática. Casi siem pre, esta situación surge espontáneamente, en forma natural, pero en el caso que no suceda así, el maestro la provocará con la confección, por ejemplo, de algún trabajo manual, la compra de útiles escolares, etc. Cada una de las dificultades que se presenten en la enseñanza de las operaciones debe ser resuelta primero con objetos, después en forma gráfica y, por último, con símbolos numéricos.

<u>ADICION</u>.- La adición es una operación que se capta fácilmente por intuición. Las situaciones reales que se resuelven por medio de esta operación son muy numerosas y siempre se plantean con verbos que revelan la idea de reunión de elementos para llegar a un total. Agregar elementos a un conjunto, hallar el total de gastos, encontrar el perímetro de una figura, etc. son cuestiones que se asocian con la idea de reunir, de hallar un total.

Las dificultades de la adición deben irse superando secuencialmente desde el primer grado: adición de dígitos, adición de decenas, adición con resultados entre 11 y 19, adición de centenas; para llegar a hacer comprender a los alumnos del tercer ciclo el sentido de la operación y su mecanismo, en forma generalizada.

El conocimiento de la operatoria con tres o más órdenes de unidades proporciona la clave para la operatoria en general. Se procederá analizando los sumandos para obtener luego, por síntesis de los diversos órdenes, el total. Ejemplos:

225 + 672	225 = 200 + 20 + 5	225
	672 = 600 + 70 + 2	+ 672
	800 + 90 + 7	897

$$125 + 312 + 241 \qquad \begin{array}{r} 125 = 100 + 20 + 5 \\ 312 = 300 + 10 + 2 \\ 241 = 200 + 40 + 1 \\ \hline 600 + 70 + 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \\ 312 \\ +\ 241 \\ \hline 678 \end{array}$$

Se hará observar que en la operación de suma sólo puede expresarse el total, cuando, al agregar conjuntos, éstos han de estar formados por unidades de la misma especie, llegando a la conclusión de que sólo pueden sumarse conjuntos homogéneos. Considerando el número en abstracto como conjunto de unidades de distintos órdenes, puede sumarse a otros abstractos, pero el total es un conjunto que contiene la suma de los distintos órdenes de unidades de los sumandos. Esta es la razón fundamental de la mecánica de la adición que permite sumar sin limitaciones.

Se manejarán enseguida, casos con varios sumandos cuyos órdenes de unidades forman un total mayor o igual que una unidad del orden inmediato superior.

$$246 + 327 \qquad \begin{array}{l} 246 = 200 + 40 + 6 \\ 327 = 300 + 20 + 7 \\ \hline 500 + 60 + 13 = \\ 500 + 60 + 10 + 3 = 573 \end{array}$$

$$463 + 284 \qquad \begin{array}{l} 463 = 400 + 60 + 3 \\ 284 = 200 + 80 + 4 \\ \hline 600 + 140 + 7 = 600 + 100 + 40 \\ + 7 = 700 + 40 + 7 = 747 \end{array}$$

Se puede proceder a continuación a la adición para cualquier caso, aumentando el número de sumandos y incluyendo operaciones que rebasen los millares. Ejemplo:

10,457 + 3,264 + 9,512
10,457 = 10,000 + 400 + 50 + 7
3,264 = 3,000 + 200 + 60 + 4
9,512 = 9,000 + 500 + 10 + 2

22,000 + 1,100 + 120 + 13 =
10,000 + 12,000 + 1,000 + 100 + 120 + 10 + 3 =
10,000 + 10,000 + 2,000 + 1,000 + 220 + 10 + 3 =
20,000 + 3,000 + 200 + 20 + 10 + 3 =
20,000 + 3,000 + 200 + 30 + 3 = 23,233.

SUSTRACCION.- Los problemas concretos que se resuelven por medio de una sustracción pueden ser de muy distinta índole. Por esta razón se considera que en la escuela primaria es necesario, por lo menos en su inicio, prestar a la sustracción la misma atención que a la suma, aunque, en realidad, no es más que un caso particular de ésta.

Se pueden distinguir tres casos que se resuelven con una sustracción:
1o. La búsqueda de un resto, es decir, lo que queda de una magnitud conocida cuando se le quita otra.
2o. La búsqueda de un complemento, o sea, lo que se debe agregar a una magnitud dada, para obtener otra.
3o. La comparación de dos magnitudes para hallar cuantitativamente su diferencia.

Esta diversidad de cuestiones que se resuelven con la sustracción ha dado origen a distintas clases de razonamientos para efectuar dicha operación. Presentándose la sustracción como una operación contraria a la de aumentar, es decir, como una operación de quitar, es conveniente usar en un principio el procedimiento de quitar.

La enseñanza de esta operación también ha de

55884

graduarse según su dificultad. Partiendo de la sustracción de dígitos, se proseguirán las dificultades subsecuentes: restar a una decena, un dígito; sustracción de decenas; sustracción de números comprendidos entre 11 y 19. Hasta aquí se puede manejar el procedimiento de "quitar". Una vez comprendido este mecanismo, se presentan las situaciones problemáticas que se resuelven hallando lo que debe agregarse a una magnitud dada para obtener otra. Por ejemplo, Tengo 5 cuadernos, pero necesito tener 9.¿Cuántos cuadernos me faltan?

Evidentemente, tenemos que buscar el número que sumado con 5 da 9. Al principio será difícil que el alumno piense que esta situación se resuelve con una sustracción, que sólo ha asociado la idea de quitar. Es necesario mostrar objetivamente que conoce un total (9) y uno de los sumandos (5) y que el otro sumando es el número que agregado a 5 da 9.

Podría plantearse la operación en esta forma: $5 + \quad = 9$, pero ésta no es realmente la indicación de una adición, por lo que se plantea como una sustracción: $9 - 5 = \quad$. La resta o diferencia es la cantidad que sumada a 5 da 9, por lo tanto diremos:

$$5 + 4 = 9. \text{ La resta es } 4.$$

Se observará que esta forma es más fácil, pues se resuelve aplicando las habilidades de la adición que ya habrán dominado.

Los casos en que las unidades simples del sustraendo son mayores que las del minuendo, se resuelven empleando el método aditivo con base en las habilidades ya manejadas en la adición.

Puede manejarse en estos casos la propiedad de que si se agrega un mismo número al minuendo y al sustraendo, la diferencia, es decir el resultado de la

sustracción, no se altera. Ejemplo: 42 - 23.
Efectuamos el análisis de cada término:

$42 = 40 + 2$ Como las unidades del sustraendo son
$23 = 20 + 3$ más que las del minuendo, agregamos, a los dos t;erminos, una decena:

$42 + 10 = 42 + 10 + 2$
$23 + 10 = 23 + 10 + 3$ Para poder restar las unidades simples, agregamos la decena del minuendo a sus unidades y la decena del sustraendo a sus decenas y tendremos:

$$\begin{array}{rl} 42 & 42 + 10 = 40 + \underline{10 + 2} \\ -\ 23 & 23 + 10 = \underline{20 + 10} + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 42 & 42 + 10 = 40 + 12 \\ -\ 23 & 23 + 10 = 30 + 3 \end{array}$$

. Se procede a hallar el complemento de los distintos órdenes de unidades.

$$\begin{array}{rl} 42 & 40 + 12 \\ -\ 23 & 30 + 3 \\ \hline & 10 + 9 = 19. \end{array}$$

Tomando en cuenta que la preparación de los alumnos de quinto y sexto grados debe ser suficiente, se plantearán los temas de la operatoria desde puntos de vista más elevados. Se afirmarán los conceptos básicos de sustracción, el de homogeneidad matemática de los órdenes de unidades y el de homogeneidad concreta, observando que dos números en abstracto pueden restarse siempre que rija la operación, la ley de homogeneidad de los órdenes de unidades.

Se manejarán los siguientes casos:
a) Los órdenes de unidades del sustraendo son, respectivamente menores que los del minuendo.

476 - 342

$$\begin{array}{rr} 476 = 400 + 70 + 6 & 476 \\ 342 = 300 + 40 + 2 & -\ 342 \\ \hline 100 + 30 + 4 = & 134 \end{array}$$

b) Las unidades de primer orden del sustraendo son - mayores que las correspondientes del minuendo. Se resuelve agregando a los dos términos de la sustracción, una decena.

$$
\begin{array}{ll}
572 - 425 & \\
572 = 500 + 70 + 2 & 572 + 10 = 500 + 70 + 10 + 2 \\
425 = 400 + 20 + 5 & 425 + 10 = 400 + 20 + 10 + 5 \\
 & 572 + 10 = 500 + 70 + 12 \\
 & 425 + 10 = \underline{400 + 30 + \;\;5} \\
 & \qquad\qquad\; 100 + 40 + \;\;7 = 147
\end{array}
$$

Las unidades de segundo orden del sustraendo son mayores que las correspondientes del minuendo. - Esta dificultad se resuelve agregando una centena a los dos términos de la sustracción:

$$
\begin{array}{ll}
645 - 492 & \\
645 = 600 + 40 + 5 & 645 + 100 = 600 + 100 + 40 + 5 \\
492 = 400 + 90 + 2 & 492 + 100 = 400 + 100 + 90 + 2 \\
 & 645 + 100 = 600 + 140 + 5 \\
 & 492 + 100 = \underline{500 + \;\;90 + 2} \\
 & \qquad\qquad\quad 100 + 50 + 3 = 153.
\end{array}
$$

En el caso de que las unidades y las decenas del sustraendo sean mayores que las correspondientes del minuendo, se agregan una decena y una centena a ambos términos de la sustracción.

$$
\begin{array}{ll}
945 - 659 & \\
945 = 900 + 40 + 5 & 945+100+10 = 900+100+40+10+5 \\
659 = 600 + 50 + 9 & 659+100+10 = 600+100+50+10+9 \\
 & 945+100+10 = 900 + 140 + 15 \\
 & 659+100+10 = \underline{700 + \;\;60 + \;\;9} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 200 + 80 + 6 = \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 286.
\end{array}
$$

En el caso general de la sustracción se procederá de la siguiente manera:

25,142 - 6,475 Análisis: 25142 = 20000+5000+100+40+2
6475 = 6000+400+70+5

25142+1000+100+10 = 20000+5000+1000+100+100+40+10+5
6475+1000+100+10 = 6000+1000+400+100+70+10+5

25,000 + 1,000 + 240 + 12
7,000 + 400 + 180 + 5

18,000+600+60+7 = 18,667.

Los ejercicios de análisis y síntesis recomendados para la adición y sustracción servirán para entender el mecanismo de estas operaciones, y en cada dificultad se abandonarán tan pronto como el alumno sea capaz de ejecutar la operación, nó recitando una regla, sino con la comprensión del porqué se ejecuta en esa forma.

MULTIPLICACION.- Generalmente se presenta la multiplicación como una suma abreviada de sumandos iguales. 4 + 4 + 4 se puede representar: 3 x 4; el signo x se lee: veces. 3 + 3 + 3 + 3 se puede representar 4 x 3; el signo x se lee: veces.

Estos ejercicios conducirán a la observación de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Como se hizo anteriormente con la adición y la sustracción, procederá por medio de problemas sencillos, dar el sentido de esta operación. El niño resolverá los problemas, primero por una adición, luego recordará que puede simplificar por medio de una multiplicación y aprenderá a distinguir cuándo puede usar una multiplicación en vez de una adición.

Una vez comprendido lo que es la multiplicación y cuándo se emplea, procede conducir a los niños a la formación y memorización, por medio de juegos, de las habilidades de la multiplicación. Las habilidades de la multiplicación. Las tablas deben formarse por adiciones sucesivas, pero expresando los resultados obtenidos, en tal forma, que muestren que son resultados de una multiplicación y nó de una adición. Es evidente la necesidad de memorizar estas tablas para la práctica ulterior, pero lo indispensable es que el automatismo requerido no sea puramente mecánico desde el principio. En su inicio debe ser primordialmente consciente, pasando a ser automático por hábito de uso.

Si se ha demostrado la propiedad conmutativa de la multiplicación, tampoco es necesario hacer memorizar dos veces cada producto. Se recomienda la siguiente tabla que el niño podrá consultar hasta que por el continuo uso llegue a la fijación de los resultados.

1x1=1					
1x2=2	2x2=4				
1x3=3	2x3=6	3x3=9			
1x4=4	2x4=8	3x4=12	4x4=16		
1x5=5	2x5=10	3x5=15	4x5=20	5x5=25	
1x6=6	2x6=12	3x6=18	4x6=24	5x6=30	6x6=36
1x7=7	2x7=14	3x7=21	4x7=28	5x7=35	6x7=42
1x8=8	2x8=16	3x8=24	4x8=32	5x8=40	6x8=48
1x9=9	2x9=18	3x9=27	4x9=36	5x9=45	6x9=54

7x7=49		
7x8=56	8x8=64	
7x9=63	8x9=72	9x9=81 .

Casos que han de manejarse:

a) El multiplicador es de una cifra y no hay reserva.

Ejemplo: 43 x 2. Se analiza el multiplicando:

43 = 40 + 3; se multiplican separadamente los órde--

nes de unidades y decenas: $43 = 40 + 3$

$$\begin{array}{r} 43 = 40 + 3 \\ \underline{\times \quad\quad 2} \\ 80 + 6 \end{array}$$

y se hace la síntesis: 80 + 6 = 86, luego, 43 x 2 = 86.

b) El multiplicador es de una cifra, pero hay reserva. Ejemplo: 56 x 3. 56 = (50 + 6) x 3 = 150 + 18 = 168, luego, 56 x 3 = 168.

c) Multiplicación por la unidad u otra cifra significativa seguida de ceros: se presentan, para su observación, series como las siguientes:

1 10 100 1000 10000..........
2 20 200 2000 20000..........
3 30 300 3000 30000..........

