S.E.P.
UNIDAD SEAD 095
AZCAPOTZALCO, D. F.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL.

BASES QUE SE DAN EN LA ESCUELA PRIMARIA PARA SOLUCIONAR ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.



INVESTIGACION DOCUMENTAL QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADA - EN EDUCACION PRIMARIA PRESENTA:

MARIA DE JESUS HERNANDEZ LUNA.

NOVIEMBRE DE 1980.

TRABAJO DEDICADO AL ESFUERZO DE TODOS MIS MAESTROS, A MI MADRE Y A

MI HIJO.

INDICE.

# I N T R O D U C C I O N .

Uno de los temas más importantes dentro del Algebra es - la solución de ecuaciones que, a su vez, es uno de los puntos que mayor grado de dificultad presentan al alumno para su aprendizaje.

El poder dominar las técnicas para solucionar ecuaciones no es algo inmediato, es necesario realizar un proceso de aprendizaje acompañado con un adecuado entrenamiento. De aquí surgen las preguntas: ¿dónde debe comenzar dicho aprendizaje?, ¿qué tipo de - información es necesaria?, ¿se está dando esa información?, etc.

Con el deseo de dar un panorama que muestre los esfuerzos que se hacen, para que los estudiantes de nivel primaria tengan una base que les permita continuar asimilando y entendiendo información, que en el futuro puedan aplicar para solucionar ecuaciones, se realiza un breve y sencillo análisis acerca de los cimientos - más importantes del problema citado, localizados en los libros de texto gratuitos que maneja el alumno, con la finalidad de verificar si se conocen las propiedades de las operaciones (adición y - multiplicación) para aprovechar su aplicación en la solución de estas ecuaciones. Para ello, se analizaron los ejercicios presentados en los libros de Educación Primaria y se vió cuáles de ellos -

utilizan alguna propiedad operativa, para ver si efectivamente el nivel elemental da algunas bases que permitan en el nivel medio, solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita de manera formal, en base al conocimiento de las propiedades de adición y multiplicación.

BREVE INTRODUCCION A LA TEORIA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA:

Primeramente hay que recordar que una ecuación es una operación indicada, es una igualdad condicionada entre dos expresiones llamadas miembros, los cuales son iguales solamente para cierto valor particular de la incógnita.

Ejemplo # 1.

incógnita: $\underbrace{x + 8}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{21}_{\text{segundo miembro}}$

$$x+\cancel{8}-\cancel{8} = 21-8$$

$$x = \underbrace{13}_{\text{valor particular}}$$

Comprobación:

$$x + 8 = 21$$

$$13+ 8 = 21$$

$$21 = 21$$

En una ecuación aparecen símbolos conocidos y desconocidos (incógnita).

Encontrar el valor del símbolo desconocido, se llama solucionar la ecuación, para lo cual, el METODO GENERAL CONSISTE EN:

1.- Si hay, efectuar operaciones indicadas.

2.- Transponer (cancelar, pasar de un miembro a otro) - términos hasta que queden en un solo miembro los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas (números o constantes).

3.- Reducir términos en cada miembro.

4.- Despejar la incógnita, mediante propiedades de las operaciones.

5.- Comprobar.

Ahora bien, las propiedades de las operaciones a las que se pueden recurrir para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita, son:

ADICION:

1.- PROPIEDAD DE CERRADURA: si a un número se le suma uno de su misma especie, el resultado pertenecerá a ella misma:

Ejemplo # 2.

$$a + b = c$$

si "a" es natural y "b" es natural, entonces "c" es natural.

2.- PROPIEDAD CONMUTATIVA: el orden de los sumandos no - altera la suma total:

Ejemplo # 3.

$$a + b = c$$

$$b + a = c$$

3.- PROPIEDAD ASOCIATIVA: pueden agruparse de formas diferentes varios sumandos, las sumas parciales deben conducir a la misma suma total:

Ejemplo # 4.

$$(a + b) + c = d$$

$$a + (b + c) = d$$

4.- EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO ADITIVO: es el cero, tiene la característica de que al ser sumado a un número, lo deja igual:

Ejemplo # 5.

$$a + (0) = a$$

5.- EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO ADITIVO: tiene la - característica de que al ser sumado un número con él, da como resultado el neutro aditivo (cero).

Ejemplo # 6.

$$a + (-a) = 0$$

MULTIPLICACION:

1.- PROPIEDAD DE CERRADURA: si a un número se le multiplica por otro de su misma especie, el producto pertenecerá a ella misma:

Ejemplo # 7.

$ab = c$

si "a" es entero y "b" es entero, entonces "c" es entero.

2.- PROPIEDAD CONMUTATIVA: el orden de los factores no altera el producto:

Ejemplo # 8.

$ab = c$

$ba = c$

3.- PROPIEDAD ASOCIATIVA: pueden agruparse de formas diferentes varios factores, los productos parciales deben conducir al mismo producto total:

Ejemplo # 9.

$(ab)c = d$

$a(bc) = d$

4.- EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO: es el uno, tiene la característica de que al multiplicar a un número por él, el resultado es el mismo número:

Ejemplo # 10.

$(1)\ (a) = a$

5.- EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO: tiene la característica de que al multiplicar un número por él, se obtiene el neutro multiplicativo (uno).

Ejemplo # 11.

$$(a)\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{a} = 1$$

6.- PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION CON RESPECTO A LA ADICION: el factor multiplica a cada uno de los sumandos:

Ejemplo # 12.

$$a(b + c) = ab + ac$$

(1)

El uso de las propiedades de adición y multiplicación - sirve para encontrar el valor de la incógnita y con ello solucionar la ecuación de primer grado. Pueden emplearse por ejemplo, así:

Ejemplo # 13.

$0 + 1 + 8 + x = 13$

$x + (1+8) = 13$ prop. del neutro adit. y conm.

$x + 9 = 13$ prop. asociativa

$x + \cancel{9} - \cancel{9} = 13 - 9$ prop. del elem. inv. adit.

