



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



**SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD AJUSCO
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA**

**COMPRENSIÓN DE LA FRACCIÓN “1/2” EN ALUMNOS DE TERCERO DE
PRIMARIA: DIFERENTES INTERPRETACIONES Y REGISTROS DE
REPRESENTACIÓN**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN PEDAGOGÍA**

PRESENTA:

BRENDA GONZÁLEZ GONZÁLEZ

ASESORA:

DRA. IVONNE TWIGGY SANDOVAL CÁCERES

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE, 2020

Índice

Introducción.....	1
Capítulo 1. Comprensión de “la mitad de” en tercero de primaria.....	4
1.1 Problemática	4
1.2 Antecedentes	6
1.3 Preguntas de investigación	11
1.4 Objetivos	11
1.5 Justificación	12
1.6. Supuesto.....	14
Capítulo 2. Diferentes interpretaciones y registros de representación de la fracción	15
2.1. Distintas interpretaciones de la “fracción”	15
2.1.1 La fracción en tercero de primaria. Dos usos diferentes.....	21
2.2 Registros de representación en la comprensión del concepto “fracción”	35
2.2.1 Transformaciones en y entre registros de representación	37
Capítulo 3. Un acercamiento metodológico.....	40
3.1. Perspectiva metodológica de este estudio.....	40
3.2 Diseño de instrumentos	42
3.2.1 Aplicación de instrumentos.....	45
3.3 Categorías de análisis.....	46
3.4. Contexto interno y externo de la escuela	49
Capítulo 4. Comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes representaciones y situaciones	51
4.1. Una mirada global a las respuestas. Lo que hacen los alumnos respecto a “la mitad de”	51

4.1.1 Reconocimiento/identificación de “la mitad de” en un registro gráfico	52
4.1.2. Construcción de “la mitad de” en un entero dado	61
4.1.3. Escritura de un medio, $\frac{1}{2}$ y “la mitad de” para resolver un problema.....	67
4.2. Una mirada más puntual. Tres casos con diferencias en el proceso de comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$	71
4.2.1. Iniciando el proceso, primeros pasos. Reconocimiento de la fracción $\frac{1}{2}$ en pocas situaciones o tipos de representaciones. Dificultades para construir unidades simples	71
4.2.2. En proceso. Reconocimiento de la fracción $\frac{1}{2}$ en varias situaciones, construye unidades dificultades con algunas representaciones	74
4.2.3. Reconoce la fracción $\frac{1}{2}$ en varias situaciones, construye unidades y articula diferentes representaciones	77
Conclusiones y reflexiones finales	81
Referencias Bibliográficas	88
Anexos	94
Anexo 1	94
Anexo 2.....	99
Anexo 3.....	104
Anexo 4.....	105

Agradecimientos

En primer lugar, te agradezco, mi Dios, por mi vida y por haberme permitido culminar esta etapa de estudio, pues en ningún momento me has abandonado.

Seguidamente a mis padres Alma y Alfredo, les agradezco infinitamente haberme dado un hogar donde aprender, crecer, desarrollarme, equivocarme y dónde adquirí los valores que hoy definen mi vida. Admiro la manera en la que me educaron con muchísimo amor; son un ejemplo de constancia y dedicación. Gracias por todo, por siempre estar conmigo; en especial por brindarme todo lo necesario para poder concluir un escalón más de mi trayectoria académica. Sin duda alguna, esta tesis es un logro que no hubiera sido posible sin el apoyo de ustedes. Los amo eternamente. También quiero dar gracias a mi pequeña Samantha, llegaste en el mejor momento de mi vida, eres mi fuente de motivación e inspiración que me impulsa a salir adelante día con día.

Alejandro, gracias por tu sacrificio y esfuerzo estos últimos años de mi licenciatura, por ayudarme a concluir este proyecto y por creer en mis capacidades. A pesar de que hemos pasado momentos difíciles te has mantenido a mi lado brindándome tu comprensión, cariño y amor.

Quiero agradecer también a mi estimada asesora de tesis, la Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres, por todo su apoyo, su tiempo y por compartirme sus conocimientos. Es una excelente profesora e investigadora, un ejemplo a seguir. Gracias Dra. por tanta sabiduría, exigencia y dedicación, fue un honor realizar este proyecto a su lado.

Asimismo, agradezco a mis lectores, por su tiempo y por sus observaciones que fueron oportunas y pertinentes para la mejora de esta tesis.

Por último, no me queda más que agradecer a todas aquellas personas que de una u otra forma me apoyaron para alcanzar el objetivo, titularme. ¡Gracias familia y amigos!

Introducción

Las matemáticas son una herramienta útil para interactuar dentro de un contexto escolar y en diferentes situaciones de la vida cotidiana. Las fracciones son uno de los contenidos en los que los estudiantes enfrentan diversas dificultades al momento de aprenderlas, debido a su complejidad conceptual (Block, Moscos, Ramírez y Solares, 2007; Butto, 2013; Buforn, Llinares y Fernández, 2018).

En tareas de resolución de problemas se han identificado que algunas de estas dificultades están relacionadas con la falta de interpretación de los significados de “fracción” (Block, Moscos, Ramírez y Solares, 2007). El contexto o problema a resolver puede involucrar uno o más de los ocho diferentes significados de la fracción: parte-todo, cociente, operador, razón, medida, en la probabilidad, en porcentajes y como división indicada (Valenzuela, 2018). Todas ellas resultan necesarias para su comprensión (Ramírez y Block, 2009; Valdemoros, 2010; Buforn, Llinares y Fernández, 2018).

Además, en matemáticas, para comprender un concepto es necesario identificarlo, representarlo en diferentes registros de representación, por ejemplo, (gráfico, numérico, lenguaje natural) y realizar transformaciones entre ellos. De esta manera, para la adquisición y profundización conceptual resulta relevante incluir diversas situaciones con distintas representaciones, a fin de que en el proceso de resolución estas remitan a tareas específicas.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar los logros y dificultades que enfrentan alumnos de tercer grado de primaria, de una escuela pública de la Ciudad de México, en el proceso de reconocer, crear y usar la fracción $\frac{1}{2}$ en sus tres distintos registros de representación (gráfico, numérico, lenguaje natural). A fin de documentar la interpretación, la comprensión y uso de la fracción $\frac{1}{2}$ se diseñaron dos cuestionarios con diferentes actividades relacionadas con “la mitad de” en las que se pretendía identificar cómo las representaciones (gráfica, numérica, lenguaje natural) son útiles para lograr la comprensión de un mismo concepto. Por ejemplo, representaciones de la fracción $\frac{1}{2}$ con diferentes enteros divididos en partes iguales, expresiones y

justificaciones del significado “mitad de” en contraste con el reconocimiento de figuras prototípicas.

Este documento se organiza en cuatro capítulos. En el primero se describe la problemática, se sintetizan diferentes estudios relacionados con las fracciones desde diferentes miradas: el aprendizaje, la enseñanza y los materiales educativos; información que permite mostrar por qué es vigente seguir estudiando respecto al aprendizaje de las fracciones en primaria. Este finaliza con los objetivos, las preguntas y el supuesto planteado.

El segundo capítulo está conformado por tres aspectos. Se inicia con la descripción del plan y programas de estudio, así como algunas lecciones del libro de texto gratuito de tercer grado de primaria (SEP, 2013) relacionadas con el tema de fracciones y que se estaba utilizando en el ciclo escolar 2018-2019. Después, se sintetizan las diferentes interpretaciones para la fracción sugeridas desde la propuesta curricular oficial. El último aspecto es el relacionado con el marco teórico de los registros de representación (Duval, 1999). Las interpretaciones para las fracciones, así como los registros de representación, son las herramientas conceptuales y teóricas para el diseño de los instrumentos de recolección de datos, así como para el análisis y la obtención de resultados.

En el tercer capítulo se detalla la población que participó en el estudio, las características respecto al enfoque para la recolección y análisis de datos. También se describen los dos instrumentos utilizados, dos cuestionarios y una entrevista semiestructurada. Se concluye con el proceso de selección de datos que permiten dar respuesta a las preguntas planteadas, así como las categorías de análisis, sus descripciones e indicadores.

En el último capítulo se presentan los datos y su análisis respecto al nivel de comprensión de 26 alumnos de tercero de primaria en relación con las diferentes interpretaciones y representaciones de “la mitad de”. Se muestran los resultados de manera global, identificando dificultades y logros. También se detallan tres casos en los que se muestran diferentes niveles de logro respecto a la comprensión de la

fracción $\frac{1}{2}$.

Finalmente, se presentan las conclusiones a partir de las respuestas a las preguntas iniciales y el logro de los objetivos propuestos, se describen algunas limitaciones en el proceso de recolección de datos y se incluyen recomendaciones para futuros estudios. Además, se incluyen las referencias bibliográficas y en los anexos se integran los instrumentos diseñados y las respuestas de seis estudiantes.

Capítulo 1. Comprensión de “la mitad de” en tercero de primaria

En México, el estudio de las fracciones se inicia formalmente en tercero de primaria. Sin embargo, en la vida cotidiana hay fracciones como es el caso de un medio - $\frac{1}{2}$ - “la mitad de” usadas en diferentes contextos, fuera del escolar. Por ejemplo, en el lenguaje oral hay expresiones como “**medio** kilo de tortillas”; “sólo quiero **la mitad**”, “la micha”, “todo a **mitad de** precio”, “estás a **medio** camino”, “solo te creo **la mitad** de lo que dices”, “estamos a **mitad** de semana”, “es **mediodía**”, “busca a tu otra **mitad**”, “el celular tiene **la mitad** de batería”.

En diferentes espacios se usa el símbolo numérico ($\frac{1}{2}$) para referirse a la mitad “ $\frac{1}{2}$ litro de pintura” (casas de pintura, Comex), “ $\frac{1}{2}$ kilo por \$20” (en el mercado); “ $\frac{1}{2}$ tanque de gasolina” (en el automóvil); “agrega $\frac{1}{2}$ jugo de limón” (recetas de cocina); “ $\frac{1}{2}$ ” (pulgada) de clavo o varilla” (en ferreterías); “tu herencia es de $\frac{1}{2}$ hectárea” (terreno); “calzo del 3 $\frac{1}{2}$ ” (zapaterías). Estas experiencias iniciales pueden acercarnos a este concepto.

Como se mostrará en este capítulo, varios estudios han indicado que este contenido tiene un nivel de complejidad mayor a la de los números naturales pues conlleva un cambio de clasificación respecto a los números abordados en preescolar y en los primeros dos ciclos de primaria. Son particiones y no se trata de enteros. Es por ello que nos interesa dar cuenta del nivel de comprensión respecto a una fracción, aparentemente sencilla como lo es $\frac{1}{2}$ en estudiantes de tercero de primaria, quienes ya han abordado esta fracción tanto en expresiones verbales como simbólicas. En este capítulo se precisa, qué se estudiará y por qué es relevante hacerlo.

1.1 Problemática

Los números fraccionarios son uno de los contenidos abordados en la educación básica. Su estudio inicia en tercer grado, en el que se espera que el alumno “Usa[e] fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos” (SEP, 2017, p. 318). Este finaliza en primero de secundaria cuando “Convierte fracciones decimales a notación decimal y viceversa.

Aproxima algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordena fracciones y números decimales” (SEP, 2017, p. 322). La importancia dada a este tema se evidencia en la cantidad de aprendizajes esperados de un total de setenta y dos en primaria, diecisiete se relacionan con las fracciones (SEP, 2017). Además, en algunas pruebas nacionales hay un alto porcentaje de reactivos que indagan por la comprensión de este tema. En el caso del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA, 2018) de un total de 50 reactivos en matemáticas, aproximadamente un 20% (10 ítem) se refiere a números fraccionarios, solicitando la resolución de problemas que implican sumas y restas de fracciones con diferente denominador. También en la resolución de problemas que impliquen particiones identificando si la fracción es mayor o menor de la unidad dada. Lo mismo sucede con evaluaciones como el Examen para la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE, 2013-2014).

Los resultados en este tipo de pruebas nacionales muestran dificultades para los estudiantes de sexto grado de primaria. En particular, en EXCALE (2013-2014), el 46% de los alumnos que participaron en esta evaluación presentaron deficiencias en leer, comprender y ordenar números fraccionarios y no resolvieron problemas de reparto cuyo resultado era una fracción propia e impropia. Así mismo, en los resultados de PLANEA (2018) un 60.5% de estudiantes presentaron limitaciones en ejercicios que involucraban leer y realizar operaciones básicas con números fraccionarios, y representar gráficamente fracciones comunes.

Entonces, hay dificultades vinculadas con el aprendizaje del concepto de fracción al finalizar la educación primaria. Algunos autores lo han relacionado con la falta de interpretación de los significados de “fracción” (Block, Moscos, Ramírez y Solares, 2007). Cabe la inquietud de cómo estas dificultades se relacionan con los registros de representación gráficos, numéricos y en lenguaje natural, en contextos matemáticos cuando los alumnos inician el estudio formal de las fracciones.

En este sentido, el estudio que aquí se presenta documenta lo que sucede con alumnos de tercero de primaria de una escuela pública, mostrando la manera en que

usan dichos registros de representación en contextos oportunos y en cómo los transforman unos en los otros para resolver un problema.

1.2 Antecedentes

Las fracciones pueden estudiarse desde diferentes miradas; por ejemplo, el aprendizaje (con estudiantes), la enseñanza (propuestas de enseñanza, estrategias de los profesores, planeaciones) y los materiales educativos (libros de texto).

Respecto a la enseñanza, los estudios muestran algunas estrategias que pueden utilizar los docentes a nivel primaria, para lograr en los estudiantes comprensión del contenido de fracciones. Block, Moscos, Ramírez y Solares (2007); Cortina y Zúñiga (2008); y Valdemoros (2010), sugieren que el docente debe incluir adaptaciones a sus actividades, de acuerdo a las necesidades específicas de los estudiantes en relación con su entorno, a fin que el tema les despierte un interés.

Es necesario, según Buforn, Llinares y Fernández (2018), identificar el método que utilizan los docentes y los conocimientos que poseen de acuerdo al contenido de fracciones porque son un factor que interfiere en la enseñanza y aprendizaje. Según los resultados de sus investigaciones, la mayoría de los docentes en servicio aun ponen en práctica los métodos tradicionalistas, donde únicamente el docente es quien posee y trasmite el conocimiento a los estudiantes, desarrollando en ellos un proceso de memorización de los contenidos y no necesariamente, la comprensión conceptual. En el modelo pedagógico tradicionalista, el rol del maestro es de ser transmisor de información “dicta la lección a un estudiante que recibirá las informaciones y las normas transmitidas. El aprendizaje es también un acto de autoridad” (Amador, 2018, p. 801).

De acuerdo con Block, Moscos, Ramírez y Solares (2007), el desarrollo de determinados conocimientos se opone a una práctica muy antigua, arraigada a la interpretación de problemas que plantean únicamente conocimientos previamente enseñados; es decir, el docente incluye prácticas tales como ejercitar las técnicas de las operaciones, proporcionar información o explicaciones a los alumnos, señalar los

errores, organizar el trabajo en forma individual, prácticas que se asocian con lo “tradicional”. Ante esta situación los alumnos de nivel básico muestran algunas dificultades al momento de introducirles varios significados de las fracciones con diversos usos según el tipo de tarea, por ejemplo, situaciones que admiten diferentes formas de resolución o varias respuestas posibles relacionadas con un mismo concepto.

Las fracciones se han convertido en un objeto de enseñanza a nivel primaria, considerándose entre los más difíciles. Una de las razones es que “el número racional implica una relación entre dos números (a/b , con $b \neq 0$) y que admite múltiples interpretaciones, puesto que se puede moldear una amplia variedad de situaciones” (Avila, 2006, p. 181).

Aportaciones como la de Rojas (1995) dan cuenta de propuestas para los docentes, con cuatro estrategias (organización de grupo; tomar en cuenta las distintas conceptualizaciones acerca de los contenidos; analizar cada una de las actividades seleccionadas considerando el material didáctico necesario y combinar actividades individuales, en equipo y grupales) a fin de que los alumnos superen las dificultades ya documentadas cuando aprenden y se enseñan las fracciones. Según este autor, el primer tropiezo se presenta cuando se define el término fracción y la manera como se relaciona con experiencias de la vida diaria del alumno.

El nivel de comprensión de un concepto puede valorarse durante la enseñanza con el tipo de participación en clase, al resolver ejercicios y problemas planeados con el contenido. La investigación realizada por Rojas (2017) muestra cómo distintos docentes enseñan el contenido en relación con el entorno social de los estudiantes, es decir, con su vida cotidiana, para que fuera de la escuela lo puedan llevar a la práctica. Por ejemplo, durante el desarrollo de su estudio se percató que la enseñanza de las matemáticas tiene carencias significativas en cuanto a la construcción y dominio de los contenidos básicos. Durante su investigación, un docente puso en marcha la estrategia de fusionar lo que sabían y hacían los alumnos, con el nuevo contenido. Fue necesario que el docente previamente tomará

conciencia que los diferentes saberes incidían y condicionaban el quehacer de sus alumnos. Algunos aspectos involucrados en el proceso de aprendizaje, como la experiencia, la historia de vida, y la relación con la práctica cotidiana del aula, conlleva a los alumnos hacerse autónomos y cuestionadores.

Estudios sobre el aprendizaje de las fracciones (p.e., Pruzzo, 2012; Fernández, Riffo y Sandoval, 2013; Caballero y Juárez, 2016; López y del Valle, 2017) señalan que se ha concebido la posibilidad de que a veces no existen dificultades en el aprendizaje de fracciones sino errores conceptuales, algunos derivan de concepciones personales construidas fuera del contexto escolar. La forma en que usualmente se transmite un concepto, según Pruzzo (2012), excluye experiencias de aprendizaje dentro y fuera de las aulas, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes, pues no logran entender, usar y explicar el concepto en diferentes contextos. Según esta autora, el aprendizaje de cualquier concepto implica que el alumno comprenda el significado y las diferentes formas de representarlo de acuerdo a sus experiencias y conocimientos adquiridos dentro y fuera (experiencias) de la escuela.

Las dificultades conceptuales se gestan dentro de la escuela durante la práctica de enseñanza porque algunos conceptos matemáticos se desarrollan, se articulan y se representan de diversas formas (López y Sosa, 2008). Mientras que los errores conceptuales se derivan de concepciones personales construidas fuera del ámbito escolar; que pueden, ser revertidos (Pruzzo, 2012).

Ramírez y Block (2007), Valdemoros (2010) y Buforn, Llinares y Fernández (2018), analizan dificultades de aprendizaje de fracciones en alumnos de primaria, específicamente en tercer grado. Ellos manifiestan que la principal limitación en la adquisición de un concepto se relaciona con el conocimiento del maestro sobre el concepto. En este sentido, estos autores coinciden en la necesidad de preguntar a los maestros qué conocen sobre el contenido matemático a enseñar a fin que no se enfoquen únicamente en dictar el significado del concepto para ser almacenado en las libretas de los estudiantes; sino centrar su atención hacia la comprensión del

contenido, mediante explicaciones relacionadas en diferentes contextos matemáticos.

Las fracciones deben ser introducidas mediante el registro de lenguaje natural, es decir, un lenguaje verbal que los alumnos entiendan (Ramírez y Block, 2007). Estos autores señalan que las experiencias de las fracciones en la vida diaria influyen en lo que sucede en las aulas escolares. De ahí que en el ámbito escolar el símbolo que denota a una fracción no es nueva para los estudiantes.

Las dificultades de aprendizaje en la adquisición de fracciones se deben a diferentes aspectos. Por ejemplo, los estudiantes de educación primaria desconocen el significado formal de fracción y que se puede representar simbólicamente con números naturales y números racionales; en algunos casos no consideran que las fracciones forman un conjunto de números con propiedades específicas, distintas a la de los números naturales, lo que implica un cambio conceptual (Barragán, 2014). Es decir, “Las fracciones no son algo que hay que saber, sino algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas” (González, 2015, p. 14).

Las fracciones tienen multiplicidad de aplicaciones en diferentes contextos de la vida real. Sin embargo, a nivel educativo y según investigaciones relacionadas con este tema (Arreaza, 2009; Fandiño, 2009; Mora, 2005) los estudiantes de primaria no logran operar con fracciones. Además, en la resolución de problemas con fracciones, se han identificado dificultades de los estudiantes relacionados con la comprensión, traducción de datos y con la solución general del problema. Estas dificultades están relacionadas con la variedad de significados que provoca constantes errores conceptuales (Valencia, 2013).

Es necesario, según Acosta (2000), proporcionar alternativas y una posible reconstrucción de los programas, planes de estudio y de los libros de texto de las matemáticas. Asunto que en México ya ha sido abordado con tres reformas educativas en este siglo (Programa Nacional de Educación, 2001; Programa Sectorial de Educación, 2007 y Reforma educativa, 2013).

De acuerdo con Acosta, estas alternativas podrían apoyar a que los docentes tengan las bases adecuadas para la planificación e incentiven la adaptación de nuevas estrategias de aprendizaje que propicien en los alumnos, la adquisición y construcción de nuevos conocimientos (conceptos) que puedan ponerlos en práctica en contextos dentro y fuera del ámbito académico.

Por último, Valdemoros (2010) menciona una gran dependencia del docente hacia el libro de texto gratuito, proporcionado por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Esta autora muestra que los docentes ponen en práctica diversas estrategias de enseñanza que el libro de texto les brinda para el tratamiento de todas las clases a desarrollar, en conexión con las actividades didácticas complementarias sugeridas por ellos. Sin embargo, la autora cuestiona que no necesariamente hay una reflexión del docente sobre la comprensión conceptual de sus alumnos en relación con los contextos propuestos por los materiales utilizados. Lo que puede convertirse en una dificultad enfrentada por los alumnos al no comprender el contenido. Entonces, el desafío para los docentes y diseñadores de libros de texto es la búsqueda de estrategias de aprendizaje eficientes, a fin de que los alumnos puedan aprender de una manera significativa y logren resolver problemas que requieran poner en práctica su curiosidad e imaginación creativa. Aunque esta habilidad de los profesores para adaptar y crear estrategias de aprendizaje para las fracciones es necesario atender desde la propia formación docente. Tema que no se aborda en esta tesis.

Los estudios descritos anteriormente permiten inferir que existen un gran número de factores que afectan de manera directa e indirecta en el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones. Varios de ellos coinciden en que los métodos de enseñanza utilizados por el docente y los conocimientos previos de los estudiantes son piedra angular para la comprensión conceptual. De modo que consideramos indispensable, aportar al ámbito educativo, un análisis sobre la comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$ que tienen los alumnos en relación con su primer acercamiento formal a los números fraccionarios, y su capacidad de utilizar nuevos registros de representación

adecuándolos al contexto escolar, mediante la identificación y uso de diferentes significados para expresar “la mitad de”.

