Secretaría de Educación Pública

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD S.E.A.D. 311 MERIDA, YUCATAN

LICENCIATURA EN EDUCACION PRIMARIA

Análisis de la Enseñanza de las Fracciones en la Escuela Primaria

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

Licenciado en Educación Primaria

PRESENTA

LINA MARIA DEL SOCORRO MONTERO FLORES

MERIDA, YUCATAN, MEXICO.

A mis Viejecitas

Mamá y Ana

A Jorge

Mi incomparable esposo y amigo

A mis queridos hijos

T E M A R I O

P R O L O G O

Mucha ha sido la preocupación a través de mis años de trabajo sobre el tema de Fracciones por la gran dificultad que los niños presentan para asimilarla. Eso me ha llevado a hacer un análisis del contenido de los programas en la Escuela Primaria y la manera como son tratados en la enseñanza, para poder con esto disipar mis dudas acerca de este tema en el Sexto Año, ya que ese es el grado que he estado trabajando y en donde me he dado cuenta de que muchos niños llegan y salen de él con deficiencias que nunca logran superar y que en sus estudios posteriores constituyen un lastre que les dificultan la cabal comprensión de muchos temas relacionados con fracciones.

A fin de conocer la opinión y la manera en que mis compañeros -- maestros tratan estos temas realicé una encuesta entre 63 maestros -- que me dejó la impresión de que los compañeros consideran adecuado el programa y fácil la manera de enseñar estos conocimientos, lo que está en contradicción con el aprendizaje de los alumnos cuyas deficiencias comenté al principio.

El presente trabajo abarca: concepto, notacion, representación - en la recta numérica, fracciones equivalentes, orden entre las fracciones y fracciones decimales, no pudiendo extenderme hasta los otros temas porque iba a resultar un trabajo muy extenso o incompleto, y hubiese tenido que acortar o hacer a la ligera los comentarios y sugerencias; decidí tomar en cuenta únicamente los anteriores, por considerarlos de mucha importancia y básicos en el manejo de las fracciones y -- durante mi análisis señalo lo que a mi juicio constituyen deficiencias programáticas y al mismo tiempo sugiero algunas actividades a seguir para alcanzar los objetivos propuestos en el programa.

Puedo afirmar que el escaso índice de aprovechamiento en el tema de fracciones es más que nada debido a que nosotros los maestros no - realizamos las actividades sugeridas por el programa y nos limitamos a efectuar los ejercicios tal como se señalan en los cuadernos de trabajo sin determinar cuáles de ellos o hasta que parte de algunos de - - ellos es conveniente para el objetivo que se pretende alcanzar, pues a veces como lo señalo en mi análisis,hay ejercicios q. sirven hasta para tres o más objetivos. Espero que los presentes comentarios puedan servir en algo para mejorar la preparación de nuestros alumnos en este -- nuestro tan mencionado tema de Fracciones.

C A P I T U L O I

CONCEPTO DE FRACCION

En la escuela primaria el concepto de fracción debe darse:

a) Como parte de una unidad

b) Como parte de un conjunto

c) Como el resultado de una división.

d) Como una comparación de dos números (razón)

1.1.- LA FRACCION COMO PARTE DE UNA UNIDAD.- José E. Rozán dice "cuando se divide la unidad principal en cierto número de partes iguales, cada una de dichas partes se llama unidad fraccionaria. Los números formados por una o varias unidades fraccionarias se llaman fracciones o quebrados comunes".

Se debe tener mucho cuidado al manejar este concepto de igualdad, ya que puede prestarse a confusiones. Es conveniente que al usarle se exprese también la característica que determina esa igualdad. En este caso nos referimos a la igualdad en cantidades y no a otra cualidad.

El concepto de fracción como parte de una unidad es el que se maneja desde el segundo año con los ejemplos de una pelota, un pastel y una sandía para el conocimiento de 1/2 1/3 y 1/4.

En el auxiliar didáctico de Matemáticas del segundo grado encontramos las siguientes actividades para la enseñanza de fracciones como parte de un objeto:

El maestro puede plantearle a los alumnos que con frecuencia nos encontramos ante el problema de partir algo en dos partes, de tal mane ra que estas dos partes tengan algo en común. Puede tomarse una hoja de papel y romperla en dos partes iguales haciéndoles ver a los niños:

1.- Que cada parte tiene el mismo tamaño pues las podemos superponer de manera que coincidan. (Son congruentes)

2.- Que las dos partes unidas de manera adecuada forma de nuevo la -- hoja completa con que habíamos empezado.

Con actividades semejantes se pueden presentar las fracciones - - 1/3, 1/4, etc.

Uno de los objetivos de las lecciones de fracciones en tercer grado dice: "Llevar al niño al concepto de quebrado concibiéndolo como un fragmento de uno o varios objetos iguales".

En las lecciones 79 y 80 del libro de tercer año se introducen - los quebrados como fracciones de un objeto haciendo que el niño piense en los quebrados 1/2, 1/3, ... 1/10 como cada una de las fracciones de una cosa que resulta de dividirla en partes iguales". En las lecciones 88 y 89 se continúa la presentación de los quebrados como fracciones de un objeto y se inicia la suma de quebrados. En la lección 88 se introducen quebrados como 2/3 pero se ven con la misma idea de las lecciones anteriores como el nombre y símbolo del fragmento de una cosa.

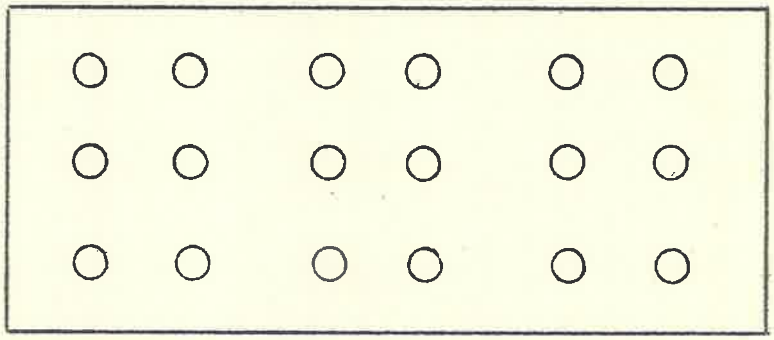
En el cuarto grado con ejercicios de la lección 15 páginas 40 y - parte de la 41 también se le plantea al niño la fracción como parte -- igual de un objeto y encontramos el dibujo de los medios de naranja, - tercios de dulce, cuartos de pastel y quintos de un terreno, luego - - otras fracciones con figuras geométricas.

En el quinto grado la lección 10 trae el conocimiento de la fracción como parte de una unidad relacionándolo en forma adecuada con figuras geométricas (páginas 31, 32 y parte de la 33).

En el sexto grado en la parte correspondiente al compendio en las páginas 144 y 145 encontramos con dibujos de rectángulos y círculos -- las fracciones considerándolas como parte de un objeto.

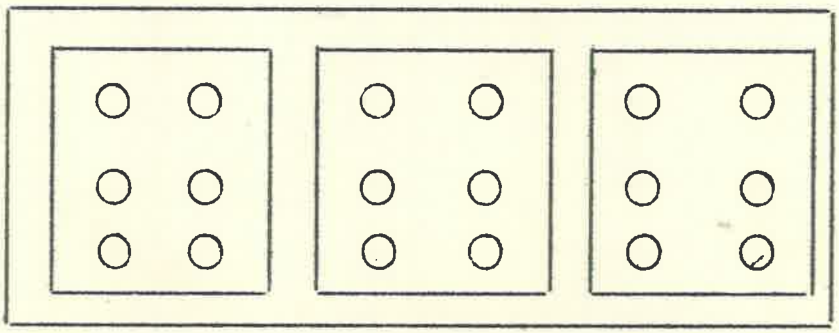
Como nos podemos dar cuenta este conocimiento se viene desarrollando adecuadamente a lo largo de toda la enseñanza primaria y en cada grado el maestro debe tener especial cuidado de la comprensión y alcance de este objetivo.

1.2 CONCEPTO DE FRACCION COMO PARTE DE UN CONJUNTO.- Para llegar a este concepto se pide al alumno que observe el siguiente conjunto M



y se le pregun a: ¿cuál es su cardinal?

Si se forman 3 subconjuntos de M que tengan el mismo cardinal.

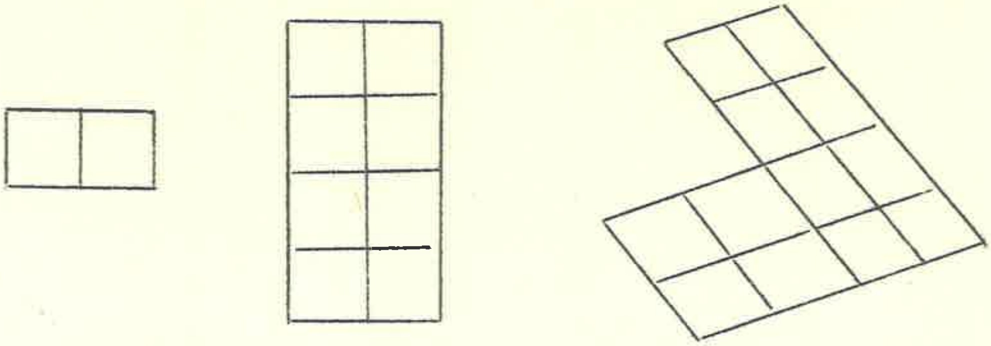


El cardinal de cada subconjunto será el 6 y el conjunto estará dividido en 3 partes (tercios). Si formamos ahora un nuevo conjunto N con 2 de estos subconjuntos decimos que está formado de 2/3 del anterior, - porque de los 3 subconjuntos hemos tomado 2. Este concepto de fracción como parte de un conjunto va, en su enseñanza, a la par con la fracción como parte de una unidad. Creo conveniente advertir que el maestro no debe descuidar esta idea para evitar que los niños puedan reconocer fracciones únicamente cuando se les presenta un objeto dividido en partes iguales, y estar completamente descontrolados cuando se trata de reconocerlos en un conjunto.

En la Didáctica de segundo año, pag. 73, encontramos la siguiente actividad: hacer pasar al frente del salón a 10 alumnos, formar con -- ellos dos filas de manera que:

1.- Cada fila tenga el mismo número de alumnos. 2.- Las dos filas constituyen el total. En tal caso se pueden concluir que en cada fila hay la mitad del número total de niños elegidos. Esto es 1/2 (un medio del total original).

Esta actividad está relacionada con un punto muy importante de -- las fracciones de un conjunto (que no interesa el tamaño de los objetos del conjunto sino el número de objetos dentro de él). En el libro de texto de segundo grado página 106 le pide al alumno que coloree de cada figura la mitad.



Esta actividad me parece muy interesante puesto que el niño se ve obligado a tomar en cuenta el número de regiones y determinar 1/2 de cada conjunto.

En el libro de tercer grado nos encontramos que en la lección 79 para señalar un medio del rectángulo, tiene que contar cuatro cuadritos y señalar 2 como su mitad.

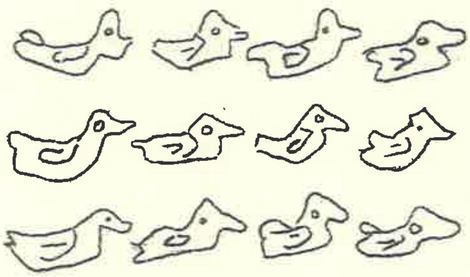
En la Didáctica de 4º grado encontramos una recomendación que debíamos tomar en cuenta y dice así: "Debe notarse que el objeto que se divide en partes iguales no tiene por qué ser un objeto unitario, como una naranja, sino que puede ser una colección(por ejemplo 12 canicas)"

En el libro de 4º grado en la página 42 y 43 encontramos ejemplos sobre fracciones como parte de un conjunto derivándolas de situaciones que ojalá las comentáramos en la clase para que todos los alumnos lo comprendan. Si se pudiera hacer objetivamente como se trata de niños, bien podían juntarse en grupos.

En el libro de 5º año encontramos en la página 34, 35 y 36 ejercicios sobre fracciones como partes de un conjunto de estrellas, círculos, triángulos, hexágonos, flores, autos, objetos variados, hombres (en forma objetiva) y otro ejercicio ya como para obligarlos a pensar en las situaciones. Un equipo de futbol y otros por el estilo -

que me parecen muy adecuados.

En el quinto año ya se comienza el tema de probabilidad que puede servirnos de mucho para practicar las fracciones como parte de un conjunto, en la lección 61 ya se sacan las probabilidades tomando en cuenta el total y la parte con la característica deseada. Como por ejemplo ante un dibujo de patos. El número total de patos es 12.



El número de patos en el evento "pato blanco y pico amarillo" es 3, pero como son de un conjunto de 12 entonces se dice 3/12 y así se va - -- guiando el niño para sacar la probabilidad que no es más que la fracción como parte de un conjunto. En - la lección 63 se siguen estos ejercicios de probabilidad que los po- - dríamos relacionar mejor con otros temas de fracciones más adelante. Es importante hacer notar una recomendación que trae la Didáctica de - quinto año en estos temas de probabilidad, ya que me parece muy acertada para nuestro trabajo, que es procurar que todos los niños aprendan y no ver cuántos sacan más que los otros. Esto ltimo tiene resultados negativos, pues no constituye refuerzo para el estímulo sino que lo anula completamente. Dice así:

"Como recomendación general debe tenerse en cuenta que el trabajo mental que el niño tiene que hacer para resolver estas lecciones es -- esencialmente analítico no se trata de que reproduzca nada que haya - aprendido de memoria. Por lo tanto es obvio que algunos niños avanza--

rán más lentamente que otros y que algunos necesitarán más ayuda del maestro. El objetivo no es calificar qué tanto de la lección hizo el niño, sino ayudar a los niños para tratar de que todos puedan entender y resolver todo en cada lección".

