SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD AJUSCO
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ALUMNOS AL DESPEJAR LA INCÓGNITA EN LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN PEDAGOGÍA

PRESENTA:
VICTOR MANUEL MIRAFUENTES SAAVEDRA

ASESOR:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS ENRIQUE VEGA RAMÍREZ

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2020

Índice

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN 3

Resultado prueba PISA 2012 3

Resultados Prueba PISA 2015 8

Prueba PLANEA 12

Objetivo general 21

Objetivos particulares 21

Preguntas tópicas 22

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y MARCO REFERENCIAL 23

Con respecto al álgebra 23

Lenguaje algebraico: 23

Origen del error en álgebra 25

Dificultades provenientes de la aritmética 29

Dificultades con el uso de las letras 38

Dificultades con el signo (=) 42

Dificultades en la resolución de ecuaciones 44

Plan y Programas de Estudio 2011 de Educación Secundaria. 46

Poner énfasis en el desarrollo de competencias 46

Evaluar para aprender 48

Estándares curriculares 48

La función de los aprendizajes esperados para la consecución de los e estándares curriculares 49

Campos de formación para la educación básica 49

Campo de formación: pensamiento matemático 50

Matemáticas en primaria y secundaria 50

Estándares curriculares y aprendizajes esperados. PISA. Un referente internacional 51

Estándares curriculares 52

Cuarto periodo escolar de matemáticas 53

Libros sugeridos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito (CONALITEG) 57

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA 64

Características de la prueba final. 71

Características por reactivo 72

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS 75

Apartado 1.- “Pasar sumando” y “Pasar restando” análisis procedimental del inverso aditivo. 77

“Pasar sumando” 77

“Pasar restando” 82

Apartado 2.- “Pasar dividiendo” y “pasar multiplicando” análisis procedimental del inverso multiplicativo. 87

“Pasar dividiendo” 87

“Pasar multiplicando” 93

Apartado 3.- Análisis procedimental con las expresiones equivalentes. 96

Apartado 4.- Análisis procedimental al trabajar con letras diferentes a "$\boldsymbol{x}$". 104

Apartado 5.- Análisis procedimental al trabajar con operaciones aritméticas cuando estas involucran números con punto decimal, con fracciones y con signo. 109

Operaciones aritméticas con punto decimal. 109

Operaciones aritméticas con fracciones. 113

Operaciones aritméticas que involucran números con signo. 117

CONCLUSIONES 123

CONSIDERACIONES FINALES 150

BIBLIOGRAFÍA 154

ANEXOS 158

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo surge debido a que en múltiples ocasiones he escuchado a jóvenes que cursan el nivel secundaria que le temen y evitan resolver o despejar ecuaciones de primer grado, es decir, se ven obligados a trabajar con este tipo de expresiones matemáticas sin entender el sentido y significado de dichas expresiones y con grandes dificultades para operarlas y/o despejar la incógnita, desconociendo que estas son operaciones básicas para adentrarse al conocimiento del algebra y por lo tanto pueden influir en la decisión de elección de carrera profesional, motivo por el cual decidí adentrarme a esta investigación, y más aún, se acrecentó mi intención al consultar los resultados de la prueba PISA (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes), así como la prueba PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes), donde muestran el bajo rendimiento que tenemos los mexicanos en matemáticas, datos que a continuación se presentan.

Resultado prueba PISA 2012

¿Qué es PISA?

El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) es una encuesta trienal internacional que tiene como objetivo evaluar los sistemas educativos en todo el mundo mediante la evaluación de las habilidades y el conocimiento de los estudiantes de 15 años. OECD (2018)

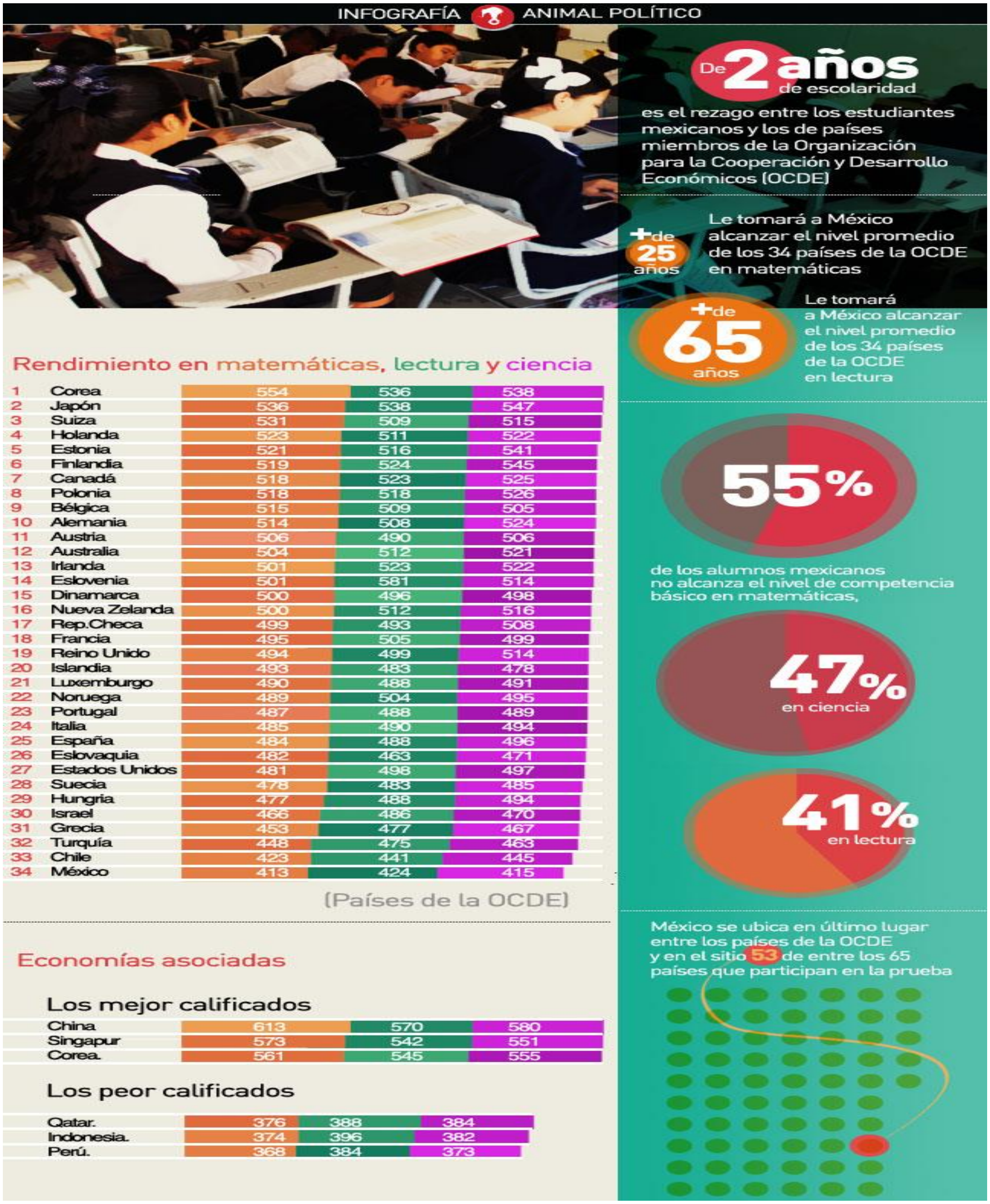
Según los datos de CNN. México. (2013). “El 55% de estudiantes mexicanos, sin habilidad suficiente en matemáticas”.

México está en el lugar 52 de 65 países según la prueba PISA y tiene dos años de retraso en la escolaridad entre los integrantes de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

(CNN México) — Las matemáticas siguen siendo un problema para los estudiantes mexicanos de 15 años. El 55% de ellos no alcanza el nivel de competencias básicas según la prueba PISA 2012, esto es 4% más que en 2003.

Gabriela Ramos, directora del Gabinete de la OCDE, detalló que solo 5% de los estudiantes mexicanos de más alto rendimiento obtienen el mismo puntaje que un alumno promedio en Japón, país que ocupa el séptimo lugar en el ranking de PISA.

Tabla 1



Rendimiento en matemáticas, lectura y ciencia

		Matemáticas	Lectura	Ciencia
1	Corea	554	536	538
2	Japón	536	538	547
3	Suiza	531	509	515
4	Holanda	523	511	522
5	Estonia	521	516	541
6	Finlandia	519	524	545
7	Canadá	518	523	525
8	Polonia	518	518	526
9	Bélgica	515	509	505
10	Alemania	514	508	524
11	Austria	506	490	506
12	Australia	504	512	521
13	Irlanda	501	523	522
14	Eslovenia	501	581	514
15	Dinamarca	500	496	498
16	Nueva Zelanda	500	512	516
17	Rep.Checa	499	493	508
18	Francia	495	505	499
19	Reino Unido	494	499	514
20	Islandia	493	483	478
21	Luxemburgo	490	488	491
22	Noruega	489	504	495
23	Portugal	487	488	489
24	Italia	485	490	494
25	España	484	488	496
26	Eslovaquia	482	463	471
27	Estados Unidos	481	498	497
28	Suecia	478	483	485
29	Hungria	477	488	494
30	Israel	466	486	470
31	Grecia	453	477	467
32	Turquía	448	475	463
33	Chile	423	441	445
34	México	413	424	415

(Países de la OCDE)

Economías asociadas

Los mejor calificados

China	613	570	580
Singapur	573	542	551
Corea.	561	545	555

Los peor calificados

Qatar.	376	388	384
Indonesia.	374	396	382
Perú.	368	384	373

Fuente: Animal político**.** http://www.animalpolitico.com/2013/12/mexico-el-peor-de-la-ocde-en-matematicas-lectura-y-ciencias/

> Los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos 2012 (PISA, por sus siglas en inglés) concluyen que a México le tomará más de 25 años alcanzar el nivel promedio de los 34 países de la OCDE en matemáticas. Animal político. (2013).

Tabla 2

Resultados de México en PISA 2012			
	2012		
	Matemáticas	Lectura	Ciencia
Promedio OCDE	494	496	501
México	413	424	415
Japón	536	538	547
	2009		
Promedio OCDE	496	493	501
México	419	425	416
Fuente: OCDE			

Fuente: Animal político**.** http://www.animalpolitico.com/2013/12/mexico-el-peor-de-la-ocde-en-matematicas-lectura-y-ciencias/

Como se observa en la tabla 2, México en 2009 obtuvo un promedio de 419 aciertos y en el 2012 descendió a 413 aciertos, es claro que en lugar de mejorar el rendimiento académico en matemáticas de 2009 a 2012 descendió un poco.

> El 75% de los alumnos mexicanos dijeron estar de acuerdo o muy de acuerdo con que “frecuentemente me preocupa que tendré dificultades en clases de matemáticas” y la mitad dijo sentir ansiedad cuando intentaba resolver problemas de esa materia.
>
> Según la OCDE, el índice de ansiedad hacia las matemáticas en México es el más alto entre todos los países miembro e indica que “los alumnos que sienten ansiedad hacia las matemáticas tienden a evitarlas, privándose así de la posibilidad de emprender carreras profesionales relacionadas con esta materia”.

El estudio también mostró una falta de compromiso con la escuela, pues el 40% de los alumnos declaró haber llegado tarde al menos una vez en los dos semanas previas a la aplicación de la prueba PISA y el 22% dijo que faltó a clases sin autorización. “Los alumnos que reportan haber llegado tarde a clases obtienen al menos 10 puntos menos en matemáticas que aquellos que reportan no haber llegado tarde”, según la OCDE.

También quedaron al descubierto problemas de desigualdad, pues la diferencia en el índice de calidad de los recursos educativos entre las escuelas con mayores ventajas económico-sociales y las de mayores desventajas, es la más alta entre los 34 países de la OCDE y la tercera de entre los 65 participantes de la prueba PISA.

Ahora bien, en nuestro país existe una gran desigualdad económico- sociales, además de una gran multiculturalidad que coexiste en nuestra entidad territorial, bajo estas condiciones existen grandes dificultades para implementar programas educativos que incluyan a todas las comunidades del país.

La cobertura de la prueba indicó que el 90% de los jóvenes de 15 años están escolarizados en la mayoría de los países miembro, pero en México el índice es de menos de 70%.

A ello se suma que el resultado de los alumnos que asiste a escuelas privadas no fue superior a los obtenidos en escuelas públicas y que la capacidad de México para brindar a todos sus alumnos la oportunidad de tener un “rendimiento de excelencia” es baja, pues sólo el 3.8% de los estudiantes logran sobreponerse a un contexto de desventaja social, contra el promedio de 6.5% de la OCDE”.

Las matemáticas son un factor "estresante" para los estudiantes mexicanos más que en otros países de la OCDE. El 75% de los jóvenes mexicanos se preocupan por tener dificultades en clases de matemáticas, según los resultados de la prueba.

Aun así, los estudiantes mexicanos se ubican en el tercer lugar como los "más felices" por ir a la escuela, solo después de Perú y Colombia; por el contrario, Finlandia y Corea son los que tienen a los estudiantes más infelices.

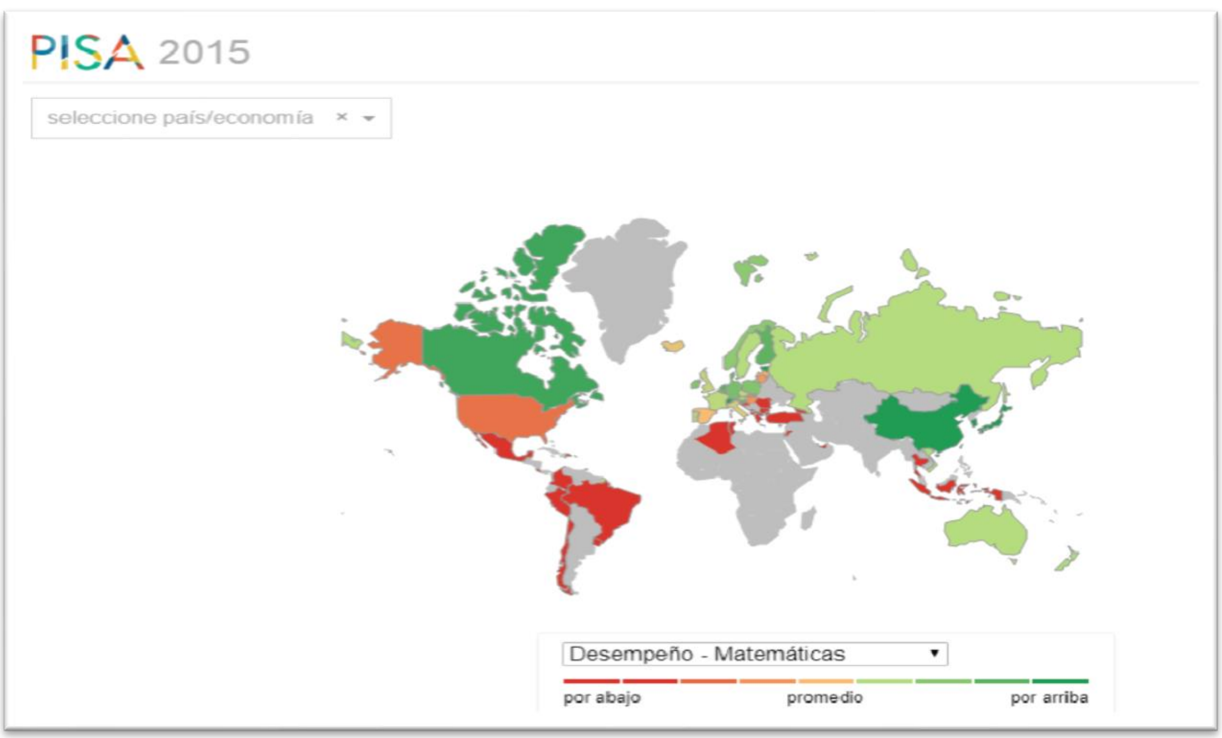
Ramos destaca que esto se debe al nivel de exigencia, de estos dos países, los cuales están entre los 15 primeros en aprovechamiento en matemáticas".

Resultados Prueba PISA 2015

En la encuesta PISA de 2015 se evaluó a cerca de 540 000 estudiantes de 15 años de edad en 72 países, sobre sus competencias en ciencias, lectura, matemáticas y resolución de problemas de manera colaborativa. En esta ocasión, la disciplina principal eran las ciencias, cada vez más importantes para la economía y la sociedad actual. OECD (2018)

En el siguiente mapa la prueba PISA 2015 muestra el desempeño que tuvieron los estudiantes en la prueba por país, como se puede observar México está por debajo del desempeño esperado.

Tabla 3



Fuente: OECD. http://www.oecd.org/pisa/singapur-encabeza-la-ultima-encuesta-pisa-sobre-educacion-que-realiza-la-ocde-a-escala-internacional.htm

De acuerdo a Nota país – Resultados de PISA 2015. El desempeño de México se encuentra por debajo del promedio OCDE en ciencias (416 puntos), lectura (423 puntos) y matemáticas (408 puntos). En estas tres áreas, menos del 1% de los estudiantes en México logran alcanzar niveles de competencia de excelencia (nivel 5 y 6). Ver tabla de niveles de competencia anexo 1.

Rendimiento de los estudiantes en matemáticas

Los estudiantes de México obtienen en promedio 408 puntos en matemáticas, por debajo del promedio OCDE de 490 puntos (Tabla I.5.3) y sitúa al país al lado del desempeño promedio de Albania y Georgia (ver Figura I.5.1). Los jóvenes mexicanos de 15 años obtienen una diferencia de alrededor de 80 puntos por debajo de Portugal y España, y entre 10 y 15 puntos por debajo de los estudiantes de Chile y Uruguay, pero se sitúan por encima de Brasil, Colombia, la República Dominicana y Perú (Figura I.5.1).

En promedio, el rendimiento de México en matemáticas ha aumentado 5 puntos cada tres años entre el 2003 y el 2015. El promedio del 2015, está por debajo al obtenido el 2009 (419 puntos) (Tabla I.5.4a).

En promedio en los países OCDE, casi uno de cada cuatro estudiantes (23%) no alcanza el nivel básico de competencia (Nivel 2). En matemáticas, los estudiantes que no alcanzan este nivel pueden de vez en cuando realizar procedimientos rutinarios, tales como operaciones aritméticas en situaciones donde todas las instrucciones les son dadas, pero tienen problemas identificando cómo una (simple) situación del mundo real puede ser representada matemáticamente (por ejemplo, comparar la distancia total entre dos rutas alternativas, o convertir precios a una moneda diferente). En México, 57% de los estudiantes no alcanzan el nivel básico de competencias, lo cual es mayor que el porcentaje de Chile y Uruguay, y menor que la proporción en Brasil, Colombia, la República Dominicana y Perú. La proporción de estudiantes mexicanos que no alcanzan el nivel mínimo de competencia permaneció estable entre el 2003 y el 2015. (Tablas I.5.2a). Ver tabla de niveles de competencia anexo 1.

En promedio, alrededor de uno de cada diez estudiantes en los países de la OCDE (10.7%) alcanzan un nivel de competencia de excelencia en matemáticas. En México, 0.3% de los estudiantes alcanzan niveles de excelencia, por debajo de los porcentajes de Brasil, Chile y Uruguay. En el 2015, México tiene una proporción similar de estudiantes que alcanzan niveles de competencia de excelencia en matemáticas que en el 2003, pero una menor proporción que en el 2006, 2009 y 2012 (Tablas I.5.2a).

Tabla 4

Panorama del rendimiento en ciencias, lectura y matemáticas

Países/economías con un rendimiento medio/proporción de alumnos excelentes por encima de la media de la OCDE
Países/economías con una proporción de alumnos con bajo rendimiento por debajo de la media de la OCDE

Países/economías con un rendimiento medio/proporción de alumnos excelentes/proporción de alumnos con bajo rendimiento no significativamente distinta a la media de la OCDE

Países/economías con un rendimiento medio/proporción de alumnos excelentes por debajo de la media de la OCDE.
Países/economías con una proporción de alumnos con bajo rendimiento por encima de la media de la OCDE

	Ciencias		Lectura		Matemáticas		Ciencias, lectura y matemáticas	
	Rendimiento medio en PISA 2015	Tendencia media en tres años	Rendimiento medio en PISA 2015	Tendencia media en tres años	Rendimiento medio en PISA 2015	Tendencia media en tres años	Proporción de alumnos con nivel excelente en al menos una asignatura (nivel 5 o 6)	Proporción de alumnos con bajo rendimiento en las tres asignaturas (por debajo del nivel 2)
	Media	Dif. nota	Media	Dif. nota	Media	Dif. nota	%	%
Media OCDE	493	-1	493	-1	490	-1	15.3	13.0
Singapur	556	7	535	5	564	1	39.1	4.8
Japón	538	3	516	-2	532	1	25.8	5.6
Estonia	534	2	519	9	520	2	20.4	4.7
China Taipéi	532	0	497	1	542	0	29.9	8.3
Finlandia	531	-11	526	-5	511	-10	21.4	6.3
Macao (China)	529	6	509	11	544	5	23.9	3.5
Canadá	528	-2	527	1	516	-4	22.7	5.9
Vietnam	525	-4	487	-21	495	-17	12.0	4.5
Hong Kong (China)	523	-5	527	-3	548	1	29.3	4.5
P-S-J-G (China)	518	m	494	m	531	m	27.7	10.9
Corea	516	-2	517	-11	524	-3	25.6	7.7
Nueva Zelanda	513	-7	509	-6	495	-8	20.5	10.6
Eslovenia	513	-2	505	11	510	2	18.1	8.2
Australia	510	-6	503	-6	494	-8	18.4	11.1
Reino Unido	509	-1	498	2	492	-1	16.9	10.1
Alemania	509	-2	509	6	506	2	19.2	9.8
Holanda	509	-5	503	-3	512	-6	20.0	10.9
Suiza	506	-2	492	-4	521	-1	22.2	10.1
Irlanda	503	0	521	13	504	0	15.5	6.8
Bélgica	502	-3	499	-4	507	-5	19.7	12.7
Dinamarca	502	2	500	3	511	-2	14.9	7.5
Polonia	501	3	506	3	504	5	15.8	8.3
Portugal	501	8	498	4	492	7	15.6	10.7
Noruega	498	3	513	5	502	1	17.6	8.9
Estados Unidos	496	2	497	-1	470	-2	13.3	13.6
Austria	495	-5	485	-5	497	-2	16.2	13.5
Francia	495	0	499	2	493	-4	18.4	14.8
Suecia	493	-4	500	1	494	-5	16.7	11.4
República Checa	493	-5	487	5	492	-6	14.0	13.7
España	493	2	496	7	486	1	10.9	10.3
Letonia	490	1	488	2	482	0	8.3	10.5
Rusia	487	3	495	17	494	6	13.0	7.7
Luxemburgo	483	0	481	5	486	-2	14.1	17.0
Italia	481	2	485	0	490	7	13.5	12.2
Hungría	477	-9	470	-12	477	-4	10.3	18.5
Lituania	475	-3	472	2	478	-2	9.5	15.3
Croacia	475	-5	487	5	464	0	9.3	14.5
CABA (Argentina)	475	51	475	46	456	38	7.5	14.5
Islandia	473	-7	482	-9	488	-7	13.2	13.2
Israel	467	5	479	2	470	10	13.9	20.2
Malta	465	2	447	3	479	9	15.3	21.9
República Eslovaca	461	-10	453	-12	475	-6	9.7	20.1
Grecia	455	-6	467	-8	454	1	6.8	20.7
Chile	447	2	459	5	423	4	3.3	23.3
Bulgaria	446	4	432	1	441	9	6.9	29.6
Emiratos Árabes Unidos	437	-12	434	-8	427	-7	5.8	31.3
Uruguay	435	1	437	5	418	-3	3.6	30.8
Rumania	435	6	434	4	444	10	4.3	24.3
Chipre[1]	433	-5	443	-6	437	-3	5.6	26.1
Moldavia	428	9	416	17	420	13	2.8	30.1
Albania	427	18	405	10	413	18	2.0	31.1
Turquía	425	2	428	-18	420	2	1.6	31.2
Trinidad y Tobago	425	7	427	5	417	2	4.2	32.9
Tailandia	421	2	409	-6	415	1	1.7	35.8
Costa Rica	420	-7	427	-9	400	-6	0.9	33.0
Catar	418	21	402	15	402	26	3.4	42.0
Colombia	416	8	425	6	390	5	1.2	38.2
México	416	2	423	-1	408	5	0.6	33.8
Montenegro	411	1	427	10	418	6	2.5	33.0
Georgia	411	23	401	16	404	15	2.6	36.3
Jordania	409	-5	408	2	380	-1	0.6	35.7
Indonesia	403	3	397	-2	386	4	0.8	42.3
Brasil	401	3	407	-2	377	6	2.2	44.1
Perú	397	14	398	14	387	10	0.6	46.7
Líbano	386	m	347	m	396	m	2.5	50.7
Túnez	386	0	361	-21	367	4	0.6	57.3
ARYM	384	m	352	m	371	m	1.0	52.2
Kosovo	378	m	347	m	362	m	0.0	60.4
Argelia	376	m	350	m	360	m	0.1	61.1
República Dominicana	332	m	358	m	328	m	0.1	70.7

1. Nota de Turquía: La información del presente documento en relación con «Chipre» se refiere a la parte sur de la Isla. No existe una sola autoridad que represente en conjunto a las comunidades turcochipriota y grecochipriota de la Isla. Turquía reconoce a la República Turca del Norte de Chipre (RTNC). Mientras no haya una solución duradera y equitativa en el marco de las Naciones Unidas, Turquía mantendrá su postura frente al «tema de Chipre».

Nota de todos los Estados Miembros de la Unión Europea que pertenecen a la OCDE y de la Unión Europea:Todos los miembros de las Naciones Unidas, con excepción de Turquía, reconocen a la República de Chipre. La información contenida en el presente documento se refiere a la zona sobre la cual el Gobierno de la República de Chipre tiene control efectivo.

Notas: Los valores estadísticamente significativo aparecen marcados en color oscuro (ver anexo A3).

La tendencia media se presenta por el período más largo disponible; desde PISA 2006 para ciencias, PISA 2009 para lectura y PISA 2003 para matemáticas.

Los países y economías aparecen enumerados en orden descendiente según la nota media en ciencias en PISA 2015.

Fuente: OCDE. Base de datos de PISA 2015. Tablas I.2.4a, I.2.6, I.2.7, I.4.4a y I.5.4a.

Fuente: OCDE. Nota país.

Prueba PLANEA

¿Qué es Planea?

Es el nuevo Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes que puso en operación el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) a partir del ciclo escolar 2014-2015, en coordinación con la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Propósitos de la nueva generación de pruebas

Planea tiene como propósito general conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes clave en diferentes momentos de la educación obligatoria.

Los resultados de las evaluaciones de Planea servirán para la mejora educativa, a partir de:

- Informar a la sociedad sobre el estado que guarda la educación en términos del logro de aprendizaje de los estudiantes y de la equidad (o inequidad) que existe en los resultados educativos.

- Aportar a las autoridades educativas información relevante para el monitoreo, la planeación, programación y operación del sistema educativo y sus centros escolares.

- Ofrecer información pertinente, oportuna y contextualizada a las escuelas y a los docentes, que ayude a mejorar sus prácticas de enseñanza y el aprendizaje de todos sus estudiantes.

- Contribuir al desarrollo de directrices para la mejora educativa con información relevante sobre los resultados educativos y los contextos en que se dan. INEE.- (2018) PLANEA

¿Qué evalúa Planea?

Aprendizajes clave en Lenguaje y Comunicación, y Matemáticas, los cuales:

- Son fundamentales para la adquisición de nuevos aprendizajes.

- Son relevantes para el dominio del campo curricular.

- Prevalecen en el tiempo a pesar de los cambios curriculares. INEE.- (2018)

Tabla 5

Contenidos generales de la prueba de Matemáticas 2017

Unidad de Evaluación	Número de reactivos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	62
Forma, espacio y medida	44
Manejo de la información	35
Total de reactivos	141

Fuente: INEE. (2018). Fuente: INEE. (2018)

Tabla 6

Información general sobre la prueba Planea de 3º de secundaria, aplicación 2017

	Lenguaje y Comunicación	Matemáticas
Número de reactivos	141	141
Escuelas participantes en la muestra	3 398	
Alumnos participantes en la muestra	131 662	
Confiabilidad	0.884	0.880

Fuente: INEE. (2018). Fuente: INEE. (2018).

Como se puede observar 62 de 141 reactivos se centran en el eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico, y tomando en cuenta las investigaciones que se han realizado acerca de este tema, mediante el cual diversos autores como Tenoch E. Cedillo (2001), Socas (2007), Kieran et al. (1989), Paralea (1998) entre otros, citan que han encontrado que existen algunas dificultades para la apropiación de este lenguaje, entre las que se encuentra el uso de la incógnita, el signo de igualdad y la transición de la aritmética al álgebra. Es muy importante considerar los resultados de esta evaluación, con la finalidad de aportar herramientas que posibiliten mejorar el tratamiento de este tema.

La prueba considera importante evaluar el dominio de los conceptos y procedimientos relacionados con el álgebra, en particular mi investigación se centra en el dominio procedimental que tienen los alumnos que han cursado el primer grado de secundaria al despejar la incógnita en las ecuaciones de primer grado, motivo por el cual me parece relevante realizar esta investigación.

Aplicación

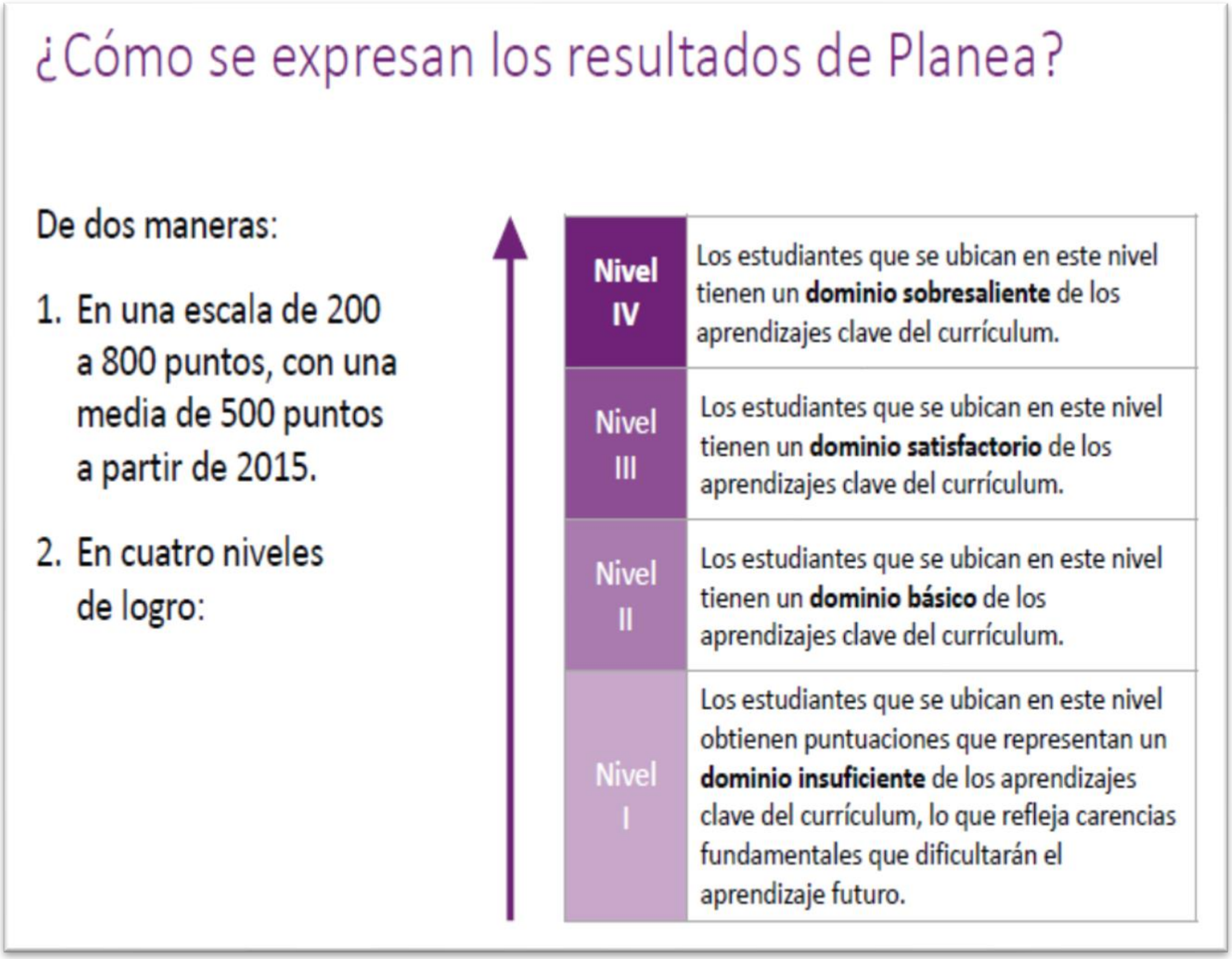
- La aplicación realizada por el INEE se llevó a cabo en una muestra que fue diseñada para generar resultados con representatividad nacional, por entidad federativa y por tipo de escuela.