1.3 Preguntas de investigación

-) ¿De qué manera alumnos de tercer grado usan y articulan diferentes registros de representación para resolver problemas que involucran la fracción $\frac{1}{2}$?
-) ¿Qué logros y dificultades enfrentan los estudiantes de tercer grado al resolver problemas relacionados con la identificación, construcción y uso de la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural)?
-) ¿En qué situaciones los alumnos de tercer grado de primaria muestran mayor nivel de comprensión respecto a “la mitad de”?

1.4 Objetivos

La investigación tiene como objetivo general documentar el nivel de comprensión que presentan alumnos de tercer grado de primaria en el proceso de identificación del concepto fracción $\frac{1}{2}$ en sus tres registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural).

Para lograr lo anterior fue necesario fijar los siguientes objetivos específicos:

-) Identificar dificultades de los estudiantes de tercer grado de primaria al resolver actividades relacionadas con diferentes registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural) que incluyen la fracción $\frac{1}{2}$.
-) Comparar los logros de los estudiantes en relación con reconocer, crear y hacer uso de la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes registros de representación, con lo propuesto en el plan y programa 2011 de la Secretaría de Educación Pública para el ciclo escolar 2018-2019.
-) Describir las actividades donde los alumnos mostraron mayor nivel de comprensión respecto a “la mitad de” y qué registro de representación predominó.

1.5 Justificación

Los procesos de aprendizaje y enseñanza de las fracciones son considerados por los alumnos, docentes y por la mayor parte de la sociedad como un tema complicado, confuso y difícil de aprender. Una de las causas, como se mostró en el apartado 1.2, son las estrategias utilizadas por los docentes durante el proceso de enseñanza en sus aulas. De acuerdo con Fazio y Siegler (2011)

Para enseñar fracciones, los mismos docentes deben tener un conocimiento profundo de los conceptos de fracciones y operaciones. Investigadores hallaron que el rendimiento matemático de los estudiantes está positivamente correlacionado con el conocimiento matemático del docente. Desafortunadamente, muchos docentes carecen de una comprensión conceptual profunda de fracciones, especialmente de fracciones aritméticas. Esta comprensión profunda es particularmente importante cuando se utilizan representaciones visuales para enseñar los conceptos de fracciones. Los docentes deben ser capaces de utilizar diferentes representaciones y a la vez estar aptos para elegir una representación adecuada para cada situación (p. 21).

Una razón de su dificultad es que, en la primera clase introductoria a las fracciones, los estudiantes enfrentan un cambio conceptual – simbólico de los números enteros. Es decir, para el alumno es difícil comprender que la fracción es una relación entre un par de números naturales escritos de la forma a / b (Llinares y Sánchez, 1988). Por tanto, es importante que los docentes logren detectar las dificultades de sus alumnos en relación con la comprensión del concepto de fracción.

Consideramos que para incrementar el nivel de competencia matemática en los alumnos, es necesario apoyarse en los conocimientos previos y la integración de diferentes contenidos como los números naturales y decimales con sus operaciones (multiplicación y la división) para la comparación entre diferentes registros numéricos (fracción, decimal, porcentaje); o bien con problemas que involucren el reparto equitativo y exhaustivo.

Además, para que se propicie un mejor aprendizaje, es necesario estar alerta de los avances de los alumnos respecto al tema fracciones, para adecuar las estrategias de enseñanza y las actividades a fin de lograr un buen nivel de comprensión del contenido.

Esta tesis es relevante porque “Las fracciones son un importante peldaño para el aprendizaje de matemática avanzada y también son utilizadas comúnmente en la vida cotidiana” (Fazio y Siegler, 2011, p. 23). De acuerdo con Llinares y Sánchez (1988) este tema es fundamental para el aprendizaje del álgebra que se introduce en secundaria y, además, son parte de la vida cotidiana de cada uno de los alumnos. De igual modo, en la trayectoria académica a nivel primaria y secundaria, los alumnos necesitan lograr entender y representar las fracciones en diversos contextos porque estas les permitirán aprender diversos contenidos matemáticos que les apoyarán en distintas situaciones del día a día (Cortina y Zúñiga, 2008).

La fracción en relación con la vida cotidiana es de utilidad en comercios, bancos, alimentos, casas y hasta en las herencias. El contenido, en concreto la fracción $\frac{1}{2}$ no solo se utiliza en el contexto escolar sino en prácticas cotidianas en diferentes situaciones, identificarlas aportaría a cambiar la falsa idea de que son confusas o poco útiles.

Por tanto, consideramos indispensable conocer el nivel de comprensión que presentan alumnos de tercero de primaria respecto al concepto de la fracción $\frac{1}{2}$ en sus distintos registros de representación y los retos a los que se enfrentaron cuando era necesario realizar transformaciones entre registros gráficos, numéricos y en lenguaje natural, respecto a una mitad.

1.6. Supuesto

Comprender “la mitad de” implica poder identificar esta fracción y usarla en diferentes registros de representación (lenguaje natural, numérico y gráfico); para resolver problemas que involucren algunas de sus interpretaciones con unidades simples y compuestas. Otro supuesto es que algunas dificultades en la interpretación gráfica están relacionadas con problemas para componer y descomponer las figuras geométricas involucradas, es decir, son conocimientos necesarios no sólo de los números y sus operaciones sino también del sentido espacial y geométrico.

Capítulo 2. Diferentes interpretaciones y registros de representación de la fracción

“La idea de fracción, o mejor aún, la palabra «fracción» indicando un par ordenado de números naturales escritos de la forma a/b , es utilizado en contextos y situaciones que muchas veces puede parecer que no tengan nada en común”

(Llinares y Sánchez, 1988, p. 52).

Como se mostró en el capítulo anterior, un tema vigente en la investigación es sobre los procesos de comprensión de las fracciones en primaria (Valenzuela, 2018). En tareas de resolución de problemas se han identificado dificultades relacionadas con la falta de interpretación de los significados de “fracción” (Block, Moscos, Ramírez y Solares, 2007). Sin embargo, como se mostrará en este capítulo hay diferentes interpretaciones de la fracción según el contexto o problema a resolver que son necesarias para su comprensión (Ramírez y Block, 2009; Valdemoros, 2010; Buforn, Llinares y Fernández, 2018). Comprender un concepto conlleva además poder identificarlo, representarlo usando diferentes representaciones. En esta tesis, usaremos el marco teórico de los registros de representación de Duval (1999).

En este capítulo se presentan dos aspectos vinculados con la comprensión de la “fracción”. Por un lado, las interpretaciones presentes en el tercer grado de primaria, esto es, como parte-todo y como cociente. Por otro lado, los registros de representación como herramienta para analizar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre este concepto. En particular, se describirá el significado de los registros de representación y transformaciones entre registros, es decir, *tratamiento* y *conversión*.

2.1. Distintas interpretaciones de la “fracción”

En los primeros grados de primaria los alumnos aprenderán sobre un conjunto numérico denominado números naturales. Con estos números se familiarizan con el sistema de numeración decimal, el conteo y operaciones como adición (su inversa, sustracción) y multiplicación (su inversa, la división). En este caso, se trabaja con unidades enteras y con ciertas restricciones para operar. En otras palabras, si

hacemos un reparto, puede quedar o no un resto, es decir, el reparto no es exhaustivo¹; y en donde los resultados de dichos problemas son a veces menores que una unidad, y, en otras mayores que la unidad (SEP, 2013). Por ejemplo, se tienen quince camisetas para donar equitativamente a unos gemelos, evitando que se confronten porque siempre a uno le toca algo de más. Se realiza un reparto por igual, dándoles siete camisetas a cada uno; con un sobrante de una, teniendo como resultado un reparto no exhaustivo.

Las fracciones en el contexto escolar implican un cambio conceptual en el que deben tomarse en cuenta el proceso de dividir cantidades indivisibles con o sin resto, es decir, incluyen diferentes tipos de reparto (equitativo, exhaustivo, no equitativo y no exhaustivo). Entonces, una acción de reparto expresa la cantidad de partes divididas y tomadas de una unidad. En palabras de Valenzuela (2018),

[...] se refiere a la cantidad de objetos a repartir, dicha cantidad debe ser un múltiplo de número de individuos, o de individuos entre los que se hace el reparto. De lo contrario queda un resto, que, si bien puede repartir resultando un reparto no equitativo, o bien se deja el resto sin repartir, y se tiene un reparto no exhaustivo (p. 27).

El proceso de reparto en una fracción, como lo señala Valenzuela (2018), es de tipo irreversible o reversible. En el primer caso “[c]uando un todo es partido en partes iguales y su morfología (forma, color, estructura) cambia de manera que no se puede establecer o reconstruir” (Valenzuela, 2018, p. 37); mientras que, el reparto irreversible es cuando todo se puede restablecer, como “[e]l proceso de partición es meramente simbólico cuando se imagina, se piensa o solo se deja indicada la partición” (Valenzuela, 2018, p. 37).

Retomando los ejemplos de Valenzuela (2018), cuando recortamos un papel en partes iguales, es un reparto irreversible porque su estructura ya no será la misma después de la partición, mientras que, si únicamente doblamos ese pedazo de papel

¹ Reparto no exhaustivo: Se refiere a la cantidad que queda sin repartir (Valenzuela, 2018, p. 27).

en partes iguales se dice que es un reparto reversible porque su estructura como un todo, se conserva.

Las fracciones también son números que pertenecen a un conjunto más amplio, el de los racionales. De acuerdo con Kieren (1976 citado en Valenzuela, 2018, p. 21) las fracciones aparecen como números racionales, a causa de, que pueden ser sumadas, restadas o comparadas. Además, se pueden expresar mediante decimales, razones, porcentajes, en rectas numéricas o como ecuaciones. De manera que una “fracción es todo número de la forma a/b , donde a y b son naturales y b es diferente de cero” (Llinares y Sánchez, 1988, p. 47). Por tanto, las fracciones son pensadas como números que expresan el resultado de un reparto y puede interpretarse a la fracción como una razón entre dos números naturales o racionales porque la división exacta no es siempre posible.

En este contexto, las situaciones de aprendizaje en los salones de clase deberían propiciar que los estudiantes tengan experiencias con los distintos significados de fracción y usarlas en los contextos donde cobran relevancia y sentido. Las interpretaciones que subrayan autores como Kieren (1976 citado en Valenzuela, 2018, p. 21) y Llinares y Sánchez (1988) son como parte-todo, como cociente, como operador y como razón.

La primera interpretación es la **relación parte-todo o medida**. Ésta se presenta “cuando un «todo» (continuo o discreto) se divide en partes «congruentes» (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de «objetos»)” (Llinares y Sánchez, 1988, p. 55). El denominador determina el número de partes en las que un todo ha sido partido, y el numerador indica el número de partes que se toman (Valenzuela, 2018, p. 22).

Esta interpretación indica la relación existente entre un número de partes con el número total de partes, es decir, es la división de un número x en partes iguales. En la ilustración 2.1a) un caramelo de miel se divide en dos partes y se toma, una parte. En el inciso b) de la ilustración 2.1 se tiene una pizza, esta se parte exactamente en dos trozos. En ambos casos, se representa $\frac{1}{2}$ de la unidad como relación parte-todo

porque se determinó la relación existente entre las distintas partes de un todo. Cabe señalar que las ilustraciones son tomadas de actividades propuestas del libro de texto gratuito de tercer grado de primaria de la educación básica y son modificadas para representar “la mitad” de una unidad.

Ilustración 2.1. Representación de mitad en unidad simple (todo discreto) y unidad compuesta (todo continuo)



Fuente: (SEP, 2013, pp. 77-79).

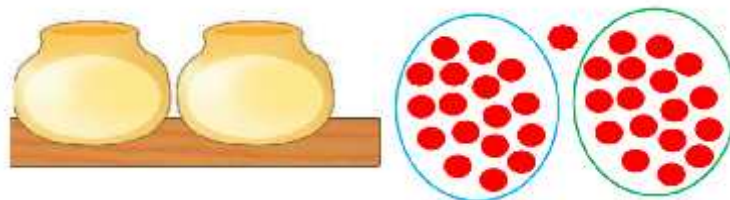
La fracción como **cociente** considera los términos de una fracción, el numerador es el número de partes que se tiene y el denominador es el número de partes que dividirán. Es decir, el numerador está determinado por el número de objetos que se van a repartir mientras que el denominador determina el número de personas entre las que se va a repartir los objetos (Valenzuela, 2018, p. 24).

$$\frac{1}{2} \frac{\text{objeto}}{\text{personas}}$$

Por su parte, Llinares y Sánchez (1988) consideran que “La fracción como cociente, es aquella que representa la repartición de un entero, el entero que se reparte se escribe como numerador y la cantidad entre la que se reparte, se escribe como denominador” (p. 63). Es decir, esta representación de número fraccionario indica que parte del entero le toca a cada uno. En la ilustración 2.2 se tiene treinta y cinco fichas que deben ser repartidas en dos recipientes de manera equitativa. Se

representa $\frac{1}{2}$ de los objetos como cociente porque en la situación se presenta una división de cantidad para ser repartido entre objetos o sujetos.

Ilustración 2.2. Representación de reparto en unidad compuesta del concepto mitad



Fuente: (SEP, 2013, p. 99).

La fracción como **operador** es concebida como transformaciones, “«algo que actúa sobre una situación (estado) y lo modifica»». Se concibe aquí la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa” (Linares y Sánchez, 1988, p. 72). Es decir, “el numerador de una fracción actúa sobre una cantidad ampliándola o multiplicándola, causando una *extensión*, mientras que, el denominador de la fracción actúa sobre las cantidades reduciéndolas o dividiéndolas, o dicho en otras palabras provocando una *contracción*” (Valenzuela, 2018, p. 28). Por ejemplo, si tenemos $\frac{1}{2}$ de sesenta, debemos multiplicar por el número sesenta, ese resultado lo dividimos por el denominador y tendremos como resultado treinta. Entonces esta operación nos sirve para identificar en una fracción números naturales y racionales.

O bien, si tenemos una caja que tiene capacidad para 48 cubitos de amaranto y solamente está llena con $\frac{1}{2}$ de los cubitos ¿cuántos cubitos le falta para llenarse? Para hallar $\frac{1}{2}$ de la cantidad de cubitos 48, se debe multiplicar esta por 1 (obteniéndose así, una parte), y el resultado se debe dividir por 2. Es decir, se multiplica la cantidad por $48 \cdot \frac{1}{2} = 24$.

Los ejemplos anteriores evidencian la utilización de la fracción como operador en problemas aparentemente sencillos. Sin embargo, en tercero de primaria los alumnos resolverían estos ejemplos de manera aditiva, es por ello que esta interpretación se introduce hasta quinto grado de primaria (SEP, 2017).

Por último, la fracción como **razón** es la relación entre dos cantidades; se considera una comparación porque no representa una partición de objetos, sino que dichos objetos son comparados (Valenzuela, 2018, p. 31).

Por su parte Ramírez y Block (2009) afirman que:

[...] se habla de razón o de fracción, la razón se anota usando los dos puntos ($a:b$) o la notación de fracción $\frac{a}{b}$, y se sigue hablando de "medios y extremos", aunque se use la notación fraccionaria en la que ya no hay ni medios ni extremos; se habla incluso de *operador* o de *coeficiente de proporcionalidad* y de *razones escalares*, creando así términos compuestos con elementos de teorías distintas (p. 5).

Entonces, la razón es una comparación de dos números de la que deriva una división. En esta interpretación es necesario entender la equivalencia y tener presente que la notación fraccionaria $\frac{a}{b}$ de cualquier situación, $a:b$ pueden ser objetos distintos y a no es parte de b , sino que ambas pueden ser parte de objetos diferentes (Valenzuela, 2018). Por ejemplo, si se tiene una caja con 10 chocolates negros y 20 con chocolates blancos, la representación de razón es: $\frac{10 \text{ chocolates negros}}{20 \text{ chocolates blancos}}$ O bien, la razón entre el chocolate negro y el chocolate blanco, se representaría ($10:20$; $\frac{10}{20}$).

En otro contexto, se va a preparar agua de naranja en un recipiente al que se agrega una taza de jugo de naranja por cada dos vasos de agua, entonces, la razón se expresa uno es a dos, simbólicamente, 1:2. En estos dos casos, la mitad de la unidad se interpreta como razón porque se compara y relaciona dos cantidades; además, se requiere comprender la equivalencia entre ambas cantidades y que pueden ser parte de un mismo objeto; en el primer caso, la caja de chocolates y en el segundo caso, el agua de naranja.

En los ejemplos referidos en este apartado se da cuenta de las diferentes interpretaciones de las fracciones (parte-todo, cociente, operador y razón). En ellos se usaron distintos registros de representación: (números, enunciados verbales y dibujos) y algunos implican transformar estos registros de representación en otros.

Debido a esto es importante conceptualizar los registros de representación y su relación con la comprensión conceptual.

2.1.1 La fracción en tercero de primaria. Dos usos diferentes

En el tercer año de primaria se introduce formalmente el concepto de fracción, en situaciones de medición y de reparto. En el documento *Programa de estudio (2011) / Guía para el maestro Primaria/ Tercer grado* se menciona que:

[...] las fracciones son números que nos permiten expresar cantidades no enteras. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ equivale a la mitad de una unidad o conjunto de cosas consideradas como un todo, ya sea un litro, una tira de madera, una cantidad de dinero, una galleta, un conjunto de canicas, etcétera. En este caso, los alumnos no le dan este significado a $\frac{1}{2}$, ya que suelen pensar que $\frac{1}{8}$ es mayor, porque el 8 es mayor que 2 (SEP, 2011, p. 102).

En el nuevo modelo educativo (SEP, 2017), este contenido sigue vigente en este grado y lo expresa en el documento *Aprendizajes Clave para la Educación Integral*, como que el estudiante a lo largo del ciclo escolar use y aplique “fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultados de repartos” (SEP, 2017, p. 233). Cabe señalar que, aunque el programa de estudios cambió en el 2017, el libro usado por este grupo de estudiantes es del año 2013 que está acorde con la reforma del 2011.

Consideramos pertinente revisar el libro de texto gratuito de matemáticas y el libro para el maestro (SEP, 2013) a fin de identificar las interpretaciones que se promueven de manera explícita o implícita. A continuación, se presentan las dos interpretaciones que se identificaron de la fracción (parte-todo y cociente). En cada tabla se señala la lección, ejemplos de actividades de cada lección en las que aparece una o varias interpretaciones de la fracción.

En la siguiente tabla se presentan ejemplos de lecciones en las que se usa la interpretación parte-todo.

Tabla 2.1 Interpretación parte-todo, lecciones y ejemplos de actividades en las que aparece

Lección	Ejemplos de Actividades	P.
30. Medios, cuartos y octavos	<p>En equipos, realicen lo que se solicita.</p> <ol style="list-style-type: none"> Señalen en cada vaso, de acuerdo con la cantidad que se indica, hasta dónde debe llegar el nivel del agua (vaso lleno, $\frac{1}{2}$ vaso, $\frac{1}{4}$ vaso, $\frac{1}{8}$ vaso). El siguiente dibujo representa una tira completa. Debajo de ésta dibujen las fracciones de tira que se indica: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ 	70
31. Con el metro	<p>En parejas, realicen lo que se solicita.</p> <p>Elaboren tiras de papel de 1 metro, $\frac{1}{2}$ metro, $\frac{1}{4}$ de metro y $\frac{1}{8}$ de metro. Utilicen los materiales que se les proporcionaron.</p>	103
32. ¿Qué partes?	<p>En equipos, realicen lo que se solicita.</p> <ol style="list-style-type: none"> Iluminen $\frac{1}{2}$ del rectángulo, $\frac{1}{4}$ del cuadrado y $\frac{1}{8}$ del círculo de acuerdo a la fracción que se les indica. Anoten con número qué parte de cada figura está iluminada. 	73
35. Flores y Colores	<p>¡Van a diseñar un mosaico! Para hacerlo, sigan estos pasos:</p> <p>Coloreen la mitad de los triángulos de azul. De la otra mitad, coloreen la mitad de anaranjado. De los triángulos que queden, coloreen la mitad de verde. El resto de los triángulos coloréenlos de amarillo.</p>	81
50. Moños	<p>En equipos, resuelvan los siguientes problemas.</p> <ol style="list-style-type: none"> Marcos y Lucila tienen listones rojos y verdes de un metro cada uno para hacer moños. Van a hacer 6 rojos de $\frac{1}{4}$ de metro y 6 verdes de $\frac{1}{8}$. <ol style="list-style-type: none"> ¿Cuántos listones rojos de un metro se necesitan para hacer los 6 moños? 	109 - 110

	<p>b. Si tienen $5\frac{3}{4}$ metros de listón rojo y $3\frac{1}{2}$ de listón verde, ¿para cuántos moños de cada color alcanza?</p> <p>2. Los siguientes dibujos representan un metro de cada listón. Anota en la línea el color que le corresponde y colorea la parte que se necesita para hacer un moño.</p>	
65. ¿Qué partes es?	<p>En equipos, realicen lo que se solicita.</p> <p>1. Coloreen la parte que se indica en cada figura. a) $\frac{2}{6}$ de la figura. b) $\frac{3}{4}$ de la figura. c) $\frac{5}{8}$ de la figura. d) $\frac{1}{8}$ de la figura.</p> <p>2. Identifiquen y escriban qué parte de las siguientes figuras está sombreada.</p> <p>3. Coloreen la parte que se solicita para cada figura y justifiquen su respuesta. a) $\frac{1}{2}$ de la figura. b) $\frac{1}{4}$ de la figura. c) $\frac{3}{4}$ de la figura. d) $\frac{6}{8}$ de la figura. e) $\frac{1}{5}$ de la figura. f) $\frac{3}{11}$ de la figura.</p>	142
66. ¿Cómo eres?	<p>En parejas, resuelvan los siguientes problemas.</p> <p>1. Coloreen la fracción que se indica en las figuras que se presentan a continuación. a) $\frac{1}{4}$ de la figura. b) $\frac{3}{8}$ de la figura. c) $\frac{1}{3}$ de la figura. d) $\frac{6}{8}$ de la figura.</p> <p>a) La siguiente figura equivale a $\frac{1}{2}$ de una unidad. Dibujen la figura que la represente completa.</p> <p>b) La siguiente figura equivale a $\frac{1}{4}$ de una unidad. Dibujen la figura que la represente completa.</p>	145
67. ¿Estás seguro?	<p>De manera individual, resuelve los siguientes problemas.</p> <p>1. Ernesto hace moños con listones de colores. Tenía $\frac{3}{4}$ m de listón rojo y sólo ocupó $\frac{1}{4}$ m. ¿Cuánto listón le quedó?</p>	148

	<p>2. Alma compró 2 litros de leche y ocupó $\frac{4}{3}$ para preparar atole. ¿Cuánta leche le quedó?</p>	
--	---	--

Fuente: (SEP, 2013).