Se observa que cada término es diez veces mayor que el anterior: 1 , 10 , 100 , 1000 .....

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10 x 1 = 10

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 10 x 10 = 100

100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 10 x 100 = 1000.

Se hará observar la diferencia que hay en la escritura del 1o. y segundo términos, de éste y el 3o. y así se llegará por comprensión a la regla para multiplicar por la unidad seguida de ceros.

d) Multiplicación por los números comprendidos en los dos primeros órdenes de unidades. Se gradúa comenzando por la multiplicación por 11.

Ejemplo: 32 x 11 Como 11 = 10 + 1, 32 x 11 = 10 veces 32 + 1 vez 32:

$$\begin{array}{r} 10 \times 32 = 320 \\ 1 \times 32 = \underline{\ \ 32} \\ 352 \end{array} \qquad 32 \times 11 = 352.$$

e) En el caso general de la multiplicación:

58 x 24 es igual a multiplicar 58 x (20 + 4). Se -- multiplica primero 58 x 4 procurando escribir el producto de las unidades de 1er. orden debajo de las unidades del mismo orden del multiplicando. Luego se multiplica 58 por las decenas (en este caso 2) y se escribe el producto debajo del orden de las decenas. No es necesario escribir el cero de las unidades simples porque ya se escribió en el lugar de las decenas. Se suman los productos parciales.

$$\begin{array}{r} 58 \times 24 \\ \hline 232 \\ 116 \\ \hline 1392 \end{array}$$

POTENCIAS DE LOS NUMEROS.- El concepto de - potenciación se adquiere como una operación derivada inmediata de la multiplicación.

Así como una suma de sumandos iguales puede- expresarse como una multiplicación, también un pro-- ducto de factores iguales puede expresarse como una- potencia. Por ejemplo: 2 + 2 + 2 lo expresamos 3 x 2, 2 x 2 x 2 se expresa 2^3 que se lee: dos a la tercera potencia o dos elevado al cubo.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$.

Cuando el concepto de potencia ha sido com-- prendido se da la nomenclatura: base y exponente.

Después de tratar la multiplicación de números decimales, es conveniente efectuar ejercicios de potenciación de estos números para hacer comparaciones.

$2^2 = 4$ $\qquad 2^3 = 8$

$.2^2 = .04$ $\qquad .2^3 = .008$

$.02^2 = .0004$ $\qquad .02^3 = .000008$

Observar que las potencias sucesivas de los- números enteros son mayores que la base y crecen al aumentar el exponente, sin límite. Las potencias sucesivas de las fracciones decimales -menores que la unidad- son menores que la base y decrecen al aumentar el exponente, sin límite.

Al tratar de la multiplicación de fracciones comunes se harán ejercicios de potencias de las mismas, haciendo la observación indicada en el párrafo anterior.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

RADICACION.- El concepto de la raíz de un número se adquiere por los hechos planteados en la potenciación.

Si en cualquier producto de dos factores se puede hallar uno de ellos cuando se conoce el producto y el otro factor, siendo una potencia un producto de factores iguales, se puede hallar el número de factores, o sea, el grado de la potencia, por divisiones sucesivas, Por ejemplo:

Para hallar uno de los factores de un producto:

$5 \times 3 = 15 \qquad 15 : 3 = 5 \qquad 15 : 5 = 3$

Para hallar el grado de la potencia cuando se conoce ésta y la base: Qué potencia de 2 es 32? $2^{\cdots\cdots} = 32$

Se reduce a averiguar cuántos factores iguales a 2 dan 32, o sea, cuántas veces 2 multiplicado por sí mismo da 32.

Se procede como en la multiplicación, dividiendo 32 entre 2 para hallar el otro factor; se divide nuevamente el cociente entre 2 y así sucesivamente, hasta llegar a cociente 2.

$32 : 2 = 16$	$2 \times 16 = 32$
$16 : 2 = 8$	$2 \times 2 \times 8 = 32$
$8 : 2 = 4$	$2 \times 2 \times 2 \times 4 = 32$

4 : 2 = 2 $\qquad$ 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32

32 es la quinta potencia de 2.

Pero así como en la multiplicación es posi-- ble hallar cualquiera de los dos factores cuando se- conoce el producto y el otro factor, también en la- potenciación es posible hallar el grado de la poten- cia como hemos indicado, cuando se conoce la base, o la base cuando se conoce el grado de la potencia por factorización.

A esta operación de hallar la base cuando se conoce la potencia y el grado, se llama radicación.- La base, en este caso, se llama raíz.

Por ejemplo: 3 al cuadrado es 9, la raíz cuadrada de 9 es 3. 5 al cubo es 125, la raíz cúbuca de 125 es 5.

Cuando un número es potencia de un número en tero, su raíz puede hallarse por factorización, en - la siguiente forma: Hallar la raíz cuadrada de 25.

25	5
5	5
1	

$5^2 = 25$

Raíz cuadrada de 25 = 5.

Hallar la raíz cuadrada de 81.

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

3 x 3 x 3 x 3 = 81

9 x 9 = 81

$9^2 = 81$

Como sólo deben ser dos factores iguales, puesto que es raíz cuadrada, - formamos dos grupos de productos iguales.

$9^2 = 81$; por lo tanto, la raíz cuadrada de 81 = 9.

<u>DIVISION</u>.- Toda magnitud puede, por lo gene- ral, descomponerse en varias partes. La acción de -- partir una magnitud ocasiona infinitas soluciones, - representadas todas por un número cualquiera de par tes que no han de ser necesariamente iguales o equi- valentes entre sí. Puede ser que la partición se so- meta a determinadas exigencias, por ejemplo, que se-

an iguales las partes o que guarden cierta relación entre sí. La operación de descomponer una magnitud en partes iguales, es la división.

Pero este problema puede presentarse bajo dos aspectos: se puede determinar previamente la magnitud de cada parte y entonces el problema consiste en hallar el número de partes; o se puede determinar de antemano el número de partes, consistiendo el problema en encontrar la magnitud de cada una de ellas.

Por ejemplo: tengo 30 lápices que quiero repartir a razón de 5 lápices por alumno. La operación manual consiste en dar 5 lápices a un alumno, y a otro y así sucesivamente, hasta agotar los lápices. En este caso, he presentado la división como una serie de restas sucesivas del mismo número:

$$30 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5$$

Dí lápices a 6 niños. Si deseo volver a reunir los lápices pediré a los 6 niños que me devuelvan los 5 lápices que les dí. Esta operación la puedo indicar, 6 veces 5 y la represento así: 6×5. Por consiguiente, he demostrado que la división es una operación contraria de la multiplicación.

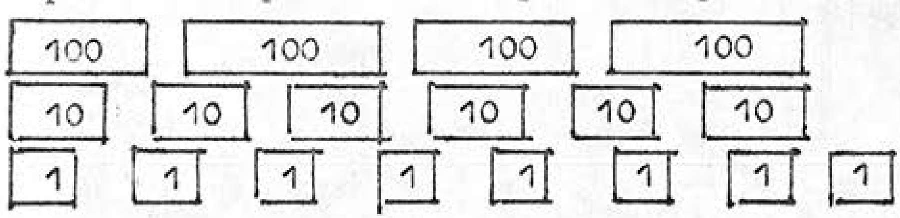
El problema también puede plantearse así: Tengo 30 lápices que quiero distribuir entre 6 niños de tal manera que a cada uno corresponda el mismo número de lápices. La operatoria manual consistiría en dar primero un lápiz a cada uno de los seis alumnos, luego otro y así, sucesivamente, hasta agotar todos los lápices. Se representa así:

$$30 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6$$

y vuelvo a formar el 30 así: 5 veces 6 = 30.

La técnica operatoria consiste en presentar gradualmente las dificultades, explicándolas las ve-razonamiento, para llegar a la observación de que -- basta hallar el número que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo. Que es sólo una aplicación de las tablas de multiplicar.

a) El divisor es un número dígito.- Se deben presentar primero divisiones en las que cada cifra del dividendo sea múltiplo del divisor. Por ejemplo: dos - obreros cobraron por un trabajo que realizaron juntos 468 pesos. Si los dos trabajaron igual. Cuánto - le corresponde a cada uno? Para facilitar el cálculo se puede decir que el dinero está en 4 billetes de - cien pesos, 6 billetes de diez pesos y 8 monedas de un peso. Se representa la operación gráficamente:



Se representa simbólicamente:

$468 : 2 = (400 + 60 + 8) : 2 = 200 + 30 + 4 = 234$

Se plantea la operación en la forma acostumbrada.

$$2 \,\overline{)\,468}^{\;234}$$

Razonando en la siguiente forma: primero distribuimos los billetes mayores, en este caso, las centenas. Para hallar la cifra de centenas que pondremos en el cociente, se dice: ¿cuántas centenas multiplico por 2 para tener 4 centenas? Se escribe el cociente en la columna de las centenas del dividendo. Ahora dividimos las decenas con el mismo razonamiento, y así sucesivamente.

Se presentarán enseguida divisiones en las que no todas las cifras del dividendo son múltiplos del divisor. Ejemplo: 374 : 2 . Después de representarse gráficamente, como el caso anterior, se representa simbólicamente:

374 : 2 = 300 + 70 + 4 : 2 =
200 + 100 + 60 + 10 + 4 : 2 =
200 + 160 + 14 : 2 = 100 + 80 + 7 = 187

Se plantea la operación en la forma acostumbrada, razonando así:

```
      187
2 ⟌ 374
    2
    ―
    17
    16
    ――
     14
     14
     ――
      0
```

Tres centenas entre 2, toca a 1 y sobra 1 centena. S e suma esta centena a las decenas del dividendo y se tendrán 17 decenas, que divididas entre 2, toca a 8 decenas y sobra una decena que se suma a las unidades para tener 14, que divididas entre 2, toca a 7.

La operatoria es la misma con divisor de más de una cifra.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS.

Los números poseen muchas propiedades que -- pueden descubrir los alumnos orientados por el maestro. Entre esas propiedades están los caracteres de- la divisibilidad, no sólo por su valor pedagógico si no por su aplicación para satisfacer la homogeneización de números fraccionarios.

Se puede iniciar con ejercicios como los diseñados para la multiplicación:

2 + 2 + 2 = 3 x 2 = 6   2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2=6x2=12
3 + 3 + 3 + 3 + 3=5x3=15   3 + 3 + 3 + 3=4x3=12
4 + 4 + 4 + 4=4x4=16   6 + 6=2x6=12

Se conduce a la observación de que estos números tienen por lo menos dos factores (6 = 2x3) -- (15 = 3x5 = 5x3) y algunos, como el 12, tienen una se rie de factores. Como cualquier número es divisible- entre cada uno de sus factores, también se concluye- que los números analizados tienen por lo menos dos - divisores cada uno.

Pero si se observan los números 3, 5, 7, etc. tenemos que: 3 = 1 + 1 + 1 = 3 x 1   3:3=1   3:1=3
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 x 1
7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 x 1

El único sumando igual en que pueden descomponerse estos números es la unidad y, por consiguiente, sus únicos factores y divisores son la unidad y el mismo número. A éstos se les llama números primos. Es fácil hallar los números primos comprendidos en- tre los cien primeros números examinando las tablas- de la multiplicación que se presentaron al estudiar- esta operación. Los productos que sólo se obtienen - multiplicando po 1 y no vuelven a aparecer en la tabla, son números primos.

<u>DIVISIBILIDAD</u>.- El conocimiento de la estructura decimal de nuestro sistema de numeración y el- mecanismo de la multiplicación son la base para la - comprensión de la divisibilidad. Para conseguir que el alumno capte su marcha general y llegue por sí -- mísmo a las reglas de la divisibilidad, se puede proceder en la forma siguiente:

Se presenta un número cualquiera: 486, y se - analiza en sus órdenes de unidades: 486=400+80+6.

Se trata, por ejemplo, de la divisibilidad entre 2 y se observa que son divisibles entre 2 las cifras que representan sus distintos órdenes de - unidades. Luego, 486 es divisible entre 2.

4 : 2 = 2
8 : 2 = 4
6 : 2 = 3

Se presenta un número cuyos distintos órde--

nes de unidades sean divisibles entre 3.
Por ejemplo 963. Se analiza: 963 = 900 + 60 + 3
Se dividen sus órdenes de unidades: 9 : 3 = 3; 6 : 3 = 2 ; 3 : 3 = 1; luego, 963 es divisible entre 3.-

Otro caso: un número cuyos distintos órdenes de unidades en conjunto, sean divisibles entre 2 ó 3
Por ejemplo: entre 2, el número 124.
Se analiza: 124 = 100 + 20 + 4.- La cifra de las centenas no es divisible entre 2, pero en conjunto con las decenas sí lo es: 12 : 2 = 6.
La cifra de la unidades sí es divisible entre 2.

Con ejercicios variados el alumno podra deducir la ley general: "Un número es divisible entre otro, siempre que lo sean sus órdenes de unidades consideradas simplemente o en conjunto".

Consultando la tabla de multiplicar se deducirá la divisibilidad entre 5: "todo número terminado en 0 o en 5 es divisible entre 5".

Para deducir la divisibilidad entre 2 fórmese una serie ascendente de razón 2:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28..
Puesto que hemos comenzado con 2 y h emos agregado - siempre 2, todos estos números on divisibles entre 2
Obsérvese que todos terminan en 0 ó en par. Se deduce la ley: "un número es divisible entre 2 cuando -- termina en cero o en cifra par".

La divisibilidad entre 3.- Se observan algunos números como los siguientes, comprobando que según la ley general, son divisibles entre 3: 99, 33.

Obsérvese que la unidad seguida de ceros al dividirse entre 3, siempre da un resto 1.