$x = 4$

Comprobación:

$0 + 1 + 8 + x = 13$

(1): La estructura algebraica que cumple con las propiedades antes mencionadas, se conoce como campo; el campo más conocido es el de los Reales formado por racionales e irracionales.

$0 + 1 + 8 + 4 = 13$

$13 = 13$ prop. de cerradura y reflexiva - de la igualdad (2).

Ejemplo # 14.

$2(2 + 1) = (2)\ (1)\ (2)\ (x)$

$(2)\ (2) + (2)\ (1) = (2)(1)(2)(x)$ prop. dist. de la mult. con respecto a la adición.

$4 + 2 = (2)\ (1)\ (2)\ (x)$ prop. del elem. neutro mult. y la de cerradura.

$6 = ((2)\ (2))\ (1)\ (x)$ prop. conmutativa.

$6 = (4)\ (1)\ (x)$ prop. asociativa.

$6 = 4x$

$(6)\ (\frac{1}{4}) = (4x)\ (\frac{1}{4})$

$\frac{6}{4} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}}$ prop. del elemento inverso multiplicativo.

$\frac{6}{4} = x$

Comprobación:

$2(2 + 1) = (2)\ (1)\ (2)\ (\frac{6}{4})$

$4 + 2 = \cancel{4}\ (\frac{6}{\cancel{4}})$

(2): Ver el Apéndice I para una mayor información acerca de las - propiedades de la Igualdad.

$6 = 6$ prop. reflexiva de la igualdad.

Como se puede apreciar en los dos últimos ejemplos la solución de ecuaciones consiste en despejar la incógnita aplicando las propiedades de la adición y la multiplicación.

En otras palabras, se puede dar una regla general para la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita: sea:

$\frac{ax}{c} + b = dx - h$ que representa la forma más general de una ecuación de primer grado con una incógnita, donde a, b, c, d, h, son constantes y $\underline{x}$ incógnita:

a) Colocar en alguno de los miembros de la ecuación los términos que contienen a la incógnita, reduciendo, al usar la existencia de inversos aditivos: el de $\underline{b}$ y el de $\underline{dx}$:

$$\frac{ax}{c} + \cancel{b} - \cancel{b} - dx = -h - b - \cancel{dx} + \cancel{dx}$$

b) Realizando las operaciones necesarias:

$$\frac{ax}{c} - dx = -h - b$$

c) Sustituyendo a $\underline{-h-b}$ por $H'$:

$$\frac{ax - cdx}{c} = H'$$

d) Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:

$$x\frac{(a-cd)}{c} = H'$$

e) Despejando x, multiplicando ambos miembros de la ecuación por el inverso del coeficiente de x, que en el presente caso es: $\left(\frac{a-cd}{c}\right)$, con inverso igual a $\left(\frac{c}{a-cd}\right)$:

$$x\left(\frac{\cancel{a}-\cancel{c}\cancel{d}}{\cancel{c}}\right)\left(\frac{\cancel{c}}{\cancel{a}-\cancel{c}\cancel{d}}\right) = H'\left(\frac{c}{a-cd}\right)$$

f) Quedando despejada la incógnita y solucionada la ecuación:

$$x = H'\left(\frac{c}{a-cd}\right)$$

BASES DADAS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACION PRIMARIA PARA SOLUCIONAR ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA:

Las bases que los libros de texto de Educación Primaria brindan a los niños para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita, están representadas precisamente por el conocimiento de las propiedades de las operaciones mencionadas en el capítulo anterior (aunque en forma elemental), los niños las conocen y las llegan a manejar:

Adición:
1.- Conmutativa
2.- Asociativa
3.- Existencia del Elemento Neutro Aditivo.
4.- Existencia del Elemento Inverso Aditivo.
5.- Clausurativa o de Cerradura.

Multiplicación:
1.- Conmutativa
2.- Asociativa
3.- Existencia del Elemento Neutro Multiplicativo.
4.- Existencia del Elemento Inverso Multiplicativo.
5.- Distributiva de la Multiplicación con respecto a la Adición.

6.- Clausurativa o de Cerradura.

Y, para comprobar la solución de ecuaciones de primer - grado con una incógnita, el conocimiento de la propiedad reflexiva de la igualdad que los niños también utilizan.

## A N A L I S I S :

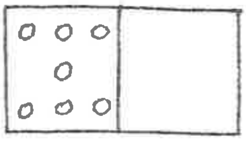
A continuación se presenta un análisis de los seis libros de texto de Matemáticas de Educación Primaria; con este análisis se pretende demostrar que el niño de primaria está en la posibilidad de aprender las propiedades de adición y de multiplicación, lo cual le permitirá, con adecuado entrenamiento en el nivel medio, poder solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1.- CONMUTATIVA (en la adición y multiplicación):

a) En el libro de texto de primer año aparecen dos grupos de ejercicios que hacen al niño aplicar la conmutatividad al completar una serie de puntos en fichas hasta llegar a ocho y nueve elementos, buscan el número perdido (3) e intercambian los sumandos. Con ésto el alumno empieza a ver que es lo mismo sumar: $7 + 1 = 8$, que $1 + 7 = 8$.

Ejemplo # 15:

Completa cada ficha hasta que tenga 8 puntos:



$7 + \_\_ = 8$

(3): 1er. gdo. Mat. p.p. 91, 95.

___ + 7 = 8

b) En el libro de texto de segundo año también busca números perdidos (4), algunos de los cuales aplican la conmutatividad en la adición, el niño la ejercita, cambia los sumandos.

Ejemplo # 16:

10 + 5 = 5 + ___

En otro grupo de ejercicios que presenta este libro, se aplica la conmutatividad al contar el número de mariposas, estampillas, círculos, que aparecen en cada renglón, multiplicándolos por los que aparecen en cada columna (5); ésto le permite ver al alumno que es lo mismo operar 4 x 5 que 5 x 4, es decir cambia de orden los factores.

Ejemplo # 17:

O O O O

O O O O     ___ renglones con ___ círculos cada uno son

O O O O     ___ x ___ = ___ círculos

O O O O

O O O O

___ renglones con ___ círculos cada uno son

___ x ___ = ___ círculos.

(4): 2o. gdo. Mat. p. 43.