En el libro de 6º año también la probabilidad la podemos aprovechar para afirmar el concepto de fracción como parte de un conjunto de otros temas. Lección Azar y Probabilidad. Páginas 34, 35 y 36.

1.3.- CONCEPTO DE FRACCION COMO UNA DIVISION.- A pesar de que históricamente, como veremos a continuación, el concepto de fracción surgió con el problema de la división no exacta, didácticamente se les presenta a los niños mediante los otros conceptos apuntados anteriormente por ser más fáciles de comprender.

Historia.- Tomado del Libro Matemáticas 2 Educación Media Básica, de Carlos Reynoso.

"Los números racionales (como 1/2, 1/3, 2/5, 4/8, etc.) tienen una larga historia. Los manejaron ya los egipcios hace más de 2,000 años y también los babilonios, aunque no los llamaban así, claro está. El hombre histórico los inventó antes que los negativos. Y es natural resultaron necesarios en el momento que hubo de medir cantidades que ya no eran caballos o flechas o personas sino distancias o simplemente cuerdas.

Se ve muy fácil también en problemas de reparto. Imagínate hay que repartir 7 mandarinas entre 5 niños, no se puede repartir exacto, pero como cada mandarina tiene 5 gajos, sensiblemente iguales, pues repartimos los gajos. A cada niño le tocarían 7 gajos y como cada gajo -

es un quinto de mandarina en realidad a cada niño le tocarían 7/5 de mandarina. Se pone de la manera siguiente: 7 ÷ 5 = 7/5 y esto es un número racional porque es una fracción. Estamos ante una nueva clase de números y así resolvemos siempre el problema de la división".

Con el número racional siempre podremos dividir dos números cualesquiera, cosa que no se podía hacer con los números naturales, ni tampoco con los enteros.

Por ejemplo: dividir 1 ÷ 3 la verdadera división exacta es 1 ÷ 3 = 1/3.

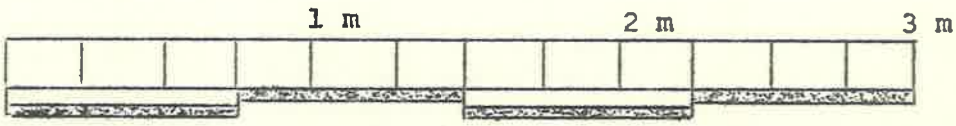
En efecto hacemos la prueba o sea multiplicamos por el divisor 1/3 x 3 = $\frac{3}{3}$ = 1. Es decir nos da el dividendo. Esto prueba que nuestra división está bien hecha.

En la Didáctica de 4º grado (pag. 85) se explica la razón por la cual no se ha resaltado ni mucho menos formalizado el concepto de fracción como el resultado de una división y es la siguiente: debe tomarse en cuenta el significado de los resultados del problema que se esté resolviendo. Por ejemplo si 3 niños se dividen entre ellos 14 canicas, a cada uno le tocan 4 canicas porque 14 ÷ 4 = 3 y sobran 2. El resultado de esta división se puede expresar 14 ÷ 3 = 4 2/3, pero de que a cada niño le toca 4 2/3 canicas implicaría que hay que romper 2 canicas que sobran para darle 2/3 a cada uno lo cual no se hace. Pero si en lugar de canicas fueran barras de chocolate los niños insistirían en que se les dieran 2/3 adicionales por lo cual 4 2/3 sí tendría sentido. A continuación esbozamos la lección complementaria que se pone a juicio del maestro para presentarla o no. Este sería el primer paso para la formalización de fracción como una división. Opino que el maestro debía presentarla y después de la abstracción hacerle ver que no siempre los resultados numéricos son realizables en la práctica poniéndole un ejemplo como el anterior de las canicas.

"Lección suplementaria:

En el comedor de un internado las mesas son para 4 niños. Para el desayuno ponen en cada mesa 1 litro de leche, que se dividen en partes iguales entre los 4 niños; a cada uno le toca $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ litro.

Queremos cortar una correa de 3 metros en 4 partes del mismo largo para hacer cinturones.



Hay 3 metros juntos y los dividimos en 4 partes iguales en longitud $3 \div 4 = 3/4$.

Dividimos la correa en 12 cuartos y tomamos 3.

Hay otros ejemplos pero a mí me parecen estos dos bastante adecuados para el aprendizaje del concepto de fracción como una división, ya que los otros se pueden relacionar con otros temas.

1.4 FRACCION COMO EL RESULTADO DE UNA COMPARACION DE DOS NUMEROS. (RAZON).-

Razón es la comparación por cociente, es decir por división de dos cantidades. Ejemplo: ¿Qué es 6 de 3? 6/3. Es el doble. ¿Cuál es la razón de 4 a 20? es 4/20 es decir, 1/5. Esto es 4 es 1/5 de 20.

Esta idea de la fracción como razón se presenta al niño desde 4º año, pero en forma intuitiva ya que ni siquiera representa el numeral, sino únicamente en base a la comparación objetiva de dibujos, el tema escalas, logra reafirmar la idea de que dos cosas que son lo mismo --- pueden cambiar de tamaño. Es hasta en el sexto año donde la fracción - como razón se presenta en forma precisa en el tema escalas.

1.5.- DEFINICION FORMAL.- Aunque esta definición no llega a ser presentada a los alumnos de la escuela primaria es conveniente que el maestro la conozca a fin de que, si en los grados superiores surge la oportunidad, se las dé a conocer a sus alumnos.

*"Número racional, número fraccionario y fracción quiere decir -- lo mismo, a saber, un número que tiene la forma a/b donde a y b son números enteros no negativos y b $\neq$ 0. Estas formas son llamados números fraccionarios.

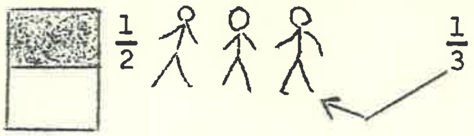
Así 4/5 es un número fraccionario. También 6 es un número fraccionario porque puede representarse por medio de un numeral 6/1. También .65 es un número fraccionario porque tiene un equivalente de la forma $\frac{a}{b}$ por ejemplo $\frac{65}{100}$.

Cada uno de los números fraccionarios tiene muchos equivalentes $\frac{a}{b}$. Algunos de los numerales fraccionarios para 0.2 son: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$ $\frac{20}{100}$, $\frac{50}{250}$*.

* Tomado de la obra "Matemáticas para el Maestro de Enseñanza Elemente" de Eugene D. Nichols.- (Pág. 227)

C A P I T U L O II

NOTACION DE FRACCION

2.1. FRACCIONES COMUNES.- Desde el segundo año ya comienza la notación, puesto que el niño debe representar con numerales las fracciones que maneje 

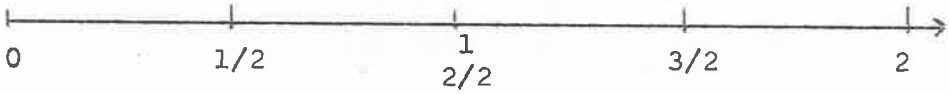
pero sólo en forma visualizada.

En tercer año el segundo objetivo de fracciones dice: introducir los quebrados y su escritura numérica como nombres y símbolos de ciertos fragmentos de un objeto representándolos después en forma abstracta como puntos en la recta numérica haciendo notar la correspondencia entre distintos nombres de un quebrado (forma fraccionaria y forma mixta).

Las lecciones 79 y 80 de tercer año sirven para que el niño identifique la regla para escribirlos numéricamente. Estas expresiones numéricas se presentan como símbolos que dan nombre a los fragmentos que se obtienen al dividir en partes iguales casos específicos. Por ejemplo $\frac{1}{4}$, 4 representa que hemos dividido en 4 partes iguales y de ellas hemos tomado 1.

Las lecciones 88 y 89 también insisten en la notación y es precisamente en esta 89 donde se le dan a conocer los nombres numerador arriba de la raya y denominador debajo de ella.

En las lecciones 100 y 101 del libro de tercer año se introduce la notación de números mixtos, para esto el niño ya debe tener bien aprendido que la fracción que tiene el mismo número como denominador y numerador es igual a 1. Se puede hacer la representación de estos núme ros en la recta numérica para mejor comprensión. Por ejemplo la frac-- ción $\frac{3}{2}$



como $\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{2}{2} = 1 \qquad 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

o también $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

También en esta lección 101 se pasa de la forma mixta a la forma fraccionaria. Por ejemplo tenemos la fracción $3\frac{1}{3}$. Como en este grado no se ha hablado de multiplicación, pues se hace de la manera si- - guiente que considero la más acertada para que la comprenda el niño.

En el mixto $3\frac{1}{3}$: primero el 3 está formado de 1 + 1 + 1 el valor de 1 en fracción es $\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{9}{3}$

$3 = \frac{9}{3}$, $\frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ $\qquad 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Es preciso hacer notar la gran importancia que tiene el que los - niños conozcan la equivalencia de 1, toda fracción que tenga igual el numerador y el denominador. Para poder llegar al concepto de número - mixto.

En cuarto año en las primeras lecciones 15 y 17 para ser más exactos también se insiste en la notación para que se den cuenta que el denominador es el que indica las partes en que se dividió la unidad o el conjunto y el numerador las partes que utilizamos de ello.

2.2. FRACCIONES DECIMALES.- En la lección 55 del libro de cuarto año se trata la notación decimal relacionada con la fraccionaria pero únicamente en forma visual $\frac{1}{10}$ = .1 m; $\frac{1}{100}$ = .01; $\frac{1}{1000}$ = .001 m.; y en la lección 82 también hace esta relación en la notación, pero para los gramos y los litros,ejemplo:

1 gramo = $\frac{1}{1000}$ kilogramo = 0.001 kilogramo

1 mililitro = $\frac{1}{1000}$ litro = 0.001 litro. Aquí únicamente se emplean -- los milésimos.

En la lección 20 del libro de quinto año también trabaja la notación decimal y la fraccionaria para que los alumnos lleguen a comprender que la expresión o número decimal es otra forma de escribir una -- fracción decimal. Ejemplo: $4.7 = 4 + \frac{7}{10} = 4 + 0.7 = 4.7$. Aquí además se hacen ejercicios para escribir con letras dichos números, es decir como los leemos.

Es hasta el sexto grado que el niño llega al concepto de que la - mayor parte de las fracciones comunes pueden escribirse en forma decimal dividiendo el numerador entre el denominador.

Ejemplo: $\frac{3}{4} = 4 \div 3 = .75$

y digo la mayor parte ya que $\frac{1}{3}$ = . 3 3 3 3 3 3 hasta el infinito.

C A P I T U L O III

REPRESENTACION EN LA RECTA NUMERICA

3.1 CONSTRUCCION.- La representación de fracciones en la recta numérica viene a enriquecer y a hacer más objetiva.

Desde el segundo año se debe empezar a hacer la representación de las fracciones en la recta según como se vayan conociendo. En la Didáctica sugieren un ejercicio con el largo del lápiz para motivar al niño para esta actividad de la recta; pero me parece un tanto abstracta, ya que el niño debe imaginarse que es la mitad de su lápiz y deberá marcar el largo del lápiz. Me parece más factible para ellos pegar en el pizarrón dos tiras de papel. Una entera y una a la mitad. Una debajo de otra, si se quiere separándolas y repartirle a los niños que estarán en equipo, tiras de distinta medida para que ellos elijan la que servirá para completar la tira que representa $\frac{1}{2}$, para igualarla a la otra que representa 1. Más adelante en una hoja de cuadritos trazarán una línea que marcarán del 0 al 1. Después marcará $\frac{1}{2}$ ya sea contando los cuadritos o tomando una tira de la misma medida que su línea y doblándola a la mitad y tomando esto como medida, marcarán en su línea $\frac{1}{2}$ o la fracción que sea.

3.2. EL INVERSO MULTIPLICATIVO.- El maestro podrá recurrir al salto de la rana; pero presentando 2 una grande y una chica y hacer ver al niño que la rana chica da un salto que es $\frac{1}{2}$ de lo que salta la grande. Esto es la base para que en un futuro entienda lo que es el inverso multiplicativo: 2 es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$, 3 de $\frac{1}{3}$, 4 de $\frac{1}{4}$, etc. Esto es porque al multiplicar la fracción con numerador 1 por un entero igual al denominador, el resultado es 1. Ejemplo:

$$3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Entendemos que el concepto de inverso multiplicativo no lo manejará el niño, pero el maestro debe tenerlo presente para hacer así más efectiva su enseñanza. El niño sólo llegará a que 2 veces $\frac{1}{2}$ hacen 1 ó 3 veces $\frac{1}{3}$ hacen 1.

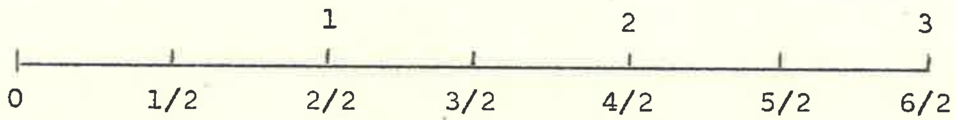
3.3 FRACCIONES IMPROPIAS.- Me parece muy adecuado el ejercicio de la lección 97, página 249 del libro de tercer año para representar $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ en las rectas numéricas dadas. Aquí el alumno debe llegar a notar que $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{4}{4} = 1$, etc., y en general todo número fraccionario con igual numerador y denominador será 1. Sugeriría que además de ese ejercicio se hicieran otros usando cuadrícula.

En la lección 100 página 259 utilizan la representación de las fracciones en la recta numérica formando números mixtos.

También usan en este grado la recta numérica para representar las sumas de fracciones.