10 : 3 = 3 x 3 + 1 = 9 + 1

100 : 3 = 33 x 3 + 1 = 99 + 1

Se analiza un número cualquiera, por ejemplo: 345

$345 = 300 + 40 + 5 = 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = (99 + 1) + (99 + 1) + (99 + 1) + (9 + 1) + (9 + 1) + (9 + 1) + (9 + 1) + 5 = (99 + 99 + 99) + (9 + 9 + 9 + 9) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5)$

Se ha descompuesto el número en dos partes: una, que es divisible entre 3, y la otra formada por: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5$, que es precisamente la suma de las cifras del número analizado: $3 + 4 + 5 = 12$. Si esta última parte, es decir, si la suma de las cifras del número es divisible entre 3, el número también lo es. Pruébese con otros ejemplos y aplíquese la ley general: "un número es divisible entre 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3".

FACTORIZACION.- Los caracteres de divisibilidad se aplican para hallar los factores de un número para lo cual se divide el número entre su menor divisor posible y el cociente se divide, a su vez, entre el menor divisor, y así sucesivamente. El número es igual al producto de todos sus divisores. Ejemplo: los factores de 130.

$130 : 2 = 65$ Su menor divisor es 2 y el cociente 65;

$65 : 5 = 13$ El menor divisor es 5 y el cociente 13.

$13 : 13 = 1$ 13 es número primo, su divisor es 13.

Los factores de $130 = 2 \times 5 \times 13$.

El procedimiento se puede simplificar cuando ya se ha adquirido suficiente práctica y se ha comprendido el mecanismo.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$130 = 2 \times 5 \times 13$ $\qquad$ $63 = 3 \times 3 \times 7$

OPERACIONES CON FRACCIONES DECIMALES.

Las operaciones con fracciones decimales deben realizarse simultáneamente con el conocimiento - de estas nuevas unidades.

La adición y la sustracción no ofrecen dificultades, puesto que el alumno ya ha comprendido que sólo puede sumar y restar unidades del mismo orden.

MULTIPLICACION.- En la multiplicación con números enteros hemos dado el concepto abstracto del multiplicador: "solamente indica el número de veces- que se repite el multiplicando". Por consiguiente, - la multiplicación de un decimal por un entero no presenta dificultad.:

2 veces .35 = .35 + .35 = .70 .35 x 2 = .70

Obsérvese que al multiplicar por un número- mayor que la unidad, el producto va siendo cada vez mayor y que al multiplicar por un número menor que- la unidad, el producto va siendo cada vez menor que- el multiplicando:

1 x 15 = 15; .1 x 15 = 1.5; .01 x 15 = .15; etc....

E stos razonamientos conducirán al concepto- general de la multiplicación, como la operación que- consiste en hallar un número (producto) que tenga - con el multiplicando la misma relación que el multiplicador tiene con la unidad. Si el multiplicador es 3 (tres veces la unidad) el producto contiene 3 veces al multiplicando; si el multiplicador es .1 (la- décima parte de la unidad) el producto es la décima- parte del multiplicando.

Deberán hacerse bastantes ejercicios para--- confirmar lo anterior.

Estos ejercicios preparan para la comprensión del nuevo significado del signo X. Cuando se multiplica por un número decimal ya no puede interpretarse como las veces que se repite el multiplicando como sumando, sino indica hallar partes iguales del multiplicando. De aquí que la expresión: .3 x 150 se traduce por .3 de 150.

DIVISION.- Habiendo presentado la división como la operación que consiste en hallar uno de los factores cuando se conoce el producto y el otro factor, para deducir las reglas de la división de decimales, se puede proceder en la siguiente forma:

¿Es posible dividir 4 decenas entre 5? No. Entonces se dividen las 42 unidades entre 5. Son 8 unidades sobrando 2. Se escriben las 8 unidades en la columna de las unidades y el residuo 2 en la misma columna, puesto que son también unidades. Se suman las 5 décimas y tenemos 25 décimas, que dividido entre 5 toca a 5. Se escribe el punto decimal en la columna del punto del dividendo para separar las décimas de las unidades enteras.

```
      8.5
5 / 42.5
     2.5
       0
```

Para la división de un entero entre un decimal o de un decimal entre otro decimal, se hacen ejercicios para demostrar que un cociente no se altera si se multiplican o dividen el dividendo y el divisor por el mismo número:

12 : 4 = 3   (12 x 10):(4 x 10) = 3   (12 x3):(4 x 3)=3

12 : 4 = 3   (12 : 10):(4 : 10) = 3   (12 :2):(4 : 2)=3

Se presentan divisiones de un entero entre un decimal. Ejemplo: 12 : .4 La operación se hace más fácil si se convierte el divisor a entero, aplicando la propiedad anterior, multiplicando por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. En el presente ejemplo se multiplica por 10 y la operación se reduce a dividir 120 : 4 = 30.

La división de un decimal entre otro decimal, se razona en la misma forma.

FRACCIONES COMUNES.

Las fracciones para su comprensión exigen numerosos ejercicios de manipulación, observación y comparación que requieren ciertos conocimientos de los números enteros y su operatoria. En la enseñanza de los números decimales, iniciamos el concepto de unidad fraccionaria que utilizaremos también para el conocimiento de fracciones comunes.

En grados anteriores (a partir del primero) se habrán realizado actividades de manipulación y comparación: partición de objetos (hojas de papel, varillas, alambres, etc.) en partes iguales, 2, 3, 4, se habrán comparado las partes resultantes y se habrán comprobado los siguientes razonamientos: a) un entero es siempre mayor que cualquiera de sus partes; b) para formar el entero es necesario juntar todas sus partes; c) a medida que el entero se divide en mayor número de partes, éstas son menores; d) los conceptos anteriores sólo son válidos si la división del todo es, precisamente, en partes iguales.

Posteriormente, se habrá conocido la nomenclatura de los términos de una fracción: denominador, como el número que indica las partes en que se divide el todo, y numerador, que indica el número de partes que se toman en el caso.

... operatoria con fracciones comunes es muy importante la obtención de fracciones equivalentes. Para el caso, y siendo las fracciones divisiones indicadas, se aplicarán los principios señalados para esta operación, en el caso de la división entre números decimales: "si ambos términos, numerador y denominador, de una fracción se dividen (si esto es posible) o se multiplican por un mismo número, se obtienen fracciones equivalentes".

<u>OPERACIONES CON FRACCIONES COMUNES</u>.- "La suma y la resta pueden presentar los siguientes casos: a) suma o resta de unidades fraccionarias de igual denominador; b) suma o resta de fracciones de igual denominador; c) suma o resta de unidades fraccionarias o fracciones con distinto denominador.

Para lós casos a y b se deduce la regla analizando los términos para llegar a la conclusión de que se opera con los numeradores y se traslada el denominador.

Para los casos c, se aplica el procedimiento de homogeneización de fracciones y se procede como en los anteriores.

<u>MULTIPLICACION</u>.- Los casos de multiplicación de fracciones comunes pueden resolverse aplicando los criterios que se usaron para la multiplicación de números decimales.

<u>NUMEROS INVERSOS</u>.- En los grados superiores de la escuela primaria es conveniente utilizar los números inversos para la explicación de la división de números fraccionarios. Obsérvense las siguientes expresiones:

$2 = 1 + 1 = 2 \times 1 \quad \frac{1}{2} =$ la mitad de $1 = 1 : 2$

$3 = 1 + 1 + 1 = 3 \times 1 \quad \frac{1}{3} =$ la tercera parte de $1 = 1:3$

Así se llega a la conclusión de que: 2 x 1 y 1 : 2;- 3 x 1 y 1 : 3; 4 x 1 y 1 : 4 indican conceptos inversos de los números 2, 3, 4. Por consiguiente, el inverso de 2 es $\frac{1}{2}$, el inverso de 3 es $\frac{1}{3}$ el de 4 es $\frac{1}{4}$. etcétera; de donde se deduce que el inverso de un número entero es la unidad fraccionaria cuyo denominador es dicho número y el inverso de la unidad fraccionaria es un entero igual al deniminador de esa fracción. Por deducción se obtiene que, el inverso de una fracción, es la fracción invertida.

DIVISION DE FRACCIONES COMUNES.- Todas las dificultádes de la división de números fraccionarios se pueden resolver aplicando la ley de los números recíprocos o inversos: dividir entre un número equivale a multiplicar por su recíproco.

o

CAPITULO II

DIDACTICA DE LA GEOMETRIA.

LAS MAGNITUDES GEOMETRICAS. CUERPOS.- La enseñanza de la geometría debe comenzar por el conocimiento de los cuerpos. Desde los primeros grados sehan de presentar, para su observación y manipulación, cuerpos cualesquiera, geométricos y nó geométricos,- grandes o pequeños, duros y suaves, etc. Se observará que todos tienen una característica común: todos- están formados de algo, todos están formados de materia. Se habrá hecho la comparación entre cuerpos geométricos y nó geométricos para llegar al concepto de éstos. Así como en aritmética se llega a la abstracción del número por medio de la observación y manipulación de objetos, en geometría, para llegar a la -- abstracción de las magnitudes geométricas, es necesaria la observación y manipulación de cuerpos de materiales diversos. Esta observación y manipulación llevará al conocimiento de: cilindro, cono y esfera, así como cuerpos poliedros.

SUPERFICIE.- Ya se ha dicho que todos los -- cuerpos son porciones limitadas de materia, pero hay otra característica que tienen todos: un límite, su superficie. La superficie nó puede, por lo tanto, -- aislarse del cuerpo. Cualquiera representación aislada, como por ejemplo, una hoja de papel, por muy pequeño que sea su espesor, lo tiene, y ocupa un lugar en el espacio, luego, es una representación artifi-- ciosa. Por eso, para llegar al concepto de superfi-- cie, es necesario que los alumnos palpen la superficie de los cuerpos que ya conocen para que establezcan la diferencia entre superficies planas y curvas.

LINEA.- El paso siguiente será observar que también las superficies están limitadas: observando los cuerpos poliedros se comprobará que las caras se unen de dos en dos. Observando las aristas de los poliedros y la intersección de la superficie lateral y las bases del cilindro o la base del cono, establecerán la diferencia entre línea recta y línea curva.

PUNTO.- Manipulando los cuerpos, los alumnos observarán que las aristas también se unen en un punto. Se representará gráficamente el punto como la intersección de dos líneas o como la señal que deja sobre una superficie la punta de un lápiz.

POSICIONES.- En sus artículos pedagógicos, el maestro Carlos A. Carrillo dice: "al niño se le enseña lo que es línea vertical, línea horizontal, líneas perpendiculares, líneas paralelas. Qué sólo las líneas pueden ser verticales, horizontales, perpendiculares, paralelas? No lo son también los cuerpos considerando su posición en el espacio o la que tienen entre sí?".

Se sugiere que, tomando en cuenta estas observaciones, se derive la enseñanza de las posiciones de las líneas, de los cuerpos y superficies, utilizando para ello la plomada y el nivel de agua. Luego se harán comparaciones: los muros de los edificios son verticales; el piso es horizontal; la escalera se coloca inclinada, etcétera.

Con ejercicios de doblado y trazo en papel, se llegará al conocimiento de las posiciones de las líneas entre sí: perpendiculares, oblicuas, paralelas.

ANGULOS.- Desde el Segundo Grado, el programa de geometría incluye la noción de ángulo como resultado del giro de una varilla alrededor de uno de sus extremos y a partir de una determinada posición inicial. La magnitud del giro determinará un ángulo recto, agudo u obtuso, cuyos conceptos se darán a conocer posteriormente, así como la concepción abstracta de ángulo como formado por dos líneas que se intersectan en un punto.

FIGURAS PLANAS.- Desde los primeros grados de la escuela primaria el alumno adquirirá nociones de las figuras geométricas planas: cuadrado, círculo rectángulo; posteriormente adquirirá las nociones de triángulo y los polígonos regulares.

REVISION DE CONCEPTOS.- A partir del Tercer Grado, el escolar se inicia propiamente en el estudio de la geometría. En los primeros grados se llegó al concepto de las magnitudes geométricas partiendo de los cuerpos para llegar, por análisis, a la superficie, como límite de los cuerpos; ala línea, como la intersección de dos superficies y el punto como la intersección de dos líneas.

Después de repetir actividades como las indicadas, para revisar estos conceptos, es conveniente llegar por nuevas vías, desde los puntos de enfoque a los mismos conceptos. Se procede, pues, por vía de síntesis, a conducir las actividades para llegar al concepto de las magnitudes geométricas, a partir del punto.

Se sugieren las siguientes actividades: se coloca una hoja de papel sobre una superficie porosa (un pliego de lija), se traza sobre la hoja de papel una línea, observar que la línea no es más que una sucesión de puntos; observar que la trayectoria que deja un punto luminoso en la obscuridad nos lleva a deducir que: la línea resulta del movimiento de un punto!, y que la dirección de ese movimiento engendra líneas rectas o líneas curvas.

Se desliza una barra de gis en el pizarrón para reflexionar acerca de que la superficie que se ha dibujado es una sucesión de líneas, que la superficie !se ha engendrado por el movimiento de una línea!.

GENERACION DEL CUERPO.- Se ha dicho que el punto, la línea, la supercicie, no existen fuera del cuerpo, que no pueden aislarse de éste. La generación del cuerpo sólo puede demostrarse suponiendo que existiese una superficie en las condiciones en que se ha dicho que no puede existir. Tendremos que admitir la representación más aproximada, que es una hoja de papel. Si se superponen hojas iguales (superficies) obtenemos un cuerpo. Llegamos al concepto de cuerpo como resultado de una superposición de superficies. Para llegar a la generación del cuerpo, por el movimiento de una superficie, se desliza un disco sobre un eje. Si el movimiento es rápido dejará la impresión de un cuerpo.