(5): Ibidem. p.p. 92-94.

Otro tipo de ejercicios que ofrece es a base de interrogantes (6) en donde el niño aprecia nuevamente que el orden de los factores no altera el producto, le hace razonar.

Ejemplo # 18:

¿Cuánto es 5 veces 6?    5 x 6 = ___

¿Cuánto es 6 veces 5?    6 x 5 = ___

___ x ___ = ___ x ___

Aparece también una tabla de multiplicar del 0 al 10 (7) que permite al niño comprobar una ve más la conmutatividad de la multiplicación porque puede obtener iguales productos multiplicando tanto renglón por columna como columna por renglón, pidiéndole anotar sus observaciones complementándolas con el desarrollo de algunos de esos resultados.

Ejemplo # 19:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | |

(6): Ibidem. p.p. 95-96.    (7): Ibidem. p. 97.

3 x 1 = __

1 x 3 = __

Otra variedad presentada es el uso de la ranita en la recta numérica mediante saltos (8), en donde el niño observa que es lo mismo dar 3 saltos de 2 unidades cada uno que 2 saltos de 3 unidades cada uno, ve que el resultado es el mismo.

Ejemplo # 21:

¿A qué número llega la rana si da 2 saltos de 3 unidades cada uho empezando en 0?

0 1 2 3 4 5 6 7

La rana llega al número __.

Nuevamente hemos visto que: 2 x 3 = __ x __.

c) En el libro de texto de tercer año se presentan una serie de problemas sencillos, algunos de ellos, auxiliados con dibujos de los elementos que intervienen, en donde se permite que el chico compruebe que no importa el orden de colocación de sumandos, al final la suma total es la misma (9), incluso en cada problema interviene la marcación de elementos en la recta numérica (con y sin dibujos).

Ejemplo # 22:

(8): Ibidem. p. 98.

(9): 3er. gdo. Mat. p.p. 32-36.

Florencio tiene 5 lápices azules y 3 rojos.

¿Cuántos lápices tiene Florencio?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Florencio tiene __ lápices.

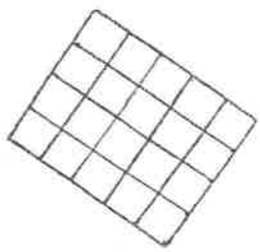
Otro ejercicio encontrado muestra solamente el cambio de orden de sumandos en donde con una línea, el niño une los que dan el mismo resultado (10).

Ejemplo # 22:

3 + 1 ---> 1 + 3

d) En el libro de texto de cuarto año se presenta un grupo de ejercicios a base de figuras (prendas de vestir, bolillos, cuadritos, cubos) colocados en renglones y columnas en donde el niño aprecia que el orden de los factores lleva siempre al mismo producto (11), cuenta los renglones y las columnas y comprueba que el total de elementos que ve, es igual, es decir resulta lo mismo considerar primero los elementos del renglón que los de la columna o viceversa.

Ejemplo # 23:



(10): Ibidem. p. 33.

(11): 4o. gdo. Mat. P.P. 20-21.

¿En cuántas partes están divididos los lados del rectángulo? __ y __.

¿Cuántos cuadritos tiene el rectángulo? __.

Esto lo escribimos __ x __ = __ o __ x __ = __.

e) En el libro de texto de quinto año, en donde hay más variedad de ejercicios, uno de ellos también utiliza la recta numérica con marcaciones de flecha (12) que permite al alumno comprobar nuevamente la conmutatividad en la adición.

Ejemplo # 24:

$\bar{1}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8

5 + 2 = 7

$\bar{2}$ $\bar{1}$ 0 1 2 3 4 5 6 7

2 + 5 = 7

Otro ejercita al niño en la conmutatividad de la multiplicación al efectuar el cambio de factores incluso en racionales (13).

Ejemplo # 25:

$$\frac{c}{d} \times \frac{1}{2} = \frac{c}{2 \times d}$$

(12): 5o. gdo. Mat. p. 79.

(13): Ibidem. p. 175.

También aparecen una tabla de sumar y otra de multiplicar en donde el niño resuelve primero una mitad y luego la otra, permitiéndole v e r i f i c a r que obtendrá lo mismo al sumar o multiplicar primero el renglón más o por la columna que al contrario; - en donde ya le piden que enuncie la propiedad conmutativa de la adición y multiplicación y que de ahí parta para encontrar valores de incógnitas (14).

Ejemplo # 26:

Si $4 + 3 = 3 + m$ entonces $m =$ ___

Ejemplo # 27:

Si $5 \times 6 = 6 \times m$ entonces $m =$ ___

Están también unos breves ejercicios que hacen al niño aplicar directamente el cambio de factores y resolver multiplicaciones (15) en números perdidos y otro combinando literales con racionales.

Ejemplo # 28:

$4 \times 3 = \_\_ \times 4$

Ejemplo # 29:

$$n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times n = \frac{n}{2}$$

(14): Ibidem, p.p. 93-94, 104-105.

(15): Ibidem, p.p. 170, 202.

En forma más extensa, hay ejercicios que de una u otra manera presentan la conmutatividad en la adición y multiplicación combinándola con la asociatividad; el niño no sólo capta el cambio de sumandos y factores sino que efectúa ya la agrupación al mismo tiempo (16).

Ejemplo # 30:

$4 + (5 + 6) = (4 + 6) + 5$

Ejemplo # 31:

$12 \times (5 \times 6) = (5 \times 12) \times 6$

f) En el libro de texto de sexto año no aparecen ejercicios que ilustren esta propiedad, solamente hace referencia a ella en ambas operaciones (17) que vienen siendo conclusiones para el niño acerca de la conmutatividad.

Ejemplo # 32:

En una suma no importa el orden de los sumandos:

$17 + 25 = 25 + 17 = 42$

Ejemplo # 33:

En una multiplicación no importa el orden de los factores:

$37 \times 4 = 4 \times 37 = 148$

(16): Ibidem. p.p. 96-97, 108-109.