La relación parte-todo trata de una unidad o un todo que se divide en partes iguales, de las cuales, en las actividades señaladas, permiten que los alumnos relacionen estas fracciones con diferentes tipos de unidades de medida como capacidad (nivel de agua en un vaso), longitud (tiras) y superficie (figuras). Según lo señalado en el libro para el maestro, “[d]ebe iniciarse con medios, cuartos y octavos, porque son más fáciles de representar gráficamente, ya que sólo implican **partir en mitades**” (SEP, 2013, p. 102). Por tanto, se inicia con situaciones de medición, proporcionándoles tiras de papel para que midan ciertas longitudes, las dividan en partes iguales y logren identificar fracciones de una unidad simple.

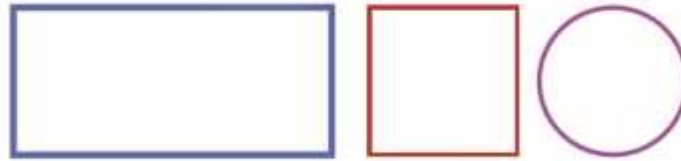
Los ejemplos de actividades mencionadas en la tabla 2.1, por un lado, se representan con diferentes figuras geométricas en las que una fracción está sombreada y deben anotar la que le corresponde y a la inversa (ilustración 2.3), de modo que los alumnos comprendan que una fracción representa cada una de las partes sombreadas de la figura. Por otro lado, se espera que, en las actividades de colorear la fracción, los alumnos identifiquen que el denominador corresponde a las divisiones que tiene cada registro gráfico, y relacionen que lo que tienen que colorear es el número de partes indicadas en cada uno de los numeradores.

² El resaltado es nuestro.

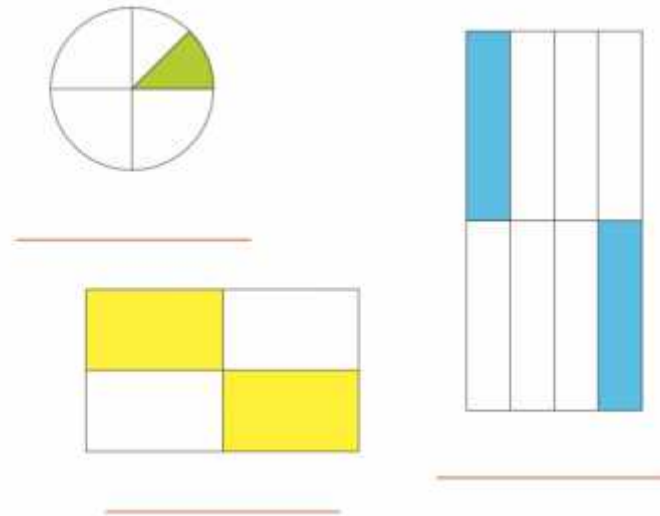
Ilustración 2.3. Interpretación en relación parte-todo

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Iluminen $\frac{1}{2}$ del rectángulo, $\frac{1}{4}$ del cuadrado y $\frac{1}{8}$ del círculo.



2. Anoten con número qué parte de cada figura está iluminada.



Fuente: (SEP, 2013, p. 73).

Las lecciones referidas en la tabla 2.1 tienen como propósito general que “[...] los alumnos reflexionen el significado de algunas fracciones al tener que representarlas gráficamente” (SEP, 2013, p. 105). Además, identificar su representación numérica correspondiente. Al mismo tiempo que logren identificar y establecer relaciones entre las partes y el todo en un registro gráfico, de modo que comiencen hacer uso de la equivalencia de fracciones.

De manera implícita se busca que los alumnos comiencen a realizar registros numéricos de lo que se les plantea en las actividades sin recurrir al registro gráfico, lo

cual podría ser un indicador que comprenden el significado de la fracción como parte-todo (SEP, 2013).

En la tabla 2.2 se presentan lecciones con diferentes actividades en las que se usa la interpretación como cociente.

Tabla 2.2 Uso como cociente, lecciones y situaciones en las que aparece

Lección	Ejemplos de Actividades	P.
33. En partes iguales	En equipos, resuelvan los siguientes problemas. <ol style="list-style-type: none"> 1. Se va a repartir una cartulina entre dos niños, de manera que les toque lo mismo y que no sobre. ¿Cuánto le tocará a cada uno? 2. Se van a repartir 5 barritas de amaranto entre 8 niños, de manera que les toque lo mismo y que no sobre. 	75
34. ¿A quién le toco más?	En equipos de tres integrantes, resuelvan estos problemas. <ol style="list-style-type: none"> 1. En cada equipo se van a repartir caramelos de miel, de manera que a todos les toque la misma cantidad y que no sobre. 2. En cada equipo se van a repartir pizzas, de manera que a todos les toque lo mismo y que no sobre. 	76-79
35. Flores y Colores	En equipos, resuelvan los siguientes problemas. <ol style="list-style-type: none"> 1. Paula compró cuatro docenas de margaritas. Piensa regalarle la mitad a su mamá; de la mitad que le queda le va a dar la mitad a su tía Irene; y de las que quedan, le dará la mitad a su hermana y ella se quedará con la otra parte. 	80
44. Repartos equitativos	En equipos, resuelvan los siguientes problemas. <ol style="list-style-type: none"> 1. Cuatro amigas desean repartirse 36 uvas, de manera que les toque la misma cantidad. ¿Cuántas uvas le corresponden a cada una? 	99
48. Reparto	En equipos, resuelvan los siguientes problemas.	106-

de manzanas	<p>1. Pedro tiene 2 manzanas y las reparte de manera equitativa entre él y sus 3 amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro en cuatro partes iguales, se come una parte y le da dos a Javier. Si Laura le regala a Pedro la cantidad de manzana que le sobró, ¿qué cantidad de manzana tendrá Pedro en total?</p> <p>2. Un conejo, una rana y un chapulín tienen que cruzar un puente que mide 2 metros de largo. El conejo da saltos de $\frac{1}{2}$ metro, la rana de $\frac{1}{4}$ y el chapulín de $\frac{1}{8}$. Si el conejo da 3 saltos, la rana 6 y el chapulín 12. ¿Qué distancia ha recorrido cada animal?</p>	108																
45. Repartos agrupados	<p>En parejas, resuelvan los siguientes problemas.</p> <p>1. La mamá de Juanita desea hacer un pastel. Para prepararlo necesita 45 galletitas de chocolate. Si cada paquete tiene 5, ¿cuántos necesita?</p>	101																
49. Dosis de medicamento	<p>De manera individual, resuelve el siguiente problema: para curar un resfriado, el médico le recetó a Luis tomar media pastilla de medicamento diariamente, durante siete días. Su mamá compró una caja con seis pastillas e hizo una tabla como la siguiente. Complétala y contesta las preguntas.</p> <table border="1" data-bbox="477 1304 938 1381"> <tr> <td>Día</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>Dosis</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>¿En qué día habrá tomado $1\frac{1}{2}$ pastillas?</p>	Día	1	2	3	4	5	6	7	Dosis	$\frac{1}{2}$							108
Día	1	2	3	4	5	6	7											
Dosis	$\frac{1}{2}$																	
69. Más fracciones	<p>En equipos, resuelvan los siguientes problemas.</p> <p>1. Noé toma en la mañana 2 vasos de leche de $\frac{1}{4}$ de litro y en la noche otro de $\frac{1}{4}$. ¿qué cantidad de leche toma al día?, ¿qué cantidad de leche consume en 2 días?</p> <p>2. Para la fiesta de Luis, su mamá compró 3 pasteles medianos y los dividió en 8 partes iguales. Asistieron 10</p>	150-151																

	niños y 9 niñas, a cada uno le dieron una rebanada de pastel. ¿qué parte de pastel le tocó a cada niño?, ¿qué parte de un pastel sobró?	
--	---	--

Fuente: (SEP, 2013)

El uso como cociente de las actividades señaladas, solicita a los alumnos resolverlas en equipo representando la repartición de un entero. También, deben recordar y comprender que, la fracción que van a formar indica qué parte del entero le toca a cada objeto o sujeto al que se va a repartir. Por ejemplo, en la ilustración 2.4, se utiliza esta interpretación de un entero, que se reparte (galletas de granola), y debe escribirse en la parte del numerador, y la cantidad que le toca a cada sujeto (en este caso, personas), se escribirá en la parte de denominador.

Ilustración 2.4. Repartición de una unidad simple en la interpretación como cociente

3. En cada equipo se van a repartir galletas de granola, de manera que a todos les toque lo mismo y que no sobre.



a) ¿Creen que a Carla le toque la misma cantidad de galleta que a Luis?

¿Por qué?

b) ¿Creen que a Carla le toquen más de $\frac{3}{4}$ de galleta?

c) Comprueben si sus respuestas son correctas. ¿Cuánta galleta le correspondió a Carla?

d) ¿Y a Luis?

Fuente: (SEP, 2013, p. 78).

Respecto a las actividades que involucran problemas de reparto, se les pide a los alumnos “us[ar] representaciones gráficas y números fraccionarios para expresar resultados de problemas de reparto” (SEP, 2013, p. 108), es decir, los alumnos deben de resolver problemas que impliquen el uso de fracciones, que correspondan a realizar particiones de algún objeto (cartulinas, barritas de amaranto, caramelos, pizzas, flores, frutas, pasteles, entre otros).

En la resolución de este tipo de problemas es probable que los alumnos realicen registros gráficos para representar la relación entre los datos, y dividir un objeto de igual tamaño entre diferente número de personas u objetos. En otras palabras, operar con fracciones (registro numérico) complementado con un registro gráfico de la unidad para ilustrar particiones.

Es importante que, en cualquier registro numérico o gráfico, asocien el denominador de la fracción con la parte que se va a repartir, lo cual les ayudará a utilizar el registro de lenguaje natural correspondiente (un medio, la mitad de), ya que, en la mayoría de las actividades mencionadas en la tabla 2.2 “Se incluyen fracciones cuyo denominador es una potencia de dos (2^n) por lo cual se responden **partiendo siempre en dos**”³ (SEP, 2013, p. 109).

Para representar una fracción en un registro de lenguaje natural es necesario considerar las unidades de referencia del problema matemático o de las indicaciones de las actividades. Según lo señalado en el libro para el maestro “Un error frecuente entre los alumnos es que, cuando hay varias particiones sucesivas de una unidad, pierden de vista la unidad de referencia de las fracciones; por ejemplo, llaman *un medio* a una parte que en realidad es la mitad de un medio, es decir, un cuarto del total” (SEP, 2013, p. 118). Para afrontar a los estudiantes a dicha situación, en la lección 35 (ilustración 2.5) ellos deben obtener la relación entre particiones sucesivas de una unidad compuesta (4 docenas de flores): $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Es decir, tienen que expresar, un medio de cuatro docenas, que significa dividir cuarenta y ocho en dos

³ El resaltado es nuestro.

partes iguales, y tomar una parte. Repitiendo este procedimiento dos veces más, considerando a la fracción como un solo número.

Ilustración 2.5. “La mitad” como operador, repartición de una unidad compuesta

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

l. Paula compró cuatro docenas de margaritas. Piensa regalarle la mitad a su mamá; de la mitad que le queda le va a dar la mitad a su tía Irene; y de las que quedan, le dará la mitad a su hermana y ella se quedará con la otra parte.

a) ¿Con cuántas margaritas se quedará Paula?

b) ¿Qué parte del total de flores recibirá su tía Irene?

c) ¿Qué parte le dará a su hermana?

d) ¿Qué fracción representa la cantidad de flores que se quedará Paula?



Fuente: (SEP, 2013, p. 80).

Las interpretaciones de fracción como operador y como razón no se enseñan en este grado escolar. El uso de la fracción como operador, esta interpretación es trabajada con detenimiento en los últimos grados de primaria (Avila, 2019, p. 39). En quinto grado de primaria, se incluyen nociones afines: porcentaje y escala, es decir, los alumnos iniciarán calculando “valores faltantes en problemas de proporcionalidad

directa con números naturales (incluyendo tablas de variación). Res[olverán] problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales, con multiplicador en número natural” (SEP, 2017, p. 320). Este uso se aborda hasta el segundo ciclo de secundaria, donde los estudiantes deben de “calcula[r] valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación)” (SEP, 2017, p. 322) y, además, continúan resolviendo problemas con multiplicación y división entre números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos (SEP, 2017).

El uso como razón, esta interpretación requiere de otras nociones matemáticas vinculada con las cantidades como proporciones (Valenzuela, 2018) donde los alumnos deben igualar dos razones. Este uso se aborda en quinto grado de primaria con comparaciones entre razones expresadas mediante dos números naturales (SEP, 2017). Y es hasta sexto grado de primaria donde los estudiantes “Compara[n] razones expresadas mediante dos números naturales (n por cada m) y con una fracción (n/m)” (SEP, 2017, p. 321).

En quinto y sexto grado de primaria se introduce la fracción como razón y como operador en situaciones, donde “inicialmente se trate de una razón y se transita a la de operador cuando se resuelve un problema” (Avila, 2019, p. 39) de proporcionalidad, porcentaje o escala. Siendo un claro cambio de las interpretaciones de fracción de los grados anteriores.

En cada lección del libro de texto gratuito de tercer grado identificamos diferentes registros de representación que acompañan a la actividad o que requieren de su uso en el proceso de resolución. Nos referimos a los registros en lenguaje natural, numérico y gráfico. En la siguiente tabla se identifican la cantidad de lecciones en relación con las interpretaciones de fracción y los registros de representación presentes.

Tabla 2.4 Lecciones en relación con el significado de fracción y los registros de representación

Fracción como	Cantidad de lecciones	Registros de representación
Parte-todo (Medición)	8	Registro gráfico con figuras geométricas (rectángulos, círculos, cuadrados), registro numérico y lenguaje natural.
Cociente (Reparto)	8	Registro numérico (representación en tablas y números, comparación de cantidades), registro gráfico (recta numérica y dibujos) y lenguaje natural.

Fuente: (SEP, 2013).

De acuerdo con la clasificación anterior, el registro más utilizado es el lenguaje natural con dos usos principales; primero, el plantear las actividades y dar instrucciones para su realización y, segundo, el uso vinculado a las acciones del estudiante como son responder y justificar a las preguntas de dichas actividades. Otro registro recurrente es el numérico para representar cantidades con números naturales y racionales, para ilustrar una operación con fracciones (multiplicar, dividir, sumar, restar) e indicar la fracción sombreada en un gráfico.

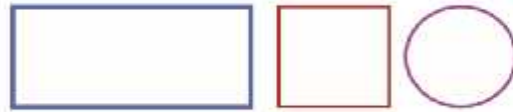
El registro gráfico generalmente se incorpora por medio de figuras geométricas tales como círculos, cuadrados, triángulos, hexágonos e inclusive con ilustraciones, tablas y rectas numéricas. Además, estos usos de registros de representación son consistentes con lo que se plantea en uno de los aprendizajes clave, “los alumnos harán representaciones propias y usarán escrituras aditivas para expresar los resultados de los repartos” (SEP, 2017, p. 233), de manera que ellos sean capaces de elaborar y organizar la información mediante gráficos. Los gráficos más usuales en los libros de texto son pizzas, pasteles, dulces, globos y figuras geométricas que podrían inducir la idea de fracción como una división de un todo en partes iguales.

A continuación, mostraremos en la ilustración 2.6 una lección del libro de texto, donde los alumnos de tercero de primaria deben utilizar conjuntamente estos tres registros de representación (lenguaje natural, numérico y gráfico).

Ilustración 2.6. Tres registros de representación

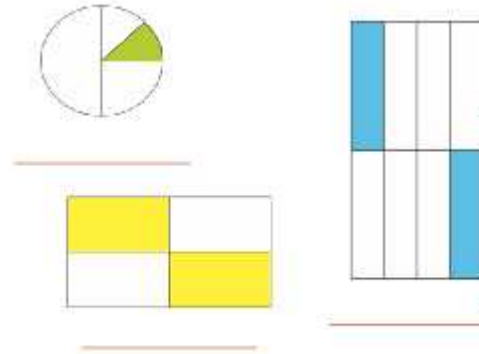
En equipos, realicen lo que se solicita:

- Iluminen $\frac{1}{2}$ del rectángulo, $\frac{1}{4}$ del cuadrado y $\frac{1}{8}$ del círculo.



Registro numérico

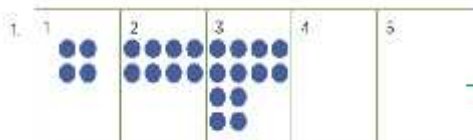
- Anoten con número qué parte de cada figura está iluminada.



Registro gráfico

Registro numérico

Dibuja las figuras que faltan.



Registro gráfico

Explica brevemente cómo supiste cuál figura dibujar en el cuadro 4.

Registro lenguaje natural



a) ¿Cuántos cuadrados utilizaste para dibujar la figura faltante?

b) ¿Cómo supiste qué figura faltaba?

Registro lenguaje natural

Fuente: (SEP, 2013, p. 112).

El énfasis en el tercer bloque del libro de texto (SEP, 2013) está la fracción como parte-todo y es en los bloques consecutivos donde se introduce de manera implícita con gran notabilidad la interpretación como cociente. Para este grado el programa de estudios, le señala al maestro que motive y anime a los estudiantes a que inventen otros ejercicios en los que usen “fracciones del tipo $m/2n$ (medios, cuartos, octavos, etc.) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas y el resultado de repartos” (SEP, 2011, p. 75). Estas acciones son con el objetivo que, al parecer, los estudiantes comprendan que una fracción como un número, expresado en una relación simbólica entre dos números naturales. Esta relación hace referencia a un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales lo cual no significa necesariamente de la misma forma, sino equivalentes en alguna magnitud (como cantidad de superficie, de longitud o cantidad de elementos). Es decir, una fracción implica un determinado número de partes de la unidad ya sea simple o compuesta. Encontramos que en las lecciones se hace mayor hincapié con unidades simples.

El resultado de este breve análisis del libro de texto gratuito de tercer grado de primaria, *Desafíos Matemáticos* (SEP, 2013), y de las sugerencias en el *Programa de estudio 2011, Guía para el maestro*, de primaria, de tercer grado, podemos concluir que las fracciones se abordan como escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) y como comparaciones en situaciones con igual numerador o igual denominador (SEP, 2011, p. 76). Además, se le recomienda al docente que para lograr un acercamiento formal a este contenido se introduzca en la enseñanza ejemplos cotidianos, con la finalidad de que los alumnos expresen sus resultados, en relación con la medición (interpretación parte-todo) y como reparto (SEP, 2017).

Al finalizar el ciclo escolar se espera que los estudiantes de este grado “ya han trabajado actividades de medición y reparto para fraccionar cantidades continuas y discretas. Para reforzar esto, en estas actividades deben interpretar representaciones gráficas de las fracciones, así como saber hacer referencia a ellas”⁴ (SEP, 2011, p. 216). En particular, se espera que los alumnos asocien el número

⁴ El subrayado es nuestro para resaltar tanto el uso de fracción como el tipo de registro de representación sugeridos.

fraccionario como una unidad que se va a repartir, lo que implica un lenguaje (símbolos, significados, vocabulario) específico de las fracciones, por ejemplo, un cuarto, un medio, o un octavo.

2.2 Registros de representación en la comprensión del concepto “fracción”

“Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo del signo que pertenecen a una representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento.”

(Duval, 1993, p. 175 citado en Prieto y Vicente, 2006, p. 204)

La teoría de los registros de representación fue desarrollada por Raymond Duval, un interdisciplinario de la Didáctica de la Matemática. Su propuesta teórica tiene como propósito profundizar en el análisis de la comprensión de conceptos matemáticos y las posibles dificultades. En este apartado se tomarán como base dos textos, el de Pérez y Reyes (2018) y Valencia y Salazar (2010).

Los registros de representación son construcciones de sistemas de expresión que incluyen diferentes formas de escritura como números, símbolos, gráficos, esquemas, lenguaje natural, entre otros. Cada registro cumple con la función de comunicar y expresar algo respecto de un mismo concepto (Pérez y Reyes, 2018). Los objetos matemáticos no son accesibles físicamente, nos acercamos a ellos a través de los diferentes registros de representación. Estos registros son necesarios para el desarrollo de la actividad matemática porque es vista como un medio a través del cual se hacen y se comunican las ideas (Duval, 1999, citado en Pérez y Reyes, 2018).

Esta teoría plantea la importancia de no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones, por ejemplo, cuando tratamos con números (naturales o racionales) y sus diferentes registros de representación (Pérez y Reyes, 2018). La confusión entre el concepto con algún registro de representación resultaría que los estudiantes no podrían darle uso en otros contextos, por ejemplo, si se vincula la fracción $\frac{1}{2}$ únicamente a unidades simples, puede incidir en el proceso de resolución de problemas que involucren unidades compuestas.


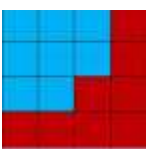

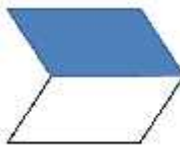
Entonces para poder realizar distintas interpretaciones de un concepto, de acuerdo con Duval (1999), dependerá del sistema semiótico utilizado; en donde el contexto será guía para seleccionar el registro más conveniente para la actividad matemática requerida. En esta teoría hay dos tipos de transformaciones semióticas que implican procesos cognitivos diferentes. En primer lugar, la realización de *tratamientos* al interior de un registro y, en segundo lugar, la *conversión* entre registros.

Por tanto, los registros de representación tienen como principal objetivo buscar que los alumnos desarrollen capacidades de análisis, de razonamiento y de visualización para que reflexionen sobre los distintos significados y objetos relacionados (Valencia y Salazar, 2010).

En este caso, el concepto de fracción en un contexto continuo y bajo la relación parte todo, que es potente a la hora de aprender sobre las fracciones pero que debe ser el punto de relación con los otros significados, importantes a la hora de resolver situaciones problemas particulares de las matemáticas y de otros espacios de aplicación” (Valencia y Salazar, 2010, p. 52).

Por ejemplo, si le damos a un estudiante de tercero de primaria un círculo de papel, enseguida le preguntamos ¿cuál es la mitad?, una posible respuesta es doblando esa representación. La pregunta implica analizar la expresión “la mitad”, y responderla implica una acción sobre la representación dada, “doblar” y hacer coincidir exactamente cada una de las partes con la otra. Si le planteamos la misma pregunta sin el trozo de papel a un estudiante que está terminando la escuela primaria, seguramente nos responderá, una mitad es cada una de las dos partes iguales de un objeto. Aquí se presentaría un cambio de registro de representación en las respuestas dadas, como se muestra en la tabla 2.5 (D’ Amore, Fandiño, Lori, y Matteuzzi, 2015, p. 181).