- Fue llevada a cabo el 14 y el 15 de junio de 2017.

- Los resultados que se van a presentar se refieren al Sistema Educativo Nacional en su conjunto, que es el propósito de las evaluaciones Planea que lleva a cabo el INEE.

- Los resultados “escuela por escuela” son entregados por la SEP a partir de un levantamiento de información que la autoridad educativa realiza simultáneamente al que realiza el INEE.

Tabla 7



¿Cómo se expresan los resultados de Planea?

De dos maneras:

1. En una escala de 200 a 800 puntos, con una media de 500 puntos a partir de 2015.
2. En cuatro niveles de logro:

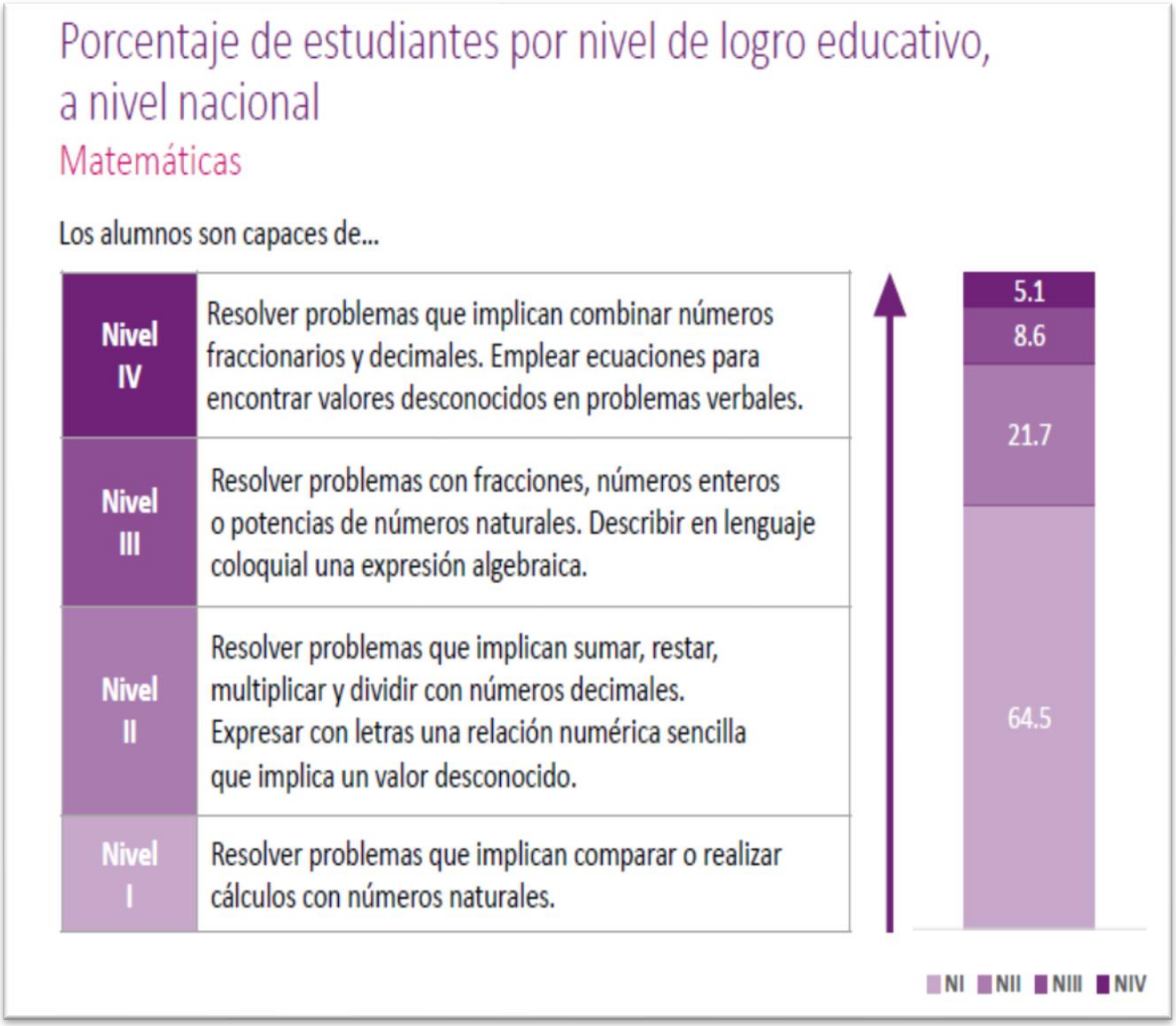
Nivel IV	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un **dominio sobresaliente** de los aprendizajes clave del currículum.
Nivel III	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un **dominio satisfactorio** de los aprendizajes clave del currículum.
Nivel II	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un **dominio básico** de los aprendizajes clave del currículum.
Nivel I	Los estudiantes que se ubican en este nivel obtienen puntuaciones que representan un **dominio insuficiente** de los aprendizajes clave del currículum, lo que refleja carencias fundamentales que dificultarán el aprendizaje futuro.

Fuente: INEE. (2018).

Esta tabla nos menciona las características de los cuatro niveles en que se expresan los resultados de PLANEA en función de los dominios de aprendizaje clave en los currículum que dominan los estudiantes.

Tabla 8

Resultados nacionales de logro 2017 en tercero de secundaria.



Fuente: INEE. (2018).

En esta tabla podemos observar que el 64.5% de los alumnos se ubican en el nivel I, existe un aprovechamiento bajo en el nivel III, que es donde se inicia el estudio de las expresiones algebraicas y en nivel IV se encuentran las ecuaciones para encontrar valores desconocidos en problemas verbales y solo el 8.6% y 5.1% respectivamente pueden resolver ese tipo de problemas.

Tipos de escuela considerados en el estudio

- **Secundarias comunitarias:** escuelas de sostenimiento público administradas por el CONAFE, que suelen ubicarse en localidades rurales de alto o muy alto grado de marginación. El docente es un joven egresado de secundaria o bachillerato que habitualmente se hace cargo de los tres grados.

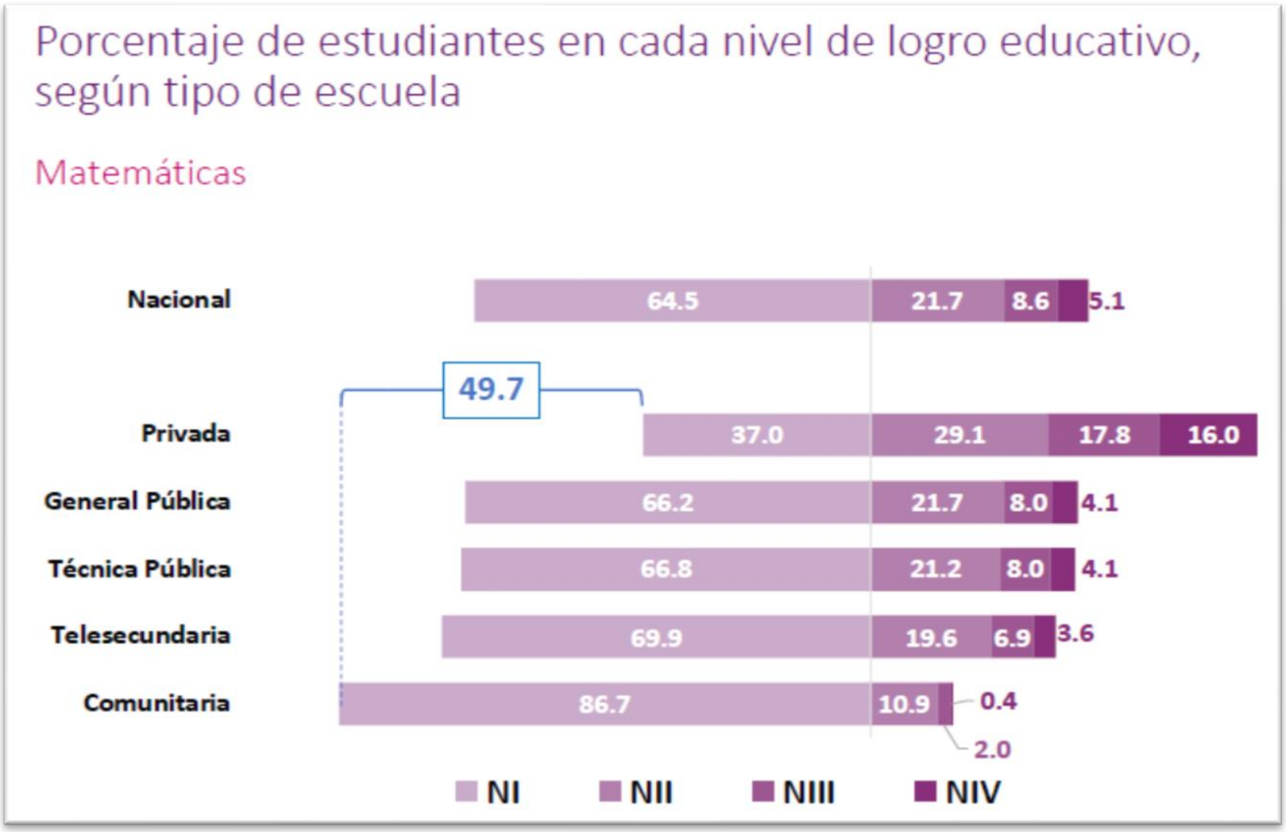
- **Telesecundarias:** escuelas de sostenimiento público que atienden predominantemente la demanda educativa de la población en comunidades rurales o de alta marginación. En este tipo de servicio se hace uso de medios electrónicos y de comunicación. Generalmente un solo profesor se hace cargo de un grupo.

- **Secundarias generales públicas:** escuelas de sostenimiento público clasificadas bajo el tipo de servicio general.

- **Secundarias técnicas públicas:** escuelas de sostenimiento público que además de impartir las asignaturas académicas de la secundaria general, incluye otras para capacitar a los educandos en actividades tecnológicas industriales, comerciales, agropecuarias, pesqueras o forestales.

- **Secundarias privadas:** Centros escolares de sostenimiento privado que ofrecen el nivel de secundaria.

Tabla 9



Fuente: INEE. (2018).

Los resultados muestran que entre los tipos de escuelas secundarias públicas que participan, el 66% de los alumnos se ubican en el nivel I y se encuentran por debajo del 4.5% en el nivel IV.

Ahora bien, el aprovechamiento entre la escuela general pública y la telesecundaria en el nivel I es del 66.2% y 69.9% con el 3.7% de diferencia y en el nivel IV es del 4.1% y 3.6% respectivamente, con solo un 0.5% de diferencia, lo que parece no ser significativa la diferencia en el nivel IV entre ambos tipos de escuela. Cabe señalar que este dato podría corroborarse con una prueba estadística, sin embargo, no se pudieron encontrar los datos necesarios en las publicaciones del INEE.

En general los resultados de PLANEA muestran que, en las escuelas secundarias del sector privado, existe un mejor aprovechamiento que en las demás escuelas consideradas en el estudio.

Ahora bien los resultados ponen énfasis en un mayor contraste con las Secundarias comunitarias administradas por la CONAFE, mientras que las privadas tienes un 37.0% en el nivel I y el 16.0% en el nivel IV, mientras que las comunitarias tienen un 86.7% en el nivel I y apenas el 0.4% en el nivel IV, dejando una clara diferencia de aprovechamiento por parte de los alumnos en esas escuelas, sin embargo y a título personal considero que las condiciones educativas de ambos instituciones, es muy desigual en todo sentido, por lo que no veo sentido a esta comparativa de la prueba.

Comparación 2015-2017

Para comparar los resultados 2015-2017

- Como se comentó al principio, en las diferentes entidades de la República se alcanzó una tasa de participación adecuada tanto por el número de estudiantes como por el número de escuelas, con excepción de Chiapas, Michoacán y Oaxaca.

- Por esta razón, se excluye a las tres entidades mencionadas en la comparación que se mostrará a continuación, lo cual es más correcto técnicamente, pues compara sólo lo que es estrictamente comparable: sólo las entidades que en las dos aplicaciones han alcanzado la tasa de participación adecuada.

Tabla 10

Planea 2015 y 2017

Puntaje promedio de los estudiantes en Lenguaje y Comunicación y en Matemáticas, excluyendo entidades federativas con insuficiente tasa de participación

Asignatura	Población considerada	Aplicación	Puntaje promedio
Lenguaje y Comunicación	Excluyendo las entidades federativas Michoacán, Chiapas y Oaxaca	2015	503
		2017	503
		Diferencia	0

Asignatura	Población considerada	Aplicación	Puntaje promedio
Matemáticas	Excluyendo las entidades federativas Michoacán, Chiapas y Oaxaca	2015	501
		2017	504
		Diferencia	**3**

Nota: se muestran en negritas las diferencias significativas.

Fuente: INEE. (2018).

> Los resultados 2017 son comparables con los arrojados por la misma prueba en 2015. A partir de lo anterior se observa que el puntaje promedio en Lengua y Comunicación es el mismo (503), mientras que en Matemáticas pasó en el último año de 501 a 504; esta diferencia es estadísticamente significativa. INEE.- (2018) PLANEA

Es preciso señalar que los datos proporcionados por la OCDE en la prueba PISA así como los resultados mostrados por la prueba PLANEA, muestran el bajo rendimiento que tienen nuestros jóvenes en la asignatura de matemáticas. Por lo que desde mi ámbito de acción como pedagogo considero pertinente tomar acciones en favor de la mejora educativa, estimo necesario realizar esta investigación sobre las ecuaciones de primer grado con el objetivo de que los lectores cuente con una herramienta de evaluación que les permita obtener información acerca del logro alcanzado por los alumnos en este nivel educativo, permitiendo así, que el colectivo reflexione acerca de estos resultados, en beneficio de la educación.

Mi interés por estudiar las dificultades y errores que cometen los estudiantes de secundaria al resolver ecuaciones de primer grado me lleva a la necesidad de revisar el plan y programas de estudio vigentes y analizar la propuesta educativa, además es necesario revisar algunos libros de texto sugeridos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito (CONALITEG), y analizar las propuestas didácticas relacionadas con ecuaciones de primer grado. Adicionalmente se revisaran algunas investigaciones que se han realizado en diferentes países sobre los problemas y dificultades que presentan los alumnos al abordar este tema de álgebra.

Ahora bien, una vez revisado el plan y programas de estudio, así como los libros de la CONALITEG, y algunas investigaciones realizadas sobre el tema, se plantea el siguiente objetivo.

Objetivo general

Detectar y analizar los principales errores y dificultades que presentan los alumnos de secundaria al despejar la incógnita en las ecuaciones de primer grado.

Objetivos particulares

Revisar y analizar la propuesta didáctica relacionada con las ecuaciones de primer grado que establece el plan y programas de estudios de secundaria vigentes.

Investigar la propuesta didáctica de algunos libros de texto sugeridos por la CONALITEG, para abordar el tema de ecuaciones de primer grado.

Diseñar y elaborar un instrumento que permita detectar los errores y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver ecuaciones de primer grado

Tipificar los errores cometidos por los alumnos de secundaria

Preguntas tópicas

¿Por qué es importante saber despejar una ecuación de primer grado con una incógnita?

¿Cómo plantea las diferentes formas de las ecuaciones de primer grado, el plan y programas de estudio vigente?

¿En qué aspectos centran sus propuestas didácticas los libros de texto sugeridos por la CONALITEG para despejar ecuaciones de primer grado?

¿Qué aspectos sobre las dificultades y errores que presentan los alumnos de secundaria al plantear y resolver ecuaciones de primer grado han sido reportados en las investigaciones en Educación matemática en particular los relacionados con el proceso que se requiere para despejar la incógnita?

¿Cuáles son los conocimientos previos relacionados con la aritmética que se requieren para despejar la incógnita en las ecuaciones de primer grado?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y MARCO REFERENCIAL

En esta parte se consideran los aportes de los investigadores en torno al tránsito de la aritmética al algebra en particular las dificultades que tienen los alumnos para darle sentido al algebra y poder despejar la incógnita en ecuaciones de primer grado.

Con respecto al plan y programas vigentes se analizan el bloque de primer grado de secundaria donde se plantea el tema de ecuaciones de primer grado.

Finalmente se analizan las distintas propuestas didácticas de seis libros sugeridos por la CONALITEG, ubicando el análisis pedagógico que emplean para abordar este tema.

Con respecto al álgebra

En el presente apartado revise algunas investigaciones que se han realizado en diferentes países sobre los problemas y dificultades que presentan los alumnos al abordar el tema de algebra en específico ecuaciones de primer grado.

Lenguaje algebraico:

Uno de los principales puntos que se deben tomar en consideración al momento de abordar el tema de algebra en específico ecuaciones de primer grado, es analizarlo desde un punto de vista global, tomando en cuenta que las ecuaciones de primer grado son un tema derivado del algebra y como tal tiene un lenguaje propio, por lo que es necesario se aborde y seleccionen propuestas didácticas que ayuden a los alumnos para que puedan apropiarse de este conocimiento.

> Pérez (2004) sostiene que una de las dificultades que se presenta en la resolución de problemas algebraicos es el manejo del lenguaje, ya que no es totalmente claro para el alumno y por lo tanto no existe comprensión de los elementos con los que se va a trabajar; esto puede ser uno de los obstáculos por el cual el sujeto no puede solucionar un problema algebraico. El lenguaje matemático no se adquiere de manera natural ni cotidiana, ni con la

introducción simple de reglas formales en los cursos escolares que no se pueden asociar fácilmente a contextos cotidianos.

> Al respecto, Tenoch E. Cedillo (2001) en su estudio sugiere enseñar álgebra como un lenguaje en uso, de manera similar a cómo aprenden los niños su lengua materna. El tratamiento didáctico utilizado en ese estudio intenta llevar a los estudiantes a no saber nada, o casi nada, sobre álgebra al modelo y solución de problemas algebraicos. Para crear un entorno que permita los eventos cognitivos a estudiar, diseñó un enfoque didáctico al reformular la investigación de Bruner (1983) sobre la adquisición del lenguaje, que se aprende principalmente a través del uso, sin necesidad de conocimientos previos de gramática o reglas sintácticas.
>
> Además las similitudes entre el aprendizaje del álgebra y el aprendizaje del lenguaje nativo que se hicieron evidentes por ese estudio experimental alentó la idea de que el álgebra podría enseñarse como un código cuya función es la comunicación de los eventos matemáticos.
>
> Adicionalmente el autor señala que el uso del lenguaje determina sus significados. Este principio resuena con el trabajo de Bruner (1980, 1982, 1983, 1985), que llevó a cabo una extensa investigación sobre cómo se adquiere el lenguaje natural. Estudió cómo los niños, aparentemente sin esfuerzo, aprenden algo tan complejo como el lenguaje natural. Una parte central de su trabajo examina cómo el lenguaje natural puede ser aprendido por cualquier persona (con diferentes niveles de competencia), mientras que generalmente otras áreas del conocimiento presentan una situación algo diferente a este respecto. ¿Por qué todos aprendemos el lenguaje natural a un nivel aceptable de competencia, pero no matemáticas, filosofía, geografía o historia?

Además de eso, otra dificultad a la que se enfrentan los estudiantes, es que a diferencia de otras áreas de investigación tales como la biología o la química, en las cuales los objetos de investigación son accesibles a través de algún instrumento o de alguna evidencia sensorial. En relación a las matemáticas la única forma de trabajar con los objetos de investigación es a través de signos y representaciones semióticas. Como lo cita Duval (2006).

El primer requisito es especialmente importante por dos razones que resaltan el estatus epistemológico particular de las matemáticas, pues a diferencia de las otras áreas científicas (la astronomía, la geología, la química, la biología...) los objetos de conocimiento (los números, las funciones y sus propiedades...) no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos. La única forma de acceder y trabajar con ellos es a través de signos y representaciones semióticas. Sin embargo, la necesidad de signos no se limita a esto, pues su principal papel no es representar objetos matemáticos sino trabajar en ellos y con ellos, sustituyendo unos signos por otros.

Los sistemas semióticos son principalmente usados para operar, es decir para el tratamiento. Podemos resumir esto diciendo: sin “mediaciones semióticas” no es posible la actividad matemática.

Para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos.

En resumen, Pérez, Tenoch E. Cedillo y Duval, coinciden en la importancia del tratamiento del leguaje y representaciones semióticas al momento de abordar los temas de matemáticas, en este caso algebra ya que este no se adquiere de manera natural ni cotidiana.

Origen del error en álgebra

Es importante mencionar algunos de los orígenes del error en algebra, ya que en muchas ocasiones los errores provienen de otro ámbitos de conocimiento, en este caso pueden provenir de la aritmética ya sea por una mala adquisición de los contenido y reglas de las operaciones básicas o por el uso estos en un contexto distinto, tal como lo es el álgebra.

Socas (2007), menciona que se consideran tres ejes, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error. De esta forma podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: Obstáculo, Ausencia de sentido y Actitudes afectivas y emocionales.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

(a) Errores del álgebra que tienen su origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.

(b) Errores de procedimiento. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.

(c) Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo "=" en Álgebra y la sustitución formal.

En relación a los errores que tienen su origen con los obstáculos Paralea (1998) menciona que un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento. Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado. Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto, genera respuestas inadecuadas, incluso, incorrectas; el dominio resulta falso. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

Podemos señalar que los obstáculos con frecuencia los encontramos cuando el estudiante se enfrenta a un problema novedoso, porque una vez que se propone a resolver dicho problema el estudiante utilizara todas las reglas, estrategias y métodos que conozca para intentar resolver el problema, sin embargo, al carecer de reglas y procedimientos adecuados cometerá errores que surgen por la adquisición de un conocimiento previo.

Debemos tener en cuenta que todos los estudiantes a la hora de la resolución o despeje de una ecuación, ya cuentan con conocimientos, tales como el dominio de las operaciones básicas de la aritmética, que en algunos casos servirán para favorecer el nuevo conocimiento matemático, pero en otros serán un obstáculo pues como dice Paralea (1998).

> En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total.

> Al respecto Pérez (2004).cita que los procesos de solución de problemas no terminan cuando se encuentra la solución por un camino, es conveniente buscar varios caminos para obtener la solución y valorarlos con relación a su claridad o simplicidad; esto implica el desarrollo de procesos de análisis y de una buena solución de procesos matemáticos.

Retomando esta afirmación debemos considerar que, el hecho de mostrarles varios procedimientos y soluciones a los estudiantes, les va a permitir clarificar muchas dudas en el proceso, que con apoyo del profesor se podrán ir disipando y al mismo tiempo, les va a dar una mayor comprensión del tema porque va a existir una mayor retroalimentación y por lo tanto lograran por si mismos encontrar el procedimiento más adecuado para resolver un problema similar en un futuro próximo.

Ahora bien en lo que respecta al algebra, es recomendable que los procedimientos se muestren de manera ascendente, es decir de lo simple a lo complejo, esto con la finalidad de ir guiando al alumno a la comprensión de las ecuaciones de primer grado, porque sin duda existirán ecuaciones que los alumnos podrán resolver de manera aritmética o con sus propios métodos, pero existen una gran variedad de ejercicios de ecuaciones que para su mayor facilidad en su resolución necesariamente tendrán que solucionarse por el método algebraico.

> Es preciso señalar que no todos los estudiantes cuentan con los mismos conocimientos Paralea (1998) señala que es claro que ante un mismo problema, diferentes personas

utilizan distintas estrategias para afrontar su solución. Estas estrategias, a veces, son características y específicas de una situación determinada, pero, otras veces, se puede identificar un patrón, un modo de funcionamiento o estilo general, característico de un individuo, o de un grupo de individuos, ante tareas y problemas en muy variadas situaciones. Estos estilos o estrategias, reflejan diferencias en la forma en que los sujetos piensan, estudian, perciben, memorizan, resuelven problemas, hacen representaciones, etc.

En su investigación Rakhi Banerjee & K. Subramaniam.- (2012) afirma que los estudiantes explicaron predominantemente el proceso de simplificación repitiendo el procedimiento que llevaron a cabo, acompañado de declaraciones como los términos del producto se pueden combinar extrayendo un factor común y un simple y un término del producto no se pueden combinar. El estudiante BK indicó el factor común "a", y declaró el hecho de que tendrá el mismo valor numérico para ambas apariciones, lo que permite la extracción del factor común: 'esto es $+5 \times a + 6 - 2 \times a + 9$. Estos dos $[+5 \times a - 2 \times a]$ son iguales, por lo tanto, $+a \times (5-2)$'. Cuando se le preguntó si $a \times 3 + 15$ se puede simplificar aún más, el estudiante SV explicó por qué esto no era posible: "Como $a \times 3$ es el producto, no debe hacer 15 + 3 y escribir". El término del producto se debe hacer primero". Ambos estudiantes usaron su comprensión de evaluar expresiones aritméticas para transformar expresiones algebraicas.

Las entrevistas después de MST-II y III revelaron que la mayoría de los estudiantes podrían inferir la igualdad / equivalencia de expresiones al enfocarse en la estructura de las expresiones. Unos pocos estudiantes complementaron esta comprensión con cálculos (computación de partes de expresiones) para estar doblemente seguros. Los estudiantes recibieron de tres a cuatro expresiones alternativas para juzgar su igualdad con respecto a una expresión dada. Por ejemplo, el estudiante AY en la entrevista después de MST-II juzgó correctamente la desigualdad de las expresiones $49 - 37 + 23$ y $49 - 5 - 37 - 5 + 23$. Aunque un poco vacilante al principio, dio una razón que incorporó tanto la comprensión de la estructura de las expresiones como las operaciones de enteros. Dijo que 'Porque aquí $-5 - 5$ es extra. Si hubiera sido $-5 + 5$, entonces restar nos hubiera dado 0 pero aquí es tanto $-5'$.

En MST-III, se utilizó una prueba adicional cuando los estudiantes juzgaron correctamente dos expresiones aritméticas como no iguales: se les preguntó qué expresión era mayor. Los

> estudiantes usaron su comprensión de los procedimientos y el sentido de la estructura para sacar sus conclusiones. Por ejemplo, JS concluyó que la expresión $24 - 13 + 18 \times 6$ era mayor que $24 + 18 - 13 \times 6$ porque "Aquí $+18 \times 6$ está ahí lo que daría más respuestas, y aquí si lo hacemos -13×6 dará menos respuesta". Ignoró el aumento marginal en el valor de $24 + 18$ en comparación con $24 - 13$ y atendió la diferencia significativa causada por los términos $+18 \times 6$ y -13×6.

Es importante señalar que es de vital importancia considerar las distintas dificultades que señalan algunos autores tales como leguaje matemático y los orígenes de los errores en matemáticas que presentan los estudiantes a la hora de abordar problemas de algebra y en específico en el despeje de las ecuaciones de primer grado, esto con la finalidad de abordar mejor el análisis de este estudio.

Dificultades provenientes de la aritmética

Las investigaciones relacionadas con las dificultades provenientes de aritmética en el proceso del despeje de la incógnita en las ecuaciones de primer grado son las siguientes Quiroz (2006), Chavarría (2014), Socas (1997), Kieran et. al. (1989) y Pérez (2004).

Dificultades en las que destacan operar de forma incorrecta con fracciones, uso de paréntesis, un deficiente dominio del lenguaje aritmético, interpretación incorrecta de símbolos y letras, etc. así alumnos que no dominan estos conceptos desde los primeros años escolares, tienen marcadas dificultades en el aprendizaje del álgebra.

> Tall, D. (2014) señala que las palabras numéricas a menudo se interpretan como adjetivos o sustantivos, como "tres" como un adjetivo en "los tres mosqueteros" y un sustantivo en "tres es un número primo". En inglés, las palabras funcionan libremente como varias partes del habla, por ejemplo, el término "abstracto" puede ser un adjetivo en "una idea abstracta", un nombre en "un resumen tomado de un libro" o un verbo "para ideas abstractas de una situación concreta". Las acciones a menudo se transforman en nombres, como la forma en que la palabra "correr" en "John está corriendo" se convierte en "Correr es bueno para la salud". El participio "correr" se convierte en un sustantivo utilizando el dispositivo lingüístico que se llama "gerundio".

Sin embargo, este análisis en varias partes del habla no logra captar las formas sutiles en que pensamos sobre el proceso de contar y el concepto de número. Los números no solo se usan como adjetivos o sustantivos. Una expresión en aritmética como "$3 + 4$" opera de manera flexible como una instrucción para calcular el resultado en “¿qué es $3 + 4$?” Y también como un nombre, el nombre del resultado del cálculo $3 + 4$, que es 7 El símbolo $3 + 4$ opera tanto como un proceso (adición) como un concepto (la suma).

A lo largo del desarrollo del simbolismo en aritmética y álgebra, el niño aprende a realizar una operación, a practicarla hasta que se convierta en una rutina, y luego a utilizarla como un concepto pensable. Un niño pequeño pasa muchos meses comprendiendo el proceso de señalar y contar para encontrar el número de elementos en un conjunto que es independiente de la secuencia de conteo y esto se convierte en el concepto relacionado de número.

Del mismo modo, una expresión algebraica, como $2x + 6$, puede interpretarse como un proceso de evaluación (el doble del valor de x más 6) y también como un concepto de expresión algebraica que puede ser operado. Por ejemplo, se puede factorizar para dar el producto $2(x + 3)$. Como proceso, $2(x + 3)$ Implica una secuencia diferente de pasos (doble el resultado de agregar el valor de x y 3). Sin embargo, en la manipulación algebraica, las expresiones $2x + 6$ y $2(x + 3)$ son intercambiables, por lo que pueden considerarse como dos formas diferentes de escribir lo mismo. Esto proporciona una nueva flexibilidad en el uso de símbolos que ocurre de forma natural e inconsciente para los expertos, pero es posible que tenga que ser aprendido explícitamente por el principiante.

Pedemonte (2008) cita que muchos estudios destacan la distancia entre la aritmética y el álgebra que indica que en los procedimientos de álgebra reflejan los de la aritmética, pero en el álgebra no están separados por el objeto obtenido, ya que están en la aritmética (Linchevski y Herscovics, 1996). En álgebra es necesario concebir números y símbolos como objetos. Por lo tanto, existe una "brecha cognitiva" entre la aritmética y el álgebra (Herscovics y Linchevski, 1994) resaltada por el mismo tipo de errores que los estudiantes tienden a cometer en ambos dominios (Linchevski y Livneh, 1999).

Citando a (Chevallard, 1989). La aritmética se mueve de lo conocido a lo desconocido, mientras que el álgebra a menudo se mueve de lo desconocido a lo conocido, de modo que al final del proceso es posible identificar la cantidad desconocida. La aritmética y el álgebra tienen dos idiomas separados: el primero se basa en el lenguaje ordinario enriquecido por el lenguaje numérico, mientras que el segundo está esencialmente orientado a la computación donde hay control mecánico.

