



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD AJUSCO
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

**ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA ABORDAR LA
MULTIPLICACIÓN EN EL PAQUETE CURRICULAR DE EDUCACIÓN
PRIMARIA DE 2011**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

PRESENTA:

MARICARMEN DELGADO GUTIÉRREZ

ASESOR:

ARTURO BAZÁN ZURITA

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE DE 2019

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	4
CAPITULO 1. DELIMITACIÓN, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS	6
1.1 Delimitación del problema de investigación	6
1.2 Justificación	6
1.3 Objetivo general.....	21
1.4 Objetivos específicos	21
CAPITULO 2. MARCO REFERENCIAL	23
2.1 Plan de estudio de 2011 de matemáticas de nivel primaria	23
2.1.1 Propósitos del estudio de las matemáticas para la educación primaria.....	29
2.2 Programas de estudio de 2011 de matemáticas	30
Primer grado.....	31
Segundo grado	32
Tercer grado.....	33
Cuarto grado	34
Quinto grado.....	35
Sexto grado	36
2.3 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticosde 2013</i>	38
2.3.1 Clasificación de los problemas aditivos que se presentan en el libro de texto <i>Desafíos matemáticos</i> de primer grado.....	41
2.3.2 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticos</i> de primer grado.....	43
2.4 Clasificación de los problemas multiplicativos que se presentan en el libro de texto <i>desafíos matemáticos</i> de segundo a sexto grado.....	54
2.4.1 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticosde</i> segundo grado.....	55
2.4.2 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticos</i> de tercer grado.....	65
2.4.3 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticos</i> de cuarto grado	79
2.4.4 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticos</i> de quinto grado	103
2.4.5 Libro de texto <i>Desafíos Matemáticos</i> de sexto grado	131
2.5 Revisión de la literatura	150
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA.....	156
3.1 Plan de estudio.....	156

3.2 Programas de estudio	157
3.3 Resultados del análisis al paquete curricular	159
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS	161
4.1 Tratamiento del tema durante la educación primaria.....	161
4.2 Congruencias	165
4.3 Clasificación de los problemas aditivos y multiplicativos en educación primaria	175
4.5 Aprendizajes esperados una visión progresiva en educación primaria	179
CONCLUSIONES.....	183
BIBLIOGRAFÍA.....	189

INTRODUCCIÓN

La evaluación ha ocupado un lugar importante en el quehacer educativo, como instrumento para verificar el logro académico de los estudiantes, para retroalimentar su aprendizaje y para certificar los conocimientos adquiridos. Recientemente se han realizado cambios en el paquete curricular, como medida para abatir los pobres resultados, sin embargo, los resultados no han mejorado, de igual forma no se especifica la razón de dichos cambios y los efectos esperados de estos cambios en el contenido.

Una de las áreas con menor porcentaje de aciertos en las evaluaciones es matemáticas como se puede constatar en los resultados de PLANEA 2015 con el porcentaje de aciertos del reactivo más fácil es de 70 % y porcentaje de aciertos del reactivo más difícil es de 10.3 % en primaria.

Ante los bajos resultados, es necesario revisar la propuesta didáctica del paquete curricular y las pretensiones que se propone en la asimilación de contenidos acordes a la maduración del alumno, si los contenidos son congruentes a los niveles de abstracción que se pretenden alcanzar en primaria, si la propuesta didáctica propone a los alumnos ejecutar algoritmos ciegos, de igual forma conocer si los reactivos presentados en las pruebas estandarizadas corresponden al contenido en el paquete curricular, la memorización de hechos básicos o la omisión de conceptos indispensables para lograr una abstracción en el pensamiento matemático.

Esta tesis se propone analizar la propuesta didáctica del paquete curricular, considerando el tema de problemas multiplicativos (que incluyen multiplicación y división) a lo largo de la educación primaria. La tesis está constituida por cuatro capítulos, así como por un apartado de conclusiones.

En el primer capítulo se presenta el planteamiento y delimitación del problema, la justificación del tema teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las pruebas de EXCALE 2013-2016 en tercero y sexto grado de primaria y los resultados de PLANEA de 2015 de sexto grado, señalando deficiencias en el eje temático

sentido numérico y pensamiento algebraico específicamente en el tema de problemas multiplicativos, posteriormente se plantean una serie de preguntas y objetivos a desarrollar en este trabajo.

En el segundo capítulo se describe el marco referencial y teórico, constituido por los documentos oficiales que rigen actualmente la educación básica de nivel primaria, como Plan y Programas de estudio de 2011 y los libros de texto del maestro y el alumno *Desafíos Matemáticos* de 2013, con respecto al segundo marco además de la revisión de la literatura donde se destacan artículos, libros y tesis con contenidos referentes a la asignatura de matemáticas en el tratamiento de la multiplicación, se especifica la clasificación de problemas.

En el tercer capítulo, se detallan los aspectos que serán analizados en Plan y Programas de estudio considerando los propósitos y aprendizajes esperados a desarrollar en educación primaria, del mismo modo en este capítulo se advierte la forma en la que se lleva a cabo el análisis de los libros de texto y la manera en la que se presentaran los resultados de dicho análisis.

En el capítulo cuarto, se presenta el análisis de resultados respecto al Plan y los programas de estudio, se muestran las comparaciones del tratamiento del tema, el aprendizaje esperado y la didáctica del desafío establecido en primaria. Además se exponen las clasificaciones de los tipos de problemas y actividades propuestas en los libros de texto. Por último dentro del capítulo se presenta una comparación entre lo propuesto en programas de estudio y lo que se observó en los libros de texto.

En el apartado de conclusiones derivadas de este análisis, se exponen los resultados relevantes de acuerdo con los objetivos específicos establecidos en esta tesis, para finalmente describir lo alcanzado sobre el objetivo general.

CAPITULO 1. DELIMITACIÓN, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

El capítulo está constituido por dos apartados, en el primero se presentan de forma breve los resultados de las pruebas estandarizadas, EXCALE de tercer grado del ciclo escolar 2013-2014 y EXCALE de sexto grado del ciclo escolar 2012-2013, de igual forma los resultados obtenidos en PLANEA de 2015, pertenecientes a el Eje Temático Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, en el tema Problemas Multiplicativos. El segundo apartado de este capítulo se plantean las preguntas de investigación así como el objetivo general y específicos que se pretenden alcanzar.

1.1 Delimitación del problema de investigación

Análisis de la propuesta didáctica sobre el tema de la multiplicación, en los libros de texto para el maestro y el alumno *Desafíos matemáticos de 2013* y el Plan y Programas de Estudio de 2011.

1.2 Justificación

Las matemáticas han sido tema de atención de numerosas investigaciones, y ocupan actualmente un lugar necesario e importante dentro de la sociedad, tanto en la economía como en el desarrollo de las ciencias, en nuestra vida diaria, etc. Por esta razón las matemáticas están presentes en el proceso formativo del alumno, desde que ingresa a preescolar hasta estudios universitarios o superiores. La educación básica se imparte a estudiantes de 3 a 15 años de edad a lo largo de 12 grados escolares distribuidos en 3 niveles educativos: 3 grados de educación preescolar, 6 grados de educación primaria y 3 grados de educación secundaria. De estos tres niveles educativos es en la educación primaria donde se otorga mayor peso curricular a las áreas de Español y Matemáticas, dedicándole a Español un promedio de 376 horas por ciclo escolar, es decir, un total de 9 horas por semana y a Matemáticas 310 horas por ciclo escolar, en promedio 8 horas por semana. La jornada escolar diaria cuenta con cuatro horas por los cinco días

escolares, es decir, 20 horas a la semana, por lo tanto el porcentaje de horas dedicado a la asignatura de matemáticas es de 38.8 % por semana.

A pesar de ser las Matemáticas una de las materias a las que más tiempo se les dedica en el currículo escolar, se presenta en esta el mayor fracaso académico. Una muestra de ello, son los resultados obtenidos en las pruebas estandarizadas de evaluación aplicados en todo el país como EXCALE y PLANEA aplicados por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

Los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) se aplican para evaluar lo que los estudiantes aprenden del currículo nacional, así como para identificar los factores asociados a las diferencias entre los niveles de logro.

Los niveles, grados y asignaturas que evalúan los exámenes EXCALE son los terminales de los periodos, es decir, 3° de preescolar con las asignaturas de lenguaje y comunicación y pensamiento matemático; 3° y 6° de primaria en las asignaturas de español, matemáticas, ciencias naturales y formación cívica y ética, (se agregó 3° de primaria para evaluar bloques de 3 años) y finalmente, la última aplicación es en 3° de secundaria en las asignaturas de español, matemáticas, ciencias sociales y ciencias naturales.

Los últimos exámenes de EXCALE aplicados en educación primaria fueron en 3° de primaria en 2013-2014 y en 6° de primaria en 2012-2013, cuyos resultados se presentan en las Tablas 1.1 y 1.2.

Tabla 1.1 Resultados de exámenes de la Calidad y el Logro Educativos. Tercer grado de Primaria, ciclo escolar 2013-2014

Estrato escolar Urbano público	Porcentaje del nivel de logro				Porcentaje de alumnos que alcanzan el nivel básico y se encuentran por debajo del mismo	Porcentaje de alumnos que alcanzan al menos el nivel medio
	Por debajo del básico	Básico	Medio	Avanzado		
Español	28	40	30	2	68	32
Matemáticas	39	32	18	11	71	29
Ciencias naturales	25	43	20	12	68	32
Formación cívica y ética	28	39	25	8	67	33

*Basada en los resultados de los exámenes EXCALE de 2013-2014, solo se consideró el estrato escolar urbano público

Tabla 1.2 Resultados exámenes de la Calidad y el Logro Educativos. Sexto grado de Primaria, ciclo escolar 2012-2013.

Estrato escolar Urbano público	Porcentaje del nivel de logro				Porcentaje de alumnos que alcanzan el nivel básico y se encuentran por debajo del mismo	Porcentaje de alumnos que alcanzan al menos el nivel medio
	Por debajo del básico	Básico	Medio	Avanzado		
Español	27	43	28	1.8	70	30
Matemáticas	46	28	18	7.6	74	26
Ciencias naturales	27	35	25	13	62	38
Formación cívica y ética	17	47	30	5.6	64	36

*Basada en los resultados de los exámenes EXCALE de 2012-2013, solo se consideró el estrato escolar urbano público

Cuando se revisan los resultados de ambas tablas se puede notar que de las cuatro asignaturas evaluadas por EXCALE es en el área de matemáticas donde se observan resultados no esperados de acuerdo al tiempo dedicado a esta asignatura en el salón de clase.

En el caso de la tabla 1.1 lo correspondiente a tercer grado de primaria la proporción de alumnos que alcanzan o se encuentran por debajo del nivel básico de logro en matemáticas es del 71%, siendo el más alto en comparación con el resto de las asignaturas evaluadas. Y para sexto de primaria en la tabla 1.2 se puede observar que es en matemáticas donde se encuentra el porcentaje mayor de los alumnos que alcanzan o se encuentran por debajo de un nivel de logro básico, es un 74% cuando las demás asignaturas se encuentran entre el 62 y 70%.

Ahora bien si se comparan los resultados de matemáticas de ambas tablas (tercero y sexto) se puede notar que el porcentaje en los niveles de logro de los alumnos que alcanzan un nivel medio es menor en sexto grado que en tercero.

De igual forma se puede ver que en el porcentaje de los alumnos que alcanzan un nivel de logro avanzado es mayor en tercer grado de primaria con un 11% que en

sexto con un 7.6%. Es decir, que en tercer grado se obtienen mejores resultados en el área de matemáticas que en sexto grado.

También se revisó el nivel de dificultad y el porcentaje de aciertos de algunos contenidos curriculares en el área de matemáticas de cada examen. Tabla 2.1 y tabla 2.2

Tabla 2.1 Dificultad media y porcentaje de aciertos en algunos contenidos curriculares en Matemáticas de tercer grado de primaria.

Contenido curricular	Dificultad media establecida en matemáticas 604.26	Porcentaje de aciertos
		Urbano público
		%
Figuras y medición de longitud y tiempo	633.31	10.47
Números y sistemas de numeración	609.36	11.57
Problemas aditivos	592.34	12.43
Problemas multiplicativos	583.44	11.06

*Basada en los resultados de los exámenes EXCALE de 2013-2014, solo se consideró el estrato escolar urbano público

Los resultados de tercero de primaria en el área de matemáticas se revisaron de forma más detallada tomando en cuenta los contenidos curriculares de EXCALE. De esta revisión se puede observar en el contenido curricular de problemas multiplicativos es donde se tiene el segundo porcentaje de aciertos menores a pesar de ser el contenido que manejan una dificultad menor a la media establecida en los reactivos dentro de toda el área de matemáticas del examen.

Tabla 2.2 Dificultad media y porcentaje de aciertos en algunos contenidos curriculares en Matemáticas de sexto grado de primaria

Contenido curricular	Dificultad media establecida en matemáticas 589.08	Porcentaje de aciertos
		Urbano público
		%
Análisis y representación de datos, proporcionalidad y funciones.	584.08	47.58
Figuras y cuerpos, ubicación espacial y medida.	600.5	44.08
Números y sistemas de numeración, problemas aditivos y multiplicativos.	580.48	40.8

*Basada en los resultados de los exámenes EXCALE de 2012-2013, solo se consideró el estrato escolar urbano público

Al revisar los contenidos curriculares del examen de sexto grado se puede notar que el porcentaje de aciertos es menor en el contenido curricular de Números y sistemas de numeración, problemas aditivos y multiplicativos a pesar de que este presenta menor dificultad en comparación con los otros contenidos y también en referencia a la dificultad de problemas multiplicativos de tercero de primaria.

Las pruebas EXCALE evaluaban el currículo nacional y PLANEA evalúa aprendizajes clave del mismo. Entre las diferencias más relevantes entre ambas pruebas puede mencionarse que PLANEA pone un énfasis mayor en habilidades y menor en conocimientos memorísticos. En general, EXCALE y PLANEA tienen similitudes importantes respecto de las tendencias que revelan, ya que no se puede dejar de lado el evaluar aprendizajes clave cuando de currículo se habla, no obstante, debe tenerse presente que se trata de dos escalas distintas.

El propósito de PLANEA es conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en diferentes momentos de la educación básica. Esta prueba evalúa aprendizajes clave fundamentales para la adquisición de nuevos aprendizajes relevantes para el dominio de la asignatura, prevalecientes en el tiempo a pesar de los cambios curriculares, se pone mayor énfasis en habilidades que en conocimientos.

PLANEA se aplicó en 2015 a alumnos que cursan la educación básica en niveles terminales, es decir en sexto grado de primaria y tercer grado de secundaria, para esta investigación solo se revisaron los resultados de educación primaria. Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Resultados de PLANEA en sexto grado de primaria de 2015

Estrato escolar Pública general	Niveles de logro			
	Nivel I	Nivel II	Nivel III	Nivel IV
Características	Los estudiantes que se ubican en este nivel obtienen puntuaciones que representan un logro insuficiente de los aprendizajes clave del currículum, lo que refleja carencias fundamentales que dificultarán el aprendizaje futuro.	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un logro apenas indispensable de los aprendizajes clave del currículum.	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un logro satisfactorio de los aprendizajes clave del currículum.	Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un logro sobresaliente de los aprendizajes clave del currículum.
Lenguaje y comunicación	51.6%	34.1%	12.7%	1.6%
Matemáticas	62.8%	19%	12.9%	5.4%

*Basada en los resultados de PLANEA de 2015, únicamente se tomó en cuenta los porcentajes del estrato escolar urbano

Al revisar los resultados en matemáticas se puede advertir que el porcentaje de alumnos que alcanzan un nivel de logro insuficiente es más de la mitad, teniendo así un 81.8% de los alumnos que presentaron el examen en los niveles de logro más bajos evaluado en la prueba.

Así mismo, se revisaron los porcentajes de logro en los contenidos curriculares de la prueba en el área de matemáticas Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Resultados de PLANEA en 2015 por contenido curricular

Contenidos curriculares				
Aprendizajes básicos para la vida cotidiana	Nivel I	Nivel II	Nivel III	Nivel IV
Resuelven problemas que impliquen números naturales	60.5%	18.9%	13.8%	6.8%
			Resuelven problemas aditivos y multiplicativos o de división con números naturales	

Se ubican espacialmente		Ubican lugares usando sistemas de referencia convencionales en plano o mapas	Calcula la distancia real de un punto a otro en mapas	Describen rutas usando sistemas de referencia convencional en planos o mapas
Usan correctamente las unidades de medida		Resuelven problemas de conversión de unidades en el sistema internacional de medidas	Resuelven problemas directos de conversión de unidades de medida SI e Inglés	Resuelven problemas de conversión de unidades de medida con una operación adicional
Analizan y comprenden información de diversos portadores	Resuelven problemas que implican leer información en graficas de barras	Solucionan problemas que implican analizar o representar información en tablas o gráficas de barras	Resuelven problemas de identificación de las moda en conjuntos de datos	Resuelven problemas que implican calcular promedios o medianas

*Basada en los resultados de PLANEA de 2015, únicamente se tomó en cuenta los porcentajes del estrato escolar urbano

En la tabla anterior el contenido curricular evaluado se presenta en el porcentaje de logro que se alcanzo de acuerdo a los resultados obtenido en la prueba PLANEA de 2015.

El contenido curricular de interés de esta tesis se ubica en las dificultades presentados por alumnos en la resolución de reactivos relativos a temas multiplicativos, solo el 13.8% de los alumnos resuelven de manera correcta problemas aditivos y multiplicativos con números naturales.

Al comparar los resultados de ambas pruebas (EXCALE y PLANEA de sexto grado) se observa que existen dificultades importantes en el área de las operaciones básicas, específicamente en el contenido curricular, teniendo un promedio de 27.3% en los alumnos que se enfrentan a los problemas de estructura multiplicativa y/o al algoritmo de la multiplicación de manera correcta, es decir más del 70% de los alumnos cometen errores al resolver cualquier reactivo que requiera ejecutar, interpretar y/o relacionar una multiplicación.

Dentro de los reactivos de ambas pruebas, EXCALE y PLANEA, los niños se enfrentan a aspectos esenciales de la estructura multiplicativa, trabajan con sus

diferentes situaciones: los porcentajes, áreas, razón, entre otras que se resuelvan con la operación.

Se realizó la clasificación de los reactivos de temática multiplicativa presentados en las pruebas obteniendo así tres grupos diferentes de reactivos, dependiendo de lo exigido a los alumnos.

A continuación se expondrán ejemplos de cada uno de estos reactivos y su respectivo grupo presentados en las pruebas EXCALE y PLANEA, con el porcentaje de aciertos y su nivel de dificultad según la clasificación de cada prueba¹.

Los grupos se caracterizan por la representación de la multiplicación planteada, es decir, el primer grupo se caracteriza porque en los reactivos se presenta y pide al alumno que ejecute el algoritmo multiplicativo. El segundo grupo se caracteriza por las preguntas planteadas para conocer factores, pasos y resultado a partir de la presentación de un algoritmo o problema, y el tercer grupo se caracteriza por plantear problemas verbales de tipo multiplicativo con apoyo grafico para su resolución.

También se presenta el grado de dificultad de cada reactivo y el número con el que se encuentra en la base de datos.

PRIMER GRUPO (reactivos)

En este grupo se presentan los reactivos en los que se piden al alumno ejecutar el algoritmo multiplicativo con sus diversas variables (diferentes factores con diferentes cifras, posición horizontal o vertical). Se espera que el niño ponga en juego la parte operativa de la multiplicación, es decir proceda de manera que aplique las reglas y técnicas que haya aprendido en clase para llegar a la respuesta correcta.

¹ La Prueba PLANEA no cuenta con porcentajes de acierto y nivel de dificultad por reactivo.

Reactivo (78) Algoritmo convencional de la multiplicación con dos factores, ambos de dos cifras (con transformación).

Con este tipo de problemas multiplicativos se espera que los alumnos conozcan los pasos requeridos para la ejecución satisfactoria del algoritmo. En las multiplicaciones que se presentan, ambos factores serán de dos cifras cuidando que los números generen una operación con transformación.

Ejemplo:

<p>¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?</p> $\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$ <p>A. 560 B. 530 C. 210 D. 245</p>	<p>EXCALEtercer grado</p> <p>Dificultad media de tercero: 604.26</p> <p>Nivel de dificultad: 513</p> <p>Porcentaje de aciertos: 38%</p>
---	---

Reactivo (32) Algoritmo convencional de la multiplicación (sin transformación).

Para el caso de las multiplicaciones con transformación es necesario tener un conocimiento adecuado del sistema de numeración decimal y su funcionamiento. En las multiplicaciones que se presenten, un factor será de tres cifras y el otro de una, cuidando que los números generen una operación sin transformación.

Ejemplo:

<p>¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?</p> $\begin{array}{r} 720 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$ <p>A. 2880 B. 724 C. 2884 D. 2480</p>	<p>EXCALE</p> <p>Dificultad media de tercero: 604.26</p> <p>Nivel de dificultad: 497</p> <p>Porcentaje de aciertos: 55%</p>
--	---

Reactivo (76) Algoritmo convencional de la multiplicación con dos factores, uno de dos y el otro de una cifra, respectivamente (con transformación).

Para resolver multiplicaciones por medio del algoritmo convencional, es necesario conocer los pasos requeridos y ejecutarlos en el orden debido. En las multiplicaciones presentadas, un factor será de dos cifras y el otro de una.

Ejemplo:

<p>¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?</p> <p style="text-align: center;">$79 \times 4 =$</p> <p>A. 316 B. 83 C. 286 D. 2836</p>	<p>EXCALE</p> <p>Dificultad media de tercero: 604.26</p> <p>Nivel de dificultad: 545</p> <p>Porcentaje de aciertos: 52%</p>
--	---

El hecho de que su dificultad sea mayor que el reactivo anterior es por la manera en la que es presentada a los alumnos, ya que esta se presenta de forma horizontal.

Reactivo (77) Algoritmo convencional de la multiplicación con dos factores, uno de tres y el otro de una cifra. (Con transformación).

Para el caso de las multiplicaciones con transformación es necesario un conocimiento adecuado del sistema de numeración decimal y su funcionamiento. En las multiplicaciones que se presenten, un factor será de tres cifras y el otro de una. Ejemplo:

<p>¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?</p> <p style="text-align: center;">$\begin{array}{r} 869 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$</p> <p>A. 5214 B. 5164 C. 4814 D. 483654</p>	<p>EXCALE</p> <p>Dificultad media de tercero: 604.26</p> <p>Nivel de dificultad: 569</p> <p>Porcentaje de aciertos: 43%</p>
---	---

Reactivo (27) Resolver multiplicaciones con dos factores, un factor de dos y el otro de tres cifras, mediante el algoritmo convencional.

Ejemplo:

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $246 \times 32 =$ A. 7 872 B. 6 962 C. 1 226 D. 7 772	EXCALE Dificultad media de sexto: 589.08 Nivel de dificultad: 575 Porcentaje de aciertos: 51%
---	---

SEGUNDO GRUPO (reactivos)

En los reactivos de este grupo no se pide directamente al alumno resuelva un algoritmo multiplicativo, pero sí se espera conozca de manera clara la función de la multiplicación, que puede identificar cuáles son los factores, pasos y resultados que con esta operación se pueden obtener.

Reactivo (30) Problemas donde se pida reconocer la operación que puede utilizarse para resolverlo.

Elegir de entre varias operaciones aquella que permita resolver cierto problema supone al menos dos tipos de conocimientos que deben poseer: comprender la manera en la que se relacionan los datos del problema y tener clara la función de cada operación. El problema deberá plantear una situación que se resuelva con una multiplicación. Ejemplo:

Miguel quiere regalar una bolsa con 15 canicas a cada uno de sus 8 primos. Miguel desea saber cuántas canicas necesita para llenar las bolsas, ¿cuál de las siguientes operaciones debe resolver? A. 15×8 B. $15/8$ C. $15 + 8$ D. $15 - 8$	EXCALE Dificultad media de sexto: 589.08 Nivel de dificultad: 597 Porcentaje de aciertos: 43%
--	---

Reactivo (31) Problemas en los que se plantee una operación y se pida que digan qué problema puede resolverse con ella.

Elegir de entre varios problemas el que puede resolverse con una operación ya planteada supone al menos dos tipos de conocimientos que debe poseer el alumno: comprender la manera en la que se relacionan los datos del problema y tener clara la función de cada operación. Se debe presentar una multiplicación que resuelva uno de los cuatro problemas planteados (tres son distractores).

Ejemplo:

<p>¿Cuál de los siguientes problemas se resuelve con la operación 48 x 6?</p> <p>A. En una tienda hay 48 cajas con 6 focos en cada una. ¿Cuántos focos hay en total?</p> <p>B. Había 48 golondrinas paradas en el alambre y llegaron otras 6. ¿Cuántas hay ahora?</p> <p>C. Compré 48 chicles, ¿cuántas bolsitas con 6 chicles en cada una puedo hacer?</p> <p>D. Mario tiene 48 canicas y Adolfo 6, ¿cuántas canicas le faltan a Adolfo para tener tantas como Mario?</p>	<p>EXCALE</p> <p>Dificultad media de sexto: 589.08</p> <p>Nivel de dificultad: 536</p> <p>Porcentaje de aciertos: 39%</p>
---	---

Reactivo (36) Identificar la operación que resuelve un problema cuya solución implica una multiplicación.

En la solución de problemas, las técnicas aprendidas y las previamente ejercitadas constituyen un medio o recurso instrumental necesario para alcanzar la solución; además de esto se requieren estrategias, conocimientos conceptuales, actitudes, etc. El nivel de dificultad de este reactivo es debido a que no es solo una multiplicación, de hecho el alumno debe identificar qué números implican la multiplicación y cuales números la adición.

Ejemplo:

<p>María salió de vacaciones y se hospedó 8 días en un hotel en el que pagó \$1 500 por cada día. María gastó además \$600 en transporte. Para saber cuánto dinero gastó María en el hospedaje, ¿cuál de las siguientes operaciones debes calcular?</p> <p>A) $1500 \times 8 =$ B) $\\$600 \times 8 =$ C) $\\$1\ 500 \times 600 =$ D) $\\$1\ 500 \times 8 + \\$600 =$</p>	<p>EXCALE</p> <p>Dificultad media de sexto: 589.08</p> <p>Nivel de dificultad: 606</p> <p>Porcentaje de aciertos: 52%</p>
---	---

TERCER GRUPO (reactivos)

En tercer grupo se encuentran los distintos problemas cuya estructura se caracteriza porque el multiplicador y multiplicando tienen papeles específicos definidos en el texto del problema. En esta clase de problemas no se especifica al alumno la operación que debe realizar. Los reactivos de este tipo vienen acompañados de apoyo visual como lo son tablas, gráficas, etc.

Reactivo (22) Resolver problemas cuya solución implique una multiplicación, con arreglos rectangulares.

Según la clasificación de Vergnaud (1985), existen de tres tipos: *Isomorfismo de medidas, producto de medidas y espacio de medidas*. La presente especificación se ocupa de problemas del segundo tipo, producto de medidas (también conocidos como arreglos rectangulares), mismas que se proporcionan mediante una ilustración particular llamada arreglo rectangular en la que es posible “contar” unidad por unidad el producto que resulta de la multiplicación de dos factores.

Producto de medidas. Son aquellos que plantean situaciones de combinatoria y se suelen resolver mediante una tabla cartesiana o alguna equivalente. A diferencia de los de isomorfismo de medidas, no hay una relación proporcional que los asocie, sino que existen uno o más campos de medidas los cuales darán lugar a otro (Belmonte, 2001).

Ejemplo:

En 13 filas de 6 bancas cada una ¿cuántas bancas en total hay?													EXCALE	
A) 78													Dificultad media de sexto:	
B) 19													589.08	
C) 68													Nivel de dificultad: 558	
D) 23													Porcentaje de aciertos: 58%	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
2														
3														
4														
5														
6														

Reactivos (27) Resolución de problemas que impliquen una multiplicación para su solución, **sin tablas de variación proporcional** (en los que se conozca el valor unitario).

Vergnaud (1985), identificó tres clases de problemas dentro de las “estructuras multiplicativas”: Isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple.

Los problemas de **Isomorfismo de medidas** plantean situaciones en las que hay una proporción directa entre dos espacios de medida.

Son problemas con dos dimensiones básicas que incluyen dos números o cantidades e incorporan, además, el 1 como base para la razón.

Cuando el alumno resuelve un problema de multiplicación de relación proporcional entre dos medidas, debe identificar el valor unitario que se le proporciona como un sumando (multiplicando) que se repite un cierto número de veces (multiplicador), para hallar el producto solicitado.

educación primaria: ¿Qué es lo que se propone en el tema de la multiplicación a lo largo de la educación primaria? ¿Qué tipos de problemas se plantean en la educación primaria correspondientes al tema de la multiplicación? ¿Se promueve en el paquete curricular la comprensión, ya sea al resolver un problema multiplicativo o al ejecutar una multiplicación? ¿Qué es lo que un egresado de educación primaria logra, tanto en la operatividad de la multiplicación como en la resolución de problemas de estructura multiplicativa?

La situación de la enseñanza de las matemáticas. Se ha discutido y estudiado desde diferentes perspectivas, los estudios se centran en su mayoría sobre el uso de innovadores materiales didácticos y algunos sobre la enseñanza pero son pocas la investigaciones enfocadas al aprendizaje de los niños sobre las matemáticas que se centren en la aritmética, en los procedimientos algorítmicos para resolver los problemas, con la pretensión de argumentar la racionalidad matemática en los procesos en los libros de texto.

El interés de este trabajo es investigar lo establecido en la propuesta didáctica sobre la multiplicación a lo largo de la educación primaria en los libros de texto *Desafíos Matemáticos de 2013* y en el Plan y los Programas de Educación Primaria de 2011, para conocer lo pretendido sobre lo para los alumnos en cuestión de conocimiento y dominio al concluir la educación primaria, tomando en cuenta el paquete curricular. Por lo anterior se propone el siguiente objetivo.

1.3 Objetivo general

Analizar la operatividad de la multiplicación y los tipos de problemas de estructura multiplicativa planteados en la propuesta didáctica del paquete curricular de Educación Primaria.

1.4 Objetivos específicos

Analizarla propuesta didáctica en el paquete curricular en el tema de problemas aditivos como antecedente de la multiplicación de primer grado.

Establecer la cantidad y los tipos de problemas que se plantean en la educación primaria correspondientes al tema de la multiplicación.

Examinar la congruencia del tratamiento didáctico con los aprendizajes esperados en los seis grados de Educación Primaria en el tema de la multiplicación.

Construir una visión panorámica de la propuesta didáctica de la multiplicación en los libros de texto *Desafíos matemáticos de 2013*, de nivel primaria.

CAPITULO 2. MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se analizarán los documentos oficiales, se dividirá en tres apartados, el primero corresponde a lo establecido en plan de estudios respecto al perfil de egreso, las competencias y propósitos a alcanzar a lo largo de la educación primaria, el segundo apartado consiste en la revisión de programas de estudio de primaria el aprendizaje esperado y tratamiento del tema propuesto para los problemas de tipo multiplicativo, el último apartado consta de la revisión y análisis de los libros de texto mostrando la intención didáctica, su clasificación y un ejemplo de las consignas propuestas en el libro.

2.1 Plan de estudio de 2011 de matemáticas de nivel primaria

El plan de estudios de 2011 de educación básica es el documento rector que actualmente define las competencias para la vida, el perfil de egreso, los estándares curriculares, propósitos de estudio y los aprendizajes esperados que constituyen el trayecto formativo de los estudiantes.

Las **competencias** para la vida que se presentan en Plan y Programas de 2011 de educación básica, tienen como finalidad movilizar y dirigir todos los componentes presentes en la vida del alumno (conocimientos, habilidades, actitudes y valores) hacia la consecución de objetivos concretos; estos son más que el saber qué, el saber hacer o el saber ser, porque manifiestan la acción de manera integrada; es decir, poseer solo conocimientos y habilidades no significa ser competente, por ejemplo, se pueden conocer las reglas gramaticales pero ser incapaz de redactar una carta; es posible enumerar los derechos humanos y sin embargo, discriminar a las personas.

Las competencias que se presentan en Plan y Programas de 2011 son cinco y se espera se desarrollen a lo largo de los tres niveles de la educación básica.

- Competencias para el aprendizaje permanente. Para su desarrollo se requiere habilidad lectora, integrarse a la cultura escrita, comunicarse en más de una lengua, habilidades digitales y aprender a aprender.

- Competencias para el manejo de la información. Su desarrollo requiere: identificar lo que se necesita saber; aprender a buscar; identificar, evaluar, seleccionar, organizar y sistematizar información; apropiarse de la información de manera crítica, utilizar y compartir información con sentido ético.
- Competencias para el manejo de situaciones. Para su desarrollo se requiere: enfrentar el riesgo, la incertidumbre, plantear y llevar a buen término procedimientos; administrar el tiempo, propiciar cambios y los que se presenten; tomar decisiones y asumir sus consecuencias; manejar el fracaso, la frustración y la desilusión; actuar con autonomía en el diseño y desarrollo de proyectos de vida.
- Competencias para la convivencia. Su desarrollo requiere: empatía, relacionarse automáticamente con otros y la naturaleza: ser asertivo; trabajar de manera colaborativa; tomar acuerdos y negociar con otros; crecer con los demás; reconocer y valorar la diversidad social, cultural y lingüística.
- Competencias para la vida en sociedad. Para su desarrollo se requiere: decidir y actuar con juicio crítico frente a los valores y las normas sociales y culturales; proceder a favor de la democracia, la libertad, la paz, el respeto a la legalidad y a los derechos humanos; participar tomando en cuenta las implicaciones sociales del uso de la tecnología, combatir la discriminación y el racismo, y conciencia de pertenencia a su cultura, a su país y al mundo.

El **perfil de egreso** de educación básica que se describe en Plan y Programas de 2011, plantea rasgos deseables que los estudiantes deberán mostrar al concluir la educación básica como garantía de que podrán desenvolverse satisfactoriamente en cualquier ámbito en el que decidan continuar desarrollarse.

Como resultado del proceso de formación a lo largo de la educación básica, el alumno mostrará los siguientes rasgos.

- Utilizar el lenguaje materno, oral y escrito, para comunicarse con claridad y fluidez, e interactuar en distintos contextos sociales y culturales; además,

posee herramientas básicas para comunicarse en una segunda lengua (inglés).

- Argumenta y razona al analizar situaciones, identifica problemas, formula preguntas, emite juicios, propone soluciones, aplica estrategias y toma decisiones.
- Valora los razonamientos y la evidencia proporcionados por otros y puede modificar, en consecuencia los propios puntos de vista.
- Busca, selecciona, analiza, evalúa y utiliza la información proveniente de diversas fuentes.
- Interpreta y explica procesos sociales, económicos, financieros, culturales y naturales para tomar decisiones individuales o colectivas que favorezcan a todos.
- Conoce y ejerce los derechos humanos y los valores que favorecen la vida democrática; actúa con responsabilidad social y apego a la ley.
- Asume y practica la interculturalidad como riqueza y forma de convivencia en la diversidad social, cultural y lingüística.
- Conoce y valora sus características y potencialidades como ser humano; sabe trabajar de manera colaborativa; reconoce, respeta y aprecia la diversidad de capacidades en los otros, y emprende y se esfuerza por lograr proyectos personales o colectivos.
- Promueve y asume el cuidado de la salud y del ambiente como condiciones que favorecen un estilo de vida activo y saludable.
- Aprovecha los recursos tecnológicos a su alcance como medios para comunicarse, obtener información y construir conocimiento.
- Reconoce diversas manifestaciones del arte, aprecia la dimensión estética y es capaz de expresarse artísticamente.

El logro del perfil de egreso se alcanza de manera paulatina y sistemática los aprendizajes esperados y los estándares curriculares.

En el caso de esta tesis se tomarán en cuenta las **competencias, los aprendizajes esperados y los estándares curriculares** en el área de matemáticas en educación primaria (de primero a sexto de primaria)

Los **estándares curriculares** expresan lo que los alumnos deben saber y ser capaces de hacer durante cuatro periodos escolares. Tabla 4

Tabla 4. Estándares curriculares en periodos de 3 años

Estándares escolares	
Periodo escolar	Grado escolar de corte
Primero	tercero de preescolar
Segundo	tercero de primaria
Tercero	sexto de primaria
Cuarto	tercero de secundaria

Los periodos escolares en los que se enfocará este trabajo recepcional son el segundo y tercero el cual abarca los seis años de educación primaria en el área de pensamiento matemático y el área de matemáticas.