Tabla 2.5 Registros de representación en relación con “la mitad de”

Registros de representación en diferentes contextos				
Lenguaje natural	Un medio	La mitad	Dividir en dos partes iguales	Una parte de las dos partes iguales de un objeto.
Registro gráfico				
Registro numérico	$\frac{1}{2}$	0.5	50%	1:2

Fuente: Elaboración propia

En resumen, esta teoría plantea la distinción entre los objetos matemáticos y sus representaciones. Por ejemplo, en esta tesis se pretende estudiar cómo los alumnos identifican “la mitad” como fracción a través de diferentes representaciones (verbal, numérico y gráfico) en unidades simples o compuestas; y la interacción entre cada una de sus interpretaciones que permitan la comprensión de este concepto al momento de resolver una tarea.

2.2.1 Transformaciones en y entre registros de representación

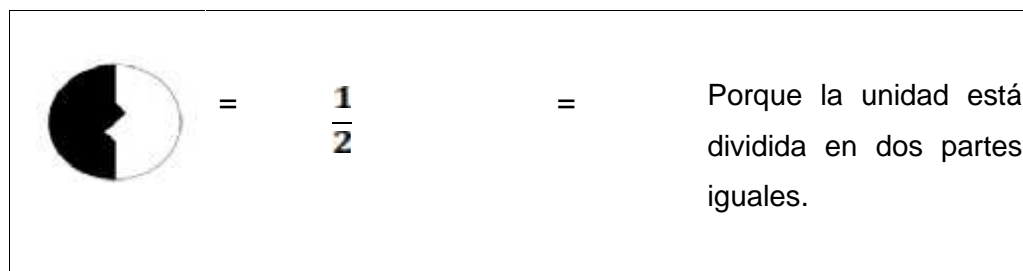
Como ya se mencionó en el apartado anterior, hay dos transformaciones entre registros *tratamiento* y *conversión*. Esto implica cambiar las representaciones de modo que se obtengan otras que se puedan comparar con las iniciales (Luz, 2006).

No toda representación se le puede denominar registro. Formar un registro de representación es hacer uso de signos conservando las características que constitutivas del concepto, y que permiten hacer acciones matemáticas o reemplazar una representación por otra. En palabras de Duval (1999 citado en Valencia y Salazar, 2010, p. 54) cuando la transformación genera otra representación en el

mismo registro, se le denomina *tratamiento*. Por ejemplo, si sumamos en un primer contexto $0.25+0.25=0.5$ y, en un segundo $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ es en relación con la “mitad de”, donde en ambas situaciones se mantuvo el mismo registro de representación, es decir, el registro numérico. En el primer caso, con los números decimales que tienen características propias para operar y en el segundo, el de las fracciones.

Si la transformación implica pasar de un registro de representación a otro se denomina *conversión*. Es decir, cambiar la representación inicial a un nuevo registro, distinto (Valencia y Salazar, 2010). Por ejemplo, en el siguiente caso (ilustración 2.7) se debe anotar la fracción que corresponde a la figura y argumentar el por qué de la respuesta. En este caso, se utiliza diferentes registros de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico), de “la mitad”.

Ilustración 2.7. Cambio de registros de representación sin cambiar de concepto



Fuente: Elaboración propia

En el análisis de algunas actividades propuestas en el libro de texto gratuito (SEP, 2013), presentado en el apartado anterior, notamos que se promueven dos principales interpretaciones de la fracción en relación parte-todo y como cociente. También identificamos que las actividades promueven transformaciones entre registros (tratamientos y conversiones), lo que nos hace suponer que se pretende que los estudiantes logren comprender la fracción “ $m/2n$ ” en representaciones gráfico, verbal y numérico. Sin embargo, cada registro promueve nuevas características sobre el mismo concepto, en cuyo caso, el papel del profesor resulta esencial.

Es importante señalar que los procesos de conversión, constituyen un factor fundamental en la construcción del concepto, pero es esencial que el registro inicial y el final estén libres de contradicciones.

La teoría de las representaciones de Duval es un referente que nos muestra la relación entre las representaciones y las interpretaciones de mismo concepto matemático y se puede usar para comprender dificultades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, en particular, identificar en cuál representación y en qué tipo de transformación se dan.

Capítulo 3. Un acercamiento metodológico

Este capítulo presenta los aspectos metodológicos de esta tesis; se detalla la población que participó durante el estudio, se describen las características respecto al enfoque para la recolección y análisis de datos, se detalla el diseño de instrumentos y las estrategias puestas en marcha para la obtención de datos y se concluye con el proceso de selección de datos que permitieron dar respuesta a las preguntas planteadas, así como las categorías de análisis, sus descripciones e indicadores.

3.1. Perspectiva metodológica de este estudio

Para esta investigación usamos un acercamiento cualitativo, de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), pues posibilita

[...] obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos más bien subjetivos). [...] El investigador hace preguntas más abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe, analiza y convierte en temas que vincula, y reconoce sus tendencias personales (p. 8).

Este enfoque nos permitió recolectar información con el uso de técnicas como el cuestionario y la entrevista, acordes con nuestro objetivo: documentar el nivel de comprensión que presentaron alumnos de tercer grado de primaria en el proceso de identificación del concepto fracción $\frac{1}{2}$ en sus tres registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural). En particular, el propósito de usar esta metodología fue comprender los significados que los sujetos tenían en relación con el hecho educativo estudiado (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), en este caso, “la mitad de”.

En particular, este estudio es descriptivo porque buscamos detallar y recolectar información conjuntando todos los instrumentos (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), con el objetivo de realizar un análisis global de cómo los alumnos resolvieron las actividades propuestas y cómo lo explicaron. En particular, pusimos mayor atención a la descripción en lo elaborado por los alumnos y que fueron registrados en

la hoja de respuesta y en sus explicaciones orales (en la entrevista) a partir de clasificar las respuestas en correctas e incorrectas.

Usamos el estudio de casos para profundizar en las estrategias utilizadas por algunos alumnos en relación con sus respuestas a los cuestionarios. Sustentamos los resultados con tres estudios de casos a fin de justificar su nivel de comprensión del concepto fracción $\frac{1}{2}$ en tres diferentes registros de representación.

El trabajo de campo finalizó con entrevistas. Estos datos ampliaron nuestra comprensión sobre los procesos registrados (o no) en la hoja de respuesta, lo que favoreció la comparación de estos resultados con lo que expone el libro de texto gratuito otorgado por la SEP (2013) e interpretación con lo que nos indica la teoría de las representaciones de Duval (1999).

Este estudio se realizó en tres fases

- 1. Revisión de la literatura, delimitación del problema de estudio y construcción del marco analítico y metodológico.*

Esta fase inició con la descripción de la problemática, la revisión de diferentes estudios relacionados con las fracciones, la descripción del plan y programas de estudio, así como de algunas lecciones del libro de texto gratuito de tercero de primaria respecto a este tema (SEP, 2013). Esta revisión permitió identificar las diferentes interpretaciones de la fracción y así, elegir un marco teórico (registros de representación Duval (1999)) acorde con el problema de estudio.

- 2. Diseño y aplicación de los instrumentos de recolección de datos.*

Se diseñó un primer cuestionario de actividades vinculadas con la creación, identificación y uso de “la mitad de” en registros gráficos, numéricos y en lenguaje natural (véase Anexo 1). Derivado de la información obtenida en su aplicación, fue necesario diseñar un nuevo cuestionario, con el propósito de obtener más datos que enriquecieran el análisis. Se diseñaron actividades específicas acerca del uso y creación de “la mitad de” en registros de representación numérico y en lenguaje natural (véase Anexo 2). Finalmente, se diseñó una entrevista

semiestructurada para alumnos seleccionados de acuerdo a su nivel de comprensión en relación con la fracción $\frac{1}{2}$ (véase Anexo 3).

La aplicación de los instrumentos se realizó en diferentes tiempos. El primer cuestionario se aplicó en el mes de febrero, el segundo en el mes de abril y, por último, las entrevistas se llevaron a cabo el mes de junio. Estas decisiones estuvieron limitadas por la disponibilidad de tiempo en la institución escolar.

3. Análisis y obtención de resultados.

El estudio finalizó con la transformación, selección y análisis de datos que permitieron dar respuesta a las preguntas planteadas. Estos resultados dan cuenta de las visiones de los alumnos respecto a la “mitad de” y sus estrategias al momento de resolver las actividades propuestas. Por un lado, se hace un análisis global a fin de identificar dificultades y logros. Por otro lado, se detallan tres casos representativos de los diferentes niveles de logro respecto a la comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$.

3.2 Diseño de instrumentos

De acuerdo con las preguntas y los objetivos planteados en el estudio, se consideró adecuado usar el cuestionario y la entrevista semiestructurada para la recolección de datos. El cuestionario como instrumento de investigación requiere en su construcción un conjunto de ítems relacionados con lo que se quiere investigar (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El diseño de los cuestionarios consistió en un conjunto de actividades respecto a la fracción $\frac{1}{2}$. Se pensó en que fueran accesibles, enunciados cortos y atractivos tanto para los alumnos como para el docente. Ambos cuestionarios fueron mixtos en tres sentidos:

1. En cuanto a los registros de representación gráfico, numérico y lenguaje natural: Para analizar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el concepto “mitad de”, se consideró necesario que durante el proceso de

resolución de las actividades identificaran, crearan e hicieran uso de la fracción a través de diferentes representaciones.

2. En cuanto al contenido: Todas las actividades estuvieron relacionadas con la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes situaciones. Se usó tanto *unidades simples o compuestas* y se les solicitaba obtener la mitad de una unidad o la mitad de la mitad de la unidad original. Además, se utilizó dos tipos de medidas (longitud y capacidad) en situaciones que involucraban cantidades de alimentos, ropa o dinero. Asimismo, el contenido de algunos ítems involucraba el reconocimiento de “la mitad” tanto en figuras prototípicas (polígono estrellado, hexágonos, pentágonos, cuadrados y rectángulos) como en figuras menos usuales en el libro de texto.

3. En cuanto a preguntas abiertas y cerradas: Las preguntas cerradas se usaron porque son más usuales en este grado escolar (dado sus habilidades de escritura) y, por tanto, más fáciles de responder, únicamente los alumnos tenían que “tachar” un sí o un no. Las preguntas abiertas nos permitieron profundizar en sus respuestas, es decir, sobre el procedimiento que llevaron a cabo para la resolución de determinados ítems y la justificación de los mismos.

La elaboración de las actividades en los dos cuestionarios fueron tanto adaptaciones de otros materiales como creaciones propias. Algunas actividades tienen más de un ítem; en el caso del primer cuestionario, la actividad uno contenía 25 ítems. Los ítems 3, 13 y 18 fueron adaptaciones de las lecciones del libro gratuito de tercero de primaria proporcionado por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2013, p. 105) titulado “Desafíos matemáticos”. La idea de los ítems 12,14,15,16,17,19 y algunas de las imágenes de la cuarta actividad fueron replicadas del libro *Mindset Mathematics* (Boaler, Munson y Williams, 2018), igualmente que la tercera actividad. Los ítems sobrantes y algunos diseños de figuras geométricas fueron diseño propio. Asimismo, la segunda, cuarta, quinta y sexta actividad del primer cuestionario y la elaboración de los problemas matemáticos para el segundo cuestionario fue nuestro propio diseño.

Los problemas matemáticos utilizados en el segundo cuestionario implicaron diversos contextos de medidas de longitud y de capacidad, situaciones de dinero, alimentos y ropa, a fin de que los alumnos pusieran en práctica el reparto equitativo y exhaustivo. Además, poder identificar si sus respuestas tienen relación con su contexto y aprendizajes previos.

Un último instrumento fueron las entrevistas porque estas “se basan en una guía de asuntos o preguntas y el investigador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados” (Hernández, Fernández y Baptista 2010, p. 418).

En el guion se tuvo como finalidad conocer las dificultades a las que se enfrentaron los alumnos de tercero de primaria durante la resolución de dos cuestionarios. Indagamos en el ¿cómo le hicieron?, ¿por qué dividieron figuras como los triángulos de esa manera para que se visualizara una mitad?, qué nos explicarán ¿cómo se obtiene la mitad de un producto?, ¿qué se les facilitó más identificar la mitad en unidades simples o en unidades compuestas?, ¿qué actividad de ambos cuestionarios se les hizo difícil de resolver?, ¿qué cuestionario se les facilitó más?, y ¿en dónde identificaron más rápido la mitad en registros gráficos, numéricos o verbales?

Recapitulando el diseño de los instrumentos se realizó en tres momentos:

- En el primer momento se diseñó un cuestionario con seis actividades que involucraban la identificación, uso y definición del concepto de fracción $\frac{1}{2}$ en registros gráficos, numéricos y en lenguaje natural (véase Anexo 1). Una vez diseñado el cuestionario, se sometió a una validación, por parte de las autoridades educativas de la escuela primaria (director, subdirector académico y docente frente a grupo), y fue autorizado con éxito.
- El segundo momento correspondió al diseño de un segundo cuestionario complementario, dado los resultados obtenidos en la primera fase. Este instrumento constó de cinco actividades donde

predominó el registro de lenguaje natural, es decir, las actividades involucraban la creación y uso del concepto mitad, mediante la resolución de problemas de repartos equitativos y exhaustivos de una unidad (véase Anexo 2).

- El tercer momento fue la elaboración de la entrevista (véase Anexo 3), con siete preguntas relacionadas con el nivel de desempeño (consolidado/bueno, en proceso/satisfactorio, deficiente/iniciado el proceso) alcanzado por algunos alumnos de acuerdo con sus respuestas de ambos cuestionarios.

3.2.1 Aplicación de instrumentos

El estudio se llevó a cabo durante el ciclo escolar 2018-2019 en una Escuela Primaria pública de turno completo de 07:50 am a 15:50 pm, ubicada en la Alcaldía Álvaro Obregón de la Ciudad de México.

Los participantes fueron alumnos que cursaban tercer grado correspondiente al grupo, "A"; su titular un profesor de 41 años de edad con 19 años de servicio; su formación académica es resultado de su Licenciatura en una Normal de Maestros. Durante nuestra intervención en todo momento, mostró una actitud de apertura y comprensión al estar frente a su grupo. Igualmente fue flexible en cuanto al horario para la aplicación de los dos cuestionarios y de las entrevistas.

Los cuestionarios se entregaron de manera individual. La primera aplicación se llevó a cabo en la tercera semana de febrero a 30 alumnos (14 niñas y 16 niños), con edades entre los 8 y 9 años. El segundo cuestionario se aplicó en la primera semana de abril, a 26 alumnos (13 niñas y 13 niños).

Cabe mencionar que, la reproducción/fotocopiado de los cuestionarios estuvo a cargo de la institución educativa, a blanco y negro. La calidad del fotocopiado nos limitó el análisis de algunos ítems con respuestas que esperamos que fueran muy claras. En particular, el primer cuestionario presentó dificultades visuales en algunos

gráficos; derivado de ello, los alumnos generaron algunas estrategias como el alterar el gráfico coloreando, para señalar lo que se les pedía (véase Apartado 4.1.1).

Ante esta situación, las instrucciones se modificaron de modo que, para facilitarnos el análisis de las respuestas, los alumnos podían hacer uso de material didáctico, como lápices de colores para crear y explicar el significado de una mitad.

Las entrevistas se aplicaron a seis alumnos, seleccionados de acuerdo al nivel de comprensión (consolidado, en proceso, iniciando el proceso) que arrojaron los resultados de ambos cuestionarios. El nivel “*consolidado*”, aquellos que lograron identificar y crear la “mitad de” en sus tres representaciones. El nivel “*en proceso*” a los que reconocieron e hicieron uso de la fracción $\frac{1}{2}$, pero no lograron explicar qué es una mitad, a través del registro de lenguaje natural. Por último, el nivel “*iniciando el proceso*” aquellos alumnos que no resolvieron los ejercicios adecuadamente.

El Director de la institución autorizó realizar dichas entrevistas el día 24 de junio, con dos especificaciones. Por un lado, ser breves (no más de cinco minutos con cada alumno) y únicamente estaba permitido grabar su voz, por cuestión de seguridad, y respetando lo que menciona la Ley Federal del Derecho de Autor (2018), en su artículo 231 fracción II, “Utilizar la imagen de una persona sin su autorización o la de sus causahabientes se contempla como infracción administrativa” (p. 44). Por tanto, respetamos las instrucciones dadas y omitimos tantos nombres de alumnos como de las autoridades educativas.

3.3 Categorías de análisis

Para proceder al análisis de las respuestas dadas por los alumnos fue necesario clasificar la información en tres categorías (véase tabla 3.1). Para su construcción, primero se conformaron algunas posibles pre-categorías relacionadas con: reconocer la mitad en un registro gráfico, construir “la mitad de” desde un entero dado y producir un texto acerca de la mitad con el uso del registro numérico y registro de lenguaje natural. Con los datos fue posible refinarlas en las siguientes:

La primera fue la manera en qué los alumnos identificaban o reconocían “la mitad de”

en un registro gráfico, al poner en práctica sus conocimientos respecto a unidades simples y compuestas. En las unidades simples se usan figuras geométricas familiares como círculos, polígonos regulares e irregulares (cuadriláteros, hexágonos, dodecágono) y polígono estrellado. Estas unidades fueron fraccionadas en partes usando ejemplos prototípicos y no prototípicos de libros de texto.

La segunda categoría se relaciona con el cómo los alumnos construyeron “la mitad de” en un entero dado, situaciones que les implicaba mostrar la mitad de una unidad. Fueron dos actividades donde se les solicitaba la construcción de esta. En la primera, era necesario reconocer la unidad (simple o compuesta) y con las partes dadas colorear su mitad. En algunos casos, se requería subdividir una parte por la mitad. En la segunda actividad debían elegir una unidad en una red rectangular de manera que la mitad estuviera sombreada.

La tercera categoría involucra la escritura de la fracción $\frac{1}{2}$, “un medio” o “la mitad de”, con el objetivo que los alumnos explicarán lo qué es una mitad con sus propias palabras, es decir, justificar el procedimiento que realizaron para llegar a sus respuestas, además que también se les pidió que crearán un problema relacionado con $\frac{1}{2}$. Las actividades que involucraban este registro (lenguaje natural) fueron dos actividades del primer cuestionario y todos los problemas matemáticos del segundo cuestionario.

Tabla 3.1. Categorías de análisis para la clasificación de los datos

Categoría	Registro de representación	Cuestionario	Contenido	Actividades
Identificar/ Reconocer “la mitad de”	Gráfica	1°	Analiza figuras geométricas, a partir de comparar si se trata o no de la mitad.	Primera.
				Segunda.
				Cuarta.
Construir “la mitad de”	Gráfica	1°	Forma diferentes unidades con la forma $\frac{1}{2}$.	Tercera.
				Quinta.
Construir “la mitad de”	Numérica	2°	Resuelve problemas de multiplicación división con unidades simples o compuestas vinculadas con repartos equitativos y exhaustivos.	Primera, segunda, tercera y cuarta.
Escritura de la fracción $\frac{1}{2}$, “un medio” o la “la mitad de”	Lenguaje natural	1°	Representa y describe por escrito el significado de la fracción $\frac{1}{2}$.	Sexta.
		2°		Quinta y sexta.

Fuente: Elaboración propia

Resultado del análisis con el uso de estas categorías (pre-construidas al momento del diseño) surgió una más vinculada con diferenciar el nivel de comprensión. La jerarquía que propusimos fue la siguiente:

1. Iniciando el proceso: reconoce la fracción $\frac{1}{2}$ en pocas situaciones o tipos de representaciones, se le dificulta construir la mitad de algunas unidades.

2. En proceso: reconoce la fracción $\frac{1}{2}$ en varias situaciones, construye unidades con algunas dificultades con el registro de lenguaje natural.
3. Consolidado: reconoce la fracción $\frac{1}{2}$ en varias situaciones, construye unidades y articula diferentes representaciones.

3.4. Contexto interno y externo de la escuela

El contexto interno y externo tiene como periferia las relaciones dentro de la institución, involucran la participación de los padres de familia y de otros miembros de la comunidad donde se ubica la escuela.

Se consideran las relaciones establecidas en el entorno social e institucional, en las que participan los habitantes, las organizaciones de la comunidad, barrio o colonia, así como los municipios y organizaciones civiles relacionadas con la educación y con la seguridad de los alumnos e institución. Lo anterior se puede observar en la entrada y salida, ya que se acordona la calle para que exista un orden y ningún alumno se vaya sin ser acompañado por su tutor/a.

Los alrededores de la escuela primaria se consideran inseguros porque no existen banquetas, las calles son muy estrechas y no se cuenta con suficiente transporte público. Además, tiene salidas colindantes con otras colonias inseguras según lo expresaron, de manera informal, sus habitantes. También se encuentran varios comercios de abarrotes, carnicerías, papelerías, panaderías, farmacias, peleterías e incluso una iglesia. La mayoría de su población es católica y el alumnado de la escuela vive muy cerca de los alrededores de la institución. Es una zona escolar donde siempre hay gente a sus entornos, pero lamentablemente la comunidad no se apoya y siempre están en constante controversia.

Identifiqué el contexto interno, la organización y la vocación de los agentes educativos; por ejemplo, el colectivo de directivos y docentes, cada uno de estos conocen, comprenden y satisfacen las necesidades ante las demandas de los padres de familia.

En particular, el docente titular de 3^o A involucra a los padres de familia, como estrategia de su práctica en el aula. Semanalmente, les envía un semáforo de la conducta resultado de las autoevaluaciones de los propios alumnos. Al finalizar la jornada escolar, cada niño debe autoevaluar su conducta del día dibujando con color (verde, amarillo o rojo) el círculo del semáforo. Del mismo modo, envía diariamente recados o hace notas en las libretas donde solicita la firma de los padres. De esta forma los integra y los hace partícipes en las actividades de sus hijos, a fin de que esta situación favorezca a los aprendizajes escolares. Además, fomenta el trabajo colaborativo, distribuyendo las mesas del salón en forma de hexágono, con el objetivo de formar cinco equipos de seis alumnos.

La clase de matemáticas, en la que estuve presente, se vio el tema de reparto. Las actividades que el maestro realizó fue mediante la resolución de problemas, les dictó cinco problemas a resolver que involucraban multiplicaciones y divisiones. Después le indicaba a cada equipo el número de problema que resolverían en el pizarrón. Si estaba correcto lo hecho por ese equipo, generaba puntos y, si fuese incorrecto, podía pasar otro equipo y robar dichos puntos. Al final de la semana, el equipo con más puntos en la clase de matemáticas, obtenía un punto extra para el examen bimestral.