PERIMETROS Y AREAS DE LOS POLIGONOS.

Se recomienda que en cuanto el alumno se inicie en el conocimiento de las medidas del sistema métrico decimal, aplique este conocimiento para hallar perímetros de las figuras que conoce. Estos cálculos deben iniciarse con situaciones problemáticas reales. Para calcular perímetros es necesario el concepto de lo que significa medir. Puede conducirse el procedimiento por medio de las siguientes actividades: a) - plantear situaciones que se resuelvan comparando longitudes; b) conducir a los alumnos a comprender la - necesidad de emplear un término medio de comparación (metro); c) expresar con símbolos numéricos dichas - longitudes; d) medir otras longitudes empleando decímetros, centímetros y milímetros.

Después de estas actividades, pueden realizarse mediciones del contorno de superficies conocidas. Siempre con una aplicación del sistema métrico-decimal, se trazarán las líneas que representan los-perímetros de las figuras (suma de segmentos rectilíneos). Estas actividades servirán para que en los -- grados superiores, al plantearse la situación de resolver perímetros de polígonos regulares, los alumnos deduzcan que es suficiente medir un lado y multiplicar la longitud por el número de lados del polígono. Cuando se les presente la situación de hallar el perímetro de un polígono irregular, no tendrán dificultad en comprender que tienen que sumar las longitudes de los lados. Se deducirán las fórmulas para - los primeros casos y se harán ejercicios de aplicación.

El área es el cálculo de lo que mide una superficie. A este concepto se llegará después de variadas actividades de medición y comparación de superficies, utilizando el trazo de cuadrados en dichas superficies y haciendo el conteo. Se conducirán las actividades para llegar a la conclusión de que - el área de una superficie se halla comparando cuántas veces cabe en ella otra superficie que se toma - como unidad (milímetro cuadrado, centímetro cuadrado decímetro o metro cuadrado). Recordar que la unidad de superficie es un cuadrado que mide una unidad de longitud por lado.

Mediante variados ejercicios se obtendrá, -- por deducción, la fórmula aplicada para el área del cuadrado: lado por lado; del rectángulo: largo por ancho; del triángulo, considerado como la mitad de un cuadrado o de un rectángulo: base por altura sobre dos, para proseguir con la fórmula para la obtención del área de polígonos de más de cuatro lados: el perímetro por la apotema, sobre dos.

Es importante que el alumno llegue a la obtención y comprensión de las fórmulas mediante un razonamiento y nó solo mecánicamente.

Motivo de un procedimiento especial es la medición de la longitud de la circunferencia y la obtención del área del círculo. Para el caso se sugieren las siguientes actividades: a) trazar la circunferencia; b) tratar de medir su longitud haciendo coincidir un hilo con dicha circunferencia; c) observar las dificultades que deriva el procedimiento; d) hacer sentir a los alumnos la necesidad de llegar a alguna fórmula para resolver esta cuestión como se ha hecho con las figuras estudiadas anteriormente; e) trazar un exágono inscrito; f) conducir la reflexión hacia el hecho de que perímetro del exágono es menor que la circunferencia y contiene 6 veces el radio o sea 3 veces su diámetro; f) trazar un cuadrado circunscrito a la misma circunferencia; g) conducir la reflexión de los alumnos hacia el hecho de que el perímetro del cuadrado es mayor que la circunferencia y contiene 4 veces su diámetro; h) deducir que la longitud de la circunferencia es mayor que tres veces su diámetro y menor que cuatro veces el mismo-diámetro, es decir, será un número comprendido entre 3 y 4; i) decir que ese número no es exacto, que se-representa con la letra griega pi y que tiene un valor de 3.1416; j) llegar a la conclusión de que para hallar la longitud de la circunferencia se multiplica su diámetro por 3.1416; k) comprobar que puede -- darse a pi un valor de veinte séptimos.

Para llegar a la obtención de la fórmula para el área del círculo se puede proceder: a) hallar-el área del exágono inscrito; b) trazar polígonos cada vez con mayor número de lados y observar cómo su-área se acerca cada vez más a la del círculo; c) conducir al concepto de círculo como un polígono de infinito número de lados; d) deducir que para calcular el área del círculo se aplica la misma fórmula que - para los polígonos; f) deducir de la fórmula: A = -- circunferencia por radio sobre dos, que como la fórmula de la circunferencia, es C=2pi por radio, al multiplicar por r y dividir entre 2, tendremos:

$$A = \frac{2pi\ r\ r}{2} \quad = \quad A = pi\ r^2$$

VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS.

Se llegará al concepto de volumen considerándolo como el espacio que ocupa un cuerpo. La unidad-de volumen es un cubo y los volúmenes se miden en unidades cúbicas: milímetro cúbico, centímetro cúbico decímetro cúbico o metro cúbico.

Mediante la observación y manipulación dirigidas por el maestro, se llegará a la obtención de - las fórmulas aplicables para el cálculo de volúmenes de prismas, conos, cilindros y esferas.

———o———

C A P I T U L O III

LA NUEVA MATEMATICA

Frecuentemente, la educación tradicionalista está siendo discutida. En la Matemática, por ejemplo se habla de una "Matemática moderna", pero, en realidad, no existe tal matemática moderna, es la misma - matemática de siempre. Pero se habla de cambio, de - una necesidad de cambio, de una actualización del hacer pedagógico. Lo cierto es que estos cambios se - enfocan a la didáctica de la matemática, en la manera de aprender matemática.

Trataremos de ir comprendiendo los defectos, las insuficiencias y los errores de la educación tradicionalista apoyándonos, precisamente, en la Matemática.

E s preciso que el cálculo de antaño ceda el paso al "estudio de la matemática" desde la infancia En nuestra época se hace necesario educar a los niños en la comprensión de la matemática y sus aplicaciones. Esta evolución tendrá, inevitablemente, numerosos efectos y los docentes no podemos continuar - desconociendo los problemas que, en consecuencia, se nos plantearán en el aspecto pedagógico.

Se puede afirmar que la Matemática, como ~~---~~ gran valor formativo, como área de pensamiento, presenta particularmente una gran posibilidad de cambio. Es en la Matemática y en la Lengua donde hemos estado impartiendo una enseñanza a base de mecanicismos y de reglas memorísticas. Es necesario cambiar para que el niño, en lugar de ser un operador- aritmético, llegue a ser un "pensador matemático"--

Trabajar en la educación de tal manera que se comprenda la relación entre la realidad y la Matemática, entre la realidad y pensamiento y lenguaje. Que se estructure el pensamiento sobre la base de los hechos reales y su armonía con los hechos científicos construidos por el pensamiento humano. Eso es lo que se pretende llamar matemática moderna. Y para ejercer una eficaz labor de maestro en ese terreno, no hace falta estudiar una nueva matemática (que no existe) sino, ante todo, adoptar decididamente la nueva actitud didáctica que es constructiva del pensamiento, y trabajar denodadamente por dominar una nueva técnica didáctica que represente una ayuda para formar el pensamiento de cada niño.

La nueva didáctica de la matemática debe consistir en una nueva técnica de trabajo en la escuela, que permita y ayude al niño a aprender a "pensar matemáticamente" y no sólo a operar mecánicamente. Es decir, que el niño piense la matemática, y con ello, vaya aprendiendo a pensar mejor, a adquirir con la práctica mejores técnicas de pensamiento; que vaya descubriendo por sí mismo los hechos matemáticos para aplicarlos a resolver sus problemas reales.

Para conseguir todo esto el maestro no debe limitarse a explicar la matemática sin más ni más; debe poner los hechos matemáticos como hechos reales a descubrir, como situaciones reales a investigar y luego participar con el niño en la investigación, ayudar al niño con sencillez y comprensión para que el propio niño encuentre el camino y descubra esos hechos matemáticos. O sea, en lugar de ser un simple transmisor de conocimientos transmitidos, el maestro debe ser creador de acciones vivas de investigación y descubrimiento en las que participen todos los niños de-su grupo. Una vez planteada la acción, toda la actividad es del niño, nó del maestro. El niño debe ser quien realice la investigación, quien descubra la solución. Para que el niño no fracase, para que no se desanime antes de llegar al descubrimiento, para eso está allí el maestro, apareciendo como partícipe de la investigación, sugiriendo ideas de búsqueda en el momento preciso, animando al que se descorazona, guiando con modestia y cariño al que se despista.

Esto quiere decir que no se puede dejar a los niños solos porque entonces es probable que no descubran nada; pero tampoco se trata de que el maestro lo dé todo hecho y de que los niños permanezcan allí, quietecitos, escuchando. E sto es lo que hemos venido haciendo, y no es ese el camino de la nueva didáctica.

<u>CONJUNTOS</u>.- Muchos maestros se preguntan todavía porqué es necesario estudiar los conjuntos para estudiar los números. Diremos entonces que ello resulta necesario para el aprendizaje del niño, porque si queremos proporcionarle una mejor comprensión del concepto de número, es preciso que el camino que conduzca a él permita descubrir sus diferentes aspectos. El conjunto, del que nos va a interesar su concepto matemático operativo, será un precioso instrumento de pensamiento para comprender las teorías de la Matemática.

Pero no podemos proponer la teoría de conjuntos como una "fórmula mágica" para el aprendizaje y descubrimiento de la teoría matemática; no pretenderemos subrayar el tratado de conjuntos como el indispensable, el óptimo recurso; será el maestro, independientemente de todo lo que digamos los demás, el-que afirme o niegue si la teoría de conjuntos le sirve, si le ayuda a construir su acción, si la hace más sencilla, más clara, más operativa.

LOS PRIMEROS PASOS.- Se tratará, sobre todo el comienzo, de jugar con los conjuntos. Si el niño va a trabajar con materiales que no conoce, como los juegos lógicos de Dienes, u otro nuevo para él, démosle una etapa de juego libre, un tiempo en el que él haga con las piezas lo que quiera. Cuando se considere cubierta esta etapa, comenzamos a sugerir acciones que debe realizar el niño. El conjunto, mundo conceptual muy próximo a la realidad, nos va a permitir promover procesos de pensamiento de gran sencillez y seguridad. Se puede sugerir al niño que forme conjuntos sencillos con corcholatas, hojas de un árbol, fichas rojas, etcétera. El niño forma su conjunto, no es que acepte el conjunto formado por otros. Y lo más importante: está pensando en lo que está haciendo. El proceso de pensamiento seguido por el niño es lógico y seguro. Se ha apropiado un criterio operativo que nosotros le hemos sugerido: el de hojas de árbol, el de fichas rojas; en función de ese criterio ha hecho una selección, ha tomado una decisión y se encuentra tan seguro y tan firme en ella que, si usted la discute, la defiende. Este es el hermoso intento de la nueva didáctica: la plena participación del niño, que él construya su propio pensamiento, que lleve a la práctica su propia decisión. Los conocimientos matemáticos que él debe incorporar son los mismos: la matemática que la Humanidad conoce, pero se trata de hacerlo de otra manera.

Conforme el niño avanza en sus respuestas a las acciones propuestas, se le van complicando las -

tareas del pensamiento sugiriéndosele más de un criterio operativo (fichas cuadradas y redondas), criterios simultáneos para el mismo conjunto (fichas azules y redondas), más complicado: (piezas rojas, redondas, grandes), etcétera. Así llegará el alumno al descubrimiento del conjunto unitario y del conjunto vacío, conceptos en los que todavía muchas personas vacilan, por partir de un intento equivocado de definición. Y es que aprenderse una definición no es construir el concepto. Este era otro de los errores de la didáctica tradicional. "Aprender" a la antigua manera era más bien "copiar", "imitar", pero no interiorizar, no incorporar a la propia riqueza de pensamiento y de acción los valores que cada uno vaya encontrando.

<u>EL LENGUAJE MATEMATICO</u>.- Vamos a tratar de que el niño comience a inventar el lenguaje matemático; que comience a expresar sus ideas en un lenguaje formal, que sienta la necesidad de hacerlo y lo haga. Le proponemos en un momento dado: ¿Podríamos formar conjuntos de cosas que no se ven, de personas que no están aquí? Cómo lo haríamos? Por ejemplo: los primos que tiene Pepe son Luis, Antonio y Rubén y no están aquí. ¿Cómo podríamos representar este conjunto para verlo siempre que quisiéramos? Posiblemente en una hoja de papel pondrán los nombre o dibujarán unos muñequitos que representen a los primos de Pepe. Pero, ¿Y si ponemos nosotros otro nombre que no es, por ejemplo, Juan, o pintamos otros muñequitos al lado? Seguro que los niños pintan un mecate encerrando sólo lo que son y dejando fuera a los que no son. ¿Sabe usted lo que están haciendo los niños?

Están inventando el diagrama de Euler-Venn! Acaban de dar un paso esencial en la Matemática: están empezando a expresar sus operaciones en lenguaje

55884

matemático. Es importantísimo: en el momento en que podemos expresar un pensamiento, un proceso, una situación, en un lenguaje formal de símbolos, estamos alcanzando el pensamiento matemático, el concepto matemático de ese concepto.

En este caso, el concepto matemático de conjunto. Y esto va a facilitar enormemente las operaciones de pensamiento. Podremos ahora expresar conjuntos muy difíciles como por ejemplo: de pájaros amarillos, de estrellas azules, de animales blancos.

PAJAROS AMARILLOS   ESTRELLAS AZULES   ANIMALES BLANCOS

EL SIMBOLO.- A una cierta edad del niño, en que podemos pedir mayor formalización del pensamiento, podemos buscar otras maneras de decir lo mismo:

{PAJAROS AMARILLOS}   {ESTRELLAS AZULES}

Para alumnos mayores aún (Quinto y Sexto Grados) podemos formalizar aún más la expresión:

$P = \{x/x \text{ es animal blanco}\}$ $E = \{x/x \text{ es estrella azul}\}$

Esto quiere decir: P es un conjunto de elementos x cualesquiera, pero precisamente aquellos elementos que son pájaros amarillos, o estrellas azules o animales blancos, y se lee: P es un conjunto de x en el que x es un pájaro amarillo.