Otros estudios de investigación destacan las dificultades para captar la invariancia de la denotación algebraica en relación con el significado (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 2001, Drohuard, 1992); En aritmética, esta invariancia es automática porque la denotación es un número específico, mientras que en el álgebra está relacionada con los aspectos sintácticos.

La brecha cognitiva entre la argumentación constructiva y la prueba puede deberse a la distancia entre las fases de conversión y tratamiento, y/o a una distancia de naturaleza metodológica y/o a una distancia lingüística entre dos denotaciones diferentes.

Chavarría (2014) citando a Esquinas (2009), afirma que el estudiante se enfrenta a un nivel de abstracción mayor y a una serie de símbolos que puede parecerle inoperable. El paso de la aritmética a la generalización algebraica va más allá de solo aprender reglas para efectuar operaciones, implica comprender lo que representan los símbolos que se están estudiando. Esta investigadora propone el siguiente ejemplo:

Profesora: Si m es un número, ¿podrías decirme cómo representas el número siguiente?
Alumna: n.
P: Pero n es la letra siguiente, no el número siguiente.
A: Pero si m es un número, su siguiente es la letra siguiente.
P: ¿Cómo sabes que n no representa otro número?, m y n representan números cualesquiera.
A: Porque es el siguiente a m.

Quiroz (2006) refiere que muchas veces se oye la queja del profesor de que el alumno no lee bien los problemas y se precipita a aplicar la operación aritmética que lo resuelva la cual en muchas ocasiones no es la correcta. En la elección de dicha operación, intervienen numerosos factores: la comprensión lectora, el desarrollo conceptual que se posea sobre tales operaciones, la familiaridad de los términos del problema entre otros, aspectos que en muchas ocasiones el niño no domina, lo que ocasiona errores en la solución del problema.

Al respecto Quiroz (2006) afirma que las dificultades que los estudiantes presentan en álgebra, no son tanto dificultades en la misma, sino más bien son problemas que se quedan sin corregir en aritmética. Asimismo situaciones aritméticas donde las ideas erróneas o incorrectas de los alumnos influyen en el álgebra son entre otras, las fracciones, el uso de paréntesis, potencias, un dominio del lenguaje aritmético, interpretación correcta de símbolos y letras, notaciones, etc. así alumnos que no dominan estos conceptos desde los primeros años escolares, tienen marcadas dificultades en el aprendizaje del álgebra.

Según Quiroz (2006) señala que, es preciso que los estudiantes deben aprender a resolver operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), así como las tablas de multiplicar que se enseñan, desde tercer grado. Sin embargo, en muchas ocasiones se puede observar que los estudiantes, cometen errores al realizar dichas operaciones, ya sea por descuido o porque definitivamente no saben ejecutar, y se agudiza esta situación en las operaciones de resta y división.

En relación a las tablas de multiplicar también existen dificultades al resolver las ecuaciones, esto se puede observar en estudiantes que al hacer una multiplicación muestran inseguridad, incluso a veces cuentan con los dedos o consultan si la respuesta es correcta.

Por su parte Chavarría (2014) señala que hay estudiantes que no logran resolver un problema, porque no conocen el significado de aumentado; otros, por su parte, no saben si disminuir equivale a restar o dividir dos cantidades. Evidentemente, a un estudiante con estos vacíos conceptuales se le dificultará aún más el resolver problemas algebraicos.

Además de eso retomando a Socas (1997) sostiene que errores de aritmética se trasladan al álgebra; por ejemplo, en una suma de fracciones, el estudiante equivocadamente suma los denominadores, entonces ese error lo lleva también a operaciones algebraicas.

Kieran et al. (2016). Cita que Las relaciones matemáticas, los patrones y las estructuras aritméticas se encuentran en el corazón de la actividad algebraica temprana, con procesos tales como notar, conjeturar, generalizar, representar, justificar y comunicar siendo central para los estudiantes.

Citando la tesis que subyace al trabajo de Carpenter et al. (2003) sostienen que, si los estudiantes entienden su aritmética de tal manera que puedan explicar y justificar las propiedades que están utilizando a medida que realizan los cálculos, han aprendido algunos fundamentos críticos del álgebra.

Por otra parte, Kieran et al. (1989) citando su obra de 1979, menciona que otra convención que los estudiantes parece que no usan en su aritmética escolar elemental es el uso de paréntesis y el orden de las operaciones. Incluso cuando se les introduce al uso de paréntesis en su curso de álgebra, los estudiantes a menudo no consideran que los paréntesis sean necesarios para denotar el orden en que se efectúan las operaciones.

En su investigación Rakhi Banerjee & K. Subramaniam.- (2012) señalan que Los estudiantes no pudieron identificar la igualdad de dos expresiones aritméticas sin computación, calcularon arbitrariamente las expresiones aritméticas en función de los números que aparecían en la expresión y cometieron algunos errores sistemáticos, como el "error de separación": $23 - 6 + 7 = 23 - 13 = 10$ (por ejemplo, Chaiklin & Lesgold, 1984; Kieran, 1992; Linchevski & Herscovics, 1996; Linchevski & Livneh, 1999; Linchevski & Livneh, 2002). Estos estudios indicaron que los estudiantes no entienden el orden de las operaciones y no los utilizan para desarrollar una comprensión de las transformaciones que pueden mantener el valor de una expresión igual (es decir, carecen de un aspecto del sentido de la estructura). Es importante aprender estas ideas en aritmética, ya que las transformaciones en álgebra las utilizan como reglas y propiedades generales. Las expresiones algebraicas comparten similitud estructural con las expresiones aritméticas y, por lo tanto, la aritmética puede servir como una "plantilla" útil sobre la cual se puede construir la comprensión de las transformaciones en álgebra (Linchevski y Livneh, 1999).

Pérez (2004). Afirma que al iniciarse en el estudio del álgebra, los adolescentes traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en la aritmética. Sin embargo el álgebra requiere de un cambio en el pensamiento de las situaciones numéricas concretas proposiciones más generales sobre números y operaciones.

Otra dificultad de aritmética que debemos considerar al momento de iniciar en algebra es la relacionada con las operaciones básicas con punto decimal, al momento de ubicar el punto en las operaciones básicas, principalmente en las multiplicaciones y divisiones donde la asignación del punto requiere una mayor comprensión del tema.

Ávila y García (2008) sostienen que el uso de la operación debe tener sentido. Es importante también que al trabajar un algoritmo el alumno lo comprenda, es decir, que sepa dar respuesta a preguntas como: ¿porqué al sumar y restar decimales se debe alinear el punto?, ¿por qué hay que bajarlo?, ¿por qué al multiplicar se cuentan los decimales en los factores y se suman para determinar cuántos decimales debe tener el resultado?, ¿por qué al dividir se sube el punto?, etcétera.

Además, las autoras agregan que en la adición y sustracción es de suma importancia que los alumnos comprendan que la alineación del punto decimal obedece a una razón matemática: hay que sumar o restar décimos con décimos, centésimos con centésimos, milésimos con milésimos, etcétera, al igual que para sumar naturales se alinean decenas con decenas, centenas con centenas, etcétera.

Pero en el caso de la multiplicación, para los alumnos es más difícil entender que décimas por décimas da centésimas o centésimas por décimas da milésimas.
A la manera de Stevin, se puede comprobar por medio de la representación de los números decimales como fracciones decimales:

$$4.56 \times 2.3 = \frac{456}{100} \times \frac{23}{100} = \frac{10488}{1000} = 10.488$$

La interpretación del signo $\times$ pasa, en algunos casos de las veces al de como ocurre cuando se multiplican fracciones comunes, por ejemplo:

4 x 8.2 puede interpretarse como 4 veces 8.2.

4.5 x 8.2 puede interpretarse como 4 veces y media 8.2.

0.5 x 8.2 puede interpretarse como media vez 8.2 pero se entiende mejor como la mitad de 8.2.

0.1 x 8.2 es difícil que se entienda como una décima vez 8.2 pero sí puede leerse como un décimo de 8.2.

Si se entiende la multiplicación de decimales de esta última forma, entonces puede construirse la idea de que décimos por décimos da centésimos.

Posteriormente las autoras mencionan que al igual que con los números naturales, la división con los decimales es la que presenta mayores dificultades para los alumnos. Se puede considerar que para la división hay dos casos:

1. Cuando el divisor es natural y el dividendo es decimal.
2. Cuando el divisor es decimal y el dividendo puede o no ser decimal.

En ambos casos la división se resuelve como si fueran números naturales y lo que hace diferente uno del otro es el manejo del punto decimal.

En la práctica suele decirse que se recorre el punto a la derecha, pero realmente lo que se hace es multiplicar por cien el dividendo y el divisor, lo que también justifica el hecho de que, si en el dividendo no alcanzan las cifras para recorrer el punto, se agregan ceros.

En relación al tema De Castro (2004).cita lo siguiente “A un alumno se le dijo que 15,24 × 4,5 = 6858, y se le pidió que colocara él la coma decimal. El alumno contestó que la respuesta era 6,858 porque había dos lugares decimales después de la coma decimal en 15,24 y un lugar después de la coma decimal en 4,5 y que juntos hacen tres lugares detrás de la coma decimal en la respuesta. ¿Cómo le responderías?
Algunos maestros, en esta situación, dan la respuesta del niño por correcta.

Por otro lado, es necesario indicar que gran parte de las dificultades, que tienen los niños y los maestros en formación, con los números decimales tienen su origen en el modo en que estos se enseñan en la escuela. Lampert (1989, p. 229), refiriéndose a las dificultades relacionadas con el valor posicional, señala a la “invisibilidad de la cantidad en el sistema de valor posicional” como uno de los problemas que impiden alcanzar una correcta comprensión del modo en que se trabaja con el valor posicional en los algoritmos de multiplicación y división:

Precisamente porque los ceros suelen “asumirse”... los números que aparecen según se realizan las distintas partes del algoritmo no se parecen a los números que corresponden a las cantidades que realmente representan. Para obtener la respuesta final, uno debe seguir cuidadosamente el procedimiento para recuperar el orden de magnitud correcto. (p. 229).

El conocimiento de los números naturales puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje de los decimales. Esto se debe a la consideración de los números decimales como “números naturales con un punto decimal” (p. 92). Además, Brousseau (1997) añade: Esta integración como números naturales obviamente será reforzada por el estudio de las operaciones de forma mecánica, es decir, acciones efectuadas de memoria, sin comprensión, realizadas de la misma forma que con números naturales, únicamente con una pequeña extensión para el punto decimal. (p. 92).

De acuerdo con esto, algunas ideas equivocadas sobre las operaciones –como la creencia de que “la multiplicación siempre aumenta”– reflejan un conocimiento que tiene un cierto dominio de validez –las operaciones con números enteros– pero constituyen un error cuando se intenta extrapolarlas a las operaciones con decimales menores que uno. Esta situación ha sido también descrita por Hiebert y Wearne (1986).

La extensión de los conceptos propios de los números enteros a referentes apropiados para el sistema de las fracciones decimales es un proceso delicado... Algunas características del sistema de los números enteros pueden importarse y conectarse al sistema de símbolos de las fracciones decimales, pero otras no... (p. 204).

Los errores en el ajuste del valor posicional reflejan un conocimiento deficiente de las reglas de cálculo con números decimales. Como indican Hiebert y Wearne (1986) “A pesar de que todas las reglas están motivadas por consideraciones conceptuales, es posible que los alumnos no conecten las reglas con sus justificaciones conceptuales” (p. 202). Esta ausencia de conexiones –falta de comprensión– hace que algunos alumnos “inventen” procedimientos incorrectos para determinar la posición adecuada para el punto decimal.

Ahora bien, debemos considerar el manejo de los números con signo, ya que los alumnos pueden no aceptar estas soluciones en algebra, debido a que pudieron no abordarlas de forma correcta en aritmética, por ejemplo, cuando se abordan restas con sustraendo mayor que el minuendo.

> Cid y Bolea (2010) sostienen que las conclusiones obtenidas en distintas investigaciones sobre los errores que se producen en la gestión del cálculo algebraico. En ellas se ponen de manifiesto las dificultades de los alumnos para aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones y el aumento de los errores de cálculo cuando no es posible interpretar una expresión algebraica en términos de operaciones entre números naturales o racionales positivos (Gallardo, 2002; Vlassis, 2004).
>
> Además, Cid y Bolea (2010) señalan que la epistemología de los números negativos muestra que su razón de ser no proviene de unas supuestas magnitudes opuestas o relativas definidas en el ámbito de la aritmética, sino del ámbito del álgebra, hecho que ya fue reseñado en su momento por Chevallard (1988, 1990). La razón por la cual Diofanto se ve precisado a enunciar la regla de los signos tiene que ver con las peculiaridades del cálculo algebraico. En aritmética toda operación correctamente planteada puede efectuarse, cosa que no sucede en álgebra desde el momento en que intervienen cantidades desconocidas. Esto tiene como consecuencia que los términos de las operaciones no son sólo números, como sucede en aritmética, sino también operaciones indicadas. Por ejemplo, la gestión de la expresión algebraica $(a \pm 5) \pm (b \pm 3)$ exige conocer las propiedades de las diferencias de diferencias. Es decir, el cálculo algebraico obliga a definir y manejar operaciones entre operaciones lo que conduce rápidamente, por razones de economía de justificación, a la gestión de las operaciones entre sumandos y sustraendos. Además, la descontextualización propia de dicho cálculo impone una sintaxis exhaustiva y minuciosa que tenga en cuenta todos los aspectos formales.
>
> El cálculo aritmético es un cálculo entre números, básicamente entre números naturales. En cambio, lo que caracteriza al cálculo algebraico es que la simetrización aditiva y multiplicativa de N permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto, cuyos signos se omiten. En consecuencia los signos “+” y “-“que en aritmética son signos operativos binarios, en álgebra pasan a ser signos predicativos o signos operativos unarios. Y asumir esta diferencia es fundamental para poder entender las reglas de juego del cálculo algebraico y la necesidad del trabajo con sumandos y sustraendos.

Ahora bien es importante conocer las dificultades que presentan los alumnos al resolver problemas aritméticos tales como suma o resta de fracciones, operaciones básicas con punto decimal y al operar números con signo. Que de no ser resueltos de manera oportuna el alumno llevara estas dificultades al iniciarse en álgebra en especial al momento del despeje de la incógnita en las ecuaciones de primer grado.

Dificultades con el uso de las letras

Una de las mayores dificultades para la comprensión del algebra tiene que ver con el uso de las letras ya sea porque carecen de significado para los alumnos o porque no saben cómo trabajar con ellas según las investigaciones de algunos autores como Paralea (1998), *Socas (2007),* Quiroz (2006), De la Rosa (2010), Pérez (2004) y Kieran et al. (1989).

> Paralea (1998) comenta que el nivel de comprensión del Álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras, siendo una de las mayores dificultades con que se encuentran los alumnos, la del uso y significado de las mismas, y de ahí que se piense que las dificultades del Álgebra se deben a la naturaleza abstracta de los elementos utilizados.
>
> Además considera que las respuestas erróneas pueden deberse a que los estudiantes o no asumen el Álgebra como Aritmética generalizada, ya que en algunos casos ignoran las letras o las usan en vez de otros caracteres alfabéticos o valores, o bien las tratan como objetos. Además, se tiene en cuenta que los niños pueden estar operando según sus propios métodos intuitivos y no según los métodos que la enseñanza propone y esto puede contribuir a que se den los errores observados.
>
> También hace referencia a que las letras, en Matemáticas y en especial en Álgebra es muy variado. Se emplean con situaciones muy diferentes: Parámetros “conocidos”, parámetros incógnita, incógnitas algebraicas, incógnitas geométricas, variables, etc…
>
> Duval (2006). Citando a (Didier Jean et al., 1993). Las dificultades de los alumnos para la designación literal de las cantidades desconocidas no son a menudo más que un reflejo. Por

ello es esencial hacer trabajar más a los alumnos sobre esta organización que sobre lo que habitualmente se llama “elección de las incógnitas”.

De modo similar Socas (2007) sostiene que el alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras, ya que éstas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder al Lenguaje numérico, particularizando las expresiones.

Por su parte Duval (2006). Sostiene que la ley básica de funcionamiento semiótico es la siguiente: nada puede funcionar como una representación fuera del sistema semiótico en el cual su significado toma valor en oposición a otra representación dentro del sistema.

En relación a estos datos Quiroz (2006) señala que el nivel de comprensión del álgebra está muy relacionado con la progresión que se siga en la utilización de las letras en los niveles básicos, lo cual por lo general se hace de forma incorrecta o simplemente ni siquiera se tiene conciencia de ello.

En aritmética regularmente las letras, representan un valor fijo y es asignado de forma internacional, como unidades de medidas tanto de peso, longitud y capacidad (g., m., l. Entre muchas otras).

Es muy común que se parta de la tendencia natural que se tiene de designar a la letra con la inicial del nombre o utilizarla como si esta representara un objeto.

Regularmente en aritmética, la letra aparece como una etiqueta que acompaña al número sin embargo su interpretación es errónea, por ejemplo en las expresiones 18 cm., 6 Kg., y 3l., cuya lectura habitual es: dieciocho centímetros, seis kilogramos y tres litros, para el alumno no es fácil distinguir que cm., Kg., y l., se repetirá tantas veces como lo indique el número por lo tanto existe la dificultad intrínseca de entender que las anteriores expresiones representan una multiplicación, es decir son dieciocho veces la medida que representa el centímetro, seis veces la medida establecida como Kg., y 3 veces la unidad de litro.

Expuesto de esta forma sería más fácil para los alumnos que se inician en álgebra, distinguir otra forma de representar la multiplicación en donde el coeficiente multiplica a la letra.

La autora afirma que este simple concepto, al cual poca importancia se le da en la escuela primaria es uno de los errores tan largamente cometidos a través de generación en generación, el cual se debe de corregir entre la población estudiantil y resaltarles que la letra no necesariamente representa la inicial del nombre, ya que está bien pudiera ser representada por cualquier otra, ni tampoco representa un objeto, más bien ésta tiene un valor el cual puede ser fijo o variable.

Adicionalmente señala que para la enseñanza y aprendizaje del álgebra, es fundamental el concepto de variable, sin embargo la mayoría de las veces se utilizan como si pudieran entenderse sin ningún problema.

En primaria se utilizan una gran cantidad de variables, pero los alumnos las desconocen totalmente, debido a que no se les manejan correctamente por parte de sus maestros, estas son las utilizadas en todas las fórmulas aritméticas.

$$A= \frac{bxa}{2}$$

En donde:

A = área

b = base

a = altura

Aquí se puede ver claramente cómo se sigue manejando erróneamente, a la variable con la inicial de su nombre, sin embargo, aquí la letra no tiene un valor fijo Como en el caso de m., l., g., etc., sino como una variable.

El uso del concepto de variable en matemáticas es una práctica común. Parte de las dificultades, proceden de que en la escuela primaria no se desarrolla suficiente el sentido de variabilidad ligado a las letras, Esta mala práctica, ha servido más para oscurecer el significado del término mismo que para mostrar la diferencia real con el sentido que puede tener las letras.

En relación a esta afirmación Tenoch E. Cedillo (2001) señala que la evidencia empírica aportada por su investigación parece indicar que la noción de variable no depende exclusivamente del desarrollo intelectual, sino de los métodos de enseñanza. En su artículo, sostiene que parece que el hecho de que los estudiantes eran libres para elegir sus letras favoritas del teclado de la calculadora para crear un programa los llevó a notar que el valor numérico de una expresión algebraica no depende de las letras que usan.

De la Rosa (2010) retomando a Freudenthal (1983) sostiene que el uso de las letras en los primeros años se usa bajo la forma: $* + 5 = 8$, donde el número que falta debe ser colocado dentro del marco. El mismo marco no tiene valor y simplemente indica que existe un número desconocido. Si la cuestión se plantea así: "Si $* + 5 = 8$, entonces $* = ?$", es conceptualmente diferente a poner el número desconocido dentro del marco. El marco * es fabricado como un indicador de un símbolo matemático con valor numérico que puede combinarse con números y con otros símbolos como el "$+$". En algunas situaciones, los símbolos como el asterisco $(*)$ pueden reemplazarse por letras del alfabeto, tales como n ó x.

Por otra parte Kieran et al. (1989) señala que en la escuela elemental, los niños "resuelven" ecuaciones sencillas como $3 + 0 = 8$ o $3 + n = 8$, que a veces se llaman proposiciones de "sumando faltante".

Pérez (2004). Retomando a (Robles, 1994; (pág. 92). manifiesta que respecto al uso de las literales en la expresión algebraica los símbolos utilizados para representar las cantidades en el álgebra son los números y las letras. Los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas, las letras para representar toda clase de cantidades ya sea conocidas o no, cuando se expresan cantidades conocidas usualmente se utilizan las primeras letras del alfabeto (a, b, c),en tanto las cantidades desconocidas utilizan las últimas letras (x, y, z).

De modo similar De la Rosa (2010) señala que en el método algebraico no solo se tiene que hacer una sustitución de números por letras, sino que también debe realizarse el paso de números a variables y para ello se lleva a cabo un cambio tanto de símbolos como de significado. Muchas de las dificultades son debidas a la significación que poseen las letras.

Ahora bien Kieran et al. (1989). Mencionan que Küchemann encontró que la mayoría de los estudiantes trataban las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables. Por ejemplo, el 55% de los niños de 13 años encuestados afirmaron que $L + M + N = L + P + N$ nunca es verdad.

En resumen, los autores parecen estar de acuerdo en que los alumnos no logran comprender que las letras en algebra se usan para representar cantidades conocidas o no, además no asumen el Álgebra como Aritmética generalizada, y terminan tratando las letras como a objetos, por no tener significado para ellos.

Dificultades con el signo (=)

Otra dificultad muy común tiene que ver con el signo (=), ya que en aritmética tiene un sentido de resultado de alguna operación, sin embargo para algebra, este signo tiene un sentido de igualdad bidireccional, es decir de equivalencia entre cantidades desconocidas y la cantidad conocida.

Paralea (1998) menciona que se tiene conocimiento que el signo igual (=), tiene muchas situaciones en las que las notaciones algebraicas y aritméticas tienen apariencia similar pero significados muy diferentes. Esto hace que sea muy difícil distinguir unas de otras. En el caso del signo igual las repercusiones didácticas tienen mucha importancia. En Aritmética se entiende como una acción física. Es usado para conectar un problema con su resultado numérico; se utiliza casi siempre con carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado numérico: $3 + 5 = *$, donde una parte es conocida y la otra debe ser completada con el resultado de la ejecución ordenada por la primera; con menor frecuencia, se utiliza para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado, $3 \text{ x } 4 = 4 + 4 + 4$, y en algunos casos relaciona la secuencia de pasos intermedios de un proceso que conduce a un mismo resultado, por ejemplo, “$3 \text{ x } (5 - 2) + 4 = 3 \text{ x } 3 + 4 = 13$”, donde cada eslabón de la cadena de igualdades expresa una simplificación o cambio en la forma de su predecesor, es decir, una “reducción”, pero en todos los casos los supuestos que se establecen son siempre verdaderos. Los alumnos trasladan a veces este significado del signo “=” al Álgebra y lo confunden con el “=” de la ecuación, por ejemplo, en “$3\text{x} + 3 = 2\text{x} + 7$”. En lo que se refiere a la maduración del concepto de igualdad, se presenta un cambio conceptual más crítico. A diferencia de la situación con otros valores simbólicos, este cambio claramente implica la extensión de un concepto existente más que la adquisición de uno completamente nuevo, especialmente porque las características de “=” en Aritmética y en ecuaciones algebraicas comparten la misma notación.

Por tanto, para simbolizar en Álgebra es necesario haber realizado un verdadero cambio conceptual en el uso del signo igual, manteniendo al mismo tiempo el que tenía en Aritmética, ya que la notación utilizada en ambos casos es la misma.

En relación al signo igual Quiroz (2006) señala que en aritmética se utiliza casi siempre y de manera equivocada con carácter unidireccional. En álgebra indica restricción y tiene un carácter bidireccional.

Por su parte Duval (2006). Sostiene que para formular una ecuación es necesario según expresó Lacroix (1820) “igualar dos cantidades entre sí”, es decir, establecer una relación de equivalencia entre las cantidades desconocidas designadas y la cantidad conocida.

Al respecto Kieran et al. (1989) sostiene que la secuencia de enseñanza permite a los estudiantes construir significado para expresiones algebraicas tales como $2x + 5x$. Sin embargo, los estudiantes creen que estas expresiones están incompletas en algún sentido. Se sienten obligados a expresarlas como parte de una igualdad, tal como Área $= 2x + 5x$ o como $2x + 5x =$algo. En otro estudio (Kieran 1983) se encontró que algunos de los estudiantes no podían asignar significado alguno a “a” en la expresión $a + 3$ porque la expresión carecía de un signo igual y un miembro de la derecha.

Kieran et al. (2016). Afirma que en aritmética, el signo igual tiende a ser tratado como un símbolo de procedimiento que anuncia la respuesta luego de una serie de operaciones (Kieran 1981; MacGregor y Stacey 1999; Stacey y MacGregor 1997).

Wu (2011) menciona que la investigación educativa en álgebra ve la comprensión defectuosa de los estudiantes del signo igual como una de las principales razones de su fracaso para lograr el álgebra. Se dice que los alumnos consideran el signo igual.
Un anuncio del resultado de una operación aritmética.

Desde una perspectiva matemática, la noción de "igual" es inequívoca y no es difícil de comprender. El concepto de igualdad es una cuestión de definiciones precisas. Si los maestros pueden enfatizar la importancia de las definiciones y definir siempre el signo igual en diferentes contextos con precisión y cuidado, las posibilidades de que los estudiantes abusen del signo igual serían mucho menores. La principal preocupación por cualquier malentendido del signo de igualdad es, por lo tanto, algo que el desarrollo profesional debe abordar.

Para aclarar el tema de que el concepto de igualdad es una cuestión de definición, aquí está la lista de las definiciones más comunes de $A = B$ que surgen en las matemáticas escolares:

• A y B son expresiones en números enteros: se verifica que A y B son el mismo número por el proceso de conteo (por ejemplo, $A = 2 + 5, B = 4 + 3$). Si ya hay números enteros en la recta numérica, entonces $A = B$ significa que A y B son el mismo punto en la recta numérica.

• A y B son expresiones en fracciones: el mismo punto en la recta numérica (por ejemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2 - 1\ \frac{1}{6}$)

• A y B son expresiones en números racionales: el mismo punto en la recta numérica (por ejemplo, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 2 - 2\ \frac{1}{6}$)

Dificultades en la resolución de ecuaciones

En relación a las dificultades y errores que presentan los alumnos al momento de despejar la incógnita en las ecuaciones de primer grado autores como Kieran et al. (1989), Socas (2007) y De la Rosa (2010) en sus investigaciones mencionan lo siguiente:

Kieran et al. (1989) señalan que los estudiantes que comienzan con el álgebra no logran darse cuenta de que el procedimiento es a menudo la respuesta. Por ejemplo, el resultado de sumar 5 y b se enuncia como 5+b. Los estudiantes no sólo deben superar lo que Matz y

Davis han llamado “el dilema "proceso-producto" y adquirir lo que Collis ha llamado “aceptación de la falta de cierre", sino que también tienen que debilitar sus "expectativas aritméticas acerca de las respuestas bien-formadas, es decir, que una respuesta es un número" (Matz 1980, p. 132).

De forma similar Socas (2007) menciona que otro tipo de error cometido está relacionado con la clausura de la operación: los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse (no dé un número) y que quede, por ejemplo, $10 \cdot \mathrm{b} + 3$, ven la necesidad de completarla, de cerrarla y dan como resultado $13 \cdot \mathrm{b}$ (en este caso se trata de un error que se situará tanto en el proceso como en el desarrollo).

Otro error está relacionado al uso incorrecto de la propiedad distributiva se le atribuye el origen a la ausencia del sentido y puede situarse en el ámbito estructural u operacional. Se trata de un error conceptual o de procedimiento en el que los alumnos usan inadecuadamente una propiedad conocida. El primero de ellos se ha producido por la extensión de la propiedad distributiva (que supone dos operaciones) de la multiplicación en relación con la adición, al caso de la multiplicación (una sola operación), así, $5 \cdot (2 \cdot \mathrm{b}) + 3 = 10 + 5 \cdot \mathrm{b} + 3$. Es posible que este tipo de error esté motivado por la forma de enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división).

Además, el autor cita que otro tipo de error que se detecta es la concatenación, esto es, la yuxtaposición de dos o más símbolos.

En su investigación Kieran et al. (1989) sostiene que, en aritmética, la concatenación denota adición (por ejemplo, 37 significa $30 + 7$; $2\frac{1}{4}$ significa $2 + \frac{1}{4}$). Sin embargo, en álgebra la concatenación significa multiplicación (por ejemplo, $4\mathrm{b}$ significa $4\mathrm{x}\mathrm{b}$).

Por otra parte De la Rosa (2010) retomando a De Prada (1994) cita que los errores se observan en las transformaciones de ecuaciones racionales en números enteros (quitan denominadores), otro error que presentan es cuando se encuentra la incógnita en el denominador, un error bastante habitual es la incorrecta transformación de la ecuación con términos fraccionarios en otra equivalente con términos enteros, otro error es despejar la incógnita al revés y asimismo se advierten errores cometidos por la incorrecta utilización de la propiedad distributiva.

Otro error que se comete con frecuencia, aunque es menos habitual que los anteriores es despejar la incógnita al revés, es decir, si $220x = -49 \quad x = 220/49$. Se ha observado que este error se produce más aisladamente cuando el denominador es mayor que el numerador.

De la Rosa (2010) menciona que las ecuaciones donde para determinar el valor de la incógnita, se requieren las operaciones de suma o resta, en los casos cuando la incógnita tiene un coeficiente fraccionario o que se necesita resolver mediante multiplicaciones o divisiones los estudiantes prefieren no responder.

En resumen los autores sostienen que las principales dificultades que se han observado a través de las investigaciones tienen que ver con la "falta de cierre", pues los alumnos esperan siempre un número como resultado, otra dificultad se observa en la concatenación que en aritmética significa adición, mientras que en algebra multiplicación, finalmente la resolución de ecuaciones que incorporan fracciones en el coeficiente de la incógnita y cuando esta se encuentra en el denominador de la fracción.

Plan y Programas de Estudio 2011 de Educación Secundaria.

En este apartado se analiza el Acuerdo 592 SEP por el que se establece la articulación de la educación básica que sustenta el Plan de estudios 2011, en el cual se analiza los Principios pedagógicos, tales como el énfasis en el desarrollo de las competencias, estándares curriculares, los aprendizajes esperados y los campos de formación para la educación básica en matemáticas.

Poner énfasis en el desarrollo de competencias

El logro de los estándares curriculares y los aprendizajes esperados.

La educación básica favorece el desarrollo de competencias, el logro de los estándares curriculares y los aprendizajes esperados, porque:

Una competencia es la capacidad de responder a diferentes situaciones, e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes).

Los Estándares Curriculares son descriptores de logro y definen aquello que los alumnos demostrarán al concluir un periodo escolar; sintetizan los aprendizajes esperados que, en los programas de educación primaria y secundaria, se organizan por asignatura-grado-bloque, y en educación preescolar por campo formativo-aspecto. Los Estándares Curriculares son equiparables con estándares internacionales y, en conjunto con los aprendizajes esperados, constituyen referentes para evaluaciones nacionales e internacionales que sirvan para conocer el avance de los estudiantes durante su tránsito por la educación básica, asumiendo la complejidad y gradualidad de los aprendizajes.

Los aprendizajes esperados son indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida en los programas de estudio, definen lo que se espera de cada alumno en términos de saber, saber hacer y saber ser; además, le dan concreción al trabajo docente al hacer constatable lo que los estudiantes logran, y constituyen un referente para la planificación y la evaluación en el aula.