En el cuarto año en la lección 29, página 76 se representan las fracciones en las rectas numéricas dadas, pero con varios números enteros y se señalan las fracciones equivalentes a 1, 2, 3. Ejemplo:

$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4}$ $\qquad 2 = \frac{4}{2} \ \frac{6}{0} \ \frac{8}{4}$ $\qquad 3 = \frac{6}{2} \ \frac{9}{3} \ \frac{12}{4}$

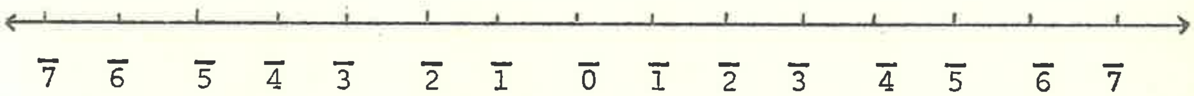


Hasta este grado notamos que para representar las fracciones en la recta numérica se utilizan varias rectas, es decir, una para medios, para tercios, cuartos, etc., lo que consideramos acertado. Debo aclarar que el libro de segundo año página 112 hay un ejercicio con recta numérica, que únicamente debe ser hecho como está, es decir, para comparar las fracciones y no para que el niño las marque en una sola recta numérica.

También usa la recta numérica para representar sumas y restas de fracciones.

En <u>quinto año</u> en la lección 13 notamos que ya se representan distintas fracciones en una sola recta numérica y luego en la lección 68 otros ejercicios para marcar fracciones en las rectas. Sugiero que el maestro debía realizar más ejercicios, pues considero que estos son insuficientes.

En el <u>sexto año</u> en el ejercicio Los números en la recta se pide a los niños lo siguiente:



Representar en la recta numérica anterior las siguientes fracciones:

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{4}$, $5 + \frac{1}{3}$, $2 + \frac{1}{2}$.

Este ejercicio con todo lo que el niño ha aprendido a través de sus años anteriores, no debía resultarle difícil, sin embargo hay que hacer muchos ejercicios de preparación para que puedan realizar lo antes expuesto. Creo que esto se debe a que dada la abstracción que -- significa representar los números en la recta numérica, no le damos la atención que se merece, desaprovechando la gran utilidad que tiene en temas como Comparación de Fracciones y Fracciones Equivalentes y no se diga de las Sumas y Restas de Fracciones.

C A P I T U L O IV

FRACCIONES EQUIVALENTES

FRACCIONES COMUNES.- Las fracciones equivalentes son diferentes formas de escribir el mismo número:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25} = \frac{6}{30} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 \times n}{5 \times n}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \frac{5}{30} = \frac{6}{36} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 \times n}{6 \times n}$$

y en forma similar para cualquier otro caso. Podemos indicar en general que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$$

es decir dada una fracción se pueden obtener fracciones equivalentes a ella multiplicando el numerador y denominador por el mismo número.

También es cierto que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

es decir, se pueden obtener fracciones equivalentes a una dada dividiendo su numerador y su denominador por el mismo número (siempre y cuando ambos sean divisibles por ese número).

Así podemos reducir fracciones a un común denominador:

Sean por ejemplo $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20} \qquad\qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$

en general si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones que se quieren expresar con el mismo denominador, procedemos así:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones equivalentes, entonces:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

como los denominadores son iguales, entonces los numeradores también lo son:

$$a \times d = c \times b$$

Esto nos dice que en fracciones equivalentes y sólo en fracciones equivalentes los productos "cruzados": numerador de una por denominador de la otra son iguales:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \quad \text{puesto que } 2 \times 6 = 3 \times 4$$

Por esto último se da como definición formal lo siguiente: "Dos pares de números enteros (a,b) y (c,d) se dice que pertenecen al mismo conjunto de equivalencia o que son equivalentes si y sólo si $a \times d = B \times c$ $(b \neq 0,\ d \neq 0)$"*

El programa sobre la enseñanza de la equivalencia de fracciones se desarrolla en los libros de texto de la siguiente manera:

En el <u>segundo año</u> no hay ningún tema específico sobre equivalen--

* Tomados de la obra "Matemáticas para el maestro de Enseñanza elemental"de Eugene D. Nichols pág. 228

39563

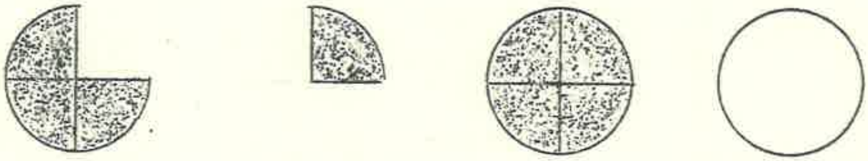
cia.

En el tercer año se empieza a desarrollar el concepto de equivalencia de fracciones mediante la conversión de mixtos a fraccionarios y la expresión de la unidad en forma fraccionaria.

En la lección 89 del libro de tercer año comienza a tratarse en forma objetiva, el concepto de equivalencia de una unidad en forma fraccionaria, para ello utilizan la suma y la idea es, que se se agregan fragmentos de una cosa que ha sido dividida se recuperará la cosa entera (unidad). Mediante este modelo se introducen las igualdades $\frac{2}{2} = 1$, $\frac{3}{3} = 1$, etc.

Un ejemplo del ejercicio es el siguiente:

Si juntas todas las partes de una galleta, obtienes una galleta



$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

En la segunda parte del ejercicio sólo se presentan los numerales y el niño pondrá lo que le haga falta, ejemplo $\frac{8}{\square} = 1$

Termina la lección con situaciones prácticas de la vida diaria para que el niño vaya acostumbrándose a aplicar sus conocimientos. Ejemplo: "Si Adolfo y Benito tienen un melón y Adolfo se come $\frac{3}{5}$ de melón, a Benito le quedan $\boxed{\frac{2}{5}}$ de melón.

En la lección 97 comienza el niño a considerar las fracciones desde un punto de vista más abstracto, pues ya se le presentan en la recta numérica. La actividad a realizar es la de identificar fracciones marcadas con cruces en nueve rectas numéricas; desde una recta dividida en medios hasta la de los décimos, y en cada una, además de otras fracciones, irá poniendo en el mismo lugar que 1, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{10}{10}$. Sigue el ejercicio con comparación de números que ejemplificaré más adelante y termina con sumas.

Es oportuno hacer mención, que el maestro debe tener en cuenta que en cada lección del texto están incluidos varios objetivos específicos, como en la lección anteriormente citada en la que encontramos: equivalencia, comparación y suma, íntimamente relacionados. En mi opinión estos objetivos debían ser tratados uno por uno y procurar no pasar al otro si no se ha alcanzado el anterior.

Las lecciones 100 y 101, tratan sobre fracciones mayores que la unidad (impropias) y números mixtos. Estos números surgen como nuevos nombres de dichas fracciones y de esta manera se introducen los términos: parte entera y parte fraccionaria.

En la lección 100, primero mediante la observación de dibujos se da idea de números mayores que la unidad, luego se representan dichos números en rectas numéricas dadas que llegan hasta el 3 y el niño irá escribiendo algunas fracciones en dichas rectas como: $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{10}{4}$, etc.

En otra parte de la lección, con dos ejemplos, se le muestra al niño la equivalencia de algunas fracciones mayores que uno y su forma mixta: parte entera y fraccionaria. Esto lo observará en la recta numérica. Ejemplo

$\frac{3}{2}$ significa que tenemos

uno:

y un medio:

Con números uno y medio se escribe: $1\,\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}$ también se escribe $1\,\frac{1}{2}$

Continúa la lección con una serie de actividades que pretenden que mediante la observación de rectas numéricas se establezca la equivalencia entre la fracción impropia y el número mixto. Termina la lección con la comparación entre algunos números, utilizando para ello la relación $>$ (mayor que) y $<$ (menor que).

En la lección 101 después de la presentación objetiva de la equivalencia entre una fracción impropia y un número mixto expresado éste como la suma de un número entero y una fracción, se llega hasta el algoritmo para convertir un número mixto a una fracción impropia. Ejemplo: para escribir 3 en quintos podemos hacer esto:

$$3 = 1 + 1 + 1 = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{5}{5} = \frac{5 + 5 + 5}{5} = \frac{15}{5}$$

abreviando la suma con una multiplicación quedaría así:

$$3 = \frac{3 \times 5}{5} = \frac{15}{5}$$

Ahora podemos escribir números mixtos en forma de fracciones Ejemplo:

$$4\,\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{4 \times 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

Después de aplicar varios objetivos se le da al niño la regla:

Para escribir un número mixto en forma de quebrado, el numerador se obtiene multiplicando la parte entera por el denominador y sumando el numerador de la parte fraccionaria; el denominador es el mismo.

Ejemplo: $4\,\frac{1}{5} = \frac{4 \times 5 + 1}{5} = \frac{21}{5}$

En el cuarto grado se presentan los siguientes objetivos:
1.- Reafirmar lo visto en el tercer grado. 2.- Desarrollar el concepto de equivalencia. 3.- Introducir común denominador a través de la equivalencia con el objeto de hacer comparaciones, sumas y restas de fracciones.

Se puede decir que el objetivo principal del cuarto grado es la equivalencia de fracciones y eso es debido a que este concepto proporciona la manera de elaborar algoritmos que permitan efectuar comparaciones y operaciones con fracciones.

Las lecciones: 15, 17, 19, 29 y 37 del libro del alumno son considerados como repaso de lo visto en el grado anterior. La lección 17 inicia la equivalencia de fracciones con ejemplos como los siguientes:

$$\frac{2}{9} + \frac{\boxed{7}}{9} = \frac{\boxed{9}}{\boxed{9}} = 1$$

En la lección 29 encontramos las equivalencias de:

$$1 = \frac{2}{2} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{5}{5} \qquad 2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} \qquad 3 = \frac{69}{23} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$$

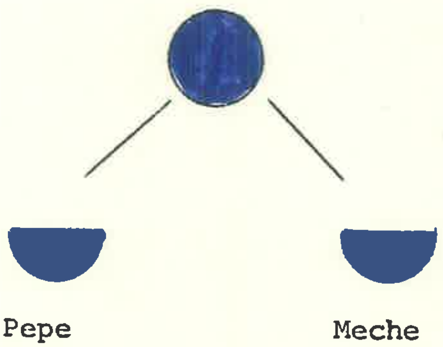
Debajo de este ejercicio vemos en negrillas lo siguiente:

Observa que has escrito cada uno de los números 1, 2 y 3 de varias maneras distintas, que llamaremos equivalentes"

En la lección 40 se continúa de manera más formal el concepto de equivalencia. El ejercicio se basa en el siguiente principio: si se reparte un objeto entre cierto número de personas y duplicamos, triplicamos o cuatruplicamos, etc. tanto la cantidad que se reparte como el número de personas entre las que se reparte, en todos los casos, cada persona recibe exactamente la misma cantidad. Lo que cambia es la representación aritmética (numeral) o sea la forma de escribir el número y se obtienen así las fracciones equivalentes o sea las distintas maneras de escribir una fracción.

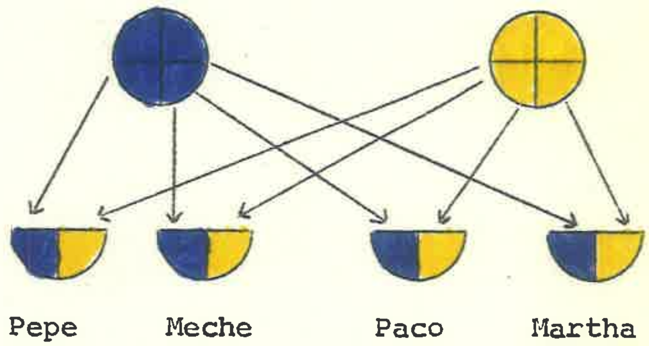
La situación es la siguiente:

Pepe y Meche tenían un pastel azul para repartírselo ente los 2



A cada uno le iba a tocar 1/2 de pastel

Llegaron Paco y Martha con un pastel amarillo y decidieron repartirse los 2 pasteles entre los 4 y



A cada uno le tocaron 2/4 de pastel

En ambos casos la fracción de pastel que le tocó a cada uno es la misma. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Después se representa esta equivalencia en la recta numérica y se aplica en la suma.

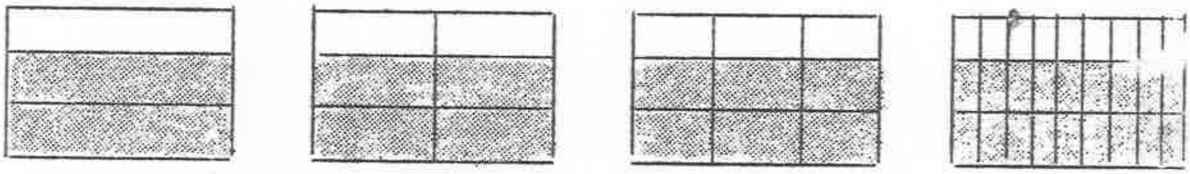
Sigue la lección con un ejemplo más complicado siempre de pasteles para probar $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$ luego se representa en la recta y se aplica en sumas, se dan algunos problemas hasta llegar a la verbalización: Usando fracciones equivalentes has podido escribir con denominadores iguales dos fracciones que tenían denominadores distintos. Al hacer esto puedes sumar y restar como ya sabías hacerlo.

En la lección 46 la equivalencia se presenta siempre en forma objetiva explicando la manera de cortar un listón en 12 partes iguales: primero 3 partes iguales, luego cada pedazo en 2 partes iguales y el listón quedó cortado en 6 partes iguales, luego cada parte de éstas a la mitad para obtener 12 partes iguales y de esta manera se encuentran las equivalencias: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$ La misma idea se utiliza en la recta numérica y luego aplica estas equivalencias en comparaciones, sumas y restas de fracciones.

(Siendo números, si son iguales, pero hay que aclarar que en los objetos no es precisamente una igualdad sino una equivalencia, pues no resulta igual de fácil comer $\frac{1}{2}$ de naranja que $\frac{500}{1000}$ de naranja).

En la lección 49 se continúa la idea de la lección 40 y se llega al algoritmo siguiente: Al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número entero (distinto de cero) se obtiene la misma fracción, pero escrita de distintas maneras equivalentes.