La progresión de estos periodos debe entenderse como:

- Transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados.
- Ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas.
- Avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia un trabajo autónomo.

Es en el segundo periodo escolar (de primero a tercero de primaria) cuando se trabaja en el campo de **pensamiento matemático**, que es donde se articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría, la interpretación de información y procesos de medición y del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla.

El conocimiento de algoritmos y reglas solo es importante en la medida en la que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas. De

ahí que los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos.

Esta visión curricular del pensamiento matemático busca despertar el interés de los alumnos, a edades tempranas y hasta las carreras ingenieriles, fenómeno que contribuye a la producción de conocimientos que requieren las nuevas condiciones de intercambio y competencia mundial.

Para avanzar en el área de la matemática, es en el segundo periodo (cuarto a sexto de primaria) que en lugar de hablar de pensamiento matemático se desarrolla el estudio de las matemáticas para que los alumnos aprendan a resolver y formular preguntas que le sean útiles para lograr las competencias esperadas.

En educación primaria, el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de la información y de los procesos de medición.

A lo largo de la educación básica se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de saberes previos, lo que implica:

- Formular y validar conjeturas.
- Plantearse nuevas preguntas.
- Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.
- Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados.
- Encontrar diferentes formas de resolver los problemas.
- Manejar técnicas de manera eficiente.

Al transitar en estos periodos escolares y cumplir con los estándares de dichos periodos se espera que los alumnos logren adquirir cuatro **competencias en el área de matemáticas** las cuales se definen a continuación:

- Resolver problemas de manera autónoma.

Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos;

problemas o situaciones en los que sean los alumnos quienes planteen las preguntas. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces; o bien, que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema, para generalizar procedimientos de resolución.

➤ Comunicar información matemática.

Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno.

Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan relaciones entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones, y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.

➤ Validar procedimientos y resultados.

Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

➤ Manejar técnicas eficientemente.

Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución incompleta o incorrecta. Esta competencia no se limita a usar mecánicamente las operaciones aritméticas; apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema;

en la utilización del cálculo mental y la estimación, en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. Para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos. Así adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas.

2.1.1 Propósitos del estudio de las matemáticas para la educación primaria

En esta fase de su educación, como resultado del estudio de las Matemáticas se espera que los alumnos:

- Conozcan y usen las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas. Expliquen las similitudes y diferencias entre las propiedades del sistema decimal de numeración y las de otros sistemas, tanto posicionales como no posicionales.
- **Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.**
- Conozcan y usen las propiedades básicas de ángulos y diferentes tipos de rectas, así como del círculo, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, prismas, pirámides, cono, cilindro y esfera al realizar algunas construcciones y calcular medidas.
- Usen e interpreten diversos códigos para orientarse en el espacio y ubicar objetos o lugares.
- Expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad, para calcular perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares e irregulares.
- Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en imágenes, textos, tablas, gráficas de barras y otros portadores para comunicar información o responder preguntas planteadas

por sí mismos o por otros. Representen información mediante tablas y gráficas de barras.

- **Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, calculen valores faltantes, porcentajes, y apliquen el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.**

Para lograr los propósitos y competencias descritos anteriormente se establecen contenidos curriculares a lo largo de los seis años de educación primaria. Cada grado escolar comprende el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática.

Se organizan en:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información
- Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Es en el eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico donde se encuentra el tema de la multiplicación y sus diversas representaciones.

2.2 Programas de estudio de 2011 de matemáticas

A continuación se muestran los concentrados de acuerdo con Programas de estudio de 2011, se presentan seis grados escolares los cuales están divididos en cinco bloques, y en cada bloque se especifica el tema a tratar sobre el eje temático Sentido numérico y pensamiento algebraico y los aprendizajes esperados de cada bloque.

Primer grado

Al ser el inicio del periodo escolar no se habla de manera formal sobre problemas multiplicativos sino de problemas aditivos, este tema pertenece al eje temático Sentido numérico y pensamiento algebraico y de acuerdo con este trabajo se analizarán como antecedentes del tratamiento de los problemas multiplicativos.

Tabla 5.1 Primer grado aprendizajes esperados y tratamiento del tema

Problemas aditivos		
Bloque	Aprendizajes esperados	Tema: Problemas aditivos (tratamiento)
I	Calcula el resultado de problemas aditivos planteados de forma oral con resultados menores que 30.	Obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.
II	Utiliza los números ordinales al resolver problemas planteados de forma oral.	Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta. Expresión simbólica de las acciones realizadas al resolver problemas de suma y resta, usando los signos +, -, =.
III	Utiliza la sucesión oral y escrita de números, por lo menos hasta el 100, al resolver problemas. Modela y resuelve problemas aditivos con distinto significado y resultados menores que 100, utilizando los signos +, -, =.	Desarrollo de procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones de dígitos. Resolución de problemas correspondientes a los significados de juntar, agregar o quitar.
IV	Resuelve mentalmente sumas de dígitos y restas de 10 menos un dígito. Utiliza unidades arbitrarias de medida para comparar, ordenar, estimar y medir longitudes.	Desarrollo de recursos de cálculo mental para obtener resultados en una suma o sustracción: suma de dígitos, complementos a 10, restas de la forma 10 menos un dígito, etcétera.
V	Resuelve problemas que implican identificar relaciones entre los números (uno más, mitad, doble, 10 más, etcétera).	Resolución de cálculos con números de dos cifras utilizando distintos procedimientos. Uso de resultados conocidos y propiedades de los números y las operaciones para resolver cálculos.

*Para este trabajo se elaboró una versión simplificada de los contenidos curriculares en primer grado de educación primaria, solo se tomaron en cuenta los aprendizajes esperados, el eje temático y el tema de problemas aditivos por bloque.

Segundo grado

Es en este grado y periodo donde se empieza a tratar el tema de los problemas multiplicativos contenido en el eje temático de Sentido numérico y pensamiento algebraico. Se espera como parte de los estándares curriculares que el alumno resuelva problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales utilizando procedimientos informales.

Tabla 5.2 Segundo grado aprendizajes esperados y tratamiento del tema.

Bloque	Aprendizajes esperados	Tema: problemas multiplicativos (tratamiento)
I	Determina la cardinalidad de colecciones numerosas representadas gráficamente.	Resolución de problemas que involucren sumas iteradas o repartos mediante procedimientos diversos.
II	Produce o completa sucesiones de números naturales, orales y escritos, en forma ascendente o descendente. Identifica las características de figuras planas, simples y compuestas.	No se presenta el tema de problemas multiplicativos
III	Resuelve problemas aditivos con diferentes significados, modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.	Resolución de problemas de multiplicación con factores menores o iguales a 10, mediante sumas repetidas. Explicitación de la multiplicación implícita en una suma repetida.
IV	Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con objetos o figuras.	Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares). Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos.
V	Identifica, compara y produce, oralmente o por escrito, números de tres cifras. Resuelve problemas que implican el uso del calendario (meses, semanas, días).	Uso de estrategias para calcular mentalmente algunos productos de dígitos. Resolución de distintos tipos de problemas de división (reparto y agrupamiento) con divisores menores que 10, mediante distintos procedimientos.

*Para este trabajo se elaboró una versión simplificada de los contenidos curriculares de segundo grado de educación primaria, solo se tomaron en cuenta los aprendizajes esperados, el eje temático y el tema de problemas multiplicativos por bloque.

Tercer grado

Tabla 5.3 Tercer grado aprendizajes esperados y tratamiento del tema.

Bloque	Aprendizajes esperados	Tema: problemas multiplicativos (tratamiento)
I	<p>Produce, lee y escribe números hasta de cuatro cifras.</p> <p>Resuelve problemas que implican el cálculo mental o escrito de productos de dígitos.</p> <p>Resuelve problemas que implican la lectura y el uso del reloj.</p>	<p>Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones.</p> <p>Uso de caminos cortos para multiplicar dígitos por 10 o por sus múltiplos (20, 30, etcétera).</p>
II	<p>Resuelve problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos.</p>	<p>Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas mediante diversos procedimientos (como suma de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera).</p>
III	<p>Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $m/2^n$.</p> <p>Utiliza el algoritmo convencional para resolver sumas o restas con números naturales.</p>	<p>Resolución de problemas de división (reparto y agrupamiento) mediante diversos procedimientos, en particular el recurso de la multiplicación.</p>
IV	<p>Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.</p> <p>Resuelve problemas que implican efectuar hasta tres operaciones de adición y sustracción.</p> <p>Resuelve problemas que impliquen dividir mediante diversos procedimientos.</p>	<p>Identificación y uso de la división para resolver problemas multiplicativos, a partir de los procedimientos ya utilizados (suma, resta, multiplicación).</p> <p>Representación convencional de la división: $a \div b = c$.</p>
V	<p>Utiliza unidades de medida estándar para estimar y medir longitudes.</p>	<p>Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para la división entre un dígito.</p> <p>Uso del repertorio multiplicativo para resolver divisiones (cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo).</p>

*Para este trabajo se elaboró una versión simplificada de los contenidos curriculares de tercer grado de educación primaria, solo se tomaron en cuenta los aprendizajes esperados, el eje temático y el tema de problemas multiplicativos por bloque.

Al término del segundo periodo (de primero a tercero de primaria), los estudiantes saben resolver problemas aditivos con diferente estructura, utilizan los algoritmos convencionales, así como problemas multiplicativos simples. Saben calcular e

interpretar medidas de longitud y tiempo, e identifican características particulares de figuras geométricas; asimismo leen información en pictogramas, gráficas de barras y otros portadores.

Además de los conocimientos y habilidades matemáticas descritos anteriormente, los estudiantes desarrollarán, con base en la metodología didáctica sugerida para el estudio, un conjunto de actitudes y valores esenciales en la construcción de la competencia matemática.

Cuarto grado

Es en este grado escolar de acuerdo con al Planes y los Programas existe mayor carga de contenidos para el desarrollo, ejecución y ejercitación del tema: problemas multiplicativos.

Tabla 5.4 Cuarto grado aprendizajes esperados y tratamiento del tema

Bloque	Aprendizajes esperados	Tema: problemas multiplicativos (tratamiento)
I	Identifica fracciones equivalentes, mayores o menores que la unidad. Lee información explícita o implícita en portadores diversos.	Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.
II	Identifica fracciones de magnitudes continuas o determina qué fracción de una magnitud es una parte dada. Identifica y representa la forma de las caras de un cuerpo geométrico. Identifica ángulos mayores o menores que un ángulo recto. Utiliza el transportador para medir ángulos.	No se presenta el tema de problemas multiplicativos
III	Compara y ordena números naturales de cuatro cifras a partir de sus nombres o de su escritura con cifras. Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son equivalentes, y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales. Identifica problemas que se pueden	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores. Resolución de problemas en los que sea necesario relacionar operaciones

	resolver con una multiplicación y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que es necesario.	de multiplicación y adición para darles respuesta.
IV	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones compuestas. Resuelve problemas que implican sumar o restar números decimales. Resuelve problemas que impliquen dividir números de hasta tres cifras entre números de hasta dos cifras. Resuelve problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de un rectángulo cualquiera, con base en la medida de sus lados.	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.
V	Identifica y genera fracciones equivalentes. Utiliza el cálculo mental para obtener la diferencia de dos números naturales de dos cifras.	Análisis del residuo en problemas de división que impliquen reparto.

*Para este trabajo se elaboró una versión simplificada de los contenidos curriculares de cuarto grado de educación primaria, solo se tomaron en cuenta los aprendizajes esperados, el eje temático y el tema de problemas multiplicativos por bloque.

Quinto grado

Tabla 5.5 Quinto grado aprendizajes esperados y tratamiento del tema

Bloque	Aprendizajes esperados	Tema: problemas multiplicativos (tratamiento)
I	Identifica rectas paralelas, perpendiculares y secantes, así como ángulos agudos, rectos y obtusos.	Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales. Conocimiento y uso de las relaciones entre los elementos de la división de números naturales.
II	Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros.	Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.
III	Calcula el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros. Resuelve problemas de valor faltante en los que la razón interna o externa es un número natural.	Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.
IV	Resuelve problemas que implican sumar o restar números fraccionarios	Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como

	<p>con igual o distinto denominador.</p> <p>Identifica problemas que se pueden resolver con una división y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que sea necesario.</p> <p>Describe rutas y ubica lugares utilizando sistemas de referencia convencionales que aparecen en planos o mapas.</p> <p>Resuelve problemas que implican conversiones entre unidades de medida de longitud, capacidad, peso y tiempo.</p> <p>Resuelve problemas que implican leer o representar información en gráficas de barras.</p>	operaciones inversas.
V	<p>Explica las similitudes y diferencias entre el sistema decimal de numeración y un sistema posicional o no posicional.</p> <p>Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales.</p> <p>Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética o geométrica.</p> <p>Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.</p>	Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.

*Para este trabajo se elaboró una versión simplificada de los contenidos curriculares de quinto grado de educación primaria, solo se tomaron en cuenta los aprendizajes esperados, el eje temático y el tema de problemas multiplicativos por bloque.

Sexto grado

Tabla 5.6 Sexto grado aprendizajes esperados y tratamiento del tema

Bloque	Aprendizajes esperados	Tema: problemas multiplicativos (tratamiento)
I	Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación.	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.

	<p>Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones.</p> <p>Describe rutas y calcula la distancia real de un punto a otro en mapas.</p>	
II	<p>Calcula porcentajes e</p> <p>Identifica distintas formas de representación (fracción común, decimal, %).</p>	<p>Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1 000, etcétera.</p>
III	<p>Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos o trazar figuras en el primer cuadrante.</p> <p>Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (si) y el Sistema Inglés de Medidas.</p> <p>Resuelve problemas que involucran el uso de medidas de tendencia central (media, mediana y moda).</p>	<p>Determinación de múltiplos y divisores de números naturales.</p> <p>Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.</p>
IV	<p>Explica las características de diversos cuerpos geométricos (número de caras, aristas, etc.) y usa el lenguaje formal.</p>	<p>Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión "a/b de n".</p>
V	<p>Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial.</p> <p>Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</p> <p>Resuelve problemas que implican comparar dos o más razones.</p>	<p>Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.</p>

*Para este trabajo se elaboró una versión simplificada de los contenidos curriculares de sexto grado de educación primaria, solo se tomaron en cuenta los aprendizajes esperados, el eje temático y el tema de problemas multiplicativos por bloque.

Al final del tercer periodo de tercero a sexto grado, los estudiantes deben comunicar e interpretar cantidades con números naturales, fraccionarios o decimales, así como resolver problemas aditivos y multiplicativos mediante los algoritmos convencionales, de igual forma se espera resuelvan problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales y que resuelvan problemas que impliquen multiplicar o dividir números

fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.

Deben calcular perímetros y áreas y saben describir, y construir figuras y cuerpos geométricos. Utilizan sistemas de referencia para ubicar puntos en el plano o para interpretar mapas. Asimismo, llevan a cabo procesos de recopilación, organización, análisis y presentación de datos.

2.3 Libro de texto *Desafíos Matemáticos* de 2013

La Subsecretaría de Educación Básica proporciona el material *Desafíos matemáticos de 2013* a docentes, directivos y alumnos de escuelas primarias para acompañarlos en el proceso educativo, con el objetivo de alcanzar una educación de calidad.

Los contenidos de los libros originalmente fueron elaborados por un grupo de docentes de todas las entidades federativas bajo la coordinación del equipo de matemáticas de la Dirección General de Desarrollo Curricular, perteneciente a la Subsecretaría de Educación Básica de la SEP.

En este material destacan las siguientes características:

- Contiene desafíos intelectuales vinculados al estudio de las matemáticas que apoyan la labor diaria de los docentes.
- Está apegado al programa oficial y cubre todos los contenidos.
- Tiene un formato ágil para que los maestros analicen los desafíos previamente a su puesta en práctica en el aula.
- Fue elaborado por docentes con un conocimiento amplio y profundo sobre la didáctica de las matemáticas y se tomó en cuenta la experiencia del trabajo en aulas.
- Es un material probado por un gran número de supervisores, directores y docentes de educación primaria en el distrito federal.

El libro *Desafíos Matemáticos* del alumno y del maestro se utiliza en los seis grados de educación primaria, este último con apartados específicos como apoyo para la labor docente, estos apartados son:

Intención didáctica. En este apartado se describe el tipo de recursos, ideas, procedimientos y saberes que se espera pongan en juego los alumnos ante la necesidad de resolver el desafío que se les plantea.

Consigna. Se muestra la actividad o problema que se va a plantear, la organización de los alumnos para realizar el trabajo y, en algunos casos, lo permitido hacer o usar y lo no permitido.

La consigna es la misma en el libro de texto del docente y del alumno.

Consideraciones previas. Contiene elementos para que el docente apoye a los alumnos en el análisis de ideas: explicaciones breves acerca de conceptos, posibles procedimientos, dificultades o errores, sugerencias y preguntas para el análisis.

Observaciones posteriores. Se anotan en cada uno de los desafíos para que el docente reflexione en su propia práctica y en la eficacia de la consigna. Para ello conviene que registre de manera ordenada su experiencia directa en la práctica.

Para que el uso de este material arroje los resultados que se esperan, es necesario que los docentes consideren las siguientes recomendaciones generales

- Tener confianza en que los alumnos son capaces de producir ideas y procedimientos propios sin necesidad de una explicación previa por parte del docente. Esto significa que todo debe ser descubierto por los alumnos; en ciertos casos, las explicaciones del docente son necesarias para que los estudiantes puedan avanzar.
- Hay que aceptar que el proceso de aprender implica marchas y contramarchas; en ocasiones ante un nuevo desafío, los alumnos regresan a procedimientos rudimentarios que en apariencia habían sido superados. Hay que trabajar para que se adquiera la suficiente confianza en el uso de las técnicas que se van construyendo.

- El trabajo coactivo que se propone con el uso de material no implica hacer a un lado los ejercicios de práctica; estos son necesarios hasta lograr cierto nivel de automatización, de manera que el esfuerzo intelectual se utilice en procesos cada vez más complejos. Dado que los aprendizajes están anclados a conocimientos previos, se pueden reconstruir en caso de olvido.
- Para estar en mejores condiciones de apoyar el estudio de los alumnos, es fundamental que el docente, previo a la clase resuelva el problema de la consigna, analice las consideraciones previas y realice los ajustes que considere necesarios.

La Secretaría de Educación Pública confía en que este material resulte útil a los docentes y que, con sus valiosas aportaciones, podrá mejorarse a corto plazo y así contar con una propuesta didáctica cada vez más sólida para el estudio de las matemáticas.

La revisión de cada libro de texto se realizó con la finalidad de conocer cual, cuántos y de qué tipo son los desafíos que se dedican a la enseñanza de la multiplicación.

El análisis dentro de este trabajo se aborda de la siguiente manera:

Se presentarán y describirán las clasificaciones encontradas en los desafíos al concluir ese apartado se iniciará con el análisis en cual se presenta una tabla por bloque en la que se escribe el número y nombre del desafío, el contenido curricular que aborda de acuerdo con el Plan y Programas de 2011 y la intención didáctica de cada uno. Posteriormente se presenta de cuántas consignas consta el desafío y cuál es cada una de ellas con un ejemplo de los problemas que se abordan, de igual forma por desafío se mencionará su clasificación y si es que, de acuerdo con las secciones que presenta el desafío en el del libro del maestro, se tienen consideraciones previas y observaciones posteriores.

Es importante antes de iniciar la presentación del análisis aclarar que la sección nombrada observaciones posteriores es la misma para todos los desafíos sin

importar el grado escolar y el tema del desafío. Esta consiste en plantearse como maestro tres preguntas:

- ¿Cuáles fueron las dudas y los errores más frecuentes de los alumnos?
- ¿Qué hizo para que el alumno pudiera avanzar?
- ¿Qué cambios deben hacerse para mejorar la consigna?

Estas preguntas sirven como parte de la retroalimentación del maestro en su práctica con el desafío.

2.3.1 Clasificación de los problemas aditivos que se presentan en el libro de texto *Desafíos matemáticos de primer grado*.

Como se ha mencionado, en primer grado se tomará el tema de problemas aditivos como antecedente de los problemas de estructura multiplicativa.

Castro Rodríguez, Elena & Castro, Enrique. (2010) señalan que en el desarrollo del pensamiento multiplicativo se ha resaltado, en la literatura especializada, que la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo es uno de los principales escollos en el aprendizaje de las matemáticas escolares en los últimos cursos de primaria y en los primeros cursos de secundaria. También se ha subrayado que los niños desarrollan progresivamente su pensamiento multiplicativo a lo largo de un periodo dilatado de tiempo, por lo tanto es importante contar con una base en los problemas aditivos que sirva en función del aprendizaje de la multiplicación.

La clasificación de los problemas aditivos presentados en el libro de texto responde a estudios que indican que la estructura semántica de los problemas desempeña un papel relevante a la hora de esclarecer los procesos cognitivos en matemáticas (Bermejo y Rodríguez, 1990; Carpenter y Moser 1982; Heller y Greeno 1978).

Dentro de las primeras consignas presentadas en primero de primaria se encuentran problemas de estructura aditiva que de acuerdo con la clasificación semántica de problemas aditivos realizada por Carpenter y Moser (1982), se encuentran dentro de la categoría de igualación de añadir e igualación de quitar ya

que esta clase de problemas supone la comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de los subconjuntos para hacerlo equivalente a otro.

La siguiente clasificación que se presenta, coincide con Carpenter y Moser (1982), que clasifican bajo el criterio donde se establece, que si se produce un incremento o decremento de la cantidad inicial y se aplica sólo a los problemas que implican una acción, esta categoría se llama problemas de unión y separación y es correspondiente a los problemas de cambio de adición y sustracción que, de acuerdo con Heller y Greeno (1978), hacen referencia a un suceso que introduce modificaciones en una cantidad inicial. Heller y Greeno (1978) también clasificaron los problemas de combinación que muestran dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse independientemente o como partes de un todo. Esta categoría sólo admite formulaciones en términos de adición.

Es decir la estructura de los problemas que se presentan es la siguiente:

Heller y Greeno (1978)

Cambio de adición – Cambio de sustracción – Cambio de sustracción

Carpenter y Moser (1982)

Unión – Separación – Separación

Las clasificaciones anteriores si bien son parte de la comprensión de los problemas aditivos y sus correspondencias, es necesario aclarar que en el análisis solamente se abordaran los desafíos que propongan la suma iterada como resolución y/o estrategia.

En esta misma línea, Vergnaud (1985) indicó que enseñar una concepción binaria de la multiplicación en los primeros años de aprendizaje llevaría a los niños a conflictos conceptuales, por el hecho de que los dos términos de la multiplicación pertenecen a espacios de medida diferentes. Esta situación resulta muy diferente a la que se plantea en el caso de la adición, ya que en ésta ambas medidas son

del mismo tipo. Por este motivo, la multiplicación se presenta como una operación unitaria lo que, según Maza (1991), acarrea dos consecuencias. En primer lugar, el papel concebido por los dos términos de la multiplicación es diferente, el multiplicando sería un elemento “pasivo” y el multiplicador (operador escalar) un agente “activo” que opera sobre el anterior y de ahí, que la multiplicación no sea conmutativa. Segundo, el operador escalar actúa sobre un espacio de medida e indica el número de veces que se repite la suma del multiplicando. Entendida así la multiplicación permite a los niños pequeños continuar empleando los procedimientos familiares de la adición, en vez de considerarla como una operación distinta. Además, tampoco van a concebir la multiplicación como una operación binaria, ni como la inversa de la división, sino que aparece estrechamente ligada a la adición.

2.3.2 Libro de texto *Desafíos Matemáticos de primer grado*

El libro de texto *Desafíos Matemáticos de 2013* de primer grado cuenta con un total de 57 desafíos; de estos son 20 los que tratan problemas aditivos.

Es necesario aclarar que en el Programa de primer grado, al ser el inicio de la educación primaria (segundo periodo escolar), se toma como antecedente de la enseñanza de la multiplicación el tema de Problemas aditivos que se encuentra dentro del eje temático Sentido numérico y pensamiento algebraico.

El bloque I del libro de texto *Desafíos matemáticos* de primer grado está compuesto de 16 desafíos de los cuales 3 abordan el tema de problemas aditivos y que, son necesarios para la enseñanza de la multiplicación.

Tabla 6.1 Tratamiento de problemas aditivos como antecedente de la enseñanza en el libro de primer grado bloque I

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
12. Quitar y poner	Obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a	Que los alumnos determinen el resultado de agregar o quitar elementos de una colección

	otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.	
13. ¿Cómo quedó?	Obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.	Que los alumnos determinen el resultado de juntar o separar objetos de diferentes colecciones
14. Lo que falta	Obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.	Que determinen el resultado de al buscar lo que le falta a una cantidad para llegar a otra

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El desafío 12. “Quitar y poner” p. 40, se compone de dos consignas las cuales se deberán resolver en equipos.

- En la primera consigna dada al alumno se espera que agregue a un grupo determinado elementos de una misma colección de objetos para poder obtener la igualdad con otro grupo de elementos (¿Cuántos objetos faltan en la mesa verde para que tengan la misma cantidad que en la mesa amarilla? Dibújalos)
- En la segunda consigna de igual forma se espera que el alumno obtenga la igualdad pero ahora al identificar qué objetos han sido agregados a una colección (¿Cuántas frutas más colocaron en la canasta amarilla? Colorea solo las frutas que no estaban)

Ambas consignas pertenecen a la clasificación de problemas aditivos de igualación de añadir realizada por Carpenter y Moser (1982).

Para la resolución de ambas situaciones existe el apoyo gráfico y no utilizan números mayores a diez. En este desafío no hay consideraciones previas para el docente. Y las observaciones posteriores consisten en las tres preguntas mencionadas anteriormente.

El desafío 13. “¿Cómo quedó?” p. 42, se compone de dos consignas con la misma estructura aditiva que deberán resolver en equipos.

- En la primera consigna se presenta un problema (Ana tenía 7 globos y su mamá le compró otros 8 ¿Cuántos globos tiene Ana?) seguido de dos problemas más a los que hay que dar respuesta (al jugar con los globos se le rompieron 5 ¿Cuántos globos tiene ahora Ana?, Ana le regaló globos a su amiga Lulú y ahora solo le quedan 7 ¿Cuántos globos le regalo a Lulú?), sin embargo para poder responder el segundo y tercer problema es necesario resolver el primero ya que estos están relacionados.

Este desafío pertenece a la clasificación de Carpenter y Moser (1982), nombrada problemas de unión y separación. En este desafío los números no exceden al 20 para obtener resultados se les pide agregar o quitar números de un solo dígito.

Finalmente el desafío 14. “Lo que falta” p. 45, se compone de una consigna y deberán resolver de manera individual.

- Esta consigna se divide en dos problemas en ambos se le pide al alumno que dibuje para poder obtener una cantidad igual de elementos como en el desafío 12, estos problemas pertenecen a la clasificación de Carpenter y Moser (1982), de igualación, sin embargo se presenta una variante que consiste en que los objetos a igualar pertenecen a colecciones diferentes. Ejemplo:

Problema 1. Dibuja los sombreros que faltan para que a cada duende le corresponda uno (duendes 15, sombreros 5)

Problema 2. Dibuja las flores que faltan para que cada mariposa se pare en una (mariposas 14, flores 3)

Otra variante en comparación con las consignas del desafío 12 es que ahora se le pregunta a alumno cuántos objetos tuvo que dibujar en ambos casos y que compare sus respuestas con las de los demás, esperando que se puedan ver diferentes estrategias de resolución como los son el tachado, la unión, y la distribución de los objetos dibujados.

El bloque II del libro de texto *Desafíos matemáticos* de primer grado, está compuesto de 12 desafíos de los cuales tres abordan el tema de problemas aditivos.

Tabla 6.2 Tratamiento de problemas aditivos como antecedente de la enseñanza en el libro de primer grado bloque II

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
23. ¿Cuántos más pinto?	Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta	Que los alumnos resuelvan problemas aditivos representados gráficamente
24. El camión	Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta	Que los alumnos usen representaciones gráficas o numéricas para resolver un problema aditivo
28. ¿Cuándo usar +, -, =?	Expresión simbólica de las acciones realizadas al resolver problemas de suma y resta, usando los signos +, -, =.	Que utilicen diversas estrategias, incluyendo las operaciones de suma y resta expresadas simbólicamente para resolver problemas de adición y sustracción.

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El primer desafío es 23. “¿Cuántos más pinto?” p. 67, este se compone de una consigna

- La cual se le pide al alumno que resuelva un problema con apoyo gráfico (en la primera imagen aparece Alicia con tres huevos pintados, en la segunda imagen aparece una caja con la leyenda “12 huevos”, finalmente se le pregunta al alumno cuántos huevos más debe pintar Alicia para completar la caja

Este desafío pertenece a la clasificación de Carpenter y Moser (1982), nombrada problemas de unión y separación, el alumno con el apoyo gráfico y con diversas estrategias como registros con números y dibujos o con únicamente dibujos debe lograr encontrar y representar el resultado.

De igual forma el desafío 24. “El camión” p. 70, presenta una consigna

- Que conlleva resolver un problema aditivo de características descritas anteriormente de acuerdo con Carpenter y Moser (1982), problemas de

unión y separación y los problemas de cambio de adición y sustracción de Heller y Greeno (1978):(en el camión viajaban 15 personas. En la primera bajada bajan 6 y subieron 3 ¿Cuántas personas llegaron a la segunda parada?)

En esta consigna se espera que el alumno resuelva el problema utilizando como estrategia las representaciones gráficas y/o numéricas.

Finalmente en este bloque en el desafío 28. *¿Cuándo usar +, -, =?* p. 79, se compone de una consigna la cual deben resolver en equipo.

- En esta se presentan 7 objetos con sus respectivos precios, posteriormente se le pide a los alumnos que resuelvan una serie de problemas de tipo cambio de adición y sustracción de acuerdo con los precios de cada objeto.

La clasificación de este desafío pertenece a Heller y Greeno (1978) con los problemas de combinación que muestran dos cantidades disjuntas, que pueden considerarse independientemente o como partes de un todo. En este desafío se espera que los alumnos puedan detectar si es necesario sumar o restar para resolver un problema, se espera que utilicen diversas estrategias de resolución como contar hacia adelante o hacia atrás y no solo las operaciones convencionales. Todas las cantidades utilizadas en estos problemas no exceden al 25.

El bloque III del libro de texto *Desafíos matemáticos* de primer grado está compuesto de 11 desafíos de los cuales cinco abordan el tema de problemas aditivos.

Tabla 6.3 Tratamiento de problemas aditivos como antecedente de la enseñanza en el libro de primer grado bloque III

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
33. ¡Piensa pronto!	Desarrollo de procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones de dígitos.	Que los alumnos utilicen cálculo mental o los resultados ya memorizados para resolver operaciones de suma y resta
34. ¿Con cuántas se puede?	Desarrollo de procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones de dígitos.	Que utilicen cálculo mental al buscar sumas y restas diferentes con un resultado fijo

35. Historias con números	Resolución de problemas correspondientes a los significados de juntar, agregar o quitar.	Que establezcan la relación correspondiente entre los datos de un problema aditivo y determinen la estrategia pertinente para resolverlo
36. Las granjas	Resolución de problemas correspondientes a los significados de juntar, agregar o quitar.	Que los alumnos avancen en sus estrategias de conteo y, de ser posible, recurra al cálculo mental al resolver problemas aditivos relacionados con los significados de juntar, quitar, y agregar, en los que intervienen más de dos cantidades
37. Inventa una historia	Resolución de problemas correspondientes a los significados de juntar, agregar o quitar.	Relacionar actividades de la vida cotidiana con el significado de las operaciones dadas al formular y escribir un problema

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El primer desafío es el 33. “¡Piensa pronto!” p.98, el cual está conformado por dos consignas.

- En la primera consigna se les pide a los alumnos que formen equipos ya que se realizará una especie de juego a cálculo mental.

En el libro de texto se presenta de la siguiente manera

Tabla de registro			
Número de la tarjeta	Resultado	Número de la tarjeta	Resultado
1		2	

Cada alumno debe tener su libro de texto con esta tabla y cada equipo tendrá un puñado de fichas de un color diferente por equipo.

1. El profesor mostrará una tarjeta al grupo con una operación ya sea suma o resta, se recomienda al docente que estas operaciones no excedan los dos dígitos por cantidad.
2. Cada equipo deberá dar resultado a esta operación, posteriormente el equipo que crea tener el resultado correcto deberá formar una de sus ficha en el escritorio con la finalidad de saber qué equipo fue el más rápido en responder.

3. Finalmente cada equipo en el orden que terminaron deberá explicar cómo fue que llegó al resultado, el primer equipo que tenga el resultado correcto será el ganador

Con este ejercicio se espera que los alumnos fortalezcan su rapidez mental al resolver problemas para favorecer así un cálculo mental en los alumnos.

- La segunda consigna presentada en este desafío es:

La primera operación es una suma ($4 + 4 = 8$) y se le pide que modifique un solo número para que ahora el resultado cambie a 9, 10, 11 y 12.

Con este tipo de ejercicio se espera que los alumnos desarrollen cierta claridad al jugar con las cantidades agregando o quitando para obtener el resultado esperado, esto funciona como un primer acercamiento a las características de los factores que intervienen en estas operaciones.

En el desafío 34. “¿Con cuántas se puede?”p. 101, se presenta solamente una consigna, pero esta se encuentra dividida en dos ejercicios.

- En el primer ejercicio se pide a los alumnos que encuentren todas las sumas en las que se pueda obtener como resultado 15.
- En el segundo ejercicio se pide a los alumnos encuentren todas las restas que den como resultado 4.

Es importante no perder de vista que los alumnos de este grado siguen trabajando con números menores a 30, con esta clase de ejercicio se espera que los alumnos encuentren las regularidades de las operaciones, es decir, que para obtener el mismo resultado con diferentes sumas existe una cantidad determinada de sumas que darán esta cantidad y que para obtener un resultado fijo con diversas resta hay una cantidad infinita de posibilidades que pueden dar el mismo resultado.

En el desafío 35. “Historias con números”p. 103, se presenta una consigna

- La consigna está compuesta por 4 problemas de cambio y adición o sustracción, de acuerdo con Heller y Greeno (1978) los problemas de cambio hacen referencia a un suceso que introduce modificaciones en una

cantidad inicial. El primer y tercer problema de esta consigna es clasificado en los problemas de cambio en la categoría de sustracción, el cuarto problema presentado en esta consigna también pertenece a problemas de cambio.

El caso del segundo problema de la consigna “cuando Jorge partió su pastel de cumpleaños había 11 velitas azules y 16 velitas blancas que representan los años que cumplía ¿Cuántos años cumplió Jorge? Pertenece a la clasificación que hacen Heller y Greeno (1978) con los problemas de combinación.

Con este tipo de problemas se espera que los alumnos utilicen los signos convencionales de la suma y la sustracción, sin embargo no es exactamente obligatorio ya que al final de la lección se pide que expliquen a todo el grupo su proceso de resolución, y el tipo de estrategia utilizada para llegar a dicho resultado.

En el desafío 36. “Las granjas”p. 106, se presenta solo una consigna

- En esta los alumnos deberán resolver tres problemas que se relacionan entre sí y que pertenecen a la clasificación de problema de cambio anteriormente descrita por Heller y Greeno (1978). Considero necesario aclarar que los problemas entran en esta categoría a pesar de utilizar sumas entre colecciones diferentes porque las preguntas planteadas para que los alumnos resuelvan el problema no discrimina la razón de cada colección, simplemente se habla del total.

Las adiciones de este desafío involucran más de dos cantidades y cifras que aunque no superan el número 30 en la operación, si lo hará en el resultado.

El último desafío del bloque que presenta un contenido de problemas aditivos es el 37. “Inventa una historia”p. 108, que consta de una sola consigna que deberán realizar por parejas

- Esta consiste en que el profesor dará a cada pareja una tarjeta con una operación y deberán elaborar un problema que se pueda resolver con la operación que les toco.

En este desafío se propone que los alumnos identifiquen las situaciones en las que se puede utilizar una operación.

El bloque IV del libro de texto *Desafíos matemáticos* de primer grado está compuesto de 12 desafíos de los cuales uno aborda el tema de problemas aditivos.