Los aprendizajes esperados gradúan progresivamente los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que los alumnos deben alcanzar para acceder a conocimientos cada vez más complejos, al logro de los estándares curriculares y al desarrollo de competencias.

Las competencias, los estándares curriculares y los aprendizajes esperados proveerán a los estudiantes de las herramientas necesarias para la aplicación eficiente de todas las formas de conocimientos adquiridos, con la intención de que respondan a las demandas actuales y en diferentes contextos (p. 22).

Evaluar para aprender

También, pone énfasis en la importancia de la evaluación de los aprendizajes mencionando que “es el proceso que permite obtener evidencias, elaborar juicios y brindar retroalimentación sobre los logros de aprendizaje de los alumnos a lo largo de su formación; por tanto, es parte constitutiva de la enseñanza y del aprendizaje”. (p. 23). Es por ello que para evaluar y analizar los resultados para esta investigación se creó un instrumento, que permita evidenciar y detectar las principales dificultades que encuentran los alumnos al despejar la incógnita en las ecuaciones de primer grado y así poder apoyar sobre el tema, con base a los resultados de dicha prueba y esperando que sea de utilidad para el personal docente encargado de trasmitir estos temas.

Estándares curriculares

> Los estándares curriculares se organizan en cuatro periodos escolares de tres grados cada uno. Estos cortes corresponden, de manera aproximada y progresiva, a ciertos rasgos o características clave del desarrollo cognitivo de los estudiantes. Los estándares son el referente para el diseño de instrumentos que, de manera externa, evalúen a los alumnos.

Tabla 11

ESTANDARES CURRICULARES		
PERIODO ESCOLAR	GRADO ESCOLAR DE CORTE	EDAD APROXIMADA
Primero	Tercer grado de preescolar	Entre 5 y 6 años
Segundo	Tercer grado de primaria	Entre 8 y 9 años
Tercero	Sexto grado de primaria	Entre 11 y 12 años
Cuarto	Tercer grado de secundaria	Entre 14 y 15 años

Fuente: SEP**.** (2011). Acuerdo número 592.

> Asimismo, fincan las bases para que los institutos de evaluación de cada entidad federativa diseñen instrumentos que vayan más allá del diagnóstico de grupo y perfeccionen los

> métodos de la evaluación formativa y, eventualmente, de la sumativa, sin dejar de tener en cuenta que este tipo de evaluación debe darse con sistemas tutoriales y de acompañamiento de asesoría académica del docente y del estudiante, que permitan brindar un apoyo diferenciado a quienes presenten rezago en el logro escolar y también para los que se encuentren por arriba del estándar sugerido. El resultado de un sistema como éste es el seguimiento progresivo y longitudinal de los estudiantes.
>
> Los estándares curriculares integran esa dimensión educativa y establecen cierto tipo de ciudadanía global, producto del dominio de herramientas y lenguajes que permitirán al país su ingreso a la economía del conocimiento e integrarse a la comunidad de naciones que fincan su desarrollo y crecimiento en el progreso educativo.

Para efectos de esta investigación se debe considerar el cuarto periodo escolar ya que las ecuaciones de primer grado se abordan en primer grado de secundaria.

La función de los aprendizajes esperados para la consecución de los e estándares curriculares

> Los aprendizajes esperados son el vínculo entre las dos dimensiones del proyecto educativo que la reforma propone: la ciudadanía global comparable y la necesidad vital del ser humano y del ser nacional.
>
> Los aprendizajes esperados vuelven operativa esta visión, ya que permiten comprender la relación multidimensional del mapa curricular y articulan el sentido del logro educativo como expresiones del crecimiento y del desarrollo de la persona, como ente productivo y determinante del sistema social y humano (p. 35).

Campos de formación para la educación básica

> Los campos de formación para la educación básica organizan, regulan y articulan los espacios curriculares; tienen un carácter interactivo entre sí, y son congruentes con las competencias para la vida y los rasgos del perfil de egreso. Además, encauzan la temporalidad del currículo sin romper la naturaleza multidimensional de los propósitos del modelo educativo en su conjunto.

asimismo, en cada campo de formación se expresan los procesos graduales del aprendizaje, de manera continua e integral, desde el primer año de educación básica hasta su conclusión, permitiendo la consecución de los elementos de la ciudadanía global y el carácter nacional y humano de cada estudiante

Los campos de formación para la Educación Básica son:

• Lenguaje y comunicación.
• Pensamiento matemático.
• Exploración y comprensión del mundo natural y social.
• Desarrollo personal y para la convivencia (p. 36).

Campo de formación: pensamiento matemático

El campo pensamiento matemático articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla.

El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas. De ahí que los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización (p. 41).

Matemáticas en primaria y secundaria

Para avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático en la primaria y secundaria, su estudio se orienta a aprender a resolver y formular preguntas en que sea útil la herramienta matemática. Adicionalmente, se enfatiza la necesidad de que los propios alumnos justifiquen la validez de los procedimientos y resultados que encuentren, mediante el uso de este lenguaje.

En la educación primaria, el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición. El nivel de secundaria atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información al análisis de los recursos que se utilizan para presentarla.

A lo largo de la Educación Básica se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica:

- Formular y validar conjeturas.
- Plantearse nuevas preguntas.
- Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.
- Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados.
- Encontrar diferentes formas de resolver los problemas.
- Manejar técnicas de manera eficiente (p. 42).

Estándares curriculares y aprendizajes esperados. PISA. Un referente internacional

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) es un marco de referencia internacional que permite conocer el nivel de desempeño de los alumnos que concluyen la Educación Básica, y evalúa algunos de los conocimientos y habilidades necesarios que deben tener para desempeñarse de forma competente en la sociedad del conocimiento.

La prueba PISA se ha convertido en un consenso mundial educativo que perfila las sociedades contemporáneas a partir de tres campos de desarrollo en la persona: la lectura como habilidad superior, el pensamiento abstracto como base del pensamiento complejo, y el conocimiento objetivo del entorno como sustento de la interpretación de la realidad científica y social.

El conjunto del currículo debe establecer en su visión hacia el 2021 generalizar, como promedio en la sociedad mexicana, las competencias que en la actualidad muestra el nivel 3 de PISA; eliminar la brecha de los niños mexicanos ubicados hoy debajo del nivel 2, y apoyar de manera decidida a quienes están en el nivel 2 y por arriba de éste.

La razón de esta política debe comprenderse a partir de la necesidad de impulsar con determinación, desde el sector educativo, al país hacia la sociedad del conocimiento (p. 77).

Tabla 12

NIVEL 3 DE DESEMPEÑO PISA. MATEMÁTICAS
• Llevar a cabo procedimientos descritos de forma clara, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciadas. • Seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas simples. • Interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información. • Elaborar escritos breves exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

Fuente: SEP**.** (2011). Acuerdo número 592.

Estándares curriculares

Los Estándares Curriculares, como ya se describió, expresan lo que los alumnos deben saber y ser capaces de hacer en los cuatro periodos escolares: al concluir el preescolar; al finalizar el tercer grado de primaria; al término de la primaria (sexto grado), y al concluir la educación secundaria. Cabe mencionar que cada conjunto de estándares, correspondiente a cada periodo, refleja también el currículo de los grados escolares que le preceden (p. 78).

Estándares de matemáticas

Los Estándares Curriculares de Matemáticas presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos. Comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática (p. 79).

Se organizan en:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
2. Forma, espacio y medida.
3. Manejo de la información.
4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas.

Su progresión debe entenderse como:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.
- Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.
- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo (p. 80).

Cuarto periodo escolar de matemáticas

En este periodo, los estándares se organizan en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información.

Al egresar del nivel secundaria, los estudiantes saben efectuar cálculos con expresiones algebraicas cuyos coeficientes sean números racionales; formulan ecuaciones o funciones para resolver problemas; calculan volúmenes y resuelven problemas geométricos con apoyo de las propiedades de las figuras y los cuerpos; calculan porcentajes y probabilidades de eventos simples o compuestos, y comunican e interpretan información mediante el uso de diferentes tipos de gráficas.

En este periodo se sigue promoviendo el desarrollo de actitudes y valores que son parte esencial de la competencia matemática y son el resultado de la metodología didáctica que se propone para estudiar matemáticas.

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Este eje temático se subdivide en cuatro temas:

1.1. Números y sistemas de numeración.
1.2. Problemas aditivos.
1.3. Problemas multiplicativos.
1.4. Patrones y ecuaciones.

Los Estándares Curriculares para este eje temático son los siguientes. El alumno:

1.1.1. Resuelve problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa.

1.1.2. Resuelve problemas que implican calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor.

1.2.1. Resuelve problemas aditivos que implican efectuar cálculos con expresiones algebraicas.
1.3.1. Resuelve problemas multiplicativos con expresiones algebraicas, a excepción de la división entre polinomios.

1.4.1. Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión.

1.4.2. Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas (p. 529).

De la presentación anterior de los programas de estudio se puede observar que en el tema patrones y ecuaciones del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, se ubican las ecuaciones de primer grado las cuales se estudiaran en esta investigación.

Ahora bien es importante mencionar que las competencias que se favorecen, los aprendizajes esperados y los tres ejes temáticos, están organizados en cinco bloques por grado escolar, así las ecuaciones de primer grado están situadas en el bloque 3 de primero de secundaria.

Al revisar el bloque 3, se encontró lo siguientes respecto al tratamiento de las ecuaciones:

En los aprendizajes esperados se menciona que: resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$ donde a, b y c son números naturales, y/o decimales (p. 534).

Sin embargo en el tema patrones y ecuaciones del eje sentido numérico y pensamiento algebraico indica la resolución de problemas que impliquen el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$ utilizando las propiedades de la igualdad con a, b y c números naturales decimales o fraccionarios.

En los párrafos anteriores se aprecia una inconsistencia ya que en los aprendizajes esperados se menciona que a, b y c son números naturales, y/o decimales, sin embargo en el tema patrones y ecuaciones del eje sentido numérico y pensamiento algebraico menciona que a, b y c son números naturales decimales o fraccionarios. Ver bloque 3 anexo 2.

Ahora bien si a, b y c son números naturales entonces $x - a = b$ y $ax - b = c$ no son consideradas en el programa.

Además quedan otras dudas, a continuación se citan:

a) Si a, b y c son números naturales, $x - a = b$ no está incluida en el programa, si se representa como en el programa sería de la forma $x + (-a) = b$, entonces $(-a)$ no se considera número natural.

.

Tomando como ejemplo $x - 4 = 7$ la entendemos como al valor de x se le resta el 4 en cuyo caso en la forma de las ecuaciones que indica el bloque 3 no está explicita la forma $x - a = b$, si la interpreto como $x + (-4) = 7$, entonces $-a$ ya no es natural.

b) No se hace explícito el uso de los números decimales y fraccionario positivos y/o negativos, en aprendizajes esperados se menciona naturales y/o decimales, en el tema; patrones y ecuaciones del eje sentido numérico y pensamiento algebraico, se formula como, números naturales decimales o fraccionarios lo que dificulta tomar las ecuaciones pertinentes.

c) Tampoco hace explicito que al operar las expresiones equivalentes siempre debe aparecer un número natural menos otro número natural menor, por ejemplo $x + 4 = 7$ al resolver la ecuación la expresión equivalente queda como $x = 7 - 4$, pero $x + 9 = 7$ tiene la expresión equivalente $x = 7 - 9$, la dificultad esta en que en la primaria no se considera este tipo de restas y en la secundaria los números con signo aparecen hasta el bloque 4 que es el siguiente.

d) Lo mismo sucede si considero números decimales o fraccionarios y en las tres formas de las ecuaciones que el programa de estudios establece.

Esto debido a que es hasta el bloque 4 de primero de secundaria en el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico en el tema números y sistemas de numeración señala el planteamiento y **resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos** (p. 535). La duda es ¿Estos problemas incluyen ecuaciones de primer grado de las formas $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, usando los números que se indican?

Como se pude observar el uso de números con signo se aborda en el Bloque 4 y las ecuaciones de primer grado en el Bloque 3, y es hasta el segundo grado de la secundaria, Bloque 4 en el eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico, del tema Patrones y ecuaciones en donde se retoma las ecuaciones de primer grado de la forma $ax + b = cx + d$ las actividades se centran en la resolución de problemas que Impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma indicada, con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos (p. 539). Sin embargo para efectos de esta investigación nos quedamos en las ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$.

Libros sugeridos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito (CONALITEG)

Tomando como referencia el análisis del Acuerdo 592 SEP por el que se establece la articulación de la educación básica que sustenta el Plan de estudios 2011, así como las dudas que surgen de la interpretación del tema. Se revisaron las propuestas didácticas de algunos libros sugeridos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG), en los que se estudió el bloque 3, que contiene el tema de patrones y ecuaciones, en particular los ejercicios planteados para que el alumno se comience a involucrar en el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales, decimales o fraccionarios.

A continuación se muestran unas tablas, en las que se presentan los ejercicios que sugieren algunos libros de texto sugeridos por la CONALITEG, de las ecuaciones de primer grado en sus tres distintas formas como lo establece el Plan de estudios SEP 2011, así como observaciones de la interpretación del planteamiento del tema.

Ejercicios que sugiere el libro de texto *"Saberes matemáticas 1"*, ciclo 2015- 2016 de los autores Eduardo mancera y Eduardo Basurto, **editorial Pearson**.

Tabla 13

Ecuaciones de la forma $x + a = b$	Observaciones
$x - \frac{3}{5} = \frac{7}{2}$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$x + 3 = 12$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$x + 1.2 = 13.6$	Al resolver aparece un número decimal

	menos otro número decimal menor.
Ecuaciones de la forma $ax = b$	Observaciones
No aplica	No aplica
Ecuaciones de la forma $ax + b = c$	Observaciones
$2x - 5 = 7$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$12.3\,x\ -\ 3.4\ =\ 1.07$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$3x + 14 = 15.5$	Al resolver aparece un número decimal menos otro número natural menor.
$\frac{2}{3}\,x\ +\ \frac{1}{2}\ =\ \frac{7}{3}$	Al resolver aparece un número fraccionario menos otro número fraccionario menor.

Ejercicios que sugiere el libro de texto *"*Matemáticas por competencias 1*"*, ciclo 2016-2017, de los autores Arraiga Robles, Alan y Marcos Manuel Benites Castañedo, **editorial Pearson**.

Tabla 14

Ecuaciones de la forma $x + a = b$	Observaciones
$4.46 - b = 2.25$	Propone la incógnita con signo negativo
$e - 5.6 = 6.8$	$x\ +\ a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$15.45 - d = 8$	Propone la incógnita con signo negativo
$a + 2.5 =\ 5.7$	Al resolver aparece un número decimal menos otro número decimal menor.
$5.75 + c = 12.82$	Al resolver aparece un número decimal menos otro número decimal menor.
$x + 39.450 = 74800$	Al resolver aparece un número natural menos otro número decimal menor.

Ecuaciones de la forma $ax = b$	Observaciones
No aplica	No aplica
Ecuaciones de la forma $ax + b = c$	Observaciones
$2x - 19.70 = 177.30$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$\frac{x}{2} - 50 = 397.50$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$35x + 48(250) = 23095$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$2x + 5 = 29$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.

Ejercicios que sugiere el libro de texto *"Matemáticas 1"*, ciclo 2016- 2017, de los autores Fortino Escareño y Olga Leticia López, **editorial Trillas**.

Tabla 15

Ecuaciones de la forma $x + a = b$	Observaciones
$x - 936 = 2583$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$x - 2583 = 936$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$x - 7 = 200$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$z - 7.2 = 12.6$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$x + 315 = 500$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$x + 936 = 2583$	
$3x + 2 = 9$	
$y + 3 = 9$	
Ecuaciones de la forma $ax = b$	Observaciones

No aplica	No aplica
Ecuaciones de la forma $ax + b = c$	**Observaciones**
$x/3 + 2 = 9$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$x/2 + 3 = 9$	
$3x + 2 = 11$	

Ejercicios que sugiere el libro de texto *"Matemáticas 1 tercera edición"*, ciclo 2016- 2017 de los autores Rosa María Farfán, Ricardo Cantoral, María Guadalupe Cabañas y Marcela Ferrari, **editorial Mc Graw Hill education**.

Tabla 16

Ecuaciones de la forma $x + a = b$	Observaciones
$x - 3 = 13$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$x - 7 = 5$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$5 + x = 34$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$2.5 + x = 4$	Al resolver aparece un número natural menos otro número decimal menor.
$0.25 + x = 0.5$	Al resolver aparece un número decimal menos otro número decimal menor.
$x + 0.5 = 3$	Al resolver aparece un número natural menos otro número decimal menor.
Ecuaciones de la forma $ax = b$	**Observaciones**
No aplica	No aplica
Ecuaciones de la forma $ax + b = c$	**Observaciones**
$\frac{x}{4} - 10 = 15$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$x + 10 = 25$	Al resolver aparece un número natural menos

$\frac{1}{2}x + 1 = 7$	otro número natural menor.

Ejercicios que sugiere el libro de texto *"1 Contexto matemático secundaria"*, ciclo 2016-2017 de los autores Alejandro Olea Díaz y Alejandro Mendoza Sánchez, **editorial Norma**.

Tabla 17

Ecuaciones de la forma $x + a = b$	Observaciones
$8.2t - 7 = 19$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$a - 36 = 85$	$x + a = b$ se representa de la forma $x - a = b$
$x + 35 = 58$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$n + 12 = 26$	
Ecuaciones de la forma $ax = b$	**Observaciones**
No aplica	No aplica
Ecuaciones de la forma $ax + b = c$	**Observaciones**
$3x - 243 = 732$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$0.3n - 0.4 = 1$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$9x - 15 = 3$	$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$
$5m + 17 = 47$	Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.
$5y + 1 = 2.5$	Al resolver aparece un número decimal menos otro número natural menor.

Ejercicios que sugiere el libro de texto *“Jaque mate matemáticas primer grado secundaria”*, ciclo 2016- 2017 del autor Juan Carlos Xique Anaya, **editorial Larousse**.

Tabla 18

<table>
<tr><th>Ecuaciones de la forma $x + a = b$</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>$x + 840 = 1960$</td><td rowspan="3">Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.</td></tr>
<tr><td>$x + 15 = 50$</td></tr>
<tr><td>$x + 38 = 57$</td></tr>
<tr><th>Ecuaciones de la forma $ax = b$</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>No aplica</td><td>No aplica</td></tr>
<tr><th>Ecuaciones de la forma $ax + b = c$</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>$6x - 7 = 53$</td><td>$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$</td></tr>
<tr><td>$\frac{x}{5} - 10 = 2$</td><td>$ax + b = c$ se representa de la forma $ax - b = c$</td></tr>
<tr><td>$2(x + 3) + 2(4x + 5) = 51$</td><td>$ax + b = c$ se representa con paréntesis, tema que se ve hasta el bloque 4 de segundo de secundaria</td></tr>
<tr><td>$3x + 20 = x + 38$</td><td rowspan="2">Al resolver aparece un número natural menos otro número natural menor.</td></tr>
<tr><td>$3x + 8 = x + 36$</td></tr>
</table>

Como se puede observar en la interpretación del tema es muy común que las ecuaciones de la forma $x + a = b$ se represente como $x - a = b$ y $ax + b = c$ se represente de la forma $ax - b = c$.

Además algunos libros que se revisaron sugeridos por la CONALITEG, cuidan que al resolver las ecuaciones de la forma $x + a = b$ y $ax + b = c$, siempre quede un número natural, decimal o fraccionario menos otro número natural, decimal o fraccionario menor.

Tomando en cuenta este análisis se tomó la decisión de aplicar el instrumento a alumnos finalizando el segundo grado de secundaria en el cual se incluyen solo ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, que en algunos ejercicios involucran operar números con signo.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la manera como se trabajó para alcanzar los objetivos planteados, el diseño del instrumento para identificar los principales errores y dificultades que presentan los alumnos de secundaria al despejar la incógnita en las ecuaciones de primer grado, las características de los reactivos que conforman la prueba final, la aplicación del instrumento piloto y el definitivo, la muestra donde se aplicó y el tratamiento de la información.

En primer lugar se revisó la literatura relacionada con el tema de la investigación, enfocándonos básicamente en la operatividad de las ecuaciones de primer grado, es decir, en el análisis procedimental del inverso aditivo “pasar sumando” y “pasar restando”, inverso multiplicativo “pasar dividiendo” y “pasar multiplicando”, al trabajar con letras diferentes a "x", con expresiones equivalentes y análisis al trabajar con operaciones aritméticas cuando estas involucran números con punto decimal, con fracciones y con signo, tomando como referencia autores tales como Kieran, M. Ruano, M. Socas, Tenoch E. Cedillo, Chavarría Arroyo, Duval Raymond, T. Toward, Pérez Navarrete, Molina M, De la Rosa Téllez, Quiroz Lima, entre otros.

En segundo lugar, se consideró el Acuerdo 592 SEP por el que se establece la articulación de la educación básica que sustenta el Plan de estudios 2011, en el cual se analiza los Principios pedagógicos que sustentan el plan de estudios, tales como el énfasis en el desarrollo de las competencias, estándares curriculares, los aprendizajes esperados y los campos de formación para la educación básica en matemáticas.

Se destaca la importancia del conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas. De ahí que los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización (p. 41)

Además menciona, que el campo de formación: “Pensamiento matemático, articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla.

En relación al eje sentido numérico y pensamiento algebraico en el tema patrones y ecuaciones, señala que “el aprendizaje esperado es que el alumno resuelva problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $\mathrm{x} + \mathrm{a} = \mathrm{b}$; $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$ y $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$, donde a, b y c son números naturales, decimales o fraccionarios” (p. 534).

Tomando como referencia lo expuesto en Plan de estudios SEP 2011 y el Acuerdo 592 que sustenta el Plan de estudios 2011 SEP de la educación básica, se estudió las propuestas didácticas de algunos libros sugeridos por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG), en los que se analizó el bloque 3, que contiene el tema de patrones y ecuaciones, para que el alumno se comience a involucrar en el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales, decimales o fraccionarios, y en general se plantea la siguiente explicación:

Las explicaciones didácticas básicamente se enfocan en ecuaciones de las formas: $x + a = b$ y $ax = b$, centrándose así en este tipo de ecuaciones en lo que respecta a la explicación de las ecuaciones de la forma $ax + b = c$, se pudo observar que es más limitada.

También se considera una explicación de los conceptos, expresiones equivalentes, incógnita y ecuaciones de primer grado, apoyándose en imágenes de balanzas por medio de representaciones de diversos productos con distinta cantidad de peso, dando como resultado una serie de ejemplos, donde se va explicando los valores para la incógnita según sea la solución de cada ecuación, para que el alumno encuentre una mayor apropiación del tema.

En relación al inverso aditivo “pasar sumando” y “pasar restando” se explica con la imagen de la balanza con ejemplos donde señalan que el número según sea el caso debe sumarse o restarse en ambos miembros de la igualdad, para hacer que la incógnita quede aislada, sin embargo, solo centran los ejemplos con números naturales y decimales dándole menor importancia a las fracciones. Explicación solo para ecuaciones de la forma: $x + a = b$

Para el inverso multiplicativo “pasar dividiendo” y “pasar multiplicando”, en general se explica con la imagen de la balanza con ejemplos donde señalan que el número según sea el caso debe multiplicarse o dividirse en ambos miembros de la igualdad, para hacer que la incógnita quede aislada, sin embargo, solo centran los ejemplos con números naturales y decimales dándole menor importancia a las fracciones. Explicación solo para ecuaciones de la forma: $ax = b$ y solo en un libro de los que se revisaron consideran la explicación para ecuaciones de la forma:$ax + b = c$, pero no considera explicación para las ecuaciones que involucran decimales y fracciones, solo número naturales.

Ahora bien se hace énfasis en trabajar con letras diferentes a "$\boldsymbol{x}$", proponiendo diversos ejercicios para su análisis y comprensión, así como ejercicios de repaso que el alumno debe resolver.

En lo que respecta al análisis al trabajar con operaciones aritméticas cuando estas involucran números naturales, decimales y con fracciones, por lo general las ecuaciones con fracciones se consideran solo en los ejercicios de repaso que el alumno debe resolver, sin considerar una explicación para este tipo de operaciones en las propuesta didácticas de los libros revisados.

Tomando en cuenta el Acuerdo 592 que sustenta el Plan de estudios 2011 SEP de la educación básica y el análisis de las propuestas didácticas de algunos libros de la CONALITEG, se elaboró un instrumento con 12 reactivos con base a los ejercicios de repaso que sugieren, con los que se espera indagar sobre los principales errores y dificultades que presentan los alumnos al despejar la incógnita de las ecuaciones de primer grado, además se consideró la literatura revisada del tema, en función de los apartados de esta investigación.

La prueba piloto se llevó a cabo en el Colegio Sara Alarcón en la colonia Granada, delegación Miguel Hidalgo de la Ciudad de México con 21 alumnos que concluyen el primer grado de educación secundaria. En función de los resultados obtenidos se realizaron las modificaciones pertinentes, para elaborar el instrumento definitivo.

Los resultados al realizar el análisis de esta prueba piloto básicamente se centran, en dificultades al operar ecuaciones que contengan suma o resta de fracciones con distinto denominador, también al momento de operar restas con sustraendo mayor que el minuendo, es decir, las dificultades básicamente se centran en lo que respecta a operaciones aritméticas.

Tomando como referencia las conclusiones de esta prueba piloto dio pauta a realizar los ajustes pertinentes de los reactivos y la forma de observación, con la finalidad de abarcar y desarrollar un mejor análisis de resultados para la prueba final. A continuación se muestra la prueba piloto con las modificaciones y justificación por cada reactivo que se cambió.

Nombre: ____ Fecha: ______________

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 3 = 12$------------------------$x + 12 = 3$

Considerando que ningún alumno se equivocó al pasar restando y al realizar este cambio me enfoco a la operación de números con signo.

2. $5.75 + c = 12.8$

3. $8.2t - 7 = 19$

4. $x - 936 = 2583$

5. $-2x = 12$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

7. $x - \frac{3}{5} = -\frac{7}{2}$-------------------$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

Considerando que 8/21 alumnos dejaron sin respuesta y al poner denominador igual solo me enfoco a operación de fracciones que involucren signo.

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ -------------------$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Considerando que 11/21 alumnos dejaron sin respuesta y al poner denominador igual solo me enfoco a la resta y división de fracciones.

9. $-3x + 732 = 243$

10. $\frac{x}{15} = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $\frac{x}{5} + \frac{3}{5} = -9.3$------------------- $x + \frac{3}{5} = -9.3$

Considerando que 18/21 alumnos dejaron sin respuesta y que los alumnos que respondieron no acertaron, al sustituir $\frac{\mathrm{x}}{5}$ por x, solo me enfoco a la suma de negativos entre fracción y numero con punto decimal.

Características de la prueba final.

El instrumento se encuentra estructurado por 12 reactivos de las diferentes formas en que se plantea en el Plan y programas de estudios vigente y con base a los ejercicios que sugieren algunos libros de la CONALITEG. Además considere los resultados obtenidos y las conclusiones realizadas en la prueba piloto, para realizar las modificaciones que considere pertinentes para este proyecto de investigación.

El instrumento trata de indagar sobre los principales errores y dificultades que suelen presentar los alumnos de secundaria al despejar la incógnita de las ecuaciones de primer grado.

Es preciso mencionar que la muestra fue elegida cursando el segundo grado de educación secundaria ya que en los Planes y programas de matemáticas vigente, el tema de ecuaciones de primer grado se ubica en el eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico de primer grado de secundaria, por lo que es loable pensar que en segundo grado ya cuentan con el dominio de estas operaciones.

Ahora bien la prueba se realizó en dos escuelas secundarias oficiales la primera fue la escuela Secundaria Diurna número 44 ubicada en San pedro Xalostoc Ecatepec de Morelos se realizó a dos grupos de segundo grado del turno vespertino con apoyo del titular del grupo quien dio las facilidades para la aplicación, la segunda fue la escuela Secundaria Juan Fernández Albarrán Santa Clara Coatitla, Ecatepec de Morelos también se realizó a dos grupos de segundo grado del turno vespertino con apoyo de una orientadora de la escuela, permitiéndome 50 minutos para la aplicación por grupo.

La prueba se aplicó a 100 alumnos de educación secundaria, que formaban parte de cuatro grupos de segundo grado del turno vespertino. Se llevó a cabo durante el mes de junio del año 2018, cabe señalar que al ser alumnos de segundo grado ya contaban con los conocimientos necesarios del tema presente en el instrumento.

Tratamiento de la información.

Primeramente se analizó el desarrollo de las respuestas para cada reactivo, con la finalidad de ubicar la manera en que los alumnos proceden en la resolución de los ejercicios, en segundo lugar se clasifico el tipo de error que cometen los estudiantes al resolver cada reactivo, los cuales son resultado del incorrecto procesamiento que se detalla en la siguiente tabla en la que se describen las características por reactivo para su análisis, con base a los apartados de esta investigación, considerando las modificaciones que se realizaron de acuerdo a los resultados y conclusiones de la prueba piloto.

Características por reactivo

Tabla 19

	Instrumento de aplicación	
	Ecuación	Caracteristicas
1.	$x + 12 = 3$	Usar el inverso aditivo “pasar restando” Usar el neutro aditivo Operar numeros con signo
2.	$5.75 + c = 12.8$	Trabajar con letras diferentes a "x" Usar el inverso aditivo “pasar restando” Usar el neutro aditivo Restar números decimales
3.	$8.2t - 7 = 19$	Trabajar con letras diferentes a "x" Usar el inverso aditivo “pasar sumando” Usar el neutro aditivo Usar el inverso multiplicativo “pasar dividiendo” Usar el neutro multiplicativo Dividir números decimales
4.	$x - 936 = 2583$	Usar el inverso aditivo “pasar sumando” Usar el neutro aditivo
5.	$-2x = 12$	Usar el inverso multiplicativo “pasar dividiendo”

		Usar el neutro multiplicativo Operar división con signo
6.	$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	Usar el inverso aditivo “pasar restando” Usar el neutro aditivo Restar números decimales con sustraendo mayor que el minuendo Usar el inverso multiplicativo “pasar dividiendo” Usar el neutro multiplicativo Operar división con signo y decimales
7.	$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	Usar el inverso aditivo “pasar sumando” Usar el neutro aditivo Operar fracciones con signo
8.	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	Usar el inverso aditivo “pasar restando” Usar el neutro aditivo Resta de fracciones Usar inverso multiplicativo del coeficiente de x, cuando es fraccionario Usar el neutro multiplicativo Operar fracciones con división
9.	$-3x + 732 = 243$	Usar el inverso aditivo “pasar restando” Usar el neutro aditivo Resta con sustraendo mayor que el minuendo Usar el inverso multiplicativo “pasar dividiendo” Usar el neutro multiplicativo Operar división con signo
10.	$\frac{x}{15} = 60$	Operar con letras cuando se encuentran en el númerador de una fracción Usar inverso multiplicativo cuando x se encuentra en el númerador de una fracción Usar el neutro multiplicativo

11.	$\frac{z}{72.4} = 82.9$	Trabajar con letras diferentes a "x" Operar con letras cuando se encuentran en el númerador de una fracción Usar inverso multiplicativo cuando x se encuentra en el númerador de una fracción Usar el neutro multiplicativo
12.	$X + \frac{3}{5} = -9.3$	Usar el inverso aditivo “pasar restando” Usar el neutro aditivo Restar números con punto decimal con fracción Operar números con signo

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se analizan los resultados de la prueba final (de aquí en adelante instrumento de aplicación), con base a los resultados obtenidos en la prueba piloto, se consideró realizar esta investigación clasificando en cinco apartados en los cuales se pretende captar con mayor precisión la incidencia en cuanto a errores y dificultades que presentan los alumnos al despejar la incógnita de las ecuaciones de primer grado, quedando como a continuación se describe:

- Apartado 1.- inverso aditivo “Pasar sumando”, “Pasar restando”.
- Apartado 2.- inverso multiplicativo “Pasar multiplicando”, “Pasar dividiendo”
- Apartado 3.- Reactivos que requieren trabajar con letras diferentes a “x”.
- Apartado 4.- Reactivos que requieren trabajar con expresiones equivalentes.
- Apartado 5.- análisis procedimental al trabajar con operaciones aritméticas cuando estas involucran números con punto decimal, con fracciones y con signo.