En la lección 53 y en la 65 se presenta otra idea de equivalencia que consiste en obtener fracciones equivalentes de la observación de rectángulos divididos, de distinta manera, en fragmentos iguales. Se combina esta actividad con la observación de la multiplicación del numerador y el denominador por el mismo número entero. Dicho entero se puede determinar de dos maneras distintas: 1.- Su producto por el denominador original debe dar el número total de fragmentos del rectángulo completo. 2.- Su producto por el numerador original debe dar el número de fragmentos iluminados.



$\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 9}{3 \times 9} = \frac{18}{27}$

El objetivo de estas lecciones es abundar la preparación intuitiva y los ejemplos para la inducción de un método general para obtener común denominador.

En las lecciones 73 y 75 se presenta la conversión de mixtos a fracciones impropias empleando el concepto de equivalencia.

Ejemplo de la lección 73:

Cuando el número de partes iguales en que dividimos la unidad es 2, encontramos que:

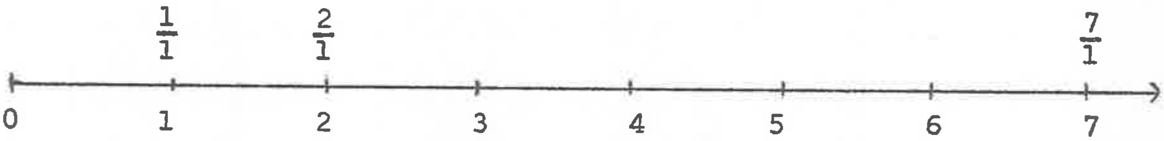
$$1 = \frac{2}{2}, \qquad 3 = \frac{6}{3}, \qquad 7 = \frac{14}{2}$$

Cuando el número de partes iguales en que dividimos la unidad es 3 encontramos que:

$$1 = \frac{3}{3}, \qquad 3 = \frac{9}{3}, \qquad 7 = \frac{21}{3}$$

Cuando el número de partes en que dividimos la unidad es 1, es decir si no dividimos la unidad, encontramos que:

$$1 = \frac{1}{1}, \qquad 3 = \frac{3}{1}, \qquad 7 = \frac{7}{1}$$



El 1 en el denominador no lo escribimos, pero a veces es conveniente hacerlo. Esto nos ayuda a escribir un número entero en forma de fracción, como ya sabes hacerlo, o sea, multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número.

Ejemplo: 7 en cuartos: $7 = \frac{7}{1} = \frac{7 \times 4}{1 \times 4} = \frac{28}{4}$

Se dan varios ejercicios para afirmar este conocimiento. En la lección 75 se aplica lo anterior para ejercitar la conversión de la forma mixta a fraccionaria. La presentan también como en tercer año en forma de suma: parte entera más parte fraccionaria, pero aquí en cuarto grado la suma se hace entre fracciones de igual denominador, para esto se descompone el entero en suma de unidades dándole su equivalencia de fracción con numerador y denominador iguales.

En esta lección se llega a la conclusión siguiente:

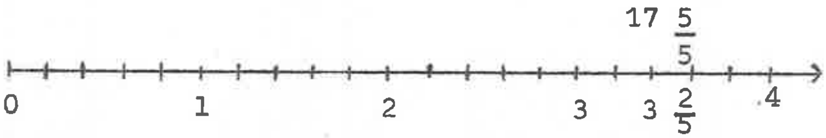
Un número mixto es nada más una manera de escribir la suma de un entero y una fracción. Ejemplo:

$$4\frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$$

Para escribir un número mixto en forma de quebrado primero ponemos la parte entera en forma de fracción con igual denominador que la parte entera en forma de fracción con igual denominador que la parte fraccionaria; así se pueden sumar las dos partes

$$3\,\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{5} = \frac{2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Este resultado se puede verificar en la recta numérica.



Después de esta verificación el maestro debía proponerle a los alumnos una nueva observación para llevarlos a la inducción del concepto contrario, es decir, convertir una fracción impropia en número mixto.

Se haría de la forma siguiente: observemos que en la recta numérica anterior está marcado el número mixto $3\,\frac{2}{5}$ en el mismo lugar que $\frac{17}{5}$ ¿Qué operación tendríamos que hacer para convertirla a $3\,\frac{2}{5}$? Es decir cómo averiguamos cuántos números enteros hay en esta fracción, puesto que sabemos desde luego qué es más grande que 1, ya que 1 es igual a 5 quintos? Entonces cada grupo de a 5 me da un entero. Dividiendo 17 entre 5 el cociente me dice cuantos grupos de a 5 tengo, (éstos son los enteros), si hay residuo, ésto que sobra son quintos, que como no forman un entero resulta la parte fraccionaria.

$$\begin{array}{r|l} & \;3 \\ \hline 5 & \;17 \\ & \;2 \end{array} \quad = 3\,\frac{2}{5}.$$

Se sugiere que se hagan ejercicios suficientes y variados para lograr este objetivo: para convertir una fracción impropia a número mixto, basta dividir el numerador entre el denominador, el cociente es el entero, el residuo es el numerador de la fracción y el divisor es el denominador de la fracción.

(Este objetivo no se encuentra en el libro a pesar de que dan un problema para resolver y para ello necesitaría conocer este algoritmo).

Como podrá observarse, en este grado, en cada lección encontramos recuadros en negrillas que dan las conclusiones de los objetivos alcanzados para que el niño practique a sacar sus propias conclusiones. Una vez logrado esto las presentará al grupo, se discutirán para posteriormente llegar a una conclusión general que será comparada con la que aparece en su libro de texto.

Por otra parte, en mi opinión, el maestro deberá ser flexible en las verbalizaciones en que llegue el grupo, es decir, no exigiendo que dicha verbalización sea como aparece en el libro de texto, puesto que lo que se busca es que el niño comience a practicar sus inducciones.

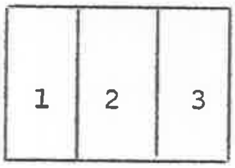
En quinto grado tenemos objetivos en la 4a. unidad como:

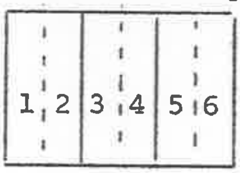
Establecer equivalencias de fracciones.

Expresar fracciones decimales en forma de número decimal.

La equivalencia de fracciones se continúa tratando en este grado con actividades que recomienda la didáctica como la siguiente:

Tome una fracción sencilla como $\frac{2}{3}$. Ahora haga ver qué símbolos como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, representan el mismo número. Para comprobarlo divida una hoja cuadrada de papel en 3 partes iguales. Póngale nombre a cada parte 1, 2, 3. Tome 2 de esas partes y dóblelas a su vez en 2 partes iguales. Ahora divida en 6 partes iguales otra hoja igual a la anterior, dóblela en las partes 5 y 6. Compare las partes iguales 1, 2 de la primera con los sectores 1, 2, 3, 4 de la segunda y compruebe que son iguales.





de manera que: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Después de varias actividades como la anterior usando otros ejemplos pasará al libro de ejercicios donde en la lección 12 primero con figuras de rectángulos y círculos podrá comprobar objetivamente las -- equivalencias. Luego con la observación de las fracciones dadas, ejemplo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16}$ se le pide al niño que concluya usando para ello el algoritmo que aprendió en el grado anterior -- que toda fracción cuyo numerador y denominador se multiplican por un - mismo número entero distinto de cero, forma otra fracción que es equivalente a la primera.

El maestro debía por tanto hacer algunos ejercicios como los presentados en cuarto para ayudar al niño a recordar.

Para finalizar este ejercicio aparece lo siguiente: 8 series de - fracciones equivalentes, dadas algunas y otras para que él ponga desde equivalencias para $\frac{1}{4}$ hasta $\frac{1}{11}$. Ejemplo:

$$\frac{1}{11} = \frac{2}{22} = \frac{3}{33} = \frac{4}{44} = \frac{5}{55} = \frac{6}{66} = \frac{7}{77} = \frac{8}{88} = \frac{9}{99}$$

Si a, b, n representa cualquier número y b, n son distintos de - cero.

Observa que, en general, $\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$

Si lees cada línea de derecha a izquierda podrás ver que en general $\frac{a}{b}$ $\frac{a:n}{b:n}$

Opino que en la primera parte de esta abstracción en donde se usa la multiplicación podrá ser comprendida por el alumno por los muchos - ejemplos que ya ha hecho en el cuarto y quinto grados. Pero desde luego me parece ilógico que con sólo la lectura de derecha a izquierda de las fracciones equivalentes dadas, pueda entender lo de la equivalencia por medio de la división.

Sugiero que se le haga ver al niño primero que la fracción que se está transformando es la primera y después plantearle una equivalencia por multiplicación y deshacerla por el procedimiento inverso, esto es, dividiendo los dos términos por un mismo número entero. Ejemplo:

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ luego entonces $\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$

y después sí hacerle notar al niño que al leer de derecha a izquierda está efectuando precisamente esas divisiones, pero con respecto a la primera fracción, por ejemplo:

$\frac{9}{99} = \frac{9 \div 9}{99 \div 9} = \frac{1}{11}$ $\frac{8}{88} = \frac{8 \div 8}{88 \div 8} = \frac{1}{11}$

Sería conveniente aclararle al niño que esta manera de equivalencias por medio de división es lo mismo que la simplificación de fracciones y que no siempre se puede usar para encontrar equivalencias, si no solamente cuando el numerador y el denominador sean divisibles entre un mismo número.

Continúa este tema de la lección 12 con el uso de los Productos - Cruzados para comprobar que dos fracciones son equivalentes. Ejemplo: Consideremos las fracciones equivalentes

$$\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$$

y observamos que 2 x 12 = 24,   8 x 3 = 24

Esta es la manera de comprobar si dos fracciones son equivalen--- tes. Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y el numerador de la segunda por el denominador de - la primera. A esto se llama Productos Cruzados y es la propiedad fundamental de las fracciones.

Continúa el ejercicio con la aplicación de lo anterior, pero sin darle un ejemplo al niño, por lo que el maestro debe razonar algunos - junto con los alumnos. Ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{\square}{12}$. Aquí es importante tener en cuenta que la división es una multiplicación en la que hace falta - un factor, de manera que si 2 x 12 = 24 y 3 x $\square$ = 24, la manera de hallar el factor que falta sería dividiendo: 24 ÷ 3 = 8

No encontramos otra lección en la que sea, este tema de equivalencia, el específico, sino sus aplicaciones como en: comparación, sumas, restas, etc. Sin embargo sugiero que los ejercicios de probabilidad de la lección 61, al ser resueltos les sea recordado el principio de equivalencia.

Es importante decir que en quinto grado ya no se le dan a los -- niños recuadros en negrillas, sino que se dejan las conclusiones para que las hagan los propios niños. Debo recalcar que el maestro le debe dar mucha importancia a esto y procurar que sean los niños los que formulen la conclusión o regla, la discutan primero por equipo, luego por toda la clase y se escoja una como la mejor.

En el sexto grado, de acuerdo a todo lo que ha expresado en cuanto a equivalencia de fracciones a través de este análisis, puedo decir que el libro y los ejercicios de sexto grado vienen a ser material de afirmación de conocimientos, que el niño ya debe traer; pero desafortunadamente por muchas causas: tiempo, objetivos no comprendidos del todo, olvido, etc., hacen que estos ejercicios no deban ser presentados al niño así como vienen, sino realizando actividades como las que trae el nuevo programa e inventando otras cuando el objetivo así lo requiera.

En la lección "Los números en la recta" encontramos la primera conclusión sobre equivalencia que debe hacer el niño después de observar la recta numérica. Para llegar a esto sugiero realizar un ejercicio que expondré en el capítulo de "El orden entre las fracciones".

La lección "Fracciones Equivalentes", en su primera parte, páginas 20, 21 y 22 me parece bien presentada de acuerdo a los temas desarrollados en años anteriores, pero sin embargo, por si hubiera alumnos que no puedan comprenderla fácilmente sugiero que se realicen algunas actividades como las de cuarto o quinto grado.

La otra lección "Fracciones Equivalentes" páginas 50, 51 y 52 me parece adecuada ya que presenta la equivalencia como en realidad debía hacerse: da parejas de números fraccionarios para que aplicando el teorema fundamental de las fracciones "Productos Cruzados", establezca si son equivalentes o no. Me parece muy acertado el procedimiento que se usa en el libro para llegar, mediante la aplicación de los "Productos Cruzados", a encontrar el término de la fracción que haga falta. Mi recomendación es que el maestro debe resolver con los alumnos el primer ejemplo para que sea más comprensible a los niños.

Ejemplo: $\frac{\square}{6} = \frac{15}{18}$ entonces $\square \times 18 = 15 \times 6 = 90$

$\square \times 18 = 90$

o bien $\square = 90 \div 18$

$\square = 5$

El producto 90 de la igualdad no aparece en el libro, pero debe llevarlo para hacer más clara la igualdad. También al realizar esta -- ecuación sería conveniente recordarle que en las expresiones $\square \times 18 = 90$ y $\square = 90 : 18$ se está aplicando el concepto de - que la división es una multiplicación en la cual hace falta un factor. Sería conveniente que el niño sacara sus conclusiones.

Otros temas relacionados con equivalencia en sexto grado son: Porcentaje, Proporciones, Escalas, Estadística y Probabilidad.