Tabla 6.4 Tratamiento de problemas aditivos como antecedente de la enseñanza en el libro de primer grado bloque IV

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
48. ¿Cuánto le quito al diez?	Desarrollo de recursos de cálculo mental para obtener resultados en una suma o sustracción: suma de dígitos, complementos a 10, restas de la forma 10 menos un dígito, etcétera	Usar diferentes estrategias para restar mentalmente un dígito al 10 o 20, como usar resultados ya memorizados, complementos de 10 o descomposición de números

El desafío 49. “¿Cuánto le quito a diez?”p. 142, se necesitan las tarjetas del recortable de la página 105.

- En equipo se colocan las tarjetas con el número hacia abajo y por turnos cada alumno deberá tomar una tarjeta y mentalmente restar el número que le salió en la tarjeta al 10, si su respuesta es correcta se podrá quedar con la tarjeta y gana el alumno que tenga más tarjetas.

Como siguiente ejercicio parte de este desafío los alumnos deberán realizar lo mismo pero ahora restando el número que les salga al número 20.

Este tipo de ejercicios favorecen el cálculo mental en los alumnos ya que no pueden realizar operaciones escritas. También se introduce el número 10 y 20 para que empiecen a detectar similitudes en las cifras que son múltiplos de las decenas.

El bloque V del libro de texto *Desafíos matemáticos* de primer grado está compuesto de 6 desafíos de los cuales dos abordan el tema de problemas aditivos.

Tabla 6.5 Tratamiento de problemas aditivos como antecedente de la enseñanza en el libro de primer grado bloque V

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
55. Las cuentas de Carmita	Resolución de cálculos con números de dos cifras utilizando distintos procedimientos.	Que los alumnos analicen y describan algunos procedimientos que permiten resolver problemas aditivos
57. Juguemos "¡BASTA!" con números	Uso de resultados conocidos y propiedades de los números y las operaciones para resolver cálculos	Que los alumnos utilicen resultados conocidos para resolver operaciones combinadas de sumas y restas

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El desafío 55. "Las cuentas de Carmita" p. 156, se encuentra conformado por dos consignas en las que se les presenta a los alumnos distintos procedimientos para resolver una operación.

➤ Consigna, por ejemplo:

Carmita	Lupe
$15 + 29 = 44$ $15 - 1 = 14$ $29 + 1 = 30$ $14 + 30 = 44$	$15 + 29 = 44$ $15 - 5 = 10$ $29 + 5 = 34$ $10 + 34 = 44$

Posteriormente se realizan preguntas que tienen como finalidad que el alumno entienda cuales son los procedimientos que se le hacen y que a su vez se identifique con los que considera más sencillos de entender y aplicar.

El siguiente desafío es el 56. "La cajita mágica" p. 160, consta de una consigna y es necesario el material recortable de la página 103.

➤ Es un juego en el que se espera que los alumnos pongan en práctica una vez más su destreza al realizar cálculo mental con operaciones de suma y resta.

Las tarjetas que tienen la operación de suma son de un dígito por un dígito y las tarjetas que tienen la operación de resta son de dos dígitos menos un dígito.

En dicho desafío se propone que el docente preste atención a las características para guiar a los alumnos en la resolución y comprensión deseada.

El último desafío del libro de texto dedicado a los problemas aditivos es el 57. “Juguemos “¡BASTA!” con números p. 162

- Es un juego de ¡BASTA!, la consigna solo da las instrucciones todo el material debe proporcionarlo el docente, se le pide que realice una tabla con diferentes operaciones en el pizarrón lo cual es conveniente para poder lograr un nivel de dificultad adecuado para el nivel del grupo.

Por último en la tabla 7, se muestra la clasificación de los desafíos por bloque en primer grado, de esta manera se puede observar, el bloque donde se presenta la mayor cantidad de desafíos y la clasificación de los desafíos que predomina en primero.

Tabla 7. Secuencia de los problemas aditivos de primer grado

Problemas aditivos						
Clasificación	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Total de desafíos
Problemas de igualación Carpentier y Moser (1983)	Desafío 12 Desafío 14					2
Problemas de unión y separación Carpentier y Moser (1983)	Desafío 13	Desafío 24				2
Problemas de cambio Heller y Greeno (1978)		Desafío 27 Desafío 28	Desafío 35			3
Problemas de combinación Heller y Greeno (1978)			Desafío 36			1
Problemas con números (operaciones sumas y restas)			Desafío 34 Desafío 37		Desafío 55 Desafío 57	4
Juegos		Desafío 25 Desafío 26	Desafío 33	Desafío 48 Desafío 49	Desafío 56	6
Total de desafíos	3	5	5	2	3	18

2.4 Clasificación de los problemas multiplicativos que se presentan en el libro de texto desafíos matemáticos de segundo a sexto grado.

La clasificación que se presenta a continuación es la detectada en los libros de texto y las pruebas estandarizadas en el tema de problemas multiplicativos, esta clasificación abarca de segundo a sexto grado de primaria.

En los estudios de didáctica de la matemática (Castaño, J. 1996; Casas buenas, C. 2011; Vergnaud, G. 1985; Maza, C. 1991; Castro y Rico ,1996) se reconocen al menos tres tipos de problemas o situaciones que implican una sólo y sólo una operación multiplicativa 1: unas situaciones de razón o proporcionalidad (o de isomorfismo de medidas), las situaciones de comparación (o producto escalar o factor multiplicante) y las situaciones de combinatoria (producto de medidas o producto cartesiano).

Se muestra la suma iterada como base para la enseñanza de la multiplicación, Neshher (1992) consideró que enseñar la multiplicación como una suma repetida, evita al profesor la necesidad de hablar directamente de la regla “x por y”. De este modo, la multiplicación se trata como una operación unitaria y no binaria. Sin embargo, Vergnaud (1985) indicó que enseñar una concepción binaria de la multiplicación en los primeros años de aprendizaje llevaría a los niños a conflictos conceptuales, por el hecho de que los dos términos de la multiplicación pertenecen a espacios de medida diferentes.

La primera clasificación descrita de acuerdo a las estructuras multiplicativas que identifique Vergnaud (1985) es Isomorfismo de medidas en la cual se plantean situaciones en las que hay una proporción directa entre dos espacios de medida: M_1 y M_2 . Son problemas con dos dimensiones básicas que incluyen dos números o cantidades e incorporan, además, el 1 como base para la razón.

La siguiente clasificación de problemas que se presenta Vergnaud (1985) son los llamados problemas de Producto de medidas que consisten en una composición cartesiana entre dos espacios de medida, aquí se incluyen 3 cantidades, pero dos de ellas (M_1 y M_2) están contenidas en una tercera (M_3). En éstos problemas el

multiplicando y el multiplicador desempeñan el mismo papel dentro del problema, por tanto es una multiplicación que se considera simétrica.

La siguiente clasificación está relacionada con el producto de medidas de Vergnaud ya que el principio es igual, sin embargo Greer (1992) dice que es necesario reconocer la naturaleza de las cantidades. Por lo tanto esta clasificación se llama producto cartesiano e involucra estrategias donde la combinatoria es un modelo de interpretación.

Es la simetría de estas últimas clasificaciones (productos de medidas y producto cartesiano) las que justifica que tan sólo se pueda formular un único tipo de problema de división.

Es importante aclarar que esta tesis aborda como parte de los problemas multiplicativos, la división, con relación a esto se muestra la siguiente clasificación. De acuerdo a la clasificación de Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epton (1999), quienes consideraron que los problemas de agrupamiento y partición que consisten; la de partición en dada una cantidad (dividendo) y otra (divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de la misma naturaleza que el dividendo y la de agrupamiento dadas dos cantidades (dividendo y divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de distinta naturaleza que las anteriores.

Kouba (1989), señaló que los factores semánticos de un problema tienen un efecto significativo en la interpretación, en el caso de la cantidad desconocida, da lugar a dos categorías:

- división partitiva: la cantidad desconocida es el número de elementos de cada conjunto
- división de medida: la cantidad desconocida es el número de conjuntos.

2.4.1 Libro de texto *Desafíos Matemáticos* de segundo grado

De los 59 desafíos que presenta el libro de texto son 13 en los que de manera convencional o no se trata el tema de la multiplicación.

Es en el segundo grado de educación primaria donde se empieza a tomar el tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático Sentido numérico y

pensamiento algebraico, entonces ahora se tomará en cuenta ese tema en la revisión de cada desafío en este libro de texto

El bloque I del libro de texto *Desafíos matemáticos* de segundo grado está compuesto de 15 desafíos de los cuales 2 abordan el tema de problemas multiplicativos

Tabla 8.1 Tratamiento de la multiplicación en el libro de segundo grado bloque I

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
10. La fiesta	Resolución de problemas que involucren sumas iteradas o repartos mediante procedimientos diversos.	Que los alumnos usen la suma iterada como paso previo a la multiplicación
11. El día del niño	Resolución de problemas que involucren sumas iteradas o repartos mediante procedimientos diversos.	Que los alumnos expresen sumas de sumandos iguales con la idea de completar o acercarse lo más posible a una cantidad dada

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El desafío 10. “La fiesta”p. 38, cuenta solo con una consigna que está formada por tres problemas los cuales los alumnos deberán responder con **sumas iteradas**.

- En una fiesta colocaron 5 mesas
 - a) Si en cada mesa hay:
 - Cuatro sillas, ¿cuántas sillas hay en total?
 - Tres refrescos ¿cuántos refrescos hay en total?
 - b) En la fiesta hay 12 niñas. Si a cada una le dieron 2 paletas ¿Cuántas paletas se dieron en total?
 - c) Hay 8 niños. Si a cada uno le regalaron 5 canicas ¿Cuántas canicas regalaron en total?

Al ser el primer acercamiento a esta clase de problemas se espera que los alumnos utilicen estrategias como conteo o material concreto, todas las

operaciones o representaciones no exceden el 30 y son cifras pequeñas que los alumnos pueden manejar.

El desafío 11. “El día del niño”p. 40, se resolverá en parejas y consta de una consigna.

- En esta se le presentan al alumno tres grupos de dulces diferentes 18 bastones, 15 caramelos y 25 paletas cada uno de estos grupos está representado de manera gráfica.

Posteriormente se le da al alumno la siguiente información: la maestra quiere regalar dulces el día del niño y en cada bolsa quiere meter 2 bastones, tres caramelos y 3 paletas.

Los números utilizados en esta consigna siguen siendo menores de 30 y presenta el apoyo gráfico.

El bloque II del libro de texto *Desafíos matemáticos* de segundo grado está compuesto de 10 desafíos de los cuales ninguno aborda el tema de problemas multiplicativos.

Tabla 8.2 Tratamiento de la multiplicación en el libro de segundo grado bloque II

El bloque III del libro de texto *Desafíos matemáticos* de segundo grado está compuesto de 15 desafíos de los cuales 2 abordan el tema de problemas multiplicativos

Tabla 8.3 Tratamiento de la multiplicación en el libro de segundo grado bloque III

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con planes y programas de educación básica 2011	Intención didáctica
35. Lanzamiento de costalitos	Resolución de problemas de multiplicación con factores menores o iguales a 10, mediante sumas repetidas. Explicitación de la multiplicación implícita en una suma repetida.	Que los alumnos resuelvan problemas donde sea necesario agrupar y sumar varios sumandos iguales y después sumar los resultados obtenidos
36. ¿Cuántas veces?	Resolución de problemas de multiplicación con factores menores o iguales a 10,	Que utilicen sumas repetidas para resolver problemas de multiplicación y que

	mediante sumas repetidas. Explicitación de la multiplicación implícita en una suma repetida.	identifiquen la multiplicación que corresponde a cada suma iterada
--	---	--

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El desafío 35. “Lanzamiento de costalitos”p. 110 está compuesto por una consigna que se realizará en equipos.

- Esta consigna es un juego, primero se traza en el piso un tiro al blanco que tenga los números 4, 6, 8 y 10 al centro, cada alumno deberá tener un costalito relleno de arena y una tabla de registro cada lanzamiento se registrará por alumno y al final se deberán contar los puntos de todos los integrantes del equipo, el equipo que tenga más puntos ganará.

Posteriormente se pide a los alumnos que resuelvan las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántos puntos obtuvo tu equipo?
- b) Expliquen cómo obtuvo el equipo el total de puntos

Se espera que algunas de las estrategias utilizadas por los alumnos sean conteo, que cuenten y sumen uno a uno los números que se repitan, o que los agrupen para posteriormente sumarlos, el objetivo es que los alumnos entiendan el concepto “3 veces 4 = 12” o que identifiquen las sumas iteradas como estrategia.

El desafío 36. “¿Cuántas veces?”p. 1113, que se presenta en este bloque consta de una consigna con tres problemas, se espera que los alumnos resuelvan con la estrategia de la suma iterada.

- Los alumnos deben detectar en el enunciado del problema cuál es la información necesaria que utilizarán para resolver dicho problema.

Todos los problemas de estas consignas tienen números pequeños para que los alumnos puedan trabajar con material concreto como fichas o dibujos, sin

embargo, es imperativo que los alumnos empiecen a representar de manera simbólica las sumas iteradas.

El bloque IV del libro de texto *Desafíos matemáticos* de segundo grado está compuesto de 12 desafíos de los cuales 5 abordan el tema de problemas multiplicativos

Tabla 8.4 Tratamiento de la multiplicación en el libro de segundo grado bloque IV

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
44. La feria	Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares).	Resolver problemas de proporcionalidad simple y directa entre dos magnitudes, mediante diversos procedimientos
45. Mosaicos	Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares).	Que usen la suma de sumandos iguales o la multiplicación para hallar el número total de elementos de un arreglo rectangular.
46. Trajes	Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares).	Utilizar la multiplicación como una forma de resolver problemas que implican arreglos rectangulares
47. La huerta	Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos.	Que distingan cuándo pueden sustituir la suma por la multiplicación
48. ¿Cuál eliges?	Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos.	Que los alumnos distingan cuándo un problema es aditivo y cuando se puede sustituir la adición por la multiplicación

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva en un segmento en el bloque.

El primer desafío presentado en este bloque 44. “La feria”p. 133, consta de dos consignas, en cada una de ellas hay 4 problemas.

- De acuerdo con las estructuras multiplicativas que identificó Vergnaud (1985) los cuatro problemas que se presentan en ambas consignas pertenecen a la categoría de Isomorfismo de medidas. La representación de esta relación de proporcionalidad de los problemas presentados quedaría así:

Ernesto jugó a lanzar dardos a los globos. Jugó 5 veces y cada vez tronó 3 globos ¿Cuántos globos tronó en total?

Juegos	Globos tronados
1.....	3
5.....	¿?

Se espera que los alumnos empiecen a establecer esta relación sin embargo, como parte de las estrategias se continúa con las sumas iteradas y con material concreto para hacer las agrupaciones de los globos por juego.

El desafío número 45. “Mosaicos”p. 136, consta de dos consignas las cuales deben realizarse en parejas.

- En la primera consigna se presenta a los alumnos una serie rectángulos formados por mosaicos (cuadrados de diferentes colores) y se le pide al alumno utilice diferentes estrategias responda cuántos mosaicos tiene cada rectángulo, lo cual coincide con la definición de Vergnaud (1985) en los problemas de Producto de medidas que consisten en una composición cartesiana entre dos espacios de medidas.
- En la siguiente consigna, dos de los problemas tienen mosaicos faltantes y se pide al alumno utilice estrategias para averiguar cuántos faltan, estas podrían ser dibujar algunas líneas para completar o imaginar cómo están colocados.

Las cantidades de mosaicos por rectángulo se pueden observar que son productos de multiplicar números menores o iguales a 10. Como parte de las estrategias se espera que los alumnos dibujen la situación y la relacionen con el desafío anterior y puedan realizar su conteo o la relación “10 veces 8”

En el desafío 46. “Los trajes” p. 140, se pide a los alumnos que en parejas responda a dos consignas, y están conformadas por dos problemas cada una, estos problemas al igual que el desafío anterior tienen la estructura multiplicativa

de problemas de producto de medidas. Sin embargo, la variante con el anterior es que ahora los problemas se plantean de la siguiente manera:

➤ Consigna 1:

a) Paty tiene 2 faldas y 4 blusas ¿de cuantas maneras diferentes se puede vestir?

En esta clase de problemas se espera que los alumnos utilicen estrategias del producto cartesiano.

El número de maneras de vestir puede ser formado a partir de la correspondencia de ambos conjuntos.

Entonces cada blusa me la puedo poner con dos faldas o cada falda me la puedo poner con cuatro blusas.

	Blusa 1	Blusa 2	Blusa 3	Blusa 4
Falda 1	Falda 1-blusa 1	Falda 1-blusa 2	Falda 1-blusa 3	Falda 1-blusa 4
Falda 2	Falda 2-blusa 1	Falda 2-blusa 2	Falda 2-blusa 3	Falda 2-blusa 4

En el desafío 47. “La huerta” p. 143, se presenta una consigna que está compuesta por cinco problemas 2 de ellos de estructura aditiva (combinación) y 3 de multiplicativa (2 isomorfismo de medidas y 1 de producto de medidas)

➤ Este tipo de problemas (problemas de combinación) tiene la finalidad de que el alumno pueda identificar que se trata de una suma con sumandos diferentes (cinco cantidades disjuntas, que pueden considerarse independientes o como partes de un todo.)

Para dar una solución a este tipo de problema (producto de medidas) como en el desafío anterior se espera que el alumno relacione y realice un gráfico que lo ayude a encontrar el resultado.

En este problema (isomorfismo de medida) se espera que el alumno pueda identificar que se trata de una suma con sumandos iguales, por lo tanto se espera que aplique una suma iterada o una multiplicación explicando que “9 veces 10” es el total de las naranjas.

El último desafío del bloque es el 48. “¿Cuál elegiste?” p. 146, tiene una consigna

- está conformada por siete problemas, en los cuales no se pide a los alumnos den respuesta a un problema, sino que elijan entre cuatro operaciones aquellas que les permitirían dar respuesta a la consigna.

En estos problemas se trabaja con cantidades de una cifra, ya que la importancia del desafío radica en detectar los datos y la estructura que tiene el problema, no la operación para resolverlo.

El bloque V del libro de texto *Desafíos matemáticos* de segundo grado está compuesto de 11 desafíos de los cuales 4 abordan el tema de problemas multiplicativos

Tabla 8.5 Tratamiento de la multiplicación en el libro de segundo grado bloque V

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
54. Y todo... mentalmente	Uso de estrategias para calcular mentalmente algunos productos de dígitos.	Que usen estrategias, como el producto memorizado de algunos dígitos, sumas reiteradas u otras que les permitan resolver mentalmente problemas.
55. Juguemos basta numérico	Uso de estrategias para calcular mentalmente algunos productos de dígitos.	Que construyan estrategias de cálculo mental para ganar un juego que implica resolver productos de dos dígitos
56. Reparto de canicas	Resolución de distintos tipos de problemas de división (reparto y agrupamiento) con divisores menores que 10, mediante distintos procedimientos.	Que resuelvan problemas de división que impliquen reparto sin aplicar algoritmo
57. Bolsas de dulces	Resolución de distintos tipos de problemas de división (reparto y agrupamiento) con divisores menores que 10, mediante distintos procedimientos.	Que resuelvan problemas de división que impliquen agrupamiento sin aplicar algoritmo

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva en un segmento en el bloque.

El primer desafío que se presenta en este bloque es el 54. “Y todo... mentalmente” p. 171, consta de una consigna que se compone de cuatro problemas.

- En estos problemas se espera que el alumno con el conocimiento adquirido anteriormente pueda resolverlos mentalmente.

Este desafío sugiere que los alumnos deben encontrar maneras de resolver multiplicaciones similares a las propuestas, se espera que los alumnos identifiquen algunos resultados.

El desafío 55. “Juguemos basta numérica”p. 174, está compuesto por una consigna, esta es un juego llamado basta de números.

- Cada alumno tendrá un tablero como el siguiente:

Número	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	x 8	x 9	Resultados correctos

El profesor dirá un número y los alumnos deberán realizar las multiplicaciones con este número anotando en la casilla correspondiente el resultado que hayan obtenido, finalmente se seleccionarán los primeros alumnos que terminen la fila completa. Los alumnos tendrán que explicar cómo es que llegaron a ese resultado y entre todos confirmarán si dicho resultado es correcto o no y en la columna final del tablero los alumnos deberán anotar cuántos resultados correctos obtuvieron.

La finalidad de esta consigna es que los alumnos puedan resolver multiplicaciones de un dígito por un dígito por medio de cálculo mental y que al mismo tiempo los resultados anteriores le sirvan de referencia.

El desafío 56.“Reparto de canicas”p. 177, está compuesto por dos consignas en cada una de ella se encuentran cuatro problemas que de acuerdo a las investigaciones de Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epson (1999), son clasificados como problemas de agrupamiento y partición.

- Para resolver este problema, primero se debe hacer una suma de estructura de combinación (agrupamiento) y posteriormente realizar una partición, es importante aclarar que en este desafío no se propone utilizar el algoritmo de la división como estrategia de solución, sino que el alumno encuentre la estrategia que más le funcione, ya sea con símbolos de sumas y restas o realizando dibujos y uniones uno a uno.

Finalmente el último desafío del libro relacionado con el tema de problemas multiplicativos es el 57. “Bolsas de dulces” p. 181, que consta de dos consignas con dos problemas en cada una de ellas.

- Estos problemas tienen la misma estructura que Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epton (1999) consideraron de agrupamiento que consiste que dadas dos cantidades (dividendo y divisor), se pregunta por la cantidad resultante (cociente) de distinta naturaleza que las anteriores.
 - a) Se tienen 60 hojas y se formarán paquetes de 15 hojas. ¿Cuántos paquetes se pueden formar?

Los problemas aditivos (suma iterada) y multiplicativos en el libro de texto, en la siguiente tabla se puede observar la clasificación que tiene el mayor número de desafíos que coinciden y la cantidad de desafíos por bloque en segundo grado.

Tabla 9. Secuencia de los problemas multiplicativos de segundo grado

Problemas aditivos y multiplicativos						
Clasificación	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Total de desafíos
Problemas que usan como estrategia la suma iterada	Desafío 10		Desafío 36			2
Problemas de isomorfismo de medida Vergnaud (1985)				Desafío 44 Desafío 45 Desafío 46		3
Problemas de producto de medida Vergnaud (1985)				Desafío 45		1
Problemas de producto cartesiano Greer (1992)				Desafío 46		1

Problemas de agrupamiento y partición de Carpentier et al (1999)	Desafío 11				Desafío 56 Desafío 57	3
Problemas con números (multiplicación y división)					Desafío 54 Desafío 55	2
Juegos			Desafío 35			1
Total de desafíos	2	0	2	5	4	13

2.4.2 Libro de texto *Desafíos Matemáticos de tercer grado*

De los 76 desafíos que presenta el libro de texto son 15 los que tratan el tema de la multiplicación.

Al igual que los contenidos de los libros de texto anteriores se presentará y analizará por bloque cada uno de los desafíos con respecto al tema de los problemas multiplicativos en el eje temático de Sentido numérico y pensamiento algebraico.

El bloque I del libro de texto *Desafíos matemáticos de tercer grado* está compuesto de 17 desafíos de los cuales 5 abordan el tema de problemas multiplicativos

Tabla 10.1 Tratamiento de la multiplicación en el libro de tercer grado bloque I

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
6. Memorama de multiplicaciones	Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones.	Que los alumnos memoricen algunos productos de números dígitos al realizar el juego
7. ¿Cuántos son?	Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones.	Que los alumnos usen cálculo mental para resolver problemas multiplicativos
8. Un resultado varias multiplicaciones	Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones.	Que los alumnos utilicen el cálculo mental para encontrar varias multiplicaciones que dan el mismo resultado
9. Multiplicaciones rápidas	Uso de caminos cortos para	Que los alumnos busquen

	multiplicar dígitos por 10 o por sus múltiplos (20, 30, etcétera).	formas abreviadas para multiplicar dígitos por decenas o por centenas
10. Los camiones con frutas	Uso de caminos cortos para multiplicar dígitos por 10 o por sus múltiplos (20, 30, etcétera).	Que los alumnos usen el cálculo mental para resolver problemas al multiplicar dígitos por 10, por 100 y sus múltiplos

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El primer desafío del bloque I habla sobre problemas multiplicativos es el 6. “*Memorama de multiplicaciones*” p. 24, está compuesto de dos consignas.

- La primera de ellas es un juego de memorama en las páginas de recortable de 209 al 217, deberá formar parejas y las reglas son las siguientes.

1. Las tarjetas que tienen de las operaciones deberán estar con la operación hacia abajo una sobre otra, y las tarjetas con los resultados deberán estar todas con los resultados a la vista.

2. Durante cada turno el jugador deberá tomar una de las tarjetas de operaciones y leerla en voz alta a todos, posteriormente deberá seleccionar la tarjeta que corresponda al resultado correcto de la operación, si el alumno selecciona la tarjeta de resultados correcta deberá quedarse con las tarjetas si no deberá regresar las tarjetas.

3. Gana el jugador que tenga más tarjetas al terminar el juego

- La consigna dos de este desafío consiste en que los alumnos de manera individual deberán registrar los resultados que recuerden en la siguiente tabla:

Cuadro de multiplicaciones											
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

La finalidad de todo el desafío es que los alumnos identifiquen algunos productos y también descubran propiedades de la multiplicación como la conmutatividad, es decir si 5×9 es igual a 9×5 (el orden de los factores no altera el producto) y que reconozcan el hecho de que algunos números pueden ser el resultado de varios productos como $2 \times 6 = 12$ y $3 \times 4 = 12$. Las cantidades utilizadas para las operaciones en este desafío son de un solo dígito, sin embargo en la primera consigna en el memorama se encuentra dos tarjetas que tienen una operación con números de dos dígitos por uno (15×2 y 10×3)

En el desafío 7. “¿Cuántos son?”p. 27, se presenta una consigna compuesta de dos problemas los cuales deberán ser resueltos en parejas.

- Ambos problemas tienen la misma característica, primero se le da al alumno la información y respecto a esta se le formulan preguntas. Por ejemplo:
 1. Don Vicente hace juguetes de madera como bicicletas, coches y tráileres. Cada uno lleva un número diferente de ruedas.

Bicicletas: 2 Coches: 4 Tráileres: 10

- a) ¿Cuántas ruedas necesita para hacer 9 bicicletas?
- b) ¿Para 4 coches?

c) ¿Para 2 coches y 6 tráileres?

Esta clase de problemas a resolver son de la estructura multiplicativa explicada anteriormente en el libro de texto de segundo grado, que de acuerdo a Vergnaud (1985) se clasifican como Isomorfismo de medidas, una de las estrategias que los alumnos utilizan para resolver estos problemas es su cuadro de multiplicaciones, ya que los productos son de un dígito por un dígito.

El desafío 8. “Un resultado varias multiplicaciones”p. 30, consta de una consigna que se debe resolver en equipos.

- Se presenta una tabla donde los alumnos deberán escribir todas las multiplicaciones que corresponden a un mismo resultado.

Por ejemplo:

Resultados	Multiplicaciones
4	
12	
15	
20	5×4 , 4×5 , 2×10 , 10×2 , 20×1 , 1×20
40	

Esta clase de ejercicio permite al alumno repasar la propiedad conmutativa de la multiplicación, las cantidades que se presentan en este ejercicio van desde el 4 hasta el 40, es en este desafío en el que se empieza a notar un incremento en las cantidades de los productos de las multiplicaciones.

El desafío 9. “Multiplicaciones rápidas”p. 32, contiene una consigna que debe realizarse en equipos de cuatro alumnos.

- Con el material del recortable de las páginas de 187 a la 207.
 1. Son un total de 40 tarjetas con multiplicaciones en ellas, los alumnos deben resolverlas todas y anotar los resultados antes de iniciar el juego.
 2. Posteriormente cada uno deberá sacar una tarjeta y leerla en voz alta, seguido del resultado, uno de los integrantes deberá confirmar si el resultado es correcto de ser así el jugador podrá conservar la tarjeta si no deberá regresarla. Gana el jugador con más tarjetas

Todas las tarjetas del juego tienen multiplicaciones de cantidades de un dígito (un número del 0 al 9) por cantidades de dos y tres dígitos (múltiplos de 10 y 100) como las siguientes:

8 x 700	9 x 500	7 x 200	9 x 50	7 x 70
---------	---------	---------	--------	--------

El juego es para que los alumnos se familiaricen con las multiplicaciones de decenas y centenas, al final del juego se espera que los alumnos descubran que basta con multiplicar las cifras que son diferentes a cero y que al producto de esta solo se agregan la cantidad de ceros del factor de acuerdo con lo que se propone en el libro del maestro.

El último desafío de este bloque es el 10. “Los camiones con frutas”p. 34, consta de una consigna que deberán resolver los equipos.

- Se trata de anotar los valores faltantes en las diferentes tablas presentadas de acuerdo con la información contenida en ellas. Por ejemplo:

Los equipos deberán resolver las operaciones que les ayuden a completar las tablas de manera mental.

Fruta	Cajas	Frutas en cada caja	Total de cada fruta
Melón	6	10	
Pera	9	20	
Manzana	5	40	
Uva	7	300	
Fresa	2	600	
Durazno			

Como se puede ver en el ejemplo las multiplicaciones son de manera directa, es decir se soluciona igual que un problema de isomorfismo de medidas de acuerdo con Vergnaud (1985).

El bloque II del libro de texto *Desafíos matemáticos* de tercer grado está compuesto de 12 desafíos de los cuales 2 abordan el tema de problemas multiplicativos.

Tabla 10.2. Tratamiento de la multiplicación en el libro de tercer grado bloque II

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
21. Siempre hay un camino	Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas mediante diversos procedimientos (como suma de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera).	Que los alumnos utilicen la descomposición de números para resolver problemas que impliquen multiplicar números de dos cifras
22. Diferentes arreglos	Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas mediante diversos procedimientos (como suma de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera).	Que los alumnos utilicen arreglos rectangulares como apoyo para resolver problemas que implican multiplicaciones con números de dos cifras

Nuevamente se puede observar en el cuadro anterior que los desafíos se presentan de manera consecutiva en segmento del bloque.

El primer desafío que se presenta en este bloque es el 21. “Siempre hay un camino” p. 68, consta de una consigna compuesta de dos problemas y deberán resolver en parejas.

- Ambos tienen la misma estructura multiplicativa que pertenece a la categoría de isomorfismo de medidas (Vergnaud 1985) por ejemplo:
 1. En la Escuela Héroe del 47 se van a comprar 60 paletas de hielo para regalar a los grupos que ganaron la competencia de atletismo.
Si el costo de cada paleta es de 12 pesos ¿Cuánto tendrán que pagar?

Como se puede ver en el ejemplo anterior, en este desafío los alumnos se enfrentan a multiplicaciones con números de dos cifras por dos cifras, se espera que los alumnos utilicen estrategias que anteriormente les hayan funcionado para esta clase de problemas, una de las estrategias que este desafío favorece es la

descomposición de los números en múltiplos de 10 (60×10 y 60×2) para encontrar operaciones que habían resuelto con anterioridad.

El segundo y último desafío de este bloque es el 22. “Diferentes arreglos”p. 70, tiene una sola consigna, la cual está conformada por tres problemas

- Todos los problemas que se presentan en este desafío son problemas que corresponden a la clasificación que realiza Vergnaud (1985) llamados problemas de Producto de medidas que consisten en una composición cartesiana entre dos espacios de medida ($M1$ y $M2$) dentro de un tercero ($M3$).

Los primeros problemas se incluyeron en el libro de segundo grado con los mosaicos, ahora se presentan tres diferentes rompecabezas, con el apoyo gráfico se permite a los alumnos realizar un conteo de las piezas o sumas iteradas para dar respuesta a la pregunta de ¿Cuántas piezas tiene cada rompecabezas? Sin embargo ahora son números más grandes. Por esta razón se pide encontrar una forma más simple y rápida de responder las preguntas, esperando que pueda llegar a la estrategia de arreglo rectangular.

Estrategia:

x	18																	
14																		

El bloque III del libro de texto *Desafíos matemáticos* de tercer grado está compuesto de 18 desafíos de los cuales 2 corresponden el tema de problemas multiplicativos. Los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

Tabla 10.3. Tratamiento de la multiplicación en el libro de tercer grado bloque III

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
44. Repartos equitativos	Resolución de problemas de división (reparto y agrupamiento) mediante diversos procedimientos, en particular el recurso de la multiplicación.	Que los alumnos utilicen diversos procedimientos para resolver problemas que impliquen una división, en particular, el recurso de la multiplicación
45. Repartos agrupados	Resolución de problemas de división (reparto y agrupamiento) mediante diversos procedimientos, en particular el recurso de la multiplicación.	Que los alumnos resuelvan problemas de agrupamiento (divisiones de un número de dos cifras entre un número de una cifra con y sin residuo) mediante diversos procedimientos

El primer desafío del bloque III aborda el tema de problemas multiplicativos es el 44. “Repartos equitativos” p. 146, el cual consta de una consigna y se compone por 5 problemas.

- Todos los problemas presentados en este desafío son problemas que han sido clasificados por Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epon (1999), quienes consideraron que los problemas de agrupamiento y partición en los que se encuentran aquellos problemas de multiplicación y división que pueden ser agrupados o partidos en grupos equivalentes.

Los problemas entran en la categoría anterior al ser problemas de partición, sin embargo, no se espera que los alumnos utilicen los algoritmos de multiplicación y/o división, sino que con el apoyo gráfico estos puedan emplear estrategias de repartición para llegar a la resolución de dichos problemas. Por ejemplo:

1. En los 5 recipientes repartan equitativamente las 35 fichas
¿Cuántas fichas tendrán cada recipiente?

Los números no exceden a 100, se espera que puedan encontrar diversas estrategias de partición, también es importante aclarar que algunos de los problemas de partición tienen residuo o sobrantes.

En el último desafío del bloque que aborda el tema de problemas multiplicativos es el 45. “Repartos agrupados” p.150, que solo tiene una consigna y la conforman siete problemas, que deberán resolver en parejas.

- Igual al desafío anterior los problemas que conforman esta consigna son problemas que han sido clasificados por Carpenter, et. al. (1999), los problemas de agrupamiento y partición en los que se encuentran aquellos problemas de multiplicación y división que pueden ser agrupados o partidos en grupos equivalentes.

La diferencia con los problemas del desafío anterior es que ahora no hay apoyo gráfico concreto y no son problemas de partición sino de agrupamiento. Por ejemplo:

1. Pablo tienen 72 latas de sardinas y debe acomodarlas en cajas. Si en cada caja caben 6 latas ¿cuántas cajas necesita?

Los cuales con base en una medida implican formar la mayor cantidad de grupos con una determinada cantidad de objetos.

El bloque IV del libro de texto *Desafíos matemáticos* de tercer grado está compuesto de 12 desafíos de los cuales 3 abordan el tema de problemas multiplicativos.

Tabla 10.4. Tratamiento de la multiplicación en el libro de tercer grado bloque IV

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
57. Los números perdidos	Identificación y uso de la división para resolver problemas multiplicativos, a partir de los procedimientos ya utilizados (suma, resta, multiplicación). Representación convencional de la división: $a \div b = c$.	Que los alumnos reconozcan la división como la nueva operación estrechamente relacionada con la multiplicación

58. La fábrica de carritos	Identificación y uso de la división para resolver problemas multiplicativos, a partir de los procedimientos ya utilizados (suma, resta, multiplicación). Representación convencional de la división: $a \div b = c$.	Que los alumnos utilicen la representación horizontal de la división para resolver problemas
59. Hacer problemas	Identificación y uso de la división para resolver problemas multiplicativos, a partir de los procedimientos ya utilizados (suma, resta, multiplicación). Representación convencional de la división: $a \div b = c$.	Que los alumnos reflexionen acerca del significado de las operaciones

Los desafíos se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

El desafío 57. “Los números perdidos”p. 185, el primero del bloque aborda el tema de problemas multiplicativos, este desafío se compone de una consigna

- Dos ejercicios de los cuales se pide que en equipos anoten el valor faltante en las tablas:

x	1		5
3	3	12	
4		16	20
2	2	8	

La intención de este ejercicio es que los alumnos se den cuenta de que la información conocida es el resultado y un factor de la operación, como principal acercamiento a la división, Nesher (1992) afirma que los problemas de multiplicación y división comparten la misma estructura multiplicativa, la diferencia entre unos y otros reside en la información mostrada y omitida.