En definitiva, el acercarse al contexto interno y externo en el que están inmersos los participantes de este estudio, nos permite comprender otros factores que, si bien no se explicitan en los resultados de esta tesis, son valiosos para mi formación académica como pedagoga. En suma, la información obtenida en su conjunto se relaciona con los objetivos planteados en la investigación y nos permitieron esbozar respuestas a las incógnitas realizadas al principio del estudio. Como resultado de este estudio podemos concluir algunos aspectos relacionados con cómo los alumnos comprenden el concepto de fracción $\frac{1}{2}$.

Capítulo 4. Comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes representaciones y situaciones

En este capítulo se describen las respuestas dadas por alumnos de tercer grado a dos cuestionarios (véase Anexos 1 y 2) en los que se pretendió acercarse a sus conocimientos respecto a la fracción $\frac{1}{2}$ en situaciones de reparto, construcción y producción con diferentes registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural).

En la primera parte se señalan los resultados de manera global, identificando los aciertos y principales dificultades para reconocer, crear y hacer uso de la noción “mitad de” a fin de resolver las distintas actividades propuestas. En la segunda parte, se detallan tres casos en los que se muestran diferentes niveles de logro respecto a la comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$. Cabe señalar que en el primer cuestionario participaron 30 alumnos y en el segundo 26, con una diferencia en la aplicación, de dos meses entre el primero y el segundo como se mencionó en el capítulo anterior.

4.1. Una mirada global a las respuestas. Lo que hacen los alumnos respecto a “la mitad de”

El aprendizaje de las fracciones involucra un cambio en el conjunto numérico abordado en el primer ciclo de la educación primaria (1er y 2do grado). Varios autores (Block, Moscos, Ramírez y Solares, 2007; Butto, 2013) han señalado que en su aprendizaje se requiere diferentes significados para lograr su comprensión. Esta es una razón por la cual es frecuente que los alumnos transiten por diversas dificultades debido a su complejidad respecto a la ampliación del conjunto numérico (de los naturales a los racionales positivos) y la necesidad de conceptualizar el reparto equitativo y exhaustivo.

Los resultados analizados en este capítulo muestran aspectos involucrados en la comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$. Como se mostrará hay mayores dificultades para justificar los procedimientos de resolución y expresar el significado “mitad de” en contraste con el reconocimiento de figuras prototípicas (polígono estrellado,


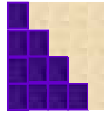
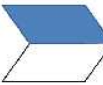





hexágonos, pentágonos, cuadrados, rectángulos); para los participantes fue sencillo resolver los problemas y no el plantear situaciones donde se obtuviera como resultado la fracción $\frac{1}{2}$. En cuanto al uso de representaciones hay mayor tendencia a usar e identificar la gráfica y menos, el lenguaje natural.

4.1.1 Reconocimiento/identificación de “la mitad de” en un registro gráfico

Para los registros gráficos se usaron unidades simples y compuestas. Las unidades simples se ilustran con figuras geométricas familiares para los estudiantes como círculos, polígonos regulares e irregulares (cuadriláteros, hexágonos, dodecágono) y polígono estrellado. Estas unidades fueron fraccionadas en partes usando ejemplos prototípicos y no prototípicos del libro de texto gratuito de tercer grado de primaria.

Nuestros resultados muestran como la mayoría de los estudiantes logran reconocer “la mitad de” en unidades simples.

Tabla 4.1. Cantidad de alumnos que reconocen “la mitad de” por ítem

Ítems	Correcto	Incorrecto	Items	Correcto	Incorrecto
	30	0		30	0
	30	0		30	0
	30	0		29	1
	30	0		27	3

Fuente: Elaboración propia.



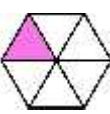


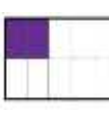

Estos datos nos permiten suponer que los alumnos pueden reconocer representaciones en las que hay solo una división, en la que “claramente se ve” que la parte sombreada es la mitad (desde un nivel perceptivo).

Autores como Gutiérrez (1991) señalan que al momento de usar representaciones gráficas para resolver diferentes situaciones se ponen en juego procesos y habilidades visuales; estas inciden en el reconocimiento y creación de figuras visuales vinculándolas al contexto del sujeto. En las respuestas mostradas en la tabla 4.1, podemos interpretar que los alumnos tienen la habilidad para identificar visualmente “la mitad de” pues la reconocen independiente de la forma. Posiblemente las respuestas dadas por ellos se dieron con éxito porque para algunos la fracción $\frac{1}{2}$, “es repartir, dividir, partir algo por igual para que la figura u objeto tengan lo mismo”, de esta manera al parecer vinculan la imagen con actividades de doblar por la mitad o con una idea de simetría.

En las actividades del primer cuestionario, según lo afirmaron los alumnos entrevistados se les facilitó identificar y crear la mitad con un entero dado, porque se trataba de “observar si las figuras tenían lo mismo de un lado que del otro y así poder tachar si se trataba o no de una mitad”.

Sin embargo, el nivel de éxito de los alumnos se reduce cuando la unidad se divide en más partes y se sombrea más o menos de las que representan la mitad. En este caso, también se esperaría del mismo modo que ellos reconocieran que “claramente” (desde un nivel perceptivo) no es la mitad.

Tabla 4.2. Cantidad de alumnos que no reconocen “la mitad de” por ítem

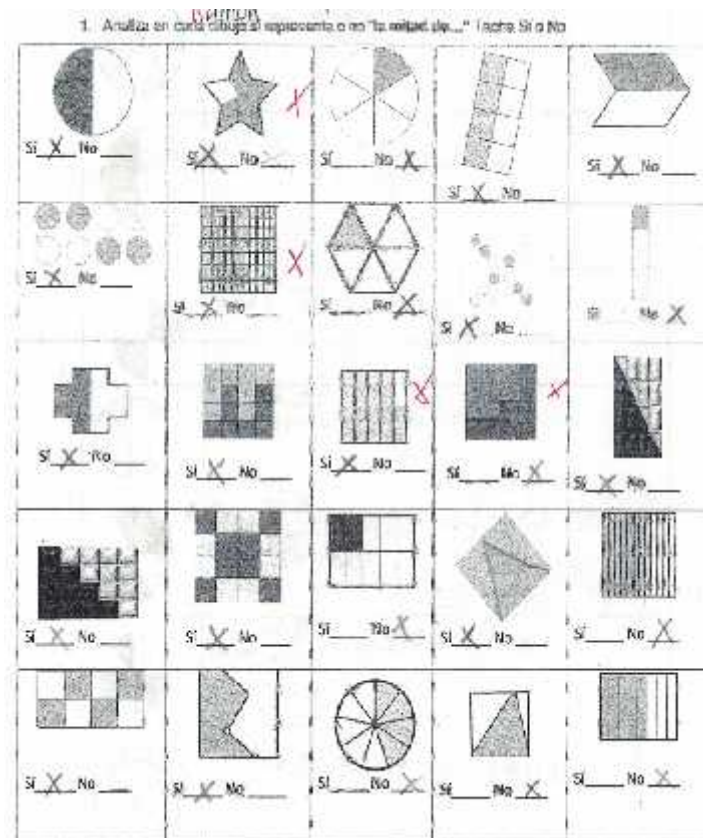
Ítems							
Alumnos	4	4	3	3	6	7	10

Fuente: Elaboración propia

En el caso anterior, los alumnos tienen dificultades en la “interpretación” de la

“información figurativa” y el “procesamiento visual” (Bishop, citado en Gutiérrez, 1991, p. 45), puesto que no logran diferenciar el significado de “mitad de”, en este tipo de registros gráficos, en los que se requiere comparar la parte sombreada con el entero. Analizamos un caso de una alumna A21 (ilustración 4.1) en los ítems que identifica la mitad en unidad simple como en la tabla 4.1 pero no en ítems como los de la tabla 4.2.






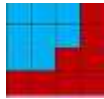






Ilustración 4.1. Caso de una alumna A21



Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en febrero, 2019.

Sin embargo, notamos que algunas respuestas incorrectas pudieran estar relacionadas con la calidad de la fotocopia. En los siguientes ítems no se podía apreciar claramente la cantidad de partes sombreadas.

Tabla 4.3. Respuestas correctas e incorrectas vinculadas, al parecer, con la calidad de la fotocopia

Gráfica						
Correcto	24	25	8	18	24	14
Incorrecto	6	5	22	12	6	16
Fotocopia						

Fuente: Elaboración propia.

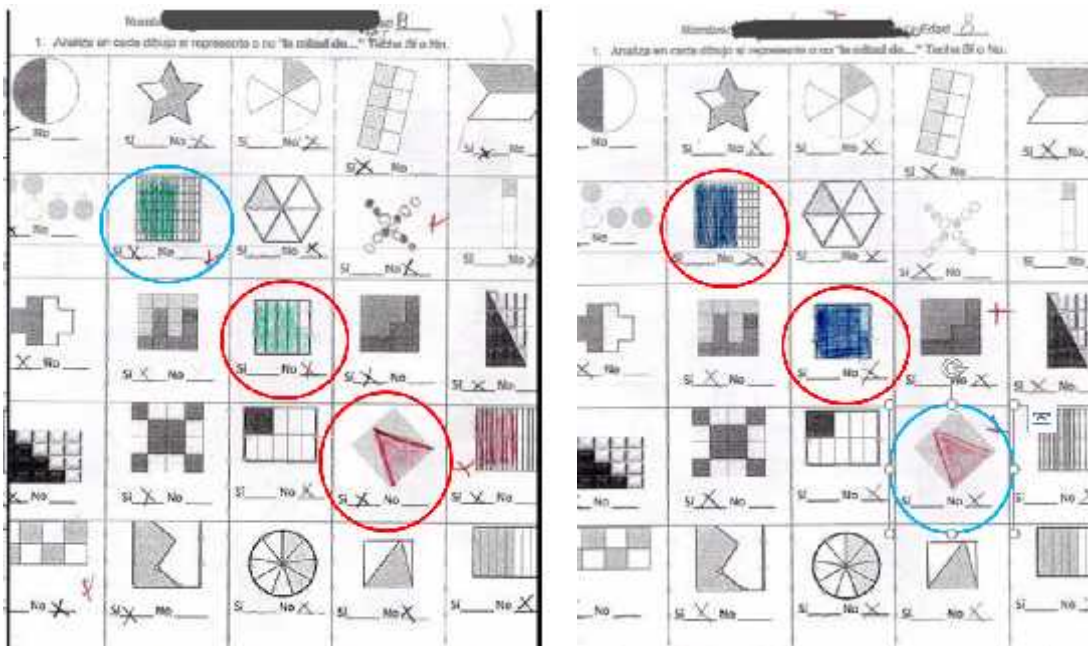
Las tablas 4.2 y 4.3, llaman la atención por el contraste entre respuestas de los ítems en los que hay una división similar, esto es, la unidad simple (rectángulo) se divide en partes que tienen la misma forma de rectángulos –no semejantes-. En este caso, en unos ítems los alumnos contestan correctamente mientras que en otros ítems no. Respecto a aquellos ítems de unidades compuestas, contrastan los resultados de éxito con errores para identificar la mitad sombreada.

Quizás si la estrategia fue el conteo de partes sombreadas para compararlas con las no sombreadas, parece que influyó el tamaño de la parte, o si se “identifica claramente” el contraste de escala de grises. Para aclarar este supuesto se entrevistó a dos de los alumnos que utilizaron esta estrategia y se encontró en el primer caso “colorie lo que no se veía bien para que fuera una mitad”, en este caso modificó el ítem de manera correcta para que la respuesta fuera afirmativa. El segundo caso mencionó “traté de contar los cuadritos y marcar con colores lo que no se veía que podía estar sombreado y así sabría si era mitad o no”. En este caso él tuvo la intención de recrear la figura para responder de forma afirmativa o negativa.

Debido a lo anterior, de los 30 estudiantes, los casos mencionados más otros cuatro

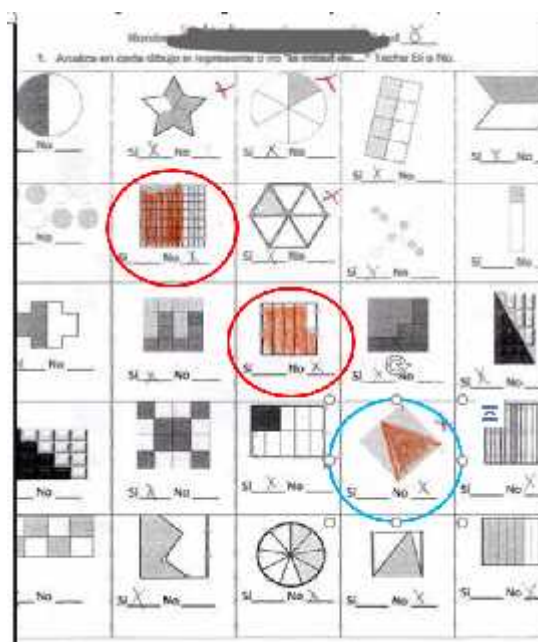
alumnos resolvieron los ítems coloreando lo sombreado y de esta manera, en algunos ítems, lograron reconocer si se trataba de la mitad o no (véase Anexo 4). Se encontró que otros alumnos colorean la mitad y responden correctamente con ese ajuste a su cuestionario. A continuación, en la ilustración 4.2 se muestran tres ejemplos, donde se evidencia con círculos de color rojo, aquellas figuras que fueron coloreadas y la respuesta fue correcta, mientras que las que se encuentran encerradas en color azul son las que los alumnos contestaron incorrectamente. Cabe mencionar que la respuesta Sí, se encuentra de lado izquierdo y la respuesta No, de lado derecho.

Ilustración 4.2. Estudiantes que colorearon la parte sombreada



Caso 1

Caso 2



. Caso 3

Nota. El maestro frente a grupo calificó las respuestas de algunos estudiantes y apuntó marcas junto a las respuestas



. Fuente: Resultados de tres cuestionarios aplicados en febrero, 2019.

En las entrevistas los alumnos nos confirmaron que es muy evidente identificar la mitad cuando “es partida en dos partes”. Se torna complicado cuando se trata de figuras que involucran en particular, división de triángulos.

Derivado de las respuestas dadas por estos estudiantes, inferimos que tienen un concepto de mitad relacionado con la simetría, en sus palabras, “sí tienes un corazón y lo cortas igual”, “una hoja representa una mitad cuando le entregas un recado a tu mamá”. Por lo tanto, su percepción visual de las figuras es cuando la imagen se vuelve exactamente igual que la otra, como las actividades de doblar por el eje de simetría y en la que coinciden las dos mitades.

En los ítems con unidades compuestas los estudiantes necesitaban descomponer las figuras de acuerdo a su rotación. El primer ítem, que se muestra en la tabla 4.4, no presentó dificultades para su resolución mientras que, en el segundo caso, las respuestas no fueron las esperadas. Los entrevistados afirman que: “había figuras que no se veían bien, pero teníamos que contar revisando que tuvieran la misma cantidad”. Deducimos que en el primer ítem de la tabla 4.4, todo el grupo utilizó esa estrategia, mientras que, en el segundo ítem por la calidad de la fotocopia, algunos como el entrevistado pensaron “como algunos no se veían bien yo tachaba que no porque no se veía que fuera la mitad de esa figura”.

Tabla 4.4 Comparación de ítems en la calidad de la fotocopia

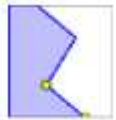






			
Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
30	0	18	12

Fuente: Elaboración propia.

Hay ítems en los que sus representaciones, desde el propio diseño, se consideraron de mayor complejidad cognitiva en el sentido de tener que hacer mayores acciones “tratamientos” en el registro gráfico y, por tanto, involucran procesos y habilidades

visuales particulares. Estos se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 4.5. Ítems de mayor complejidad que representan a fracción $\frac{1}{2}$

Ítems							
Correcto	27	26	26	25	18	17	8
Incorrecto	3	4	4	5	12	13	22

Fuente: Elaboración propia.

Para analizar las figuras mostradas en la tabla anterior (tabla 4.5) fue necesario relacionar otros conocimientos como es el caso de estrategias vinculadas con procesamiento de la información visual, en particular, la “interpretación de información figurativa”. Una posible estrategia implicaba a los estudiantes acomodar (mentalmente) de un lado lo sombreado y de otro lo no sombreado, para “percibir claramente” si es la mitad o no; es decir, los alumnos necesitaban operar sobre la figura partida a fin de comparar directamente el entero dado entre lo sombreado y lo no sombreado. Por tanto, las figuras “[...] han de ser vistas por separado, aunque tengan parte de su contorno en común y, finalmente, ha de centrarse atención solo en una de ellas” (Marmolejo y Vega, 2012, p. 19).

Otra estrategia que utilizaron fue el conteo (afirmación realizada por los alumnos en la entrevista) en ítem como los mostrados en la tabla 4.6. En estos casos, se requiere establecer una “[...] relación de orden que exige considerar el área como un tipo de magnitud mediada por la aplicación de una operación interna propia de la magnitud área” (Marmolejo y Vega, 2012, p. 120), es decir, los alumnos necesitan visualizar la figura en relación con sus áreas para poder unir y dictaminar si se trataba de la mitad o no.

Tabla 4.6 Respuestas de los estudiantes en los ítems con mala calidad en la fotocopia

Ítems		
Correcto	21	14
Incorrecto	9	16

Fuente: Elaboración propia.

Como lo indica Duval citado en Marmolejo y Vega, (2012) “La visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación semiótica que se considere” (p. 8). Precisamente, en el primer cuestionario era necesario poner en uso la visualización asociada al registro de representación gráfico para que los niños identificaran, ubicaran y produjeran su definición de fracción $\frac{1}{2}$.

Respecto a las explicaciones que dan los estudiantes para reconocer “la mitad de” en el primer cuestionario muestran que se centran en la cantidad en que está dividida la unidad simple y no necesariamente en la igualdad en el tamaño de todas las partes entre sí, esto es, un reparto equitativo.

Un ejemplo de sus afirmaciones es “son iguales” (ilustración 4.3 a), refiriéndose a la cantidad de partes sombreadas. En la ilustración 4.3 b se muestra lo realizado por un alumno que usa esta idea pero que en unos casos funciona y en otros no. Esta estrategia de conteo puede ser exitosa o no, según el tipo de registro gráfico y la relación entre el tamaño de las partes entre sí.

Ilustración 4.3a. Respuesta de un estudiante “son dos y dos”

SEP | 4º

2. Para cada caso, decide si es la mitad del círculo o no. Explica cómo lo sabes.











	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Porque porque tiene 8 coloridos
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque porque una manita este adaga y otra arriba
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque porque es 2 y dos
	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Porque porque son coloridos
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque porque es dos partes iguales y dos

Ilustración 4.3b. Respuesta de un estudiante “porque es lo mismo”

	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque Si Porque es lo mismo
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque Si Porque son dos y dos
	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Porque NO Porque hay una mas
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque Si Porque son dos y dos
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque Si Porque son tres y tres

Fuente: Resultados de dos cuestionarios aplicados en febrero, 2019.

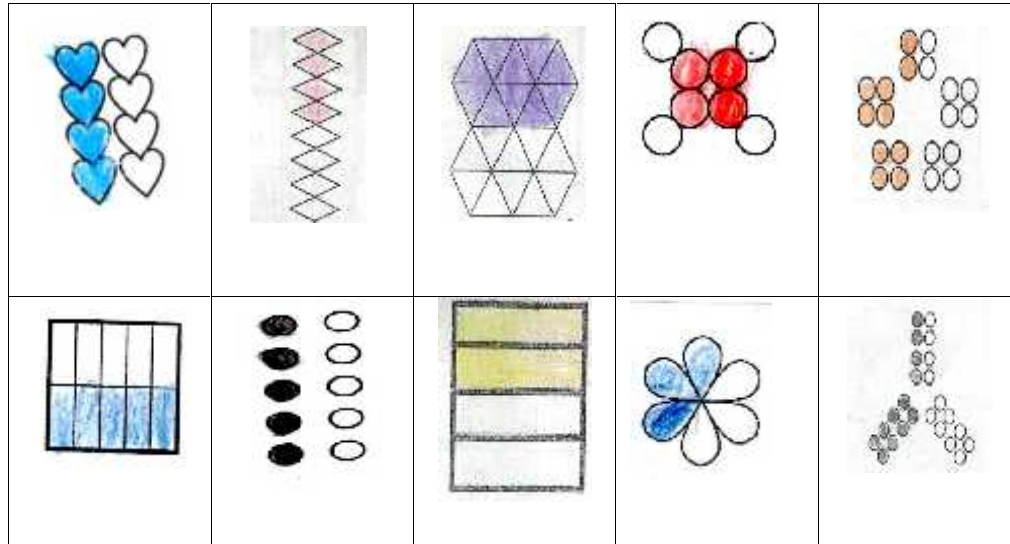
4.1.2. Construcción de “la mitad de” en un entero dado

A fin de identificar los conocimientos de los alumnos respecto a la mitad, dos de las actividades (tercera y cuarta del cuestionario 1) les implicaba mostrar la mitad de una unidad. En la cuarta actividad, era necesario reconocer la unidad (simple o compuesta) y con las partes dadas colorear la mitad. En algunos casos, requerían subdividir una parte en la mitad. En la tercera actividad, debían elegir una unidad en una red rectangular de manera que la mitad estuviera sombreada (véase Anexo1).

Las respuestas de los alumnos sugieren que estas actividades profundizan en el nivel de comprensión respecto a la fracción $\frac{1}{2}$. Esto se evidencia en que no se identifican ítems que todos los alumnos respondan correctamente, además, hubo alumnos que lo dejaron en blanco, no respondieron.

En el análisis de las respuestas se identifican diferentes estrategias, algunos mantienen una idea que la asociamos a la “simetría” como son los siguientes casos.

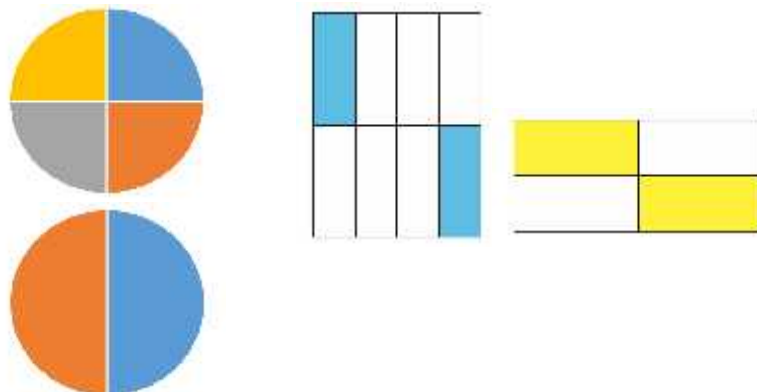
Ilustración 4.4. Estrategia de simetría de varios estudiantes.



Fuente: Resultados del primer cuestionario aplicado en febrero, 2019.