C A P I T U L O V

EL ORDEN ENTRE LAS FRACCIONES

En la didáctica de cuarto grado se comenta en la información general que en cuanto a fracciones, es frecuente escuchar expresiones como: "ya estudié hasta la mitad del libro", "te toca la tercera parte del dulce", "sólo vinieron la cuarta parte de los niños", u otras como: "tú ya estás a la mitad de tu tesis y yo todavía tengo una tercera parte de la mía"; "ponga esa leche en esos dos envases de un medio, pues no tengo uno de litro". Estas expresiones son entendidas por toda la gente. En cambio muy pocas saben lo que significa $\frac{17}{91}$ o qué fracción es mayor si $\frac{32}{44}$ o $\frac{27}{36}$, gente que a veces ha pasado por la primaria y la secundaria. ¿Por qué suceden estas cosas?. Las primeras expresiones, o sea comparar un medio y un tercio de litro no son difíciles; resulta fácil imaginar cuál es la mayor; pero en las segundas expresiones necesitamos de un conocimiento más profundo acerca de las fracciones y la idea de orden entre ellas, que nos permita el desarrollo de algún procedimiento para llevar a cabo su comparación. Esto nos explica porqué muchas personas encuentran difícil las fracciones, incluso hasta los que han pasado por la primaria y secundaria, debido a que ya se les olvidó o sencillamente nunca llegaron a una abstracción y se limitaron a ciertos procedimientos mecánicos para hacer algunas operaciones con fracciones, pero sin saber por qué ni cómo funcionan, lo que le impide la aplicación práctica de ellas.

Por esta razón los libros de texto actuales, tratan de que los --

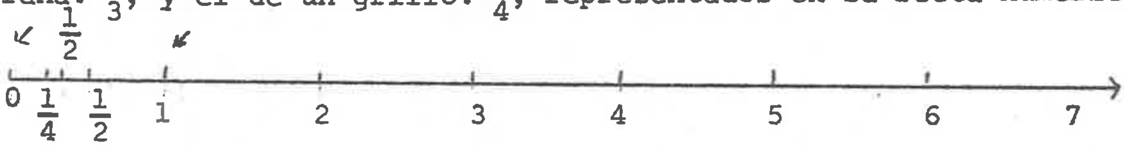
alumnos comprendan las fracciones partiendo de situaciones concretas y objetivas que se presentan en la vida diaria, las que se van tratando poco a poco hasta llegar a las abstracciones que se traducirán en algoritmos o procedimientos para realizar las operaciones con fracciones.

A medida que se van conociendo las fracciones se van comparando también. Debemos tener en cuenta, sin embargo, que esta comparación debe hacerse entre fracciones de una misma cosa, ya que si le mostramos al niño un cuarto de sandía y un medio de limón, lo confundiríamos.

Aparte de las comparaciones que podemos hacer con partes de un objeto, el material más adecuado para precisar esta comparación es la recta numérica y si la manejamos como acertadamente indica el programa, conseguiremos que los niños de quinto y sexto año puedan llegar a realizar la abstracción y comprender el número racional como un punto determinado en la recta numérica.

En los programas la comparación de fracciones se maneja de la siguiente manera:

En el segundo año, en la página 112 del libro del alumno hay un ejercicio al cual hice mención en el tema anterior, que establece la comparación del salto de un caballo: 1, el de un niño: $\frac{1}{2}$, el de una rana: $\frac{1}{3}$, y el de un grillo: $\frac{1}{4}$, representados en la recta numérica



y dice así: marca cuantos saltos dará cada uno para llegar de la flecha azul a la roja.

Con este ejercicio ya comienza a visualizar el niño, lo que más -

adelante será importante para él, el ordenamiento de las fracciones - en la recta numérica de acuerdo a su valor.

En tercer año tenemos como objetivo: relacionar de una manera cualitativa los números fraccionarios con las magnitudes que representan por ejemplo mediante la comparación de fracciones (ideas de mayor que, menor que). Este objetivo se va cumpliendo en este grado de manera intuitiva, pues desde que introducimos el concepto, la idea de magnitud está muy ligada a él; pero es precisamente en la lección 97 donde el niño representa las fracciones en la recta numérica y las compara usando los signos mayor que $>$ y menor que $<$.

Se utilizan 9 rectas numéricas donde en cada una están marcados - los medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos, para que mediante la observación de ellos el niño pueda realizar el ejercicio siguiente:

Escribe el signo mayor que $>$ o menor que $<$ según corresponda:

$\frac{1}{2} \square \frac{1}{5}$, $\frac{1}{3} \square \frac{1}{8}$, $\frac{1}{10} \square \frac{1}{4}$

Sugerimos que se hagan más ejercicios de ese tipo (en una cuadrícula, ya que es precisamente a esta abstracción a lo que el niño -- llega con mucha dificultad o sencillamente no llega. Consideramos esto como una de las deficiencias que el niño lleva hasta el sexto grado y muchas veces sale de él sin haberlas superado.

En la lección 100 encontramos otro ejercicio de comparación de -- fracciones mayores que la unidad, primero en forma objetiva contando - medias naranjas y cuartos de tabletas de chocolate y continúa el ejercicio con la representación de este tipo de fracciones, mayores que -la unidad, en la recta numérica utilizando hasta el número 3. Ejemplo: Escribe arriba de las cruces los quebrados que representan:

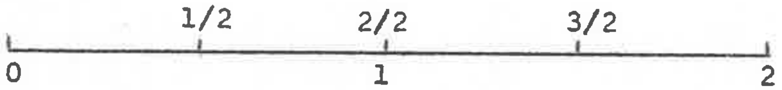
Se representan hasta décimos en rectas numéricas distintas. Este ejercicio sirve de preparación para la lección 101 en donde se llega a la comparación de igualdad entre un número mixto y una fracción mayor que uno, llegando después hasta la forma mecánica de convertir mixtos a fracciones impropias. Ejemplo: 2 niños quieren repartirse 3 barras de plastilina, uno sugiere que se dividan en medios y tomar una parte para cada quien o sea:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

El otro propone que cada quien tome una barra entera y $\frac{1}{2}$ de la --otra, con lo que cada quien obtendrá $1\frac{1}{2}$. Las comparan y observan -que de las dos maneras reciben la misma cantidad, lo que quiere decir que:

$$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Después se muestra esta equivalencia en la recta numérica



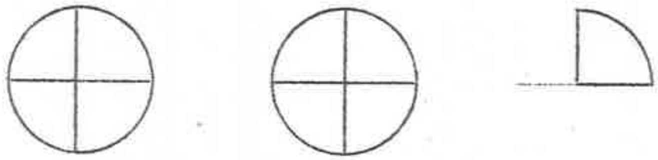
Sugiero que este ejercicio lo resuelva el maestro con los niños y luego realice otros parecidos para poner buenas bases en este conocimiento, que como dije antes, representa un problema serio para el niño.

Luego se dan parejas de números para escribir el signo mayor que

$>$ y menor que $<$ según corresponda mediante la observación de -- las rectas numéricas dadas. Ejemplo: $2\frac{1}{3}$ $2\frac{1}{7}$.

El objetivo principal en <u>cuarto año</u> es enseñar la equivalencia de fracciones que proporciona excelente material para la comparación. Las lecciones en las que se trata este tema son de repaso de ejercicios ya hechos en el tercer grado.

En la página 19 se establecen comparaciones de fracciones con enteros en forma objetiva. Ejemplo:

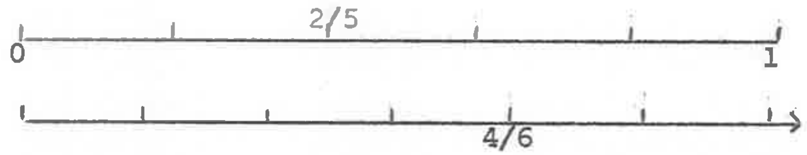


$\frac{9}{4}$ es mayor que 2

En la lección 29, representa fracciones en la recta numérica dándose cuenta que el 1, 2 y 3 se pueden escribir de varias maneras dis-- tintas que se llaman equivalentes.

Ejemplo: $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9}$

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8}$$



y también la usa para comparar fracciones como $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{6}$. Llegando des--- pués de varios ejercicios a las siguientes conclusiones.

Si en un quebrado el numerador es menor que el denominador entonces el quebrado es menor que 1.

Si en un quebrado el numerador es mayor que el denominador, en-- tonces el quebrado es mayor que 1.

Si en un quebrado el numerador y el denominador son iguales enton ces el quebrado es igual a 1.

Sugiero que deberían hacerse más ejercicios que los que tiene el libro, puesto que con los que hay no es suficiente para llegar a esa - conclusión muy importante para los años siguientes, aunque como dije anteriormente estas lecciones son de repaso.

En la lección 40 y 53 se siguen haciendo comparaciones para cono- cer fracciones equivalentes en la recta numérica y con ejemplos objeti vos.

En la lección 49 se utiliza la equivalencia de fracciones para - comparar dos de distinto denominador. Se usa el siguiente problema:

En una comida había 7 niños y 5 niñas. Se repartieron 4 litros de leche entre los niños y 3 litros entre las niñas. Cada niño tomó $\frac{4}{7}$ de litro y cada niña tomó $\frac{3}{5}$ de litro. (Aquí podría aprovecharse para re- lacionar la fracción como una división, porque repartir 4 entre 7 es - lo mismo que dividir 4 entre 7 y ponerla en forma de fracción $\frac{4}{7}$ es lo mismo que representar una división).

¿Quién tomó más leche, un niño o una niña?

Para contestar esta pregunta hay que comparar las fracciones $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$, y como tiene distinto denominador es necesario encontrar una frac-- ción equivalente a $\frac{4}{7}$ y a $\frac{3}{5}$ que tengan el mismo denominador y así será fácil compararlas:

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{20}{35} \qquad \frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$$

Como $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$ concluímos que $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$, entonces la niña tomó más leche que un niño.

Termina esta lección con un recuadro en negrillas que explica -- que los números que se tomaron en ambas fracciones para hacer sus equivalentes fueron los denominadores de las fracciones que se estaban comparando. Así $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$ tendrán como denominador a 7 x 5 = 35 y de esta manera llegar al algoritmo: para obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador se multiplican el numerador y el denominador de la - fracción por el denominador de la otra.

En la lección 68 se llega a formalizar la idea de común denominador. Esto se hace por medio de un problema que requiere comparar dos -- fracciones como denominadores distintos.

La didáctica sugiere que para tratar esta lección, el maestro hafa una recapitulación de los temas sobre fracciones tratados con anterioridad para que el niño se dé cuenta que ha llegado a un común denominador gracias al concepto de equivalencia.

El problema dice así; para construir el camino que unirá a San -- Juan Guajolote con San Lucas el Alto, los de San Juan aportaron $\frac{4}{11}$ del costo, los de San Lucas $\frac{1}{3}$ y el resto lo pondrá el Gobierno del Estado. ¿Quién dará más dinero; San Juan o San Lucas?. Para resolver este problema hay que convertir las fracciones a un común denominador.

$$\frac{4}{11} = \frac{4 \times 3}{11 \times 3} = \frac{12}{33} \qquad\qquad \frac{1}{3} = \frac{1 \times 11}{3 \times 11} = \frac{11}{33}$$

$$\frac{12}{33} > \frac{11}{13}$$

Entonces: $\frac{4}{11} > \frac{1}{3}$

Los de San Lucas darán más dinero.

Lo que hemos hecho al escribir $\frac{4}{11} = \frac{12}{33}$ y $\frac{1}{3} = \frac{11}{33}$ es poner las --- fracciones con el mismo denominador. Esto se llama poner <u>Común Denominador</u>. En este caso el común denominador es 33.

Observamos que al igual que en las otras lecciones se le da la conclusión al niño en un recuadro con negrillas y dice así:

<u>Si tienen dos quebrados puedes encontrar fracciones equivalentes a ellos con común denominador, multiplicando el numerador y el denominador de cada quebrado por el denominador del otro.</u>

<u>Observa que al multiplicar los denominadores de los dos quebrados se obtiene un común denominador.</u>

Una vez que el niño ha encontrado una manera de buscar común denominador puede hacérsele ver que en algunas lecciones anteriores tam- - bién ha manejado común denominador pero hallado de otra forma, como -- por ejemplo en un ejercicio de suma en la lección 53: $\frac{13}{24} + \frac{9}{12} = \frac{\square}{24}$ - teniendo en cuenta que 12 x 2 = 24 entonces convirtió los $\frac{9}{12}$ a $\frac{9 \times 2}{12 \times 2} = \frac{18}{24}$ y de esta manera su común denominador fue 24 y en este caso sólo una fracción se tuvo que transformar para tener el mismo denominador - de la otra.

Y así como ésta hay otras formas de hallar el común denominador.

La lección 71 consta de problemas y ejercicios para afirmar el conocimiento sobre el uso de común denominador. Considero que además de éstas debía poner el maestro más ejemplos hasta estar seguro que el niño ya logró el objetivo. En mi opinión se debía insistir también en esta última forma de hallar equivalencia, conviertiendo una fracción --

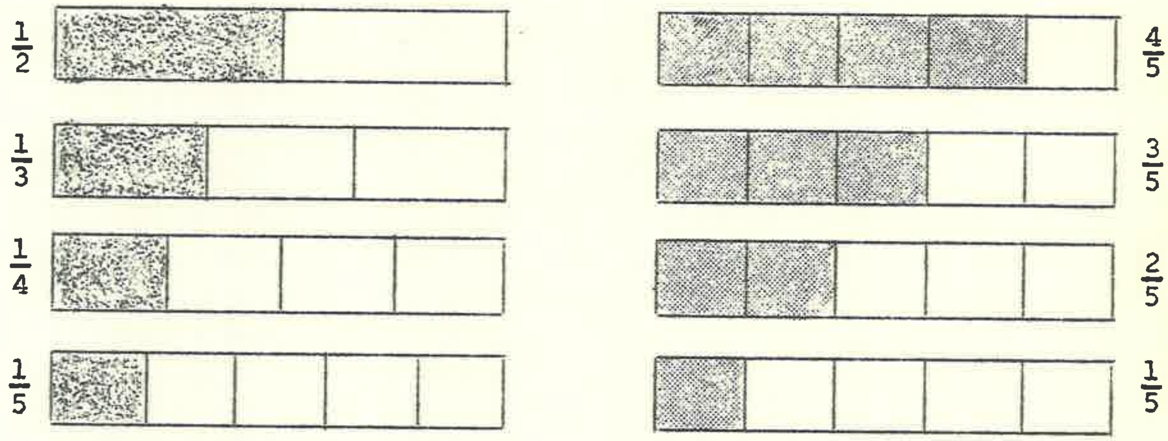
solamente, si la otra tiene un denominador que puede ser común a las 2 y sólo en caso de no ser así emplear el algoritmo de multiplicar cada fracción por el denominador de la otra. Para que el niño pueda darse - cuenta de la relación que pueda tener un denominador con otro, es decir sea múltiplo del otro, se recomienda usar números menores de 100, para que con sólo efectuar una división mental, si es posible encontrará ese común denominador.