La división se define como la inversa de la multiplicación. Es decir, la operación que permite que dos números a (dividendo) y b (divisor) encuentren un único par de números (q, r) tales que, siendo q el cociente y r el residuo, se cumpla que $\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{residuo}$. Sin embargo, inicialmente la división no

aparece vinculada a la multiplicación sino a la idea de reparto (Correa, Nunes y Bryant, 1988; Dickson, Brown y Gibson, 1984) como lo hemos visto en los desafíos anteriores de este libro de texto de segundo y tercer grado.

En el desafío 58. “La fábrica de carritos”p. 187, tiene una consigna

- En la consigna se le presentan al alumno cuatro problemas de estructura multiplicativa donde se debe aplicar la división como estrategia de resolución.

El primer y quinto problema tiene una estructura multiplicativa clasificada de acuerdo con Vergnaud en Isomorfismo de medidas.

Problema que se resuelve con una multiplicación

- a) ¿Cuántas llantas necesitará Jorge para armar 15 carros con 4 llantas cada uno?

Problema que se resuelve con división

- b) Jorge quiere hacer camionetas con 6 llantas cada una ¿cuántas camionetas puede elaborar con 54 llantas?

Se intenta que el alumno logre identificar y relacionar las similitudes de estos datos y operaciones a realizar con las operaciones presentadas en el desafío anterior. En este las cantidades utilizadas en los problemas son todas de múltiplos, es decir en cada división realizada para resolver el problema no hay residuos diferentes de cero.

El último desafío que presenta este bloque es el 59. “Hacer problemas”p. 189. Compuesto por dos consignas.

- En la consigna 1 se espera que en equipos los alumnos inventen un problema que se pueda resolver con las operaciones proporcionadas, estas operaciones tienen los mismos números.
- a) $18 + 6 =$
 - b) $18 \times 6 =$

Las cantidades que componen estas operaciones son más grandes que en desafíos anteriores, se puede notar la dificultad creciente, por esta razón se permite al alumno utilizar calculadora.

El bloque V del libro de texto *Desafíos matemáticos* de tercer grado está compuesto de 12 desafíos de los cuales 3 tratan el tema de problemas multiplicativos, se presentan de manera consecutiva dentro de un segmento en el bloque.

Tabla 10.5. Tratamiento de la multiplicación en el libro de tercer grado bloque V

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
70. ¿Por cuánto multiplico?	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para la división entre un dígito. Uso del repertorio multiplicativo para resolver divisiones (cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo).	Los alumnos deben establecer relaciones entre los términos de la multiplicación y la división
71. Campaña de salud	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para la división entre un dígito. Uso del repertorio multiplicativo para resolver divisiones (cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo).	Que los alumnos empiecen a construir un algoritmo para resolver divisiones entre un dígito
72. Descomposición de números	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para la división entre un dígito. Uso del repertorio multiplicativo para resolver divisiones (cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo).	Que se establezcan relaciones entre los elementos de la división y de la multiplicación, esto es, si $a \times b = c$, entonces $c \div a = b$ y $c \div b = a$

El primer desafío de este bloque que aborda el tema de problemas multiplicativos es el 70. “¿Por cuánto lo multiplico?”p. 230, y está conformado por una consigna que a su vez está compuesta por 3 problemas y dos ejercicios.

- En el primer ejercicio de esta consigna se presenta el cuadro de la multiplicación que se vio al principio de este libro de texto, los alumnos deberán responder en parejas y llenar los espacios solicitados de dicho cuadro.

x			¿?		¿?		7		9	
3			9							
¿?									54	
8					40					
¿?							70			

La finalidad de este desafío es que los alumnos expliquen la manera encontrar los números faltantes de cada casilla.

Después de este ejercicio se presentan los tres problemas de tipo multiplicativo, donde se espera que el alumno detecte los factores que intervienen en cada problema y empiece a utilizar la división como una estrategia de resolución.

El desafío 71. “Campaña de salud” p. 234, deberá resolverse en parejas, está compuesto de una consigna que a su vez está conformada por 4 problemas con estructura multiplicativa y se deben resolver con una división.

Kouba (1989), clasificó la división de medidas la que pertenecen los cuatro problemas, en todos ellos se dan dos cantidades y se desconoce la cantidad de conjuntos.

Por ejemplo:

1. A una comunidad de Tapachula, Chiapas, llegó una brigada de 48 trabajadores de la Secretaría de Salud, para realizar una campaña de fumigación y descacharrización para prevenir enfermedades como el dengue. ¿Cuántas brigadas de 4 trabajadores podrán formar?

Las consideraciones previas marcadas en el libro de texto del maestro: empiece a enseñar la forma convencional de la división al resolver dicho problemas, con la

finalidad de que el alumno pueda acomodar cada uno de los componentes de esta como lo pide el algoritmo convencional.

Finalmente el último desafío del bloque V y del libro de texto que aborda los temas de problemas multiplicativos es el número 72. “Descomposición de números”p. 238, el cual consta de una consigna y está conformada por un juego en el que los alumnos deben estar en equipos y tener las tarjetas de las páginas 165 a la 169 del recortable.

➤ Las reglas del juego son las siguientes:

1. Las tarjetas se deben revolver y posteriormente colocarlas al centro de la mesa con los números hacia abajo
2. El primer jugador deberá tomar una tarjeta y mostrársela al resto
3. Entonces cada jugador deberá encontrar todos los números que, multiplicados entre sí, den el número que está escrito en la tarjeta, o bien, aquellos productos que se acerquen más y el resto sea menor a cualquiera de los factores
4. El primero que dé una respuesta correcta se quedara con la tarjeta
5. El juego termina después de sacar 10 tarjetas y quien tenga más gana

Finalmente se presenta como en los grados anteriores una tabla en la que se puede observar la clasificación de los desafíos y cuáles y cuantos desafíos pertenecen a esta, de igual forma se muestra la cantidad de desafíos por bloque.

Tabla 11. Secuencia de los problemas multiplicativos de tercer grado

Problemas aditivos y multiplicativos						
Clasificación	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Total de desafíos
Problemas de isomorfismo de medidas Vergnaud (1985)	Desafío 7 Desafío 10	Desafío 21		Desafío 58		4
Problemas de producto de medidas Vergnaud (1985)		Desafío 22				1

Problemas de agrupamiento y partición de Carpentier et.al (1999)			Desafío 44 Desafío 45			2
Problemas de división de medida y partitiva Kouba (1989)					Desafío 71	1
Problemas con números (multiplicación y división)	Desafío 8			Desafío 57 Desafío 59	Desafío 70	4
Juegos	Desafío 6 Desafío 9				Desafío 72	3
Total de desafíos	5	2	2	3	3	15

2.4.3 Libro de texto *Desafíos Matemáticos* de cuarto grado

El libro de texto *Desafíos Matemáticos* de cuarto grado cuenta con un total de 106 desafíos, 22 son referentes al tema de la multiplicación.

Al igual que los contenidos de los libros de texto anteriores se presentará y analizará por bloque cada uno de los desafíos con respecto al tema de la multiplicación, sin embargo la diferencia en este libro es que 4 de los 22 desafíos que se consideraron para la enseñanza de la multiplicación pertenecen al tema de números y sistema de numeración que se encuentra en eje temático Sentido numérico y pensamiento algebraico (esto se señalará en cada uno de los 4 desafíos)

El bloque I del libro de texto de cuarto grado está compuesto por 24 desafíos de los cuales 4 se refieren al tema de problemas multiplicativos.

Tabla 12.1 Tratamiento de la multiplicación en el libro de cuarto grado bloque I

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
1. Los librereros	Notación desarrollada de los números naturales y decimales. Valor posicional de cifras de un número.	Que los alumnos utilicen la descomposición aditiva y multiplicativa de los números para resolver problemas
12. Butacas y naranjas	Exploración de distintos significados de la multiplicación	Que los alumnos utilicen la multiplicación para resolver

	(relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.	problemas de proporcionalidad
13. Combinaciones	Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.	Que los alumnos utilicen procedimientos propios y a la multiplicación para resolver problemas que implican producto de medidas
14. ¿Alcanza?	Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.	Que los alumnos utilicen la multiplicación para resolver problemas que implican producto entre medidas

Se puede ver en la tabla anterior que el primer desafío que se presenta está separado de los siguientes tres desafíos que aparecen de manera consecutiva en el bloque. Esto es porque aunque los cuatro desafíos pertenecen al mismo eje temático (sentido numérico y pensamiento algebraico) abordan diferentes temas, el primer desafío es del tema números y sistema de numeración y los otros tres desafíos son del tema problemas multiplicativos.

El primer desafío del bloque I es el 1. “Los librereros”p. 10, este aborda el tema de problemas aditivos, sin embargo utiliza la multiplicación como estrategia por esta razón se consideró el desafío.

- Tiene una consigna que debe resolverse en parejas, está compuesta por tres ejercicios, el dos y el tres son los revisados por que se encuentran relacionados y son en los que se puede emplear la multiplicación.

El ejercicio número dos presenta al alumno tres cuentas, de las cuales debe sacar el gasto total de un producto.

4 pagos de \$400	4 pagos de \$600	5 pagos de \$400
3 pagos de \$200	1 pagos de \$450	3 pagos de \$200
1 pago de \$190	1 pago de \$150	2 pago de \$100
Total	Total	Total
_____	_____	_____

Con este ejercicio se espera que los alumnos refuercen el significado de “tantas veces tanto” por la forma en la que se presenta el ejercicio, los alumnos deben realizar ya sea una multiplicación y sumas iteradas.

En el siguiente desafío presentado en el bloque es el número 12. “Butacas y naranjas”p. 46, que consta de de una consigna y se debe resolver en parejas,

- Esta está compuesta por dos problemas.

Problema 1.

¿Alcanzarán las butacas del teatro para los 400 alumnos y 20 maestros de una escuela, si en el teatro hay 23 filas de 19 butacas cada una?

En este problema se espera que los alumnos realicen primero una suma de cuáles son el total de personas que se encuentran en el teatro y posteriormente una multiplicación de acuerdo con la estructura multiplicativa descrita por Vergnaud (1985) en los problemas de isomorfismo de medidas que plantean situaciones en las que hay una proporción directa entre dos espacios de medida.

El siguiente desafío es el número 13. “Combinaciones”p. 49, consta de una consigna y se debe resolver en parejas.

- Esta consigna plantea tres problemas en los cuales de acuerdo con Greer (1992) es necesario reconocer la naturaleza de las cantidades esta estructura se llama producto cartesiano y es necesario resolverlo e interpretarlo por medio de combinatorias.

El primer problema está apoyado por ilustraciones, en las cuales se presenta el dibujo de una casa como ejemplo de cómo deben lucir las demás, posteriormente se presentan tres estructuras de las casas con forma de rectángulos y cuatro techos en forma de triángulos de diferente diseño. Finalmente se le pregunta al alumno ¿cuántas casas diferentes entre sí pero similares a las del modelo se pueden formar con los triángulos y rectángulos?

El último desafío de este bloque que trata el tema de problemas multiplicativos es el número 14. “¿Alcanza?”p. 52, consta de una consigna y debe resolverse en parejas

- Propone una consigna donde se presentan tres problemas de los cuales sus características coinciden con la descripción realizada Vergnaud sobre los problemas de producto de medidas y que han estado trabajando en desafíos anteriores.

La diferencia entre estos y los desafíos trabajados en el libro de texto de tercer grado es que ahora no se presenta ningún apoyo visual (ilustraciones) para que el alumno debe identificar los números.

Dentro de las consideraciones previas de este desafío se propone al docente que antes de entrar a este desafío se expliquen y definan las unidades de medida (metro, metro cuadrado y centímetro).

El bloque II del libro de texto *Desafíos matemáticos* de cuarto grado está compuesto de 19 desafíos de los cuales ninguno aborda el tema de problemas multiplicativos.

Tabla 11.2. Tratamiento de la multiplicación en el libro de cuarto grado bloque II

El bloque III del libro de texto *Desafíos Matemáticos* de cuarto grado está compuesto por 21 desafíos de los cuales en 11aborda el tema de problemas multiplicativos.

Tabla 12.3. Tratamiento de la multiplicación en el libro de cuarto grado bloque III

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
46. De diferentes maneras	Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas	Que los alumnos reconozcan que hay diferentes expresiones (sumas, multiplicaciones o combinaciones de ambas) para representar un mismo número
47. Expresiones equivalentes	Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas	Que los alumnos adviertan que las expresiones equivalentes con adiciones y/o multiplicaciones pueden representar la misma o diferente situación
48. ¿Tienen el mismo valor?	Descomposición de números naturales y decimales en expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas	Que los alumnos identifiquen si dos expresiones aditivas y multiplicativas son equivalentes o no
53. Los ramos de rosas	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores.	Utilizar diferentes recursos para resolver problemas de multiplicación con números de dos cifras
54. Cuadrículas grandes y pequeñas	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores.	Que los alumnos relacionen la multiplicación con el cálculo del área de un rectángulo
55. Multiplicación con rectángulos	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores.	Que los alumnos utilicen el cálculo de áreas como recursos para resolver multiplicaciones con números de dos cifras
56. La multiplicación	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en	Que los alumnos vinculen la representación gráfica con el algoritmo desarrollado de la multiplicación

	práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores.	
57. Algo simple	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores.	Que los alumnos encuentren relaciones entre el algoritmo desarrollado de la multiplicación y el algoritmo simplificado
58. Hagamos cuentas	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores.	Que los alumnos usen algoritmos de suma, resta o multiplicación al resolver un problema
59. De viaje	Resolución de problemas en los que sea necesario relacionar operaciones de multiplicación y adición para darles respuesta	Que los alumnos resuelvan, a partir de la información contenida en un mapa o tabla, problemas en los que sea necesario relacionar varias multiplicaciones y adiciones para obtener respuestas
60. En la feria	Resolución de problemas en los que sea necesario relacionar operaciones de multiplicación y adición para darles respuesta	Que los alumnos identifiquen las adiciones y multiplicaciones que le permitan resolver un problema

Se puede ver en el cuadro anterior que los desafíos están presentados por segmentos dentro del bloque.

Este bloque tiene dos segmentos, el primero está compuesto por tres desafíos que a pesar de pertenecer al eje temático sentido numérico y pensamiento algebraico aborda el tema de números y sistema de numeración, pero en este trabajo se consideraron significativos para la enseñanza de la multiplicación.

El segundo segmento está compuesto de ocho desafíos pertenecientes al mismo eje temático (sentido numérico y pensamiento algebraico) y abordan el tema de problemas multiplicativo

El primer desafío de este bloque es el número46. “De diferentes maneras” p. 148, del tema Números y sistemas de numeración, está compuesto por dos consignas

- La primera debe resolverse en equipos es un juego que enuncia las siguientes reglas e instrucciones.

El profesor repartirá 16 tarjetas en las cuales se deberá escribir una cantidad mayor a 20 y menor a 50, posteriormente se colocarán con el número hacia abajo en el centro de la mesa.

Por turnos cada uno tomará una tarjeta y mostrara a todos el número que aparece en ella. En el cuaderno de manera individual deberán escribir la mayor cantidad de operaciones distintas que den como resultado el número de la tarjeta. Tienen tres minutos para realizarlo.

Gana el que acumule más puntos después de cuatro rondas.

Con esta actividad se espera que los alumnos entiendan la igualdad de las operaciones, es decir que no importa cuántos números o el tipo de operación se realice mientras estas tengan el mismo resultado equivalente.

- En la segunda consigna de este desafío se presentan al alumno tres operaciones combinadas ordenadas de tal manera que la multiplicación sea la primera operación a realizar de izquierda a derecha.

a) $4 \times 4 + 9 =$

b) $3 \times 8 + 1 =$

c) $11 \times 2 + 3 =$

El ejercicio consiste en que los alumnos formulen un problema que puedan resolver con cada una de las operaciones combinadas presentadas a modo de reforzar lo aprendido en la consigna anterior.

El siguiente desafío es el número47. “Expresiones equivalentes”p. 152, del tema Números y sistemas de numeración, está compuesto por una consigna y debe resolverse en equipos.

- Esta consigna está compuesta a su vez por 5 problemas, de los cuales 4 tienen una estructura multiplicativa que pertenece a la categoría de

isomorfismo de medidas de Vergnaud (1985) plantean situaciones donde una proporción directa entre dos espacios de medida.

Por ejemplo:

Al invernadero de margarita llegó el siguiente pedido: 3 paquetes con 30 docenas de rosas cada uno, 4 paquetes de 20 docenas de garberas cada uno y 2 paquetes con 40 docenas de margaritas cada una. ¿Cuántas docenas se entregaron en el pedido?

Finalmente se sumarán los resultados de las tres operaciones que realizará el alumno, pero la finalidad del desafío es que el alumno siga realizando diferentes operaciones con el mismo resultado, ya que al concluir los 5 problemas se espera realicen un análisis grupal y se seleccionen diferentes procedimientos de resolución correctos e incorrectos para su análisis. Todos los números que se utilizan en este problema no exceden el número 50, todas las multiplicaciones y sumas son de dos dígitos por dos o un dígito.

El último desafío del primer segmento presentado en este bloque es el número 48. “¿Tienen el mismo valor?” p. 155, igual a los dos anteriores pertenece al tema de Números y sistemas numéricos.

- Este desafío consta de una consigna y deberán resolver en equipos de tres personas, esta consiste en comprobar si las operaciones presentadas en seis recuadros tienen el mismo valor y en caso de no tenerlo explicar por qué.

Para este desafío no se les permite usar la calculadora. Las tarjetas se presentan de la siguiente manera:

4.50 Y $4 \times 0.50 + 8 \times 20$	¿Tienen el mismo valor? ¿Por qué?
--	--------------------------------------

Una de las consideraciones previas para que los alumnos trabajen con números decimales es que ellos ya deben manejar los decimales del valor monetario (\$ 0.50, \$ 0.20 y \$ 0.10).

El segundo segmento compuesto de 8 desafíos. El primer desafío de este segmento es el número 53. “Los ramos de rosas” p. 171, consta de una consigna compuesta por cuatro problemas de estructura multiplicativa, que pertenece a la categoría de isomorfismo de medidas de Vergnaud (1985) que ya ha sido planteada en desafíos anteriores, esta clase de problemas propone situaciones en donde una proporción directa entre dos espacios de medida.

➤ Ejemplo de la consigna

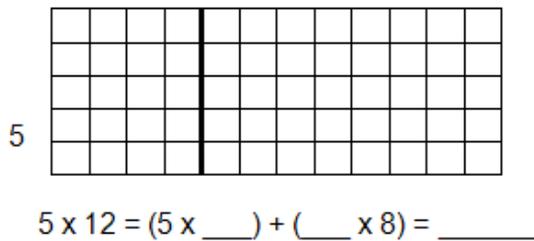
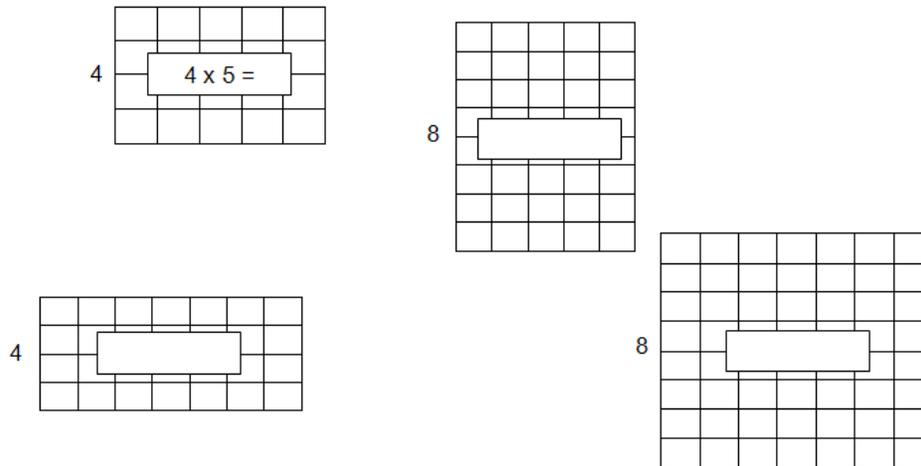
Problema 1

El sábado don Gustavo vendió en el Mercado 15 ramos con 12 rosas cada uno. ¿Cuántas rosas vendió en total?

La finalidad de este desafío es que los alumnos utilicen diferentes estrategias para resolver problemas de multiplicaciones de dos cifras. Una de las estrategias esperada es la utilización de la descomposición de las operaciones.

El siguiente desafío es el número 54. “Cuadrículas grandes y pequeñas” p. 173, consta de una consigna compuesta por un ejercicio que tiene apoyo visual (cuadrícula) ya se espera que los alumnos relacionen la multiplicación con el cálculo de áreas de los rectángulos.

➤ La instrucción de este ejercicio es que anoten los números faltantes y la operación multiplicativa que corresponda a cada cuadrícula.



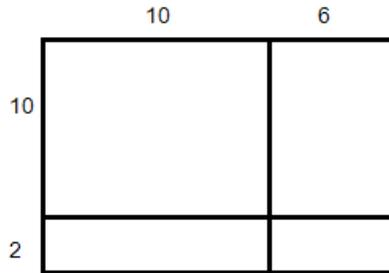
Es con este ejercicio con el que se espera acercar al alumno al algoritmo convencional de la multiplicación.

Los problemas de producto de medidas según Vergnaud tienen dos cantidades, estas son denominadas cantidades extensivas (juegan el mismo papel por lo tanto pueden intercambiarse) que dan lugar a una a tercera cantidad (producto). Greer (1992) pone como ejemplo de esta categoría a los problemas en los que hay que obtener el área de un rectángulo.

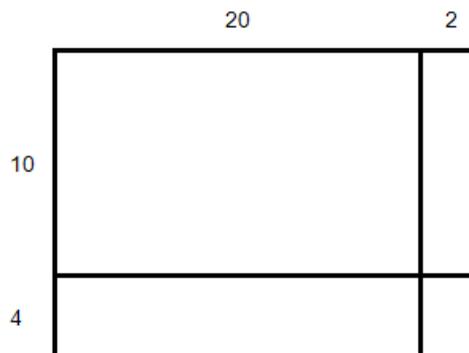
Finalmente si el alumno aún no puede realizar este tipo de operaciones o quiere confirmar si su resultado es correcto puede utilizar el conteo como método de resolución y confirmación.

El siguiente desafío de este segmento es el 55. "Multiplicación con rectángulos"p. 176, y está ligado al desafío anterior ya que se presenta un desglose similar.

- Este desafío está compuesto de una consigna que expone 5 ejercicios como los siguientes:



$$12 \times 16 = \underline{\hspace{2cm}}$$



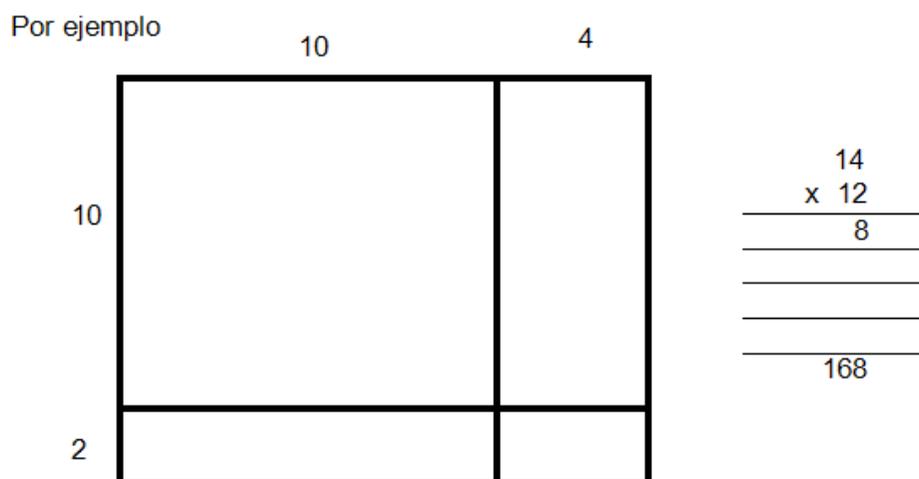
$$22 \times 14 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Aunque es un ejercicio muy parecido al anterior ahora no hay posibilidad de que el alumno realice una estrategia de conteo para llegar a la solución, pero sí están los factores de las multiplicaciones descompuestos (en unidades y decenas) en el rectángulo, facilitando un poco la resolución de la multiplicación principal a resolver.

Se espera que el alumno como en el desafío anterior resuelva las multiplicaciones de los rectángulos por separado y posteriormente sume las áreas de todos ellos.

El siguiente desafío es el número 56. “La multiplicación”p. 178, este desafío es primordial para este trabajo ya que es aquí donde se empieza a trabajar con un algoritmo convencional de la multiplicación.

- Este desafío se compone de una consigna que se debe resolver en equipos. Esta consigna está compuesta de tres multiplicaciones con representaciones gráficas.



Con el ejemplo anterior se puede ver que parte de la resolución del algoritmo es descomponer las cifras como se realizó en el desafío anterior con el apoyo de las imágenes.

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 \times 12 \\
 \hline
 8 \\
 \hline
 \mathbf{20} \\
 \hline
 \mathbf{40} \\
 \hline
 \mathbf{100} \\
 \hline
 168
 \end{array}$$

Sin embargo con el apoyo visual se facilita la manera de resolución propiciando la estrategia de productos parciales descrita por Bermejo (2009).

Para este desafío los alumnos ya deben tener claro el valor posicional de cada cifra de los números que contengan unidades decenas y centenas, ya que no existe apoyo gráfico.

El siguiente desafío del segmento es el numero 57. “Algo simple”p. 180, está compuesto por una consigna que deberá ser resuelta en equipos

- Esta pide a los alumnos anoten los números faltantes en las operaciones de la izquierda y averigüen cómo se hacen las de la derecha.

Operaciones de la izquierda

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \times 18 \\
 \hline
 32 \\
 \hline
 40 \\
 \hline
 \hline
 432
 \end{array}$$

Operaciones de la derecha

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \times 18 \\
 \hline
 192 \\
 \hline
 432
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 65 \\
 \times 34 \\
 \hline
 20 \\
 \hline
 150 \\
 \hline
 \hline
 2210
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 65 \\
 \times 34 \\
 \hline
 260 \\
 \hline
 2210
 \end{array}$$

Igual al desafío anterior se espera que los alumnos desarrollen la estrategia de productos parciales para la resolución de estas multiplicaciones. Que el alumno entienda el valor posicional de cada cifra es clave, ahora no se le proporciona apoyo gráfico para la resolución de las operaciones.

El desafío número 58. "Hagamos cuentas" p. 182, consta de una consigna que deberá resolverse en equipos

- Esta consta de cuatro problemas y en ellos se pide al alumno anote qué tipo de operaciones realizara y con ellas calcule el resultado del problema.

El primer problema presentado a los alumnos es un problema aditivo que como se vio en el libro de texto de primer grado Heller y Greeno (1978) describen como problema aditivo de combinación, se muestran números disjuntos en las sumas como parte de un todo.

- a) Para ir de México a Cuautla Julián gastó \$150 en gasolina, \$218 en casetas de cobro y \$65 en una comida ¿Cuánto dinero gastó?

El segundo problema es un problema de sustracción

- b) Julián llevaba \$500 en su viaje ¿Cuánto dinero le sobró?

El tercer problema es un problema multiplicativo que de acuerdo a sus características pertenece a un problema de isomorfismo de medidas, también es necesario tomar en cuenta el resultado de la adición del primer problema.

- c) Julián debe ir de México a Cuautla durante 15 sábados va y regresa el mismo día y solo come una vez en el día ¿Cuánto dinero gastará Julián durante los 15 sábados?

El último problema de este desafío es un problema de división.

- d) El automóvil de Julián recorre 12km por cada litro de gasolina ¿Cuántos litros necesitará para recorrer 150 m?

El desafío 59. “De viaje”p. 184, está compuesto por una consigna y deberá resolverse en equipos.

- En esta consigna se espera que los alumnos relacionen la información dada en el mapa y la información de la tabla, para posteriormente realizar las operaciones necesarias y así resolver la pregunta.

Por ejemplo, para obtener la cantidad de kilómetros recorridos el primer día los alumnos deberán detectar en el mapa la cantidad de kilómetros que hay ente Acámbaro y san Juan del Río, posteriormente multiplicar esta cantidad por los 5 viajes que se realizaron en el día, ya que la distancia en kilómetros es la misma entre los dos puntos. Otra estrategia valida es utilizar una suma iterada, pero para el nivel de los alumnos y con el conocimiento que debió haber adquirido hasta este momento ya puede considerar la multiplicación como la mejor estrategia de resolución.

El último desafío del segmento y por tanto del bloque III es el número 60. “En la feria”p. 187, el cual está compuesto por una consigna y debe resolverse en parejas.

- Esta consigna está conformada por cuatro problemas en los que se pide al alumno detectar todas las operaciones que den resultado al problema.

Ejemplo:

El viernes se vendieron 80 boletos para la rueda de la fortuna: 37 boletos para niño y 43 para adulto ¿Cuánto dinero se obtuvo de la venta de los 80 boletos? Si cada boleto de niño tiene un costo de \$15.00 y cada boleto de adulto \$20.00.

- a) $37 \times 15 + 43 \times 20$
- b) $80 \times 15 + 80 \times 20$
- c) $30 \times 15 + 7 \times 15 + 40 \times 20 + 3 \times 20$
- d) $37 \times 37 + 43$

Este desafío exhorta a los alumnos a que analicen e interpreten las operaciones planteadas, por otro lado sea espera que sea capaz de de identificar el significado de cada número en relación con los datos del problema.

La intención del desafío es que los alumnos avancen en la construcción del significado de la multiplicación, ya que como se puede ver en las posibles respuestas se trabaja con estrategias y conocimientos que los alumnos ya deben dominar.

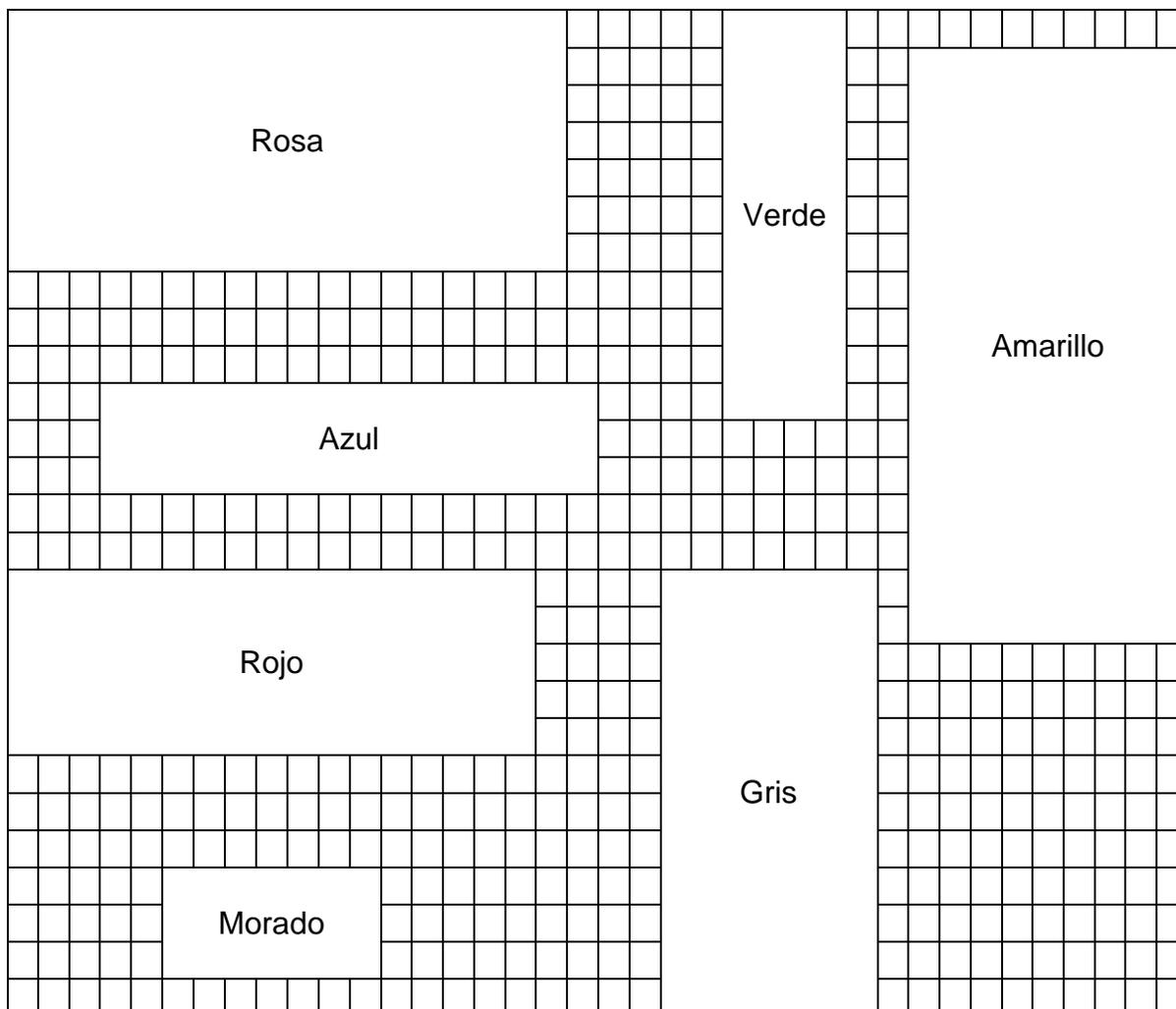
El bloque IV del libro de texto *Desafíos Matemáticos* de cuarto grado está compuesto por 24 desafíos de los cuales en 5 se aborda el tema de problemas multiplicativos. Los desafíos se presentan por segmentos dentro del bloque.

Tabla 12.4. Tratamiento de la multiplicación en el libro de cuarto grado bloque IV

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
74. La medida de sus lados	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	Que los alumnos utilicen la división como recurso para calcular el valor de un factor desconocido en una multiplicación de dos factores
75. ¿Habrá otro?	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	Que los alumnos establezcan relaciones entre los procedimientos de la suma, la resta y la multiplicación, y el de la división
76. Lo que hace falta	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	Que los alumnos practiquen el algoritmo convencional de la división, pero desglosando algunos procesos
77. ¡Mucho ojo!	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	Que al revisar y corregir algunos ejemplos los alumnos fortalezcan sus conocimientos respecto al algoritmo convencional de la división
78. De práctica	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	Que los alumnos analicen, usen y ejerciten el algoritmo convencional de la división

El primer desafío que se presenta es el número 74. “La medida de sus lados”p. 231, que consiste en una consigna y debe realizarse en equipo

- Se les pide a los alumnos que completen una tabla con el apoyo gráfico de una cuadrícula con 7 diferentes rectángulos de colores.



La tabla a completar está compuesta por 8 filas y cuatro columnas en las que se pide al alumno anote la información faltante de acuerdo con el apoyo gráfico.

Rectángulo	Total de unidades	Lado mayor (unidades)	Lado menor (unidades)
Morado	21	7	3
Rosa	126		7
Gris	84	12	
Azul	48		3
Amarillo	162		9
Verde	44	11	
Rojo	85		5

Finalmente dentro de las consideraciones previas del libro de texto del docente se propone le explique al alumno otra de las formas de resolver este problema, es decir, la división.

En el libro se recomienda que el profesor presente al alumno el proceso completo de la división, de igual forma se propone que debido a la complejidad de este algoritmo se dediquen dos o más sesiones de clase para la resolución de esta consigna. En la cual se espera que los alumnos identifiquen la multiplicación y la división como operaciones inversas entendiendo que uno de los números que se multiplican se puede calcular al dividir el producto de estos entre el otro factor.

El siguiente desafío es el numero 75. “¿habrá otro?” p. 235, el cual tiene una consigna compuesta por un ejercicio donde se le presenta a los alumnos un problema multiplicativo y tres soluciones para que lo analicen y comenten, posteriormente se le pide con lo anterior que resuelvan tres preguntas.