Al parecer, este tipo de estrategia, les permite reconocer “perceptivamente” más rápidamente si es o no, “la mitad de”. En la siguiente imagen se ilustran ejemplos prototípicos en los que se utiliza la estrategia de simetría vinculado con fracciones en el contexto de comparación de áreas.

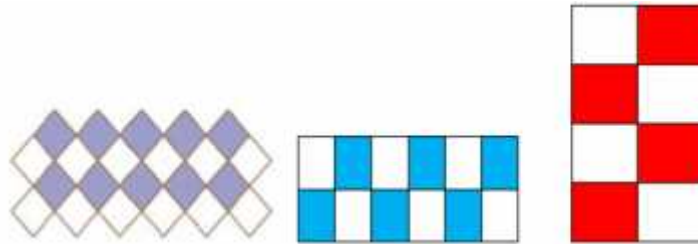
Ilustración 4.5. Estrategia de “simetría: este lado igual que el otro.”



Fuente: (SEP, 2013, p. 73).

Hay otra estrategia que denominamos “alternando: uno sí, otro no”, como se muestra en la siguiente ilustración.

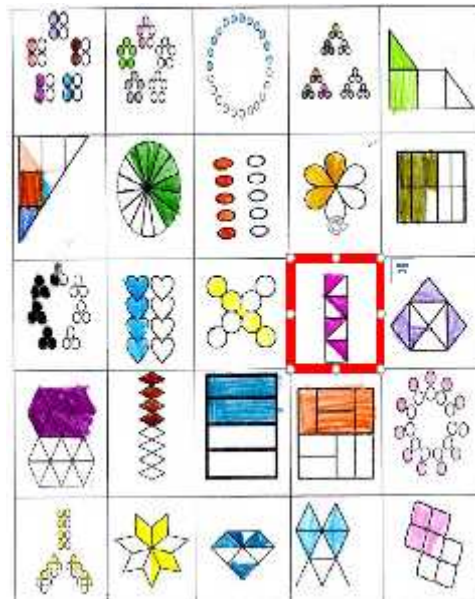
Ilustración 4.6. Estrategia uno sí, otro no.



Fuente: Elaboración propia.

En las respuestas dadas por algunos estudiantes, identificamos que la estrategia de simetría es utilizada por la mayoría de los alumnos, mientras que la estrategia uno sí, otro no, se utiliza con una mínima frecuencia. Siendo el caso de una alumna que completa la actividad combinando ambas estrategias, como se muestra en la siguiente imagen (ilustración 4.7), colorea simétricamente la mayor parte del ejercicio, únicamente en un ítem cambia de estrategia (encerrado en color rojo).

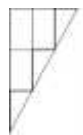
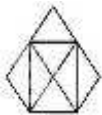
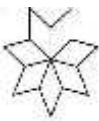

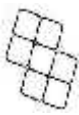

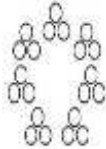

Ilustración 4.7. Combinación de estrategias por alumna A12



Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en febrero, 2019.

En el análisis de respuestas identificamos representaciones en las que un alto número de alumnos, el 50% (porcentaje redondeado) o más, respondieron incorrectamente y fueron las siguientes:

Tabla 4.7 Ítems con mayor cantidad de aciertos incorrectos

Ítems								
Correcto	36.66%	26.66	43.33%	26.66%	46.66%	63.33%	53.33%	53.33%
Incorrecto	63.33%	73.33%	56.66%	73.33%	53.33%	36.66%	46.66%	46.66%

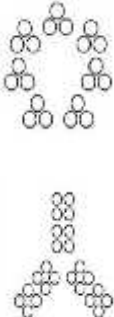
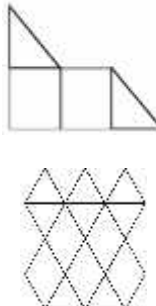
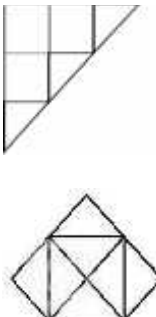
Fuente: Elaboración propia.

Al analizar las respuestas surgen dos posibles causas: el tamaño de la parte, la forma de la parte o que hay que dividir la parte en medios. La percepción visual, según Del Grande (citado en Gutiérrez, 1991), está vinculada con distintas habilidades, en este caso, como:

-) “Identificación visual”: reconocer “la mitad de” en una figura formada por varias partes, como en las actividades del primer cuestionario.
-) “Reconocimiento de las relaciones espaciales”: identificar correctamente las características de un medio en relación con un entero dado, como en la actividad tres del cuestionario uno (véase Anexo 1).
-) “Discriminación visual”: identificar semejanzas y diferencias visuales de $\frac{1}{2}$, como se muestra en ambos cuestionarios.

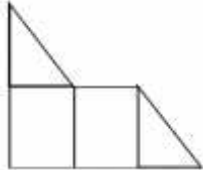
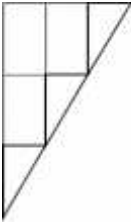
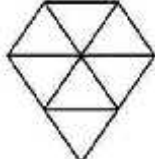
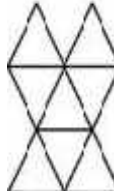
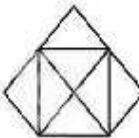
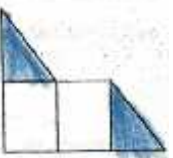
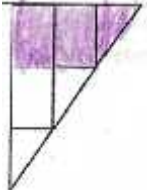
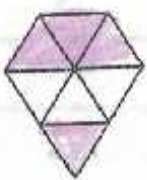


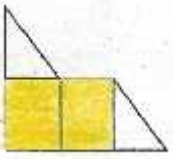
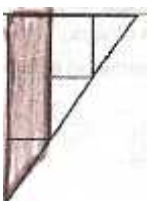



La mayor dificultad como se muestra en la tabla 4.8 se notó cuando la parte involucraba a un triángulo (isósceles) y/o debía dividirse. Es probable que esta dificultad se relacione con la perspectiva visual porque la figura puede asociarse con algo faltante sin lograr realizar la partición adecuada.

Tabla 4.8 Errores vinculados con la forma y tamaño de las partes

Tamaño de la parte	Forma de la parte	Dividir la parte
		

Fuente: Elaboración propia

Ilustración 4.8. Errores vinculados con la forma “triángulo” en las partes del entero

Fuente: Resultados del primer cuestionario aplicado en febrero, 2019.

Las respuestas mostradas en la ilustración 4.8 nos sugieren, que la estrategia empleada fue el reconocimiento en su nivel de percepción visual de “parece la mitad de” sin importar si fuera exacta o no. Supuesto que se verificó con las entrevistas, ya que, al cuestionarles ¿por qué dividían el triángulo de esa manera?, sus respuestas en su mayoría fueron: “para que la figura tuviera lo mismo de un lado y de otro”, “para que se formará una mitad”, “porque se tenía que crear una mitad coloreando”.

Por tanto, en la mayoría de los casos, los estudiantes combinaron habilidades como “identificación visual” junto con el “reconocimiento de las relaciones espaciales”, que les permitieron reconocer la cantidad de triángulos que formaban parte del área de la figura. Sin embargo, no lograron visualizar, el movimiento de “doblez” por la mitad como estrategia a fin de, notar donde se debía colorear para que se tratará de la “mitad de” y coincidiera con sus afirmaciones “los dos lados tengan lo mismo y sean iguales”.

En el libro de texto gratuito de matemáticas de tercer grado de primaria, en el tercer bloque (SEP, 2013), las actividades centradas en la representación de la mitad con relación a figuras geométricas como triángulos (ilustración 4.9a), se proponen mediante la estrategia de conteo para identificar en el entero dado, con el número de triángulos a colorear, pero no implican hacer particiones de las fracciones. Lo que sí se muestra son diferentes maneras de mostrar “la mitad de” en una unidad simple.

La habilidad cognitiva que necesitan los alumnos para dar solución de dichas situaciones (ilustración 4.9b), es un ejercicio de conteo sobre las partes que compone la figura dada, es decir, la estrategia de conteo es un procedimiento que se toma en cuenta como una herramienta fundamental para el desarrollo de dichas actividades (Marmolejo y Vega, 2012, pp. 23-24).

Ilustración 4.9a. Actividad del libro de texto gratuito de matemáticas, página 117

1. Coloreen la mitad de los triángulos de azul.
2. De la otra mitad, coloreen la mitad de anaranjado.
3. De los triángulos que queden, coloreen la mitad de verde.
4. El resto de los triángulos coloreémoslos de amarillo.

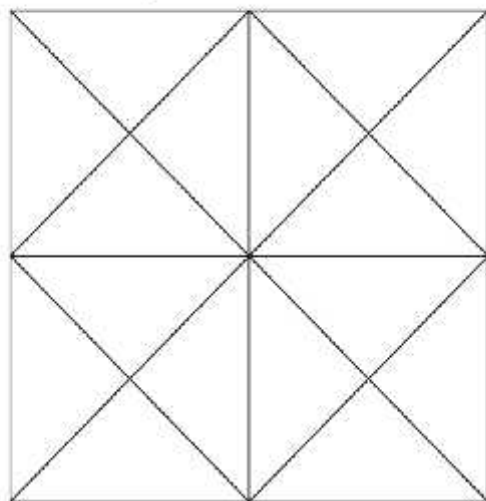
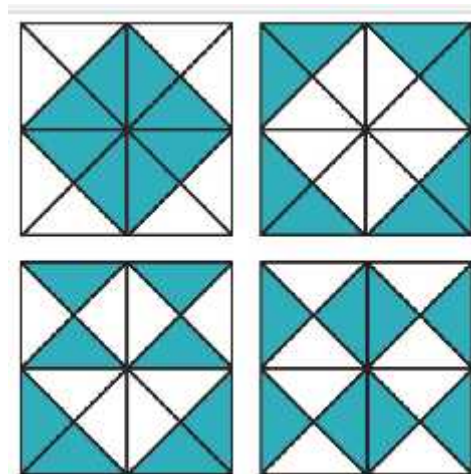


Ilustración 4.9b. Actividad del libro de texto gratuito de matemáticas, página

119



Fuente: (SEP, 2013, pp. 117-119).

Las actividades en el libro de texto gratuito de matemáticas (SEP, 2013), introduce el conteo uno a uno, como estrategia para el caso de las figuras geométricas, triángulo, que conforman un entero para conceptualizar la fracción como $\frac{1}{2}$.

4.1.3. Escritura de un medio, $\frac{1}{2}$ y “la mitad de” para resolver un problema

Otro aspecto en el que se indagó fue en el uso de la fracción $\frac{1}{2}$ para resolver situaciones en lenguaje natural relacionados con la noción de mitad y con la mitad de la mitad. Con las actividades quinta y sexta del primer cuestionario junto con las seis actividades del segundo se logró que los alumnos escribieran, justificaciones de sus respuestas, construyeran la definición de “la mitad de” y la crearán un problema vinculado con $\frac{1}{2}$.

Para los problemas matemáticos se utilizaron registros numéricos en contextos de medidas de longitud y de capacidad, situaciones de dinero, así como repartos

equitativos y no exhaustivos. El 90% de los alumnos realizaron una división en partes de un conjunto (galletas, camisetas, helados) de tal forma que las cantidades resultarán iguales para cada situación.

La mayor dificultad se presentó al desarrollar actividades que involucraban el registro de lenguaje natural; en el primer cuestionario se señala que este tipo de actividades fueron resueltas por muy pocos alumnos, utilizando el registro gráfico para darle significado al concepto “mitad de”. Mientras que, gran parte del grupo no las realizaron, es decir, no contestaron (dejaron en blanco). En el segundo cuestionario se logró obtener diversas respuestas acerca del procedimiento usado para responder a las actividades. De modo que, en las primeras cuatro actividades ligaron sus conocimientos con la idea de reparto equitativo utilizando principalmente operaciones como la multiplicación y la división.

Los alumnos utilizaron expresiones como “multipliqué”. Otros como A8 usaron expresiones como “dividiendo”, “hice división”, “multiplicando y diviendo”, para describir la manera de resolver la actividad. Se esperaba que en sus respuestas detallaran sus procesos de solución, pero las respuestas fueron poco descriptivas.

En la producción de un mensaje y un problema con la noción de la fracción $\frac{1}{2}$, realizamos una comparación entre las respuestas a la misma pregunta ¿qué es una mitad? en ambos cuestionarios. Los resultados del primer cuestionario (ilustración 4.10), su gran mayoría usaron el registro gráfico, contestando e ilustrando:

Ilustración 4.10. Respuestas a la pregunta ¿qué es una mitad?



Fuente: Resultados del primer cuestionario aplicado en febrero, 2019.

Mientras que el resto puso en práctica el registro de lenguaje natural, expresando lo siguiente: “La mitad es una división”, “Es una suma, resta o división”, “Es un reparto”, “Esto es una mitad si tú tienes un pastel y tienes ocho invitados y solo llegan 4 esto es una mitad”.

Las respuestas en un tiempo de dos meses, presentaron un cambio, pues en ellas la mayoría de las expresiones por parte de los alumnos hacían referencia que una mitad significaba partir algo en dos. De esta manera los alumnos utilizaron el registro de lenguaje natural para explicar el concepto de mitad. El incremento de que los alumnos respondieran esta actividad mediante un registro en lenguaje natural; intuimos que fue por el diseño del segundo cuestionario, porque en el predominaron registros de representación numéricos y en lenguaje natural.

Consideramos que la diferencia temporal de aplicación no influyó sobre los resultados que mostraron conocimientos respecto al concepto de mitad, ya que, son muy similares las respuestas entre el primer cuestionario y el segundo. En el segundo cuestionario fue mayor la cantidad de alumnos que expresaron el significado de mitad usando el registro de lenguaje natural.

Cabe señalar que pocos alumnos utilizaron el registro gráfico para explicar el concepto, estos alumnos usaron representaciones como manzanas, chocolates, así como figuras geométricas (cuadrado, triángulo y círculo).

En sus afirmaciones reconocen el concepto mitad en relación con un reparto, como una división donde el divisor debe ser el número dos, mientras que el dividendo será la cantidad de partes que se van a repartir; de esta forma el cociente da como resultado la mitad y el residuo, diferente de 0, en caso de tratarse un reparto no equitativo. Por ejemplo, en la tercera actividad del segundo cuestionario (véase Anexo 2).

Con respecto a la producción de un problema que involucrara la noción de la fracción $\frac{1}{2}$ fue resuelta por el 70% de los estudiantes, escribiendo problemas similares a los del cuestionario con cantidades exactas y con la utilización de unidades simples

como variables; es decir, números pares y realizando un reparto a dos sujetos u objetos con partes como galletas, manzanas, chocolates, dulces, pizzas, mochilas, dinero.

La aplicación de ambos cuestionarios tenía como objetivo que los alumnos enunciaran sus aprendizajes matemáticos respecto a la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes registros de representación (gráfico, numérico, lenguaje natural). Consideramos que se logró, pues uno de los entrevistados expresó “con estos ejercicios aprendí a identificar lo que es una mitad y lo que no es una mitad”, mientras que otros dos de ellos dijeron “pusimos en práctica las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), pero sumé y dividí en casi todo”.

Los estudiantes presentaron dificultades en identificar y explicar el concepto de “la mitad de” en registros gráficos porque consideramos que visualmente, los alumnos imaginan al entero dividido exactamente en dos, como un reflejo (idea de simetría). Situación confirmada con un entrevistado, “identifico la mitad cuando tienes un entero y solo pones una línea en medio”.

Cuando se enfrentan a actividades que incorporan el registro numérico hubo un nivel de logro alto, los alumnos mostraron comprensión de la idea de mitad, como un reparto equitativo donde debían realizar una operación, dividir.

Las entrevistas evidencian que el segundo cuestionario se les facilitó mucho, porque lo único que tenían que hacer era leer con atención y hacer una o dos operaciones. A diferencia del primer instrumento expresan, fue sencillo crear la mitad (tercera actividad) e identificar si se trataba o no de una mitad. Por tanto, alumnos de tercero de primaria al finalizar el estudio, mostraron una comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$ en registros numéricos y gráficos. Sin embargo, consideramos que el registro en lenguaje natural, no se logró como esperábamos, quizá por otros aspectos como dificultades en habilidades de lectura y escritura o la falta de costumbre en justificar sus repuestas.

4.2. Una mirada más puntual. Tres casos con diferencias en el proceso de comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$

Los resultados de los dos cuestionarios aplicados muestran que es el estudio de la función “la mitad de” es importante, porque es base fundamental para el aprendizaje a nivel primaria o que se introduce en los libros de texto gratuitos. Además de que son parte de la vida cotidiana de cada uno de los alumnos (Llinares y Sánchez, 1988).

La relación que tiene la vida cotidiana con las fracciones, y en especial la fracción $\frac{1}{2}$ es de utilidad en los comercios, bancos, alimentos, casas, y hasta para medir el tiempo, distancias o la velocidad. Por tanto, “la mitad de” no solo se utiliza en el contexto escolar. Para ello es necesario durante una trayectoria académica que los alumnos logren entender el concepto en sus diferentes representaciones, a fin de que estas les permitirán aprender diversos contenidos matemáticos y sean de apoyo en distintas situaciones cotidianas del día a día (Cortina y Zúñiga, 2008).

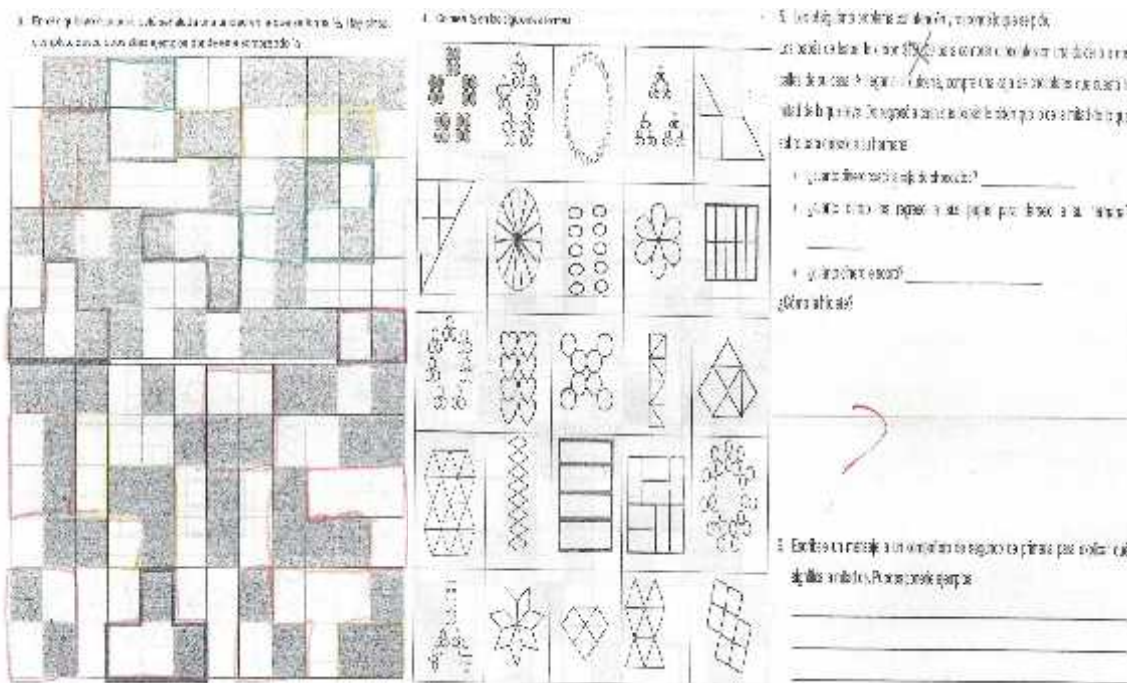
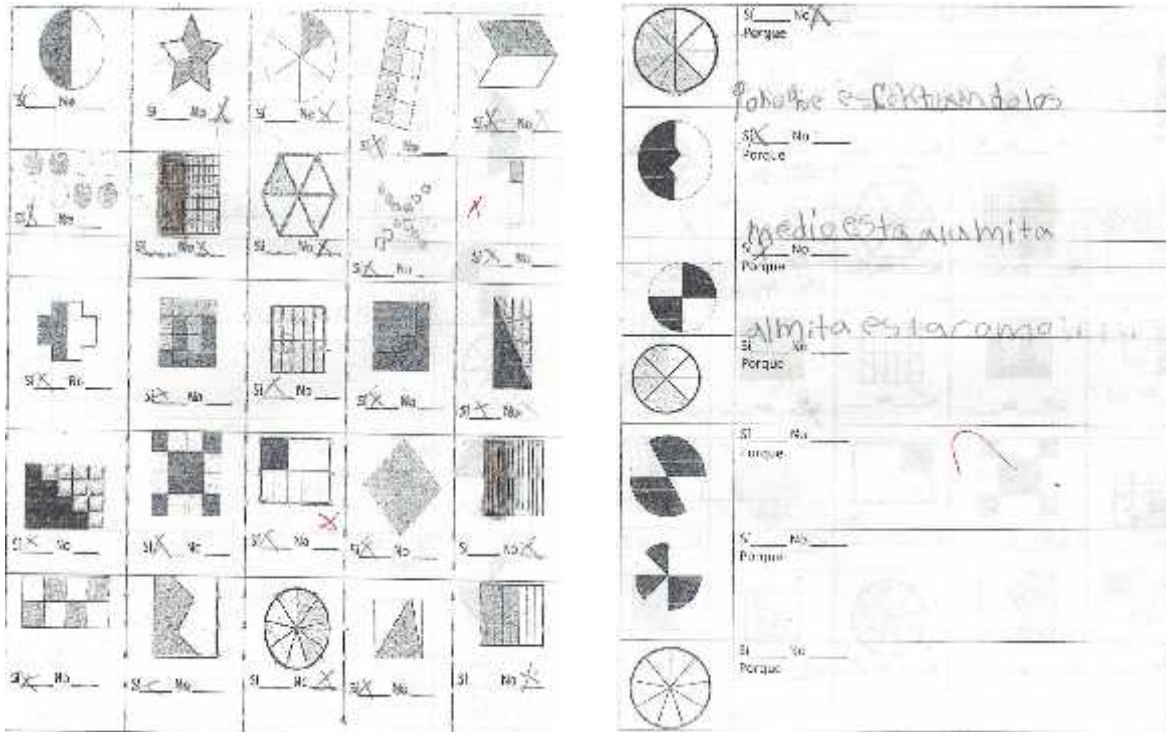
4.2.1. Iniciando el proceso, primeros pasos. Reconocimiento de la fracción $\frac{1}{2}$ en pocas situaciones o tipos de representaciones.

Dificultades para construir unidades simples

El alumno A15 reconoce la fracción $\frac{1}{2}$ en algunos casos sencillos y muy particulares. Él no puede construir unidades diferentes a las dadas en la red rectangular pues utilizó representaciones similares a las dadas. No produce problemas para usarla.