Para cada apartado se muestran tres tablas que sirven de guía para el análisis de los resultados obtenidos, así como, una conclusión con base a las dificultades más comunes.

En la primera tabla se analizan los reactivos que requieren el procedimiento del inverso aditivo “Pasar sumando”, “Pasar restando”; inverso multiplicativo “Pasar multiplicando”, “Pasar dividiendo”; Reactivos que requieren trabajar con letras diferentes a “x”; Reactivos que requieren trabajar con expresiones equivalentes y análisis procedimental al trabajar con operaciones aritméticas, según sea el caso.

La siguiente tabla muestra la razón de las dificultades que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento del apartado.

La tercera tabla muestra algunos ejemplos de las dificultades más comunes por reactivo que requiere el procedimiento del apartado realizados por algunos alumnos. Ver algunos Instrumentos de aplicación anexo 3.

Resultados del instrumento

En las siguientes graficas se muestran los aciertos por alumno, así como, aciertos por reactivo con la finalidad de saber en qué reactivos se presenta mayor dificultad.

Tabla 20

Tabla 21

Las gráficas de las tablas anteriores muestran que los reactivos en los que acertaron la mayoría de los alumnos es el 1 con 94 aciertos, este reactivo se caracteriza por realizar el procedimiento de “Pasar restando”, sin embargo en el reactivo 6 nadie contesto correctamente, cabe mencionar que este reactivo se caracteriza por restar números decimales con sustraendo mayor que el minuendo y operar división con signo y decimales.

Apartado 1.- “Pasar sumando” y “Pasar restando” análisis procedimental del inverso aditivo.

“Pasar sumando”

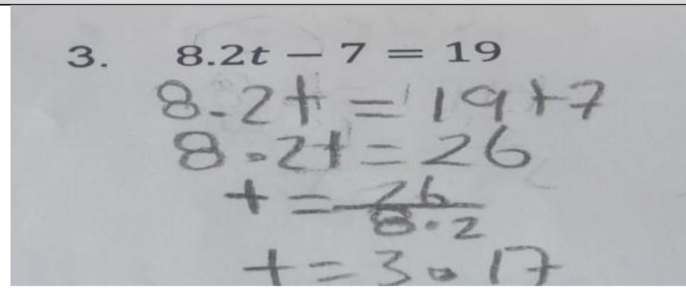
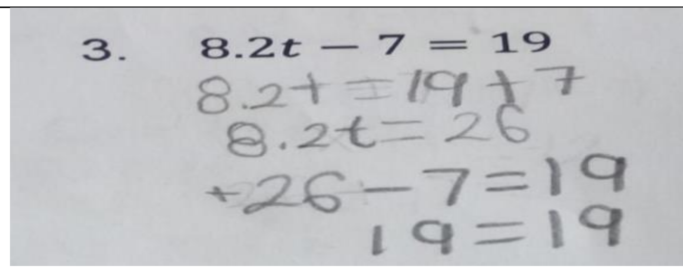
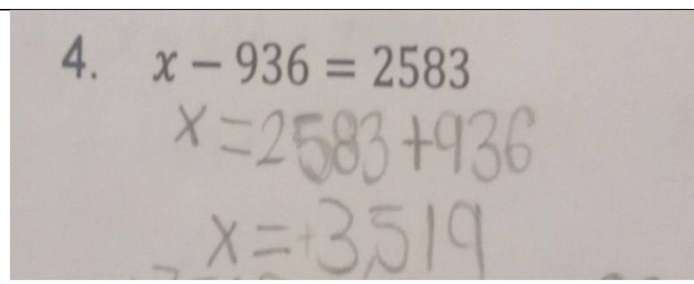
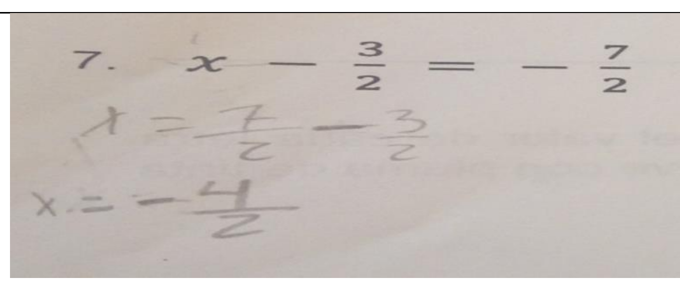
En la siguiente tabla se analizan los reactivos que requieren el procedimiento “Pasar sumando”, es preciso señalar que no se considera alguna otra característica procedimental del reactivo, a continuación se enlista las características por columna:

Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar sumando”.

Tercera columna: Ejemplos realizados por algunos alumnos del procedimiento esperado al “Pasar sumando” en cada reactivo.

Tabla 22

Número de reactivo	Reactivos en donde se requiere “Pasar sumando”	Procedimiento esperado al “Pasar sumando”
3	$8.2t - 7 = 19$	
		
4	$x - 936 = 2583$	
7	$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento de “Pasar sumando”, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar sumando”.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento y no generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al “Pasar sumando”.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al “Pasar sumando”.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar sumando”.

Tabla 23

Reactivo	**Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno**	**Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al “Pasar sumando”**	**Razón de Alumnos que encuentran dificultad al “Pasar sumando”**	**Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar sumando”**
$8.2\mathrm{t} - 7 = 19$	31/100	69/100	17/69	52/100
$x - 936 = 2583$	8/100	92/100	12/92	80/100
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	46/100	54/100	15/54	39/100
TOTAL	85/300	215/300	44/215	171/300

La tabla nos muestra que en el reactivo $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$, 46 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por implicar una suma de fracciones al momento de pasar el termino independiente al lado derecho, en contraste con el reactivo $x - 936 = 2583$, el cual solo 8 de 100 alumnos deja sin respuesta, este reactivo se caracteriza por contener suma de números enteros al momento de pasar al lado derecho el termino independiente.

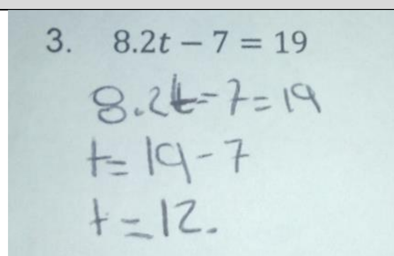
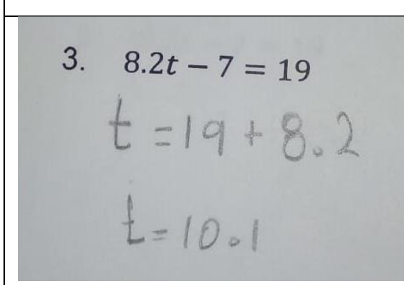
En la tabla siguiente, se muestran algunos ejemplos de las dificultades más comunes por reactivo que requiere el procedimiento de “Pasar sumando” realizados por algunos alumnos, a continuación se enlista las características por columna:

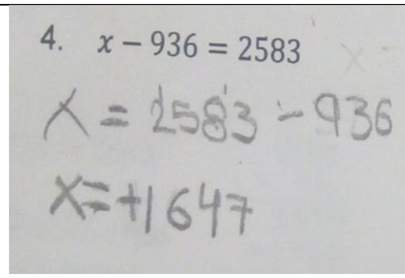
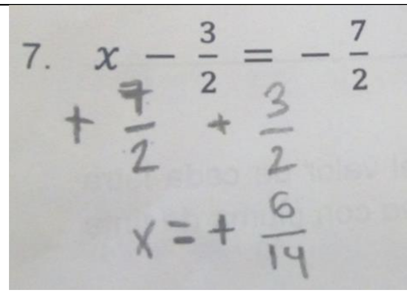
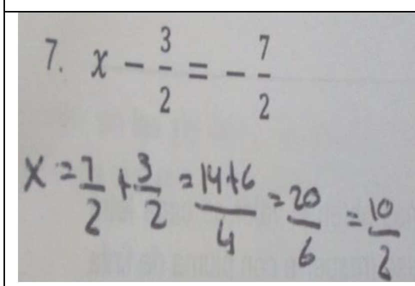
Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar sumando”.

Segunda columna: Ejemplos de algunas dificultades que encuentran los alumnos en el procedimiento “Pasar sumando” de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 24

Reactivo	Dificultad al “Pasar sumando”	Proporción de dificultad
$8.2t - 7 = 19$		7/69 Al pasar no realiza el cambio de signo al -7
		4/69 El 8.2 del coeficiente de t es el que pasan del otro lado sumando

$x - 936 = 2583$		9/92 Al pasar no realiza el cambio de signo al -936
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$		7/54 Al pasar realiza el cambio de signo al $-\frac{3}{2}$, pero también al $-\frac{7}{2}$, dejando ambas fracciones con signo positivo y en consecuencia una suma de fracciones
		3/54 Al pasar realiza el cambio de signo al $-\frac{3}{2}$, pero también al $-\frac{7}{2}$, dejando ambas fracciones con signo positivo y en consecuencia una suma de fracciones

Conclusión del análisis del inverso aditivo “Pasar sumando”.

De los 44 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al “Pasar sumando” de las 215 respuestas que realizaron algún procedimiento en los tres reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 18, consistentes en que omiten el cambio de signo al pasar al lado derecho el término independiente.

“Pasar restando”

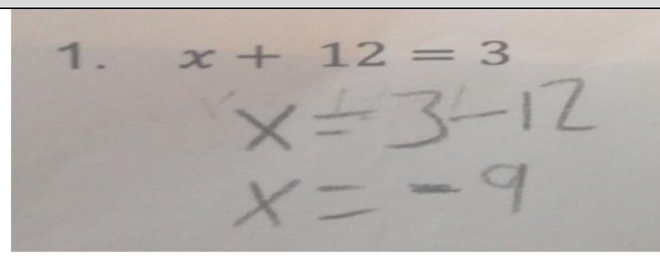
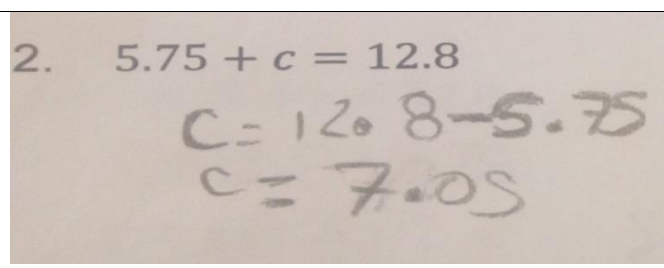
En la siguiente tabla se analizan los reactivos que requieren el procedimiento “Pasar restando”, es preciso señalar que no se considera alguna otra característica procedimental del reactivo, a continuación se enlista las características por columna:

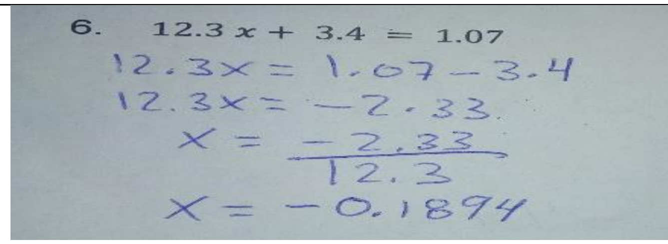
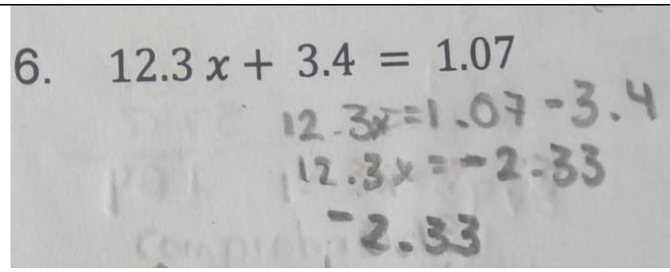
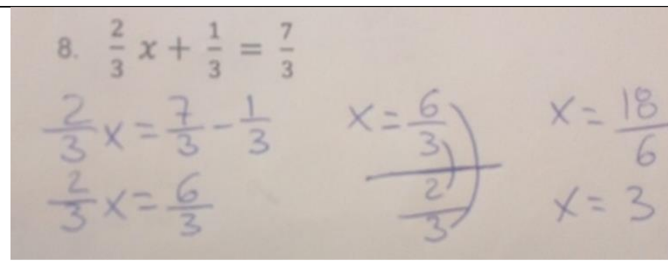
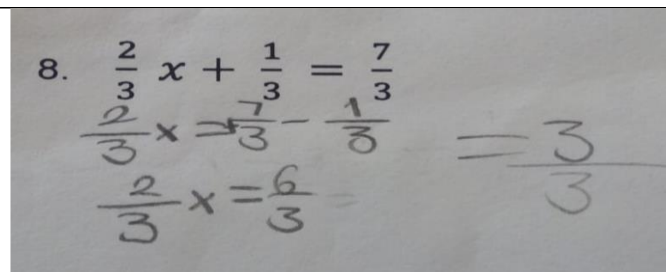
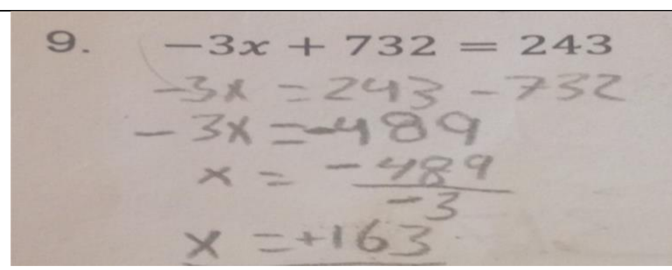
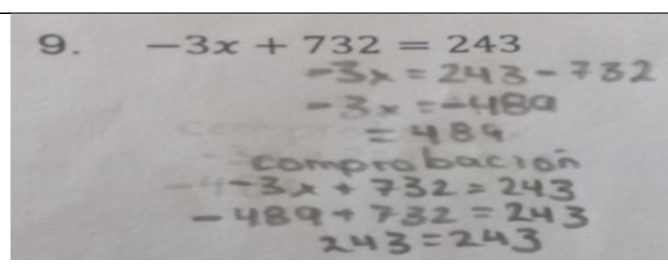
Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

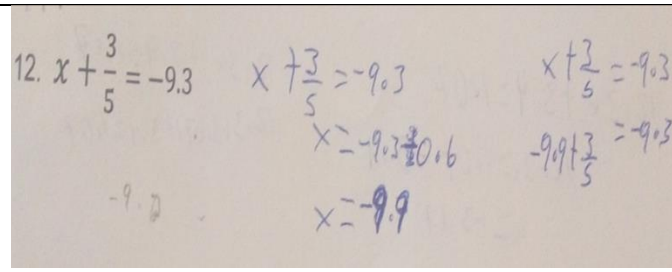
Segunda columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar restando”.

Tercera columna: Ejemplos realizados por algunos alumnos del procedimiento esperado al “Pasar restando” en cada reactivo.

Tabla 25

Número de reactivo	**Ecuaciones que al despejar la incógnita requieren “Pasar” restando**	**Procedimiento esperado al “Pasar restando”**
1	$x + 12 = 3$	
2	$5.75 + c = 12.8$	

6	$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	
		
8	$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	
		
9	$-3x + 732 = 243$	
		

12	$x+\frac{3}{5}=-9.3$	

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento de “Pasar restando”, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar restando”.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al “Pasar restando”.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al “Pasar restando”.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar restando”.

Tabla 26

Reactivo	**Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno**	**Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al “Pasar restando”**	**Razón de Alumnos que encuentran dificultad al “Pasar restando”**	**Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar restando”**
$x\ +\ 12=3$	1/100	99/100	0/99	99/100
$5.75+c=12.8$	8/100	92/100	18/92	74/100

$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	35/100	65/100	13/65	52/100
$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	55/100	45/100	18/45	27/100
$-3x + 732 = 243$	23/100	77/100	21/77	56/100
$x + \frac{3}{5} = -9.3$	65/100	35/100	10/35	25/100
TOTAL	187/600	413/600	80/413	333/600

La tabla nos muestra que en el reactivo $x + \frac{3}{5} = -9.3$, 65 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por implicar una resta de números que involucran decimales y fracción al momento de pasar el termino independiente al lado derecho, en contraste con el reactivo $x + 12 = 3$, el cual solo 1 de 100 alumnos deja sin respuesta, este reactivo se caracteriza por contener resta de números enteros con sustraendo mayor que el minuendo al momento de pasar al lado derecho el termino independiente.

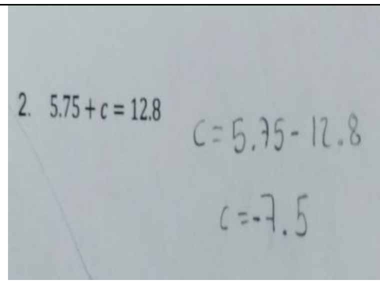
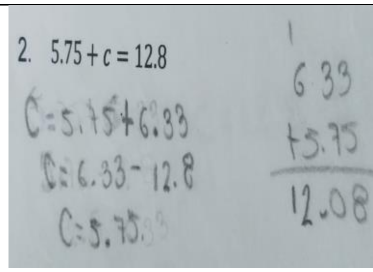
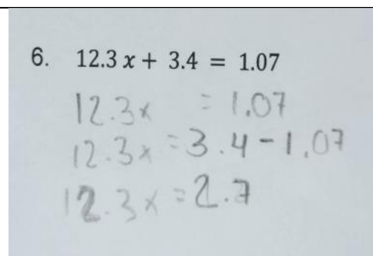
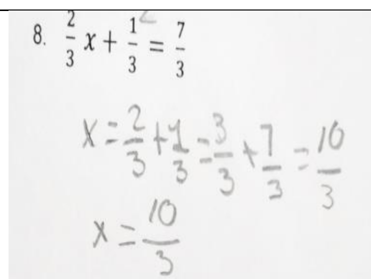
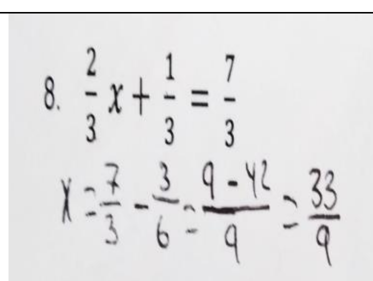
En la tabla siguiente, se muestran algunos ejemplos de las dificultades más comunes por reactivo que requiere el procedimiento de “Pasar restando” realizados por algunos alumnos, a continuación se enlista las características por columna:

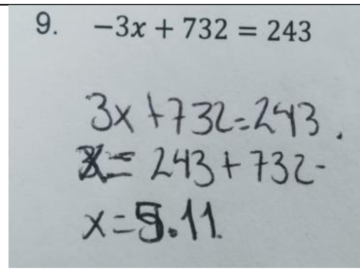
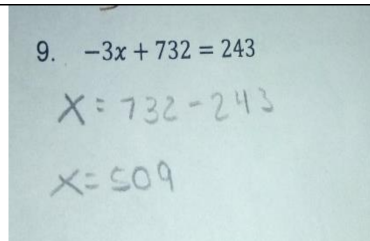
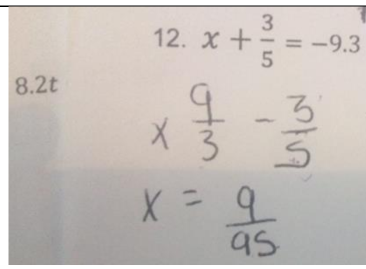
Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar restando”.

Segunda columna: Ejemplos de algunas dificultades que encuentran los alumnos en el procedimiento “Pasar restando” de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 27

Reactivo	Dificultad al “Pasar restando”	Proporción de dificultad
$x + 12 = 3$	No aplica	0/99
$5.75 + c = 12.8$		7/92 Al despejar la incógnita y pasar el 5.75 al lado derecho le cambian el signo pero al 12.8
		4/92 Al despejar la incógnita y al 5.75 le suman el 6.33, procedimiento similar a la comprobación
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$		10/65 Al despejar la incógnita y pasar el 3.4 al lado derecho le cambian el signo pero al 1.07
$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$		4/84 Suma los términos del lado izquierdo y después pasa el resultado sumando al lado derecho
		5/84 Suma los términos del lado izquierdo con un procedimiento incorrecto y después pasa el resultado restando al lado derecho

$-3x + 732 = 243$		3/77 Al despejar la incógnita el 732 lo pasan al lado derecho sumando
		4/77 Al despejar la incógnita y pasar el 732 al lado derecho le cambian el signo pero al 243
$x + \frac{3}{5} = -9.3$		7/35 Dificultad al restar números con punto decimal, con fracción

Conclusión del análisis del inverso aditivo “Pasar restando”.

De los 80 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al “Pasar restando” de las 413 respuestas que realizaron algún procedimiento en los seis reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 26, consistentes en que al pasar el termino independiente al lado derecho le cambian el signo pero al termino del lado derecho.

Apartado 2.- “Pasar dividiendo” y “pasar multiplicando” análisis procedimental del inverso multiplicativo.

“Pasar dividiendo”

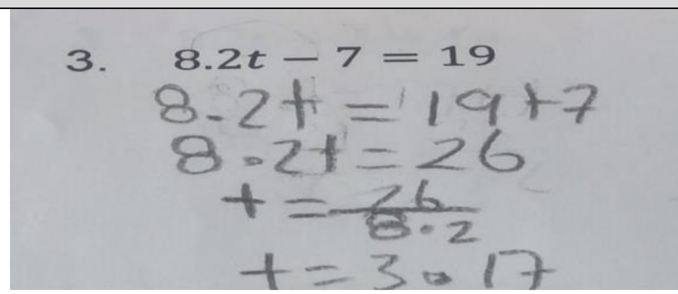
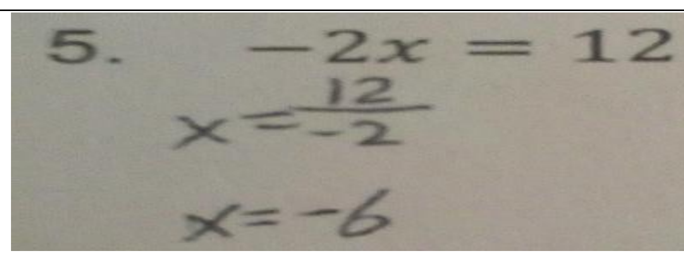
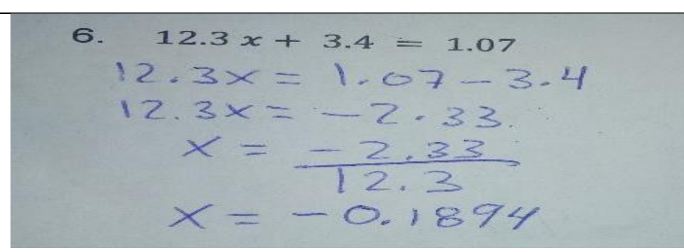
En la siguiente tabla se analizan los reactivos que requieren el procedimiento “Pasar dividiendo”, es preciso señalar que no se considera alguna otra característica procedimental del reactivo, a continuación se enlista las características por columna:

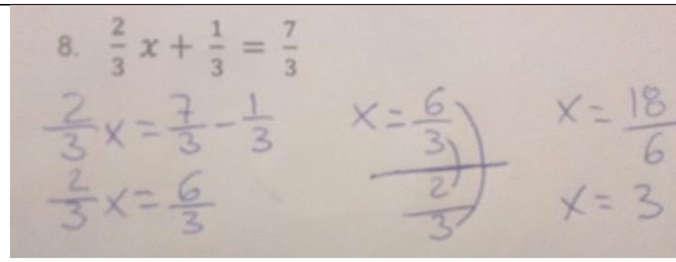
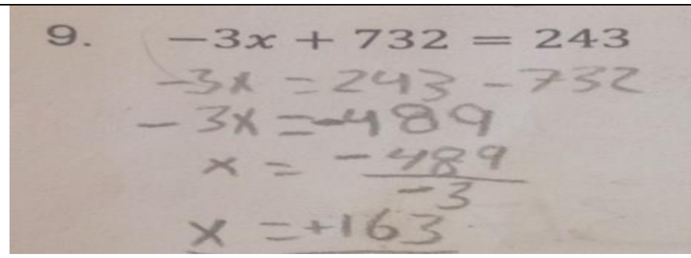
Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar dividiendo”.

Tercera columna: Ejemplos realizados por algunos alumnos del procedimiento esperado al “Pasar dividiendo” en cada reactivo.

Tabla 28

Número de reactivo	Ecuaciones que al despejar la incógnita requieren “Pasar” dividiendo	Procedimiento esperado al “Pasar dividiendo”
3	$8.2t - 7 = 19$	
5	$-2x = 12$	
6	$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	

8	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	
9	$-3x + 732 = 243$	

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento de “Pasar dividiendo”, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar dividiendo”.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al “Pasar dividiendo”.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al “Pasar dividiendo”.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar dividiendo”.

Tabla 29

Reactivo	Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno	Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al “Pasar dividiendo”	Razón de Alumnos que encuentran dificultad al “Pasar dividiendo”	Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar dividiendo”
$8.2t-7=19$	31/100	69/100	18/69	51/100
$-2x=12$	25/100	75/100	40/75	35/100
$12.3\,x+\ 3.4\ =\ 1.07$	35/100	65/100	47/65	18/100
$\frac{2}{3}\,x\ +\frac{1}{3}\ =\ \frac{7}{3}$	55/100	45/100	30/45	15/100
$-3x+732=243$	23/100	77/100	47/77	30/100
TOTAL	169/500	331/500	182/331	149/500

La tabla nos muestra que en el reactivo $\frac{2}{3}\,x\ +\ \frac{1}{3}\ =\ \frac{7}{3}$, 55 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por implicar una resta de fracciones al momento de pasar el termino independiente al lado derecho seguido de una división de fracciones, en contraste con el reactivo $-3x+732=243$, el cual solo 23 de 100 alumnos deja sin respuesta, este reactivo se caracteriza por contener resta de minuendo mayor que el sustraendo al momento de pasar al lado derecho seguido de una división que involucra número con signo.

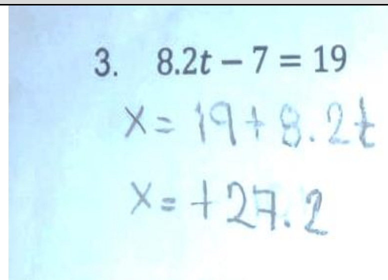
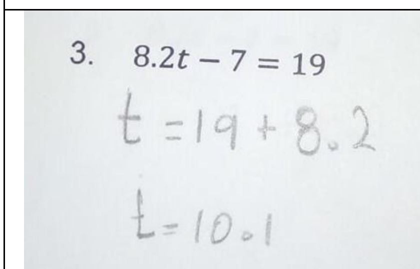
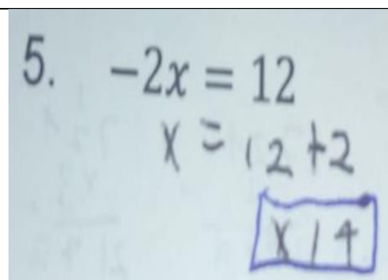
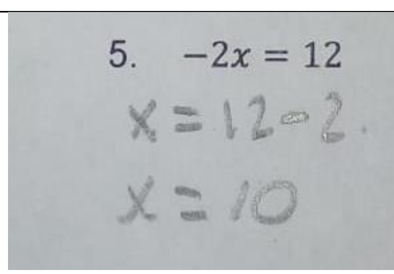
En la tabla siguiente, se muestran algunos ejemplos de las dificultades más comunes por reactivo que requiere el procedimiento de “Pasar dividiendo” realizados por algunos alumnos, a continuación se enlista las características por columna:

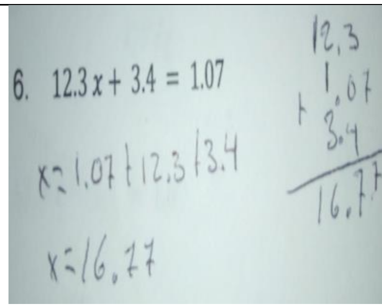
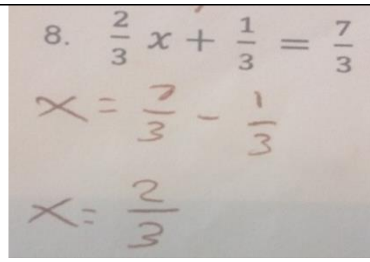
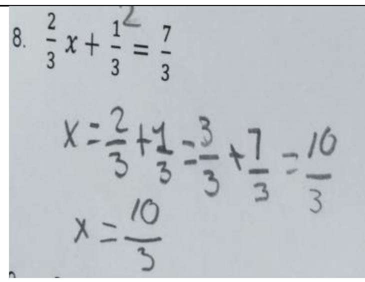
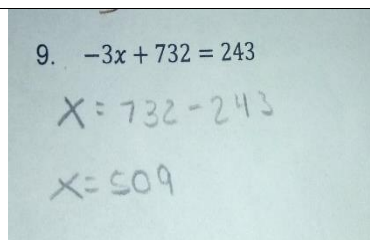
Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar dividiendo”.

Segunda columna: Ejemplos de algunas dificultades que encuentran los alumnos en el procedimiento “Pasar dividiendo” de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 30

<table>
<tr><th>Reactivo</th><th>Dificultad al “Pasar dividiendo”</th><th>Proporción de dificultad</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$8.2t - 7 = 19$</td><td>
</td><td>10/69
El $8.2t$, lo pasan sumando</td></tr>
<tr><td>
</td><td>4/69
El 8.2, lo pasan sumando</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$-2x = 12$</td><td>
</td><td>28/75
Al -2 del coeficiente de x, lo pasa sumando</td></tr>
<tr><td>
</td><td>6/75
Al -2 del coeficiente de x, lo pasa restando</td></tr>
</table>

$12.3\,x +\ 3.4\ =\ 1.07$		13/65 El 12.3 del coeficiente de x, lo pasa sumando
$\frac{2}{3}\,x\ +\ \frac{1}{3}\ =\ \frac{7}{3}$		8/45 El $\frac{2}{3}$ del coeficiente de x, lo pasan al lado derecho restando
		6/45 El $\frac{2}{3}$ del coeficiente de x, lo pasan al lado derecho sumando
$-3x + 732 = 243$		14/50 Al realizar la expresión equivalente omite al 3 del coeficiente de x

Conclusión del análisis del inverso multiplicativo "Pasar dividiendo".

De los 182 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al "Pasar dividiendo" de las 331 respuestas que realizaron algún procedimiento en los cinco reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 65, consistentes en que al coeficiente de la incógnita lo pasan de lado derecho sumando.

“Pasar multiplicando”

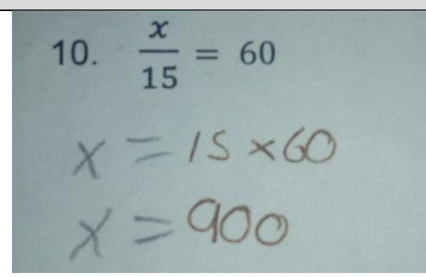
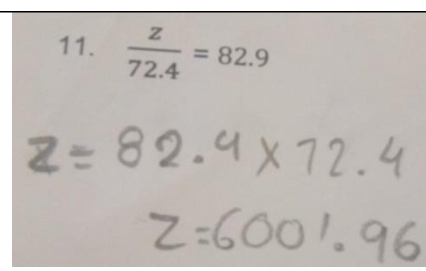
En la siguiente tabla se analizan los reactivos que requieren el procedimiento “Pasar multiplicando”, es preciso señalar que no se considera alguna otra característica procedimental del reactivo, a continuación, se enlista las características por columna:

Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar multiplicando”.

Tercera columna: Ejemplos realizados por algunos alumnos del procedimiento esperado al “Pasar multiplicando” en cada reactivo.