(17): 6o. gdo. Mat. p. 142.

Ahora bien, al cursar la Educación Media, el niño puede aplicar esta propiedad para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita, como en los ejemplos a continuación presentados:

Ejemplo # 34:

$x + 5 = 9 - 7 + 2 - 4$

$x + 5 = 9 + 2 - 7 - 4$ prop. conmutativa

$x + 5 = 11 - 11$

$x + 5 = 0$

$x + \cancel{5} - \cancel{5} = 0 - 5$

$x = -5$

Comprobación:

$x + 5 = 9 - 7 + 2 - 4$

$-5 + 5 = 9 - 7 + 2 - 4$

$0 = 0$

Ejemplo # 35:

$x - 3 = (2)\ (3)$

$x - 3 = (3)\ (2)$ prop. conmutativa

$x - 3 = 6$

$x - \cancel{3} + \cancel{3} = 6 + 3$

$x = 9$

Comprobación: $x + 3 = (2)\ (3)$

$$x - 3 = (2)(3)$$

$$6 = 6$$

2) ASOCIATIVA (en adición y multiplicación):

a) En el libro de texto de segundo año, por medio de números perdidos se hace que el niño verifique que dos o más sumandos pueden sustituirse por su suma parcial, misma que al ser agregada a otro sumando o a otra suma parcial, dan la misma suma total (18), viendo al mismo tiempo que no importa el orden de agrupación de sumandos (19); al realizarlos primero le ayudan al niño los paréntesis y después lo hace sin ellos.

Ejemplo # 36:

$$1 + 2 + \_\_ = 1 + (2 + \_\_) = 1 + \_\_ = 6$$

Ejemplo # 37:

$$6 + 6 + 4 + 4 = 12 + \_\_ = \_\_$$

Por medio de marcaciones en la recta numérica el niño ve gráficamente la asociatividad (20) marcando el resultado parcial y total debajo de ella.

Ejemplo # 38:

$$(2 + 4) + 3 = 9$$

(18): 2o. gdo. Mat. p. 40.

(19): Ibidem. p. 54.

(20): Ibidem. p. 41.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Y, en lo que respecta a multiplicación el alumno ve la necesidad de asociar sumandos antes de efectuar el producto (21).

Ejemplo # 39:

$3 \times (5 + 4) = 3 \times 9 = 27$

b) En el libro de texto de quinto año se le explica al alumno en qué consiste la propiedad asociativa en la adición, misma que ejercita manteniendo la misma colocación de sumandos pero cambiando la agrupación (22), trabajando inclusive con números enteros.

Ejemplo # 40:

$(9 + 1) + 8 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

$9 + (1 + 8) = \_\_ + \_\_ = \_\_$

Ejemplo # 41:

$7 + 3 + 4 + 12 + 8 = (7 + 3) + 4 + (12 + 8) = (10 + 4) + 20 = 14 + 20 = 34$

Ejemplo # 42:

$(4 + \overline{3}) + 2 = 1 + 2 = 3$

En este libro se explica también al alumno en qué consiste la asociatividad en la multiplicación, coloca en el mismo or

(21): Ibidem. p. 99.

(22): 5o. gdo. Mat. p.p. 95-97, 185.

den los factores, cambiando las agrupaciones (23),

Ejemplo # 43:

$(5 \times 3) \times 2 = 15 \times 2 = 30$

localizando los iguales (24),

Ejemplo # 44:

$(6 \times 8) \times (6 \times 8) \times (6 \times 8) \longrightarrow (6 \times 6 \times 6) \times (8 \times 8 \times 8)$

trabajando hasta con racionales (25).

Ejemplo # 45:

$\frac{1}{2} \times (\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{8}{30}$

También el niño llega a trabajar combinando la asociatividad con la conmutatividad en ambas operaciones como anteriormente se mencionó en la página 23 de este trabajo (26).

Ejemplo # 46:

$98 + 3 + 2 + 17 = (98 + 2) + (3+ 17) = 100 + 20 = 120$

Ejemplo # 47:

$7 \times (5 \times 8) = 8 \times (7 \times 5)$

c) En el libro de texto de sexto año el niño sólo resuelve dos ejemplos de asociación que forman parte de un crucigrama; -

(23): Ibidem. p.p. 106-109.

(24): Ibidem. p. 109.

(25): Ibidem. p. 189.

(26): Ibidem. p.p. 96-97, 108-109.

(27) y observa el uso de la propiedad asociativa al realizar la comprobación de una división (28).

Ejemplo # 48:

$(3 \times 5) + (2 \times 7) = \_$

Ejemplo # 49:

$$8 \overline{)53}^{\;6} \quad \begin{array}{r} -48 \\ \hline 5 \end{array} \longrightarrow 53 = (8 \times 6) + 5 = 48 + 5$$

Esta propiedad el niño puede emplearla al solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita, sobre todo en Educación Media, por ejemplo así:

Ejemplo # 50:

$x - 2 = (7 + 3) - 2$

$x - 2 = 10 - 2$ prop. asociativa

$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 8 + 2$

$x = 10$

Comprobación:

$x - 2 = (7 + 3) - 2$

$10 - 2 = (7 + 3) - 2$

27 : 6o. gdo. Mat. p.p.: 14-15.

28): Ibidem. p. 143.

$8 = 10 - 2$

$8 = 8$

Ejemplo # 51:

$x + 3 = ((2)\ (3))\ (2)$

$x + 3 = (6)\ (2)$ prop. asociativa

$x + 3 = 12$

$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 12 - 3$

$x = 9$

Comprobación:

$x + 3 = ((2)\ (3))\ (2)$

$9 + 3 = (6)\ (2)$

$12 = 12$

3) EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO ADITIVO (cero):

a) En el libro de texto de primer año en ejercicios de números perdidos el niño se entera que al sumar cero a cualquier número, no lo altera (29), incluso la idea la practica al decir si es verdad o mentira una operación resuelta (30), al colocar el signo "+" (31), al unir los iguales (32).