Se puede notar (ilustraciones 4.11 y 4.12) que el alumno, en ambos cuestionarios, presentó dificultades con la interpretación visual, pues no logró hacer “tratamientos” entre registros. Además, que mostró dificultades en las actividades con conversiones entre lo verbal-numérico-gráfico.

Ilustración 4.11 Nivel “iniciando el proceso” en el primer cuestionario alumno A15



Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en febrero, 2019.

Ilustración 4.12. Nivel "iniciando el proceso" del segundo cuestionario alumno A15

1. Lee los siguientes problemas con atención y responde lo que se pide.

a) En la clase de Educación física:

- > Cynthia realizó 4 saltos de 25 centímetros.
- > Luis saltó la mitad de lo de Cynthia.
- > Carolina saltó la mitad de la mitad de Cynthia.

i. Ubica en la recta la distancia de los saltos de Cynthia, Luis y Carolina



ii. ¿Cuántos centímetros saltó Luis? 50 cm

iii. ¿Cuántos centímetros saltó Carolina? 20 cm

iv. Describe cómo lo hiciste.

lo realice por saltos
multiplicacion

b) Blanca te regala 18 galletas de caja y Pedro le regala la mitad que Blanca.

i. ¿Cuántas galletas de caja te ha regalado Pedro? 9 galletas

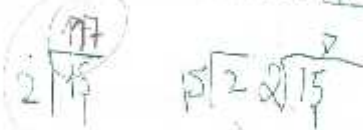
ii. ¿Cuántos dulces te han regalado entre los dos? 27

iii. Describe cómo lo hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.

lo realice por saltos

c) Sara compró las camisetas de diferentes colores para donarlas de manera equitativa a 2 instituciones encargadas de ayudar a niños en situación de calle.

i. ¿Cuántas camisetas le dará a cada institución? 7



ii. Describe cómo lo hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.

50 ÷ 2 = 25

d) Mónica y Pamela compraron $\frac{1}{2}$ litro de helado de chocolate y $\frac{1}{3}$ litro de helado de fresa. Cada una comió $\frac{1}{4}$ total del helado.

i. ¿Qué cantidad de helado comieron en total? 1 envase

ii. ¿Qué fracción de helado se comieron entre los dos? 1 envase

iii. Describe cómo lo hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.

0 $\frac{1}{2}$

e) Escríbele un mensaje a un amigo de segundo de primaria para explicar qué significa la mitad. Puedes agregar un dibujo como apoyo.

que es la mitad de algo

Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en abril, 2019.

4.2.2. En proceso. Reconocimiento de la fracción $\frac{1}{2}$ en varias situaciones, construye unidades dificultades con algunas representaciones

En el caso del alumno A12, logró reconocer, las mitades y las que no son cuando los ítems se presentaban perceptivamente claros en los dos cuestionarios. Utilizó simetría al colorear las figuras dadas, para mostrar la fracción $\frac{1}{2}$. Además, consiguió construir unidades parecidas en forma, pero no en tamaño y vincularlas con las relaciones espaciales entre lo que se mostraba sombreado (véase ilustración 4.13). Por tanto, creemos que utilizó varias habilidades visuales de acuerdo a su perceptiva e idea de mitad, mostrando pocas dificultades con algunas figuras.

En el segundo cuestionario resuelve correctamente los problemas de reparto, aunque muestra algunas dificultades con el registro de lenguaje natural, porque no pudo explicar con claridad y a detalle las justificaciones del cómo soluciona las actividades y lo que significa “la mitad de” (véase ilustración 4.14).

Ilustración 4.13. Nivel "en proceso" primer cuestionario alumno A12

1. Analiza cada dibujo y responde en verdadero o falso (Si o No)

Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>
Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>
Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	

2. Para cada caso, decide si es la mitad del círculo o no. Explica cómo lo sabes.

	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Parque tiene una más en el otro lado
	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Parque no por que tiene más de este lado
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Parque son Partidas ¡ Igual
	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Parque le quitaron una más de este lado
	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Parque es más grande los pedazos negros
	Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Parque son Partidas a la mitad
	Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Parque no son repartidas ¡ Igual

1. Encierra en un círculo los que son iguales a los que están en el ejemplo. Escribe la cantidad de círculos que encierra en el espacio.

2. Dibuja en los espacios formas.

3. Lee el siguiente problema con mucho cuidado y responde a las preguntas. (Los datos de cada problema son los que están en el ejemplo de la parte a). Puedes usar los datos de los problemas anteriores si lo necesitas. Puedes usar los datos de los problemas anteriores si lo necesitas. Puedes usar los datos de los problemas anteriores si lo necesitas.)

4. Como se muestra en el ejemplo de segundo ejemplo para saber que de los amigos de todos se repartió y suma. Apuntamos los datos. Pero también podemos ser más inteligente y muy trabajadora o trabajar más y se fue más a trabajar más veces que te va a salir bien.

¿Cuántos son los que encierra?

¿Cuántos pesos?

¿Cuántos pesos?

¿Cuántos pesos?

Pues sume, reste y repartir

Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en febrero, 2019.

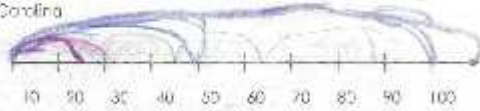
Ilustración 4.14. Nivel "en proceso" segundo cuestionario alumno A12

I. Lee las siguientes problemáticas con atención y responde lo que se pida.

a) En la clase de Educación Física:

- Cynthia realizó 4 saltos de 25 centímetros.
- Luis saltó la mitad de lo que Cynthia.
- Carolina saltó a la mitad de la mitad de Cynthia.

I. Ubica en la recta la distancia de los saltos de Cynthia, Luis y Carolina.



II. ¿Cuántos centímetros saltó Luis? 50 centímetros.

III. ¿Cuántos centímetros saltó Carolina?

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array}$$

a) Sara compró 15 camisetas de diferentes colores para donarlas de manera equitativa a 2 instituciones encargadas de ayudar a niños en situación de calle.

¿Cuántas camisetas le donó a cada institución? 7 camisetas

$$\begin{array}{r} 15 \\ \div 2 \\ \hline 7 \text{ R } 1 \end{array}$$

I. Describe cómo le hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.

I. dividi y les toca de 7 y sobra 1 camiseta

a) María le regaló 18 golletes de chocolate y Paula le regaló la mitad que María.

I. ¿Cuántos golletes de chocolate le regaló Paula? 9 golletes

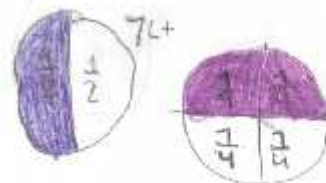
I. ¿Cuántos golletes le regaló en total sus dos? 27 golletes

II. Describe cómo le hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.

Sumo y resto con mis dedos y fue muy fácil sumar y restar y es divertido sumar, restar, multiplicar y dividir son divertidas las matemáticas

e) Doña Flor tiene 10 cajas de jugo y la cuando hay 10 jugos en cada caja los vende a \$50 pesos y todos los miércoles le compran diez cajas y 5 niños le compraron 10 cajas ¿Cuántas cajas sobran?

I. Describe cómo le hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.



Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en abril, 2019.






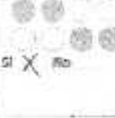
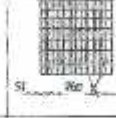



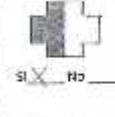
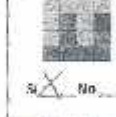
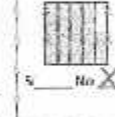



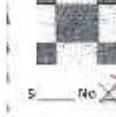
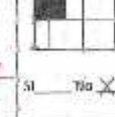


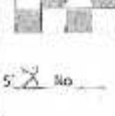

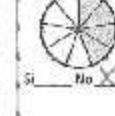
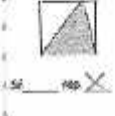
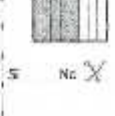
4.2.3. Reconoce la fracción $\frac{1}{2}$ en varias situaciones, construye unidades y articula diferentes representaciones

El alumno A17, mostró comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$, al identificar, crear y usar esta noción. Presentó dificultades en algunas situaciones que requieren de poner en práctica habilidades visuales (véase ilustración 4.15).








Por un lado, en las actividades logró usar la mitad en los diferentes registros de representación (gráfico, numérico y verbal). Por otro lado, las respuestas que requerían de justificación él mostro que considera que la mitad es un reparto en donde se divide y da un parte, es decir, es un todo (entero) dividido en dos partes iguales (véase ilustración 4.16).

Ilustración 4.15. Nivel "consolidado" primer cuestionario alumno A17

1. Analicé un cuadro dibujo si representa o no "la mitad del..." (marcar Si/No)

 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>	 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/>



2. Para cada uno, decí si se ve el dibujo o no. Si es así, ¿cómo lo ves?

 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Porque: Porque en una es 3 y en la otra es 5
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque: Porque está en la mitad
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque: Porque de arriba y de abajo es la mitad
 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Porque: Porque en una es 5 y en la otra es 3
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque: Porque en los lados son iguales
 Si <input checked="" type="checkbox"/> No <input type="checkbox"/> Porque: Porque es la misma mitad
 Si <input type="checkbox"/> No <input checked="" type="checkbox"/> Porque: Porque no hay mitades

3. Dibuja una mitad de cada uno de los dibujos que ves en el cuadro. (Dibujar la otra mitad en el mismo cuadro)

4. Dibuja otros ejemplos

5. Lee el siguiente problema, su solución y responde lo que se pide.
 Los papas de trabajo le dieron \$20000 pesos de un cheque en una día de trabajo de su casa. Al llegar a la casa, compró tres cajas de chocolates que costó la mitad de lo que levo. De regreso a casa sus papas le piden que le de la mitad de lo que se le dio para dárselo a su hermano.
 • ¿cuánto chocó compró la caja de chocolates? 50
 • ¿cuánto chocó le dio los papas para dárselo a su hermano? 50
 • ¿cuánto chocó le sobró? 0
 ¿Cómo le sobró? leyendo

6. Escribe un mensaje a un compañero de segundo de primaria para explicar qué significa a mitad de. Puedes poner ejemplos.
 Por ejemplo la mitad de un círculo ejemplo:  a la mitad de un rectángulo 

Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en febrero, 2019.

Ilustración 4.16. Nivel "consolidado" segundo cuestionario alumno A17

Lee los siguientes problemas con atención y responde lo que se pide.

a) En la clase de Educación física:

- > Cynthia realizó 4 saltos de 25 centímetros.
- > Luis saltó la mitad de lo de Cynthia.
- > Carolina saltó la mitad de la mitad de Cynthia.

i. Ubica en la recta la distancia de los saltos de Cynthia, Luis y Carolina.



ii. ¿Cuántos centímetros saltó Luis? 12.5 cm

iii. ¿Cuántos centímetros saltó Carolina? 6 cm

iv. Describe cómo lo hiciste. multiplicamos 25 x 4 nos dio 100 entre 2 y 50 entre 2

b) Blanca le regaló 18 golosinas de chocolate y Feero le regaló a mitad que Blanca.

i. ¿Cuántas golosinas de chocolate le ha regalado Pedro? 9

ii. ¿Cuántos dulces le han regalado entre los dos? 27

iii. Describe cómo lo hiciste. Puedes hacer un dibujo para apoyarte.

Sumando 9 mas 9 y 18 mas 9 que me da 27

c) Sara compró 15 camisetas de diferentes colores para donarlas de manera equitativa a 2 instituciones encargadas de ayudar a niños en situación de calle.

i. ¿Cuántas camisetas le donó a cada institución? 7 y sobra 1

ii. Describe cómo lo hiciste. Puedes hacer un dibujo para apoyarte.

Repartimos las camisetas

d) Mónica y Pamela compraron $\frac{1}{2}$ litro de helado de chocolate y $\frac{1}{2}$ litro de helado de fresa. Cada una comió $\frac{1}{4}$ del helado.

i. ¿Qué cantidad de helado comieron en total? 1

ii. ¿Qué fracción de helado se comieron entre los dos? $\frac{1}{2}$

iii. Describe cómo lo hiciste. Puedes hacer un dibujo para apoyarte. Yo fraccione y me salió 1 litro y $\frac{1}{2}$

e) Escribe un mensaje o un dibujo de segundo de primaria para explicar qué significa la mitad. Puedes agregar un dibujo como apoyo.

La mitad se significa que debes dividir algo y dar una mitad a la otra persona

Fuente: Resultado de un cuestionario aplicado en abril, 2019.

Las actividades de los dos cuestionarios aplicados a los niños de tercero de primaria, tuvieron el propósito de relacionar diferentes situaciones que mostraron su comprensión respecto a la fracción $\frac{1}{2}$ en tres registros de representación (gráfico, numérico, lenguaje natural).

Situaciones donde sus conocimientos matemáticos previos se relacionen con su perspectiva visual, pues las actividades no requerían de conocimientos que exigieran memorización, fórmulas matemáticas o definiciones exactas. Por tanto, cada cuestionario, nos permitió analizar varias posibilidades de los posibles tratamientos y conversiones realizados por los niños, relacionándolos con los tres registros de representación de cada situación.

Finalmente, los tres casos detallados, muestran diferentes niveles de logro (consolidado, en proceso e iniciando el proceso) respecto a la comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$. En el nivel “*consolidado*”, seleccionamos al primer alumno que logró reconocer la mitad en un registro gráfico, construir “la mitad de” desde un entero dado y producir un texto acerca de la mitad con el uso del registro numérico y registro de lenguaje natural. Es decir, identificó y creó la “mitad de” en sus tres representaciones.

El nivel “*en proceso*”, elegimos al segundo alumno, que usó y reconoció “la mitad de” en un entero dado, pero no logró explicar con sus propias palabras qué es una mitad, a través del registro de lenguaje natural. Por último, el nivel “*iniciando el proceso*”, escogimos al tercer alumno que reconoció la fracción $\frac{1}{2}$ en pocas situaciones, se le dificultaron ambos cuestionarios, pues no resolvió los ejercicios adecuadamente.

Conclusiones y reflexiones finales

La realización del presente estudio tuvo como punto de partida la búsqueda de resultados de investigaciones y sus principales aportaciones respecto al aprendizaje de fracciones. En particular, se revisaron tesis de licenciatura y maestría, artículos de revistas y libros.

Si bien la “mitad de” parece un concepto sencillo para cualquier estudiante dado que está presente en diferentes situaciones del contexto cotidiano, su complejidad radica en otros aspectos relacionados con las posibles interpretaciones de la fracción y el uso de diversas representaciones. En esta investigación el **objetivo principal** fue *documentar el nivel de comprensión que tienen alumnos de tercer grado de primaria en el proceso de identificación del concepto fracción $\frac{1}{2}$ en sus tres registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural)*. Para ello, participó un grupo de 26 alumnos de una escuela pública de la Ciudad de México.

De acuerdo con nuestros resultados, los participantes, mostraron diferencias respecto a su comprensión del concepto de fracción $\frac{1}{2}$. Consideramos que comprender este concepto conlleva poder resolver problemas que impliquen algunas de sus interpretaciones, identificarlo y representarlo, en los distintos registros de representación –de manera coherente-. A continuación, se describen nuestras conclusiones por objetivo en relación con cada capítulo desarrollado.

Respecto al primer objetivo específico, los resultados mostrados en el capítulo cuatro, permiten identificar algunas dificultades que aún tienen los niños al resolver actividades relacionadas con diferentes registros de representación (gráfico, numérico y lenguaje natural) donde debían identificar, crear y definir la noción de mitad. Las principales dificultades se relacionan con el uso de los registros gráficos y del lenguaje natural.

Los alumnos mostraron que podían resolver actividades en las que gráficamente con formas como el círculo -algunos divididos por la mitad y otros no-, decidían si era la mitad o no. En sus justificaciones de cómo ellos lo sabían, predominaron expresiones

como: “sí porque la línea tiene que pasar por en medio para que sean iguales”, “sí porque cada parte debe tener lo mismo”, “sí, es la mitad porque solo se sombrea una parte” [sic], “no, porque no tienes lo mismo”. Sin embargo, en otras representaciones como, por ejemplo, triángulos, polígonos estrellados, pentágonos e incluso en algunos rectángulos, no lograron identificar o trazar la mitad. Esta dificultad muestra carencias de conocimiento geométrico vinculado con descomposición de una forma en otras, o de habilidades visuales como se mostró en el capítulo anterior. Finalmente, con un nivel bajo de comprensión fue donde les solicitábamos que explicaran la noción de “la mitad de” (registro en lenguaje natural).

Algunos tuvieron dificultades al crear un problema que involucrara la fracción $\frac{1}{2}$ y la explicación de qué es “la mitad de”. En la producción de un problema matemático, en sus respuestas identificamos que los enunciados eran similares a las actividades del segundo cuestionario, es decir, escribieron problemas con cantidades exactas (números pares) vinculadas con un reparto entre dos sujetos o una partición de algún objeto en dos partes.

En sus explicaciones acerca de lo que para ellos significa “la mitad de”, resaltó el término de reparto; pues en ellas la mayoría de sus expresiones reconocen el concepto mitad en relación con una división donde el divisor debe ser el número dos, mientras que el dividendo (un número par) será la cantidad de partes que se van a repartir.

Otra de las dificultades identificadas en este grupo de 26 estudiantes de tercer grado de primaria se relaciona con la falta de comprensión de la equivalencia de fracciones, porque para ellos no fue evidente que “la mitad de” es igual a dos veces la fracción $\frac{1}{4}$. Por tanto, las respuestas de los alumnos en los cuestionarios dan evidencia que tienen nociones de “mitad” como cualquier unidad que debe ser fraccionada en dos partes iguales. Ante esta afirmación, sería conveniente plantearle al alumno otras situaciones similares para que tengan la posibilidad de confrontar sus ideas con otros compañeros con el mismo conflicto en la resolución.

Las situaciones donde los alumnos mostraron mayor comprensión respecto a “la mitad de”, fue con el uso de los registros numéricos, cuando realizaron las actividades del segundo cuestionario relacionadas con diferentes repartos. Consideramos que ellos asociaron las unidades dadas como un todo, y decidieron la forma más adecuada para partir la unidad, respecto a la actividad o problema a resolver.

Mediante el reparto, los alumnos lograron hacer las particiones por mitad porque lo asociaban con un reparto equitativo y exhaustivo, involucrando y dando sentido al concepto de fracción. Ellos se enfrentaron a la necesidad de repartir la unidad en dos partes formando pares de determinados objetos como, camisetas, chocolates, galletas, helado, canicas, entre otros. También pusieron en práctica el uso de medidas convencionales (de capacidad, longitud y monetario).

Respecto al segundo objetivo específico, el concepto de fracción se introduce en tercero de primaria a través de tres registros (numérico, lenguaje natural y gráfico) en los casos de medios, cuartos y octavos, a fin de que los alumnos identifiquen, representen y diferencien sus partes. Específicamente en estos documentos oficiales se afirma que el alumno:

-) “Usa fracciones del tipo $m/2n$ medios, cuartos y octavos para expresar oralmente y por escrito medidas diversas y el resultado de repartos” (SEP, 2011, p. 75).
-) “Usa fracciones con denominador dos, cuatro y ocho para expresar relaciones parte-todo, medidas y resultado de repartos” (SEP, 2017, p. 318).

Estudios realizados previamente por investigadores en Educación Matemática (Llinares y Sánchez, 1988; Fazio y Siegler, 2011 y Cortina y Zúñiga, 2008) afirman que las fracciones toman cierta complejidad mientras se va avanzando de nivel académico (véase capítulo 1). Los resultados de esta tesis muestran que este grupo de estudiantes aún no han consolidado el aprendizaje esperado del programa de matemáticas de tercer grado, por lo cual es necesario diversificar actividades para robustecer y ampliar su comprensión.

Creemos que dentro de un aula escolar es necesario promover procesos de enseñanza que potencien las habilidades, capacidades y competencias de los alumnos, a fin de que logren comprender nuevos conceptos matemáticos relacionándolos con lo que ya conocen junto con lo que están aprendiendo. Por ejemplo, la noción de fracción permite resolver diversas situaciones de la vida cotidiana, ya que, se expresan con frecuencia y se experimentan en medios, cuartos, tres cuartos.

Las actividades que les propusimos a los alumnos para que reconocieran, crearan y usaran la fracción $\frac{1}{2}$ en diferentes registros de representación, nos permitió comparar los resultados con lo propuesto por SEP (2011, 2013, 2017) para el ciclo escolar 2018-2019. Con el libro de texto gratuito se pretende, según la SEP, acercar propuestas didácticas que, adaptadas y contextualizadas por los profesores, les posibiliten a los alumnos desarrollar habilidades para plantear y resolver problemas respecto al tema de fracciones presentadas en un contexto académico como fuera de él. Específicamente en el capítulo dos notamos que el libro “Desafíos matemáticos” de tercer grado de primaria (2013), el registro más utilizado es el lenguaje natural con dos usos principales. Primero, para comunicar las actividades e instrucciones y, segundo, para responder y justificar a las preguntas de dichas actividades. Otro registro recurrente es el numérico para representar cantidades con cifras naturales y racionales, para operar con fracciones (multiplicar, dividir, sumar, restar) e indicar la fracción sombreada de gráficos.

El registro gráfico generalmente se incorpora por medio de figuras geométricas (comunes y en posiciones prototípicas) como círculos, cuadrados, triángulos, hexágonos e inclusive con dibujos, tablas y rectas numéricas que involucran el referido concepto de fracción como una división de un todo en partes iguales.

Por tanto, en el libro de texto (SEP, 2013), plantean actividades introductorias al tema de fracciones involucrando registros de representación en situaciones de reparto de un entero o unidades simples (pizzas, pasteles o diferentes figuras geométricas) entre cierto número de niños. Por ejemplo, dividir un listón para dos

trenzas, este tipo de actividades propician el uso de fracción unitaria, como un medio, un cuarto, entre otros. Ante esta situación, consideramos que es necesario crear situaciones más complejas en las que se involucre “la mitad de” (por ejemplo, como las del cuestionario) que les permitan a los alumnos robustecer su comprensión de esta fracción; asociarla con sus diferentes interpretaciones y articulen –de manera coherente- los registros de representación que les sean útiles para resolver una tarea.

Por tanto, para profundizar en la comprensión de las fracciones se requieren materiales educativos (libros de texto, por ejemplo) y material concreto (manipulable) a fin de que los alumnos logren identificar y experimentar con las fracciones, para que de esta forma lleguen a comprender su uso en distintas representaciones y en diferentes contextos. Además, es necesario generar espacios de formación docente al interior de las propias escuelas –Consejos técnicos en el que se compartan resultados de estudios (dificultades y propuestas de enseñanza) y construyan actividades de aprendizaje que enriquezcan las experiencias de los niños. Este tipo de estrategias permitirían el establecimiento de puentes entre las instituciones como la UPN (encargada de la formación de profesionales de la educación), los resultados de investigación y prácticas en salones de clase.