Tabla 31

Número de reactivo	**Ecuaciones que al despejar la incógnita requieren “Pasar” multiplicando**	**Procedimiento esperado al “Pasar multiplicando”**
10	$\frac{x}{15} = 60$	
11	$\frac{z}{72.4} = 82.9$	

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento de “Pasar multiplicando”, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar multiplicando”.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al “Pasar multiplicando”.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al “Pasar multiplicando”.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar multiplicando”.

Tabla 32

Reactivo	**Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno**	**Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al “Pasar multiplicando”**	**Razón de Alumnos que encuentran dificultad al “Pasar multiplicando”**	**Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento “Pasar multiplicando”**
$\frac{x}{15} = 60$	34/100	66/100	11/66	55/100
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	49/100	51/100	13/51	38/100
TOTAL	83/200	117/200	24/117	93/200

La tabla nos muestra que en el reactivo $\frac{z}{72.4} = 82.9$, 49 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por implicar una multiplicación de números con punto decimal al momento de pasar el termino independiente al lado derecho.

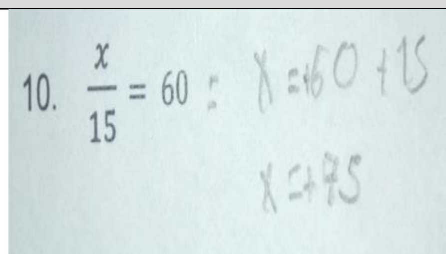
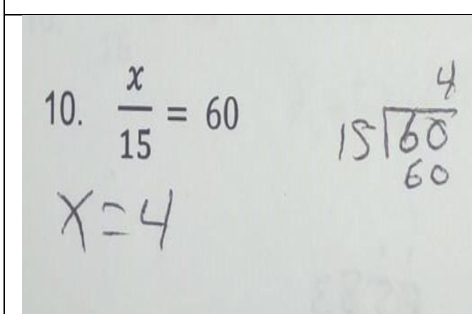
En la tabla siguiente, se muestran algunos ejemplos de las dificultades más comunes por reactivo que requiere el procedimiento de “Pasar multiplicando” realizados por algunos alumnos, a continuación, se enlista las características por columna:

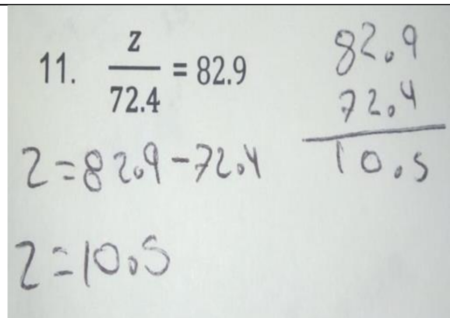
Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento “Pasar multiplicando”.

Segunda columna: Ejemplos de algunas dificultades que encuentran los alumnos en el procedimiento “Pasar multiplicando” de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 33

Reactivo	**Dificultad al “Pasar multiplicando”**	**Proporción de dificultad**
$\frac{x}{15} = 60$		5/66 Al 15 que esta dividiendo a "x", lo pasan sumando
		4/66 Al 60 lo dividen entre el15 que esta dividiendo a "x"

$\frac{z}{72.4} = 82.9$		4/51 El 72.4 que está dividiendo a z, lo pasan restando al otro lado

Conclusión del análisis del inverso multiplicativo "Pasar multiplicando".

De los 24 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al "Pasar multiplicando" de las 117 respuestas que realizaron algún procedimiento en los dos reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 9, consistentes en que al número que está dividiendo a la incógnita lo pasan de lado derecho sumando o restando.

Apartado 3.- Análisis procedimental con las expresiones equivalentes.

En la siguiente tabla se presentan todos los reactivos ya que todos requieren trabajar con expresiones equivalentes, es preciso señalar que no se considera alguna otra característica procedimental del reactivo, a continuación se enlista las características por columna:

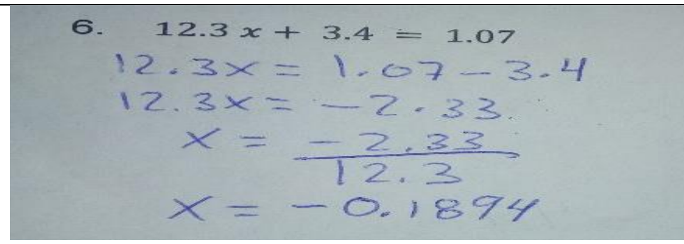
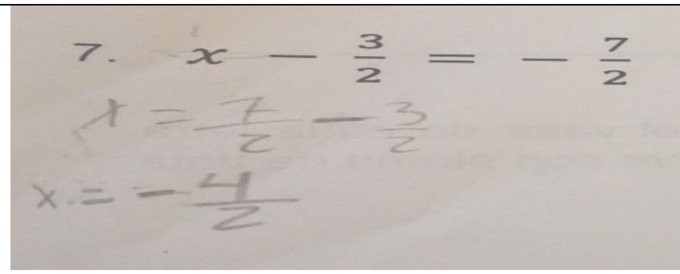
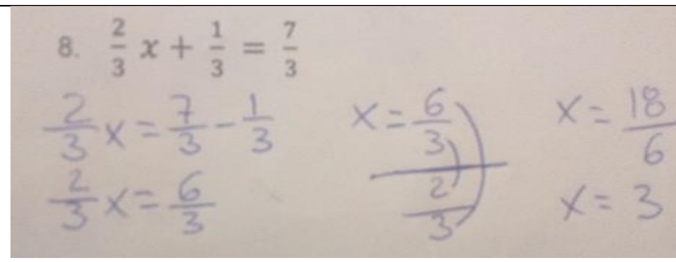
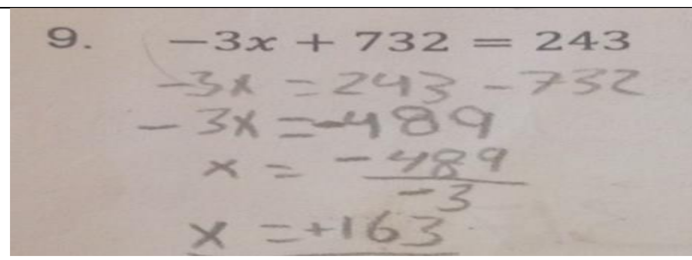
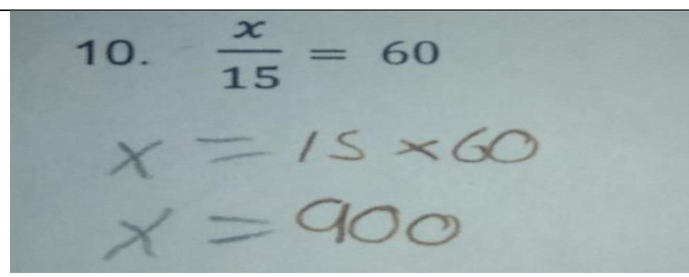
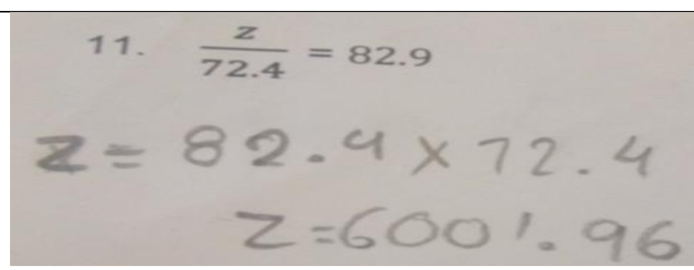
Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

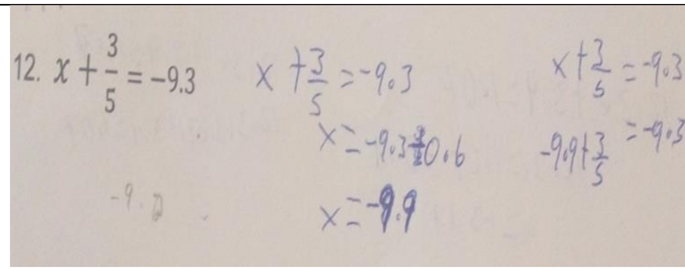
Segunda columna: Reactivo

Tercera columna: Ejemplos realizados por algunos alumnos del procedimiento esperado al trabajar con expresiones equivalentes.

Tabla 34

Número de reactivo	**Ecuación**	**Procedimiento esperado al trabajar con expresiones equivalentes**
1	$x + 12 = 3$	1. $x + 12 = 3$ $x = 3 - 12$ $x = -9$
2	$5.75 + c = 12.8$	2. $5.75 + c = 12.8$ $c = 12.8 - 5.75$ $c = 7.05$
3	$8.2t - 7 = 19$	3. $8.2t - 7 = 19$ $8.2t = 19 + 7$ $8.2t = 26$ $t = \frac{26}{8.2}$ $t = 3.17$
4	$x - 936 = 2583$	4. $x - 936 = 2583$ $x = 2583 + 936$ $x = 3{,}519$
5	$-2x = 12$	5. $-2x = 12$ $x = \frac{12}{-2}$ $x = -6$

6	$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	 6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$ $12.3x = 1.07 - 3.4$ $12.3x = -2.33$ $x = \frac{-2.33}{12.3}$ $x = -0.1894$
7	$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	 7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ $x = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}$ $x = -\frac{4}{2}$
8	$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	 8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ $\frac{2}{3}x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}x = \frac{6}{3}$ $x = \frac{\frac{6}{3}}{\frac{2}{3}}$ $x = \frac{18}{6}$ $x = 3$
9	$-3x + 732 = 243$	 9. $-3x + 732 = 243$ $-3x = 243 - 732$ $-3x = -489$ $x = \frac{-489}{-3}$ $x = +163$
10	$\frac{x}{15} = 60$	 10. $\frac{x}{15} = 60$ $x = 15 \times 60$ $x = 900$
11	$\frac{z}{72.4} = 82.9$	 11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$ $z = 82.4 \times 72.4$ $z = 6001.96$

12	$x+\frac{3}{5}=-9.3$	

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento de trabajar con expresiones equivalentes, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para este ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere trabajar con expresiones equivalentes.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al trabajar con expresiones equivalentes.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al trabajar con expresiones equivalentes.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento trabajar con expresiones equivalentes.

Tabla 35

Reactivo	Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno	Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al trabajar con expresiones equivalentes	Razón de Alumnos que encuentran dificultad al trabajar expresiones equivalentes	Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento trabajar con expresiones equivalentes
$\mathrm{x} + 12 = 3$	1/100	99/100	0/99	99/100
$5.75 + \mathrm{c} = 12.8$	8/100	92/100	18/92	74/100
$8.2t - 7 = 19$	31/100	69/100	35/69	34/100
$x - 936 = 2583$	8/100	92/100	12/92	80/100
$-2x = 12$	25/100	75/100	40/75	35/100
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	35/100	65/100	60/65	5/100
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	46/100	54/100	15/54	39/100
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	55/100	45/100	43/45	2/100
$-3x + 732 = 243$	23/100	77/100	68/77	9/100
$\frac{x}{15} = 60$	34/100	66/100	11/66	55/100
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	49/100	51/100	13/51	38/100
$x + \frac{3}{5} = -9.3$	65/100	35/100	10/35	25/100
TOTAL	380/1200	820/1200	325/820	495/1200

La tabla nos muestra que en el reactivo $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, 43 de 45 alumnos que realizaron algún procedimiento encuentran dificultad al trabajar con expresiones equivalentes, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por trabajar con resta de fracciones con denominador igual seguido de una división con denominador igual al momento de pasar el coeficiente de “x” al lado derecho, en contraste con el reactivo $\mathrm{x} +$

$12 = 3$, el cual 0 de 99 alumnos que realizaron algún procedimiento encuentran dificultad al trabajar con expresiones equivalentes, este reactivo se caracteriza por trabajar con resta con minuendo mayor que el sustraendo al momento de pasar el termino independiente al lado derecho.

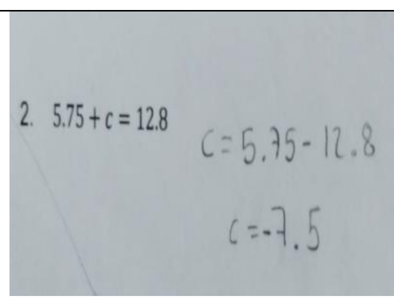
En la tabla siguiente, se muestran los ejemplos de las dificultades por reactivo que requiere trabajar con expresiones equivalentes realizados por algunos alumnos, a continuación, se enlista las características por columna:

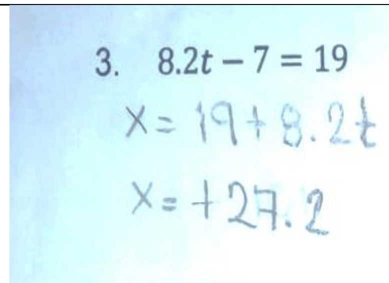
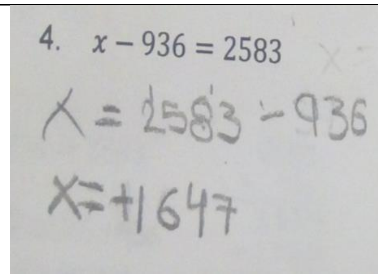
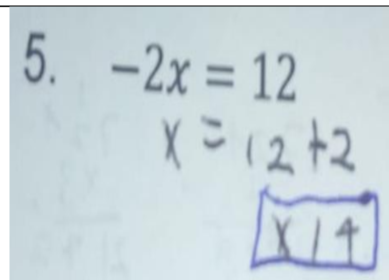
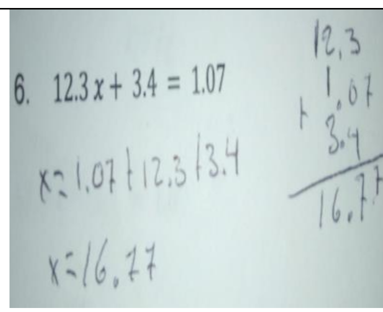
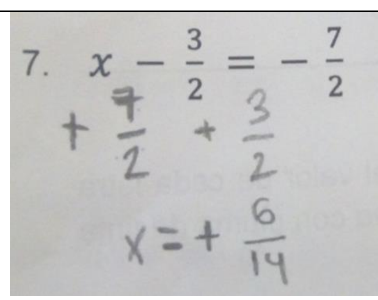
Primera columna: Reactivo del instrumento de aplicación.

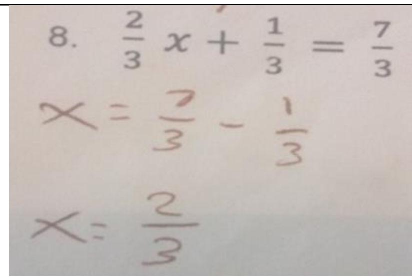
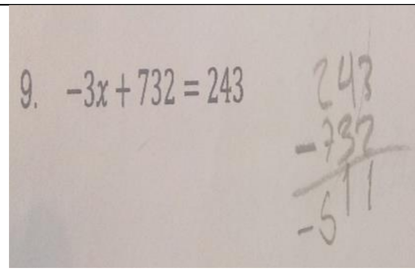
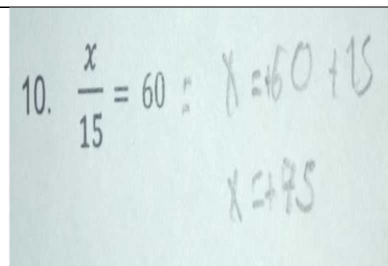
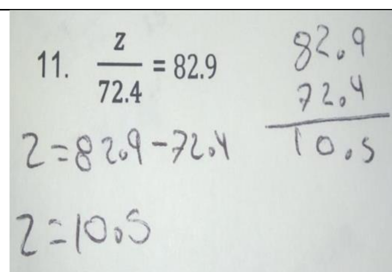
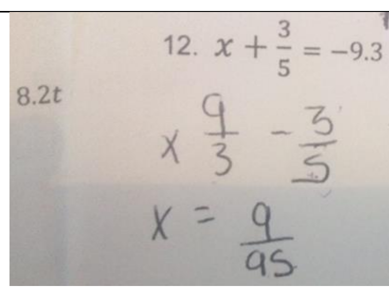
Segunda columna: Ejemplos de algunas dificultades que encuentran los alumnos al trabajar con expresiones equivalentes, de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 36

Reactivo	**Dificultad con expresiones equivalentes**	**Proporción de dificultad**
$x + 12 = 3$	No aplica	0/99
$5.75 + c = 12.8$		7/92 Al despejar la incógnita y pasar el 5.75 al lado derecho le cambian el signo pero al 12.8

$8.2t - 7 = 19$		10/69 El $8.2t$, lo pasan sumando
$x - 936 = 2583$		9/92 Al pasar no realiza el cambio de signo al -936
$-2x = 12$		28/75 Al -2 del coeficiente de x, lo pasa sumando
$12.3\,x + \ 3.4 \ = \ 1.07$		13/65 El 12.3 del coeficiente de x, lo pasa sumando
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$		7/54 Al pasar realiza el cambio de signo al $-\frac{3}{2}$, pero también al $-\frac{7}{2}$, dejando ambas fracciones con signo positivo y en consecuencia una suma

		de fracciones
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$		8/45 El $\frac{2}{3}$ del coeficiente de x, lo pasan al lado derecho restando
$-3x + 732 = 243$		8/77 Omite la igualdad de la expresión
$\frac{x}{15} = 60$		5/66 Al 15 que esta dividiendo a "x", lo pasan sumando
$\frac{z}{72.4} = 82.9$		3/51 El 72.4 que está dividiendo a z, lo pasan restando al otro lado
$x + \frac{3}{5} = -9.3$		7/35 Dificultad al restar números con punto decimal, con fracción

Conclusión del análisis al trabajar con expresiones equivalentes.

De los 325 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al trabajar con expresiones equivalentes de las 820 respuestas que realizaron algún procedimiento en los doce reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 46, consistentes en que al momento de pasar al lado derecho el coeficiente de “x”, lo pasan sumando, perdiendo así la equivalencia de la expresión.

Apartado 4.- Análisis procedimental al trabajar con letras diferentes a "x".

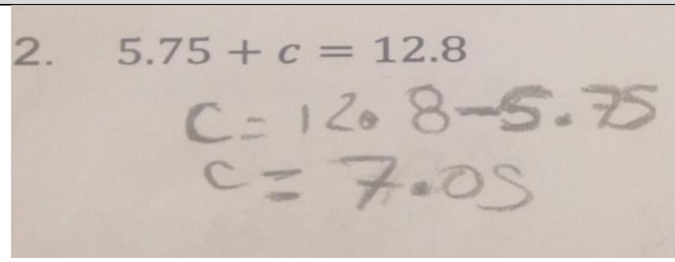
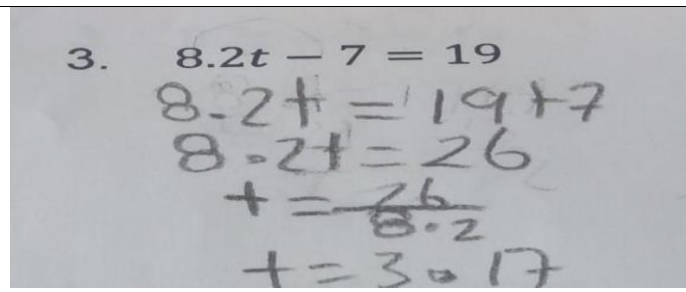
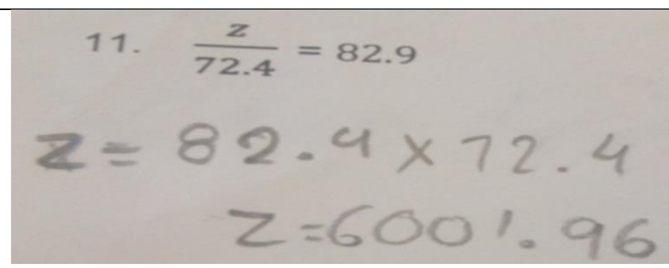
En la siguiente tabla se analizan los reactivos que requieren trabajar con letras diferentes a “x”, es preciso señalar que no se considera alguna otra característica procedimental del reactivo, a continuación, se enlista las características por columna:

Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere trabajar con letras diferentes a “x”.

Tercera columna: Ejemplos realizados por algunos alumnos del procedimiento esperado al trabajar con letras diferentes a “x” en cada reactivo.

Tabla 37

Número de reactivo	**Ecuaciones que requieren trabajar con letras diferentes a “x”**	**Procedimiento esperado al trabajar con letras diferentes a “x”**
2	$5.75 + c = 12.8$	
3	$8.2t - 7 = 19$	
11	$\frac{z}{72.4} = 82.9$	

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento de trabajar con letras diferentes a “x”, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere trabajar con letras diferentes a “x”.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al trabajar con letras diferentes a “x”.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al trabajar con letras diferentes a “x”.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento trabajar con letras diferentes a “x”.

Tabla 38

Reactivo	**Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno**	**Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al trabajar con letras diferentes a “x”**	**Razón de Alumnos que encuentran dificultad al trabajar con letras diferentes a “x”**	**Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento trabajar con letras diferentes a “x”**
$5.75 + c = 12.8$	8/100	92/100	9/92	83/100
$8.2t - 7 = 19$	31/100	69/100	10/69	59/100
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	49/100	51/100	4/51	47/100
TOTAL	88/300	212/300	23/212	189/300

La tabla nos muestra que en el reactivo $\frac{z}{72.4} = 82.9$, 49 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por trabajar con letra diferente a “x” seguido de una multiplicación de números con punto decimal al momento de pasar el termino independiente al lado derecho, en contraste con el reactivo $5.75 + c = 12.8$, el cual solo 8 de 100 alumnos deja sin respuesta, este reactivo se caracteriza por trabajar con letra diferente a “x” seguido de una resta de números con punto decimal al momento de pasar el termino independiente al lado derecho.

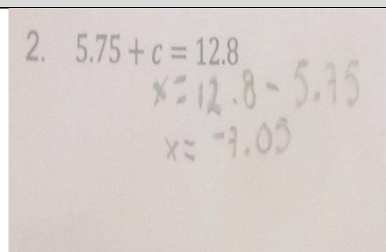
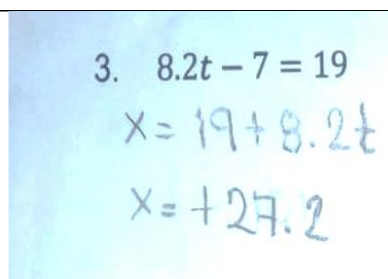
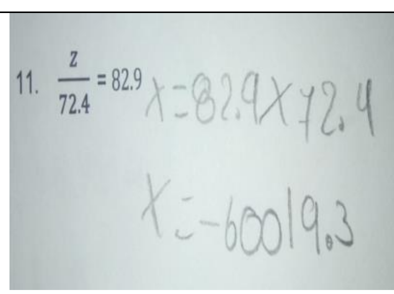
En la tabla siguiente, se muestran algunos ejemplos de las dificultades por reactivo que requiere trabajar con letras diferentes a “x” realizados por algunos alumnos, a continuación, se enlista las características por columna:

Primera columna: Reactivo donde se requiere trabajar con letras diferentes a “x”.

Segunda columna: Ejemplos de algunas dificultades que encuentran los alumnos al trabajar con letras diferentes a “x”, de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 39

Reactivo	**Dificultad al trabajar con letras diferentes a “x”**	**Proporción de dificultad**
$5.75 + c = 12.8$		5/92 Al despejar la incógnita cambian la letra "c" por la "x"
$8.2t - 7 = 19$		7/69 Al despejar la incógnita cambian la letra "t" por la "x"
$\frac{z}{72.4} = 82.9$		2/51 Al despejar la incógnita cambian la letra "z" por la "x"

Conclusión del análisis al trabajar con letras diferentes a "x".

De los 23 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al trabajar con letras diferentes a "x" de las 212 respuestas que realizaron algún procedimiento en los tres reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 14, consistentes en que al despejar la incógnita cambian la letra por la "x".

.

Apartado 5.- Análisis procedimental al trabajar con operaciones aritméticas cuando estas involucran números con punto decimal, con fracciones y con signo.

En el siguiente apartado se consideran las dificultades que presentan los alumnos al momento de realizar operaciones aritméticas, cuando estas involucran operar números con punto decimal, con fracciones y con signo.

Operaciones aritméticas con punto decimal.

En la siguiente tabla se muestran los reactivos y la operación aritmética requerida, que al despejar la incógnita requiere que el alumno opere números con punto decimal, a continuación se enlista las características por columna:

Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere que el alumno opere números con punto decimal.

Tercera columna: Operación aritmética requerida, que al despejar la incógnita requiere que el alumno opere números con punto decimal.

Tabla 40

Número de reactivo	**Reactivo**	**Operación aritmética requerida**
2	$5.75 + c = 12.8$	Resta
3	$8.2t - 7 = 19$	División
6	$12.3\,x + \ 3.4 \ = \ 1.07$	Resta y División
11	$\frac{z}{72.4} = 82.9$	Multiplicación

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento operar números con punto decimal, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento operar números con punto decimal.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al operar números con punto decimal.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al operar números con punto decimal.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento al operar números con punto decimal.

Tabla 41

Reactivo	**Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno**	**Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al operar números con punto decimal**	**Razón de Alumnos que encuentran dificultad al operar números con punto decimal**	**Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento operar números con punto decimal**
$5.75 + c = 12.8$	8/100	92/100	53/92	39/100
$8.2t - 7 = 19$	31/100	69/100	41/69	28/100
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	35/100	65/100	46/65	19/100
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	49/100	51/100	41/51	10/100
TOTAL	123/400	277/400	181/277	96/400

La tabla nos muestra que en el reactivo $\frac{z}{72.4} = 82.9$, 49 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por trabajar con letra diferente a "x" seguido de una multiplicación de números con punto decimal al momento de pasar el termino independiente al lado derecho, en contraste con el reactivo $5.75 + c = 12.8$, el cual solo 8 de 100 alumnos deja sin respuesta, este reactivo se caracteriza por trabajar con letra diferente a "x" seguido de una resta de números con punto decimal al momento de pasar el termino independiente al lado derecho.

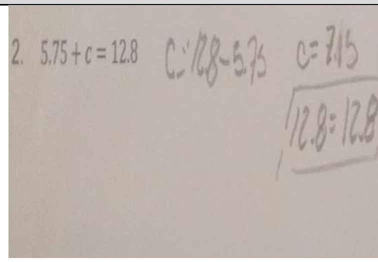
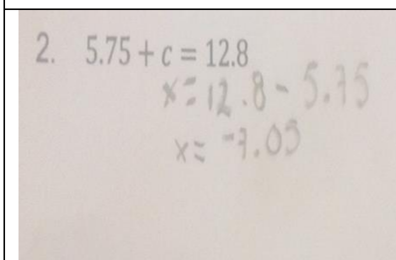
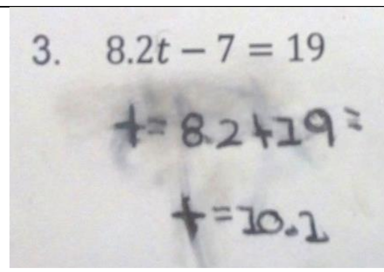
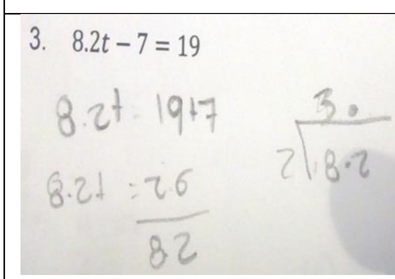
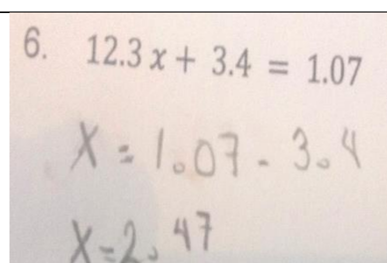
En la tabla siguiente, se muestran los ejemplos de las dificultades por reactivo que requiere que el alumno opere números con punto decimal, a continuación se enlista las características por columna:

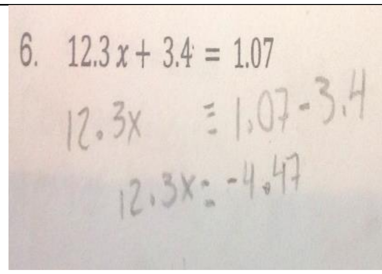
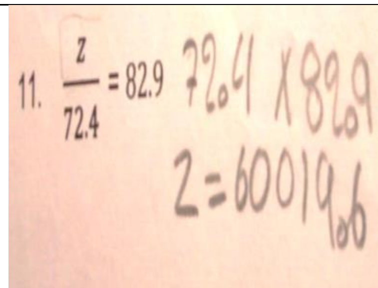
Primera columna: Reactivo donde se requiere que el alumno opere números con punto decimal.

Segunda columna: Ejemplos de las dificultades que encuentran los alumnos al operar números con punto decimal, de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 42

Reactivo	**Dificultad al realizar operaciones con punto decimal**	**Proporción de dificultad**
$5.75 + c = 12.8$		21/92 Error de cálculo al restar números con punto decimal
		19/92 Al resultado le coloca signo negativo
$8.2\mathrm{t} - 7 = 19$		17/69 Error de cálculo al restar números con punto decimal
		12/69 Dificultad al dividir números decimales
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$		17/65 Error de cálculo al realizar resta con sustraendo mayor que el minuendo.

		16/65 Suma en lugar de realizar resta en operación con sustraendo mayor que el minuendo y le pone el signo al resultado
$\frac{z}{72.4} = 82.9$		18/51 Dificultad al colocar el punto decimal

Conclusión del análisis al trabajar con operaciones aritméticas con punto decimal.

De los 181 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al trabajar con punto decimal de las 277 respuestas que realizaron algún procedimiento en los cuatro reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 48, consistentes en error de cálculo al restar números con punto decimal.

Operaciones aritméticas con fracciones.

En la siguiente tabla se muestran los reactivos y la operación aritmética requerida, que al despejar la incógnita requiere que el alumno opere fracciones, a continuación se enlista las características por columna:

Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere que el alumno opere fracciones.

Tercera columna: Operación aritmética requerida, que al despejar la incógnita requiere que el alumno opere fracciones.

Tabla 43

Número de reactivo	**Reactivo**	**Operación aritmética requerida**
7	$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	suma de fracciones
8	$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	Resta y división de fracciones
12	$x + \frac{3}{5} = -9.3$	Resta

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento operar con fracciones, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento operar con fracciones.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al operar con fracciones.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al operar con fracciones.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento al operar con fracciones.

Tabla 44

Reactivo	**Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno**	**Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al operar con fracciones**	**Razón de Alumnos que encuentran dificultad al operar con fracciones**	**Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento operar con fracciones**
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	46/100	54/100	13/54	41/100
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	55/100	45/100	5/45	40/100
$x + \frac{3}{5} = -9.3$	65/100	35/100	20/35	15/100
TOTAL	166/300	134/300	38/134	96/300

La tabla nos muestra que en el reactivo $x + \frac{3}{5} = -9.3$, 65 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por implicar una resta de números que involucran decimales y fracción al momento de pasar el termino independiente al lado derecho, además se puede apreciar que los otros dos reactivos que también se caracterizan por trabajar con fracciones encuentran una alta incidencia de alumnos que no realizan procedimiento alguno.