- Hay 354 losetas para cubrir el piso de un salón de la escuela. Después de hacer unos cálculos, los trabajadores se dieron cuenta de que les conviene acomodarlas en filas de 9 losetas. ¿Cuántas filas podrán colocar? ¿Sobran losetas?

$$\begin{array}{r}
 20 + 10 + 5 + 4 \\
 9 \overline{) 354} \\
 \underline{-180} \\
 174 \\
 \underline{-90} \\
 84 \\
 \underline{-45} \\
 39 \\
 \underline{-36} \\
 3
 \end{array}$$

Respuesta del equipo de LUIS
Alcanza para 39 filas y sobran 3 losetas

$$\begin{array}{r}
 10 + 10 + 10 + 2 + 2 + 5 \\
 9 \overline{) 354} \\
 \underline{-90} \\
 264 \\
 \underline{-90} \\
 174 \\
 \underline{-90} \\
 84 \\
 \underline{-18} \\
 66 \\
 \underline{-18} \\
 48 \\
 \underline{-45} \\
 3
 \end{array}$$

Respuesta del equipo de ROSA
Se van a acomodar 39 filas y van a sobrar 3 losetas

$$\begin{array}{r}
 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 10 + 10 + 10 + 4 \\
 9 \overline{) 354} \\
 \underline{-9} \\
 345 \\
 \underline{-9} \\
 336 \\
 \underline{-9} \\
 327 \\
 \underline{-9} \\
 318 \\
 \underline{-9} \\
 309 \\
 \underline{-90} \\
 219 \\
 \underline{-90} \\
 129 \\
 \underline{-90} \\
 39 \\
 \underline{-36} \\
 3
 \end{array}$$

Respuesta del equipo de FELIPE
Los trabajadores pueden colocar 39 filas y sobran 3 losetas

Se espera que los alumnos empiecen a construir el algoritmo de la división, al presentarse los tres procedimientos similares y que puedan realizar un análisis a partir de lo observado, pues cada uno de estos implica un esfuerzo diferente. Es importante que al resolver las preguntas estas se comenten en el grupo, en muchas de las estrategias que utilizarán los alumnos, estarán multiplicando.

Es importante que para este desafío los alumnos ya deben tener claro cuáles son los componentes de la división y a que se refiere cada uno de ellos, puesto que se le pide el residuo.

El siguiente desafío es el 76. “Lo que hace falta”p. 239, consta de una consigna compuesta por cuatro ejercicios, los cuales deberán resolverse en parejas

- Se le pide al alumno que escriba en los espacios en blanco los datos necesarios para que cada división resulte correcta, posteriormente se le pide conteste los resultados del cociente y residuo de cada división.

$$\begin{array}{r}
 100 + \square + \square \\
 7 \overline{) 922} \\
 \underline{-700} \\
 222 \\
 \underline{-210} \\
 12 \\
 \underline{-7} \\
 5
 \end{array}$$

Resultados

Cociente _____

Residuo _____

$$\begin{array}{r}
 20 + \square + 2 + \square + 2 + \square \\
 13 \overline{) 615} \\
 \underline{00} \\
 355 \\
 \underline{-260} \\
 95 \\
 \underline{-26} \\
 69 \\
 \underline{00} \\
 43 \\
 \underline{-26} \\
 17 \\
 \underline{-13} \\
 4
 \end{array}$$

Resultados

Cociente _____

Residuo _____

Con este tipo de consigna se pretende que los alumnos practiquen y desarrollen el algoritmo de la división completando los números faltantes, esperando detecte que es necesario establecer una relación entre todos los números componentes del algoritmo.

De esta forma se espera no solo practiquen sino que también identifiquen las parte de la división y cómo cada una de ellas funciona, finalmente como consideración previa en el libro de texto se pide al docente que proponga diversas maneras de solución, incluso motive al alumno a resolver de diferentes formas estos cuatro ejercicios.

Similar al anterior, el desafío número77. “¡Mucho ojo!”p. 242 está conformado por una consigna que consta de siete ejercicios.

- En parejas deberán revisar cada uno de los ejercicios para detectar cualquier error, en caso de encontrar algún error deberán desarrollar dicho ejercicio en el cuaderno de manera correcta.

$\begin{array}{r} 100 + 40 + 3 \\ 6 \overline{) 763} \\ \underline{-600} \\ 263 \\ \underline{-240} \\ 023 \\ \underline{-18} \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 + 9 \\ 21 \overline{) 414} \\ \underline{-210} \\ 204 \\ \underline{-189} \\ 15 \end{array}$
$\begin{array}{r} 50 \\ 18 \overline{) 963} \\ \underline{-960} \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 40 + 4 \\ 16 \overline{) 919} \\ \underline{-640} \\ 079 \\ \underline{-64} \\ 15 \end{array}$
$\begin{array}{r} 100 + 20 \\ 8 \overline{) 954} \\ \underline{-800} \\ 154 \\ \underline{-80} \\ 74 \end{array}$	$\begin{array}{r} 40 + 9 \\ 20 \overline{) 985} \\ \underline{-800} \\ 180 \\ \underline{-180} \\ 0 \end{array}$

Se espera que los alumnos detecten no solo los errores de cada uno de los ejercicios sino también que cada número del cociente ahora no está desarrollada totalmente con esto se espera que el alumno ponga en práctica las

multiplicaciones de los múltiplos de 10 o de 100 las cuales se han visto con anterioridad.

Finalmente en este bloque el último desafío aborda el tema de los problemas multiplicativos es el 78. “De práctica”p. 244, consta de dos consignas y los alumnos deberán resolver en parejas.

- La primera consigna está conformada por dos divisiones.

$$\begin{array}{r} 126 \\ 7 \overline{) 885} \\ \underline{18} \\ 45 \\ \underline{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ 13 \overline{) 937} \\ \underline{027} \\ 01 \end{array}$$

Se le pide al alumno analice el procedimiento que se utilizó para resolverlas y posteriormente lo explique, teniendo como base el conocimiento adquirido en los desafíos anteriores se espera puedan identificar los cambios y similitudes del proceso de resolución de estas divisiones y las anteriores.

De igual forma en las consideraciones previas, el docente debe tomar en cuenta una serie de pasos que el alumno ya debe dominar para poder abordar una división simplificada de manera correcta.

Los siguientes pasos son esperados por las consideraciones previas que se proponen al maestro en el libro de texto, el alumno describirá en su respuesta cómo es que la división se resolvió:

- 1) El dividendo se va seleccionando y dividiendo de manera parcial
- 2) Al comenzar a dividir, el dividendo se considera la cantidad de cifras que tiene el divisor
- 3) La primera cifra del cociente se ubica arriba de la última cifra que se está dividiendo y que pertenece al dividendo
- 4) El cociente se calcula parcialmente, sin anotar los ceros que corresponden al valor posicional de cada cifra

- 5) En el desarrollo solo se escribe el resultado que se obtiene al restar el dividendo y el producto del divisor por el cociente
- 6) Al resultado de esa resta (residuo) se le agrega la siguiente cifra del dividendo y se forma un nuevo número para dividir
- 7) La división no termina hasta que se utilizan todas la cifras del dividendo

El bloque V del libro de texto *Desafíos Matemáticos* de cuarto grado está compuesto por 18 desafíos de los cuales en 2 se refieren al tema de problemas multiplicativos, los desafíos están presentados por segmentos dentro del bloque.

Tabla 12.5. Tratamiento de la multiplicación en el libro de cuarto grado bloque V

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
100. ¡Nos vamos de excursión!	Análisis del residuo en problemas de división que impliquen reparto.	Que los alumnos adviertan que, para resolver un problema que implica dividir, es necesario considerar el valor del residuo
101. Libros y cajas	Análisis del residuo en problemas de división que impliquen reparto.	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen dividir, e identifiquen cómo la variación del residuo puede afectar el resultado del problema

El primer desafío del bloque es el número 100. “¡Nos vamos de excursión!”p. 316, consta de una consigna y deberá resolverse en parejas.

- Dentro de la consigna se presenta un problema de tipo multiplicativos que debe resolverse con una división.

El problema:

En el grupo de Elena hay 43 alumnos. El próximo mes se irán de excursión a un parque de diversiones y están considerando dos opciones de transporte.

La primera opción: en autos de 6 pasajeros. Incluyendo al conductor

La segunda opción: en camionetas de 9 pasajeros. Incluyendo al conductor

Se pretende que los alumnos comprendan con esta clase de problema la importancia del residuo por ser un resultado de la división y que este tiene un significado dentro de ella.

Se espera que comprendan que con el residuo de una división se pueda integrar otro grupo. Ya que para resolver cada una de las preguntas es necesario que los alumnos comprendan que al repartir los 43 niños en los autos o camionetas será necesario uno más para transportar a los últimos alumnos aunque no se ocupen todos los lugares en el carro.

Es importante aclarar que en ningún momento se pide al alumno realizar una división simplemente se caracteriza como problema de reparto que de acuerdo con Cristina Muñoz Caro (2011) son de nivel 1 y pertenecen al reparto equitativo: ya que muestran situaciones en las que una cantidad se reparte entre un número x de partes iguales. En el enunciado se hace referencia a tres informaciones: la cantidad a repartir, el número de grupos a formar o el número de elementos por cada grupo.

Para este momento se espera que el alumno domine cuáles son los componentes de una división y cómo esta funciona para resolver un problema.

Finalmente el último desafío del bloque es el 101. “Libros y cajas” p. 320, consta de una consigna que los alumnos deberán resolver en parejas.

➤ El empleado de una librería tiene que empacar 368 libros del mismo tamaño. Si en una caja caben 24 libros:

- a) ¿Cuántas cajas se requieren para empacar todos los libros?
- b) ¿Cuántos libros más se podrán empaquetar de tal manera que todas las cajas queden completamente llenas?
- c) ¿Se podrán empaquetar libros de manera que en todas las cajas haya la misma cantidad? ¿Por qué?

d) Si entre los libros hay 6 de matemáticas ¿podría ocuparse una de las cajas solamente con estos libros? ¿Por qué?

Al igual que en el desafío anterior, en este desafío se espera que los alumnos tomen en cuenta el residuo como la cantidad inicial para integrar otro grupo, se trata de un problema de reparto equitativo.

Por ultimo en la siguiente tabla se presenta la clasificación de los desafíos del grado y la cantidad de estos durante los bloques, se puede advertir de que clasificación y cuantos desafíos se trabajan en cuarto grado.

Tabla 13. Secuencia de los problemas multiplicativos de cuarto grado

Problemas aditivos y multiplicativos						
Clasificación	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Total de desafíos
Problemas de isomorfismo de medidas Vergnaud (1985)	Desafío 12		Desafío 47 Desafío 53 Desafío 58 Desafío 59			5
Problemas de producto de medidas Vergnaud (1985)	Desafío 14		Desafío 74			2
Problemas de producto cartesiano Greer (1992)	Desafío 13					1
Problemas de reparto equitativo (1999)					Desafío 100 Desafío 101	2
Problemas con números (multiplicación y división)	Desafío 1		Desafío 46 Desafío 48 Desafío 54 Desafío 55 Desafío 56 Desafío 57 Desafío 60	Desafío 75 Desafío 76 Desafío 77 Desafío 78		12
Total de desafíos	4	0	12	4	2	22

2.4.4 Libro de texto *Desafíos Matemáticos* de quinto grado

El libro de texto *Desafíos Matemáticos* de quinto grado cuenta con un total de 98 desafíos, son 23 en los que se aborda el tema de la multiplicación.

Al igual que los contenidos de los libros de texto anteriores se presentará y analizará por bloque cada uno de los desafíos con respecto al tema de la multiplicación, es importante aclarar que a diferencia de los libros anteriores en este 9 de los 23 desafíos considerados necesarios para la enseñanza de la multiplicación pertenecen al tema de proporcionalidad y funciones del eje temático de manejo de la información (esto se señalará en cada desafío)

El bloque I del libro de texto *Desafíos matemáticos* de quinto grado está compuesto por 19 desafíos de los cuales en 7 aborda el tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan en segmentos de manera consecutiva en el bloque.

Tabla 14.1 Tratamiento de la multiplicación en el libro de quinto grado bloque I

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
3. ¿Cuántas cifras tiene el resultado?	Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales.	Que el alumno determine el número de cifras del cociente de números naturales y que estimen su valor sin utilizar el algoritmo convencional
4. Anticipo el resultado	Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales.	Que los alumnos seleccionen el resultado exacto de divisiones de números naturales, haciendo uso de diversos procedimientos, sin utilizar el algoritmo
5. Bolsitas de chocolate	Conocimiento y uso de las relaciones entre los elementos de la división de números naturales.	Que los alumnos, a partir de la resolución de problemas, adviertan que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, y que el residuo debe ser menor que el divisor
6. Salón de fiestas	Conocimiento y uso de las relaciones entre los elementos de la división de números naturales.	Que los alumnos utilicen la relación “el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, y este es menor que el divisor” en la

		resolución de problemas
17. Botones y camisas	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)	Que los alumnos usen el valor unitario al resolver problemas de valor faltante
18. La fonda de la tía chela	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)	Que los alumnos usen factores internos, es decir, dobles, triples, etc., al resolver problemas de valor faltante
19. ¿Qué pesa más?	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)	Que los alumnos usen el valor unitario explícito o implícito al resolver problemas de valor faltante

El primer segmento es de cuatro desafíos estos pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico.

El siguiente segmento de tres desafíos pertenece al tema de proporcionalidad y funciones dentro del eje temático de manejo de la información.

El primer desafío es el número 3. “¿Cuántas cifras tiene el resultado?”p. 13, consta de una consigna y deberán resolver en parejas.

- Se le presentan al alumno dos tablas y se le pide que estime los resultados de una serie de divisiones.

División	Número de cifras del resultado
$837 \div 93 =$	
$10\ 500 \div 250 =$	
$17\ 625 \div 75 =$	
$328\ 320 \div 380 =$	
$8\ 599\ 400 \div 950 =$	

En la primera tabla se pide a los alumnos estimen el número de cifras que tendrá el resultado de la división, sin realizar la operación, de igual forma se le pide que argumente su respuesta.

Con este ejercicio se espera que los alumnos utilicen la multiplicación como herramienta para poder detectar cuántas cifras debe tener el cociente de la división, por ejemplo el alumno puede utilizar las potencias de 10 para detectar el número de cifras.

En la división

$$10\ 500 \div 250 =$$

Se puede multiplicar

$$250 \times 10 = 2\ 500 \text{ y } 250 \times 1000 = 250\ 000$$

En los resultados se puede ver que el cociente debe tener dos cifras ya que al multiplicar por 100 se pasa el resultado a la cantidad determinada por el cociente.

El siguiente desafío es el número 4. “Anticipo el resultado”p. 14, de una consigna y deberán resolver en parejas, al igual que en el desafío anterior se le presentan al alumno tablas.

- Son seis tablas donde se muestra una división con cuatro posibles resultados y se pide al alumno coloque una paloma en el resultado que considere exacto sin realizar la división, y posteriormente argumente lo que hizo o porque fue elegido ese resultado.

$5\ 750 \div 125 =$	a) 45	
	b) 46	
	c) 47	
	d) 50	

$12\ 462 \div 93 =$	a) 84	
	b) 125	
	c) 134	
	d) 154	

$12\ 420 \div 540 =$	a) 7	
	b) 19	
	c) 23	
	d) 30	

Con este tipo de actividades se espera que los alumnos utilicen diversos procedimientos como los trabajados anteriormente en los desafíos (descomponer el divisor), las propiedades de la división en relación con la multiplicación y las características de los números los múltiplos.

Para encontrar el resultado exacto se espera que los alumnos en un primer momento utilicen como estrategia descartar opciones ya que con el conocimiento previo de los desafíos el alumno puede detectar de cuantas cifras será el resultado de la división sin realizarla y así descartar las respuestas que no tengan dicha cantidad de cifras.

Finalmente se espera que con sumas, multiplicaciones y restas los alumnos empiecen a crear sus procesos de resolución de una división, es importante aclarar que no se limita al uso de las operaciones básicas de ser necesario el alumno puede realizar apoyo grafico para el entendimiento de la operación, sin embargo para esto último se requiere mucho tiempo y esfuerzo ya que las cantidades de estas operaciones son mayores a dos cifras y menores a seis cifras en el dividendo.

El siguiente desafío de este segmento es el número 5. “Bolsitas de chocolate”p. 16, el cual consta de dos consignas y deberán resolver en parejas.

- En la primera consigna consiste en llenar una tabla con la ayuda de la información que se nos da en un problema.

En una tienda de repostería se fabrican chocolates rellenos de nuez. Para su venta, la empleada los coloca en bolsitas, 6 chocolates en cada una. La empleada anota todos los días cuantos chocolates se hicieron, cuantas bolsitas se armaron y cuantos chocolates sobraron.²

²Problema tomado y ajustado de enseñar matemáticas a los más chicos, autores: Cecilia parra e Irma Saiz. Homo sapiens ediciones

Cantidad de chocolates elaborados	Cantidad de bolsitas	Cantidad de chocolates que sobran
25		
18		
28		
30		

Los alumnos deben llenar la tabla entendiendo que si las bolsitas siempre tienen 6 chocolates entonces el divisor no cambia y permite ir deduciendo las respuestas de cuantas bolsas se elaboran. Cuando el alumno completa la tabla se espera detecte que cuando se llega a 30 chocolates se llenan cinco bolsitas sin sobrantes, lo cual le dará la pauta para resolver las siguientes cuatro filas ya que se seguirán armando cinco bolsitas tomando en cuenta que el número de chocolates sobrantes varía de una a otra.

- La segunda consigna consiste en resolver una serie de problemas apoyándose en la tabla de la consigna anterior. ¿es posible usar los datos de la tabla anterior para encontrar la cantidad de bolsitas y cantidad de chocolates que sobraron sin realizar cálculos? Si ¿Cómo? No ¿Por qué?

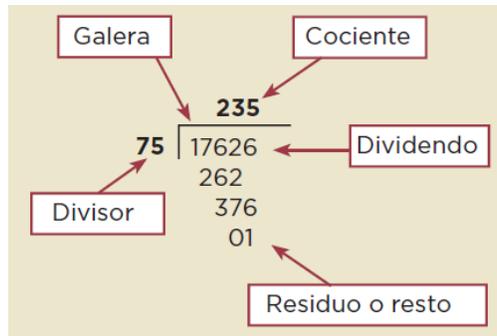
Situaciones como las planteadas en este desafío permiten a los alumnos reconocer que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo. También que este último siempre debe ser menor que el divisor.

En las consideraciones previas de este desafío se le presenta al docente el concepto y definición de la multiplicación y sus componentes.

En las matemáticas una división es una operación aritmética de descomposición que consiste en averiguar cuantas veces un número (divisor) está contenido en otro número (dividendo)

El resultado de la división es denominado cociente, de manera general se puede decir que la división es la operación inversa de la multiplicación.³

³ Definición tomada del libro de texto desafíos matemáticos del docente de quinto grado de educación primaria 2011 p. 22



- Dividendo es el número que se va a dividir
- Divisor es el número que divide
- Cociente es el resultado de la división
- Residuo o resto es lo que ha quedado del dividendo, que no se ha podido dividir porque es más pequeño que el divisor.

Por lo tanto, sus términos cumplen esta relación:

$$\text{Dividendo} = \text{divisor} \times \text{cociente} + \text{residuo o resto}$$

El último desafío de este segmento es el número 6. “Salón de fiestas”p. 18, consta de una consigna la cual deberán resolver en parejas.

- Se le pide al alumno resuelva el siguiente problema con las herramientas que considere necesarias

En un salón de fiestas se preparan mesas para 12 comensales cada una.⁴

- a) Si van a concurrir 146 comensales ¿Cuántas mesas deberán prepararse?
- b) ¿Cuántos invitados más podrán llegar como máximo si se requiere que se dispongan todos los lugares de cada mesa?

En este desafío se espera que los alumnos empiecen a utilizar la división como herramienta para resolver un problema de reparto, si bien las preguntas anteriores hacen que el alumno realice modificaciones dependiendo las situaciones, es

⁴Problema tomado y ajustado de enseñar matemáticas a los más chicos, autores: Cecilia parra e Irma Saiz. Homo sapiens ediciones

necesario tener en cuenta cual es el resultado pedido, el residuo o el cociente de la división.

El desafío anterior es el último del segmento del tema de problemas multiplicativos del eje de Sentido numérico y pensamiento algebraico, dentro de este bloque después de diez desafíos se presentan nuevamente desafíos para la enseñanza de la multiplicación pertenecientes al tema de probabilidad y funciones del eje temático de manejo de la información.

El primer desafío de este segmento es el número 17. “Botones y camisas”p. 45, consta de una consigna la cual deberán resolver parejas.

- El primer ejercicio es un problema en el que tienen que llenar una tabla ayudándose de la información proporcionada en el problema.

Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesitan 15 botones. Ayúdenle a Luisa a encontrar las cantidades que faltan.

Camisas de adultos					
Cantidades de camisas	1	6	14	75	160
Cantidades de botones	15				

Después de responder en la tabla se le pide al alumno que resuelva las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas?
- ¿Cómo lo supieron?

El siguiente ejercicio es igual, con la información que le presenta al alumno en el primer ejercicio debe llenar una tabla pero ahora con cantidades más grandes (de una a cuatro cifras). Esta clase de problemas son de tipo multiplicativo y se encuentra en una categoría llamada “problemas de proporción de valor faltante” esta es una de las clasificaciones que corresponde a Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Epsón (1999) en estos se conocen tres datos y se busca un cuarto, estos datos corresponden a dos conjuntos de cantidades que guardan una relación de

proporcionalidad. Estos problemas se pueden resolver igual que los problemas de agrupamiento o partición.

El segundo desafío de este segmento es el numero 18. “La fonda de la tía Chela”p. 47, consta de una consigna en la cual deberán resolver unos ejercicios en parejas.

- En este ejercicio se les presenta a un problema con una serie de datos con los cuales deberán completar unas notas de pago.

La fonda de mi tía Chela es famosa por sus ricos tacos de cochinita pibil, la orden de tres tacos cuesta \$25.00.

Posteriormente se le presentan notas al alumno con la siguiente información.

Mesa 1
Consumo: 12 tacos
Total a pagar: _____

Mesa 2
Consumo: _____ tacos
Total a pagar: \$75.00

Es necesario observar cómo se enfrentan los alumnos a esta clase de problemas ya que la primera dificultad que se les puede presentar es confundir el número de órdenes de tacos con el total de tacos consumidos, es decir en la mesa 1 se consumieron 4 órdenes de tacos.

Para poder conocer el precio pagado por los 12 tacos los alumnos deben identificar la relación entre los 12 tacos que se consumieron y los tres tacos por orden por lo que la proporción sería 4 ordenes por 25 cada orden para el costo de 12 tacos.

En la mesa 2 es necesario saber cuántos tacos se consumieron con \$75.00, la finalidad de este ejercicio es que los alumnos establezcan la relación proporcional de que 75 es el triple de 25.

De acuerdo con Fernández (2001) una relación de proporcionalidad directa entre variables, es aquella en la cual el cociente entre las cantidades que se corresponden es siempre el mismo.

Finalmente en este bloque y segmento se encuentra el desafío número 19. “¿Qué pesa más?” p. 48, consta de una consigna y deberá resolverse en parejas.

- El primer ejercicio de esta consigna es el llenado de una tabla con base en un problema planteado al alumno.

El dueño de la tienda de abarrotes del pueblo está haciendo una tabla para saber rápidamente el peso de uno o varios costales que contienen azúcar, trigo o maíz palomero. Ayúdenle a completarla y después contesten la pregunta.

Cantidad de costales	Cantidad de kilogramos de...		
	Azúcar	Trigo	Maíz palomero
1	21		
	63		78
5		170	

El reto de este problema es de mayor complejidad a los dos anteriores. La primera dificultad se presenta a los alumnos es que en la tabla se concentran tres relaciones de proporcionalidad distintas cada uno de los productos tiene su valor unitario establecido diferente a los demás, por otra parte la información dada en la tabla es poca lo cual generara mayor dificultad en los alumno al momento de llenar la tabla.

Es necesario que para los tres desafíos de este segmento de proporcionalidad los alumnos ya sepan cómo funciona una multiplicación y una división, por ser operaciones básicas necesarias para la resolución de la proporcionalidad.

Es importante aclarar que existen dos tipos de proporcionalidad, una inversa y otra directa, aunque, ambas sirven para resolver aquellos problemas donde se conoce una razón (el valor que aumenta o disminuye), dos magnitudes serán directamente proporcionales si al producirse el aumento de una de ellas, en el doble, triple o cuádruple, las cantidades que corresponden a la otra también aumenta en las mismas cantidades, el doble, el triple y cuádruple.

Es importante revisar el procedimiento que emplean los alumnos para la resolución de esta clase de problemas ya que las cantidades utilizadas van creciendo y por lo tanto son más difíciles de manejar.

El bloque II del libro de texto *Desafíos matemáticos* de quinto grado está compuesto por 16 desafíos de los cuales en 5 corresponden al tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan en segmentos de manera consecutiva en el bloque.

Tabla 14.2 Tratamiento de la multiplicación en el libro de quinto grado bloque II

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
24. En partes iguales	Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Que los alumnos resuelvan, con procedimientos propios, problemas de divisiones con cociente decimal en contextos de dinero o medición
25. Repartir lo que sobra	Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Que los alumnos analicen los pasos que se siguen al utilizar el algoritmo usual de la división
33. El ahorro	Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos	Que los alumnos apliquen un factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) para obtener valores faltantes en una relación de proporcionalidad con magnitudes de la misma naturaleza
34. Factor constante	Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos	Que los alumnos identifiquen y apliquen el factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) para obtener valores faltantes
35. Tablas de proporcionalidad	Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos	Que los alumnos identifiquen el factor constante de proporcionalidad (entero y pequeño) en una tabla de dos conjuntos de valores que son proporcionales

El primer segmento es de dos desafíos estos pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico.

El siguiente segmento de tres desafíos que pertenecen al tema de proporcionalidad y funciones del eje temático de manejo de la información.

En el primer segmento se presenta el desafío número 24. “En partes iguales”p. 58, es el primero de este bloque enfocado al tema de problemas multiplicativos, este desafío consta de una consigna y deberán resolver en parejas.

- El ejercicio a resolver en consta de seis problemas multiplicativos se pide al alumno realizar divisiones donde el cociente es un numero decimal.

Considero importante aclarar en este desafío que en ningún desafío anterior se ha trabajado con problemas multiplicativos y números decimales en operaciones de multiplicación y división, por lo que este desafío puede ser de dificultad para los alumnos al no entender cómo funcionan dichas operaciones con decimales o cómo funcionan los decimales en sí mismos.

Problemas

1. Raúl, Manuel, Andrés y Mario quieren comprar un balón con valor de \$150 ¿Cuánto le tocara poner a cada uno si se dividen en costo en partes iguales?

Con esta clase de problemas se espera que los alumnos antes de utilizar la operación convencional de la división recurran a diversos procedimientos para la resolución como la repartición.

Dentro de las consideraciones previas explicitas en el libro de texto del docente se muestra un ejemplo de cómo funciona la operación de la división con un cociente decimal, pero no existe ninguna sugerencia de ayuda para el docente al abordar el tema. Las divisiones a realizar en este desafío constan de un divisor de una cifra y un dividendo de máximo tres cifras.

El siguiente desafío es el números 25. “Repartir lo que sobra” p. 60, que pertenece al tema de problemas multiplicativos este consta de una consigna y se deberá resolver en parejas.

- Los ejercicios de esta consigna son dos problemas se pide a los alumnos resuelvan utilizando la operación convencional de la división.

Problema:

1. Un grupo de campesinos tiene un terreno de 3278 m² donde se van a sembrar, en partes iguales cinco tipos de granos diferentes ¿Qué cantidad corresponde a cada tipo de grano?
2. La siguiente tabla muestra los productos que cosecharon 16 familias de ejidatarios. Complétenla considerando que se van a repartir los productos cosechados por partes iguales y sin que sobre nada

Producto	Kilogramos cosechados	Kilogramos por familia
Frijol	2 100 kg	
Arroz	2 800 kg	
Azúcar	2 012 kg	

Con este desafío los alumnos empiezan a conocer un método más eficiente para resolver problemas de partición como lo habíamos visto en desafíos anteriores puedan ser resueltos con la operación de división.

Este desafío trabaja con cocientes decimales, pero a diferencia del anterior no solo son pesos lo que se debe dividir, en estos tendrán la resolución de la división no termina hasta que el residuo quede en cero, por lo tanto es seguro que el cociente tendrá un punto decimal.

Se propone al docente dentro en las consideraciones previas revise con cuidado cada procedimiento que el alumno realiza, al ser probable que no pueda llegar a la solución decimal así, se presentan tres preguntas (¿qué hacer con el residuo? ¿qué se puede seguir dividiendo? ¿qué se puede hacer para seguir dividiendo?) esta manera guíe al alumno en el correcto procedimiento de resolución.

Finalmente en ese desafío de acuerdo con el libro de texto y las consideraciones previas se debe introducir a un algoritmo convencional de la división.

El segundo segmento inicia con el desafío numero 33. “El ahorro”p. 73, esta compuesto por una consigna y deberan resolver en equipos.

- Los ejercicios de esta constan del llenado de una tabla con la información dada en el problema y de cinco preguntas relacionadas con la tabla y el problema.

Problema

El señor Laurentino quiere fomentar en su hijo Diego el habito del ahorro, para ello propuso que cada semana el donara el doble de la cantidad de dinero que pueda guardar. En la siguiente tabla aparecen varias cantidades ahorradas por Diego, calculen las donaciones de su padre y completen.

Ahorros semanales de Diego (\$)	Donaciones semanales de su padre (\$)
11	
18	
9	
24	

- ¿Qué relacion hay entre el dinero que aporta el señor Laurentino y el dinero que ahorra su hijo?
- ¿Qué operación realizaron para encontrar los valores de la segunda columna?

Este desafío ejemplifica situaciones donde el valor o cantidad de una magnitud depende del valor de otra. El factor constante de proporcionalidad puede utilizarse para expresar las relaciones entre las magnitudes.

Para que los alumnos puedan encontrar las cantidades correctas para llenar la tabla es necesario identifiquen el factor constante de proporcionalidad planteada de la siguiente manera: “*el doble de la cantidad*”

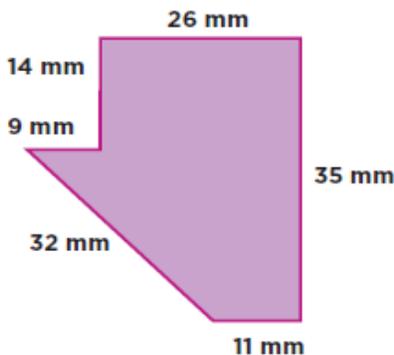
Para dar solución es posible que el alumno no utilice multiplicaciones o divisiones, sino sumas y restas. Pero como se mencionó anteriormente la importancia del

desafío no es la resolución en sí, sino que el alumno entienda la relación proporcional solicitada.

El siguiente desafío es el número 34. “Factor constante”p. 75, este desafío esta conformado por una consigna y debera resolverse en equipos.

- El ejercicio de esta consigna consta de un problema de proporcionalidad y dos preguntas relacionadas a este.

Se requiere reproducir a escala el siguiente dibujo, de tal manera que el lado que mida 11 mm en el dibujo original mida 44mm en la copia. Encuentren las medidas de los demás lados de la copia.



- ¿Qué relación existe entre las medidas de la copia y las de la figura original?
- ¿Qué operación realizaron para encontrar las medidas de los lados de la copia?

Los alumnos deben inferir la medida del segmento es igual a 11mm en la copia debe medir 44 mm entonces esto quiere decir, debe multiplicar por 4. Por lo tanto y como se vio en el desafío anterior el factor constante es cuatro y cada lado de la figura original deberá multiplicarse por este.

Aun así los alumnos podran seguir utilizando la suma iterada como metodo de resolucio, pero a diferencia del desafío anterior en este sera necesario que el docente guie al alumno de manera que llegue a determinar el valor faltante y el por qué de la respuesta.

Como parte de las consideraciones previas en el libro del docente se propone motive a los alumnos a realizar una tabla con las medidas igual al desafío anterior y esta le ayude a encontrar el factor constante entre las medidas.

Finalmente en el segmento y en el bloque II se presenta el desafío 35. “Tablas de proporcionalidad”p. 76, consta de una consigna y se debera resolver de manera individual.

- El ejercicio de esta consigna consiste en que el alumno relacione entre varios valores dos columnas en cada tabla. Determina en cada caso cual es el numero que debes multiplicar por los valores de la columna de la izquierda para obtener los valores de la columna de la derecha. Escríbelo debajo de cada tabla.

Tabla 1	
6	30
9	45
2	10
10	50
12	60

Tabla 2	
17	136
15	120
5	40
12	96
9	72

Tabla 3	
7	84
15	180
8	96
3	36
11	132

Al enfrentarse a esta consigna se espera que los alumnos ya no tengan dificultad al encontrar el factor constante de proporcionalidad ya que algunos de los valores se pueden calcular mentalmente como es el caso de las tablas 1 y 2, pero en el caso de la tabla 3 existe un grado de dificultad mayor ya que el valor a encontrar es de dos dígitos y no puede calcularse únicamente con las tablas de multiplicar.

El factor constante es en sí una relación de proporcionalidad directa que consiste en que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción.

El bloque III del libro de texto *Desafíos matemáticos de 2013* de quinto grado está compuesto por 22 desafíos de los cuales en 6 son del tema de problemas multiplicativos.

Tabla 14.3 Tratamiento de la multiplicación en el libro de quinto grado bloque III

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
40. Los botones	Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.	Que los alumnos adviertan que en una división el residuo (r) es igual al dividendo (D) menos el producto del divisor (d) por el cociente (c) : $r = D - (d \times c)$,
41. Con la calculadora	Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.	Que los alumnos determinen como obtener el residuo entero a partir de una división resuelta con calculadora
42. Con lo que queda	Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.	Que los alumnos apliquen las relaciones entre los términos de la división al proponer divisiones que cumplan con las condiciones de un residuo predeterminado
55. Un valor intermedio	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante)	Que los alumnos resuelvan problemas de valor faltante utilizando dobles, triples etc., un valor intermedio o la suma de parejas de valores correspondientes ante la ausencia del valor unitario
56. Ahorro compartido	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante)	Que los alumnos usen reglas sucesivas de correspondencia del tipo “por cada n, m”, al resolver problemas de proporcionalidad en los que no se da un valor unitario
57. Más problemas	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante)	Que los alumnos ejerciten la resolución de problemas en los que se requiere calcular un valor intermedio (en particular, el valor unitario) y otras combinaciones (dobles, triples, sumar término a término)

El cuadro anterior muestra los desafíos se presentados de manera consecutiva en el bloque y dentro de segmentos de acuerdo al tema al que pertenecen.

El primer segmento es de tres desafíos, estos pertenecen al tema de problemas multiplicativos del eje temático de Sentido numérico y pensamiento algebraico.

El siguiente segmento de tres desafíos pertenecientes al tema de Proporcionalidad y funciones del eje temático de manejo de la información.

El desafío inicial del primer segmento es el número 40. “Los botones”p. 83, consta de una consigna y deberán resolver en parejas.

- Consigna: Por las tardes, Sonia le ayuda a su mamá a empacar botones en bolsitas. Para ello, todos los días anota cuantas bolsitas de ocho piezas puede armar.

1. Completen la tabla de Sonia

Cantidad de botones	Cantidad de bolsitas	Cantidad de botones que sobran
39	4	
84	10	
125	15	
222	27	
364	45	
387	48	
450	56	

2. Escriban como determinaron la cantidad de botones que sobran en cada caso.

El fin de ese desafío es que los alumnos identifiquen la relación del residuo con los demás elementos de la división, es decir, si los alumnos conocen el cociente, el dividendo y el divisor pueden encontrar el residuo restando al dividendo el producto del divisor y el cociente.

Es necesario aclarar como lo hemos visto en desafíos anteriores para tener una división resuelta de manera correcta es necesario obtener dos resultados el cociente y el residuo solo así la división estará resuelta completamente.

El siguiente desafío es el numero 41. “Con la calculadora”p. 84, este consta de una consigna que deberán resolver en parejas.

- El ejercicio de esta consigna consiste en que de acuerdo a la información presentada ellos completen una tabla.

En una panadería se empaqueta pan en recipientes de 24 piezas. La persona responsable de llevar el control debe registrar la cantidad de piezas producidas, la cantidad de recipientes que se obtienen y el número de piezas sobrantes.

Completan la siguiente tabla usando la calculadora

Piezas de pan producidas	Numero en la pantalla de la calculadora	Recipientes que se obtienen	Piezas de pan que sobran
246	10.25	10	6
276	11.5		
282	11.75		
291		12	
309			
315			

Esta actividad tiene como dificultad principal que los alumnos utilicen la calculadora de manera correcta, posteriormente cuando los alumnos hagan la división obtendrán un cociente decimal y de este tendrán que identificar el proceso para obtener el residuo de estas.