(29): 1er. gdo. Mat. p.p. 71-72, 76, 84, 88, 92, 96, 107-108, 115.

(30): Ibidem. p.p. 72, 77, 109, 111.

(31): Ibidem. p. 79.

(32): Ibidem. p. 73.

Ejemplo # 52:

3 + ___ = 3

Ejemplo # 53:

4 + 0 = 5 _M

Ejemplo # 54:

2 + 0 ---> 2

Ejemplo # 55:

0 ___ 0 = 0

b) En el libro de texto de segundo año el niño sigue uniendo iguales (33) y buscando números perdidos (34) para comprender la misma idea.

Ejemplo # 56:

0 + ___ = 8 + 1

c) En el libro de texto de quinto año, una vez más con un ejemplo de número perdido, el niño ratifica la existencia del elemento neutro aditivo (35) y en otros observa el uso de éste combinándose con la conmutatividad (36).

Ejemplo # 57:

(33): 2o. gdo. Mat. p.p. 42, 48.

(34): Ibidem. p.p. 36-37, 46.

(35): 5o. gdo. Mat. p. 98.

(36): Ibidem. p. 96.

$3 + 0 = 0 + 3 = 3$

d) En el libro de texto de sexto año ya no aparecen ejercicios, solo el chico observa en un solo ejemplo que al sumar cero a otro número, no lo cambia (37).

Ejemplo # 58:

$28 + 0 = 28$

Propiedad que el alumno puede emplear cuando avance en dicho estudio y esté en posibilidades de hacerlo, por ejemplo, así:

Ejemplo # 59:

$x + 6 + 0 = 10$

$x + 6 = 10$ exist. del elemento neutro aditivo

$x+\cancel{6}-\cancel{6} = 10 - 6$

$x = 4$

Comprobación:

$x + 6 + 0 = 10$

$10 = 10.$

4) EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO (unidad):

a) En el libro de texto de segundo año el niño resuelve un solo ejemplo, uniendo iguales, en donde se da cuenta que al -

(37): 6o. gdo. Mat. p. 143.

multiplicar a la unidad por cualquier número, el resultado es el - mismo número (38).

Ejemplo # 60:

42 x 1 ⟶ 42

b) En el libro de texto de tercer año el alumno practica el mismo concepto al efectuar una multiplicación (39) y al completar una tabla de primera columna por primer renglón o viceversa.

Ejemplo # 61:

1 x 10 = __

Ejemplo # 62:

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

c) En el libro de texto de cuarto año el niño sólo observa la existencia del neutro multiplicativo en recta numérica en - forma gráfica (40), no lo ejercita; se presenta formando parte de

(38): 2o. gdo. Mat. p. 101.

(39): 3er. gdo. Mat. p.p. 83, 101-102, 106.

(40): 4o. gdo. Mat. p. 103.

un problema, sólo lo ve. Ahí trata de resolver la interrogante de: ¿Cuántos equipos de futbol de 11 jugadores puede formar en su grupo que supuestamente es de 61 niños?

Ejemplo # 63:

| 11x1 | 11x2 | 11x3 | 11x4 | 11x5 | 11x6 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11 | 22 | __ | __ | __ | 61 | __ sobran __ |

Lo utiliza también encontrando la solución de otras operaciones, aunque en forma indirecta, se da cuenta de su característica (41).

Ejemplo # 64:

12 x 11 = __ x (__ + __) = __x__+__x__=__+__=__

Ejemplo # 65:

$$\begin{array}{r} 410 \\ \underline{x\ 51} \\ 410\ x\ 1 \longrightarrow \_\_\_ \end{array}$$

d) En el libro de texto de quinto año el alumno ve una vez más que el 1 por cualquier número da el mismo número, cuando busca y no encuentra respuesta a un sólo ejercicio de este tipo de multiplicación que ahí aparece (42).

Ejemplo # 66:

(41): Ibidem. p.p. 33-34.

(42): 5o. gdo. Mat. p. 109.

4 x 1

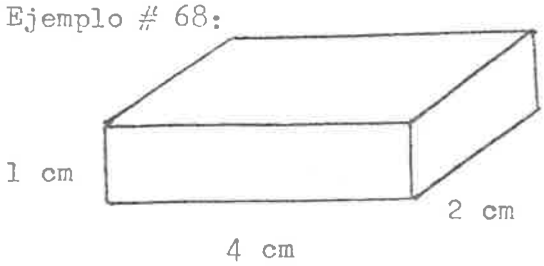
El niño encuentra el neutro multiplicativo en un número perdido (43).

Ejemplo # 67:

__ x 3 = 3

Utiliza el 1 al resolver dos problemas de volumen de cuerpos (44).

Ejemplo # 68:




Volumen = ____________

e) En el libro de texto de sexto año el alumno ve la conclusión de la existencia de este elemento (45) al especificarse que:

Ejemplo # 69:

al multiplicar un número por uno, no lo cambia: 37x1=37

E, incluso lo ratifica al comprender que hay otros factóres que son equivalentes al producto de un número por la unidad (46).

Ejemplo # 70:

(43): Ibidem. p. 202.

(44): Ibidem. p. 212.

(45): 6o. gdo. Mat. p. 143.

(46): Ibidem. p. 146.

$3 \times 3 = 9 \times 1$

Esta propiedad, el niño podría emplearla por ejemplo en esta forma al hácer ya su desarrollo formal cuando esté en Educación Secundaria:

Ejemplo # 71:

$(1)x + (2) = 7$

$x + (2) = 7$ exist. del elemento neutro multiplicativo

$x+\cancel{2}-\cancel{2} = 7 - 2$

$x = 5$

Comprobación:

$(1)x + (2) = 7$

$(1)5 + (2) = 7$

$5 + 2 = 7$

$7 = 7$

5) EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO ADITIVO:

a) En el libro de texto de quinto año (47) el alumno al completar una tabla de adición de enteros, se da cuenta que al sumar dos números simétricos, da como resultado su anulación, misma que observa al completar una igualdad en un número perdido (48).

(47): 5o. gdo. Mat.p. 85.

(48): 6o. gdo. Mat.p. 98.