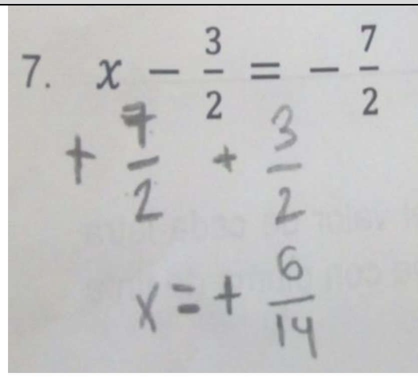
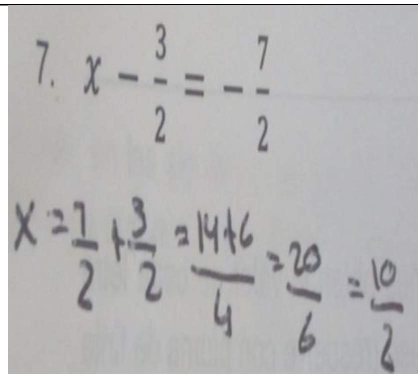
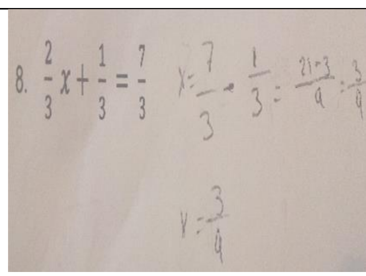
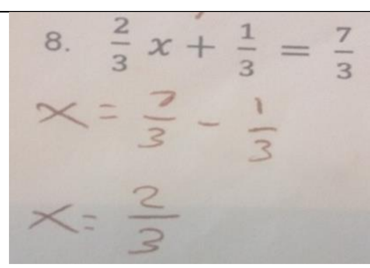
En la tabla siguiente, se muestran los ejemplos de las dificultades por reactivo que requiere que el alumno opere fracciones, a continuación se enlista las características por columna:

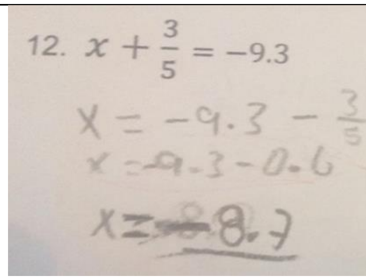
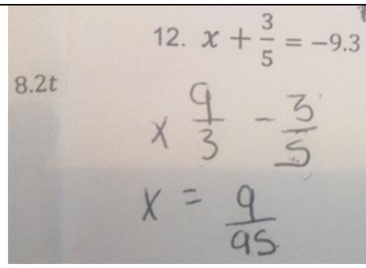
Primera columna: Reactivo donde se requiere que el alumno opere fracciones.

Segunda columna: Ejemplos de las dificultades que encuentran los alumnos al operar fracciones, de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 45

Reactivo	**Dificultad al realizar operaciones con fracciones**	**Proporción de dificultad**
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$		7/54 Dificultad al sumar fracciones con el mismo denominador
		3/54 Dificultad al sumar fracciones con el mismo denominador
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$		2/45 Dificultad al restar fracciones en ,lugar de poner $\frac{18}{9}$, coloca $\frac{3}{9}$
		2/45 Dificultad al restar fracciones

$x+\frac{3}{5}=-9.3$		9/35 Convierte la fracción a punto decimal, sin embargo, al realizar la suma de negativos encuentra dificultad
		7/35 El -9.3 lo coloca $\frac{9}{3}$, para sumarlo con $-\frac{3}{5}$, aun así la resta de fracciones se le dificultad

Conclusión del análisis al trabajar con operaciones aritméticas con fracciones.

De los 38 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al trabajar con punto decimal de las 134 respuestas que realizaron algún procedimiento en los tres reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 10, consistentes en sumar fracciones.

Operaciones aritméticas que involucran números con signo.

En la siguiente tabla se muestran los reactivos y la operación aritmética requerida, que al despejar la incógnita requiere que el alumno opere números con signo, a continuación se enlista las características por columna:

Primera columna: número de reactivo conforme al instrumento de aplicación.

Segunda columna: Reactivo donde se requiere que el alumno opere números con signo.

Tercera columna: Operación aritmética requerida, que al despejar la incógnita requiere que el alumno opere números con signo.

Tabla 46

Número de ecuación	Ecuación	Operación aritmética requerida
5	$-2x = 12$	División
6	$12.3\,x + \ 3.4\ =\ 1.07$	Resta y división
7	$x\ -\ \frac{3}{2}\ =\ -\ \frac{7}{2}$	Resta
9	$-3x + 732 = 243$	Resta y división
12	$x + \frac{3}{5} = -9.3$	Resta

En la tabla siguiente se muestran las “razones” que corresponden a los reactivos relacionados con el procedimiento operar números con signo, los encabezados de las columnas de la tabla indican las características que se consideran para éste ámbito.

Primera columna: Reactivo donde se requiere el procedimiento operar números con signo.

Segunda columna: Razón de alumnos que no realizan procedimiento, ni generan respuesta alguna.

Tercera columna: Razón de alumnos que realiza algún procedimiento al operar números con signo.

Cuarta columna: Razón de alumnos que encuentran alguna dificultad, considerando únicamente a los que realizaron algún procedimiento al operar números con signo.

Quinta columna: Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento al operar números con signo.

Tabla 47

Reactivo	Razón de Alumnos que no realizan procedimiento alguno	Razón de Alumnos que realizan algún procedimiento al operar números con signo	Razón de Alumnos que encuentran dificultad al operar números con signo	Razón de Alumnos que realizaron bien, el procedimiento operar números con signo
$-2x = 12$	25/100	75/100	9/75	66/100
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	35/100	65/100	16/65	49/100
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	46/100	54/100	15/54	39/100
$-3x + 732 = 243$	23/100	77/100	17/77	60/100
$x + \frac{3}{5} = -9.3$	65/100	35/100	13/35	22/100
TOTAL	194/500	306/500	70/306	236/500

La tabla nos muestra que en el reactivo $x + \frac{3}{5} = -9.3$, 65 de 100 alumnos dejan sin procedimiento alguno, cabe señalar que este reactivo se caracteriza por implicar una resta de números que involucran decimales con signo y fracción al momento de pasar el termino independiente al lado derecho, en contraste con el reactivo $-3x + 732 = 243$, el cual solo 23 de 100 alumnos deja sin respuesta, este reactivo se caracteriza por contener una resta con minuendo mayor que el sustraendo al momento de pasar el termino independiente al lado derecho.

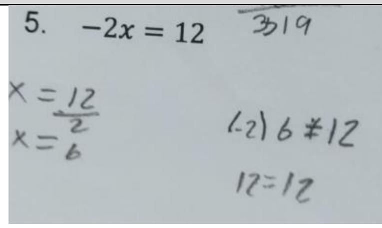
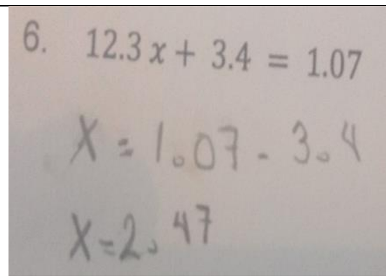
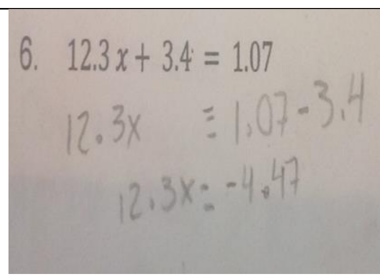
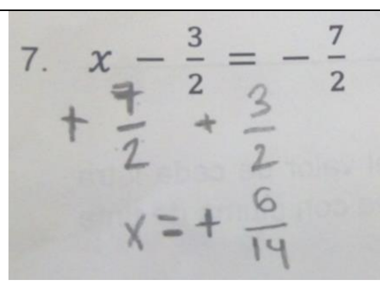
En la tabla siguiente, se muestran los ejemplos de las dificultades por reactivo que requiere que el alumno opere números con signo, a continuación se enlista las características por columna:

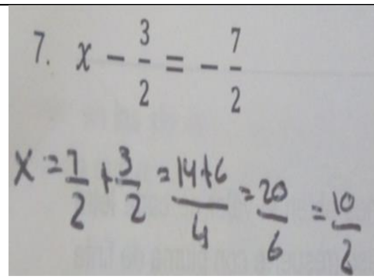
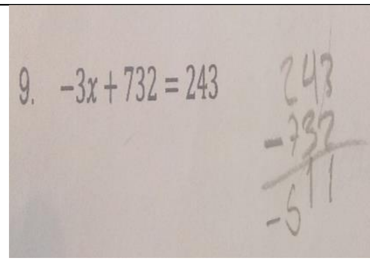
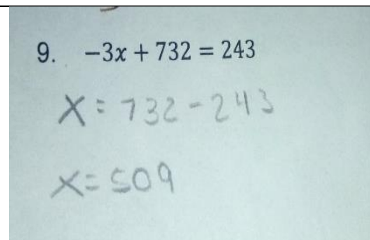
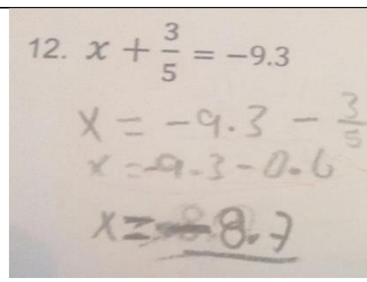
Primera columna: Reactivo donde se requiere que el alumno opere números con signo.

Segunda columna: Ejemplos de las dificultades que encuentran los alumnos al operar números con signo, de cada reactivo.

Tercera columna: Proporción de alumnos que encuentran alguna dificultad en común, de cada ejemplo citado en la segunda columna.

Tabla 48

Reactivo	Dificultad al realizar operaciones de números con signo	Proporción de dificultad
$-2x = 12$		6/75 Al despejar la incógnita omiten el signo
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$		7/65 Dificultad al realizar resta con sustraendo mayor que el minuendo
		6/65 Al resolver la operación suma el minuendo y el sustraendo y al resultado le pone el signo negativo
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$		7/54 Al pasar realiza el cambio de signo al $-\frac{3}{2}$, pero también al $-\frac{7}{2}$, dejando ambas fracciones con signo positivo

		3/54 Al pasar realiza el cambio de signo al $-\frac{3}{2}$, pero también al $-\frac{7}{2}$, dejando ambas fracciones con signo positivo
$-3x + 732 = 243$		8/77 Dificultad al realizar resta con sustraendo mayor que el minuendo
		4/77 Le cambia el signo al 243 dejándolo en negativo y el 732 lo pasa al lado derecho con signo positivo
$x + \frac{3}{5} = -9.3$		9/35 Convierte la fracción a punto decimal, sin embargo, al realizar la suma de negativos encuentra dificultad

Conclusión del análisis al trabajar con operaciones aritméticas que involucran números con signo.

De los 70 procedimientos de alumnos que encuentran alguna dificultad al trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo de las 306 respuestas que realizaron algún procedimiento en los cuatro reactivos, el error que mayor incidencia presenta suma un total de 22, consistentes en resta con sustraendo mayor que el minuendo.

CONCLUSIONES

Con respecto a los apartados procedimentales en que se organizó la tesis puedo concluir lo siguiente:

“Pasar sumando”

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito de “Pasar sumando”. En el reactivo $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$, 46 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo $x - 936 = 2583$, sólo 8 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por el uso de fracciones y en el segundo se consideran números enteros mayores que 100.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento de “Pasar sumando” y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia tiene que ver con omitir el cambio de signo al escribir el número del otro lado de la igualdad, considerando los 215 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 18 se encuentra éste tipo de dificultad, (8%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de “Pasar sumando” tenemos que 215 de 300 si realizan algún procedimiento, de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$8.2t - 7 = 19$	69	17	$\frac{17}{69} = 25$ 25%	31	17+31=48	48%
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	54	15	$\frac{15}{54} = 27$ 27%	46	15+46=61	61%
$x - 936 = 2583$	92	12	$\frac{12}{92} = 13$ 13%	8	12+8=20	20%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento de "Pasar sumando" los resultados quedarían de la siguiente forma:

$8.2t - 7 = 19$ con $\frac{17}{69}$ que representa el 25%

69 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de "Pasar sumando", de los cuales 17 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{25}\%$**,** y considerando que 31 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 48 de 100, es decir el 48%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ con $\frac{15}{54}$ que representa el 27%

54 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de "Pasar sumando", de los cuales 15 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{27}\%$**,** y considerando que 46 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 61 de 100, es decir el 61%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x - 936 = 2583$ con $\frac{12}{92}$ que representa el 13%

92 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar sumando”, de los cuales 12 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{13}\%$**,** y considerando que 8 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 20 de 100, es decir el 20%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 300 respuestas, considerando los tres reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 129 son consideradas como incorrectas, que representa el 43%.

Tomando en cuenta sólo los alumnos que realizan algún proceso de “Pasar sumando”; es significativa la diferencia entre los reactivo que consideran números fraccionarios (27%) y en los que se usan números enteros mayores que 100 (13%), y sumando, en cada caso, los que no realizan procedimiento alguno, los porcentajes son, 61% en el primer caso y 20% en el segundo.

“Pasar restando”

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito de “Pasar restando”. En el reactivo $x + \frac{3}{5} = -9.3$, 65 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo $x + 12 = 3$, solo 1 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por el uso de resta de decimales y fracción y en el segundo se considera números enteros menores que 100.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento de “Pasar restando” y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia tiene que ver con cambiar el signo pero al otro término del lado derecho de la igualdad, considerando los 413 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 26 se encuentra éste tipo de dificultad, (6%).

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de "Pasar restando" tenemos que 413 de 600 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$x + 12 = 3$	99	0	0%	1	1	1%
$5.75 + c = 12.8$	92	18	$\frac{18}{92} = 19$ 19%	8	$18 + 8 = 26$	26%
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	65	13	$\frac{13}{65} = 20$ 20%	35	13+35=48	48%
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	45	18	$\frac{18}{45} = 40$ 40%	55	18+55=73	73%
$-3x + 732 = 243$	77	21	$\frac{21}{77} = 27$ 27%	23	21+23=44	44%
$x + \frac{3}{5} = -9.3$	35	10	$\frac{10}{35} = 28$ 28%	65	10+65=75	75%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento de "Pasar sumando" los resultados quedarían de la siguiente forma:

$x + 12 = 3$ con $\frac{1}{99}$ que representa el 1%

99 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar restando”, de los cuales uno encontró dificultad y uno no realizo procedimiento alguno, es decir el 1%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$5.75 + c = 12.8$ con $\frac{18}{92}$ que representa el 19%

92 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar restando”, de los cuales 18 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{19}\%$**,** y considerando que 8 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 26 de 100, es decir el 26%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$12.3\,x + \ 3.4\ =\ 1.07$ con $\frac{13}{65}$ que representa el 20%

65 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar restando”, de los cuales 13 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{20}\%$**,** y considerando que 35 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 48 de 100, es decir el 48%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{2}{3}\ x\ +\ \frac{1}{3}\ =\ \frac{7}{3}$ con $\frac{18}{45}$ que representa el 40%

45 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar restando”, de los cuales 18 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{40}\%$**,** y considerando que 55 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 73 de 100, es decir el 73%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$-3x + 732 = 243$ con $\frac{21}{77}$ que representa el 27%

77 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar restando”, de los cuales 21 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{27}\%$**,** y considerando que 23 no

realizaron procedimiento alguno, tenemos que 44 de 100, es decir el 44%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x + \frac{3}{5} = -9.3$ con $\frac{10}{35}$ que representa el 28%

35 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar restando”, de los cuales 10 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{28}\%$**,** y considerando que 65 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 75 de 100, es decir el 75%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 600 respuestas, considerando los seis reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 267 son consideradas como incorrectas, que representa el 44%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso de “Pasar restando”; es significativa la diferencia cuando en los reactivo se consideran números fraccionarios (40%) y números enteros menores que 100 (1%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 73% en el primer caso y 1% en el segundo.

Como se puede apreciar en los procesos “Pasar sumando” y “Pasar restando”; el mayor porcentaje de dificultad se concentra en los reactivos que consideran números fraccionarios con el (27%) y (40%) respectivamente y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 61 % en el primer caso y 73% en el segundo.

Ahora bien, es preciso señalar que a pesar de que en ambos procedimientos “Pasar sumando” y “Pasar restando”, el mayor porcentaje de dificultad se concentra en los reactivos que consideran números fraccionarios, es notable que al “Pasar restando” encuentran mayor dificultad que al realizar el procedimiento de “Pasar sumando”.

“Pasar dividiendo”

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito de “Pasar dividiendo”. En el reactivo $\frac{2}{3}\ x\ +\ \frac{1}{3}\ =\ \frac{7}{3}$, 55 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo$-3x + 732 = 243$, solo 23 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por división de fracciones y en el segundo se considera división que involucra número con signo.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento de “Pasar dividiendo” y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia tiene que ver con pasar el coeficiente de la incógnita sumando del lado derecho de la igualdad, considerando los 331 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 65 se encuentra éste tipo de dificultad, (19%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de “Pasar dividiendo” tenemos que 331 de 500 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$8.2t - 7 = 19$	69	18	$\frac{18}{69} = 26$ 26%	31	18+31=49	49%
$-2x = 12$	75	40	$\frac{40}{75} = 53$ 53%	25	40+25=65	65%
$12.3\,x + \ 3.4 \ = \ 1.07$	65	47	$\frac{47}{65} = 72$	35	47+35=82	82%

			72%			
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	45	30	$\frac{30}{45} = 66$ 66%	55	30+55=85	85%
$-3x + 732 = 243$	77	47	$\frac{47}{77} = 61$ 61%	23	47+23=70	70%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento de "Pasar dividiendo" los resultados quedarían de la siguiente forma:

$8.2t - 7 = 19$ con $\frac{18}{69}$ que representa el 26%

69 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de "Pasar dividiendo", de los cuales 18 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{26}\%$**,** y considerando que 31 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 49 de 100, es decir el 49%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$-2x = 12$ con $\frac{40}{75}$ que representa el 53%

75 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de "Pasar dividiendo", de los cuales 40 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{53}\%$**,** y considerando que 25 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 65 de 100, es decir el 65%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$12.3\,x + 3.4 = 1.07$ con $\frac{47}{65}$ que representa el 72%

65 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de "Pasar dividiendo", de los cuales 47 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{72}\%$**,** y considerando que 35 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 82 de 100, es decir el 82%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{2}{3}\ x\ +\ \frac{1}{3}\ =\ \frac{7}{3}$ con $\frac{30}{45}$ que representa el 66%

45 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar dividiendo”, de los cuales 30 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{66}\%$**,** y considerando que 55 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 85 de 100, es decir el 85%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$-3x + 732 = 243$ con $\frac{47}{77}$ que representa el 61%

77 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar dividiendo”, de los cuales 47 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{61}\%$**,** y considerando que 23 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 78 de 100, es decir el 70%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 500 respuestas, considerando los cinco reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 351 son consideradas como incorrectas, que representa el 70%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso de “Pasar dividiendo”; es significativa la diferencia cuando en los reactivo se consideran división con numero con punto decimal entre número decimal (72%) y división de numero entero entre número decimal (26%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 82% en el primer caso y 49% en el segundo.

“Pasar multiplicando”

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito de “Pasar multiplicando”. En el reactivo $\frac{z}{72.4} = 82.9$, 49 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo $\frac{x}{15} = 60$, 34 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por multiplicación de números con punto decimal y en el segundo se considera multiplicación con números enteros.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento de “Pasar multiplicando” y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia tiene que ver con pasar del lado derecho de la igualdad sumando o restando el número que está dividiendo a la incógnita, considerando los 117 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 9 se encuentra éste tipo de dificultad, (7%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de “Pasar multiplicando” tenemos que 117 de 200 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$\frac{x}{15} = 60$	66	11	$\frac{11}{66} = 16$ 16%	34	11+34=45	45%
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	51	13	$\frac{13}{51} = 25$ 25%	49	13+49=62	62%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento de “Pasar multiplicando” los resultados quedarían de la siguiente forma:

$\frac{x}{15} = 60$ con $\frac{11}{66}$ que representa el 16%

66 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar multiplicando”, de los cuales 11 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{16}\%$**,** y considerando que 34 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 45 de 100, es decir el 45%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{z}{72.4} = 82.9$ con $\frac{13}{51}$ que representa el 25%

51 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de “Pasar multiplicando”, de los cuales 13 tienen alguna dificultad, esto representa el $\mathbf{25}\%$**,** y considerando que 49 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 62 de 100, es decir el 62%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 200 respuestas, considerando los dos reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 107 son consideradas como incorrectas, que representa el 53%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso de “Pasar multiplicando”; es significativa la diferencia cuando en los reactivo se consideran multiplicación de números que involucran punto decimal (25%) y multiplicación con números enteros (16%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 62% en el primer caso y 45% en el segundo.

Como se puede apreciar en los procesos “Pasar Dividiendo” y “Pasar Multiplicando”; el mayor porcentaje de dificultad se concentra en los reactivos que consideran números que involucran punto decimal (72%) y (25%) respectivamente y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 82% en el primer caso y 62% en el segundo.

Ahora bien, es preciso señalar que a pesar de que en ambos procedimientos “Pasar Dividiendo” y “Pasar Multiplicando”, el mayor porcentaje de dificultad se concentra en los reactivos que consideran números que involucran punto decimal, es notable que al “Pasar Dividiendo” encuentran mayor dificultad que al realizar el procedimiento de “Pasar Multiplicando”.

Análisis procedimental con las expresiones equivalentes.

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito expresiones equivalentes. En el reactivo $x+\frac{3}{5}=-9.3$ 65 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo $\mathrm{x}+12=3$, solo 0 de 99 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por trabajar con resta entre número decimal y fracción, en el segundo trabajar con resta con minuendo mayor que el sustraendo al momento de pasar el número al lado derecho.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento trabajar con expresiones equivalentes y tomando en cuenta todos los reactivos, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia es que al momento de pasar el coeficiente de “x” al lado derecho, lo pasan sumando, considerando los 820 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 46 se encuentra éste tipo de dificultad, (5%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de trabajar con expresiones equivalentes tenemos que 820 de 1200 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$x + 12 = 3$	99	0	0%	1	1	1%
$5.75 + c = 12.8$	92	18	$\frac{18}{92} = 19$ 19%	8	$18 + 8 = 26$	26%
$8.2t - 7 = 19$	69	35	$\frac{35}{69} = 50$ 50%	31	35+31=66	66%
$x - 936 = 2583$	92	12	$\frac{12}{92} = 13$ 13%	8	12+8=20	20%
$-2x = 12$	75	40	$\frac{40}{75} = 53$ 53%	25	40+25=65	65%
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	65	60	$\frac{60}{65} = 92$ 92%	35	60+35=95	95%
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	54	15	$\frac{15}{54} = 27$ 27%	46	15+46=61	61%
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	45	43	$\frac{43}{45} = 95$ 95%	55	43+55=98	98%
$-3x + 732 = 243$	77	68	$\frac{68}{77} = 88$ 88%	23	68+23=91	91%
$\frac{x}{15} = 60$	66	11	$\frac{11}{66} = 16$ 16%	34	11+34=45	45%
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	51	13	$\frac{13}{51} = 25$ 25%	49	13+49=62	62%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento de trabajar con expresiones equivalentes los resultados quedarían de la siguiente forma:

$\mathrm{x} + 12 = 3$ con $\frac{1}{99}$ que representa el 1%

99 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales ninguno encuentra dificultad en este reactivo.

$5.75 + \mathrm{c} = 12.8$ con $\frac{18}{92}$ que representa el 19%

92 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 18 tienen alguna dificultad, esto representa el 19%**,** y considerando que 8 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 26 de 100, es decir el 26%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$8.2t - 7 = 19$ con $\frac{35}{69}$ que representa el 50%

69 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 35 tienen alguna dificultad, esto representa el 50%**,** y considerando que 31 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 66 de 100, es decir el 66%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x - 936 = 2583$ con $\frac{12}{92}$ que representa el 13%

92 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 12 tienen alguna dificultad, esto representa el 13%**,** y considerando que 8 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 20 de 100, es decir el 20%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$-2x = 12$ con $\frac{40}{75}$ que representa el 53%

75 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 40 tienen alguna dificultad, esto representa el 53%**,** y considerando que 25 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 65 de 100, es decir el 65%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$12.3\,x + 3.4 = 1.07$ con $\frac{60}{65}$ que representa el 92%

65 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 60 tienen alguna dificultad, esto representa el 92%**,** y considerando que 35 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 95 de 100, es decir el 95%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ con $\frac{15}{54}$ que representa el 27%

54 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 15 tienen alguna dificultad, esto representa el 27%**,** y considerando que 46 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 61 de 100, es decir el 61%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ con $\frac{43}{45}$ que representa el 95%

45 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 43 tienen alguna dificultad, esto representa el 95%**,** y considerando que55 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 98 de 100, es decir el 98%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$-3x + 732 = 243$ con $\frac{68}{77}$ que representa el 88%

77 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 68 tienen alguna dificultad, esto representa el 24%**,** y

considerando que 23 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 91 de 100, es decir el 91%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{x}{15} = 60$ con $\frac{11}{66}$ que representa el 16%

66 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 11 tienen alguna dificultad, esto representa el 16%**,** y considerando que 34 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 45 de 100, es decir el 45%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{z}{72.4} = 82.9$ con $\frac{13}{51}$ que representa el 25%

51 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 13 tienen alguna dificultad, esto representa el 25%**,** y considerando que 49 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 62 de 100, es decir el 62%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x + \frac{3}{5} = -9.3$ con $\frac{10}{35}$ que representa el 28%

35 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con expresiones equivalentes, de los cuales 10 tienen alguna dificultad, esto representa el 28%**,** y considerando que 65 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 75 de 100, es decir el 75%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 1200 respuestas, considerando los doce reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 705 son consideradas como incorrectas, que representa el 58%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso trabajar con expresiones equivalentes; es significativa la diferencia cuando en los reactivo tiene fracciones (95%) y donde aparecen resta de números enteros menores que 100 (1%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 98% en el primer caso y 1% en el segundo.

Como se observa solamente trabajar con expresiones equivalentes, el porcentaje más alto de errores, se comete cuando el reactivo tiene fracciones, como sucede en los procedimientos de “Pasar sumando” y “Pasar restando”, pero con un porcentaje de incidencia mucho mayor que en ambos casos.

En el caso en donde aparecen resta de números enteros menores que 100, el porcentaje es uno.

Análisis procedimental al trabajar con letras diferentes a "x".

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito trabajar con letras diferentes a "x". En el reactivo $\frac{z}{72.4} = 82.9$, 49 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo $5.75 + c = 12.8$, solo 8 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por tener la letra en el numerador de una fracción y en el segundo se suman la letra a número con punto decimal.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento trabajar con letras diferentes a "x" y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia es que al despejar la incógnita cambian la letra por la "x", considerando los 212 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 14 se encuentra éste tipo de dificultad, (6%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento trabajar con letras diferentes a "x" tenemos que 212 de 300 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$5.75 + c = 12.8$	92	9	$\frac{9}{92} = 9$ 9%	8	9+8=17	17%
$8.2t - 7 = 19$	69	10	$\frac{10}{69} = 14$ 14%	31	10+31=41	41%
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	51	4	$\frac{4}{51} = 7$ 7%	49	4+49=53	53%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento trabajar con letras diferentes a "x" los resultados quedarían de la siguiente forma:

$5.75 + c = 12.8$ con $\frac{9}{92}$ que representa el 9%

92 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con letras diferentes a "x", de los cuales 9 tienen alguna dificultad, esto representa el **9%,** y considerando que 8 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 17 de 100, es decir el 17%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$8.2t - 7 = 19$ con $\frac{10}{69}$ que representa el 14%

69 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con letras diferentes a "x", de los cuales 10 tienen alguna dificultad, esto representa el **14%,** y considerando que 31 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 41 de 100, es decir el 41%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{z}{72.4} = 82.9$ con $\frac{4}{51}$ que representa el 7%

51 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el proceso de trabajar con letras diferentes a "x", de los cuales 4 tienen alguna dificultad, esto representa el **7%,** y considerando que 49 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 53 de 100, es decir el 53%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 300 respuestas, considerando los tres reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 111 son consideradas como incorrectas, que representa el 37%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso trabajar con letras diferentes a "x"; es significativa la diferencia cuando en los reactivo tiene la letra multiplicando un número con punto decimal (14%) y la letra en el numerador de una fracción (7%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 41% en el primer caso y 53% en el segundo.

Con respecto a los apartados de Operaciones aritméticas en que se organizó la tesis puedo concluir lo siguiente:

Números decimales.

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito operaciones aritméticas con punto decimal. En el reactivo $\frac{z}{72.4} = 82.9$, 49 de 100 alumnos no realizan procedimiento alguno y en el reactivo $5.75 + c = 12.8$, solo 8 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por trabajar multiplicación con punto decimal y en el segundo trabajar resta con punto decimal

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento trabajar operaciones aritméticas con punto decimal y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia es que cometen error de cálculo al restar números con punto decimal, considerando los 277 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 48 se encuentra éste tipo de dificultad, (17%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con punto decimal tenemos que 277 de 400 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$5.75 + c = 12.8$	92	53	$\frac{53}{92} = 57$ 57%	8	53+8=61	61%
$8.2t - 7 = 19$	69	41	$\frac{41}{69} = 59$ 59%	31	41+31=72	72%
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	65	46	$\frac{46}{65} = 70$ 70%	35	46+35=81	81%
$\frac{z}{72.4} = 82.9$	51	41	$\frac{41}{51} = 7$ 80%	49	41+49=90	90%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento trabajar operaciones aritméticas con punto decimal los resultados quedarían de la siguiente forma:

$5.75 + c = 12.8$ con $\frac{53}{92}$ que representa el 57%

92 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con punto decimal, de los cuales 53 tienen alguna dificultad, esto representa el 57%**,** y considerando que 8 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 61 de 100, es decir el 61%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$8.2t - 7 = 19$ con $\frac{41}{69}$ que representa el 59%

69 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con punto decimal, de los cuales 41 tienen alguna dificultad, esto representa el 59%**,** y considerando que 31 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 72 de 100, es decir el 72%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$12.3\,x + \ 3.4 \ = \ 1.07$ con $\frac{46}{65}$ que representa el 70%

65 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con punto decimal, de los cuales 46 tienen alguna dificultad, esto representa el 70%**,** y considerando que 35 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 81 de 100, es decir el 81%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{z}{72.4} = 82.9$ con $\frac{41}{51}$ que representa el 80%

51 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con punto decimal, de los cuales 41 tienen alguna dificultad, esto

representa el 80%**,** y considerando que 49 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 90 de 100, es decir el 90%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 400 respuestas, considerando los cuatro reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 304 son consideradas como incorrectas, que representa el 76%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso trabajar operaciones aritméticas con punto decimal; es significativa la diferencia cuando en los reactivo tiene multiplicación con punto decimal (80%) y resta con punto decimal (57%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 90% en el primer caso y 61% en el segundo.

Fracciones.

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito operaciones aritméticas con fracciones. En el reactivo $x + \frac{3}{5} = -9.3$, 65 de 100, y en el reactivo $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$, 46 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por trabajar resta entre número decimal con signo y fracción y en el segundo trabajar resta entre fracción con signo negativo y con signo positivo.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento trabajar operaciones aritméticas con fracciones y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia es que al despejar la incógnita dejan ambas fracciones con signo positivo y en consecuencia una suma de fracciones, considerando los 134 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 10 se encuentra éste tipo de dificultad, (7%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con fracciones tenemos que 134 de 300 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	54	13	$\frac{13}{54} = 24$ 24%	46	13+46=59	59%
$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	45	5	$\frac{5}{45} = 11$ 11%	55	5+55=60	60%
$x + \frac{3}{5} = -9.3$	35	20	$\frac{20}{35} = 57$ 57%	65	20+65=85	85%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento trabajar operaciones aritméticas con fracciones los resultados quedarían de la siguiente forma:

$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ con $\frac{13}{54}$ que representa el 24%

54 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con fracciones, de los cuales 13 tienen alguna dificultad, esto representa el 24%**,** y considerando que 46 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 59 de 100, es decir el 59%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ con $\frac{5}{45}$ que representa el 11%

45 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con fracciones, de los cuales 5 tienen alguna dificultad, esto representa el 11%**,** y considerando que 55 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 60 de 100, es decir el 60%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x+\frac{3}{5}=-9.3$ con $\frac{20}{35}$ que representa el 57%

35 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas con fracciones, de los cuales 20 tienen alguna dificultad, esto representa el 57%**,** y considerando que 65 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 85 de 100, es decir el 85%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 300 respuestas, considerando los tres reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 204 son consideradas como incorrectas, que representa el 68%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso trabajar operaciones aritméticas con fracciones; es significativa la diferencia cuando en los reactivo considera resta entre número decimal con signo y fracción (57%) y resta entre fracciones (11%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 85% en el primer caso y 60% en el segundo.