El último desafío de este primer segmento del bloque III es el número 42. “Con lo que queda”p. 85, consta de una consigna y deberán resolver en parejas.

- En este ejercicio se presenta a alumno la siguiente afirmación y deberá contestar lo que se le pide.

Inventen tres divisiones las cuales puedan ser resueltas mentalmente y cuyo residuo sea 300

- ¿se pueden escribir más divisiones con estas condiciones? ¿Cuáles?
- ¿Cuántas divisiones se pueden escribir? ¿Por qué?

Para podrá resolver esta clase de problemas los alumnos deberán poner en práctica el conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes términos de la división que adquirieron en los desafíos anteriores.

Todas las opciones que los alumnos puedan encontrar deben al menos cumplir con estos criterios: que el residuo debe ser menor a él divisor, el residuo debe ser 300 y que la división puede ser resuelta.

El primer desafío del segundo segmento de este bloque es el número 55. “Un valor intermedio”p. 106, consta de una consigna y deberán resolver en equipos.

- El ejercicio de esta consigna consta de cuatro problemas de valor faltante.

Problemas

1. Si por 4 lápices se pagaron \$12, ¿Cuánto habrá que pagar por 6?
2. Si 4 bolígrafos cuestan \$36, ¿Cuánto se tendrá que pagar por 16 bolígrafos?
3. Si 3 paquetes de galletas cuestan \$25, ¿Cuánto costaran 6 paquetes?
¿Y cuántos 9 paquetes?
4. Si por 3 chocolates se pagan \$5, ¿Cuántos chocolates se pueden comprar con \$15?
¿Cuánto se tendría que pagar por 12 chocolates?
¿Y cuánto por 18 chocolates?

Los cuatro problemas de este desafío son problemas de proporcionalidad donde no se da un valor unitario pero si se lee detenidamente se puede detectar que los precios los dobles, triples, etc. Los alumnos antes de trabajar con un valor intermedio que es el dado, trataran de sacar el valor unitario, sin embargo en el libro de texto del docente se sugiere motive a los alumnos a encontrar una estrategia que pueda utilizar con estos valores dados (en el libro se sugiere como estrategia que se realicen tablas para obtener toda la información que requiera).

El siguiente desafío es el número 56. “Ahorro compartido”p. 107, consta de una consigna y deberán resolver en parejas.

- Los ejercicios de este desafío consisten en dos problemas donde se espera los alumnos puedan identificar una relación de “por cada n, m”
1. Miguel trabaja en Estados Unidos. Por cada 10 dólares que gana envía 6 a su familia, que vive en el Estado de Guerrero. La semana pasada gano 300 dólares ¿Cuánto enviara a su familia?

2. Luisa trabaja en monterrey. De cada \$5 que gana ahorra \$3, y de cada \$12 que ahorra manda \$7 a su mamá que vive en Oaxaca. La semana pasada ganó \$1000 ¿Cuánto le enviará a su mamá?

En estos problemas se presentan reglas de correspondencia es decir, en el primer problema se enviaran 6 dolares por cada 10, una manera de solucionar este problema es duplicando la cantidad, es decir utilizando un valor constante de proporcionalidad directa como lo vieron en el desafío anterior:

Las cantidades utilizadas en los dos problemas de este desafío con un máximo de tres cifras, y la mayoría de estos son múltiplos de 10.

Finalmente en este segmento y bloque III se presenta el desafío número 57. “Más problemas”p.108, el cual consta de una consigna y se deberá resolver de manera individual.

- En esta consigna son 9 problemas que deberán resolver, se presentan de tal manera que los alumnos deberán dar solución al primer problema para pasar al segundo y así sucesivamente.
1. Si un kilogramo de plátano cuesta \$8.50, ¿Cuánto hay que pagar por cinco kilogramos?

En el problema se da un valor unitario, entonces se espera que el alumno lo resuelva con una multiplicación o en un caso más básico con sumas iteradas.

2. Si por siete refrescos iguales se paga \$63, ¿Cuál es el precio de cada uno?

Este problema es multiplicativo, aquí se le pide al alumno el valor unitario, entonces no queda más que realizar una división, este problema también puede ser solucionado por repartición.

3. Completa la siguiente tabla

Cajas	Libros
3	24
6	
	72
12	

En esta tabla no se da un valor unitario y a diferencia a los dos problemas anteriores se debe encontrar más de un valor faltante, este es un problema de proporcionalidad para la solución es necesario duplicar o triplicar el valor.

4. Si por tres kilogramos de manzanas se paga \$20, ¿Cuánto hay que pagar por 15 kilogramos?

¿Cuántos kilogramos pueden comprarse con \$120?

Este problema es como el anterior solo que la presentación ahora es de un problema verbal y no una tabla la relación proporcional entre los valores se debe encontrar de acuerdo con los múltiplos de cada uno de estos.

5. Si con tres refrescos familiares se llenan nueve vasos, ¿Cuántos vasos se llenan con cinco refrescos familiares?

En este problema no se da un valor unitario, sin embargo una forma de encontrar la respuesta es encontrar el valor unitario y posteriormente llegar con la multiplicación al valor faltante.

6. Completa la siguiente tabla

Cajas	Libros
1	
6	150
	1125

Análogo al problema anterior pero ahora se presenta como un llenado de tabla, donde el alumno deberá encontrar primero el valor unitario y posteriormente el valor faltante con las operaciones trabajadas a lo largo del libro de texto.

7. Por 16 cuadernos se pagaron \$100 ¿Cuánto habría que pagar por 20 cuadernos?

En este problema el valor unitario es decimal, es decir, el cociente de la división es un decimal por lo que si el alumno no domina los decimales deberá encontrar otra solución a este problema, la cual puede ser como se había visto en desafíos anteriores los dobles, triples, cuádruples o quíntuples.

8. En una escuela primaria de cada cinco estudiantes, tres son mujeres y de cada 15 mujeres dos son de cuarto grado. Si la escuela cuenta con 600 estudiantes, ¿Cuántas mujeres son de cuarto grado?

En este problema a cada valor inicial le corresponden varios valores del conjunto final, para la resolución de este problema será necesario obtengan el valor unitario y el valor faltante considerando a todos como parte de un conjunto.

9. Completa la siguiente tabla

Cajas	Juguetes		
	Dados	Pelotas	Muñecas
1	12		
3		9	15
	120	30	

En este problema hay dos reglas de correspondencia, es necesario que los alumnos establezcan la relación de proporcionalidad de cada una, mediante valores faltantes y valores unitarios.

Este desafío es el último repaso de todo visto en los primeros tres bloques del libro de texto, los nueve problemas son variaciones de situaciones revisadas con anterioridad.

Los números máximos de este desafío son de tres cifras, existe solo en un problema con el uso de decimales.

El bloque IV del libro de texto *Desafíos matemáticos* de quinto grado está compuesto por 20 desafíos de los cuales en 2son del tema de problemas multiplicativos.

Tabla 14.4 Tratamiento de la multiplicación en el libro de quinto grado bloque IV

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
65. Adivinanzas	Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas	Que los alumnos adviertan que si a un número se le suma, resta, multiplica o divide otro número, y al resultado se le aplica la operación inversa con el mismo número, se obtiene el número original
66. Corrección de errores	Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen aplicar las propiedades de la multiplicación y la división

En el cuadro anterior se presentan los desafíos de manera consecutiva en el bloque y dentro de segmentos.

El primer desafío de este bloque es el número 65. “Adivinanzas”p. 120, el cuál consta de una consigna que deben resolver en parejas.

- En los ejercicios se pide que analicen los casos presentados y posteriormente contesten unas preguntas.



<p>Caso B:</p> <p>José: piensa un número. Divídelo entre 2. Al residuo réstale 4. ¿Qué número obtuviste?</p> <p>Carla: 11</p> <p>José: el número que pensaste es el 30</p> <p>Carla: correcto</p>	<p>Caso A:</p> <p>Carla: piensa un número, pero no me lo digas. Multiplícalo por 2. Al residuo súmale 5 ¿Qué número obtuviste?</p> <p>José: 29</p> <p>Carla: el número en el que pensaste es el 12</p> <p>José: correcto</p>
---	--

- a) ¿Cuál fue el truco que siguió Carla para adivinar el número de José?
- b) El truco de Carla ¿fue el mismo que utilizó José?

Se espera que los alumnos analicen como cada niño logro saber el número elegido por el otro, con la finalidad de reconocer propiedades y regularidades de las operaciones (división y multiplicación)

Este ejercicio sirve a los alumnos para advertir que para conocer el número inicial es necesario aplicar la operación inversa a la pedida. En el primer caso se incluye un proceso multiplicativo y un proceso aditivo, entonces el número inicial se consigue al restar y dividir respectivamente.

El segundo y ultimo desafio de este bloque es el número 66. “Correccion de errores”p. 123, consta de dos consignas.

- La primer consigna debera resolverse en parejas, esta esta conformada por cinco problemas.
 1. En una calculadora se tecleo 35×100 , pero se cometio un error ya que se queria ultiplicar por 50. ¿Cómo corregir sin borrar lo que ya esta?
 2. En otra calculadora se tecleo 325×500 , pero se queria multiplicar por 125, ¿Cómo corregirlo sin borrar?
 3. En otra se tecleo 35×600 , pero se queria multiplicar por 30. ¿Cómo corregirlo esta vez?

En esta primra consigna se espera que los alunos identifiquen en los primeros tres problemas que el factor y el producto varian proporcionalmente, es decir, se trata de una proporción directa como se explico en desafios anteriores si uno aumenta el triple el otro tambien lo hará.

Entonces para llegar a una solución los alumnos deberan descubrir que se trata de triples, dobles y cuádruples, pero en un sentido diferente deben encontrar la cuarta parte o tercera parte de un todo, sin embargo esto no lo han trabajado en ningun desafio.

- La segunda consigan debera resolverse en parejas y esta consta de realizar un ejercicio similar a los dos problemas anteriores.

En este ejercicio se espera que los alumnos con el conocimiento adquirido en el ejercicio anterior puedan estimar las relaciones proporcionales en las operaciones ahora ya sin realizar la operación.

El bloque V del libro *Desafíos matemáticos* de quinto grado está compuesto por 21 desafíos de los cuales en 3 se refieren al tema de problemas multiplicativos.

Tabla 14.5 Tratamiento de la multiplicación en el libro de quinto grado bloque V

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de primaria de 2011	Intención didáctica
84. La papelería	Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen multiplicar números decimales por un número natural, utilizando procedimientos personales
85. ¿Qué hago con el punto?	Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	Que los alumnos relacionen la suma iterada de números decimales con la multiplicación y que encuentren un procedimiento para hallar el resultado
86. La excursión	Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen multiplicar números decimales por un número natural, utilizando el algoritmo convencional

En el cuadro anterior los desafíos se presentan de manera consecutiva en el bloque, estos pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico.

El primer desafío que se presenta en este último bloque del libro de quinto grado es el número 84. “La papelería”p. 167, consta de una consigna y deberán resolverla en equipos, se compone por tres problemas donde se pide multiplicar números naturales por números decimales.

- Primero se plantea una situación a los alumnos y a partir de esta se abordaran los problemas

Ramiro trabaja en una papelería y debe estar muy atento a lo que debe cobrar, pues si le falta dinero lo pagara con su sueldo.

Copias	
Carta	\$ 0.50
Oficio	\$ 0.75
Engargolado	\$ 13.50
CD	\$4.90

- a) Una persona pidió 8 fotocopias tamaño oficio y 8 CD's ¿Cuánto deberá cobrarle en total?
- b) Otra persona pidió 3 CD's y 5 fotocopias tamaño carta ¿Cuánto le deberá pagar a Ramiro?
- c) Araceli pidió 23 fotocopias tamaño oficio y que se las engargolaran. Pago con un billete de \$ 50.00 ¿Cuánto tendrá que regresarle Ramiro de cambio?

La falta de un acercamiento conceptual a los cálculos con decimales provoca que se genere una serie de ideas o conceptos erróneos acerca de las operaciones con estos números, por ejemplo, generalizar el hecho de que, al efectuar la multiplicación de dos números dados, cualesquiera que estos sean, el número obtenido como producto siempre será mayor que los factores. De igual modo, se cree que, al efectuar una división, el divisor siempre debe ser menor que el dividendo, o que el número obtenido como cociente siempre será menor que el número que se divide (Graeber y Tirosh, 1989; Van Galen y otros, 2008).

Esta clase de problemas a pesar de ser con numero decimales también entran en la clasificación de Vergnaud (1985) y describe como isomorfismo de medidas esta explica que existe una proporción directa entre dos espacios de medida (M1 fotocopias y M2 precios unitarios)

Finalmente las cantidades utilizadas en este desafío son de no mayor a dos cifras, sin importar si son o no números decimales.

El segundo desafío del bloque es el número 85. “¿Qué hago con el punto?”p. 168, está conformado de una consigna compuesta de cuatro problemas y deberán resolverla en equipos.

- En estos problemas se pide se realice una multiplicación entre números naturales y números decimales.
- 1. Una tubería tiene 7 tramos iguales de 0.75 m. ¿Cuál es la longitud de la tubería?
- 2. Esther compro 3 frascos de pegamento de \$ 4.80 cada uno. ¿Cuánto pago en total?
- 3. Sonia compro 5 paquetes de queso panela con un peso de 0.375 kg cada uno y 6 paquetes de jamón con un peso de 0.250 kg cada uno. ¿Cuál es el peso total de los quesos y el jamón?
- 4. José fue a una papelería y saco 10 fotocopias a color tamaño carta, a \$2.75 cada una, y 100 fotocopias a blanco y negro tamaño carta, a \$0.75 cada una. ¿Cuánto pago en total por todas las fotocopias?

Igual a el desafio anterior se puede notar que los numeros decimales a utilizar son numeros relacionados con cantidades de dinero (pesos y centavos) y con el sistema de medicion (metros y gramos). De igual forma los problemas son identificados con la clasificacion realizada por Vergnaud como isomorfismo de medidas.

Finalmente en el bloque V del libro de texto de quinto grado se presenta el último desafío que aborda un el tema de problemas multiplicativos, el número 86. “La excursión”p. 169, consta de una consigna, debiera resolverse en equipos, consiste en resolver dos problemas de acuerdo a la informacion presentada al inicio del desafio.

- El profesor Héctor y y sus alumnos organizaron un excursión a la Ciudad de Mexico. Visitaran el Centro Historico, el castillo de Chapultepec y el museo de Antropologia. El costo del transporte por alumno es de \$310.75.

- a) Para pagar el transporte, el profesor Héctor tienen que juntar el dinero de los 37 alumnos que participaran en la excursión. ¿Cuánto dinero debe juntar?
- b) Para comer, seleccionaron un restaurante que ofrece un paquete de hamburguesa con papas y agua fresca por \$37.50. antes de salir de la ciudad de México, el profesor decidió juntar el dinero de la comidate todo el grupo. ¿Qué cantidad debe reunir?

A diferencia de los desafíos anteriores en las consideraciones previas de este desafío se explica al docente que debe promover el uso del algoritmo convencional de la multiplicación. Es necesario hacer énfasis en la relación que existe entre los decimales de uno de los factores con los que lleva el resultado de la operación por ejemplo, si uno de los factores tiene décimos el resultado debiera tener décimos o en este caso ya que uno de los factores tienen céntesimos el resultado debiera tener céntesimos.

Sin embargo cabe aclarar como lo expresado en el primer desafío de este bloque, no se explica ni al alumno ni al docente la manera en la que los decimales deben ordenarse en una multiplicacion, o cual es el concepto de decimales utilizable en esta clase de problemas.

Los problemas multiplicativos se presentan a lo largo de todo el libro están relacionados con la división, el concepto de partición, y con los problemas de proporcionalidad y se presentan de la siguiente manera:

Tabla 15. Secuencia de los problemas multiplicativos de quinto grado

Problemas aditivos y multiplicativos						
Clasificación	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Total de desafíos
Problemas de isomorfismo de medida Vergnaud (1985)					Desafío 84 (decimales)	1
Problemas de reconocimiento de los componentes de la división y la multiplicación	Desafío 5 Desafío 6		Desafío 40 Desafío 41 Desafío 42			5

Problemas de proporcionalidad directa e inversa valor constante	Desafío 19	Desafío 33 Desafío 34 Desafío 35	Desafío 56			5
Problemas de proporcionalidad de valor faltante	Desafío 17		Desafío 55			2
Problemas de proporcionalidad de valor unitario	Desafío 18					1
Problemas con números (multiplicación y división)	Desafío 3 Desafío 4	Desafío 24 Desafío 25	Desafío 57	Desafío 65 Desafío 66	Desafío 85 Desafío 86 (decimales)	9
Total de desafíos	7	5	6	2	3	23

2.4.5 Libro de texto *Desafíos Matemáticos de sexto grado*

De los 85 desafíos que presenta el libro de texto son 15 en los que de manera convencional o no se trata el tema de la multiplicación.

En la revisión de este libro todos los desafíos se encuentran dentro del tema de problemas multiplicativos.

El bloque I del libro *Desafíos matemáticos* de sexto grado está compuesto por 22 desafíos de los cuales en 3tratan el tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan de manera consecutiva en el bloque y pertenecen al tema de problemas multiplicativos del eje temático de Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 16. 1 Tratamiento de la multiplicación en el libro de sexto grado bloque I

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y Programas de primaria de 2011	Intención didáctica
8. El equipo de caminata	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen la multiplicación entre una fracción o un decimal y un número natural, mediante procedimientos no formales
9. El rancho de don Luis	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen la multiplicación entre dos fracciones mediante

	formales.	procedimientos no formales
10. La mercería	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.	Que los alumnos resuelvan problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales

El primer desafío del libro texto que aborda el tema de la multiplicación es el número 8. “El equipo de caminata”p. 19, consta de una consigna y los alumnos deberán resolver en parejas.

- El equipo de caminata de la escuela recorre un circuito de 4 km.

El maestro registra en una tabla como la de abajo las vueltas y los kilómetros recorridos por cada uno de los integrantes, analícenla y complétenla.

Nombre	Rosa	Juan	Alma	Pedro	Víctor	Silvio	Eric	Irma	Adriana	Luis	María
Vueltas	1	2	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$2\frac{7}{8}$	0.75	1.25	1.3	2.6
Km	4										

Si bien la intención de esta consigna se centra en la multiplicación entre fracciones o decimales y los números naturales se puede ver que al inicio de la tabla hay tres números naturales y cuál es la equivalencia de una vuelta.

Se espera que los alumnos en este momento dominen las multiplicaciones de números naturales por números naturales y las de números naturales por números decimales, sin embargo no se han enfrentado a una multiplicación de un número natural por un número fraccionario.

El alumno puede utilizar diversos procedimientos ya que en libros anteriores ha trabajado con fracciones, por ejemplo, obtener $\frac{1}{4}$ de 4 dividiendo 4 entre 4 y después el resultado se debe multiplicar por 3, por que se trata de tres cuartos.

El siguiente desafío es el número 9. “El rancho de Don Luis”p. 20, está conformado por una consigna y deberán resolverla en parejas

- Consta de de dos problemas, se pide al alumno resolver problemas realizando multiplicaciones con fracciones.
1. En el rancho de don Luis hay un terreno en el que siembra hortalizas que mide $\frac{1}{2}$ hm de ancho por $\frac{2}{3}$ hm de largo. Don Luis necesita saber el área del terreno para comprar las semillas y los fertilizantes necesarios. ¿Cuál es el área?
 2. En otra parte del rancho de Don Luis hay un terreno de $\frac{5}{6}$ hm de largo por $\frac{1}{4}$ hm de ancho donde se cultiva el durazno. ¿Cuál es el area de este terreno?

Es importante aclarar que el estudio formal de la multiplicación con fracciones es en secundaria, en este desafío se espera que los alumnos utilicen procedimientos no formales para resolver esta clase de problemas.

El siguiente desafío de este bloque es el numero 10. “La mercería”p. 21,este consta de una consigna y se deberá resolver en equipos,

- consiste en resolver dos problemas y una pregunta de multiplicaciones con numeros decimales.

Guadalupe fue a una mercería a comprar 15.5 m de encaje blanco que necesitaba para la clase de costura. Si cada metro costaba \$ 5.60 ¿Cuánto pago por todo el encaje que necesitaba?

En este desafío a diferencia de los anteriores se pide que el alumno realice multiplicaciones con dos números decimales, en las concideraciones previas de este se explica la finalidad de este desafío es que los alumnos no utilicen el algoritmo convencional de la multiplicacion para resolver la consigna, sino que utilicen procedimiento no formales. Los procedimientos que se proponen son los que se vieron en el desafío anterior y hacer conversiones a fracciones o incluso descomponer los factores de la multiplicacion para realizarla.

Este desafío es una introduccion para el algoritmo de la multilicacion con dos numeros decimales.

El bloque II del libro *Desafíos matemáticos* de sexto grado está compuesto por 12 desafíos de los cuales en 2 tratan del tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan de manera consecutiva en el bloque y pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 16.2 Tratamiento de la multiplicación en el libro de sexto grado bloque II

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y Programas de primaria de 2011	Intención didáctica
26. Rápido y correcto	Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1 000, etcétera	Que los alumnos reflexionen acerca de la conveniencia o no de utilizar el algoritmo convencional para resolver multiplicaciones de un número por 10, 100, 1000
27. Por 10, por 100 y por 1000	Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1 000, etcétera	Que los alumnos identifiquen reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1000

El primer desafío de este bloque es el número 26. “Rápido y correcto” p. 48, está conformado por dos consignas.

- En la primera consigna deberán resolver en parejas un problema con la información proporcionada.

Una fábrica de dulces utiliza diferentes tamaños de bolsas para empacar sus productos, para el menudeo utiliza bolsas con 10 dulces, para el medio mayoreo bolsas con 100 dulces y para el mayoreo bolsas con 1000 dulces.

En la siguiente tabla se ha registrado la producción de dulces de dos días.

Total de bolsas llenas		Numero de dulces en cada bolsa
Caramelo de fresa	3	100
Caramelo de limón	17	10
Chicle	4	1000
Chicloso	36	10
Chocolate amargo	23	100
Chocolate blanco	25	10
Dulce de tamarindo	81	100
Paleta de mango con chile	25	100
Paleta de sandía con chile	24	10

- a) Sin hacer operaciones, ¿de cuál dulce creen que se elaboró la mayor cantidad? ¿y de cual se elaboró la menor cantidad?
- b) Realicen las operaciones necesarias y comprueben si sus respuestas fueron correctas

Para resolver esta consigna se espera que los alumnos realicen una estimación de cuanto aumenta cada cantidad si se multiplica por 10, 100 y por 1000.

- La segunda consigna de este desafío deberá resolverse entre dos parejas de alumnos.

Ambas parejas deberán resolver todas las operaciones de la tabla y como si de un juego se tratase competirán para saber que pareja puede resolver de manera correcta y rápida todas estas.

Número	x 10	x 100	x 1000	x 10 000
4				
12				
145				
9				
36				
204				

Esta consigna es un juego de rapidez, esperando que los alumnos de acuerdo a su interés de ganar puedan buscar un procedimiento más rápido para multiplicar.

A diferencia de la consigna anterior en esta no se espera que el alumno utilice el algoritmo convencional de la multiplicación por lo tardado que podría ser, entonces es necesario identificar la clase de procedimiento descubren y comentarlo.

El siguiente desafío es número 27. “Por 10. Por 100, por 1000”p. 50, consta de dos consignas, en este se espera que los alumnos sigan realizando multiplicaciones con múltiplos de 10 utilizando la calculadora para verificar cada respuesta.

- En la primera consigna se presentan 4 ejercicios con preguntas para resolver y reflexionar.

1. Resuelvan las siguientes operaciones lo más rápido posible sin hacer cálculos.

$$\begin{array}{rcl}
 8 \times 10 = & & 10 \times 10 = \\
 74 \times 10 = & \underline{\hspace{2cm}} & 153 \times 10 = \underline{\hspace{2cm}}
 \end{array}$$

- a) Verifiquen con la calculadora sus resultados
 - b) ¿Qué relación encuentran entre los resultados y el primer factor de cada operación?
 - c) Escriban una conclusión relacionada con lo que observaron en los resultados
- La segunda consigna de este desafío deberá resolverse en parejas, consiste en encontrar la multiplicación que da el resultado dado.

	Multiplicación	Resultado
24		2 400
17		340
80		2 400
52		2 080

En la primera consigna se presentan multiplicación de las cuales los alumnos ya han memorizado sus resultados como es el caso de $8 \times 10 = 80$, si bien no han memorizado todos los resultados de multiplicar por 10, 100 y 1000 tienen algunas respuestas.

En el primer ejercicio se espera que los alumnos identifiquen una manera de solucionar las multiplicaciones sin realizar ningún cálculo, posteriormente y más importante es necesario centrarse en las respuestas a las siguientes preguntas ya que esto les ayudará establecer una regla de resolución. En el segundo ejercicio los alumnos deberán aplicar la misma forma inversa del principio del problema anterior y adecuarla para encontrar la relación que pueda existir.

La finalidad de este desafío de acuerdo a las consideraciones previas es que los alumnos reconozcan que los números que fueron multiplicados por 10, 100 y 1000, no sufren ningún cambio más que la incorporación de ceros. Por último en este bloque con respecto a la multiplicación las cantidades que utilizan los

desafíos son mayores ya que las multiplicaciones por 10, 100 y 1000, dan como resultado cantidades con dos o más cifras en todos los casos.

El bloque III del libro *Desafíos matemáticos* de sexto grado está compuesto por 20 desafíos de los cuales en 4 se trata el tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan de manera consecutiva en el bloque y pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 16.3 Tratamiento de la multiplicación en el libro de quinto grado bloque III

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y Programas de primaria de 2011	Intención didáctica
37. Identifícalos fácilmente	Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.	Que los alumnos identifiquen las características de los múltiplos de algunos números mediante el análisis de la tabla pitagórica y concluyan como se obtiene un múltiplo de cualquier número
38. ¿de cuánto en cuánto?	Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.	Que los alumnos establezcan el recurso de la división para determinar si un número es o no múltiplo de otro, y se aproximen al concepto de divisor de un número natural
39. La pulga y las trampas	Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.	Que los alumnos usen las nociones de múltiplo y de divisor a fin de hallar la estrategia ganadora
40. El número venenoso y otros juegos	Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.	Que los alumnos encuentren recursos para verificar si un número es divisor de otro y expliquen por qué lo consideran así

El primer desafío de este bloque es el número 37. “Identifícalos fácilmente” p. 75, se conforma por dos consignas y deberán resolverla en equipo.

- La primera consigna consiste que en equipos analicen y completen el cuadro de las multiplicaciones y que posteriormente respondan lo que se les está pidiendo

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4		6	7	8		10
2	2	4		8	10	12		16	18	20
3	3		9		15	18	21		27	30
4			12	16	20		28	32	36	40
5	5	10		20		30			45	
6	6		18		30	36	42	48		60
7		14	21	28		42	49		63	70
8	8	16		32	40	48		64	72	80
9		18	27	36	45		63		81	
10	10		30		50	60		80		100

- Escriban como encontraron los números faltantes de la tabla y comenten si de esta forma podrían encontrar más números para nuevas filas y columnas.
- ¿Qué característica tienen en común todos los números de la fila o columna 2?
- ¿con que cifras terminan los números de la fila o columna del 5?
- ¿Qué tienen en común los números de la fila 10?

En el libro de tercer grado ya se había trabajado con una tabla similar, entonces se espera que para este desafío los alumnos dominen el contenido de la tabla, sin embargo el punto central de esta consigna son las respuestas a las preguntas, ya que favorece el reconocimiento de los números.

Conviene aclarar que es hasta este desafío en el libro de texto del maestro donde se le explica cómo debe apoyar a sus alumnos en el uso de la tabla de multiplicaciones.

- La segunda consigna del desafío deberán resolverla en equipo y consiste en completar un esquema en el que se le pide a la alumnos múltiplos.
- El primer esquema es de los múltiplos de 2 y 3, y cuáles son los múltiplos que tienen en común

- El segundo esquema es de los múltiplos de 5 y 10, y de cuáles son los múltiplos que tienen en común
- El tercer y último esquema es de los múltiplos de 3 y 6, y de cuáles son los múltiplos que tienen en común

El siguiente desafío es el número 38. “¿De cuánto en cuánto?” p. 79, el cual está compuesto de tres consignas y deberán resolverla en parejas.

- La primera consigna consiste en responder 8 preguntas todas ellas relacionadas a lo aprendido en el desafío anterior
 1. Escriban cinco múltiplos de 10 mayores que 100
 2. Escriban cinco múltiplos de 2 mayores que 20
 3. Escriban cinco múltiplos de 5 mayores que 50
 4. Escriban cinco múltiplos de 3 mayores que 30

En este desafío se toma en cuenta las características que hayan encontrado los alumnos en el desafío anterior, es decir, que puedan reconocer los múltiplos de los primeros 10 números naturales, sin embargo, en este desafío se da por hecho que el alumno logró identificar las reglas de los múltiplos, aun cuando en desafíos anteriores o incluso en este no se explica a al alumno cuáles son estas o cómo encontrarlas.

Contesta las siguientes preguntas

5. ¿el número 48 es múltiplo de 3? ¿Por qué?
6. ¿el número 75 es múltiplo de 5? ¿Por qué?
 - a. ¿Y el 89? ¿Por qué?
7. ¿el número 850 es múltiplo de 10? ¿Por qué?
 - b. ¿Y de 5? ¿Por qué?
8. ¿el número 204 es múltiplo de 6? ¿Por qué?

Las preguntas anteriores piden al alumno responder si un número puede ser o no múltiplo de otro, para ello se espera recurra a sus propias estrategias, una de las

estrategias (por no decir la única) que se ha presentado en este libro de texto para obtener múltiplos es la tabla de multiplicar, entonces los alumnos podrían empezar a multiplicar todo los números que sean necesarios para encontrar la respuesta.

Una de las consideraciones de esta consigna es que el docente debe dedicar al alumno el tiempo necesario para analizar cada una de las estrategias y así comprenderlas y en su caso corregirlas.

➤ Segunda consigna

Contesten y comenten lo que se les indica

Carmen y Paco juegan con un tablero cuadrulado, cuyas casillas están numeradas del 1 al 100; ella utiliza una ficha verde que representa un caballo que salta de 4 en 4, y él una ficha azul que representa a otro que salta de 3 en 3.

- a) Puede haber un “trampa” (casillas) entre el 20 y el 25 en la que caiga alguno de los dos caballos. Argumenta tu respuesta
- b) Habrá alguna casilla entre el 1 y el 20 donde puedan caer los dos. Argumenta tu respuesta
- c) ¿en qué casilla caerán los dos?

En esta consigna se espera que los alumnos puedan aplicar todo el conocimiento adquirido sobre los múltiplos a una situación de juego, si bien es necesario que empiecen a utilizar estrategias convencionales la consigna no les obliga a eso y pueden incluso sugerir elaborar el juego para poder dar respuesta a las preguntas.

➤ Tercera consigna

Coloquen los números que están en la parte inferior de cada recuadro de tal modo que las afirmaciones sean verdaderas

_____ es múltiplo de _____, porque _____ x _____ = _____ o
también _____ entre _____ = _____

4 28 7

El siguiente desafío es el número 39. “La pulga y las trampas” p. 83, consta de una consigna y deberán resolverla en equipos.

- La consigna es un juego llamado la pulga y las trampas para poder jugar necesitarán cada equipo las páginas 163 a la 167 del apartado de recortables del libro.

La finalidad de este juego es que los alumnos encuentren una estrategia para poder esquivar todas las trampas que siempre se posicionan en las casillas y tienen el número de un múltiplo de 3 o 6 o 2.

De acuerdo con las consideraciones previas de este desafío cuando uno de los alumnos la encuentre deberá ser necesario la esponja y el docente intervenga para poder guiar las estrategias con la finalidad de que se logre relacionar el concepto de múltiplo o divisor con la estrategia.

El último desafío de este bloque es el número 40. “El número venenoso y otros juegos” p. 84, el cual consta de dos consignas que deberán resolver en equipos.

- La primera consigna es un juego llamado el numero venenoso el cual consiste en:
 1. Juego
- Por turnos todos se enumeran en voz alta empezando desde el 1
- El numero venenoso es el 6 o un múltiplo de este, por lo tanto a quien le toque decir alguno de estos deberá dar una palmada en su lugar
- Si algún integrante del equipo se equivoca el juego vuelve a comenzar, pero ahora inicia la cuenta quince dijo el último número correcto.
- El reto termina cuando el equipo logra llegar sin errores hasta el numero 120

Después de jugar se pide al alumno que responda las siguientes preguntas, si considera necesario podrá responder utilizando la calculadora

- a) De acuerdo con las reglas del juego si el equipo sigue contando después del 120 ¿se puede decir en voz alta el numero 150 o dar una palmada?
¿Por qué?

- b) ¿y 580? ¿porque?
- c) ¿el 3342? ¿Por qué?
- d) Digan un número mayor a 1000 que le corresponda una palmada, ¿Cómo lo encontraron?

➤ En la segunda consigna se espera que los alumnos resuelvan en equipos tres ejercicios que la conforman.

1. Piensa rápido y resuelve

- a) Explica porque 3 es divisor de 75
- b) Explica porque 8 no es divisor de 75
- c) Anota todos los divisores de 18
- d) ¿de cuáles números mayores que 1979 y menores que 2028 es divisor del número 25?

2. Completen la siguiente tabla

¿Es divisor?	De 20	De 24	De 36	De 42	De 100
5	si		no		si
4					
6					
8		si			
10				no	

3. Adivina adivinador

- a) Adivina adivinador, soy divisor de 4 y de 6 si no soy el 1, ¿Qué numero soy?
- b) Adivina adivinador, soy un número mayor que 10 y menor que 20; además, de 24 y de 48 soy divisor ¿Qué número soy?

En las consideraciones previas de este desafío se da libertad al docente y al alumno para encontrar resultados con la calculadora.

Algunas de las estrategias que se sugiere utilicen con la calculadora son:

Que los alumnos busquen al tanteo, un numero natural que multiplicado por 6, 3, 4 (dependiendo la actividad) dé como resultado ese número. Este procedimiento está relacionado con el concepto de múltiplo.

Dividir el número en cuestión entre 6, 4 o 3, considerando que el cociente debe ser un número entero.

Procedimiento relacionado con el concepto de divisor.

A pesar de que la noción de divisor (pensamiento de reversibilidad) es más compleja que la de múltiplo en este desafío se espera que los alumnos las reconozcan de igual manera primero como estrategia y luego como característica de los números.

El bloque IV del libro *Desafíos matemáticos* de sexto grado está compuesto por 18 desafíos de los cuales en 3 se trata el tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan de manera consecutiva en el bloque y pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 16.4 Tratamiento de la multiplicación en el libro de sexto grado bloque IV

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y Programas de primaria de 2011	Intención didáctica
60. Partes de una cantidad	Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “ a/b de n ”.	Que los alumnos relacionen el cálculo de n/m partes de una cantidad con la multiplicación y la división
61. Circuitos de carrera	Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “ a/b de n ”.	Que los alumnos descubran la equivalencia entre las expresiones “ a/b de n ” y “ a/b veces n ”
62. Plan de ahorro	Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “ a/b de n ”.	Que los alumnos identifiquen y usen el significado de las expresiones “ a/b de n ”, “ a/b veces n ” y “ $a/b \times n$ ”

El primer desafío de este bloque es el número 60. “Partes de una cantidad”p. 117, consta de una consigna y deberá resolverse en equipos, esta consiste en resolver cuatro problemas donde los alumnos deben calcular una fracción de un entero.

➤ Consigna

1. En un grupo de 36 alumnos, $\frac{1}{3}$ del total son menores de 10 años, ¿Cuántos tienen 10 o más años? ¿Qué parte del grupo tiene 10 o más años?

2. En toda la escuela hay 230 estudiantes en total, de estos $\frac{3}{5}$ son mujeres, ¿Cuántos son hombres? ¿Qué parte del total de los estudiantes son hombres?

Es conveniente aclarar que los primeros dos problemas son similares en dificultad, para poder responder a estos es necesario que los alumnos reflexionen sobre la importancia del procedimiento para resaltar las operaciones que se efectuarán para los cálculos.

Es interesante notar que pasa con los cálculos de los alumnos si multiplican primero y dividen después. Esta clase de desafío con la orientación del docente tienen la finalidad de reconocer la relación entre las operaciones sin importar el orden en el que las realicen.