Ejemplo # 72:

$+ \ \bar{6} \ \bar{5} \ \bar{4} \ \bar{3} \ \bar{2} \ \bar{1} \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$

$\bar{5}$

$\bar{4}$

$\bar{3}$

$\bar{2}$

$\bar{1}$

0
1
2
3
4

Ejemplo # 73:

$\bar{4} + \_\_ = 0$

b) En el libro de texto de sexto año también a base de - números perdidos (49) el niño comprende que los números que al sumarse dan cero, se llaman inversos aditivos, incluso se le pide que los compruebe con recta numérica y a continuación que complete algunos simétricos (50). A base de lo que el alumno induce que: "sumar un número es lo mismo que restar su simétrico" o bien "restar un - número es lo mismo que sumar su simétrico" (51).

(49): Ibidem.p. 98.

(50): Ibidem.p. 99.

(51): Ibidem.p. 100.

Ejemplo # 74:

El simétrico de 5 es __.

Ejemplo # 75:

$7 - 5 = 7 + \overline{5} = 2$ porque el simétrico de 5 es $\overline{5}$.

Ejemplo # 76:

Sumar $\overline{6}$ es lo mismo que restar __.

Ejemplo # 77:

Restar 12 es lo mismo que sumar __.

El inverso aditivo es el elemento que el niño puede emplear en la solución de ecuaciones de primer grado, como lo muestra este ejemplo; cuando ingrese a Educación Media:

Ejemplo # 78:

$x + 8 = 10$

$x + \cancel{8} - \cancel{8} = 10 - 8$ exist. del elemento inverso aditivo

$x = 2$

Comprobación:

$x + 8 = 10$

$2 + 8 = 10$

$10 = 10$

6) EXISTENCIA DEL ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO:

a) En el libro de texto de quinto año, el alumno observa en forma rápida y superficial derivada de la explicación del cociente de fracciones comunes que existen dos de ellas llamadas inversas (cuyo primer numerador es el denominador de la segunda y cuyo segundo numerador es el denominador de la primera) que al multiplicarse obtienen a la unidad como producto, las cuales utiliza el libro para ejemplificar el proceso de división de racionales; en esta explicación el niño conoce los inversos multiplicativos, casi no los ejercita pero llega a saber cuáles son (52).

Ejemplo # 79:

¿Qué es $\frac{5}{3}$ de $\frac{3}{5}$? ____________________

Elemento que el alumno puede utilizar en lo futuro, por ejemplo, de la siguiente forma:

Ejemplo # 80:

$$\frac{7}{3}x = 2$$

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7}x = 2 \cdot \frac{3}{7}$$ exist. del elemento inverso multiplicativo

$$x = \frac{6}{7}$$

Comprobación:

$$\frac{7}{3}x = 2$$

(52): 5o. gdo. Mat. p.p. 213-215.

$$\frac{7}{3}\left(\frac{6}{7}\right) = 2$$

$$\frac{42}{21} = 2$$

$$2 = 2$$

7) DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION CON RESPECTO A LA ADICION:

a) En el libro de texto de segundo año, hay un ejercicio (53) que hace al niño aplicar esta propiedad, compara los resultados iguales al realizar la misma operación aplicando dos propiedades diferentes: la asociativa y la distributiva (multiplicación del factor por cada uno de los sumandos dados).

Ejemplo # 81:

$3 \times (5 + 4) = 3 \times 9 = 27$

$3 \times (5 + 4) = (3 \times 5) + (3 \times 4) = 15 + 12 = 27$

b) En el libro de texto de tercer año (54) el niño ejercita la distributividad al descomponer en sumandos inicialmente el segundo de los factores dados.

Ejemplo # 82:

$18 \times 16 = 18 \times (10 + 6) = 18 \times 10 + 18 \times 6 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

En otro grupo de ejercicios también el niño la plantea, simplifica y resuelve (55) y, entiende bien la idea de distribución

(53): 2o. gdo. Mat. p. 99.     (54): 3er. gdo. Mat. p. 109.

(55): Ibidem. p. 154.

en base a unos problemas que le son dados y explicados de prendas de vestir, producción de piezas de barro y otros (56).

Ejemplo # 83:

En un taller trabajan tres artesanos. Su día de trabajo consta de ocho horas. El primero produce tres piezas en una hora. En el mismo tiempo el segundo produce cinco piezas y el último dos. Para saber la producción total por día, lo escribirá así:

$$3 \times 8 + 5 \times 8 + 2 \times 8 = (3 + 5 + 2) \times 8 = 10 \times 8 = 80$$

c) En el libro de texto de cuarto año el chico vuelve a tener la misma explicación del ejemplo 83 y a ejercitar la distributividad en la misma forma (57) a base de números perdidos, lo que le da la oportunidad de comprender que dentro de una adición planteada, si contienen al mismo factor varios sumandos, puede simplificarse su planteamiento, entendiendo que se afecta cada sumando por el factor dado.

Ejemplo # 84:

$$6 \times 13 + 2 \times 13 = (\_\_ + \_\_) \times 13 = \_\_ \times 13 = \_\_$$

d) En el libro de texto de quinto año al niño nuevamente se le explica la idea distributiva con dibujos de canicas, niños, frutas, vehículos, en donde el número de renglones son multiplica-

(56): Ibidem. p.p. 84-87.

(57): 4o. gdo. Mat. p.p. 26-27.

dos por la adición de columnas diferentes y en donde llega a enunciar esta propiedad (58), a ejercitarla con cierto grado de dificultad (59) incluso con números perdidos (60).

Ejemplo # 85:

$(3 \times 4) + (3 \times 6) + (7 \times 4) + (7 \times 6) =$

Esta propiedad, al niño le sirve para solucionar ecuaciones como ésta que se da en Secundaria:

Ejemplo # 86:

$3(x + 5) = 45$

$3x + (3)\ (5) = 45$ prop. distributiva

$3x + 15 = 45$

$3x + \cancel{15} - \cancel{15} = 45 - 15$

$3x = 30$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{30}{3}$

$x = 10$

Comprobación:

$3(x + 5) = 45$

(58): 5o. gdo. Mat. p.p.: 115-118.