Con base al tercer objetivo específico, los tres registros de representación estuvieron presentes en las actividades de ambos cuestionarios con el propósito de relacionar diferentes situaciones que se pudieran conceptualizar, identificar, crear y hacer uso de la fracción $\frac{1}{2}$.

Los alumnos lograron reconocer en los registros gráficos aquellos que, desde un nivel perspectivo inmediato, presentaban una división de la unidad en dos partes que claramente simbolizaba la mitad. Por lo cual, podemos interpretar que los alumnos tenían la habilidad para identificar, en estos casos, visualmente “la mitad de” pues la reconocieron independiente de la forma. Posiblemente sus respuestas se dieron con éxito porque para algunos obtener la fracción $\frac{1}{2}$, “es repartir, dividir, partir algo por

igual para que la figura u objeto tengan lo mismo”⁵, de esta manera vincularon el gráfico con actividades de doblar por la mitad o con una idea de simetría (eje de simetría). Esta afirmación se confirma con lo declarado por algunos alumnos entrevistados; pues según ellos, se les facilitó identificar y crear la mitad con un entero dado, porque se trataba de “observar con atención si las figuras tenían lo mismo de un lado que del otro y así poder tachar si era o no una mitad”.

Cabe señalar que la gran mayoría de los alumnos lograron responder exitosamente aquellas situaciones relacionadas con el uso de representaciones numéricas, pues su resolución y sus respuestas consistían en realizar operaciones básicas como multiplicaciones y divisiones para que las cantidades resultaran iguales para cada situación.

Algunas reflexiones finales y limitaciones de este estudio

Los resultados de este estudio muestran que la comprensión de la fracción $\frac{1}{2}$ requiere de diversas actividades para lograr que los alumnos entiendan cómo se vincula con diferentes registros de representación. Consideramos que los resultados pueden ayudar a profesores de nivel primaria, específicamente en tercer grado, a integrar y mejorar su práctica. Por ejemplo, que se reflexione acerca de la necesidad de enseñar y aprender un concepto con distintas representaciones con el objetivo de que los alumnos puedan situarlos en diversos contextos.

En el transcurso del estudio tuvimos algunas restricciones que nos desviaron del análisis planeado inicialmente, pero a su vez enriquecieron a la investigación. Dichas limitaciones fueron la calidad de la fotocopia otorgada por la escuela primaria y el tiempo que nos otorgaron para realizar las entrevistas, como lo mencionamos en el capítulo 3.

A pesar de ello, concluimos que para que los alumnos de tercero de primaria comprendan el concepto de fracción es importante favorecer transformaciones entre lo verbal y lo gráfico. Una fracción se compone de un numerador (representa las

⁵ Expresado por diferentes alumnos en las entrevistas.

partes tomadas de la unidad) y de un denominador (expresa la cantidad de partes de la unidad), y puede expresarse en diferentes registros de representación, sea gráfico, numérico o verbal. Todos ellos muestran diferentes facetas del mismo concepto y son útiles, según el propio contexto o situación a resolver.

Inquietudes para futuros estudios

Los resultados de este estudio invitan a continuar indagando respecto a la comprensión de las fracciones vinculado con el diseño/validación de intervenciones en las aulas de tercero de primaria para indagar cómo impacta el uso de material concreto y del trabajo geométrico en la profundización conceptual. Por ejemplo, experimentar particiones con diferentes registros gráficos y numéricos en contextos de medición, partiendo hojas o tiras de papel para verificar la igualdad de las partes, es decir, en dos partes iguales para que los alumnos determinen cuáles se tratan de la mitad y cuáles no. De esta manera, ampliar en conocimiento de la mitad con la des-composición de figuras fraccionadas, con el uso de diferentes cantidades (discretas o continuas) y con el uso de unidades (simples o compuestas).

Referencias Bibliográficas

- Acosta, A. (2000). *Introducción para la enseñanza de las fracciones en el 2o. ciclo escolar de la escuela primaria* (tesis de licenciatura), Universidad Pedagógica Nacional, México. Consultado: 25/09/18. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/16995.pdf>.
- Amador, Y. (2018). *El modelo pedagógico tradicional. ¿Arquetipo de la educación en el siglo XXI? Su influencia en la enseñanza del derecho. Algunas reflexiones sobre el tema*. En III Congreso Internacional Virtual sobre la Educación en el Siglo XXI. Artemisa, Cuba.
- Arreaza, T. (2009). *Un recurso para el aprendizaje de fracciones y expresiones decimales dirigido a los estudiantes de educación integral*. Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas, Caracas.
- Avila, A. (2019). *Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria*. Educación Matemática, (31)2, pp. 22 - 60.
- Avila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México. Paidós.
- Barragán, L. (2014). *Las fracciones y su enseñanza*. México: Escuela Normal Superior del Sur de Tamaulipas. Consultado: 28/11/18. Recuperado de <https://es.slideshare.net/xavierbarragan50/problemticas-en-la-enseanza-y-aprendizaje-de-fracciones>.
- Block, D., Moscos, A., Ramírez, M. y Solares, D. (2007). *La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria*, 12(33), pp. 731 - 762. Consultado: 11/09/18. Recuperado de <https://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php?idm=es&sec=SC03&sub=SBB&criterio=ART33013>.

- Boaler, J., Munson, J. y Williams, C. (2018). *Mindest mathematics: visualizing and investigating big ideas, grade 3*. Nueva York, Estados Unidos. John Wiley & Sons Inc.
- Bufo, Á., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) *Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción*, 23(76), pp. 229-251. Consultado: 11/09/18. Recuperado de <https://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php?idm=es&sec=SC03&sub=SBB&criterio=ART76009>.
- Butto, C. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. México. Consultado 28/11/18 Recuperado de <http://www.ElAprendizajeDeFraccionesEnEducacionPrimaria-4892957.pdf>.
- Caballero, E. y Juárez, A. (2016). *Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad*. Revista didáctica de las matemáticas, (91), pp. 33-56. Consultado: 10/12/19. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/91/Articulos_03.pdf.
- Cortina, J. y Zúñiga, C. (2008). *La comparación relativa de tamaños: un punto de partida alternativo y viable para la enseñanza de las fracciones*. Educación Matemática, 20(2), pp. 35 - 63.
- D'Amore, B., Fandiño, M., Iori, M. y Matteuzzi, M. (2015). *Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval"*. Relime, 18(2), pp. 178 - 211.
- Fandiño, M. (2009). *Las Fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá. Magisterio.
- Fazio, L. y Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. En Series Prácticas educativas (22), pp. 1-28. Consultado: 26/10/18 Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212781S.pdf>.

- Fernández, Y., Riffo, J. y Sandoval, L. (2013). *Errores más frecuentes de los estudiantes en el desarrollo de unidad de Fracciones en un 5° año básico*, (tesis de licenciatura), Universidad del Bío-Bío, Chillán. Consultado: 10/12/19. Obtenida de http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1845/1/Fernandez_Jara_Yimmy.pdf.
- González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. Facultad de Educación, España.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En *3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Valencia (España), pp. 44 - 59.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México. McGraw-Hill Education.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México. McGraw-Hill Education.
- INEE. (s.f). *Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos. Tercer grado de Primaria, ciclo escolar 2013-2014*. Base de datos. Consultado: 10/12/2018. Recuperado de <https://www.inee.edu.mx/index.php/bases-de-datos/bases-de-datos-excale/excale-03-ciclo-2013-2014>
- Ley General del Derecho del Autor, (2018). Diario Oficial de la Federación, CDMX, México, 15 de junio de 2018. Consultado 27/09/19. Recuperado de http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/122_150618.pdf.
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones la relación parte-todo*. Madrid. Síntesis.
- López, J. y Sosa, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21. México, pp. 308 - 318.

- López, W. y del Valle, W. (2017). *Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la Matemática en el segundo año de Educación Media*. Educere, 21(70), pp. 653 - 667. Consultado: 10/12/19. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=356/35656000013>.
- Luz, M. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME, 9(1), pp.143-168.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), pp. 7- 32.
- Mora, D. (2005). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática: perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. La Paz, Bolivia: Campo Iris.
- Pérez, S, y Reyes, E. (2018). *La actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas en la resolución auténticos relacionados con el concepto de fracción desde la relación parte-todo*, (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. Consultado: 20/03/2019. Obtenida de <http://hdl.handle.net/11182/426>.
- Prieto, F. y Vicente, S. (2006). *Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería*. Argentina. REPEM, pp. 203 - 212.
- Pruzzo, V. (2012). *Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?* Pilquen, (8), pp.1-14.
- Ramírez, M. y Block, D. (2009). *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares*. Educación Matemática, 21(1), pp. 63 - 90.
- Rojas, E. (1995). *Alternativa didáctica para la enseñanza de las fracciones en situaciones de reparto y medición en tercer grado* (tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México. Consultado: 18/09/18. Obtenida de <http://200.23.113.51/pdf/13212.pdf>.

- Rojas, V. (2017) Saberes docentes que subyacen en las prácticas profesionales de los estudiantes normalistas en el campo de la didáctica de las matemáticas. Congreso Nacional de Investigación Educativa, San Luis Potosí. Consultado: 18/09/18. Recuperado de <http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/1541.pdf>.
- SEP. (2011). "Matemáticas" En: *Programa de estudios 2011, Guía para el maestro, educación básica primaria tercer grado*. México, pp. 57-76. Consultado 19/10/18. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/15547/Programa_de_Estudio_2011_Educacion_Basica Primaria.pdf.
- SEP. (2013a). *Desafíos Matemáticos. Tercer grado. Libro para el maestro*. México. Conaliteg. Consultado 20/03/19. Recuperado de <https://libros.conaliteg.gob.mx/content/common/consulta-libros>.
- SEP. (2013b). *Desafíos Matemáticos. Tercer grado*. México. Conaliteg. Consultado 05/02/20. Recuperado de <https://libros.conaliteg.gob.mx/content/common/consulta-libros>.
- SEP. (2017a). *Nuevo modelo educativo para la educación obligatoria*. México. Conaliteg.
- SEP. (2017b). *Aprendizajes clave para la educación integral*. México. Conaliteg.
- SEP. (2018). *Planeación en Educación Básica, Qué es la prueba Planea y sus resultados a nivel nacional y federativa*. Consultado: 06/11/19. Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/ba/>
- Valdemoros, M. (2010). *Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 13(4), pp. 423 - 440.
- Valencia, I. (2013). *Enseñanza y Aprendizaje de las fracciones en un contexto real basado en la resolución de problemas*. Uruguay, VII CIBEM, pp. 3136 - 3147.

Valencia, A. y Salazar, J. (2010). *La conversión de registros de representación semiótica en el trabajo con fracciones mayores que la unidad*. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Valenzuela, C. (2018). *Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: estudio en comunidades marginadas* (tesis de doctorado), Centro de Investigación y de estudios avanzados del IPN Unidad Zacatenco, México.

Anexos




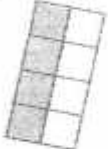


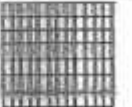




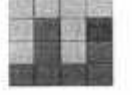




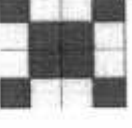
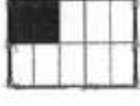


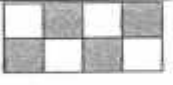
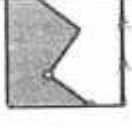



Anexo 1










Ilustrame lo que sabes de "la mitad de"

Nombre: _____ Edad _____

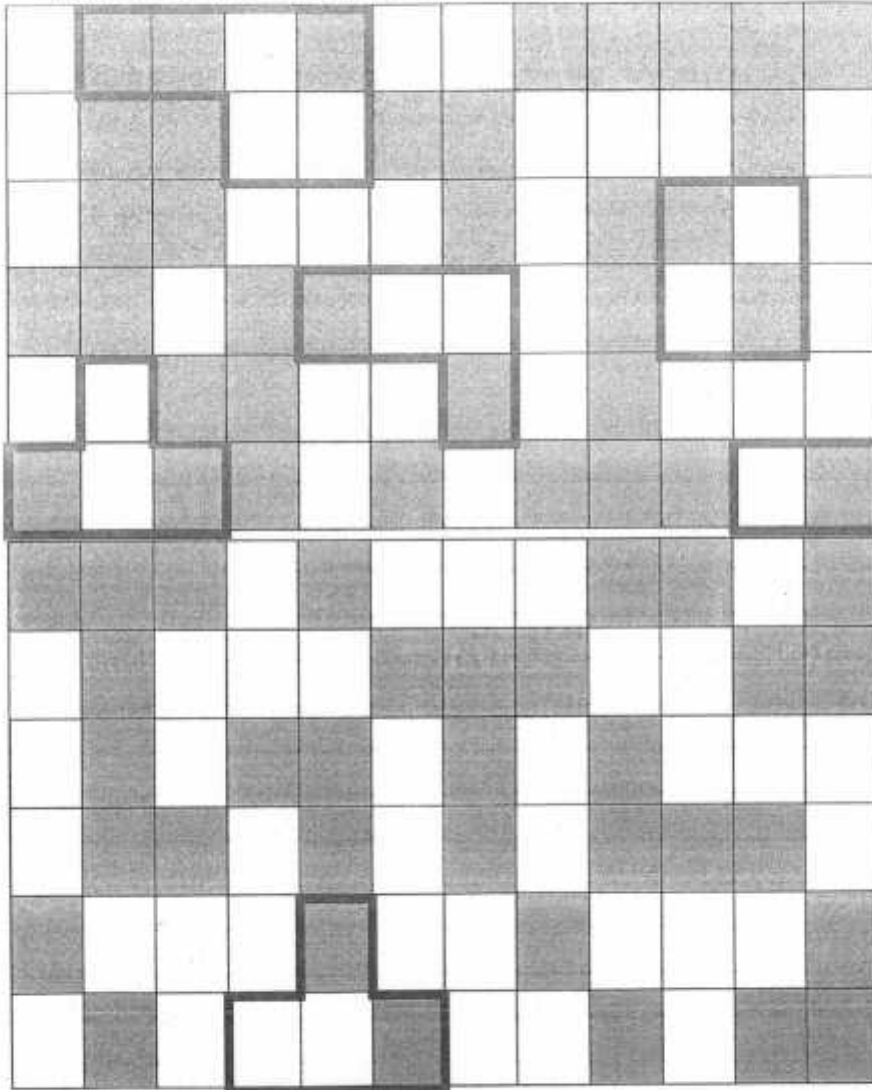
1. Analiza en cada dibujo si representa o no "la mitad de..." Tacha Sí o No.

 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____
 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____
 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____
 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____
 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____	 Sí _____ No _____

2. Para cada caso, decida si es la mitad del círculo o no. Explica cómo lo sabes.

	Sí _____ No _____ Porque _____
	Sí _____ No _____ Porque _____
	Sí _____ No _____ Porque _____
	Sí _____ No _____ Porque _____
	Sí _____ No _____ Porque _____
	Sí _____ No _____ Porque _____
	Sí _____ No _____ Porque _____

3. En el siguiente recuadro está señalada una unidad en la que se forma $\frac{1}{4}$. Hay cinco ejemplos. Busca otros **diez** ejemplos donde esté sombreado $\frac{1}{4}$.

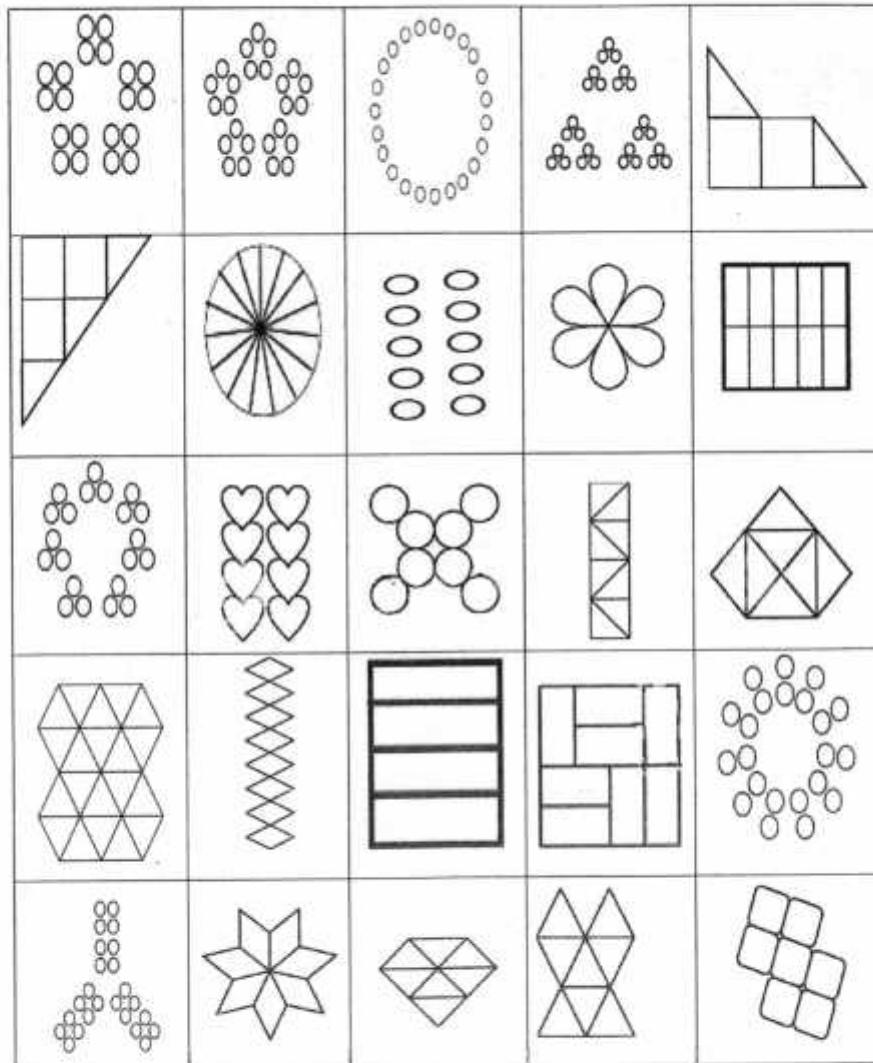




SEP



4. Colorea $\frac{1}{4}$ en las siguientes formas



5. Lee el siguiente problema con atención y responde lo que se pide.

Los papás de Isabel le dieron \$150.00 para comprar chocolates en una dulcería a dos calles de su casa. Al llegar a la dulcería, compra una caja de chocolates que cuesta la mitad de lo que lleva. De regresó a casa sus papás le piden que le de la mitad de lo que sobro para dárselo a su hermana.

- ¿cuánto dinero costó la caja de chocolates? _____
- ¿cuánto dinero les regreso a sus papás para dárselo a su hermana?

- ¿cuánto dinero le sobró? _____

¿Cómo le hiciste?

6. Escríbele un mensaje a un compañero de segundo de primaria para explicar qué significa la mitad de. Puedes ponerle ejemplos.

Anexo 2



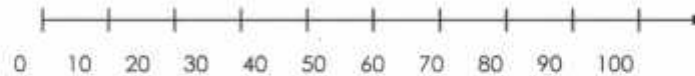
Muéstrame lo que sabes respecto a "la mitad de"

Nombre: _____ Edad: _____

Lee los siguientes problemas y responde lo que se pide.

1. En la clase de Educación física Cynthia realizó 4 saltos de 25 centímetros. Luis saltó la mitad de lo de Cynthia. Finalmente, Carolina saltó la mitad de la mitad de Cynthia.

a. Coloca en la línea de salto una marca hasta dónde llegó Cynthia, otra para Luis y otra marca para el salto de Carolina. Usa colores diferentes.



b. ¿Cuántos centímetros saltó Luis?

c. ¿Cuántos centímetros saltó Carolina?

d. Describe cómo lo hiciste.



2. Blanca te regala 18 galletas de cajeta y Pedro te regala la mitad de las que te regaló Blanca.

a. ¿Cuántas galletas de cajeta te regaló Pedro?

b. ¿Cuántas galletas recibiste en total?

c. Describe cómo le hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.



SEP



3. Sara compró 15 camisetas de diferentes colores. Hay dos instituciones que ayudan a niños en situación de calle. Ella donó la misma cantidad de camisetas a cada institución.

a. ¿Cuántas camisetas le donó a cada institución?

b. Describe como le hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.

4. **Mónica y Pamela compraron $\frac{1}{2}$ litro de helado de chocolate y $\frac{1}{2}$ litro de helado de fresa. Cada una comió $\frac{1}{4}$ total del helado.**

a. ¿Qué cantidad de helado compraron en total?

b. ¿Qué fracción de helado se comieron entre las dos?

c. Describe cómo le hiciste, puedes hacer un dibujo para apoyarte.



5. **Escríbele un mensaje a un amigo de segundo de primaria para explicar qué significa la mitad.**

Puedes agregar un dibujo que le ayude a tu amigo entender lo que es la "mitad de".

6. **Inventá tu propio problema donde uses LA MITAD DE....**

Anexo 3



Entrevista acerca de "la mitad de"

Nombre: _____ Edad _____

Buenos días, seleccionamos tus cuestionarios por el desempeño que obtuviste. Te realizaré unas pequeñas preguntas, no te preocupes si no sabes que responder. Por favor trata de ser lo más específico y sincero.

1. ¿Qué conocimientos pusiste en práctica para resolver ambos cuestionarios?
2. En la actividad 4, (caso de los gráficos formados con triángulos) ¿Por qué dividiste los triángulos de esta manera? ¿Fue para qué se simbolizará una mitad?
3. ¿Se te facilitó más identificar la mitad en unidades simples o en unidades compuestas?, ¿Por qué?
4. ¿Qué actividad de ambos cuestionarios se te hizo más fácil de resolver?
5. ¿Dónde identificaste más rápido la mitad en representaciones gráficas, numéricas o verbales?
6. ¿Qué actividad de ambos cuestionarios se te hizo difícil de resolver?
7. Explicame, ¿cómo obtienes la mitad de un producto?

Anexo 4

SEP

Medicamento la que contiene de "la calidad del"

Nombre: [Redacted]

1. Analice en cada dibujo el represento a ser "la calidad del." Tache (X) a la

<input type="checkbox"/> Si	<input type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No

SEP

Medicamento la que contiene de "la calidad del"

Nombre: [Redacted]

1. Analice en cada dibujo el represento a ser "la calidad del." Tache (X) a la

<input type="checkbox"/> Si	<input type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No

SEP

Medicamento la que contiene de "la calidad del"

Nombre: [Redacted]

1. Analice en cada dibujo el represento a ser "la calidad del." Tache (X) a la

<input type="checkbox"/> Si	<input type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No

SEP

Medicamento la que contiene de "la calidad del"

Nombre: [Redacted]

1. Analice en cada dibujo el represento a ser "la calidad del." Tache (X) a la

<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> No