En el primero se espera que el alumno averigüe que parte de 45 es 9 y en el segundo que parte de 3760 es 2820 lo cual equivale a preguntar porcentajes pero con respuestas en fracciones.

El siguiente desafío de este bloque es el número 61. “Circuitos de carrera” p. 118, el cual consta de dos consignas y deben resolverla en equipos.

- En la primera consigna se dará información al alumno para llenar una tabla

El circuito de carreras tiene una longitud de 12 kilómetros

Numero de vueltas	1	1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
Kilómetros recorridos	12								

Esta se presenta como un ejercicio de reforzamiento, ya que es similar al ejercicio realizado al inicio de este grado escolar.

- La segunda consigna consiste en que después de llenar la tabla los alumnos por equipos respondan las siguientes preguntas:
 - a) Un ciclista recorrió todo el circuito $3\frac{1}{2}$ veces ¿Cuántos kilómetros recorrió?

- b) Otro recorrió el circuito $1\frac{1}{4}$ veces, ¿a cuantos kilómetros equivale esa longitud?
- c) Un tercer ciclista recorrió $\frac{3}{4}$ veces el circuito, ¿Cuántos kilómetros representa esa cantidad? ¿Cuántas vueltas?

El último desafío del bloque IV es el número 62. “Plan de ahorro”p. 120, el cual está conformado por una consigna y se deberá resolver en equipos.

➤ Esta contiene tres problemas que los alumnos deberán resolver.

1. Manuel tienen un pequeño negocio y ha decidido ahorrar $\frac{2}{5}$ de la ganancia del día. Anota en la tabla las cantidades que faltan.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ganancia	\$215.00	\$245.00		\$280.00		\$504.00
Ahorro			\$122.00		\$168.00	

2. A Yoatzin le gusta correr en el parque de los viveros, en el que hay un circuito de 3 kilómetros de longitud, primero camina $\frac{1}{12}$ de vuelta, luego trota $\frac{2}{3}$ de vuelta, despues corre $1\frac{1}{3}$ vueltas y para terminar camina $1\frac{1}{6}$ de vuelta. ¿Cuántos kilómetros recorrerá Yoatzin en total?
3. Calcula el resultado de las siguientes operaciones
- a) $\frac{3}{5}$ de 256 =
- b) $\frac{4}{5}$ de 90 =
- c) $\frac{2}{3} \times 24 =$
- d) $2\frac{1}{2}$ veces 15 =

En este desafío se espera que los alumnos y el docente propongan una estrategia de resolución común, a la que es posible lleguen de acuerdo a los dos desafíos trabajados anteriormente, sin embargo, en la tabla del primer problema hay dos casos en los que se da el resultado de aplicar la fracción que Yoatzin ha decidido ahorrar pero no se sabe cuáles es la cantidad de la ganancia del día.

El bloque V del libro *Desafíos matemáticos* de sexto grado está compuesto por 13 desafíos de los cuales en 3se trata el tema de problemas multiplicativos, los desafíos se presentan de manera consecutiva en el bloque y estos pertenecen al tema de problemas multiplicativos dentro del eje temático de sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 16.5 Tratamiento de la multiplicación en el libro de sexto grado bloque V

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y Programas de primaria de 2011	Intención didáctica
79. Para dividir en partes	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.	Que los alumnos encuentren un procedimiento para dividir una fracción entre un número natural, cuando el numerador de la fracción es múltiplo del natural
80. Repartos equitativos	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.	Que los alumnos encuentren un procedimiento para dividir fracciones entre números naturales, en casos donde el numerador no es múltiplo del divisor
81. ¿Cuánto cuesta un jabón?	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.	Que los alumnos encuentren un procedimiento para dividir números decimales entre números naturales en un contexto monetario

El primer desafío que se presenta en este último bloque del libro de texto de sexto grado es el número 79. “Para dividir en partes”p. 145, el cual consiste en una consigna compuesta de tres problemas ydeberán resolverla en equipos.

➤ Consigna

1. De un grupo de alumnos, $\frac{4}{6}$ van a participar en un concurso de danza, la mitad de ellos presentara una danza folclórica y la otra mitad una pieza de danza clásica. ¿Qué partes de total de alumnos participara en cada una de las dos piezas de danza?
2. Al trasladar una pieza de madera se dañó una quinta parte. Con el resto de la madera en buen estado se van a construir dos puertas de igual tamaño. ¿Qué parte de la pieza original se utilizara en cada una de las puertas?

3. En la ferretería La Tía Adriana, vaciaron $\frac{6}{7}$ de una lata de pintura en tres recipientes iguales, la misma cantidad en cada uno. ¿Qué parte de la lata de pintura se vació en cada recipiente?

La división de fracciones es un tema que se trata hasta la educación secundaria pero en las consideraciones previas del libro del maestro se considera que los alumnos ya tienen herramientas suficientes para resolver con diferentes estrategias esta clase de problemas, ya sea con diagramas donde se representen las fracciones y se pueda manipular con la finalidad de obtener el resultado, o la estrategia en la que se espera que el numerador de la fracción sea múltiplo del denominador y que los alumnos puedan alcanzar la siguiente interpretación o representación para su solución.

Por ejemplo:

$$\frac{4}{6} \div 2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) \div 2$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6}$$

$$\frac{4}{6} \div 2 = \frac{2}{6}$$

El siguiente desafío del bloque es el número 80. “Repartos equitativos” p. 146, está compuesto por una consigna, la cual pide se resuelva en equipos tres problemas.

➤ Consigna

1. Cuando Raúl y esperanza llegaron a una fiesta quedaban $\frac{3}{10}$ del pastel, así que se dividieron esas porciones en partes iguales. ¿Qué parte del pastel completo le toca a cada uno?
2. Cuatro amigos van a repartirse por partes iguales y sin que sobre nada $\frac{5}{8}$ de una pizza. ¿Qué parte del total, es decir de la pizza completa, le tocara a cada uno?

3. Patricia tiene $\frac{3}{4}$ de metro de listón y lo va a cortar para hacer 4 moños iguales. ¿qué cantidad de listón ocupará para cada moño?

El último desafío del bloque V y del libro de sexto grado de educación primaria es el número 81. “¿Cuánto cuesta un jabón?” p. 147, consta de dos consignas.

- En la primera consigna se pide al alumno resolver en equipos un problema y el llenado de una tabla, de acuerdo con la información proporcionada.

Problema

En el almacén La Abarrotera, pusieron en oferta paquetes de jabón para tocador. De acuerdo con la información de la tabla. ¿Cuál es la oferta que más conviene?

Marca	Numero de jabones	Precio del paquete
Cariño	5	\$17.50
Fresquecito	4	\$10.80
Darling	7	\$26.60
Siempre floral	6	\$32.40

- La consigna dos consta de 5 operaciones que deberán resolver los alumnos de manera individual.
 - 10.5 / 4 =
 - 350.45 / 8 =

Si bien existen diversas formas trabajadas a lo largo de la educación primaria para dar solución a estos cuestionamientos se espera que los alumnos lleguen a la conclusión de utilizar una fracción o una división con punto decimal.

$$6 \overline{)32.40}$$

Parte de este desafío propone que el alumno llegue a construir un algoritmo convencional de la división, para dividir un número natural y un número decimal, por ello se espera que el maestro brinde su apoyo constante para realizar esta actividad.

Finalmente se presenta la siguiente tabla que tiene el propósito de mostrar cual es la clasificación de los desafíos contenidos en el libro y cuantos se presentan de cada clase. De igual forma se puede advertir el bloque contiene el mayor número de desafíos.

Tabla 17. Secuencia de los problemas multiplicativos de sexto grado

Problemas aditivos y multiplicativos						
Clasificación	Bloque I	Bloque II	Bloque III	Bloque IV	Bloque V	Total de desafíos
Multiplicación o división de un número natural por una fracción	Desafío 8			Desafío 61		2
Multiplicación o división de una fracción por una fracción	Desafío 9					1
Multiplicación o división convencional de un número natural por un número decimal					Desafío 81	1
Multiplicación o división convencional de un número decimal por un número decimal	Desafío 10					1
Encontrar múltiplos de 2, 3 y 5			Desafío 37 Desafío 38			2
Multiplicaciones convencionales con 10, 100 y 1000		Desafío 26 Desafío 27				2
Problemas para calcular una fracción de un número natural				Desafío 60 Desafío 62	desafío 79 desafío 80	4
Juegos			Desafío 39 Desafío 40			2
Total de desafíos	3	2	4	3	3	15

2.5 Revisión de la literatura

Para la revisión de la literatura se seleccionaron documentos, artículos, libros, tesis y tesinas, en los cuales se encontraron elementos y características que fueron de apoyo para el análisis al paquete curricular.

En el análisis de los libros de texto se tomó en cuenta la investigación de José Villela y Luis Carlos Contreras (2005) llamada *La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática*, en este se plantean algunos criterios de análisis, consideran que un libro de texto no solo debería informar al alumno y al docente sobre un contenido particular sino que además debe proporcionar explicaciones, mostrando con claridad las relaciones entre hechos, conceptos, teorías y contextos y deberían cumplir una serie de funciones didácticas entre otras las siguientes:

- Propiciar el primer contacto con textos expositivos
- Servir de mediadores entre el docente y sus alumnos y entre el docente y el currículo
- Servir de fuente de información y consulta
- Favorecer la integración de conocimientos y experiencias sin crear falsos objetos de conocimiento
- Favorecer la formación de valores

Cabe aclarar que en este trabajo se abordan los libros de texto sin tomar en cuenta un tema ni nivel específico.

En la tesina de Alicia Ávila Storer (1986) llamada *Reseña crítica de los programas de matemáticas propuestos por la Secretaría de Educación Pública para la escuela primaria mexicana, 1944-1980*, se realiza un análisis de la estructura general de los Planes y Programas de educación primaria.

Las características que Ávila utiliza en su acercamiento a los planes y programas de educación primaria son, resaltar y describir las finalidades educativas, la

concepción de la matemática en los diferentes periodos de tiempo, la enseñanza de la matemática en los libros de texto dentro del periodo, los contenidos matemáticos incorporados al curriculum, la didáctica presente en programas de educación primaria (libros de texto) y la evolución de las teorías de aprendizaje de igual forma en los libros de texto Ávila pone de manifiesto el rol del alumno ante los libros y el paquete curricular.

Es importante decir que Ávila aborda en su trabajo el nivel primaria y los planes y programas en matemáticas en distintos periodos

Fernández Lajusticia (2009) en su tesis *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*, establece cuatro categorías para el modelo y análisis de la clasificación en el libro de texto que sirvieron para realizar el análisis en el tema específico de razón en primaria.

- Percepción relacional de elementos de información
- Percepción aislada de los elementos de información
- Respuesta pertinente e inducida por el enunciado
- Respuesta no identificada

El trabajo de Fernández sí está en función de un tema específico analiza únicamente el contenido en los libros de texto,

Cedillo Osornio (2016) también realiza un acercamiento a la revisión de los materiales didácticos para un tema específico Fracciones equivalentes. Su tesis esta dividida en 3 etapas.

La primera etapa es la búsqueda y recopilación de planes de estudio, programas y libros de texto gratuitos de matemáticas de primaria distribuidos por la Secretaría de Educación Pública que se han utilizado entre 1960 y 2011 en México. En la segunda etapa se realiza la revisión para identificar los contenidos, aprendizajes esperados y los procesos de enseñanza y aprendizaje vinculados a las fracciones

propuestos en los distintos materiales. La tercera etapa consta de la identificación y selección de las diferentes lecciones, contenidos y actividades de cada libro y programa de educación primaria que tuviesen como tema central la equivalencia.

Finalmente Cedillo realiza un análisis de los materiales orientado a:

- Identificar y analizar los distintos significados o sub-constructos de la fracción abordados en los programas y libros de texto
- Identificar y analizar el tipo de representaciones que se emplean en las lecciones que implican el concepto de equivalencia.
- Entender los diferentes usos y aplicaciones que se le ha dado al concepto de equivalencia en los planes y programas de estudio y los libros de texto.
- Reconocer las diferentes formalizaciones que se le han dado a la equivalencia en el sentido de hacer definiciones formales o no formales de este concepto.
- Registrar los aspectos adecuados utilizados en las diferentes secuencias de enseñanza del concepto de equivalencia.

Barrios Cosme (2017) en la tesis *JAPÓN Y MÉXICO: La multiplicación en el libro de texto, análisis comparativo*. Realiza una descripción de de cada una de las lecciones que conforman los libros de texto de cada país, analizando el tratamiento didáctico, identificando la forma en la que se trabajan los conceptos que forman parte fundamental del tema de la multiplicación.

Los conceptos que trabaja son:

- Concepto de multiplicación: se entiende como multiplicación el productos de dos números llamados multiplicando y multiplicador este ultimo representa el número de repeticiones del multiplicando.
- Tablas de multiplicar:
- Propiedades de la multiplicación:

- conmutativa (Esta propiedad significa que los factores se pueden multiplicar en cualquier orden y que el producto siempre es el mismo.),
- asociativa (el modo de agrupar los factores no altera el producto de la multiplicación, sea cual sea el número de factores que haya.),
- distributiva (La propiedad distributiva establece que multiplicar una suma por un número da el mismo resultado que multiplicar cada sumando por el número y después sumar todos los productos.)

→ Algoritmo convencional de la multiplicación

Como parte del análisis de contenidos en primaria se toma en cuenta a Castro (1987) quien en el libro *Estructuras aritméticas y las etapas elementales y su modernización*, describe el aprendizaje de operaciones y sus distintas etapas, del mismo modo castro describe las características de un algoritmo para su aprendizaje.

Las etapas en el aprendizaje del algoritmo planteadas por Castro:

Las acciones

Como primera etapa se deben considerar las acciones y transformaciones que se realizan en los contextos numéricos, considerando aquellos que tienen rasgos en común los cuales darán las bases para posteriormente alcanzar un concepto operatorio.

El uso de modelos

En la segunda etapa se aclara que al considerar e interiorizar las relaciones y transformaciones de los contextos numéricos aparecen diversos esquemas o ilustraciones a los que se identifican como modelos, cada operación tiene modelos propios los cuales ponen de manifiesto los contextos generales del número y las particularidades de cada operación.

Simbolización

La simbolización se construye en una tercera etapa, después de la utilización de los modelos el nivel de abstracción debe subir en el nivel operatorio, por lo tanto se empieza a asociar una expresión simbólica de una operación, como lo pueden ser los signos, y las formas de representarlas ya sea horizontal o vertical.

Hechos numéricos y tablas

La cuarta etapa es el aprendizaje, memorístico o no de los hechos numéricos de cada operación, un hecho numérico es el número que corresponde hallar, usualmente se conocen dos hechos numéricos y la relación entre ellos y es necesario hallar un tercero realizando la operación. Esto usualmente se hace mediante el descubrimiento de técnicas.

Algoritmos

La quinta etapa es en la que los hechos numéricos y las reglas básicas permiten calcular el resultado de una operación con dos números cualesquiera, es la cesta de la adquisición del algoritmo. La utilidad del algoritmo en la realización de una operación radica en la simplificación que se hace a la misma.

Los conceptos sobre las operaciones que menciona Castro son los relacionados con las características que debe cumplir una operación.

- La nitidez la cual permite que la realización del algoritmo se transforme en un proceso mecánico por parte del alumno.
- La eficacia que conduce a los resultados deseados mediante una serie de pasos definidos los cuales deben ser lo suficientemente simples para el entendimiento
- Universalidad es que el algoritmo se aplique a todas las situaciones de la misma clase.

A partir de la revisión anterior, como apoyo para el análisis de esta tesis, de la investigación de José Villela y Luis Carlos Contreras (2005) llamada *La selección y uso de libros de texto* se retoma la función didáctica servir de mediadores entre el docente y sus alumnos y entre el docente y el currículo

Y los elementos que aporta para el análisis de contenidos sobre la función y propósito de los libros de texto.

Esta tesis, se apoya de lo revisado por Alicia Ávila tomando en cuenta características en el paquete curricular de 2011 como:

- Los contenidos curriculares
- La didáctica de los programas
- La finalidad educativa
- El perfil del alumno

Para revisar y analizar el tratamiento de la multiplicación, se tomo en cuenta el trabajado de Fernández en el análisis de las diferentes reformas realizadas al currículo desde 1984 y el libro de texto, los dos criterios que se retomaron del análisis de Fernández son: la percepción relacional de elementos de información y percepción aislada de los elementos de información para el análisis.

De Barrios Cosme (2017) se retomaron algunos elementos como: los concepto de multiplicación, tablas de multiplicar, propiedades de la multiplicación y el algoritmo de la multiplicación para la clasificación de los desafíos, de igual forma para esta tesis y la de Barrios se toma en cuenta, el apoyo grafico, el uso de diferentes expresiones matemáticas y las situaciones en las que se plantea cada desafío.

Finalmente de Castro (1987) se retoman para esta investigación las etapas de aprendizajes de las operaciones y las características del algoritmo, es necesario aclarar que en las etapas se omitirá el uso de modelos ya que no se trabajo en esta tesis.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología utilizada para identificar y analizar la propuesta didáctica que se establece en el paquete curricular sobre el tema de la multiplicación de la educación primaria.

El enfoque de esta tesis es el análisis documental y tiene como objetivo obtener resultados al identificar la tipología y el tratamiento didáctico de los problemas de estructura multiplicativa que se presentan al alumno en primaria. Para identificar las características anteriores se realizó un análisis al plan y programas de estudio de 2011 y a los libros de texto tanto del alumno como del maestro.

3.1 Plan de estudio

Se realizó un acercamiento analítico al Plan en la asignatura de matemáticas, considerando el perfil de egreso de educación primaria y las competencias a desarrollar durante los seis grados, con la finalidad de examinar cuáles el dominio que debe tener un alumno egresado con respecto al tema de la multiplicación.

En la revisión del Plan se detectaron cuatro aspectos adicionales que aportan elementos relevantes que sirvieron para realizar un análisis más amplio sobre lo establecido en el paquete curricular, a saber:

- Los estándares curriculares, donde se indica lo que los alumnos deben saber y hacer al transitar en los periodos escolares.
- Las competencias específicas de matemáticas, donde se establecen concretamente las competencias que debe contar el alumno de primaria.
- El pensamiento matemático a desarrollar, donde se indica sobre el conocimiento y habilidades de los alumnos y como se articula y organiza el tránsito entre contenidos.
- Los propósitos del área, en los cuales se establece los dominios esperados de los alumnos como resultado del estudio de las matemáticas.

3.2 Programas de estudio

Se revisaron los Programas de estudio de cada grado escolar, los cuales comprenden un conjunto de aprendizajes esperados, estos aprendizajes están establecidos por grado escolar, por bloque (cada grado está constituido por cinco bloques) y cada bloque se organiza en ejes temáticos, en cada bloque, en la asignatura de matemáticas, se pueden abordar dos o más ejes temáticos.

En cada eje temático se presentan los temas que lo conforman, en el eje temático “Sentido numérico y pensamiento algebraico” donde está ubicado el tema de la multiplicación. Para el análisis de la información se elaboraron seis tablas, una por grado de primero a sexto de educación primaria, en las que se indica el grado, bloque, aprendizaje esperado establecido en los Programas y el tratamiento del tema de la multiplicación. Las cuales permiten recopilar y concentrar la información requerida para elaborar una visión progresiva sobre la propuesta didáctica del tema de la multiplicación.

Cabe aclarar que el tratamiento de la multiplicación en sus diferentes representaciones no pertenecen únicamente al tema de multiplicación que establecen los Programas, ya que dependiendo el grado escolar y la representación de la multiplicación se ubican en diferentes apartados, pueden pertenecer al mismo eje temático pero a otro tema o bien pertenecer a un diferente eje temático y por lo tanto a distinto tema.

Para detectar la consistencia sobre lo señalado anteriormente con la información del Plan y Programas se revisaron los libros de texto *Desafíos matemáticos de 2013*, en un primer acercamiento a los libros se abordó la presentación del diseño y el cómo están estructurados, ya que se maneja un libro para el maestro y un libro para el alumno, como se puede advertir en el siguiente cuadro 1, el único apartado en el que coinciden el libro del texto del maestro y el del alumno es en las consignas

Cuadro1. Comparación de los libros de texto

<i>Desafíos matemáticos.</i> Libro del maestro	<i>Desafíos matemáticos.</i> Libro del alumno
<ul style="list-style-type: none"> • Intención didáctica. • Consigna. • Consideraciones previas. • Observaciones posteriores. 	<ul style="list-style-type: none"> • Consigna.

La revisión de los libros de texto del alumno se analiza de manera análoga al correspondiente del maestro, ya que este último tiene más *apartados*, y en cada consigna se indica el tratamiento del tema y el contenido curricular a trabajar, estos apartados coinciden con lo indicado en los programas de estudio, por lo tanto el libro del maestro aporta más elementos para el análisis, comparación y clasificación de las consignas.

Para tipificar los problemas multiplicativos en los libros de texto se tomó como marco Vergnaud (1985), que describe dos tipos de problemas de estructura multiplicativa empleadas en las pruebas estandarizadas (ENLACE y PLANEA) revisadas en el capítulo 1 de esta Tesis: Isomorfismo de medidas y producto de medidas.

Esta clasificación se realiza por grado escolar, elaborando así una tabla por bloque, es decir cinco tablas por grado escolar (de primero a sexto) obteniendo un total de treinta tablas, las cuales contienen el nombre y número del desafío, el orden en el que se presentan, el contenido curricular de acuerdo a los Programas de educación primaria y la intención didáctica.

Ejemplo: tabla de tercer grado bloque I de educación primaria

Número y nombre del desafío	Contenido de acuerdo con Plan y programas de educación primaria 2011	Intención didáctica
11. Memórame de multiplicaciones	Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones.	Que los alumnos memoricen algunos productos de números dígitos al realizar el juego

Después de la tabla y en relación a cada desafío, se aborda un ejemplo de las consignas (las consignas son las actividades señaladas y solicitadas en los desafíos) y se realiza una clasificación de acuerdo a sus características sobre el tema “problemas de estructura multiplicativa” y sus dificultades en términos de la cantidades, apoyo gráfico y la clase de contenido que se presenta (tema nuevo, reforzamiento o repaso)

3.3 Resultados del análisis al paquete curricular

Con los resultados anteriores de la revisión del Plan y Programas y los libros de texto de primaria se elabora una tabla, presentada por grado escolar, bloque, eje temático y aprendizaje esperado, con la finalidad de mostrar discrepancias y/o congruencia con el tratamiento dado a la multiplicación en los libros de texto del maestro y del alumno, de igual forma se describe qué sucede con las congruencias encontradas a lo largo de la educación primaria, está dividida en seis segmentos de acuerdo a cada grado escolar.

La tabla presenta una serie de nomenclaturas para mostrar las congruencias o no congruencias, a lo largo de los 6 grados de educación primaria:

- Bloque con número (BI)(BII)(BIII)(BIV)(BV)
- Desafíos con número (D1) (D13) (D5)...
- Aprendizajes Esperados (A E)
- Tratamiento del tema (T t)
- Congruencia (\cong)
- No congruencia ($\not\cong$)

La revisión de los bloques, ejes temáticos y contenidos de primer grado de primaria indica que no se aborda el tema de la multiplicación, sin embargo, el trabajo ubica en el eje temático “sentido numérico y pensamiento algebraico” los contenidos de primer grado en el tema “problemas aditivos” y los analiza como antecedente para la enseñanza de la multiplicación.

Del análisis de los libros de texto de primero a sexto con las aclaraciones hechas sobre el contenido, se obtiene un concentrado que está organizado por grado y

bloque, en el que se establecerá la tipología detectada a partir del análisis de los desafíos y consignas de los libros de texto, con la finalidad de ordenar y conocer el total de los desafíos que se abordan a los largo de los seis años de educación primaria.

De igual forma a partir del análisis de los libros de texto se obtuvo información para realizar un cuadro por periodo y grado, en él se muestra de manera progresiva el aprendizaje esperado y la forma en la que se aborda el tema.

Para el análisis de este cuadro se toma en cuenta las etapas de aprendizaje de las operaciones que propone Castro (1987) las etapas de la multiplicación propuestas son acciones, uso de modelos, simbolización, hechos numéricos y tablas y algoritmo, así mismo para el análisis del cuadro se toma en cuenta lo que Castro propone sobre las características de una operación, nitidez, eficacia, universalidad.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados derivados del análisis al paquete curricular de educación primaria conformados por el Plan y Programas de estudio y los libros de texto *Desafíos matemáticos* para el maestro y el alumno. Se divide en cuatro partes donde se muestran en tres tablas y un cuadro el cual tiene la finalidad de poner de manifiesto de manera progresiva el aprendizaje esperado sobre el tema de la multiplicación en educación primaria.

La primera parte corresponde al tratamiento del tema establecido en el Plan y Programas de estudio; la segunda responde a la congruencia encontrada entre los aprendizajes esperados y tratamiento de la multiplicación establecido en los mismos documentos y el tratamiento planteado en los libros de texto de 2013, la tabla está dividida en segmentos que corresponden a cada grado escolar (seis apartados), la tercera tabla presenta la tipología de problemas y el número de desafíos planteados a lo largo de los seis grados, es importante mencionar que esta tabla se dividió en dos partes, la primera parte abarca los desafíos y tipologías de los problemas aditivos que se presentan en primer grado como antecedente de la multiplicación y la segunda parte abarca los desafíos y tipologías de problemas multiplicativos de segundo a sexto grado.

4.1 Tratamiento del tema durante la educación primaria

En la siguiente tabla se presenta de manera sucesiva el tratamiento del tema en educación primaria.

Tabla 19. El tratamiento de problemas multiplicativos por bloque

BLOQUE	Grado escolar					
	Segundo periodo escolar			Tercer periodo escolar		
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
I	Obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar	Resolución de problemas que involucren sumas iteradas o repartos mediante procedimientos	Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver	Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas,	Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales. Conocimiento	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no

	colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.	os diversos.	problemas u operaciones. Uso de caminos cortos para multiplicar dígitos por 10 o por sus múltiplos (20, 30, etcétera).	producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.	y uso de las relaciones entre los elementos de la división de números naturales.	formales.
II	Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta. Expresión simbólica de las acciones realizadas al resolver problemas de suma y resta, usando los signos +, -, =.		Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas mediante diversos procedimientos (como suma de multiplicaciones parciales, multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera).		Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1 000, etcétera.
III	Desarrollo de procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones de dígitos. Resolución de problemas correspondientes a los significados de juntar, agregar o quitar.	Resolución de problemas de multiplicación con factores menores o iguales a 10, mediante sumas repetidas. Explicitación de la multiplicación implícita en una suma repetida.	Resolución de problemas de división (reparto y agrupamiento) mediante diversos procedimientos, en particular el recurso de la multiplicación.	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores. Resolución de problemas en los que	Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.	Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.

				sea necesario relacionar operaciones de multiplicación y adición para darles respuesta.		
IV	Desarrollo de recursos de cálculo mental para obtener resultados en una suma o sustracción: suma de dígitos, complemento s a 10, restas de la forma 10 menos un dígito, etcétera.	Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares). Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos .	Identificación y uso de la división para resolver problemas multiplicativos , a partir de los procedimientos ya utilizados (suma, resta, multiplicación). Representación convencional de la división: $a \div b = c$.	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.	Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión " a/b de n ".
V	Resolución de cálculos con números de dos cifras utilizando distintos procedimientos. Uso de resultados conocidos y propiedades de los números y las operaciones para resolver cálculos.	Uso de estrategias para calcular mentalmente algunos productos de dígitos. Resolución de distintos tipos de problemas de división (reparto y agrupamiento) con divisores menores que 10, mediante distintos procedimientos.	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para la división entre un dígito. Uso del repertorio multiplicativo para resolver divisiones (cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo).	Análisis del residuo en problemas de división que impliquen reparto.	Resolución de problemas que impliquen multiplicación es de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.

Se puede observar en la tabla anterior que en el segundo grado perteneciente al segundo periodo escolar en el bloque II, no hay contenidos que aborden el tema

de la multiplicación, lo mismo sucede al inicio del tercer periodo en el cuarto grado en el bloque II.

Se puede notar que es en el tercer periodo en cuarto grado en el bloque III donde se alude al desarrollo de un algoritmo de la multiplicación de números hasta de tres cifras, y que el tema del algoritmo convencional no se presenta en los siguientes grados escolares.

Al final del segundo periodo escolar en el tercer grado en el bloque III el tratamiento del tema sobre la multiplicación dice que se resolverán problemas de división utilizando diversas estrategias como la multiplicación, e inmediatamente en el siguiente bloque IV dice que se deben plantear situaciones en las que los alumnos puedan identificar el uso de la división para resolver problemas multiplicativos, siendo esta una aproximación a la división, esta es la primera vez que se presenta en educación primaria, y tiene un antecedente en segundo grado en el bloque V donde se plantean problemas de reparto y agrupamiento con números menores de 10, con diferentes procedimientos y apoyos.

Es notorio en el bloque IV de tercer grado la presentación de una de las notaciones convencionales de la división: $a \div b = c$ (sin explicar su simbología o sus componentes), y es en el libro de texto *Desafíos matemáticos*, de quinto grado donde se presenta la notación convencional con la galera⁵.

Cabe mencionar que en el tratamiento de los problemas aditivos de primer grado se muestra en el bloque II como se realizará un acercamiento a la expresión simbólica de sumas (+) y restas (-) e igual (=); pero de acuerdo al tratamiento del tema no se presenta en ningún momento a lo largo de la educación primaria un acercamiento a la simbolización de la multiplicación con el signo “x”.

⁵En aritmética, la división por galera (o *por el método de la galera*) es un antiguo algoritmo de división, utilizado de manera corriente por lo menos hasta el siglo XVII, y que fue sustituido progresivamente por el método actual de la división larga. El nombre deriva del parecido gráfico que se genera con este método y una galera (actualmente también puede designar a la “casilla de la división” que separa al divisor del dividendo)

4.2 Congruencias

A continuación se muestra la Tabla de Congruencias de algunos componentes del paquete curricular, está conformada por los bloques, desafíos, aprendizajes esperados y tratamiento del tema que se abordan a lo largo de la educación primaria, dentro de la misma se realiza un contraste de congruencias entre el tratamiento del tema y los aprendizajes establecidos en los Programas de estudio de 2011 y los desafíos que se trabajan en el libro de texto. Está dividida en seis segmentos de acuerdo a cada grado escolar.

La tabla presenta una serie de nomenclaturas para mostrar la congruencia, estas son constantes a lo largo de los 6 grados de educación primaria:

- Bloque con número (BI)(BII)(BIII)(BIV)(BV)
- Desafíos con número (D1) (D13) (D5)...
- Aprendizajes Esperados (A E)
- Tratamiento del tema (T t)
- Congruencia (\cong)
- No congruencia ($\not\cong$)

El primer segmento de esta tabla corresponde al primer grado de educación primaria y como se ha dicho anteriormente, en este grado el tema que aborda es problemas aditivos como antecedente para la enseñanza de la multiplicación, el tema se encuentra en el eje temático Sentido numérico y Pensamiento algebraico.

Tabla 20. 1 Congruencias en primer grado

BI	Aprendizaje esperado	Tratamiento del tema	Congruencia
D12 D13 D14	Calcula el resultado de problemas aditivos planteados de forma oral con resultados menores que 30.	Obtención del resultado de agregar o quitar elementos de una colección, juntar o separar colecciones, buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra, y avanzar o retroceder en una sucesión.	$A E \neq T t$ $T t \cong D$ $A E \cong D$
BII	Utiliza los números ordinales al resolver problemas planteados de forma oral.	Análisis de la información que se registra al resolver problemas de suma o resta. Expresión simbólica de las acciones realizadas al resolver problemas de suma y resta, usando los signos +, -, =.	$A E \cong T t \cong D$
D24 D25 D26 D27 D28			
BIII	Utiliza la sucesión oral y escrita de números, por lo menos hasta el 100, al resolver problemas. Modela ⁶ y resuelve problemas aditivos con distinto significado y resultados menores que 100, utilizando los signos +, -, =.	Desarrollo de procedimientos de cálculo mental de adiciones y sustracciones de dígitos. Resolución de problemas correspondientes a los significados de juntar, agregar o quitar.	$A E \cong T t \cong D$
D33 D34 D35 D36 D37			
BIV	Resuelve mentalmente sumas de dígitos y restas de 10 menos un dígito. Utiliza unidades arbitrarias de medida para comparar, ordenar, estimar y medir longitudes.	Desarrollo de recursos de cálculo mental para obtener resultados en una suma o sustracción: suma de dígitos, complementos a 10, restas de la forma 10 menos un dígito, etcétera.	$A E \neq T t \neq D$
D48 D49			
BV	Resuelve problemas que implican identificar relaciones entre los números (uno más, mitad, doble, 10 más, etcétera).	Resolución de cálculos con números de dos cifras utilizando distintos procedimientos. Uso de resultados conocidos y propiedades de los números y las operaciones para resolver cálculos.	$A E \cong T t \cong D$
D55 D56 D57			

⁶ La habilidad de modelar implica “traducir” una situación del mundo real a la matemática (Bloom, 2012), es decir, expresar acciones o situaciones cotidianas con lenguaje matemático, aplicar-seleccionar-evaluar modelos que involucren operatoria, identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas y generalizar utilizando lenguaje matemático, traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa.

En el bloque I del primer grado no se tienen congruencia entre el T t y el A E, sin embargo, al no definir claramente que se entenderá por calcular en el D o el A E se encontró congruencia entre estos dos últimos.

En primer grado de acuerdo a las congruencias que se presenta se puede advertir que de cinco bloques el $A E \neq T t$ en dos de ellos, que en cuatro de cinco bloques el $T t \cong D$, que en dos de cinco bloques el $A E \cong D$ y que solo en un bloque el $A E \neq T t \neq D$.

La no congruencia del primer bloque consiste en que la dificultad del A E exige un nivel de comprensión que no coincide con el nivel de dificultad del T t, esto es lo mismo que sucede con en el bloque IV con ya que el T t está enfocado en actividades como el juego para estimular la capacidad de memoria en los alumnos.

En el bloque V de este grado es importante aclarar que el A E y el T t son congruentes, a pesar del A E el cual propone que el alumno identifique relaciones de dobles y el T t no aborda este conocimiento, puesto que son congruentes en las demás acciones como lo son sumar uno, la mitad y diez más.

El siguiente segmento de la tabla es de segundo grado y a diferencia de la tabla anterior como ya se había mencionado en esta se muestra el tema de problemas multiplicativos, como el inicio formal de este tema en educación primaria.

Tabla 20.2 Congruencias en segundo grado

BI	Aprendizaje esperado	Tratamiento del tema	Congruencias
D10 D11	Determina la cardinalidad de colecciones numerosas representadas gráficamente.	Resolución de problemas que involucren sumas iteradas o repartos mediante procedimientos diversos.	$A E \cong T t \cong D$
BII	No hay desafíos que correspondan al tema de problemas multiplicativos, por lo tanto no existe tampoco algún aprendizaje esperado que coincida con el tema.		
BIII	Resuelve problemas aditivos con diferentes significados, modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.	Resolución de problemas de multiplicación con factores menores o iguales a 10, mediante sumas repetidas. Explicitación de la multiplicación implícita en una suma repetida.	$A E \neq T t \cong D$
D35 D36			
BIV	Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con	Resolución de distintos tipos de problemas de	$A E \neq T t \cong D$
D44			

D45 D46 D47 D48	objetos o figuras.	multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares). Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos.	
BV	Identifica, compara y produce, oralmente o por escrito, números de tres cifras.	Uso de estrategias para calcular mentalmente algunos productos de dígitos. Resolución de distintos tipos de problemas de división (reparto y agrupamiento) con divisores menores que 10, mediante distintos procedimientos.	$A E \not\cong T t \cong D$
D54 D55 D56 D57	Resuelve problemas que implican el uso del calendario (meses, semanas, días).		

En segundo grado como se puede ver en el segmento anterior no hay desafíos o temas que aborden la multiplicación, por lo tanto de cuatro bloques solo en uno existe $A E \cong T t$, en los cuatro bloques existe $T t \cong D$.

En el bloque III, no se muestra congruencia entre el $A E$ y el $T t$, el $A E$ está enfocado en los problemas aditivos y el tratamiento del tema solicita que los alumnos lleguen a encontrar la relación de la multiplicación y la suma repetida siendo el $T t$ quien presenta un nivel de dificultad mayor a lo que solicita el $A E$.