Números con signo.

Con respecto a los alumnos que no realizan procedimiento alguno en el ámbito operaciones aritméticas que involucran números con signo. En el reactivo $x+\frac{3}{5}=-9.3$, 65 de 100, y en el reactivo $-3x+732=243$, 23 de 100 alumnos no lo realizan.

En el primer caso el reactivo se caracteriza por trabajar resta entre número decimal con signo y fracción y en el segundo por trabajar resta con minuendo mayor que el sustraendo.

En relación a los alumnos que realizan algún procedimiento trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo y tomando en cuenta todos los reactivos en los que se requiere de este proceso, encontramos que la dificultad que se presenta con mayor frecuencia es al realizar resta con sustraendo mayor que el minuendo, considerando los 306 intentos de los alumnos, en los diversos reactivos, tenemos que en 22 se encuentra éste tipo de dificultad, (7%)

Considerando los reactivos y los alumnos que intentan realizar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo tenemos que 306 de 500 si realizan algún procedimiento de los cuales los errores se distribuyen de la siguiente manera:

Reactivos	No. de Estudiantes que intentan el procedimiento	No. de estudiantes. (de los que intentan) que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad respecto a los que intentaron el procedimiento	No. de Estudiantes que no intentan el procedimiento	Estudiantes qué no hicieron procedimiento y los que tienen alguna dificultad	Porcentaje (%) del número de estudiantes que tienen alguna dificultad considerando los que intentaron y los que no lo hicieron
$-2x = 12$	75	9	$\frac{9}{75} = 12$ 12%	25	9+25=34	34%
$12.3\,x + 3.4 = 1.07$	65	16	$\frac{16}{65} = 24$ 24%	35	16+35=51	51%
$x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$	54	15	$\frac{15}{54} = 27$ 27%	46	15+46=61	61%
$-3x + 732 = 243$	77	17	$\frac{17}{77} = 22$ 22%	23	17+23=40	40%

$x+\frac{3}{5}=-9.3$	35	13	$\frac{13}{35}=37$ 37%	65	13+65=78	78%

A continuación tomando en cuenta la tabla y cada uno de los reactivos que requieren el procedimiento trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo los resultados quedarían de la siguiente forma:

$-2x = 12$ con $\frac{9}{75}$ que representa el 12%

75 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo, de los cuales 9 tienen alguna dificultad, esto representa el 12%**,** y considerando que 25 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 34 de 100, es decir el 34%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$12.3\,x + \ 3.4 \ = \ 1.07$ con $\frac{16}{65}$ que representa el 24%

65 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo, de los cuales 16 tienen alguna dificultad, esto representa el 24%**,** y considerando que 35 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 51 de 100, es decir el 51%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x \ - \ \frac{3}{2} \ = \ - \ \frac{7}{2}$ con $\frac{15}{54}$ que representa el 27%

54 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo, de los cuales 15 tienen alguna dificultad, esto representa el 27%**,** y considerando que 46 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 61 de 100, es decir el 61%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$-3x + 732 = 243$ con $\frac{17}{77}$ que representa el 22%

77 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo, de los cuales 17 tienen alguna dificultad, esto representa el 22%**,** y considerando que 23 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 40 de 100, es decir el 40%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

$x + \frac{3}{5} = -9.3$ con $\frac{13}{35}$ que representa el 37%

35 estudiantes hicieron algún intento para efectuar el procedimiento de trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo, de los cuales 13 tienen alguna dificultad, esto representa el 37%**,** y considerando que 65 no realizaron procedimiento alguno, tenemos que 78 de 100, es decir el 78%, tienen alguna dificultad para realizar dicho proceso.

Una vez que se han planteado los resultados para cada reactivo, de las 500 respuestas, considerando los cinco reactivos y tomando en cuenta los que realizan algún procedimiento y presentan alguna dificultad y los que no realizan procedimiento alguno, tenemos que 264 son consideradas como incorrectas, que representa el 53%.

Considerando sólo los alumnos que realizan algún proceso trabajar operaciones aritméticas que involucran números con signo; es significativa la diferencia cuando en los reactivo considera resta entre número decimal con signo y fracción (37%) y división de número entero positivo entre número entero negativo (12%), y considerando los que no realizan procedimiento alguno en los reactivos anteriores, los porcentajes son, 78% en el primer caso y 34% en el segundo.

CONSIDERACIONES FINALES

Considerando que esta tesis se enfocó en el análisis procedimental de la resolución de reactivos, no se consideran los factores que determinan las dificultades que se han detectado.

Se deja sin respuesta el motivo por el cual el mayor porcentaje de dificultades para los procedimientos “Pasar Sumando” y “Pasar Restando”, se presenta en los reactivos que consideran fracciones y para los procedimientos “Pasar Dividiendo” y “Pasar Multiplicando”, se presenta en los reactivos que consideran números que involucran punto decimal. Dejando en evidencia que los errores provienen de otros ámbitos de conocimiento, en este caso de la aritmética ya sea por una mala adquisición de los contenidos y reglas de las operaciones básicas o por el uso de estos en un contexto distinto, tal como lo es el álgebra Socas (2007).

En relación a la clasificación de errores en aritmética se puede abordar con un enfoque más detallado y específico que el realizado en esta investigación, con mira a dar respuesta a los motivos de las principales dificultades encontradas en los apartados procedimentales, que de no ser resueltos de manera oportuna el alumno llevara estas dificultades al iniciarse en álgebra Quiroz (2006).

Otro dato relevante es el que se da en el apartado expresiones equivalentes ya que es notoria la gran dificultad que encuentran los alumnos al intentar despejar la incógnita, sin perder la expresión equivalente, es decir, pierden la igualdad de la expresión sin considerar su gran importancia para adentrarse al tema del álgebra ya que en muchas ocasiones omiten pasos del procedimiento o incluso solo ponen el resultado de la ecuación. Ahora bien, cabe señalar que esto se agudiza cuando en los coeficientes aparecen números fraccionarios, es como si el procedimiento cambiara o fuera diferente, considerando únicamente el procedimiento de pasar al otro lado el número fraccionario independientemente de resolver la fracción, por lo que sería conveniente buscar razones por las que se presentan este tipo de dificultades.

Ahora bien, seria pertinente considerar las propuestas para la resolución de contenido de álgebra sugeridas por algunos autores como Palarea Medina M. (1998), , Bell y otros (1983), Rojano, (1994). Con la finalidad de mejorar el rendimiento por parte de los estudiantes sobre este tema.

Por su parte Palarea Medina M. (1998). Alude a las propuestas de los estándares que coinciden en enfatizar actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales y su vez expliciten la transición de las concepciones procedimentales a las estructurales.

Indican la importancia de las dos concepciones procedimentales y estructurales y además manifiestan cómo se ha desarrollado históricamente el Álgebra según un ciclo procedimental-estructural. También, que la literatura de la investigación ha mostrado que la enseñanza y el contenido del Álgebra enfatizan las consideraciones estructurales. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no alcanza esta meta, por eso se sugiere que la investigación ha de ser reconsiderada desde el punto de vista de una dinámica procedimental estructural del aprendizaje de las Matemáticas.

Por otra parte, Bell y otros (1983). Se basan en una "enseñanza con significado", que propone la utilización de modelos concretos para la resolución de ecuaciones lineales. Asimismo, crean situaciones concretas con el propósito de desembocar en el planteamiento de las ecuaciones mencionadas.

Además, es partidario de que la enseñanza debe ser funcional. Señala que en general en la enseñanza del Álgebra se hace más un planteamiento formal que funcional. En realidad, lo que se hace en Álgebra no se sabe para qué sirve. En definitiva, el alumno tiene la sensación de que se hace porque lo quiere el profesor y con eso basta.

Otro trabajo de especial interés es el artículo de la profesora Rojano, (1994) en el que resume una serie de focos y tendencias en la investigación de la matemática escolar considerada como lenguaje de los años 80 y 90, en contraste a la de los 70, centrada en la construcción de conceptos. La autora plantea algunas de las implicaciones didácticas de esta nueva localización de la matemática escolar y, en especial, se refiere al lenguaje algebraico por ser el Álgebra simbólica el lenguaje básico de la Matemática.

Considerando los autores antes citados se podría realizar construcción de expresiones equivalentes apegadas al concepto de igualdad, para esto sería conveniente sumar y restar cantidades en ambos lados de la ecuación hasta que el alumno identifique cual es la mejor manera de construir expresiones equivalentes para despejar la incógnita, por ejemplo:

En la ecuación $x + \frac{3}{5} = -9.3$

Podría ser $x + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = -9.3 + \frac{2}{5}$

Además, podría utilizarse el método de descomposición de números de tal modo de quedar solo con números, con los cuales el alumno se sienta más seguro para la resolución de la ecuación, por ejemplo:

En la ecuación $x + \frac{3}{5} = -9.3$

Podría ser $x + .06 = -9.3$, convirtiendo el número fraccionario a decimal, lo que en consecuencia dejaría una suma de números decimales con signo, como se describe a continuación:

$x = -9.3 - .06$

$x = -9.9$

Otro ejemplo sería:

En la ecuación $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Podría ser $\frac{2x+1}{3} = \frac{7}{3}$

Paso seguido eliminar los denominadores de ambos lados de la expresión

$2x + 1 = 7$

Después descomponemos el 7

$2x + 1 = 1 + 6$

Eliminamos el 1 de ambos lados de la expresión

$2x = 6$

Descomponer $2x = 6$

$x + x = 3 + 3$

Por lo tanto

$x = 3$

Cabe señalar que estos ejemplos se tomaron con base a que las ecuaciones que consideran fracciones fueron las que mayor incidencia de dificultad presentaron al momento de ser resuelta por el alumno, sin embargo, el método aquí planteado puede ser usado para la resolución de cualquier ecuación.

Para finalizar sería conveniente contestar a lo siguiente, ¿cómo lograr que las aportaciones que se describen en el marco teórico sobre el dominio del álgebra donde hay diversas investigaciones sobre la importancia de la igualdad, expresiones equivalentes, el uso de las letras, dificultades que provienen de la aritmética, dificultades en la resolución de las ecuaciones. Ayuden al procedimiento en los estudiantes y mejoren su desempeño? Ya que en la mayoría de los libros ponen énfasis en la parte procedimental para que el alumno siguiendo este proceso eventualmente tenga éxito en el despeje de la incógnita.

BIBLIOGRAFÍA

Animal político. (2013). *México, el peor de la OCDE en educación.* Recuperado de http://www.animalpolitico.com/2013/12/mexico-el-peor-de-la-ocde-en-matematicas-lectura-y-ciencias/

Arraiga Robles, Alan y Benites. (2016). *Matemáticas por competencias* 1 México: Editorial Pearson.

Avila A. y García Peña S. (2008). *Los decimales: más que una escritura.* México. INEE.

Kieran et al. (2016). *Early Algebra Research into its Nature, its Learning, its Teaching.* Hamburg, Germany: Springer Open. (Kieran et al., 2016).

Chavarría Arroyo G. (2014). *Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales*. Revista Uniciencia Volumen 28. (Número 2), pp 15-44.

Cid E. y Bolea P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico.* (Artículo de investigación) Universidad de Zaragoza. España.

CNN. México. (2013). *El 55% de estudiantes mexicanos, sin habilidad suficiente en matemáticas.* Recuperado de http://mexico.cnn.com/nacional/2013/12/03/el-55-de-estudiantes-mexicanos-sin-habilidad-suficiente-en-matematicas

CONALITEG. (2016). *Catálogo de libros de texto gratuito.* Recuperado de http://libros.conaliteg.gob.mx/content/common/consulta-libros-gb/index.jsf?busqueda=true&nivelEscolar=3&grado=1&materia=2&editorial=&tipo=&clave=&titulo=&autor=&key=key-3-1-2

De Castro Hernández C. (2004). *Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación.* (Artículo de investigación) Universidad Autónoma de Madrid. España.

De la Rosa Téllez T. (2010). *Análisis de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita y de las expresiones algebraicas equivalentes de alumnos de 2º y 3º grados de secundaria.* (Tesis de Licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México.

Duval Raymond. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. pp. 143–168. La gaceta de la RSME, Vol. 9.1.

Escareño y López. (2016). *Matemáticas 1.* México: editorial Trillas.

Farfán, Ricardo Cantoral, Cabañas y Ferrari. (2016), *Matemáticas 1 tercera edición.* México: Editorial Mc Graw Hill education.

INEE. (2018). *PLANEA Conoce los resultados nacionales 2017, 3° de secundaria.* Recuperado de https://www.inee.edu.mx/index.php/planea

INEE. (2018). *Texto de divulgación Planea resultados nacionales 2017.*

Kieran et al. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias. (artículo de investigación y experiencias didácticas).* Université de Québec. Montréal, Canadá. Pp. 229-240.

M. Ruano, M. Socas y Mercedes Palarea. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.* PNA 2(2), pp. 61-74.

Mancera y Basurto. (2016).*Saberes matemáticas 1.* México: Editorial Pearson.

Molina M. (2014). *Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos*. La Gaceta de la RSME, Vol. 17 (2014), Núm. 3, pp. 559–579.

OCDE. (2015). *La comparación internacional para la mejora escolar.* PISA para Centros Educativos.

OCDE. (2016). NOTA País, *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos Pisa2015-Resultados.*

OECD. (2018). *Better policies for better lives. Resultados prueba PISA 2015.* Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/singapur-encabeza-la-ultima-encuesta-pisa-sobre-educacion-que-realiza-la-ocde-a-escala-internacional.htm

Olea, Basurto y Mendoza. (2016). *1 Contexto matemático secundaria* 1 México: Editorial Norma.

Palarea Medina M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna. San Cristóbal de La Laguna, España.

Pedemonte B. (2008). *Argumentation and algebraic proof. ZDM Mathematics Education.*

Pérez Navarrete L. (2004). **Situaciones didácticas para la enseñanza de ecuaciones de primer grado.** (Tesis de Licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México.

Quiroz Lima M. (2006). *La aritmética en el dominio de las ecuaciones de primer grado, en el sexto año de educación primaria.* (Tesis de Licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional, México.

Rakhi Banerjee & K. Subramaniam. (2012).*Evolution of a teaching approach for beginning algebra.*

SEP. (2011). *Acuerdo número 592, por el que se establece la articulación de la educación básica.*

Socas Robayna M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.* Investigación en educación matemática XI. pp. 19-52.

Tall, D. (2014). *Chapter 1. About This Book en How Humans learn to Think Mathematically.*

Tenoch E. Cedillo. (2001). *Toward an Algebra Acquisition Support System: A Study Based on Using Graphic Calculators in the Classroom. Article Mathematical Thinking and Learning*. Universidad Pedagógica Nacional, Tlalpan, Mexico.

Wu. (2011). *The Mathematics K-12 Teachers Need to Know.*

Xique Anaya. (2016). *Jaque mate matemáticas primer grado secundaria* México: Editorial Larousse.

Anexo 1

Gráfico B ▪ **Los seis niveles de competencia matemática en el PISA**

Nivel	Límite de puntuación inferior en la escala PISA	Lo que los alumnos saben y saben hacer en cada nivel de competencia
6	Desde 669	En el nivel 6 los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
5	607	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	545	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	482	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	420	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	358	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Para cada nivel se presenta el límite de puntuación más bajo en la escala PISA. El nivel 2 representa el nivel base de competencia matemática en el cual los alumnos empiezan a demostrar los tipos de destrezas que les permiten usar las matemáticas de una manera que se considera fundamental para su futuro desarrollo. Los alumnos con una puntuación entre 482 y 544 son competentes al nivel 3. Los alumnos con una puntuación por encima de 669 son competentes al nivel 6, mientras que los alumnos con una puntuación por debajo de 358 no alcanzan el nivel 1. Los alumnos por debajo del nivel 1 normalmente no tienen éxito en las tareas matemáticas más básicas que miden PISA y *PISA para Centros Educativos*. Su patrón de respuestas es tal que se esperaría que solucionaran menos de la mitad de las tareas en una prueba compuesta de preguntas preparadas solo para el nivel 1.

Fuente: OCDE, La comparación internacional para la mejora escolar (2015)

Anexo 2

Bloque III

Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

Aprendizajes esperados	Ejes		
	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Forma, espacio y medida	Manejo de la información
• Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con fracciones y números decimales. • Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$; $ax = b$ y $ax + b = c$, donde a, b y c son números naturales y/o decimales. • Resuelve problemas que implican el cálculo de cualquiera de las variables de las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Explica la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.	Problemas multiplicativos • Resolución de problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. • Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional. Patrones y ecuaciones • Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con a, b y c números naturales, decimales o fraccionarios.	Figuras y cuerpos • Construcción de polígonos regulares a partir de distintas informaciones (medida de un lado, del ángulo interno, ángulo central). Análisis de la relación entre los elementos de la circunferencia y el polígono inscrito en ella. Medida • Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.	Proporcionalidad y funciones • Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas. Nociones de probabilidad • Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias. Análisis y representación de datos • Lectura y comunicación de información mediante el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa.

Fuente: SEP. (2011). Acuerdo número 592.

Anexo 3

A 1

Nombre: Fernandez Juan Paola

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

$x = 3 + 12$
$x = -9$

$(-9) + 12 = 3$
$3 = 3$

2. $5.75 + c = 12.8$

$C = 5.75 + 6.33$
$C = 6.33 - 12.8$
$C = 5.75$

$$\begin{array}{r} 6.33 \\ +5.75 \\ \hline 12.08 \end{array}$$

$(6.33) + 5.75 = 12.8$

3. $8.2t - 7 = 19$

4. $x - 936 = 2583$

$x = 936 - 2583$
$x = 1647 - 2583$
$x = -1647$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ -\ 936 \\ \hline 1647 \end{array}$$

5. $-2x = 12$

$2x - 2x = 12$
$- = 6 \times 2$
$- = 2x + 6$
$- = 12$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

10. $\frac{x}{15} = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A8

Nombre: De Sixto Martinez Maria De Jesús

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

X=3-12
X=-9

X+12-12 =3-12
X=3-12
X-9

(-9)+12=3
3=3

2. $5.75 + c = 12.8$

5.75+c=12.8
X=5.75-12.8

X=12.15
X=6
X=-3

(-3)+12.15=12.12

5.75
12.8
12.15
- 3
12.12

3. $8.2t - 7 = 19$

8.2-7=19
8.2=19
19-7=12

X=12
X=6
X=-3

(-3)+12=-9
3X3=9

4. $x - 936 = 2583$

X-936=2583
X=936-1=935

X+936-935
X=-1

(-936)-935=1
1=1

5. $-2x = 12$

-2x1=12-2=10
X=-10

X 12+10
X=22
X=12

$\boxed{X=12}$

6X2=12
12-2=10

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

12.3x+3.4=1.07
X=-1.07

X 3.4+1.07
X =4.47
X =4.47+1.07

X=5.47

554
-1.07
5.47

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$X - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{0}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = \frac{4}{0} = \frac{2}{0} = 1$

9. $-3x + 732 = 243$

$-3x + 732 = 243$

$243 + 732 = 975$

$$\begin{array}{r} 975 \\ \times\ 3 \\ \hline 2925 \end{array}$$

$3 \overline{)2925}$ 9180

32

025

1

0

10. $\frac{x}{15} = 60$

$x\ 15 \times 15 = \frac{245}{60}$

$60 \overline{)245}$ 4070

50

8

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 4 \\ \hline 240 \end{array}$$

$60 = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

$z = \frac{72.4}{82.9}$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 82.9 \\ \times\ 72.4 \\ \hline 2516 \\ 1658 \\ +\ 5703 \\ \hline 579396 \end{array}$$

$R = 579396$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

$x + \frac{3}{5} = -9.3$

$$\begin{array}{r} 9.3 \\ \times\ 5 \\ \hline 465 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.65 \\ -\ 9.3 \\ \hline 38.0 \end{array}$$

$R = 38.0$

A 9

Nombre: Fragoso Silva Ivett

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$
   $x = 3 - 12$
   $x = -9$
   comprobación
   $(-9) + 12 = 3$
   $3 = 3$

2. $5.75 + c = 12.8$
   $x = 12.8 - 5.75$
   $x = 7.05$
   comprobación
   $5.75 + 7.05 = 12.8$
   $12.8 = 12.8$

3. $8.2t - 7 = 19$

4. $x - 936 = 2583$
   $x = 2583 - 936$
   $x = 1647$
   $$\begin{array}{r} 2583 \\ -\ 936 \\ \hline 1647 \end{array}$$
   comprobación
   $1647 - 936 = 2583$
   $2583 = 2583$

5. $-2x = 12$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

10. $\frac{x}{15} = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A 10

Nombre: Mendo Armas Alexis Efren

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

$x = 3 - 12$

$x = -9$

$(-9) + 12 = 3$

$12 - 9 = 3$

$3 = 3$

2. $5.75 + c = 12.8$

3. $8.2t - 7 = 19$

$19 + 8.2t =$

$= +27.2$

$(+27.2) - 7 = 19$

$19 = 19$

4. $x - 936 = 2583$

$x = 2583 + 936$

$x = +3519$

$(+3519) - 936 = 2583$

$2583 = 2583$

5. $-2x = 12$

$12 + 2x$

$= +14x$

$(+14x) - 2x = 12$

$12 = 12$

6. $12.3x + 3.4 = 1.07$

$1.07 -$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$(+\frac{6}{14}) + \frac{3}{2} =$

$+\frac{7}{2} \quad + \frac{3}{2}$

$x = +\frac{6}{14}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

10. $\frac{x}{15} = 60$

$60 = \frac{x}{15}$

$=$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A 11

Nombre: Angel Gabriel Galan Aparicio

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

   $x = 3 - 12$

   $\boxed{x = -9}$

$x + 12 = 3$

$-9 + 12 = 3$

$3 = 3$

2. $5.75 + c = 12.8$

   $c = 12.8 - 5.75$

   $c = 6.32$

$5.76 + c = 12.8$

$5.75 + 6.32 = 12.8$

$\boxed{12.8 = 12.8}$

$$\begin{array}{r} 12.8 \\ -\ 5.75 \\ \hline 17.15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.67 \\ +\ 5.75 \\ \hline 12.12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7.15 \\ +\ 5.75 \\ \hline 12.90 \end{array}$$

$25 = 6$ $+6$ $+.8$ 6.32

3. $8.2t - 7 = 19$

4. $x - 936 = 2583$

   $x = 2583 + 936$

   $\boxed{x = 3519}$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ +\ 936 \\ \hline 3519 \end{array}$$

$x - 936 = 2583$

$3519 - 936 = 2583$

$\boxed{2583 = 2583}$

5. $-2x = 12$

   $x = 12 + 2$

   $\boxed{x\ 14}$

$-2x = 12$

$-2\ 14 = 12$ $\boxed{12 = 12}$

6. $12.3x + 3.4 = 1.07$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

10. $\frac{x}{15} = 60$

$x = 60(15)$

$\boxed{x = 900}$

$60 \times 15 = 900$

$900 \div 15 = 60$

$\frac{x}{15} = 60$

$\frac{900}{15} = 60$ $\boxed{60 = 60}$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

$z = 82.9(72.4)$

$\boxed{z = 6001.96}$

$82.9 \times 72.4 = 6001.96$

$724 \overline{)600196}$ 829

$\frac{z}{72.4} = 82.9$

$\frac{6001.96}{72.4} = 82.9$ $\boxed{82.9 = 82.9}$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A18

Nombre: Martínez Sanabria Diego Josue

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

$x = 3 - 12$

$x = {}^{-}9$

$x = 9$

Comprobación

$x + 12 = 3$

$x = 9 + 3$

$\boxed{12 = 12}$

2. $5.75 + c = 12.8$

$5.75 = 12.8$

$c = 12.8 - 5.75$

$c = 7.67$

Comprobación

$5.75 + c = 12.8$

$c = 7.67 + 5.75$

$\boxed{12.8 = 12.8}$

3. $8.2t - 7 = 19$

$8.2t = 19$

$7 = 8.2t + 19$

$7 = 27.2$

Comprobación

$8.2t - 7 = 19$

$7 = 27.2 - 8.2$

$\boxed{19 = 19}$

4. $x - 936 = 2583$

$x = 2583$

$x = 936 + 2583$

$x = 3519$

Comprobación

$x - 936 = 2583$

$x = 3519 - 936$

$\boxed{2583 = 2583}$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ + \ 936 \\ \hline 3519 \end{array}$$

5. $-2x = 12$

6. $12.3x + 3.4 = 1.07$

$12.3x = 1.07$

$12.3x = 3.4 - 1.07$

$12.3x = 2.7$

Comprobación

$12.3x + 3.4 = 1.07$

$12.3x = 2.7 + 3.07$

$\boxed{1.07 = 1.07}$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

10. $\frac{x}{15} = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A 47

Nombre: Arenas Tapia Levi Miranda

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

$x = 3 - 12$

$x = -9$

2. $5.75 + c = 12.8$

$c = 12.8 - 5.75$

$c = -62.7$

3. $8.2t - 7 = 19$

$t = 19 + 8.2$

$t = 10.1$

4. $x - 936 = 2583$

$x = 2583 + 936$

$x = 3519$

5. $-2x = 12$

$x - 2 + 12$

$x = -14$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

$x = 1.07 - 3.4$

$x = 2.47$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$x + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{4}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

$x3 - 243 - 7$

10. $\frac{x}{15} = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

$x -$

A 75

Nombre: Reyes Escobar Heriberto

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

X=-3 +-12

X= -9

2. $5.75 + c = 12.8$

C=12.8 - 5.75

C=0.5

3. $8.2t - 7 = 19$

X= 8.2 + 7

X= 8.9 + 19

X=10.8

4. $x - 936 = 2583$

X=-2583 + 936

X=3459

$$\begin{array}{r} 2583 \\ +\ 936 \\ \hline 3459 \end{array}$$

5. $-2x = 12$

X=-12+2

X= 14

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

X= 3.4 - 1.07

X= 2.7 - 12.3

X=9.7

7. $x - \frac{3}{2} = - \frac{7}{2}$

$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}$

$x = \frac{5}{14}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}$

$x = \frac{2}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

$x = 732 - 243$

$x = 509$

10. $\frac{x}{15} = 60$

$x = 15 \times 60$

$x = 900$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

$z = 72.4 \div 82.9$

$z = 1.0$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

$x = \frac{9}{3} - \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{9}{3} - \frac{3}{5}$

$x = \frac{9}{45}$

A 88

Nombre: Aline Jimenez Martinez.

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

$x+12=3$
$x=3-12$
$x=-9$

2. $5.75 + c = 12.8$

$c+5.75=12.8$
$c=12.8-5.75$
$c=7.02$

3. $8.2t - 7 = 19$

$8.2t-7=19$
$t=19-7$
$t=12.$

4. $x - 936 = 2583$

$x-936=2583$
$x=2583-936$
$x=3519$

5. $-2x = 12$

$-2x=12$
$x=12-2$
$x=10$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

$12.3x+3.4=1.07$
$x\ 6.1.$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

X3-2=-7-2

X=3 2-7.2

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$X\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$X = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} =$ 40

$X \frac{10}{4}$

9. $-3x + 732 = 243$

3x+732=243.

X= 243+732-

x=5.11

10. $\frac{x}{15} = 60$

X15=60

X60-15

X=75.

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

$\frac{Z}{72.4} = 82.9$

Z=82.9-72.4

Z=15.53.

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A 93

Nombre: Reina Vianey Marquez Guzman

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

   $x = 3 - 12$

   $x = -9$

2. $5.75 + c = 12.8$

   $c = 12.8 - 5.75$

   $c = 7.15$

3. $8.2t - 7 = 19$

   $8.2t = 19 - 7$

   $t = 12$

4. $x - 936 = 2583$

   $x = 936 + 2583$

   $x = 3519$

5. $-2x = 12$

   $x = -2 - 12$

   $x = 10$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

   $x = 3.4 - 1.07$

   $x = 2.3 \div 12.3$

   $x = 6.1$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2}$

$x = \frac{10}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$

$x = \frac{10}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

$x = +243 - 732$

$x = 489 - 3$

$x = 486$

10. $\frac{x}{15} = 60$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

A 96

Nombre: Jaime Eduardo Tolentino Gayosso 2°G

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

$x = 3 - 12$

$x = -9$

2. $5.75 + c = 12.8$

$c = 12.8 - 5.75$

$c = 7.05$

$$\begin{array}{r} 12.80 \\ -\ 5.75 \\ \hline 07.05 \end{array}$$

3. $8.2t - 7 = 19$

$t = 19 + 7 - 8.2$

$t = 3.8$

$$\begin{array}{r} 19.0 \\ -\ \cancel{8}8.2 \\ \hline \cancel{20} \\ 10.8 \\ -\ 7.0 \\ \hline 3.8 \end{array}$$

4. $x - 936 = 2583$

$x = 2583 + 936$

$x = 3519$

$$\begin{array}{r} 2583 \\ +\ 936 \\ \hline 3519 \end{array}$$

5. $-2x = 12$

$x = 12 + 2$

$x = 14$

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$

$x = 1.07 - 3.4 - 12.3$

$x = 8.9$

$$\begin{array}{r} 12.3 \\ -\ 3.4 \\ \hline 8.9 \end{array}$$

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$

$X = 243 - 732 + 3$

$X = 486$

$$\begin{array}{r} 732 \\ -\ 243 \\ \hline 489 \\ -\ 3 \\ \hline 486 \end{array}$$

10. $\frac{x}{15} = 60$

$X = 4$

$15\overline{)60}$ 4, 60

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$

$Z = 10.5$

$72.4\overline{)82.9}$ 1

$$\begin{array}{r} 82.9 \\ -\ 72.4 \\ \hline 10.5 \end{array}$$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$

n 97

Nombre: Joan Gael Espinoza Ramirez 2 G

Instrucciones: Lee detenidamente; en las siguientes ecuaciones obten el valor de cada letra despejandola y anota las operaciones que realizaste en cada caso (resuelve con pluma de tinta negra).

1. $x + 12 = 3$

   X= 3 + 12

   X= -9

2. $5.75 + c = 12.8$ =

   c =+12.8 - 575

   c =-44.7

   575 - 12.8 = 447

3. $8.2t - 7 = 19$ =

   8.2 t = 19 + 7

   8.2 t = - 12

   t = -12 / 8.2

   t=-6

4. $x - 936 = 2583$ =

   X=2583 + 936

   X=+1647

   2583 - 936 = 1647

5. $-2x = 12$ =

   x = 12 - 2

   X= - 10

   1.07 - 34 = 73

6. $12.3\,x + 3.4 = 1.07$ =

   12.3x = 1.07 - 3.4

   12.3x= - .73

   x = - 73/123

   x =-.50

   73 ⟌12.3 = 1

7. $x - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$ $= x = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}$

$x = -\frac{4}{2}$

8. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ $= x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}$

$x = \frac{6}{3}$

9. $-3x + 732 = 243$ $= -3x = 243 - 732$

$-3x = -489$

$$\begin{array}{r} 732 \\ -243 \\ \hline 489 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ \times 3 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times 3 \\ \hline 72 \end{array}$$

$3\overline{)489}$

10. $\frac{x}{15} = 60$ $= x = +60 + 15$

$x = +75$

11. $\frac{z}{72.4} = 82.9$ $= z = +82.9 + 72.4$

$z = 953$

$$\begin{array}{r} 72.4 \\ +\ 82.9 \\ \hline 953 \end{array}$$

12. $x + \frac{3}{5} = -9.3$