(59): Ibidem. p. 119.

(60): Ibidem. p. 203.

$3(10 + 5) = 45$

$3(10)+3(5)= 45$

8) CLAUSURATIVA O DE CERRADURA (tanto en la adición como en la multiplicación):

Es otra de las propiedades de las operaciones que se presentan en la Educación Primaria, la cual puede apreciarse en todas y cada una de las páginas de los libros de texto en donde hay operaciones, ya que al trabajar y efectuar cualquiera de ellas, el resultado obtenido es también de la misma especie.

Ejemplo # 87:

$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$ si a un número racional se le suma o multiplica con otro racional, el resultado es también racional.

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

Unos ejemplos de su uso en la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, pueden ser los siguientes, cuando el niño ingrese a Educación Media:

Ejemplo # 88:

$x + 4 + 6 = 15$

$x + 10 = 15$ prop. de cerradura

$x+\cancel{10}-\cancel{10} = 15 - 10$

$x = 5$

Comprobación:

$x + 4 + 6 = 15$

$5 + 4 + 6 = 15$

$15 = 15$

Ejemplo # 89:

$(5)\ (2)\ (x) = 20$

$10x = 20$ prop. de cerradura

$10x\ (\frac{1}{10}) = 20\ (\frac{1}{10})$

$\frac{\cancel{10}x}{\cancel{10}} = \frac{20}{10}$

$x = 2$

Comprobación:

$(5)\ (2)\ (x) = 20$

$(5)\ (2)\ (2) = 20$

$20 = 20$

SOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA:

Ahora bien, el presente trabajo se aboca en forma concreta a las bases que se dan en la escuela primaria para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita, es decir el conocimiento de las propiedades de adición y multiplicación, pero en algún (61)

(61): 5o. gdo. Mat: problema 2 de la p. 268.

momento también llegan a solucionar una de éstas ecuaciones en: el libro de texto de quinto:

Ejemplo # 90:

Ricardo tiene tres veces más dinero que Pablo. Si Ricardo comprase un juguete que cuesta $ 25.00 el dinero sobrante sería la mitad del dinero que tiene Pablo. ¿Cuánto dinero tiene cada uno? (Piensa que los $ 25.00 que gastó Ricardo representan $2\frac{1}{2}$ veces el dinero de Pablo).

DATOS:

Ricardo: $2\frac{1}{2}x$

Pablo: $x$

$ 25.00

PLANTEAMIENTO:

Atendiendo a la observación entre paréntesis, se puede plantear como "x" el dinero de Pablo en virtud de que es una cantidad desconocida y como "$2\frac{1}{2}x$" el de Ricardo, como esa representación argumenta.

ECUACION:

$$2\frac{1}{2}x = 25$$

$$\frac{5}{2}x = 25$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} x = 25 \cdot \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{50}{5}$$

$$x = 10$$

Comprobación:

$$2\frac{1}{2}x = 25$$

$$2\frac{1}{2}(10) = 25$$

$$\frac{5}{2}(10) = 25$$

$$\frac{50}{2} = 25$$

$$25 = 25$$

COMPROBACION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

En Educación Primaria empieza a conocerse la PROPIEDAD REFLEXIVA DE LA IGUALDAD, la cual es necesaria para la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, en virtud de que se debe llegar a una equivalencia o igualdad para saber si efectivamente está bien solucionada toda operación indicada.

a) En el libro de texto de primer año, el alumno utiliza el signo "igual" para establecer equivalencia, basándose en números perdidos (62) e identificando la verdad o mentira sobre afirma-

(62): ler. gdo. Mat. p. 66.

ciones dadas (63).

Ejemplo # 91:

6 = ___

Ejemplo # 92:

7 = 7 ___

b) En el libro de texto de cuarto año, el niño identifica una equivalencia (64).

Ejemplo # 93:

017 $\square$ 17

c) En el libro de texto de quinto año, el niño identifica dos equivalencias más (65).

Ejemplo # 94:

8 ___ 8

Esta propiedad de la **igualdad** es usada con frecuencia - porque constantemente se ven igualdades en los libros de texto, pero la reflexividad, en donde se observa que todo número es igual a sí mismo, está implícita en el momento final de toda ecuación: su comprobación.

Al realizar una de ellas, el alumno estará utilizándola:

(63): Ibidem. p.p. 65, 102.

(64): 4o. gdo. Mat. p. 8.

(65): 5o. gdo. Mat. p. 272.

Ejemplo # 95:

$x + 3 = 7$

$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 7 - 3$

$x = 4$

Comprobación:

$x + 3 = 7$

$4 + 3 = 7$

$7 = 7$ prop. reflexiva

o

$7 \equiv 7$ equivalencia

EN BASE A LAS SIGUIENTES CONSIDERACIONES:

1) En el libro de texto de primer año, el niño empieza a aplicar la conmutatividad en la adición.

2) En el libro de texto de segundo año, continúa aplicando la conmutatividad en la adición y empieza a aplicarla en la multiplicación.

3) En el libro de texto de tercer año, el niño sigue ejercitando la conmutatividad en la adición.

4) En el libro de texto de cuarto año, continúa aplicando la conmutatividad en la multiplicación.

5) En el libro de texto de quinto año el niño sigue practicando la conmutatividad en ambas operaciones, las enuncia y hasta combina con asociación.

6) En el libro de texto de sexto año el alumno recuerda la conmutatividad tanto en la adición como en la multiplicación.

7) En el libro de texto de segundo año el alumno empieza a familiarizarse con la asociatividad tanto en la adición como en la multiplicación.

8) En el libro de texto de quinto año el niño sigue ejercitando la asociatividad en la adición iniciada hasta enteros y en la multiplicación iniciada hasta racionales; viendo en qué consiste y combinándola con la conmutatividad en ambas operaciones, -

con naturales.

9) En el libro de texto de sexto año el niño solo recuerda en forma superficial la asociatividad combinada en ambas operaciones.