En los bloques IV y V la no hay congruencia puesto que el aprendizajes esperado se enfoca en un tema no coincidente con la multiplicación.

Tabla 20. 3 Congruencias en tercer grado

BI	Aprendizaje esperado	Tratamiento del tema	Congruencias
D6 D7 D8 D9 D10	Produce, lee y escribe números hasta de cuatro cifras. Resuelve problemas que implican el cálculo mental o escrito de productos de dígitos. Resuelve problemas que implican la lectura y el uso del reloj.	Desarrollo de estrategias para el cálculo rápido de los productos de dígitos necesarios al resolver problemas u operaciones. Uso de caminos cortos para multiplicar dígitos por 10 o por sus múltiplos (20, 30, etcétera).	$A E \cong T t \cong D$
BII	Resuelve problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos.	Resolución de multiplicaciones cuyo producto sea hasta del orden de las centenas mediante diversos procedimientos (como suma de multiplicaciones parciales,	$A E \cong T t \cong D$

		multiplicaciones por 10, 20, 30, etcétera)	
BIII	Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$.	Resolución de problemas de división (reparto y agrupamiento) mediante diversos procedimientos, en particular el recurso de la multiplicación.	$A E \neq T t \cong D$
D44 D45	Utiliza el algoritmo convencional para resolver sumas o restas con números naturales.		
BIV	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.	Identificación y uso de la división para resolver problemas multiplicativos, a partir de los procedimientos ya utilizados (suma, resta, multiplicación).	$A E \cong T t \cong D$
D57 D58 D59	Resuelve problemas que implican efectuar hasta tres operaciones de adición y sustracción.	Representación convencional de la división: $a \div b = c$.	
BV	Resuelve problemas que impliquen dividir mediante diversos procedimientos.		
D70 D71 D72	Utiliza unidades de medida estándar para estimar y medir longitudes.	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para la división entre un dígito. Uso del repertorio multiplicativo para resolver divisiones (cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo).	$A E \neq T t \neq D$

En las congruencias de tercer grado se puede advertir que en el quinto bloque no existe congruencia en ninguno de los contenidos, existe congruencia en los tres contenidos en el bloque I y en el bloque II, en dos de cinco bloques existe congruencia entre el A E y el T t, solo en el último bloque no se encontró congruencia entre el T t y el D.

No se encontró congruencia en el bloque III, el A E plantea que el niño debe lograr hacer operaciones de reparto del tipo $\frac{m}{2^n}$, y en T t se propone que el alumno ya utilice la multiplicación como recurso para la resolución de problemas de reparto.

En el bloque V el A E está enfocado en un tema diferente al del T t.

Cabe aclarar que en el bloque IV se presentan tres aprendizajes esperados de los cuales solo uno es congruente con el tratamiento del tema, por lo tanto se presentan dos congruencias en la tabla.

En este análisis se encontraron diversos desafíos que no se encuentran dentro del tema (multiplicación) o eje temático (Sentido numérico y pensamiento algebraico) que propone el Plan y Programas, sin embargo, se tomaron en cuenta por que el contenido de estos desafíos es relevante para la enseñanza de la multiplicación.

En el segmento de la tabla 20.4. Congruencias de cuarto grado muestran cuatro desafíos (D1 del BI y D46, D47, y D48 del BIII) los cuales pertenecen al mismo eje temático Sentido numérico y pensamiento algebraico, pero no están dentro del tema problemas multiplicativos, estos pertenecen a tema Numeración y sistemas de numeración.

Tabla 20. 4 Congruencias en cuarto grado

BI	Aprendizaje esperado	Tratamiento del tema	Congruencias
D1 D12 D13 D14	Identifica fracciones equivalentes, mayores o menores que la unidad. Lee información explícita o implícita en portadores diversos.	Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.	$A \neq T \text{ t} \cong D$
BII	No hay desafíos que correspondan al tema de problemas multiplicativos, por lo tanto no existe tampoco algún aprendizaje esperado que coincida con el tema.		
BIII D46 D47 D48 D53 D54 D55 D56 D57 D58 D59 D60	Compara y ordena números naturales de cuatro cifras a partir de sus nombres o de su escritura con cifras. Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son equivalentes, y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales. Identifica problemas que se pueden resolver con una multiplicación y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que es necesario.	Desarrollo de un algoritmo de multiplicación de números hasta de tres cifras por números de dos o tres cifras. Vinculación con los procedimientos puestos en práctica anteriormente, en particular, diversas descomposiciones de uno de los factores. Resolución de problemas en los que sea necesario relacionar operaciones de multiplicación y adición para darles respuesta.	$A \cong T \text{ t} \cong D$
BIV D74 D75 D76 D77 D78	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones compuestas. Resuelve problemas que implican sumar o restar	Desarrollo y ejercitación de un algoritmo para dividir números de hasta tres cifras entre un número de una o dos cifras.	$A.E. \cong T \text{ t} \cong D$

	números decimales. Resuelve problemas que impliquen dividir números de hasta tres cifras entre números de hasta dos cifras. Resuelve problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de un rectángulo cualquiera, con base en la medida de sus lados.		
BV	Identifica y genera fracciones equivalentes.	Análisis del residuo en problemas de división que impliquen reparto.	$A E \neq T t \cong D$
D100 D101	Utiliza el cálculo mental para obtener la diferencia de dos números naturales de dos cifras.		

En cuarto grado, igual al segundo en el bloque II no hay contenidos que aborden el tema de la multiplicación, en los cuatro bloques restantes en tres de ellos existe congruencia entre los 2 contenidos que estamos contrastando A E, T t y D, es en el primer y quintobloque de este grado donde no se encontró congruencia entre el A E y el T t, el A E es de un tema no coincidente con la multiplicación, en los cuatro bloques existe congruencia entre el T t y el D.

En el segmento de la tabla 18.5. Congruencias de quinto grado al igual que en la tabla anterior se muestran nueve desafíos (D17, D18, D19 del BI; D33, D34, D35 del BII; y D55, D56, D57 del BIII) que a diferencia de los grados anteriores pertenecen al eje temático Manejo de la información y al tema de Proporcionalidad y funciones.

Tabla 20. 5 Congruencias en quinto grado

BI	Aprendizaje esperado	Tratamiento del tema	Congruencias
D3 D4 D5 D6 D17 D18 D19	Identifica rectas paralelas, perpendiculares y secantes, así como ángulos agudos, rectos y obtusos.	Anticipación del número de cifras del cociente de una división con números naturales. Conocimiento y uso de las relaciones entre los elementos de la división de números naturales.	$A E \neq T t \cong D$
BII D24 D25 D33	Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros.	Resolución de problemas que impliquen una división de números naturales con cociente decimal.	$A E \neq T t \cong D$

D34 D35			
BIII			
D40 D41 D42 D55 D56 D57	Calcula el perímetro y el área de triángulos y cuadriláteros. Resuelve problemas de valor faltante en los que la razón interna o externa es un número natural.	Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.	$A E \cong T t \cong D$
BIV			
D65 D66	Resuelve problemas que implican sumar o restar números fraccionarios con igual o distinto denominador. Identifica problemas que se pueden resolver con una división y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que sea necesario. Describe rutas y ubica lugares utilizando sistemas de referencia convencionales que aparecen en planos o mapas. Resuelve problemas que implican conversiones entre unidades de medida de longitud, capacidad, peso y tiempo. Resuelve problemas que implican leer o representar información en gráficas de barras.	Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.	$A E \not\cong T t \cong D$
BV			
D84 D85 D86	Explica las similitudes y diferencias entre el sistema decimal de numeración y un sistema posicional o no posicional. Usa fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales. Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética o geométrica. Resuelve problemas que implican multiplicar números decimales por números naturales.	Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada.	$A E \cong T t \cong D$

En el segmento anterior correspondiente a quinto grado se encuentra congruencia entre los tres contenidos contrastados en dos de los cinco bloques del grado, de

igual forma existe congruencia en los cinco bloques entre el T t y los D, en tres bloques de cinco no existe congruencia entre el A E y el T t.

En los bloques I, II, IV no se encontró coincidencia entre el A E y T t, los aprendizajes esperados no se refieren al tema de la multiplicación.

Tabla 20. 6 Congruencias en sexto grado

BI	Aprendizaje esperado	Tratamiento del tema	Congruencias
D8 D9 D10	Resuelve problemas que impliquen leer, escribir y comparar números naturales, fraccionarios y decimales, explicitando los criterios de comparación. Resuelve problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios que implican dos o más transformaciones. Describe rutas y calcula la distancia real de un punto a otro en mapas.	Resolución de problemas multiplicativos con valores fraccionarios o decimales mediante procedimientos no formales.	$A E \cong T t \cong D$
BII D27 D26	Calcula porcentajes e identifica distintas formas de representación (fracción común, decimal, %).	Construcción de reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100, 1000, etcétera.	$A E \cong T t \not\cong D$
BIII D37 D38 D39 D40	Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos o trazar figuras en el primer cuadrante. Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y el Sistema Inglés de Medidas. Resuelve problemas que involucran el uso de medidas de tendencia central (media, mediana y moda)	Determinación de múltiplos y divisores de números naturales. Análisis de regularidades al obtener los múltiplos de dos, tres y cinco.	$A E \not\cong T t \cong D$
BIV D60 D61 D62	Explica las características de diversos cuerpos geométricos (número de caras, aristas, etc.) y usa el lenguaje formal.	Resolución de problemas que impliquen calcular una fracción de un número natural, usando la expresión “ a/b de n ”.	$A E \not\cong T t \cong D$
BV D79 D80 D81	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética, geométrica o especial. Resuelve problemas que	Resolución de problemas que impliquen una división de número fraccionario o decimal entre un número natural.	$A E \cong T t \cong D$

	implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales. Resuelve problemas que implican comparar dos o más razones.		
--	--	--	--

En el segmento de sexto grado como se puede observar de cinco bloques, existe congruencia entre el A E y T t en tres de ellos, únicamente en uno, de los cinco bloques no existe congruencia entre el T t y los D, la no congruencia presentada entre el T t es por el hecho de proponer que el alumno debe construir reglas para multiplicar por 10 100 y 1000 y en el D únicamente se realizan juegos para memorizar hechos básicos en los resultados.

En el bloque III y IV la no congruencia entre el A E y el T t se debe a la pertenencia a temas diferentes, de todos los aprendizajes esperados en los bloques ninguno corresponde al tema de la multiplicación.

Se puede advertir la dominancia de las no congruencias en el tema de la multiplicación a lo largo de la educación primaria, ya que de los 28 bloques donde se trabaja el tema de la multiplicación es en 16 donde se presenta la no congruencia entre el A E con el T t, siendo un 55% del total.

En sexto es dos congruencia de cinco posibles, en quinto es dos congruencias de cinco posibles, en cuarto son dos congruencias de cuatro posibles, en tercero son dos congruencias de cinco posibles, de segundo es una congruencia de cuatro posibles y de primero son tres congruencias de cinco posibles.

De los seis grados es en sexto con tres incongruencias de cinco y en segundo con tres incongruencias de cuatro donde se encuentra la el mayor número de incongruencias entre A E y el T t. Es importante señalar de igual forma que es en primero y en cuarto grado donde se encuentra la mayor cantidad de congruencias entre el A E y el T t.

4.3 Clasificación de los problemas aditivos y multiplicativos en educación primaria

Como parte del análisis de resultados se muestra la Tabla 21. Problemas multiplicativos, clasifica los desafíos (actividades, problemas y/o ejercicios) de cada grado de segundo a sexto de primaria.

De acuerdo al análisis de los libros de texto, los desafíos y consignas se clasificaran de acuerdo a sus características por desafíos, conviene mencionar casos específicos en los que una de las consignas dentro de un desafío tiene una clasificación diferente.

En la Tabla el número que se mostrado es el del desafío designado en cada libro y el número de la consigna en cada uno de los cuadros dependiendo el caso, si todo el desafío tiene una tipología se clasificara el desafío completo pero si el desafío tiene consignas de diferentes tipologías estas se clasificaran por consigna. A lado del número de cada desafío de ser necesario se colocara una J que indica que el desafío se trabaja con una dinámica de juego. Dentro de la tabla se presentan el total de desafíos dedicado a la clasificación establecida en este trabajo, para al final de esta realizar una suma total de los desafíos propuestos a lo largo de la primaria.

Tabla 21. Clasificación de los problemas multiplicativos

Clasificación	Problemas multiplicativos																				Total de desafíos por tipología						
	Segundo grado					Tercer grado					Cuarto grado					Quinto grado						Sexto grado					
	Bloques					Bloques					Bloques					Bloques						Bloques					
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V			
Problemas que usan como estrategia la suma iterada	10		36 35 J																							3	
Problemas de isomorfismo de medidas Vergnaud (1983, 1988)				44 45 46		7 10	21		58		12			47 53 58 59						84							13
Problemas de producto de medidas Vergnaud (1985)				45 46.2			22				14			74													5
Problemas de producto cartesiano Greer (1992)				46.1							13																2
Problemas de agrupamiento y partición de Carpentier et al (1999)	11			56 57				44 45																			5
Problemas en los que se pida reconocer la operación que puede utilizarse para resolverlo.				54		8																					2
Problemas en los que se plantee una operación y se pida que digan qué problema puede resolverse con ella														60 45 J													2

Identificar la operación que resuelve un problema cuya solución implica una multiplicación.						9 J					1															2
Identificar la multiplicación y la división como operaciones inversas								57 59					48	75					65 66							6
Utilizar el cuadro de la multiplicación, como estrategia en la resolución				55 J		6.1 J					57 56 55		70													6
Algoritmo de la división con diferentes procesos						6.2				72 J				76 77 78		3 4										7
Problemas de división de medida y partitiva Kouba (1989)										71																1
Problemas de reparto equitativo (1999)															100 101											2
Problemas de reconocimiento de los componentes de la división y la multiplicación									70							5 6		40 41 42				37.1			7	
Problemas de proporcionalidad directa e inversa valor constante																19	33 34 35	56							5	
Problemas de proporcionalidad de valor faltante																17		55							2	
Problemas de proporcionalidad de valor unitario																18									1	

Multiplicación o división de un número natural por una fracción																					8			61		2
Multiplicación o división de una fracción por una fracción																										1
Multiplicación o división convencional de un número natural por un número decimal																	24 25		85 86					81		5
Multiplicación o división convencional de un número decimal por un número decimal																					10					1
Encontrar múltiplos de 2, 3 y 5																								37.2 38 J 39 J 40 J		4
Multiplicaciones convencionales con 10, 100 y 1000																						26 27				2
Problemas para calcular una fracción de un número natural																								60 62	79 80	4
Total de desafíos por bloque	2		2	6	4	6	2	2	3	3	7		9	4	2	7	5	5	2	3	3	2	5	3	3	91
			14					16					22					22					16			

En el apartado de la tabla que pertenece al segundo grado el total de desafíos es trece, pero en del desafío 46 una de las consignas fue necesario separarla ya que tiene características de producto cartesiano, si bien esta puede ubicarse en la clasificación producto de medidas de Vergnaud (1985), sus características de correspondencia pertenecen a el producto cartesiano de Greer(1992) en esta clasificación especifica que la correspondencia y características del problema le exige al alumno un razonamiento diferente, igual al de segundo grado, en tercero se separa una consigna del desafío 6.

En la misma tabla se puede advertir la clasificación con el mayor número de desafíos vistos en educación primaria es de Problemas de isomorfismo de medidas Vergnaud (1985) con un total de 13 desafíos, presentados de manera frecuente en segundo, tercero y cuarto grado, teniendo solo un desafío en quinto y ninguno de estas características en sexto.

La clasificación de producto de medidas de Vergnaud (1985) no tiene presencia en los últimos dos grados de la primaria, y solo son cinco los desafíos que coinciden con esta clasificación en primaria.

La estructura de la tabla no permite ver cómo van avanzando los contenidos a lo largo de la primaria, por ejemplo:

Se advierte que es en los primeros tres grados de primaria partiendo desde segundo grado donde se abordan clasificaciones con problemas y es en los últimos dos grados donde se puede observar un incremento en los contenidos de operatividad de la multiplicación y la división.

Existen clasificaciones que solo tienen un desafío correspondiente, estas clasificaciones son: problemas de división de medida y partitiva en tercer grado, problemas de proporcionalidad de valor unitario con un desafío en quinto, multiplicación o división de una fracción por una fracción y el ultimo multiplicación o división de un numero decimal por un numero decimal.

A continuación se presenta la segunda tabla de clasificación pero en esta se incluyen los desafíos de primer grado, como se había mencionado anteriormente,

en primero se tomaron desafíos y problemas que correspondientes al tema de problemas aditivos, como antecedente de la multiplicación.

Tabla 22. Clasificación de los problemas aditivos

Clasificación	Bloques					Total de desafíos por tipología
	I	II	III	IV	V	
Problemas de igualación Carpentier y Moser (1983)	12 14					2
Problemas de unión y separación Carpentier y Moser (1983)	13	24				2
Problemas de cambio Heller y Greeno (1978)		27 28	35			3
Problemas de combinación Heller y Greeno (1978)			36			1
Identificar los símbolos de las operaciones suma y resta		25J 26 J				2
Problemas con números (operaciones sumas y restas)			34 37	48 J 49 J	55 56 J 57	7
Sucesión de sumas y restas			33 J			1
Total de desafíos por bloque	3	5	5	2	3	18

Como se puede advertir en la tabla anterior la clasificación que domina en los desafíos abordados en primero pertenecen a problemas con números (operaciones sumas y restas) en siete desafíos. El resto de las clasificaciones tienen entre 2 y 3 desafíos, pero hay dos que tienen únicamente un desafío perteneciente Problemas de combinación Heller y Greeno (1978) un desafío en el bloque III y la sucesión de sumas en el bloque tres que como la nomenclatura descrita al inicio indica que se trata de un juego.

4.5 Aprendizajes esperados una visión progresiva en educación primaria

Cuadro 2 Visión progresiva de los aprendizajes esperados

Sentido numérico y pensamiento algebraico en el tema de la multiplicación y la adición	Educación primaria					
	Segundo periodo escolar			Tercer periodo escolar		
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
	<p>Modela y resuelve problemas aditivos con distinto significado y resultados menores que 100, utilizando los signos +, -, =.</p> <p>Resuelve problemas que implican identificar relaciones entre los números (uno más, mitad, doble, 10 más, etcétera).</p>	<p>Resuelve problemas aditivos con diferentes significados (como la suma iterada) modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.</p>	<p>Resuelve problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos.</p> <p>Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$.</p> <p>Resuelve problemas que impliquen dividir mediante diversos procedimientos.</p>	<p>Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son equivalentes, y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales.</p> <p>Identifica problemas que se pueden resolver con una multiplicación y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que es necesario.</p> <p>Resuelve problemas que impliquen dividir números de hasta tres cifras entre números de hasta dos cifras.</p> <p>Resuelve problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de un rectángulo cualquiera, con base en la medida de sus lados.</p>	<p>Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.</p> <p>Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas</p> <p>Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada</p>	<p>Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.</p>

El cuadro anterior presenta los aprendizajes esperados que se plantean a lo largo de la educación primaria y está estructurada por periodo y grado escolar, todos los aprendizajes esperados que se muestran son del tema de la multiplicación de

segundo a sexto grado y del tema de adición de primer grado como antecedente de la multiplicación.

El aprendizaje esperado más complejo en primaria se encuentra en sexto grado y en este se espera que el alumno logre multiplicar o dividir números fraccionarios y decimales por un número natural este aprendizaje no especifica si el alumno debe o no utilizar el algoritmo de la multiplicación o alguna otra estrategia para la resolución, como antecedente de este aprendizaje se ve en quinto grado la multiplicación de números decimales por números naturales y en este caso sí se especifica que el alumno debe tener en cuenta que una de las estrategias de resolución a utilizar es la suma iterada.

Uno de los aprendizajes esperados abordados en quinto grado consiste en como el alumno relaciona la multiplicación y la división como operaciones inversas, es en este grado de igual forma donde se abordan los elementos de la división y la expresión $r = D - (d \times c)$, con la cual se espera alcanzar y demostrar la relación de ambas operaciones. Esta clase de aprendizaje se espera que el alumno relacione operaciones solo está presente en quinto grado, como se puede ver en la tabla no hay antecedentes en los aprendizajes de grados anteriores.

Es en cuarto grado donde se cargan los aprendizajes esperados para el tema de la multiplicación, uno de los aprendizajes esperados en cuarto grado se propone que el alumno debe utilizar el algoritmo convencional de la multiplicación en los casos necesarios, pero como antecedente de este aprendizaje no existe ninguno donde se aborde el algoritmo convencional o una forma en la que el alumno pueda llegar a él, es en tercer grado donde se presenta un aprendizaje esperado que podría ser antecedente de este, sin embargo no es claro como se observa en segundo y primer grado las estrategias que se piden utilizar son de suma iterada o procedimientos no convencionales como lo es el algoritmo para la resolución de problemas de tipo multiplicativo.

En tercer grado se presenta un caso similar al de quinto, ya que es en el mismo grado donde se presenta un aprendizaje esperado como antecedente de un aprendizaje complejo, se puede observar en tercero que el aprendizaje esperado

complejo consiste en que resuelvan problemas de división donde se trabajen diferentes estrategias de resolución, y como antecedente se muestra la resolución de problemas de reparto en donde el resultado sea una fracción con la forma $\frac{m}{2^n}$ medios, cuartos octavos , la finalidad es expresar oralmente o por escrito estas medidas, es importante aclarar que es en este grado y en este aprendizaje esperado donde se ve por primera vez las fracciones.

Como antecedente de la multiplicación en primero y segundo grado esta la suma iterada como un acercamiento no convencional y como una estrategia de resolución.

En la tabla anterior no se ve como se aborda la multiplicación en un sentido estricto ya que nunca se habla sobre las tablas de multiplicar y/o el cuadro de la multiplicación en los aprendizajes esperados, considerando que este sí debería ser un aprendizaje base para empezar a entender cómo trabajar la multiplicación y las diversas propiedades y características para ejecutar el algoritmo y dar solución a los problemas de tipo multiplicativo.

Se puede ver que los contenidos en los aprendizajes esperados no están presentes explícitamente con lo propuesto por Castro (1987) sobre lo considerado necesario para el aprendizaje de operaciones y las distintas etapas.

Como parte de las acciones necesarias para posteriormente alcanzar un concepto operativo solamente se puede ver en segundo la suma iterada como una acción necesaria y el reparto en la división, sin embargo, este último no viene explícito en el cuadro anterior pero puede presentarse en los diversos procedimientos para realizar divisiones.

No se analizaron los modelos presentados en los contenidos del paquete curricular.

Los hechos numéricos y las tablas de multiplicar no se tienen en cuenta en los aprendizajes esperados en primaria, sin embargo, estas etapas si aparecen en los contenidos de los libros de texto con el cuadro de la multiplicación y actividades de memorización para el aprendizaje de las tablas.

La simbolización únicamente se ve en los signos +, - e =, en primero, y en quinto grado se puede ver una de las representaciones de la división.

Finalmente el algoritmo no se prioriza en los aprendizajes esperados ni en memorización, operatividad o comprensión.

CONCLUSIONES

Este apartado presenta las conclusiones obtenidas a partir del análisis realizado a Plan y programas de estudio, así como al tratamiento didáctico de los libros de texto del maestro y el alumno de 2013 establecidos por la SEP.

Se expondrán de acuerdo a los objetivos planteados en esta tesis, iniciando con los específicos y posteriormente el objetivo general.

Respecto al objetivo específico; analizar la propuesta didáctica en el paquete curricular en el tema de problemas aditivos como antecedente de la multiplicación de primer grado. Cabe recordar que esta tesis considera los problemas multiplicativos aquellos que involucran la multiplicación y la división.

El análisis en los documentos oficiales arrojó que no existe una especificación donde se exponga la necesidad de tomar en cuenta la suma y la resta como antecedente de la multiplicación y la división, sin embargo, si se percibe un interés por que los alumnos alcancen el dominio de los algoritmos de la suma y la resta, esta tesis se dio a la tarea de revisar cuántos y cuáles de los desafíos de primero se presentan para que el alumno adquiriera conocimientos y desarrolle habilidades sólidas para iniciar con acercamiento no convencionales de la multiplicación como lo puede ser la suma y la resta iterada, no obstante, es necesario tener claro que una suma iterada no es una multiplicación y una resta iterada no es una división.

No se encontró un tratamiento como antecedente de la multiplicación en los dieciocho desafíos, ya que en ninguno de ellos se requiere realicen una operación de más de dos sumandos o incluso de que sean sumandos iguales como lo es la característica de una suma iterada. En los aprendizajes esperados en el último bloque de primero se propone que los alumnos identifiquen las relaciones entre los números como uno más, mitad, doble y 10 más. En este se encuentra una palabra que si bien no es la idea de realizar sumas iteradas de más de dos sumandos si se propone que existan problemas con dos sumandos iguales (doble) pero al revisar la propuesta en el tratamiento del tema no se presentan sumandos iguales en el primer grado.

En relación al segundo objetivo específico, relativo a establecer la cantidad y los tipos de problemas planteados en la educación primaria perteneciente al tema de la multiplicación, la clasificación que se utilizó fue la correspondiente a las pruebas estandarizadas EXCALE y PLANEA descritas en el capítulo 1, isomorfismo de medidas y producto de medidas de Vergnaud (1985) estas sirvieron de base para establecer la tipología de problemas en los libros de texto.

Se puede decir que en las cinco clasificaciones de problemas multiplicativos expuestas por las pruebas estandarizadas domina la clasificación de Vergnaud (1985) de isomorfismo de medidas con un total de 13 desafíos de 91 que abordan el tema de la multiplicación en primaria con un promedio de 3 a 5 desafíos por grado de segundo al quinto.

Caso contrario a lo que sucede con la clasificación identificar la operación que resuelve un problema cuya operación implica una multiplicación ya que solo se presentan dos desafíos en primaria que correspondientes a esta clasificación.

En educación primaria no se encontró ningún tratamiento del tema, aprendizaje esperado e intención didáctica que pertenezca a la clasificación del reactivo cuando se pide al alumno reconocer el problema que corresponde a una multiplicación dada, los alumnos no se enfrentan a esta clase de problemas a lo largo de la primaria.

Una de las clasificaciones que se aborda en las pruebas estandarizadas es producto de medidas de Vergnaud (1985) de esta clasificación en primaria solo se abordan cinco desafíos de segundo al cuarto grado y no se vuelven a trabajar en primaria.

Teniendo como base las cinco clasificaciones que presentan las pruebas estandarizadas se encontraron 18 más que si bien no se abordan en las pruebas sí arrojan información sobre el dominio alcanzado por un alumno al egresar de primaria o al concluir cada grado.

Finalmente de este objetivos se puede decir que existen ocho desafíos con correspondencia a actividades, juegos o dinámicas las cuales se proponen para que el alumno pueda relacionar, memoriza e incluso ejercitar con hechos básicos correspondientes a problemas multiplicativos y sus diferentes representaciones.

El tercer objetivo específico correspondiente a examinar la congruencia del tratamiento didáctico con los aprendizajes esperados en los seis grados de Educación Primaria en el tema de la multiplicación, tiene relación con las tablas de congruencia en las que se presenta un porcentaje de no congruencias del 55% lo cual indica que no hay correspondencia entre lo que se propone en los aprendizajes esperados y lo que se trabaja en los libros de texto de acuerdo con el tratamiento del tema de cada uno.

Las razones de las no congruencias en su mayoría son debidas a que el aprendizaje esperado establecido por los programas de estudio y el tratamiento del tema no coinciden, las no congruencias derivan en dos sentidos el aprendizaje esperado que no concuerda con el tema trabajado y el dominio que se requiere alcanzar y el tratamiento dado tienen diferentes niveles, de manera análoga para la comparación entre el T t y el D, de donde no es claro si lo establecido en los aprendizajes esperados o lo propuesto por el tratamiento del tema es lo idóneo.

El último objetivo específico relativo en construir una visión panorámica de la propuesta didáctica de la multiplicación en los libros de texto *Desafíos matemáticos de 2013*, de Educación Básica de nivel primaria, al cual le corresponde el cuadro visión progresiva de los aprendizajes esperados donde se puede advertir de acuerdo a la operatividad de la multiplicación es en segundo grado donde se inicia la suma iterada como aprendizaje previo a la multiplicación y un algoritmo convencional se presenta hasta cuarto grado, sin embargo se puede notar que no hay aprendizajes previos sobre los signos y componentes de la multiplicación y su correspondencia.

Se puede observar en el cuadro como parte del acercamiento informal a los problemas multiplicativos se encuentran los aprendizajes:

- Resuelve problemas aditivos con diferentes significados (como la suma iterada) modificando el lugar de la incógnita y con números de hasta dos cifras.
- Resuelve problemas que implican multiplicar mediante diversos procedimientos.
- Resuelve problemas que impliquen dividir mediante diversos procedimientos
- Resuelve problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de un rectángulo cualquiera, con base en la medida de sus lados.

Aprendizajes que favorecen la simbolización:

- Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$.
- Análisis de las relaciones entre los términos de la división, en particular, la relación $r = D - (d \times c)$, a través de la obtención del residuo en una división hecha en la calculadora.

Aprendizajes de formalización:

- Identifica problemas que se pueden resolver con una multiplicación y utiliza el algoritmo convencional en los casos en que es necesario.
- Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son equivalentes, y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales
- Resolución de problemas que impliquen multiplicaciones de números decimales por números naturales, con el apoyo de la suma iterada
Análisis de las relaciones entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.
- Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales con números naturales.

El objetivo general de esta tesis consiste en analizar la operatividad de la multiplicación y los tipos de problemas de estructura multiplicativa planteados en la

propuesta didáctica del paquete curricular de Educación Primaria., lo desprendido del análisis en relación a este objetivo es la propuesta presenta inconsistencias para alcanzar los propósitos generales como que el alumno utilice el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos. Cuando en la primaria solo en dos desafíos se abordan las operaciones concretas para realizar multiplicaciones.

El otro propósito relacionado con el tema consiste en que el alumno identifique conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, calculen valores faltantes, porcentajes, y apliquen el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos, sin embargo en tratamiento de este tema como se puede ver a lo largo del análisis realizado los desafíos relacionados a problemas de proporcionalidad consisten en el registro de tablas y no en el cálculo.

Las actividades que se realizan a lo largo de la primaria con la finalidad de formar bases para que los alumnos ejecuten, comprendan y apliquen la multiplicación son poco claros en el paquete curricular de primaria, ya que se considera necesario se aborden con material manipulable para la comprensión y no únicamente ejercicios en hoja y lápiz, dando mayor peso a la visualización.

Es importante manifestar lo sucedido con la simbolización de la multiplicación, no se da el énfasis debido a los diferentes elementos de la multiplicación desde el símbolo hasta los factores que intervienen y el producto que se obtiene como resultado.

Del mismo modo se presenta un algoritmo convencional pero no se explica porque tienen esa forma, como es que se acomodan los factores de esa manera y cómo funciona la resolución. Por lo tanto el algoritmo que se presenta no alcanza a cumplir con las características de nitidez, por que la resolución del algoritmo no se alcanza un proceso mecánico por parte de los alumnos.

La eficacia no se cumple al no presentarse una serie de pasos definidos lo suficientemente simples para la ejecución de este algoritmo.

Al no cumplir con estas características el aprendizaje, ejecución y aplicación de la multiplicación requiere revisarse en la propuesta planteada en el paquete curricular de 2011.

Finalmente este trabajo aporta elementos para el inicio de un análisis más meticulado que es requerido grados por grado dado los objetivos específicos anteriores, del mismo modo se sugiere teniendo como apoyo esta tesis se pueda realizar una investigación sobre el papel del alumno propuesto por el libro de texto y por el Plan y Programas de estudio.

BIBLIOGRAFÍA

- Ávila, A. (1986). *Reseña crítica de los programas de matemáticas propuestos por la SEP para la escuela primaria mexicana (1944-1986)*. México. UNAM.
- Barrios, D. (2017). *Japón y México: la multiplicación en los libros de texto, análisis comparativo*. Tesis de licenciatura. México. UPN.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990): *Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos*. Investigaciones Psicológicas, 8, pp. 23 - 41.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990). *La operación de sumar*. En V. Bermejo (Ed.), *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós. Bloom.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1992). *Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de solución*. Investigaciones Psicológicas II, pp. 21-45
- Carpenter, T. y Moser, J. (1983). *The acquisition of addition and subtraction concepts*. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes* (pp. 7 - 44). NY: Academic Press.
- Carpenter, T., Moser, J. y Bebout, H. (1988). *Representation of addition and subtraction word problems*. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 345-357.
- Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Granada: Universidad de Granada.
- Castro, E. Castro, E. y Rico, L. (1995) *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Buenos Aires: Grupo Iberoamericano. pp. 18-20

- Castro-Rodríguez, Elena & Castro, Enrique. (2010). *El desarrollo del pensamiento multiplicativo*. UNO. 54. pp.31-40.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares.
- Castro, E. y Castro, E. (1996). *Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa*. En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares. pp.119-141.
- Castro, E. y Castro, E. (2010). *El desarrollo del pensamiento multiplicativo*. UNO. 54. pp.31-40.
- Cazares, J. A. (2007). *El desarrollo de la competencia aritmética en estudiantes de primaria en la formulación de problemas*. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico*. Granada: Editorial de la Universidad de Granada. pp. 29-49.
- Cedillo, J. L. (2016). *El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011*. Tesis de licenciatura. México. UPN.
- Dopico, C., (2001). *Adquisición y desarrollo del concepto de división en la educación Primaria: sentencias numéricas y problemas verbales*. Tesis doctoral. UCM.
- Fernández, F., Castro, E., Segovia, A. y Rico, L. (1996). *El lenguaje matemático*. En A. Romero (Coord.), *Lenguaje y enseñanza*. Granada: Fundación Educación y Futuro. pp.317-344

- Greeno, J. G. (1991). *Number sense as situated knowing in a conceptual domain*.
Journal for Research in Mathematics Education, 22(3). pp. 170-218.
- Greeno, J.G., Riley, M.S. y Gelman, R. (1984). *Conceptual competence and children's counting*. Cognitive psychology, 16. pp.94-143.
- Greer, B. (1992). *Multiplication and division as models of situations*. En D.A. Grouws (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 276-295). New York: Macmillan Publishing Co.
- Greer, B. (1994). *Extending the meaning of multiplication and division*. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics (pp. 61 — 85). Albany, NY: SUNY Press.
- Hamann, M.S. y Ashcraft, M.H. (1986). Textbook presentation
- Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problemsolving*. Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). *Excale-03 2014. Matemáticas: resultados de logro*. Recuperado el 5 de agosto de 2018 de: <http://www.inee.edu.mx>. <http://www.inee.edu.mx/index.php/bases-de-datos/bases-de-datosexcale/excale-03-ciclo-2013-2014>
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). *Excale-06 2013. Matemáticas: Resultados de logro*. Recuperado el 14 de agosto de 2018 de: <http://www.inee.edu.mx>. <http://www.inee.edu.mx/index.php/bases-de-datos/bases-de-datosexcale/excale-06-ciclo-2012-2013>

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). *Resultados Nacionales PLANEA*. Recuperado el 29 de agosto de 2018 de: <http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/final/fasciculosfinales/resultadosPlanea-3011.pdf>

Kouba, V.L. (1989). *Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems*. Journal for Research in Mathematics Education, 20 (2), pp. 147—158.

Kouba, V.L. y Franklin, K. (1993). *Multiplication and division*. En R. Jensen (Ed.), Research ideas for the classroom : Early childhood mathematics (pp. 103 126). New York: Macmillan.

Lajusticia, A., et al. (2019). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Valencia. Universidad de Valencia.

Maza, Gómez, C. (1991). *Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas*. España: Aprendizaje Visor.

Maza, Gómez, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división. Matemáticas cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis

Orton, Anthony. (1998). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teorías y práctica en el aula*. Madrid: Morata

Puig, L y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programa de Estudios 2011 Educación Básica. Primaria*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programa de Estudios 2011: Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria de primer a sexto grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Desafíos matemáticos libro para el alumno de primer a sexto grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Desafíos matemáticos libro para el maestro de primer a sexto grado*. México: SEP.

Vergnaud, Gerard. (1998). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de enseñanza matemática*. México: trillas

Villela, J. A. y Contreras, L.C. (2005). *La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática*. España. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 8 (2), pp. 419-433.