El objeto de introducir varias formas simbólicas para expresar un mismo concepto debe ser muy claro: se quiere evitar que al niño le ocurra lo que a nosotros (y es, también, culpa de la didáctica tradicional) que confundimos el concepto con el símbolo.

RELACION FUNDAMENTAL DE LA TEORIA DE CONJUNTOS.

Vamos a tratar de inventar la "relación de -

pertenencia" que es, entre otras cosas, la relación fundamental de toda la teoría de conjuntos. La invención de esta relación es ya posible para los niños de seis a ocho años. Su utilización rigurosa se irá perfeccionando hasta la Matemática superior. Podemos formar un conjunto cualquiera, digamos, de fichas azules. Ahora podemos preguntar: ¿Qué relación tiene con el conjunto esta ficha azul? ¿Y esta otra amarilla? Las respuestas pueden ser, que está adentro, que está afuera, que ésta es del conjunto, que ésta no lo es, etc. Nosotros podemos empezar a usar la palabra justa, el término correcto: "que éste pertenece", "que éste no pertenece". Después de repetidos ejercicios que conduzcan a la afirmación del concepto, se planteará el problema de simbolizar, en forma sencilla, en forma matemática, la relación de pertenencia, hasta llegar a la aceptación del símbolo que se acepta como resultado de un criterio unificado:

$\in$ para "pertenece a" $\notin$ para "no pertenece".

Simbolizar antes de tiempo bloquea el pensamiento. Simbolizar en el momento preciso en el que surge la necesidad de hacerlo, facilita enormemente las tareas del pensamiento.

LAS OPERACIONES DE LA MATEMATICA.- Trataremos ahora de la intersección de conjuntos. Mediante la comparación de variados casos de conjuntos, se conducirán las acciones a que el niño descubra, en muchos casos, que hay elementos que pertenecen a la vez a dos o más conjuntos. Están en la intersección de esos conjuntos. Por lo tanto, los elementos que pertenecen a la vez a dos o más conjuntos, forman el que se llama "conjunto intersección". Se procederá a

continuación al simbolismo de esta operación. Por E-
jemplo: tenemos el conjunto A = fichas azules
el conjunto B = fichas redondas
Refiriéndonos a las fichas que son a la vez azules y
redondas formaríamos el conjunto intersección, así :
A intersección B, y ya usando el símbolo: $A \cap B$
Hemos ampliado el vocabulario matemático con nuevas-
palabras y símbolos.

UNION DE CONJUNTOS.- Lomismo podríamos plan
tearnos investigar, con acciones reales, la unión de
conjuntos. Y ello será la base para comprender con -
toda claridad y dominio la ley de la suma y de la --
resta. Muy probablemente, el hombre aprendió a sumar
uniendo conjuntos.

Dos conjuntos cualesquiera pueden unirse; no
hay más que juntarlos en un solo conjunto. El conju
to resultante se llama "conjunto unión" y se simboli
za de la siguiente forma:

Tenemos el conjunto A = fichas azules.
el conjunto B = fichas redondas.
El conjunto unión = fichas azules o redondas. Para -
la unión de conjuntos, el símbolo será: $A \cup B$.

La unión de conjuntos nos permite inventar -
con toda facilidad y seguridad la ley de la suma y -
sus casos más generales. El proceso inverso, que po-
dríamos llamar la desunión o separación de conjuntos
que hemos unido antes, nos permitirá inventar, con -
hechos reales, la ley de la sustracción.

Los problemas de intersección y unión de con
juntos y su resolución de una manera tan lógica y --
sencilla, nos permiten formalizar aún más el pensa--
miento y aplicarlos para tratar de descubrir eso de-

los conectivos lógicos "y", "o".

Al realizar la intersección de conjuntos obtenímos un nuevo conjunto cuyos elementos tenían la curiosa propiedad de pertenecer a la vez a dos conjuntos de origen. Apoyándonos en nuestro lenguaje matemático podemos decir esto más fácilmente:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } \in B\}$$

que podríamos leer: A intersección B es un conjunto x tal que x pertenece a A y también pertenece a B.

Y lo mismo para la unión. El conjunto resultante, el conjunto unión es tal que contiene todos los elementos de A y todos los de B. También hemos visto que si algún elemento está a la vez en A y en B también está en el conjunto unión, pero está una sola vez porque es un solo elemento, no son dos elementos. De igual modo podemos decir ésto más simplemente en lenguaje matemático:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } \in B\}$$

Así, tan sencillo, tan claro, se comprende que ambos son válidos ejemplos del uso de los conectivos "y" "o", que como se puede observar, es distinto del uso corriente de las conjunciones gramaticales "y", "o". Porque, en efecto, en el caso de la intersección, en que empleamos el conectivo "y", éste es exclusivo, es decir, excluye a todos los elementos que nó están a la vez en A y en B. En cambio, el conectivo "o" empleado en la unión, incluye a todos los elementos que están en A, a todos los elementos que están en B y a todos los elementos que están en los dos. Su uso matemático es, por lo tanto, inclusivo. Y esto es al revés de lo que suele hacerse en lenguaje corriente, donde la "y" incluye y la "o" excluye.

EL PRODUCTO CARTESIANO.- Este caso de la multiplicación tiene una importancia realmente notable,- ya que en los niveles de educación media superior, en la Matemática superior, se va a encontrar el producto cartesiano viniendo a facilitar la comprensión de problemas tan importantes como la teoría de funciones, - estructura de grupo o cálculo infinitesimal.

En la práctica, el producto cartesiano de conjuntos puede hacerse de varias maneras:

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y

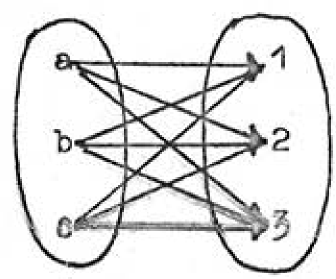
$B = \{1, 2, 3\}$

Hagamos el producto cartesiano A x B:

en diagrama cartesiano

B \ A	a	b	c
1	a,1	b,1	c,1
2	a,2	b,2	c,2
3	a,3	b,3	c,3

en diagrama de Venn



o directamente, formando A x B = (a,1) (a,2) (a,3) (b,1) (b,2) (b,3) (c,1) (c,2) (c,3)

Se pueden sustituir las letras y números por- niños y niñas, por figuras, por corcholatas de distintos colores, etc. y dar todo el realismo posible a la acción. La manera como hagamos el producto cartesiano no es lo importante. El diagrama cartesiano es más fácil para niños pequeños. Hacer directamente los pares será ya posible para alumnos de quinto y sexto grados (después de haberlo hecho de los otros modos en cur-- sos anteriores). Lo importante es obtener en cada caso, un nuevo conjunto, y que este conjunto esté formado por pares ordenados.

A x B NO ES IGUAL QUE B x A.- Los elementos-del conjunto producto tienen una parte (la primera) del primer conjunto, y otra parte (la segunda) del - segundo conjunto. Por eso no es lo mismo A x B que - B x A. El producto cartesiano de conjuntos no tiene- la propiedad conmutativa, (aunque sí la tenga el producto de números abstractos).

PARA LLEGAR AL CONCEPTO ABSTRACTO DE NUMERO.

Incuestionablemente, después de haber manejado las operaciones con conjuntos: intersección, u - nión y producto cartesiano, se habrán conducido las- actividades al descubrimiento de otros conceptos que son también de importancia capital: correspondencias y relaciones. La comprensión de estas cuestiones nos conducirán, entre otras cosas, a inventar el número- natural y a comprender ideas tan importantes para toda la ciencia como son la ORDENACION y la CLASIFICACION.

Desde los primeros grados de la primaria el- niño puede aproximarse a estos conceptos fundamentales. Con un material manipulable cualquiera, por --- ejemplo, los bloques lógicos de Dienes, planeamos la acción real; que los niños formen conjuntos separados con el mismo número de elementos. Se harán combinaciones y comparaciones hasta llegar a la idea de - que a cada elemento de un conjunto "corresponde" un- elemento del otro conjunto. Con variados y abundantes ejercicios se llegará a la conclusión de que ambos conjuntos se corresponden perfectamente porque - tienen una característica común: la misma cardinalidad, el mismo número. Poco a poco se van introduciendo las palabras y los signos.

Estas acciones permitirán crear las condiciones para cuantificar, posteriormente, cuando al niño se le presente un conjunto de 4 pulgas y un conjunto de 3 elefantes, haciendo correspondencias, sabrá que son "más" las pulgas "que" los elefantes, pero no -- por el tamaño, evidentemente.

Analicemos el proceso sicológico que está siguiendo el niño: pasar del pensamiento cualitativo,- (lógico) al pensamiento cuantitativo (numérico).

Se puede perfeccionar y afinar todavía más - el concepto operativo de correspondencias, según van avanzando los niños y se verá cómo ellos, con toda - facilidad, establecen los cuantificadores lógicos -- "más que", "menos que" y "tantos como", si han entendido bien las correspondencias.

En el Tercer Ciclo de la escuela primaria, - se hará un análisis más minucioso y formal para llegar a la comprensión de: correspondencias unívocas,- correspondencias no unívocas y correspondencias biunívocas.

Otro camino operativo para seguir construyendo con facilidad y seguridad el concepto de número,- nos lo ofrece la relación. Una relación es una especie de correspondencia dentro del mismo conjunto.

Si investigamos en un conjunto, podemos en-- contrar que todos sus elementos están relacionados - entre sí, o que algunos de ellos están relacionados- en cierta forma. Por ejemplo, en las fichas de Die-- nes encontramos que las piezas están relacionadas -- por el color, la forma, por el tamaño; porque encontramos que algunas de ellas tienen el mismo color, - el mismo tamaño o la misma forma. Podemos, entonces, definir entre ellas la relación...tiene el mismo color que, o bien...tiene la misma forma que...

Para definir una relación, debemos organizar un criterio operativo: la misma forma, el mismo color, etcétera. Con otros criterios operativos resultarán las relaciones...es más que o...es menos que.

Ahora bien, si manejamos otro criterio, por ejemplo, de la cantidad y tratamos de establecer relaciones...tiene la misma cantidad que...y esto puede hacerse aún entre conjuntos aparentemente sin ninguna relación, hemos llegado al concepto de "número".

Pues bien, el número, como criterio operativo, es tan importante y tan general que vale para toda clase de conjuntos. Y es tan abstracto que puede funcionar cualesquiera que sean los elementos implicados.

COMO REPRESENTAR EL CONCEPTO DE NUMERO.- Tenemos el concepto de número. Sabemos que cada conjunto pertenece a una clase, que hay un número que corresponde a esa clase. Entonces, nos enfrentamos al problema de representar ese concepto, de darle una forma visible, comprensible y clara.

Podemos expresar que ya existen signos aceptados universalmente para representar esos conceptos y que, de cualquier modo, hubiéramos podido representarlos en cualquiera otra forma: con un dibujito, y la palabra que nos diera la gana, y que la única ventaja de admitir, por ejemplo, el signo 4, es la que se menciona al principio del párrafo, es que hay un convenio generalizado y admitido en todo el mundo. Pero no hay otra razón para que no fuera cualquier otro.

Ahora bien, si discutimos la cuestión: ¿Cuántos conjuntos hay? ¿Cuántas clases de conjuntos hay desde el punto de vista del número? Enseguida vemos que hay muchas, que en realidad son infinitas, !y a- cada uno corresponde un número! Ocho casas, mil setecientos aviones, doscientos mil árboles, etc. Si tuviéramos que adjudicar una palabra y un signo distinto para cada clase, la cosa sería demasiado complicada. Entonces el hombre, poco a poco, fue construyendo un sistema que le permitiera expresar cómodamente esos números grandes. Esto, desde luego, es convencional, y los hombres han tenido y tienen diferentes sistemas según las culturas. Los egipcios tenían su sistema, los mayas el suyo, los árabes el suyo. El sistema que nosotros usamos mecánicamente, sin pensar, ya que nos es conocido, consta solamente de diez signos que corresponden a los nueve primeros números y al cero. A partir de aquí organizamos esos diez signos según ciertos criterios formales y ello nos permite representar números cualesquiera.

En los grados precedentes de la escuela primaria (Primero a Cuarto), se habrán realizado actividades de "construcción" de números, utilizando, desde luego, el mejor recurso para ello: la idea de conjunto, de agrupamiento, de "formación de paquetes", siempre con base en diez, de acuerdo a nuestro sistema de numeración, y se habrá descubierto el concepto de "posición" y "valor posicional", y "potencias sucesivas de la base".

Para alumnos de Quinto y Sexto Grados se podrá explicar de manera más formal la estructura de un número, como un polinomio ordenado de potencias sucesivas de la base. Así:

$$87{,}243 = (8 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$$

ó tratándose de un número decimal:

$$26.4075 = (2 \times 10^1) + (6 \times 10^0) + (4 \times 10^{-1}) +$$

$(0 \times 10^{-2}) + (7 \times 10^{-3}) + (5 \times 10^{-4})$ y los exponentes $-1, -2, -3, -4$, continúan el polinomio ordenado de potencias de la base.

SISTEMAS DE OTRAS BASES.- Al descubrir la estructura del número en un sistema de posición, resulta que esta estructura es exactamente igual para todos los sistemas de posición.