10) En los libros de texto de primero y segundo años el niño comprende y reconoce la utilidad de la existencia del elemento neutro aditivo.

11) En los libros de texto de quinto y sexto año el niño ratifica y concluye la característica peculiar del elemento neutro aditivo.

12) En el libro de texto de segundo año el niño empieza a familiarizarse con la existencia del elemento neutro multiplicativo.

13) En el libro de texto de tercer año ejercita un poco - más este elemento.

14) En el libro de texto de cuarto año observa la característica propia del neutro aditivo.

15) En el libro de texto de quinto año el chico sigue - viendo y practicando el neutro aditivo.

16) En el libro de texto de sexto año el niño lo recuerda y concluye su utilidad.

17) En el libro de texto de quinto año el niño empieza a

percatarse de la existencia del elemento inverso aditivo.

18) En el libro de texto de sexto año practica los simétricos y comprueba su existencia.

19) En el libro de texto de quinto año el niño casi no ejercita la existencia del elemento inverso multiplicativo pero si llega a saber cuál es.

20) En el libro de texto de segundo año el niño empieza a familiarizarse con la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición.

21) En el libro de texto de tercer año la practica y comprende más.

22) En el libro de texto de cuarto año continúa ejercitándola.

23) En el libro de texto de quinto año sigue practicándola y la enuncia: (Ley Distributiva).

24) La clausuratividad o cerradura en ambas operaciones es practicada por el niño en todos los libros de texto en los que aparecen operaciones, aunque no es mencionada.

SE PUEDE CONCLUIR QUE:

I.- La conmutatividad en ambas operaciones es bien conocida y practicada por el alumno a lo largo de su Educación Primaria.

II.- La asociatividad en ambas operaciones, es conocida también por el niño en tres de sus años de Educación Primaria.

III.- La utilidad de la existencia del elemento neutro aditivo es conocida por el alumno en cuatro de los cursos de su Educación Primaria.

IV.- La utilidad de la existencia del elemento neutro multiplicativo es también conocida y ejercitada por el niño en cinco años de su Educación Primaria.

V.- La existencia del elemento neutro aditivo es conocida por el alumno en los dos últimos años de su Educación Primaria.

VI.- La existencia del elemento inverso multiplicativo - el niño la conoce en 5o. grado de su Educación Primaria.

VII.- La distributividad de la multiplicación con respecto a la adición es conocida por el alumno en cuatro años de su Educación Primaria.

VIII.- La clausuratividad o cerradura tanto en la adición como en la multiplicación es practicada por el niño a todo lo largo de su Educación Primaria aunque no es identificada.

IX.- En Educación Primaria el niño conoce las propiedades de adición y multiplicación, bases, que le permitirán con adecuado entrenamiento en Educación Media, poder solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Del análisis del capítulo anterior y de los puntos mencionados en el presente, podemos concluir que: el alumno que curse y aprenda el contenido de los seis cursos de Matemáticas de Educación Primaria tiene las bases necesarias para que a través de entrenamiento adecuado en Educación Media, aplique éstas a la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

A pesar de no haberse tratado sistemas de ecuaciones, se puede concluir que los conocimientos adquiridos en Educación Primaria se adecúan para atacar este tipo de problemas.

Un aspecto interesante del presente trabajo, además del que por sí mismo encierra, es el que no es un problema cerrado; - es decir, es un problema que plantea varias preguntas, entre las - que se pueden destacar:

a) El alumno durante sus seis años de estudio ¿podrá asimilar los conocimientos mencionados en el presente trabajo?

b) Una vez estando en Educación Secundaria ¿se sabrán - encauzar estas bases de manera adecuada?

APENDICE I:

Atendiendo a que toda ecuación es una igualdad (equivalencia existente entre dos miembros), son tres las propiedades que la caracterizan:

a) REFLEXIVA: todo número es igual a sí mismo.

Ejemplo # 96:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) SIMETRICA O RECIPROCA: si un número es igual a otro, entonces ese otro es igual al primero.

Ejemplo # 97:

Si $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ entonces $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

c) TRANSITIVA: si un primer número es igual a un segundo número y ese segundo número es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.

Ejemplo # 98:

Si $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ entonces $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA:

1.- Cárdenas Humberto et al.

Algebra Superior,

Trillas, Edit.

México, 1974.

2.- H. Lehmann Charles.

Algebra.

Limusa-Wiley, S. A.

México, 1973.

3.- López García Raúl y Pérez Ceniceros Jorge Luis.

Matemáticas Individualizadas,

1er. grado, cuaderno de trabajo, educación media básica,

Limusa, Edit.,

primera edición,

México, 1977.

4.- Robledo Vázquez y Cruz Ramos.

Matemáticas,

1er. grado, libro de texto, enseñanza media básica,

Trillas, Edit.,

primera edición,

México, 1977.

5.- Robledo Vázquez y Cruz Ramos.

Matemáticas,

2o. grado, cuaderno de trabajo, educación media básica,

Trillas, Edit.,

primera edición,

México, 1976.

6.- Robledo Vázquez y Cruz Ramos.

Matemáticas,

2o. grado, libro de texto, enseñanza media básicea,

Trillas, Edit.,

primera edición,

México, 1976.

7.- S. E. P.

Matemáticas,

1er. grado, libro de texto,

octava edición,

México, 1972.

8.- S. E. P.

Matemáticas,

2o. grado, libro de texto,

octava edición,

México, 1972.

9.- S. E. P.

Matemáticas,

3er. grado, libro de texto,

séptima edición,

México, 1972.

10.- S. E. P.

Matemáticas, 4o. grado, libro de texto,

sexta edición,

México, 1974.

11.- S. E. P.

Matemáticas,

5o. grado, libro de texto,

séptima edición,

México, 1972.

12.- S. E. P.

Matemáticas,
6o. grado, libro de texto,
sexta edición,
México, 1974.

13.- S. E. P.
Matemáticas,
1er. grado, programa Educación Media Básica,
México, 1975.

14.- S. E. P.
Matemáticas,
2o. grado, programa Educación Media Básica,
México, 1976.