Lo deseable sería que el niño manejara las dos formas con facilidad para evitar, insisto, una mecanización que lo lleva en grados superiores a olvidarse de que ese común denominador se encuentra debido a la equivalencia de fracciones. Esto le sucede sobre todo al aplicar este conocimiento en las sumas y restas de fracciones de distinto denominador, donde realiza siempre esta multiplicación manejando números - muy grandes, pudiendo hacerlos con más pequeños. Otra prueba es que -- aunque se le presenten sumas de un mismo denominador, para resolverlas aplica el algoritmo de multiplicar los denominadores para hallar otro común denominador.

En <u>quinto grado</u> en la cuarta unidad se presentan fracciones como un repaso de lo visto anteriormente.

Uno de sus objetivos es <u>Establecer la relación de orden en el ~~con~~ conjunto de fracciones</u>.

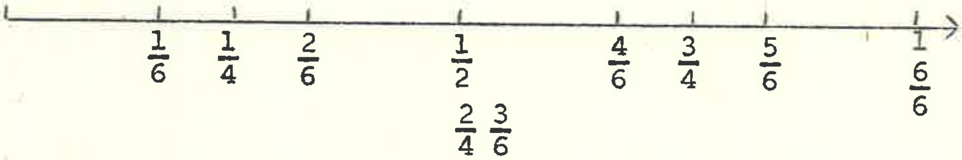
Tiene como actividades para llenar este objetivo la lección 13 -- "Comparación de Fracciones", donde se representan primero gráficamente las fracciones para poderlas comparar entre sí. Luego se dan las fracciones en la recta numérica para que se llegue a la conclusión de que las fracciones mayores determinan puntos más lejanos de cero. Ejemplo:



Después de este ejercicio la conclusión del niño debe ser:

1.- De fracciones que tienen el mismo numerador es menor la que tiene mayor denominador.

2.- De fracciones que tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador.



$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

En la segunda parte del ejercicio se aplica para la comparación de fracciones de distinto denominador el algoritmo de común denominador. Se trata de comparar $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$. Después de la observación de equivalencias como éstas:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25} = \frac{6}{30} = \boxed{\frac{7}{35}} = \frac{8}{40} = \frac{9}{45} = \frac{10}{50}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{4}{28} = \boxed{\frac{5}{35}} = \frac{6}{42} = \frac{7}{49} = \frac{8}{56} = \frac{9}{63} = \frac{10}{70}$$

Se le hace notar al niño que entre ellas hay dos fracciones que tienen un denominador igual (35). Entonces podemos reemplazarlas de la siguiente manera:

$\frac{3}{7}$ por $\frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{15}{35}$ $\frac{2}{5}$ por $\frac{2 \times 7}{5 \times 7} = \frac{14}{35}$

sabemos que $\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$ Luego $\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$

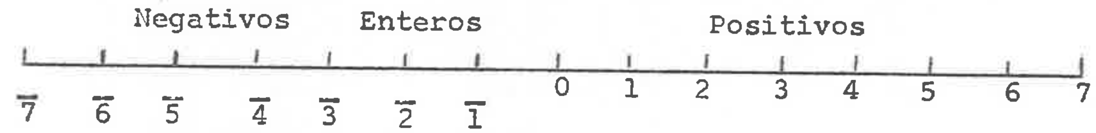
Luego les dan una serie de parejas para comparar. Otra parte para ordenar fracciones y luego representarlas en la recta numérica.

En <u>sexto grado</u> el objetivo es: "Establecerá relaciones entre fracciones utilizando la recta numérica".

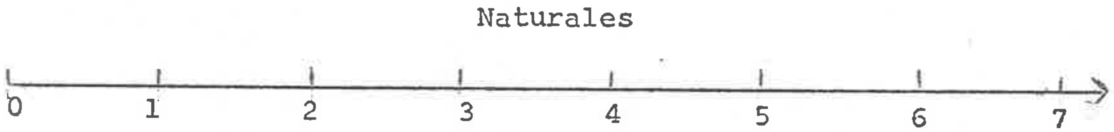
Las actividades señaladas para ello son: primero una parte del ejercicio "los números en la recta", en el que se pide a los niños que en una recta en la que están marcados los enteros positivos y negativos, señalen las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{4},\ 5 + \frac{1}{3},\ 2 + \frac{1}{2}$$

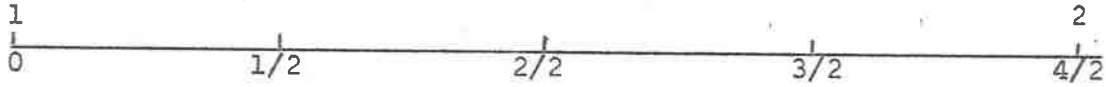
Para que realicen este ejercicio es necesario aumentar a las actividades señaladas en el programa otras como las siguientes: en una cuadrícula el niño trazará rectas numéricas en las que irá marcando de la manera siguiente: primero se marcan los enteros positivos y negativos;



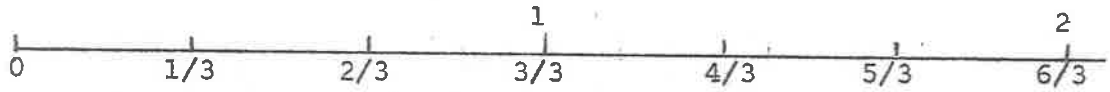
Luego se les dice que tomen sólo el lado positivo de la recta



Ampliando los espacios correspondientes a 2 o 3 números se dibuja otra recta y se marcan los medios



En otra recta del mismo tamaño se marcan los tercios



hasta llegar a los décimos. En el caso de los séptimos y los novenos - se puede sacar la medida contando los cuadritos y efectuando la divi-- sión entre 7 o 9, luego con un molde ir marcando las partes en toda la recta.

Al terminar hará una sola recta e irá poniendo en el lugar que le corresponda algunos números dados y de acuerdo a su posición en la rec ta numérica podrá comparar y ordenar estas fracciones observando su -- distancia con respecto al 0. Sugiero que esta última actividad se haga varias veces hasta que el niño pueda realizarla sin utilizar las rec-- tas numéricas, pues ya debe haber llegado a la abstracción de que para colocar números fraccionarios en la recta numérica y compararlos, cada espacio correspondiente a un número natural, tendrá que dividirlo en - el número de partes que le diga el numerador y si se trata de entero y fracción, tendrá que tener en cuenta algo que ya desde el 3er. grado - conoce que un número mixto equivale a una fracción,pudiéndole marcar - de las dos maneras en la recta numérica, y poder formular de acuerdo - con sus observaciones que:

1.- De fracciones con el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador.

2.- De fracciones con el mismo numerador es mayor el que tiene menor denominador.

3.- De las fracciones con el mismo numerador y denominador es igual a 1.

Esta misma actividad de las rectas numéricas les serviría para comparar algunas de las parejas de la lección "Comparación entre números" pero muy pocas y las demás tendrá que hacerlo utilizando sus conocimientos sobre común denominador.

Es conveniente hacer la aclaración que el ejercicio anterior es - parecido al hecho en 3er. y 5º grados; pero en este grado el niño tendrá que hacer sus rectas numéricas. O sea se ha combinado el ejercicio de 3º y 5º, pero realizado todo por el niño, ya que el libro de texto no trae más que este ejercicio, pero en forma abstracta que dado el - programa desarrollado a través de toda la primaria, esto debía ser la culminación del tema, pues es la abstracción; pero la experiencia que me da el haber trabajado precisamente el 6º grado, durante muchos años y sobre todo, todos los que lleva ya la Reforma Educativa, me permite opinar que los niños no llegan al 6º grado con la preparación suficiente como para poder realizar esa abstracción y por eso insisto en ese u otros ejercicios que permitan guiar al niño para llegar a comprender el valor de las fracciones mediante la comparación de ellas en la recta numérica.

En cuanto a la lección "Fracciones Equivalentes" del libro de 6º. año, páginas 50, 51 y 52, en mi opinión el maestro debe agregarle el objetivo siguiente de: Comparar las fracciones que resultaron no equivalentes, puesto que en esa lección sólo se llega a establecer la equivalencia o no equivalencia.

Recomiendo que a las fracciones donde por medio de la aplicación del teorema de productos cruzados, resultaran no equivalentes, se les aplique el algoritmo para buscar un común denominador y así establecer la relación mayor que o menor que: $>$ o $<$

Ejemplo: $\frac{2}{7} \boxed{\neq} \frac{7}{2}$ $\qquad \underset{4}{2 \times 2} \boxed{\neq} \underset{49}{7 \times 7}$

Estos productos demuestran que no son equivalentes. Apliquemos el común denominador: 7 x 2 = 14. Estas dos fracciones con denominador 14 podrán ser comparadas

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 2}{7 \times 2} = \frac{4}{14} \qquad \frac{7}{2} = \frac{7 \times 7}{2 \times 7} = \frac{49}{14}$$

Luego entonces: $\frac{2}{7} \boxed{<} \frac{7}{2}$

y así resolver todas las fracciones no equivalentes. Al terminar y observando que cuando son las fracciones equivalentes, los productos cruzados son iguales, entonces cuando no son equivalentes con sólo fijarnos en sus productos, estableceremos también qué fracción es mayor o - menor, ya que al hacer esto estamos convirtiendo a un común denomina-- dor, pero sin expresarlo

$$\frac{3}{8} \square \frac{1}{4} \qquad \begin{array}{l} 3 \times 4 = 12 \\ 8 \times 1 = \ \ 8 \end{array}$$

El común denominador no expresado es 24 de manera que 12 es numerador de la fracción $\frac{3}{8}$ convertida a 24 avos y 8 es el numerador de la fracción $\frac{1}{4}$ convertida también a 24 y como 12 es más grande que 8, - pues $\frac{3}{8}$ será más grande que $\frac{1}{4}$ y el signo que le corresponde es:

$$\frac{3}{8} \boxed{>} \frac{1}{4}$$

C A P I T U L O VI

FRACCIONES DECIMALES

Simón Stevin, un belga, introdujo la idea de los decimales, en su libro intitulado La Disme, publicado en 1585. Hemos visto que los babilonios fueron los primeros en considerar nociones de esta clase, haciendo un uso particular de las fracciones "sexagesimales" $\frac{1}{60}$ y $\frac{1}{3600}$. Pero Stevin combinó la idea del empleo de numerales fraccionarios con denominadores que son potencias de 10 con el concepto moderno de valor de posición. Fue ésta una combinación magistral.

Los comerciantes, los artesanos y otros tardaron en aceptar la nueva forma. Era difícil ponerse de acuerdo en cuanto a una notación estándar. Las siguientes notaciones cuentan entre las que se trataron de imponer y fueron descartadas, y con ellas se está representando el número $\frac{314}{100}$;

3 0 1 1 4 2; 3, 1' 4"; $3\,\frac{12}{14}$; 3/14; $\frac{3}{14}$.

En la actualidad, el punto decimal se usa como "separador" en los Estados Unidos y en Inglaterra, pero los ingleses lo escriben a media altura. En Bélgica, Francia, Alemania, Italia y los países escandinavos, se usa una coma en su lugar. Los escandinavos suelen imprimir la parte fraccionaria en caracteres más pequeños que en la parte entera.

Estados Unidos 3.14 Inglaterra 3 : 14

Francia y otros, 3,14 Escandinava $3,^{14}$

Al escribir los cheques usamos otra notación 3^{14} en vez de 3.14, pareciendo ser ésta una protección más efectiva contra errores de lectura y alteraciones. A continuación algunos ejemplos de numerales decima-- les:

3.14   .017   176.26901

El número de dígitos que siguen al punto es llamado el número de lugares decimales en el numeral decimal. Así, por ejemplo, 3.14 tiene dos lugares decimales; .017 tiene 3 lugares decimales y 176.26901 tie ne 5.

Si se nombra un numerador racional mediante un numeral fracciona- rio cuyo denominador es una potencia de 10, es entonces fácil encon- - trar un numeral decimal correspondiente. Observe el esquema sugerido - por los siguientes ejemplos:

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{10^1} = .3$$

$$\frac{7}{100} = \frac{7}{10^2} = .07$$

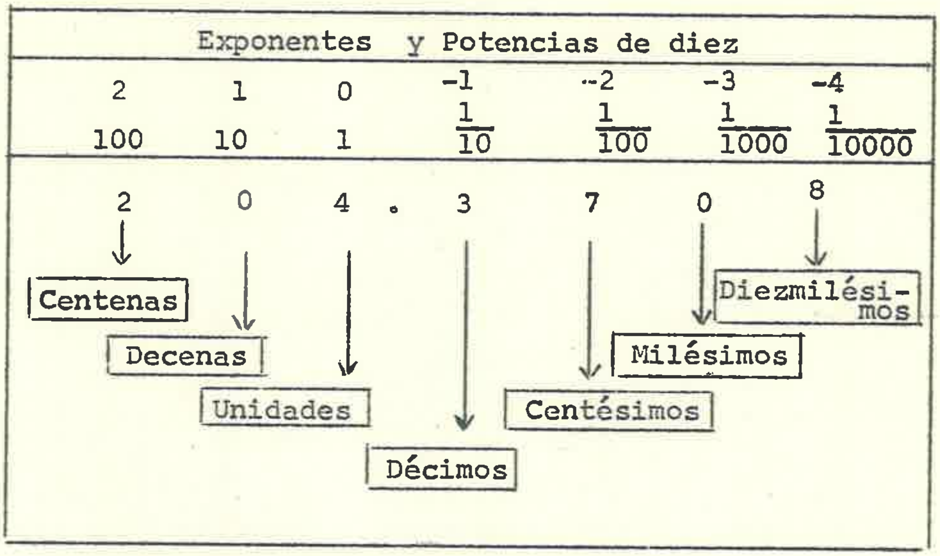
$$\frac{39}{1000} = \frac{39}{10^3} = .039$$

$$\frac{11}{10000} = \frac{11}{10^4} = .0011$$

El número $\frac{1}{10}$ (n 1), dado como un numeral decimal, tendría n dígi-- tos a la derecha del punto decimal.