Hemos visto que nuestro sistema decimal sólo tiene diez cifras, diez signos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y que las cifras se acaban justamente una antes de llegar a la base, que es diez. La siguiente es 10, uno cero. Eso es, justamente porque usamos un sistema decimal. Pues bien,¿porqué decimal? ¿Porqué diez? ¿porqué no ocho o seis, o cuatro? Probablemente por la sencilla razón que tenemos diez dedos en las manos y esto es un buen punto de referencia, pero esta es una razón anatómica, nó matemática. Pero tenemos nuestro sistema de base diez, todos nos entendemos con él, el convenio se ha extendido a todo el mundo, pues quedémonos con él. Sin embargo, debemos saber que podemos expresar un número en el sistema que nos dé la gana, en el que más nos convenga en cada momento.

Entre otras razones, esto será importante porque se llegará a la comprensión del sistema binario o de base 2, que es el que usan actualmente la mayoría de las computadoras, las máquinas de calcular de hoy y del mañana.

Nos conviene, en primer lugar, comprender eso de las bases. La base es el número que elegimos para formar los agrupamientos base, o sea, para pasar de un orden de unidades a otro.

LA BASE SIEMPRE ES 10 (UNO,CERO).- Si contamos por docenas (sistema de base doce), al llegar a 12, tenemos una docena, pero,¿Cuántas unidades más? Pues una docena y cero unidades, 10_{12}, porque, en sistema de base 12, 10 equivale a nuestro 12. $10_{12} = 12$ (se debe leer: uno cero en base doce es igual a doce en base diez). En lo sucesivo, al referirnos a la base diez no vamos a poner subíndice, se sobreentenderá que es base diez.

Si contamos ahora por minutos, al llegar a sesenta tenemos una hora y cero minutos: 10_{60} (uno cero en base sesenta) $10_{60} = 60$ en base decimal.
Y se discurre igual si contamos en base cinco, ocho, veinte, etcétera.

¿Cuántas cifras necesita un sistema? En un sistema de base cuatro, por ejemplo, sólo hay cuatro cifras: 0, 1, 2, 3, desaparecen el 4 y todos los que le siguen. En un sistema de base doce, como sólo llegamos al 10 (uno cero) cuando llegamos a doce, necesitamos inventar dos cifras más, por ejemplo:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &, #. A partir de aquí, repetiríamos: 10, 11,.......15....19...1&, 1#. (se recordará que en cualquiera otra base se lee: uno, cero, uno, dos; uno, cinco; etc.

La estructura de un número de cualquier base siempre se obtendrá en razón de las potencias sucesivas de la base. Este mismo procedimiento nos servirá para la conversión de números de otras bases, a nuestro sistema decimal.
Manejemos algunos ejemplos:

1010_2 (uno cero, uno cero en base dos) $= 1x2^3 + 0x2^2$

$1x2^1 + 0x2^0 = 1x8 + 0x4 + 1x2 + 0x1 = 8 + 0 +$
$2 + 0 = 10$

luego: $1010_2 = 10$

3104_5 (tres, uno, cero, cuatro en base cinco) =

$3x5^3 + 1x5^2 + 0x5^1 + 4x5^0 = 3x125 + 1x25 +$ -
$0x5 + 4x1 = 375 + 25 + 0 + 4 = 404$
así: $3104_5 = 404$

65_8 (seis, cinco en base ocho) $= 6x8^1 + 5x8^0 = 6x8 +$
$5x1 = 48 + 5 = 53 \quad 65_8 = 53$

12345_6 (uno,dos,tres,cuatro,cinco en base seis) =

$1x6^4 + 2x6^3 + 3x6^2 + 4x6^1 + 5x6^0 = 1x1296 +$
$2x216 + 3x36 + 4x6 + 5x1 = 1296 + 432 + 108 +$
$24 + 5 = 1865$

La operación inversa, o sea la conversión de- números de nuestro sistema a otras bases, se hace por- medio de divisiones sucesivas (una aplicación matemá- tica de hacer paquetes, de hacer agrupamientos), en-- tre el número que se ha escogido como base.

Convertir 10 a su correspondiente en base dos.

Dividimos diez entre dos (el resto es cero, que será- la primera cifra de la derecha del número buscado), - el cociente cinco se divide entre dos (el resto es -- uno, siguiente cifra a la izquierda); el cociente dos se divide entre dos (el resto es cero, tercera cifra- de derecha a izquierda); el cociente uno es la última cifra de la izquierda.

Veamos: primer resto: 0, segundo: 1; tercero: 0; cuarto: 1; último cociente: 1, que invirtiendo el orden queda: 1010. Luego: $10 = 1010_2$.

Expresar 404 en base cinco:

$$5 \,/\, \overline{404} \;\to\; 80, \text{ resto } 04 \qquad 5 \,/\, \overline{80} \;\to\; 16, \; 30, \text{ resto } 0 \qquad 5 \,/\, \overline{16} \;\to\; 3, \text{ resto } 1 \qquad = 3104_5$$

OPERACIONES.

A la altura del Tercer Ciclo de la Escuela-- Primaria, el alumno habrá madurado técnicas de traba jo y de pensamiento para inventar con mayor facili-- dad los algoritmos de las operaciones. (lo esencial- de su técnica)

Las operaciones con números tienen, por un - lado, un carácter lógico que nos permite inventarlas contruyendo procesos reales muy sencillos y lógicos- (Teoría de Conjuntos). Por otro lado, tienen una -g- gran complejidad práctica que se pone de manifiesto- en el momento en que tenemos que operar con números- grandes.

Es evidente que la base lógica de la suma es muy visible cuando unimos conjuntos pequeños y conta mos el conjunto unión. Y esta base lógica es la mis- ma si los conjuntos fueran, por ejemplo 76,587 y - - 98,789, sólo que sería muy poco práctico si, para ha cer esa suma,tuviéramos que buscar dos conjuntos de- esos elementos, unirlos y contar el conjunto unión.

Estas necesidades prácticas llevaron al hom- bre, hace muchos siglos, a buscar soluciones operati vas. Las soluciones fueron perfeccionándose en la -- práctica, transmitiéndose de generación en generaci- ón, simplificándose y complicándose a la vez. Y lo-- que era transmitido como más importante eran ya unas esquemáticas reglas prácticas para "operar", unos al goritmos para "hacer las operaciones". Esos algorit- mos eran y son importantes, sólo que era muy duro a- prendérselos de memoria: "se colocan los números u-- nos abajo de otros de tal modo que coincidan la co-- lumna de las unidades, las decenas, las centenas...

...se empieza a sumar (o restar, o multiplicar) por la primera cifra de la derecha...".

El objetivo máximo de la matemática era conseguir memorizar todas esas reglas, desde la suma -- hasta la raíz cuadrada, pasando por la multiplica--- ción, la división y los quebrados. Y apenas daba tiempo en toda la primaria.

Nuestros objetivos son ahora mucho más ambiciosos: queremos darle al niño valentía, un espíritu de decisión y de investigación; armas y técnicas de pensamiento; capacidades de elaborar y realizar decisiones para que pueda hacer en semanas, una tarea de siglos. Todo esto viene a cuento a la hora de aprender los algoritmos de las operaciones.

Por ejemplo, la suma: podemos realizar una - operación práctica con números no demasiado grandes, pero sí lo suficientes para que surja la necesidad - del algoritmo. Por ejemplo: $57 + 74$.
Basémonos en la estructura del número:

$$57 + 74 = (50 + 7) + (70 + 4) =$$
$$(50 + 70) + (7 + 4) = 120 + 11$$
$$100 + 20 + 10 + 1 = 100 + 30 + 1 = 131.$$

La resta:
$238 - 125$

$$238 = 200 + 30 + 8 - 125 = 100 + 20 + 5 =$$
$$200 - 100 + 30 - 20 + 8 - 5 =$$
$$100 + 10 + 3 = 113.$$

Manejando las estructuras numéricas, se pueden "inventar" los algoritmos de la multiplicación y la división.

LAS POTENCIAS Y SUS PROBLEMAS FORMALES.- Las potencias sí que son productos abreviados. Si tene--

mos un producto de varios factores iguales n x n x n podemos expresarlo n^3 donde 3 indica las veces que n se toma como factor.

Hay un problema de la potenciación que suele ser difícil de comprender: el caso $n^0 = 1$ cualquiera que sea n (ya lo encontramos al tratar los sistemas de numeración). Se trata de investigar cómo y porqué $n^0 = 1$. Tenemos una demostración clásica apoyada en la operatoria de potencias y en la introducción que se ha hecho sobre exponentes negativos. Ya sabemos que un exponente negativo significa la orden de dividir. (es el operador inverso de la multiplicación). Podríamos razonar así: multiplicar $n^3 \times n^2$, como resulta que $n^3 = n \times n \times n$ y $n^2 = n \times n$, tenemos cinco factores n iguales. $n^5 = n^{3+2}$.

Si tuviéramos que multiplicar $n^3 \times n^{-2}$, significaría dividir, y tendríamos:

$$n^3 \times n^{-2} = \frac{n \times n \times n}{n \times n} = n^{3-2} = n^1$$

Imaginemos ahora que tenemos que multiplicar $n^3 \times n^{-3}$, según lo que hemos hecho antes.

$n^3 \times n^{-3} = n^{3-3} = n^0$; pero también es igual a:

$\frac{n^3}{n^3} = 1$ y entonces, $n^0 = 1$ cualquiera que sea n.-

LOS FENOMENOS Y SU CUANTIFICACION.- Trataremos de investigar cómo se puede cuantificar un fenómeno, interpretarlo como un número para poder manejarlo con mayor facilidad. Si ese conjunto está formado por unidades discretas (un conjunto de personas o de frutas), cuantificar esos conjuntos resulta fácil: sólo tetemos que contar las unidades.

Pero, ¿Y si no se ven en el conjunto unidades fácilmente distinguibles a simple vista? (por ejem--

plo la cantidad de agua de un río). Ya sabemos que--el agua se mide en litros, pero en este caso no funciona, y no solamente porque la medida sea muy pequeña, sino porque el fenómeno no funciona así, ni tampoco si se dispusiera de otra medida más grande, mucho más grande. Por lo tanto, el problema necesita - ser pensado. Y se requieren imperiosamente nuevos -- instrumentos y técnicas de pensamiento.

Ante cualquier fenómeno es necesario determinar con claridad qué vamos a medir allí y luego pensamos cómo lo medimos. Eso que vamos a medir lo llamamos una magnitud. Pero un fenómeno lo llamamos una magnitud si podemos definir en ella la igualdad y la suma. Es decir, si en ella podemos determinar conjuntos iguales y conjuntos suma; sólo entonces la podremos medir. Sólo entonces es una magnitud.

Por ejemplo: el tiempo.¿Se pueden definir -- conjuntos iguales de tiempo? El conjunto de tiempo-más sencillo igual a otro, es seguramente, el día. - Si clavamos una estaca en el suelo y marcamos su sombra en un momento dado, cuando la sombra vuelve a coincidir con nuestra marca, ha pasado un día. Los relojes más antiguos, según se cree, son los de sol. - Pero, todos los relojes, desde los más antiguos hasta los modernos de cuarzo se apoyan en la posibilidad de entender porciones iguales de tiempo y en que esas porciones continuadas se pueden entender como - tiempo suma. La historia del reloj y la búsqueda de-la precisión en la medida del tiempo ha sido y continúa siendo una apasionante aventura del hombre, porque el tiempo es una de las magnitudes fundamentales ya que muchos fenómenos son sambiantes pero los cambios tienen lugar en el tiempo. En un intento muy mo derno, se trató de reducir la expresión de todas las magnitudes a estas tres fundamentales: longitud, masa y tiempo.

El problema de medir la longitud, que parece una de las cuestiones más sencillas, preocupó mucho tiempo a la humanidad, principalmente por la elección de una unidad aceptable por todos. Se intentó definirla mediante una referencia mundial: la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre: eso era un metro. Más tarde, el metro fue la longitud entre dos marcas en una barra de platino a la temperatura de 20 grados centígrados, situada en la oficina de pesas y medidas de París. Ahora el metro es cierta cantidad de longitudes de onda, en el vacío, del átomo del kriptón.

La masa, una de las principales magnitudes, ofrece, incluso, la dificultad de entenderla. Para medirla lo hacemos indirectamente midiendo pesos, que son directamente proporcionales a la masa en cada lugar de la tierra.

<u>EL PROBLEMA DE LA MEDIDA</u>.- El problema de la medida, aún en el más simple de los casos, debe ser motivo de una investigación amplia, que abra caminos para investigaciones posteriores más complejas. En cuanto nos apartamos de la situación de medir conjuntos discretos, que son los que dieron origen a nuestro número natural, el problema se complica. En cada caso, lo primero que tenemos que hacer es interpretar si aquello que queremos medir, es una magnitud, y luego elegir la unidad apropiada, que tiene mucho de arbitraria y convencional. La posibilidad de definir una unidad cualquiera de una magnitud está supeditada a la de unir (sumar) "trozos" de esa magnitud (conjuntos iguales) que podamos hacer de ella y a la

posibilidad de contar conjuntos cualesquiera que está supeditada a la de unir (sumar) unos con otros para dar el total.

Decididamente, no son fáciles muchos problemas de la medida. Cada uno de ellos puede constituir una investigación interesante.

Una vez elegida la unidad para la magnitud en cuestión, se encontrará que en muchos casos no es posible encontrar una unidad que "dé justo" en todos los casos. Entonces, tendremos que renunciar a los números exactos, tendremos que romper la unidad en dos, tres, o más partes iguales. Aquí podremos entender que aparecen nuevas clases de números. En efecto estamos en presencia de una nueva clase de números que se llaman números fraccionarios.

Con particiones sucesivas de un objeto (como una hoja de papel) primero, y con la idea de hacer lo mismo en un campo de la abstracción, se llegará al descubrimiento de las fracciones equivalentes y a la comprobación válida mediante los productos cruzados. Luego, podemos definir la igualdad en magnitudes dadas en números fraccionarios.

Vamos a ver el problema de la suma: en los conjuntos discretos y los números naturales era sencillo el problema de la suma, sencillamente, uníamos los conjuntos y contábamos el conjunto unión. Ahora veremos que será necesario inventar una nueva forma de sumar. Sea la suma de $1/7 + 1/6$; sabemos que:

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{4}{28} = \frac{5}{35} = \frac{6}{42} = \frac{8}{56} \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{5}{30} = \frac{7}{42} = \frac{8}{48} = \frac{9}{54} \cdots\cdots$$

y observando las dos series vemos que hay dos expresiones que se parecen mucho: el que tengan el mismo-denominador significa que las unidades fueron divididas en el mismo número de partes. Luego, esas partes serán iguales. Ahora sí podemos efectuar la unión:

$$\frac{6}{42} + \frac{7}{42} = \frac{13}{42}$$

Ahora ya está claro: para sumar dos números fraccionarios tenemos que buscar expresiones iguales a cada uno de ellos que tengan el mismo denominador y entonces ya se pueden sumar las partes.

El buscar esas expresiones del mismo denominador puede ser complicado. La experiencia y la investigación enseñan métodos para simplificar la tarea.

PROBABILIDAD

!Qué importante es el número! En cualquiera situación determinamos nuestros conjuntos con los que vamos a trabajar. Si son discretos, los contamos; y si son continuos, los medimos con una unidad apropiada. Ahora los manejamos como números en el papel. Si están relacionados en alguna forma, establecemos criterios operativos y encontramos la ley de relación. Si se producen cambios, ya sea cualitativa o cuantitativamente, los interpretamos matemáticamente y logramos saber los efectos de este cambio. Conclusión: podemos cuantificar los fenómenos, investigar matemáticamente las leyes de relación, encontrar resultados y relaciones.

Pero hay un terreno en el que las Matemáticas que hemos manejado hasta ahora no nos parece operativa: el terreno del "azar", de la "probabilidad". Porque la Matemática, ni es una especie de "arte mágica" o "cosa de brujería". Pues bien, nuestro pensamiento matemático, con ese realismo sincero, con esa imaginación inventora, ¿Podrá meterse en ese terreno de la suerte, del azar, de la probabilidad? Los programas de matemáticas de la escuela primaria introducen estos problemas, y eso es notable, porque constituye un interesante terreno de investigación.

Lo primero que nos interesa es tener ideas precisas, claras. Si queremos meternos en el terreno del azar, de la probabilidad, es que vamos a intentar prever lo que ocurrirá, en qué medida, cuándo y en qué circunstancias. Vamos a dar nombre a nuestras ideas. Vamos a llamar acontecimiento o evento a eso que queremos prever. Por ejemplo: un evento es que salga águila o sol en un volado; que mañana llueva o esté despejado, que caiga un dos o un seis al tirar un dado. Entonces podemos intuir que hay eventos perfectamente previsibles y otros que nó.

Por ejemplo: es seguro que mañana amanecerá; es dudoso si mañana lloverá o estará despejado. Tenemos, entonces, dos tipos de eventos: los eventos seguros, llamados también deterministas o fenómenos causales, pues los produce una causa, y conocida ésta, el evento no puede ser otro; los eventos azarosos, que dependen del azar o vienen influidos por tal número de causas que no podemos predecir si ocurrirá esto u ocurrirá lo otro.

Volviendo a los casos mencionados: un acontecimiento que no podemos predecir es "qué día hará mañana". Será soleado, lluvioso o estará nublado. Sinembargo, si sabemos la época del año es más posible acertar. Porque tenemos una experiencia de años anteriores de que, en esa época, es corriente que no llueve, es frecuente que los días estén soleados.

Con otros eventos, se irán introduciendo las expresiones "es más probable", "menos probable", o "igualmente probable".

Nos vamos acercando así a las ideas de probabilidad y frecuencia que cada vez serán más importantes en nuestras investigaciones. Y al tomar nota de las frecuencias de los acontecimientos, estamos comenzando a elaborar registros estadísticos.

El objetivo más importante será llegar a medir la probabilidad, llegar a cuantificar eficazmente estos fenómenos. Y esta medida de la probabilidad (como pasa con todas las magnitudes) será a veces fácil, otras difícil y en otras ocasiones imposible.

Por ejemplo: echamos un volado, ¿Qué puede ocurrir? Pues que caiga águila o sol (no consideramos la posibilidad de que caiga de canto o que la moneda se pierda). Luego, puede ocurrir una, entre dos cosas. La probabilidad de que ocurra una es 1/2 (una entre dos). Si se emplea (como lo han hecho jugadores tramposos) una moneda con dos águilas, siempre sale águila porque el acontecimiento es seguro: la probabilidad es 1/1 que es igual a 1.

Otro ejemplo: sacamos una carta de la baraja, la probabilidad de que salga un trébol es 1/4, porque hay cuatro palos. Y la probabilidad de que salga un as es de 4/52 porque hay cuatro ases y las cartas son 52.

Vemos así que la probabilidad se puede medir con nuestros números fraccionarios. La medida de la probabilidad es un número que está entre 0 y 1.

Pero no hay que interpretar los hechos solamente con fórmulas, o sujetos rígidamente a ellas. El hecho de que en un volado la probabilidad de que caiga águila es 1/2 y lo mismo la probabilidad de que caiga sol, no quiere decir que ha de salir una vez águila y otra vez sol, porque esto no es verdad. Se ve enseguida, al echar varios volados, que cualquiera de los dos eventos puede repetirse varias veces seguidas. Decir que la probabilidad es 1/2 significa que las dos posibilidades son igualmente probables. Y algo más: si echamos muchos volados y tomamos nota (registro estadístico) de las veces que sale águila o sol, veremos que cada vez, se van aproximando el uno al otro, que cada vez más se igualan los resultados aproximándose a la probabilidad definida.

Esto es abrir una puerta hacia el estudio e investigación de la teoría de la probabilidad. En la escuela primaria vamos a crear las bases operativas, las técnicas de investigación y de análisis que servirán para profundizar en el tema.

Pero lo importante es que los instrumentos y técnicas de pensamiento que tratamos de construir son válidas, operantes. Estas técnicas de pensamiento son la esencia misma de la Matemática y nó las fórmulas y reglas aprendidas mecánicamente. De donde resulta que cualesquiera que sean las investigaciones que se propongan a los niños, cualesquiera que sean los temas, el dominar esos instrumentos y esas técnicas, es el objetivo de la Nueva Matemática.

Como dice Carlos Reinoso al referirse a las técnicas de investigación: "con ellas el niño podrá afrontar nuevos problemas, problemas desconocidos y podrá hallar, inventar soluciones, porque eso es lo que está haciendo todo el tiempo. Dominará una verdadera técnica de aprendizaje, de incesante enriquecimiento de la conducta"

C O N C L U S I O N E S

Frecuentemente se habla de una Matemática Moderna, de una Matemática diferente, actual, e inclusive se usan esos títulos como recurso publicitario de- los textos relativos a la materia. Pero, en realidad, (y esto ya se afirmó en el presente trabajo) no existe una Matemática moderna; es la misma matemática de siempre. Lo que se ha renovado, o se pretende renovar son las técnicas de aprendizaje, los métodos de enseñanza, para darles un nuevo enfoque, una nueva orientación, donde los tradicionales métodos de memoriza-- ción y simple mecanización, ceden el paso a las actividades de investigación, de participación activa del alumno en la búsqueda de soluciones, de respuestas; - una nueva técnica en la que no sea el punto de partida la abstracción, sino el planteamiento de situaciones reales, concretas, para derivar de ellas mediante el razonamiento lógico (cualitativo) primero, el razonamiento matemático (cuantitativo) después, que con-- duzca al concepto abstracto. En ningún otro campo como en el de las matemáticas, necesitará el alumno tanto de su capacidad deductiva. La tarea de perfeccio-- nar su técnica de pensamiento, en la que hemos de ayudar al niño, va a exigir el dominio de una serie de-- procesos que debe comenzar por los más sencillos y seguros. La nueva didáctica de las matemáticas pretende acabar con esa actitud negativa del alumno, con esa - inseguridad, con esa falta de confianza en sí mismo,- complejos que luego son muy difíciles de corregir. En muchas personas adultas no se han corregido nunca.

Los pretendidos cambios y la evolución de la- didáctica de las matemáticas no serían posibles si tu viéramos que conservar al mismo tiempo los procedimien tos y la atmósfera de las clases tradicionales. Es imperativo que el maestro se esfuerce por pasar de una - situación de enseñanza, a una situación de aprendizaje. En la didáctica tradicional, el maestro se pararía ante su clase a explicar, por ejemplo, los cuantificadores lógicos. Es posible que hiciera una explicación -- muy bonita, muy documentada. Pero,¿qué estarían pensando los niños mientras tanto? Es muy posible que el maestro tuviera que reñir a un alumno porque estaba pa-- sándole papelitos a otro, papelitos completamente ajenos a la clase. El maestro sería el orgulloso protagonista de la acción y a los niños les resultaría pesado incluso estar ahí porque no participaban. Al final, el maestro quizá hiciera algunas preguntas o pondría algunos ejercicios para "ver si habían aprendido algo". Si no era así (cosa muy frecuente) el maestro echaba la - culpa a los niños por desatentos, por estar pensando - en la luna, mientras él daba su clase magistral... Pero la culpa sería del maestro y de su técnica didáctica. Eso es lo que estamos tratando de cambiar ahora. - Es necesario que los alumnos participen mientras se celebra la clase. Es necesario entender que la acción es de ellos, que la clase es de ellos, que ellos son los-protagonistas, los propietarios de la acción. Una gran parte de esa tarea será ejecutada por los niños trabajando en grupos o individualmente. Esos grupos podrá - constituirlos el propio maestro o permitirá que los alumnos se agrupen espontáneamente. Se observará que -- trabajen con alegría, sobre todo, si no se ha estropeado su iniciativa con la institución de un sistema de-premios y castigos. Los niños experimentan un marcado-interés por el descubrimiento de las novedades que les ofrece el mundo circundante y no hay necesidad de malograr ese interés con la creación de correcciones o recompensas por el trabajo mal o bien hecho. Obrando en esta forma, los alumnos se verán alentados a aprender las matemáticas por sí mísmos y nó para destacar en la clase. Se formarán grupos, que cambiarán de componentes y se volverán a hacer a medida que ciertos niños aprendan a un ritmo más acelerado que otros, dándose también lugar, al progreso individual. Un elemento importante en el aprendizaje es la discusión entre los niños. Si se anima a los niños a discutir, no solamente de lo que están haciendo, sino también de lo que ellos creen que han descubierto, se producirá en la clase cierto alboroto. Naturalmente, no se puede dejar que este barullo aumente hasta que haga imposible todo aprendizaje o interfiera la normal actividad de otras clases. El maestro debe persuadirse de que es él el responsable de la clase y debe procurar que este ruido necesario esté controlado. Sin embargo desde el punto de vista de los niños, es sorprendente la cantidad de ruido que pueden soportar mientras están haciendo delicados esfuerzos mentales. Si los niños aprenden mejor con métodos activos, y si la discusión puede ayudar a ello, es preciso que el maestro se adapte a esta nueva situación, lo mismo que si los niños tienen que aprender en un ambiente escolar tradicional, con otras aulas al lado, hay que limitar el ruido que produzcan.

A un maestro formado en los métodos tradicionales no le será fácil pasar a esta clase de matemáticas sin hacerse una pequeña reflexión de la cual derivará un cambio de actitud. Por ejemplo: la idea de que la autoridad está en la verdad y nó en el maestro es difícil de admitir de buenas a primeras. Por otra- parte, los niños mismos tienen la tendencia de recurrir al maestro porque para ellos es más sencillo. Resulta tentador intervenir cuando el alumno comete un- error y decirle cómo hay que actuar. Es más difícil - permanecer al lado del alumno, verle titubear, perderse en el problema, cuando bastaría decirle: "házlo -- así". Sólo que al obrar de ese modo no conseguiríamos más que frustrar el objetivo de esta nueva situación- de aprendizaje que debe llevar al alumno a descubrir- la solución por sí mismo. Hallándola por él mismo tiene ocasión de que esta solución se grabe en su mente- de unaamanera más clara y duradera que cuando es el - maestro quien le dice lo que tiene qué hacer. El maestro tiene que recordar que su manera de pensar no es- necesariamente igual que la de los niños. El razona-- miento de los niños es muy diferente del de los adultos e incluso varía de un niño a otro. Tampoco existe sólo una forma de resolver un problema. A veces el niño sugiere un camino para résolver un problema, un camino que no es el mismo que el maestro había elegido- y que puede pacecerle erróneo. El mejor método pedagógico, en este caso, es que el maestro evite decirle - al niño: "nó, nó es así", "házlo de esta forma", sino que une sus esfuerzos a los del alumno para ver lo -- que puede conseguir con sus sugerencias. De ello puede derivarse una discusión que juzgue por sus méritos el método propuesto por el alumno. Si ha sido bueno y el alumno ha demostrado su capacidad de llegar hasta- el fin, puede convencer al propio maestro. En caso -- contrario, si el niño continúa titubeando y se da -- cuenta de que su idea no le lleva a ninguna parte, el maestro siempre ha de estar a tiempo para hacerle -- comprender que sería preferible abordar el problema -

desde otro punto de vista.