* Matemáticas para el Maestro de Enseñanza Elemental.
Eugene E. Nichols. Pág. 251-252

Cuando se nombra un número en forma decimal su estructura de valores de posición se da como lo muestra la figura, en la que usamos el número 204.3708 para ilustración".



Valor de posición de un punto decimal.

La forma decimal es de gran utilidad al comparar números. De un vistazo puede decirse cuál de los dos números es mayor. La forma decimal también simplifica la computación enormemente: el manejo de los decimales es muy parecido al de los propios enteros. Es fácil encontrar números fraccionarios que corresponden a algunos numerales decimales. Por ejemplo:

$.47 = \frac{47}{100}$ $\qquad .109 = \frac{109}{1000}$ $\qquad .365901 = \frac{365,901}{1'000,000}$

En general:

$$a \quad a \ \ldots \ a = \frac{a \quad a \quad a \ \ldots a}{\underbrace{10 \ldots 0}_{n \text{ ceros}}} \qquad (n \quad 1)$$

donde a, a, a, ..., a pueden reemplazarse por dígitos elegidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Encontrar un numeral decimal que corresponda a un numeral fraccio nario equivale a buscar una fracción con denominador que sea una potencia de diez. Ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = .5 \qquad \text{esto es} \qquad \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = .5$$

Como 2 puede multiplicarse por un número entero para obtener una potencia de diez, no hay dificultad para encontrar el numeral decimal que corresponde a $\frac{1}{2}$, igualmente $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

Cuando tenemos fracciones como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, etc., no siendo posible encontrar el factor que nos dé 10 ó potencia de 10, es necesario realizar la división señalada o sea:

$$3 \overline{\big)\begin{array}{l} .333 \\ \hline 10 \\ \ \ 10 \\ \ \ \ \ 10 \end{array}} = .3\ 3\ 3\ 3\ \ldots.$$

Se hace de la siguiente manera: Uno entre 3 no da exacto, entonces dividimos el 1 en 10 partes iguales que serán décimos por eso el resultado es .3, como sobra 1 décimo, éste se divide en 10 partes iguales que ya son centésimos así da 3 y ya tenemos .3 + .03 = .33, el centésimo que sobra lo dividimos en 10 partes iguales y el resultado será: .33 + .003 = .333 y así sucesivamente. En este caso nunca dejaremos de tener residuo y por esta razón esta operación indica que la fracción 1/3 sólo podemos aproximarla con números escritos en expresión decimal.

En los libros de texto el tema "Fracciones de Decimales" se desarrolla de la siguiente manera:

En el tercer grado se conoce el metro, decímetro, centímetro y milímetro y sus equivalencias (lección 51)

1 m = 10 dm. 1 m = 100 cm 1 m = 1000 mm

También tiene esta lección algunos ejemplos para comparar estas medidas. Ejemplo:

24 mm. es mayor que 2 cm. y menor que 3 cm.

La lección 52 tiene como objetivo hacer mediciones usando centímetros.

La lección 54 trata del kilómetro y de su valor en metros partiendo de un problema de distancia en carretera. Trae también conversiones de estas medidas. Ejemplo:

23,510 m. = 23 Km. y 510 m.

Hay algunas lecciones que tratan de la solución de problemas con dinero.

En el cuarto grado en la lección 6 se comparan unidades como metros, centímetros, kilogramos, pesos, etc.; desde luego estas comparaciones se realizan entre unidades de la misma especie o sea kilo y gramos, decímetros y centímetros, kilómetros y metros, etc.

En la lección 15 que trata de fracciones comunes en la última parte ya relaciona éstas con las fracciones decimales. Por ejemplo: la medida de 1 cm. es igual a $\frac{1}{100}$ de metro.

20 centavos con $\frac{1}{50}$ de 10 pesos

En la lección 55 se habla de metros, litros y horas, las relaciona con fracciones comunes y ya comienza a escribirse con el punto decimal. Ejemplo:

$$1 \text{ dm.} = \frac{1}{10} \text{ m. } 0.1$$

En la lección 59 se llega a la formación de los números de acuerdo al lugar que ocupan. Ejemplo: 1.365 m. = 1 m. + 3 dm. + 6 cm. + 5 mm., esto es: 1 m. + 0.3 m + 0.06 m. + 0.005 m.

En esta lección se señalarán algunas medidas en una regla y servirán al mismo tiempo para comparar esas medidas con la relación mayor que $>$ y menor que $<$.

En la lección 61 se hacen sumas y restas de números decimales por partes, es decir, metros con metros, decímetros con decímetros, centímetros con centímetros, etc., y llegar así al algoritmo.

En la lección 74 se usan decimales con ejemplos de dinero. Así - como \$ 2.35 se forma con 2 pesos, 3 dieces y 5 centavos que es lo mismo que \$ 2 + \$0.3 + \$0.05.

En la lección 76 trata de un registro de tiempo y utiliza segun-- dos y décimas de segundo, el niño deberá redondear esos números para - luego compararlos.

La lección 82 tiene como objetivo el conocimiento del gramo con - respecto al kilogramo y del mililitro con respecto al litro, hay relación en ambos casos con las fracciones comunes.

La lección 87 trata otra vez de registros, pero de estaturas, se maneja el metro y los centímetros, para redondearlos y compararlos.

La lección 88 tiene como objetivo concentrar cuatro registros en uno solo para comparar las estaturas en donde se utilizan metros y centímetros.

En el quinto año en la lección 20 se llega al concepto de lo que es fracción decimal, aquella cuyo denominador es la unidad seguida de ceros. Ejemplos:

$$\frac{2}{10}, \qquad \frac{5}{100}, \qquad \frac{35}{1000}$$

En esta lección se recuerda a los niños el algoritmo para hallar - fracciones equivalentes usando la multiplicación, de ambos términos de la fracción por un mismo número.

Hay un cuadro sinóptico que será resuelto usando el algoritmo anterior.

Fracción	Fracción decimal equivalente.	Cómo se lee:
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	5 décimas
$\frac{3}{4}$	$\frac{75}{100}$	75 Centésimos
$\frac{5}{4}$	$\frac{125}{100}$	125 centésimos
$\frac{3}{8}$	$\frac{375}{1000}$	375 milésimos

Considero que las fracciones del cuadro algunas pueden convertirse fácilmente a sus equivalentes; razón por la cual debe sugerírsele - al niño que para buscar el denominador de esa fracción vaya dividiendo 10, 100, 1,000 entre 8 hasta encontrar el número exacto.

Luego se hacen sumas con enteros y fracciones decimales para llegar a la formación de números, determinando exactamente el uso del punto decimal. Continúa la lección con ejercicios de descomposición de números (notación desarrollada) aprovechando para ello conocimientos - que ya tienen desde el tercer año, puesto que allá descomponen números enteros, lo que le agregan aquí es la descomposición de los decimales.

Ejemplo:

$$825.136 = 800 + 20 + 5 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000}$$

Continúa la lección con la identificación de números mixtos y sus equivalentes en número decimal. Termina la lección con otros cuadros - sinópticos semejantes al anterior, pero en ellos ya hay un casillero más que es la expresión decimal.

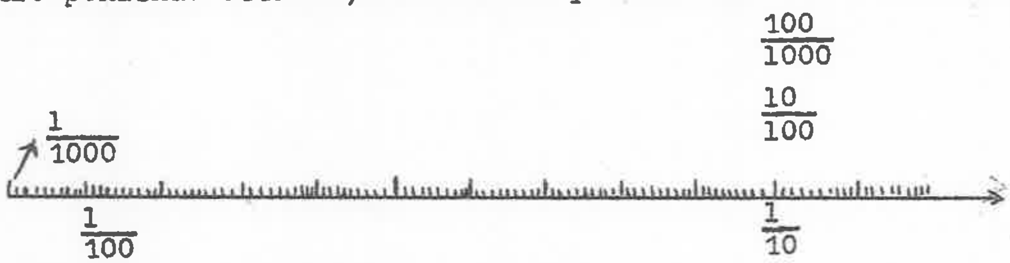
No encontramos otra lección de fracciones decimales en tolo lo -- que resta del libro, por lo que le sugerimos al maestro que de cuando en cuando utilice estos números para evitar el olvido.

En el sexto grado, en la primera lección "Los Números" se presenta números decimales para su lectura y escritura en forma desarrollada y luego el proceso contrario, o sea pasarlo a su forma abreviada. - Ejemplo:

$$13.35 = 10 + 3 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$$

$$200 + \frac{1}{10} + \frac{2}{1000} = 200.102$$

Para recordar la formación de números enteros se podrían hacer - ejercicios con agrupamientos (base 10 u otras bases). Sugiero que para entender mejor en este grado las fracciones decimales, el niño construya un metro poniendo décimos, centésimos y milésimos con distinto color.



Esto les ayudaría muchísimo para alcanzar el objetivo de la lección "Comparación entre números" que dice así: Comparará números racionales mediante la observación de la recta numérica. Por ejemplo: al - comparar $\frac{1}{4}$ .25 ellos podrían comprobar objetivamente que en el lugar donde está veinticinco centésimos, ese espacio alcanza cuatro veces en la recta numérica (un metro) y de esta manera podría hacer - - otras comprobaciones de otros números.

Es en este ejercicio donde el alumno debe practicar el algoritmo para convertir una fracción común a decimal aprendido en quinto grado, pero donde también se puede aprovechar la oportunidad de darle a conocer al niño, es decir, convertir una fracción común a decimal realizando la operación que representa la fracción, una división, como ya lo explicamos anteriormente. Este algoritmo será de mucha utilidad en la lección "Fracciones Decimales", página 62, en uno de cuyos ejemplos está $\frac{11}{16}$ para convertirlo a fracción decimal. Para evitar estar haciendo varias divisiones de 10, 100, 1000, 10000, etc., entre 16 para encontrar el factor que nos servirá para multiplicar ambos términos de la fracción para buscar su equivalente. Se puede hacer más sencillo dividiendo 11 entre 16 y de esta manera obtendremos el equivalente.

```
        .6875
16  | 110
       140
        120
         080
         (00)
```

Como 11 dividido entre 16 no se puede, es decir no da a un entero, entonces convertimos los 11 enteros en 110 décimos agregándole para ello un cero al 11, en el cociente se pone el punto decimal, puesto que el primer resultado va a ser décimos y así se sigue convirtiendo a centésimos, milésimos, diezmilésimos (como en este caso). etc., hasta que el residuo sea cero o hasta que resulte un período, es decir, un grupo de cifras que luego se repiten en el mismo orden.

Las fracciones decimales y las comunes se emplean también en la lección "Porcentaje", páginas 46, 47, 48 y 49, donde se aborda el tema partiendo precisamente de las fracciones equivalentes. Ejemplo:

Si de 8 partes tomamos 3, hemos tomado $\frac{3}{8}$.

Si de 100 tomamos 30 hemos tomado $\frac{30}{100}$.

Las palabras "tantos por ciento" significa "tanto de cada 100", de tal manera que $\frac{30}{100}$ es lo mismo que decir 30%, lo que es igual a .30 .

Muy acertado me parece el cuadro sinóptico de la página 48, pues allí el niño puede establecer mejor las equivalencias realizando los algoritmos respectivos que cuando llegue a esto ya debe dominarlos. Por ejemplo:

Tanto por ciento.	%	En fracción común de denominador	En fracción común simplificada.	En forma decimal.
25 por ciento	25%	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	.25

En la lección "Regularidad Estadística" que está en el Compendio, páginas 180, 181, y 182, se vuelven a utilizar las fracciones comunes y sus equivalencias en decimales. La lección trata de un paletero que llega por medio de sus conocimientos de probabilidad y estadística a situaciones que le hacen más productivo su trabajo. Trata de registros de paletas de tres sabores durante varios días, luego lo registra en uno solo, como está a continuación:

	Día 1	Día 2	Día 3
Limón	18	29	45
Grosella	6	16	20
Mandarina	9	16	24
Suma:	33	61	89

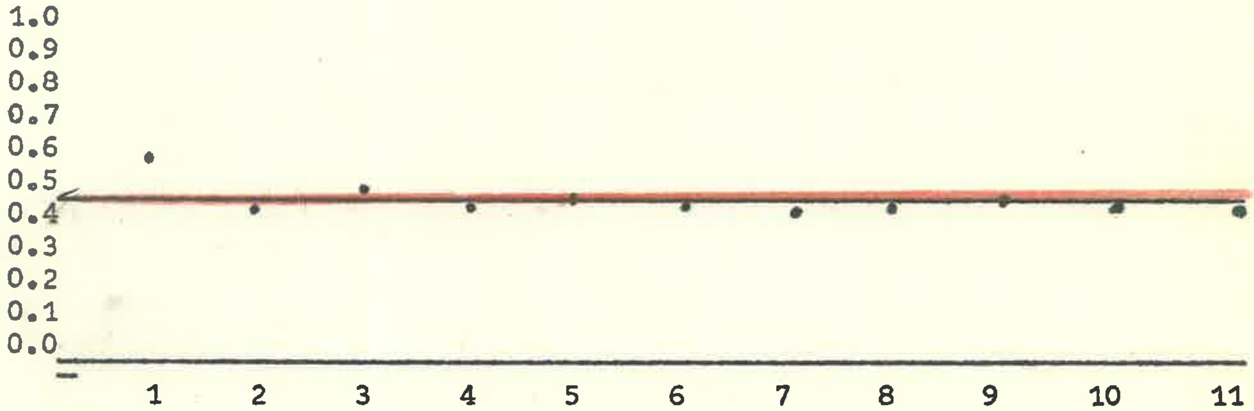
Luego con los datos anteriores va formando la proporción de pedidos de cada sabor desde el primer día. En este caso la palabra proporción la usan equivocadamente como razón.

$$\frac{18}{33} \qquad\qquad \frac{29}{61} \qquad\qquad \frac{45}{89}$$

a cada fracción se le busca su equivalente decimal (redondeándolo a centésimos).

$$\frac{18}{33} = .55 \qquad\qquad \frac{29}{61} = .48 \qquad \frac{45}{85} = .51$$

Utiliza luego las equivalencias en decimal para hacer sus gráficas, que le llevarán a marcar la regularidad estadística que viene siendo el punto señalado por la línea roja como se ve a continuación:



Ojalá el maestro resolviera esta situación junto con los alumnos para que éstos se den cuenta, una vez más, de cómo se pueden aplicar sus conocimientos en situaciones de la vida diaria.

C O N C L U S I O N E S

Los conceptos de número fraccionario se manejan en el Programa de Primaria, como parte de una unidad y como parte de un conjunto. El primero se trata exhaustivamente, y el segundo, en forma un tanto descuidada.

En los temas de Probabilidad, falta orientación para que el maestro use esos ejemplos en la enseñanza de fracción como parte de un conjunto.

El concepto de fracción como resultado de una división, no siempre tiene sentido lógico, razón por la cual no se ha formalizado su enseñanza. La didáctica de Cuarto Grado explica esta razón. El maestro queda en libertad de enseñarla o no.

El concepto de número fraccionario como razón, se trata hasta el Sexto Grado y en temas un tanto desligados.

El uso de la Recta Numérica desde el Segundo Grado, es un buen auxiliar para conseguir, más adelante, la abstracción del concepto de fracción.

El tema de Equivalencia de Fracciones, del Cuarto Grado, trae algunos ejercicios cuya solución no está al alcance de los niños.

El Teorema de Productos Cruzados para establecer la equivalencia o no equivalencia de fracciones, se presenta acertadamente en el Sexto Grado.

El procedimiento indicado para que el niño aprenda el algoritmo para encontrar fracciones equivalentes, lo lleva la mecanización del proceso y le dificulta más adelante el razonamiento de la suma y resta de fracciones.

Son insuficientes los ejercicios de simplificación de fracciones.

Los ejercicios relativos al orden entre las fracciones son acertados: primero se comparan, luego se ordenan, y por último se representan en la recta numérica.

En Tercero, Cuarto y Quinto grados se sigue el procedimiento de presentarle al niño los ejercicios y luego las conclusiones.

Las Fracciones Decimales se comienzan a manejar desde el Tercer Grado con el conocimiento del metro y las medidas que de él se derivan. En Cuarto Grado se usan las fracciones decimales para hacer comparaciones y la formación de dichos números decimales según el lugar que ocupan, hasta llegar a la suma y a la resta.

Las Fracciones Comunes y sus Equivalencias en Decimales se utilizan en Quinto Grado.

La Didáctica de Matemáticas para el Sexto Grado está muy resumida.

S U G E R E N C I A S

En el manejo del concepto de fracción como parte de una -- unidad y como parte de un conjunto, el maestro habrá de dejar - bien claro que igualdad de partes se refiere estrictamente a -- cantidad y no a calidad.

El maestro no debe descuidar la idea de fracción como parte de un conjunto y puede utilizar para ello los temas de probabilidad.

Es necesario que se incluya en el programa--aconsejable a-partir del Cuarto Grado-- el concepto de fracción como resultado de una división para que, basado en este conocimiento, el -- alumno tenga mayor facilidad para manejar el concepto "razón" - expresado como una fracción.

La aplicación de la Recta Numérica, desde el Segundo Grado, no deberá sujetarse únicamente a lo que señala el programa. Deberán formularse otros ejercicios para una mayor comprensión -- del alumno.

Cuando en Cuarto Grado se enseñan Fracciones Equivalentes- y se convierten una fracción impropia a número mixto, el alumno deberá llegar también al conocimiento de por qué es fracción impropia y el algoritmo respectivo.

Deberá puntualizarse que el procedimiento de encontrar --- fracciones equivalentes a una fracción dada mediante la división de sus dos términos entre un mismo número (simplificación- de fracciones), únicamente se puede realizar cuando ambos términos son divisibles entre ese número.

En el Quinto Grado deben realizarse más ejercicios de simplificación para encontrar fracciones equivalentes. Debían darse igual importancia a las fracciones equivalentes buscadas mediante la multiplicación o a la división de ambos términos.

Es necesario agregar a la lección Fracciones Equivalentes de Sexto Grado, páginas 50, 51 y 52, el objetivo "Comparar las fracciones que resultaron no equivalentes utilizando productos cruzados" y llegar así a la idea de mayor que y menor que partiendo de la No Equivalencia.

Deberá darse mucha importancia a la formulación de conclusiones. Antes del Sexto Grado dichas conclusiones deberán ser elaboradas en grupo por los alumnos ayudados por el maestro, para después compararlas con las que trae el texto oficial, porque la comparación es el procedimiento por el cual los alumnos aprenden más rápido y eficaz.

En el Sexto Grado se debe dejar al alumno en plena libertad de formular sus conclusiones, darlas a conocer y discutirlas.

Para conocer y comprender mejor las fracciones decimales y alcanzar el objetivo "Comparará números racionales mediante la observación de la recta numérica", que aparece en el Sexto Grado, los alumnos construirán un metro dividido en décimos, centésimos y milésimos en distintos colores.

Se le enseñará al alumno el algoritmo para convertir una fracción común en decimal, mediante la división de numerador entre el denominador.

En el tema Regularidad Estadística deberán realizarse otras actividades semejantes a las del texto, usando edades, estaturas, etc.

Deberá acompañarse los libros de texto de Matemáticas con un compendio amplio y claro para dar mayor facilidad a maestro y alumnos en el logro de los objetivos.

E N C U E S T A

Realizada a grupos de distintos grados.

1.- En cuanto a la extensión del programa de Matemáticas en el grado - que Ud. imparte ¿cómo lo considera?

( ) extenso ( ) adecuado ( ) incompleto

2.- En el programa del primer grado no aparece ningún tema sobre fracciones. Esto lo considera Ud. ...

( ) adecuado ( ) inadecuado ( )no tiene importancia

3.- En el grado que Ud. imparte, el tema de fracciones lo encuentra...

( ) muy difícil ( ) difícil ( )fácil ( ) adecuado

4.- En cuanto a la extensión del tema de fracciones en el grado que -- Ud. imparte ¿cómo lo encuentra?

( ) extenso ( )adecuado ( ) debe ser más extenso

5.- Las actividades que le sugieren los auxiliares didácticos y los -- programas:

( ) las realiza todas ( )algunas y otras las modifica

( ) ninguna, todas las inventa

6.- Utiliza la recta numérica para representar fracciones?

( ) sí ( ) sí, pero es muy complicado ( ) no

7.- Señale Ud. la manera cómo enseña el tema de fracciones.

( ) Primero las actividades del programa y luego los ejercicios - del libro.

( ) Primero los ejercicios del libro y luego las actividades que sugiere el programa.

( ) Sólo los ejercicios del libro. ( ) de otra manera.

8.- Hay algunos temas de fracciones muy difíciles y los omite.

( ) sí ( ) no

RESULTADO DE LA ENCUESTA

Preg.	Respuestas	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Totales
	Extenso	1	0	3	3	2	4	13
1a.	Adecuado	11	10	4	4	3	4	36
	Incompleto	1	1	1	3	6	2	14
	Adecuado	4	1	4	0	2	1	12
2a.	Inadecuado	8	9	4	8	7	6	42
	No tiene imp.	1	1	0	2	2	3	9
	Muy difícil	0	0	0	0	0	0	0
3a.	Difícil	0	1	2	3	3	0	9
	Fácil	1	9	6	6	7	10	39
	Adecuado	0	1	0	1	1	0	3
	Extenso	0	0	2	2	0	0	4
4a.	Adecuado	0	10	3	6	6	7	32
	Debe ser más extenso	1	1	3	2	5	3	15
	Todas	1	1	2	0	3	5	12
5a.	Algunas	12	10	6	10	8	5	51
	Ninguna	0	0	0	0	0	0	0
	Sí	3	6	5	9	7	7	37
6a.	Sí pero es muy complicado	0	1	1	1	4	2	9
	No	1	4	2	0	0	1	8
	a	1	8	7	7	6	9	38
7a.	b	0	2	1	2	2	0	7
	c	0	0	0	1	2	0	3
	d	0	1	0	0	1	1	3
8a.	Si	0	0	2	3	1	1	7
	No	1	11	6	7	10	9	44

CUADRO DE ALCANCE Y SECUENCIA

MATEMATICAS

Me he permitido presentar como anexo a este análisis el cuadro -- de Alcance y Secuencia de Matemáticas en lo que respecta al contenido de los objetivos del tema de Fracciones, pues es conveniente que cada maestro lo maneje, puesto que uno de los motivos que dificultan el tra bajo es que no estemos enterados tan siquiera de los objetivos del año anterior ni del año siguiente. Bueno sería que tuviéramos presente los objetivos de todos los grados para que de esta manera podamos aplicar una prueba de diagnóstico a principio de curso que arroje resultados - positivos en cuanto a que sepamos hasta donde han comprendido nuestros alumnos y qué actividades debemos realizar para que alcancen lo que no han logrado o para continuar con los temas que nos corresponden en el grado que estemos trabajando.

Excepto primer año en donde no aparecen Fracciones, este es el -- cuadro:

Segundo Grado:

2.8. Inferirá a partir de modelos físicos el concepto de las fraccio-- nes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{3}$ como parte de un entero.

3.8. Representará la mitad mediante el número $\frac{1}{2}$ y lo localizará en la recta numérica.

3.8. Representará gráfica y simbólicamente las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$

3.8. Usará los signos de mayor y menor entre las fracciones conocidas.

Tercer Grado:

3.6. Usará los signos de mayor a menor e igual entre fracciones conocidas y resolverá problemas.

3.7. Sumará y restará fracciones de igual denominador.

3.8. Representará fracciones mayores que la unidad en la recta numérica y escribirá el número mixto correspondiente. Convertirá números mixtos a fracciones comunes.

Cuarto Grado.

3.1. Resolverá problemas de adición de fracciones con igual denominador.

3.2. Interpretará y ordenará fracciones utilizando la recta numérica.

3.3. Efectuará adiciones y sustracciones con fracciones.

3.4. Efectuará adiciones y sustracciones y ordenará fracciones a partir del establecimiento de la equivalencia entre ellas.

3.5. Efectuará adiciones y sustracciones con fracciones decimales.

3.6. Efectuará adiciones y sustracciones y comparará fracciones estableciendo la equivalencia entre ellas.

3.8. Resolverá problemas de adición y sustracción de fracciones.

Quinto Grado:

3.1. Ordenará fracciones y usará los signos mayor y menor.

3.2. Comprenderá el concepto de expresión decimal y sumará y restará fracciones comunes.

3.6. Efectuará multiplicaciones de fracciones y resolverá problemas.

3.7. Efectuará divisiones con fracciones comunes y las representará -- en la recta numérica.

3.8. Resolverá problemas en fracciones.

<u>Sexto Grado</u>:

3.1. Manejará números fraccionarios utilizando la recta numérica.

3.2. Establecerá las relaciones de mayor y menor entre fracciones. Efectuará adiciones y multiplicaciones de fracciones.

3.3. Comprenderá y aplicará el concepto de "tanto por ciento",

3.4. Efectuará adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con fracciones comunes.

3.5. Aplicará conocimientos sobre porcentajes. V. F. Interpretará como funciones las razones y el tanto por ciento. Construirá diagramas, sagitales y tablas.

3.6. Efectuará adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con fracciones decimales.

3.7. Resolverá problemas aplicando su conocimiento sobre porcentaje.

I N D I C E

B I B L I O G R A F I A

1.- CARDENAS TRIGOS DR. HUMBERTO y otros.
Matemáticas 1er Curso.
Compañía Editorial Continental
México, D. F. 1971.

2.- EICHOLZ ROBERT E. y otros.
Matemática para la Educación Primaria.
Guía de 6º Grado.
Editorial Norma y Fondo Educativo Interamericano.
Bogotá, Colombia, 1971.

3.- GARIN PINILLOS MANUELA
Delta Matemática 5/6 Libro de Consulta
Educación Santillana
Madrid, España, 1972.

4.- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.
Números Racionales
Editorial Trillas
U.S.A. 1968

5.- NICHOLS EUGENE D.
Matemáticas para el Maestro de Enseñanza Elemental
Cía. Editorial Continental
México, D. F. 1975

6.- NUEVAS TECNICAS EDUCATIVAS
Tecnología Educativa
Matemática Moderna 6
Guiones Didácticos para el Profesor.
Editorial Santillana
México 1972.

7.- NUEVAS TECNICAS EDUCATIVAS
Matemática Moderna
Fichas de Trabajo 6
Editorial Santillana
México, 1972.

8.- REINOSO CARLOS
Matemática 2. Educación Media Básica
Ediciones de Cultura Popular
México, D. F. 1976

9.- ROZAN JOSE E.
Aritmética y Nociones de Geometría Tercer Libro
Editorial Progreso
México, D. F. 1964

10.- SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA
Matemáticas del 1º al 6º Grado
Libro del Alumno.
México, D. F. 1974.

11.- SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA.
Matemáticas del 1º al 6º Grado.
Libro del Maestro
México, D. F. 1974.