Pero el hecho de que se sugiera la no intervención del maestro en la actividad de los niños, no significa que es preciso dejarlos que se las compongan por sí mismos. Una sugerencia por parte del maestro, en el momento oportuno, es un elemento imprescindible en el proceso del aprendizaje, pero esta sugerencia no debe tomar nunca el carácter de una orden.- Si un niño comete un error, no hay que mostrárselo inmediatamente, sino que se debe procurar que sean las consecuencias de dicho error las que lo revelen; tiene que darse cuenta que el resultado es absurdo y entonces comprenderá claramente que su método no era bueno. Es mil veces preferible descubrir los errores por uno mismo que oírselo contar a los demás, ya que tal descubrimiento constituye de por sí, un factor de aprendizaje.

Sería extraordinariamente provechoso que en todas nuestras escuelas se aplicaran estos métodos.

Se piensa, y a veces se discute, que todos esos cambios, esas innovaciones que se proponen son difíciles, inadecuados, inoperantes; que cualquier método tradicional es mejor; que se trata de introducir la Matemática Superior en la escuela primaria; en fin que aparece desorientado el rumbo que señala la Nueva Didáctica. Y eso no es cierto, como tampoco es cierto que toda la didáctica tradicional es inadecuada. Toca al maestro, con ese juicio crítico que debe poseer, analizar los métodos didácticos tradicionales para tomar de ellos lo positivo que tienen y adecuarlo a la realidad actual, pero fuera del dogmatismo y la rutina que no conducían a resultados eficaces porque el -

maestro empleaba defectuosa y pobremente su papel de-educador y su labor era, por lo tanto, mecánica e imitativa, no creadora, no liberadora.

Los cambios en la didáctica de las matemáticas, ya lo hemos dicho, son de procedimientos, nó de-contenido temático; son cambios que exige la realidad actual, la sociedad actual que sigue evolucionando a-un ritmo inusitado y que están influyendo poderosamente en el modo de pensar humano. Son cambios que persiguen proporcionar al educando la confianza y la seguridad necesarias para adaptarse a la realidad en que-vive; cambios en los que aparece una verdadera disciplina de trabajo; una tarea de todos realizada por cada uno con decisión y entusiasmo; ese clima de trabajo que hace posible, fácil y agradable la tarea de --aprender.

Es cierto, al presente trabajo le falta mucho pero no podemos investigar toda la Matemática en la -Primaria, y ello es un aliciente para seguir después-estudiando MATEMATICA.

o

B I B L I O G R A F I A.

Cuevas Aguilar Silvia. "DIDACTICA DE LA ARITMETICA Y LA GEOMETRIA". Ediciones Oasis, S. A. México. 1968.

Turner V. Dean. "INTRODUCCION A LAS MATEMATICAS". 2o. y 3o. curso de licenciatura en educación pre-escolar y - primaria. SEP. Trillas. México. 1976.

Dienes Z. P. "LA MATEMATICA MODERNA EN LA ESCUELA PRIMARIA". Editorial Teide. Barcelona. 1970.

Suppes P. "INTRODUCCION A LA LOGICA MATEMATICA". Editorial Reverté, S. A. México. 1970.

Dienes/Golding. "LOS PRIMEROS PASOS EN MATEMATICA".- - Conjuntos, Números, Potencias. Editorial Teide. Barcelona. 1971.

Dienes/Golding. "LOS PRIMEROS PASOS EN MATEMATICA".- Lógica y juegos lógicos. Editorial Teide. Barcelona. 1971.

Reinoso Carlos. "EN BUSCA DE UNA NUEVA DIDACTICA PARA LA MATEMATICA". Serie Reforma Educativa. Nuevas Técnicas Educativas, S. A. México. 1974.

Luzuriaga Lorenzo. "PEDAGOGIA". Biblioteca Pedagógica. Editorial Losada. Buenos Aires. 1978.

Aebli Hans. "UNA DIDACTICA FUNDADA EN LA PSICOLOGIA DE JEAN PIAGET". Editorial Kapelusz. Buenos Aires. 1978.

"MATEMATICAS I". Curso especial para Licenciatura en Educación Primaria. SEP. México. 1975.

"AUXILIARES DIDACTICOS". Tercero y Sexto Grados de Educación Primaria. SEP. México. 1974.

"PROGRAMA DE MATEMATICAS". Sexto Grado de Primaria. - SEP. 1977.

ANEXO.

Página 6.- "El programa de matemáticas para la escuela primaria fija como objetivo general: dotar a los alumnos de los conocimientos e instrumentos que les permitan mejorar su comprensión e interpretación de los fenómenos en forma cuantitativa y relacional".

Véase Programa de Matemáticas para Sexto Grado de Educación Primaria. SEP. México. 1977.

Página 6.- ...resalta aquí el método eminentemente deductivo de las matemáticas...

"La inducción consiste en ir de lo particular a lo general, de los hechos a la ley. El método inductivo es el más empleado por la ciencia, pero requiere de un gran cuidado en su aplicación. Para que sea eficiente tiene que reunir el mayor número posible de casos y establecer entre ellos las relaciones de semejanza, de modo que la explicación que se busca pueda tener aplicación general. La deducción es la inversión de la inducción, y consiste en ir de lo general a lo particular, de la causa al efecto. En realidad, la deducción no aporta ningún conocimiento nuevo, es una modificación de la inducción y apenas se aplica en la ciencia. Más aplicación tiene en la educación propiamente dicha, más aplicación tiene en la enseñanza".

Lorenzo Luzuriaga. PEDAGOGIA. Edit. Losada. B. Aires. 1978.

De allí que se haya usado la expresión referida, con relación a un método de aprendizaje, nó a un método de la Ciencia Matemática en sí.

Página 7.- Operaciones y aplicaciones...

"Si la actividad del alumno es invisible cuando la enseñanza tradicional presenta nuevas nociones y operaciones, se torna evidente en el momento de pasar a la ejercitación. Entonces es posible hacer las siguientes observaciones: en primer lugar se advierte que aún habiendo memorizado una fórmula o automatizado el procedimiento de solución de un problema, por ejemplo: cálculo de superficies, suma de fracciones, los alumnos no comprenden lo que dicen o hacen; repiten mecánicamente una fórmula verbal o aplican automáticamente un procedimiento estereotipado. Ahora bien, si el alumno no comprende, si el significado real se le escapa, el maestro se ve obligado a hacerle adquirir un hábito rígido que asegura el desarrollo de la reacción buscada. En segundo lugar se advierte que gran parte de los niños son capaces de utilizar esos automatismos sólo en situaciones iguales a aquéllas en que los adquirieron".

"La carencia de comprensión de las fórmulas memorizadas y de los procedimientos de solución mecanizados es el primer efecto posible de la enseñanza tradicional. Un alumno puede, por ejemplo, repetir correctamente, sin haber comprendido su sentido, la regla para calcular la superficie del trapecio: -para calcular la superficie del trapecio se multiplica su altura por la semisuma de sus bases- y obtener soluciones correctas o más o menos correctas, pero hasta allí. Está actuando con base en la adquisición de un simple hábito. Pero ¿en qué consistiría el sentido del enunciado verbal? En operaciones espaciales y numéricas interiorizadas. En el caso de la regla para calcular el área del trapecio, se trataría de transformar el trapecio en un rectángulo cuya base fuera igual a la base media; el cálculo de la superficie del rectángulo dividiéndolo en muchos cuadrados unidad, etc. Comprender la regla significa, ser capaz de evocar interiormente estas operaciones espaciales y numéricas.

"Los hábitos son conductas relativamente aisladas entre sí, de mecanismos rígidos, no susceptibles de variantes asociativas."

"Las operaciones son reacciones mucho más sutiles que los hábitos en las que el pensamiento queda libre para realizar rodeos y obtener un mismo resultado con dos o más procedimientos diferentes".

"Un ejemplo tomado de la práctica escolar deja clara esta diferencia: la tabla de multiplicar puede aprenderse como una colección de hábitos o como un grupo de operaciones. En el primer caso cada combinación de cifras se adquiere como reacción habitual en que la percepción visual o auditiva de dos cifras, 7 x 6 por ejemplo, provoca el enunciado de una tercera, 42. Cada una de las diferentes combinaciones de cifras está prácticamente aislada de otra. Por el contrario, si se quiere que los alumnos aprendan la tabla de multiplicar como un sistema de operaciones, se estudiarán las múltiples relaciones entre las diversas operaciones; por ejemplo: 6 x 5 = (6 x 10) : 2; 7 x 6 = (5 x 6) más (2 x 6), etc. sin hablar de la elaboración de la multiplicación a partir de una adición reiterada y de relacionar la multiplicación con su inversa, la división. De este modo la tabla de multiplicar será para el alumno un sistema en el que podrá deducir una operación de otra, lograr el mismo resultado por vías diferentes y entregarse a una actividad aritmética libre y segura de sus resultados".

Véase Hans Aebli, UNA DIDACTICA FUNDADA EN LA PSICOLOGIA DE JEAN PIAGET. Capítulo IV. Edit. Kapelusz. 1978.

Página 8.- ... En ningún otro campo como en el de las matemáticas necesitará el alumno tánto de su capacidad deductiva....

La expresión no excluye a las otras áreas del programa, sino que da un enfoque comparativo. De hecho, el alumno, también requerirá del razonamiento en las áreas de Español, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, etc., pero se considera que el área de matemáticas es el campo más propicio para robustecer el razonamiento lógico, del que, naturalmente, requerirá el alumno en todas las demás disciplinas.

Página 20.- "En las cuatro operaciones fundamentales tenemos que considerar dos clases de dificultades: las que se refieren al mecanismo de la operación y las que se relacionan con el sentido de la operación, es decir, las que nos permiten traducir situaciones dadas al lenguaje numérico".

Véase DIDACTICA DE LA ARTIMETICA Y LA GEOMETRIA. Silvia Cuevas Aguilar. Cap. I. Ediciones Oasis, S. A. México.

Página 45.- En sus artículos pedagógicos el maestro Carlos A. Carrillo dice: "al niño se le enseña lo que es línea vertical, línea horizontal, líneas perpendiculares, líneas paralelas. ¿Qué sólo las líneas pueden ser verticales, horizontales, perpendiculares, paralelas? ¿No lo son también los cuerpos considerando su posición en el espacio o la que tienen entre sí?

DIDACTICA DE LA ARITMETICA Y LA GEOMETRIA. Silvia Cuevas Aguilar. Capítulo II.

Páginas 51 y 52.- "Es necesario cambiar para que el niño, en lugar de ser un operador aritmético, llegue a ser un "pensador matemático" "... "es esa actitud viva y creativa; esa actitud libre y valiente pero también abierta y modesta la que constituye la base de la didáctica actual que estamos intentando poner en pie".

Carlos Reinoso. EN BUSCA DE UNA NUEVA DIDACTICA PARA LA MATEMATICA. Serie Reforma Educativa. Nuevas Técnicas Educativas, S. A. México. 1974.

Página 53.- ...Conjuntos....

"Las primeras experiencias de los niños en la escuela deberían comportar experiencias a propósito de los conjuntos. Nada mejor que discutir con ellos lo -- que es un conjunto de objetos. Un buen punto de partida sería hablar de conjuntos que pueden tener en sus - casas, pero sin pronunciar de antemano la palabra conjunto, de la que no conocen todavía el sentido. Rápidamente los niños hablarán de su juego de cubos, de un - juego de cartas, de una colección de sellos, etc. Se - podrá entonces discutir con ellos, a fin de descubrir cuántas palabras existen para nombrar esas series de - colecciones y juegos, hasta llegar a las más diversas, como: montones, pilas, paquetes, etc. Se dirá entonces que todas esas palabras son utilizables pero que es mejor quedarse con una sola: de ese modo, todo mundo sabrá de qué se habla. Como todas esas cosas son objetos que "van juntos", podemos llegar así a comprender el - término CONJUNTO".

Véase Z. P. Dienes/E. Golding. LOS PRIMEROS PASOS EN - MATEMATICA. Edit. Teide. Barcelona. 1971.

Página 68.- "Esos algoritmos eran y son importantes, - solo que era muy duro aprendérselos de memoria: se colocan los números unos abajo de otros de tal modo que- coincidan la columna de las unidades, las decenas, las centenas... se empieza a sumar (o restar, o multiplicar) por la primera cifra de la derecha....etc.".

Carlos Reinoso. EN BUSCA DE UNA NUEVA DIDACTICA PARA - LAS MATEMATICAS. Cap. II.

Página 77.- Al referirse a las técnicas de investigación: "con ellas el niño podrá afrontar nuevos problemas, problemas desconocidos y podrá hallar, inventar - soluciones, porque eso es lo que está haciendo todo el tiempo. Dominará una verdadera técnica de aprendizaje, de incesante enriquecimiento de la conducta".

Idem la anterior.

Página 78... complejos que luego son muy difíciles de-corregir....

No se ha querido dar al término "complejos" - un significado de fondo puramente psicológico, conforme a las ideas de los psicoanalistas, según las cuales ciertos incidentes de la infancia de un individuo son-reprimidos por la conciencia y producen así, una perturbación en su vida anímica.

Se ha usado arbitrariamente la palabra complejos en el sentido de inseguridad, falta de confianza - en sus propias capacidades y posibilidades como consecuencia, precisamente, de las limitaciones creadas por los tradicionales métodos de memorización y mecanización que hacen del alumno sólo un habitual operador aritmético.

———0———

FE DE ERRATAS.

Pág.	Línea	dice	debe decir.
10	9	obtetos	objetos.
10	21	mestro	metro.
14	2	untilizar	utilizar.
14	18	t omar	tomar.
14	22	di-ez	diez.
25	5	t;erminos	términos.
28	1	sobra la expresión: Las habilidades de la multiplicacion.	
32	14	cúbuca	cúbica.
36	17	po	por.
43	8	deniminador	denominador.
46	21	el ángulo	al ángulo.
47	12	supercicie	superficie.
70	29	tetemos	tenemos.
71	32	sambiantes	cambiantes.
75	31	llu-eve	llue-ve.
77	11	aprox-	aproxi-

o