



SECRETARÍA ACADÉMICA
COORDINACIÓN DE POSGRADO
MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

*DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO ESPACIAL EN EDADES TEMPRANAS:
Una propuesta didáctica para la exploración de representaciones 2D y 3D.*

Tesis que para obtener el Grado de
Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta
Yudi Andrea Ortiz Rocha

Directora de Tesis:
Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios por darme la fuerza para culminar este trabajo y permitirme crecer profesionalmente.

A mi esposo, Fredy Peña, por su amor y apoyo incondicional. Gracias por acompañarme en la realización de este proyecto, por las palabras de aliento, por acompañarme semestre a semestre y por compartir conmigo la pasión por la enseñanza.

Agradezco a mi padre, Ignacio Ortiz, por los consejos, valores y principios que me ha inculcado. Gracias a mi maestra de vida, mi madre, Alicia Rocha, por enseñarme a no rendirme e inculcarme el amor por la educación.

Agradezco a mis hermanos, John, Oscar, Cesar y Claudia, quienes desde la distancia me han acompañado y animado a luchar por mis sueños.

Agradezco a mis amigos en México, Oli, Reme, Ivonne, Edda y Carlita, por su apoyo incondicional y por hacerme sentir parte de sus familias.

Agradezco a mi asesora, la Dra. Ivonne, por creer en mí, por acompañarme en mi proceso de formación y por impulsarme a explorar en lo desconocido.

Gracias al Dr. Armando Solares por su apoyo semestre a semestre y por permitirme hacer parte de su grupo de trabajo.

Gracias a la Dra. Ivonne Sandoval, al Dr. Rafael Núñez, la Dra. Alicia Ávila, el Dr. José Luís Cortina y la Dra. Cristina Naya por los aportes dados a esta tesis.

Agradezco al proyecto CN-17-47 *“Pluralidad de significados de igualdad en matemáticas: un estudio comparativo con profesores de educación superior en México y California/Plurality of meanings in the notion of equality in mathematics: A comparative study with higher-education teachers in Mexico and California”*, porque el trabajo de investigación que se ha realizado y las discusiones dadas en cada sesión, han aportado a mi formación académica y profesional.

Agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional de México, al cuerpo de profesores que la conforman y a mis compañeros de semestre por hacerme parte de esta institución y compartir conmigo sus conocimientos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) quien, a través de su apoyo, me ha permitido realizar mis estudios de maestría.

DEDICATORIA

Esta tesis está dedicada a:

A Dios, quien me ama y me ha permitido culminar este trabajo.

A mis padres, Alicia Rocha e Ignacio Ortiz, por su sacrificio para educarnos, su amor para hacer de nosotros mejores personas y su trabajo diario para brindarnos siempre lo mejor. Los admiro y amo mucho, son los mejores padres.

A Fredy, mi compañero de vida, con quien espero seguir compartiendo mis sueños y esta gran aventura.

A Oli, quien me ha brindado apoyo incondicional y quien ha hecho las veces de mi madre mexicana.

A Reme, quien me enseñado a confiar en Dios y a no rendirme frente a las adversidades.

A mi abuelita Andrea quien dejó este mundo y con su partida un gran vacío en nuestras vidas, te extraño, te recuerdo y siempre te amaré.

Contenido

Introducción.....	1
1. Desarrollo del razonamiento espacial: una necesidad en la actualidad.....	5
1.1. Libros de texto: material de apoyo en el aula para el desarrollo del razonamiento espacial.	5
1.2. STEM: Un nuevo desafío educativo con un eje transversal, el razonamiento espacial	6
1.3. Importancia e impacto de las investigaciones de razonamiento espacial en la escuela.....	7
1.3.1. Una mirada al razonamiento espacial desde la investigación.....	7
1.3.1.1. ¿Por qué enseñar el razonamiento espacial?	8
1.3.1.2. ¿Qué utilidad tienen los resultados de las investigaciones para la enseñanza del razonamiento espacial en la educación obligatoria?	10
1.3.1.3. El razonamiento espacial y su incidencia en la resolución de problemas.....	12
1.3.1.4. Habilidades para el desarrollo de actividades que implique el uso representaciones 2D y 3D	14
1.3.1.5. Creación de propuestas didácticas: una necesidad dentro de la investigación.....	15
1.3.2. El razonamiento espacial desde lo curricular.....	16
1.3.2.1. Actividades espaciales en algunos países de Latinoamérica, Canadá y Estados Unidos	17
1.3.2.2. Desarrollo del razonamiento espacial. Ejemplo de actividades del libro de texto gratuito del periodo 2016-2017 (México).....	19
1.4. Aproximación al razonamiento espacial	20
1.4.1. El razonamiento espacial y su compleja definición	20

1.4.2.	Comprensión y transformación: elementos necesarios en la definición de razonamiento espacial del presente estudio	24
1.5.	Delimitación del problema de estudio y preguntas de investigación	28
1.6.	Objetivo General	28
1.6.1.	Objetivos específicos	29
1.7.	Justificación	27
2.	Marco teórico y matemático	30
2.1.	La variación como marco teórico para el diseño y análisis de actividades	30
2.1.1.	Surgimiento de la teoría: breve descripción	30
2.1.2.	Concepción de aprendizaje	32
2.1.2.1.	Objeto de aprendizaje	33
2.1.2.2.	Patrones de variación	36
2.2.	El amplio panorama de las transformaciones isométricas	37
2.2.1.	Transformaciones isométricas en el plano y el espacio	39
2.2.1.1.	Traslación	40
2.2.1.2.	Rotación	47
2.2.1.3.	Simetrías	53
2.3.	Representaciones bi- y tridimensionales	65
3.	Metodología	69
3.1.	Revisión de antecedentes y definición del marco teórico	72
3.2.	Diseño inicial de actividades	73
3.3.	Primer ciclo: implementación de la secuencia	74
3.4.	Rediseño de las actividades	76
3.5.	Segundo ciclo: implementación definitiva	76
3.6.	Construcción de las categorías de análisis	78

3.7.	Análisis de los datos.....	80
4.	Desarrollo de razonamiento espacial: una propuesta de enseñanza	81
4.1.	Propuesta de actividades	81
4.1.1.	Movimientos en el plano	83
4.1.2.	Cambios de dimensión	90
4.1.3.	Construcción de objetos	98
4.1.4.	Proyecto: Construyendo un zoológico	102
4.2.	De lo concreto a lo abstracto: Potencial de los materiales utilizados	104
4.2.1.	Pentominó: Apoyo para movimientos en el plano	105
4.2.2.	Módulo multicubo: Potencial para cambios de dimensiones	107
4.2.3.	Cubo soma: Tecnología útil para comprensión de volumen	109
4.2.4.	Legó Digital Designer: Plataforma digital desde diferentes vistas ...	109
4.2.5.	Bloques de Legó: Gran posibilidad para la creación de formas.....	111
4.3.	Ejes transversales: Trabajo colaborativo y autoevaluación	111
5.	Del plano al espacio, una posible transición en edades tempranas	115
5.1.	Evolución prueba comparativa	115
5.2.	Acciones que evidencian desarrollo del razonamiento espacial.....	124
5.2.1.	Movimientos isométricos en el plano	125
5.2.2.	Trabajo con 3D	134
5.3.	Imaginación y creatividad: construcción de objetos	150
5.3.1.	De la experiencia física a lo digital.....	151
5.3.2.	De ideas a construcciones.....	154
	Conclusiones.....	163
	Referencias bibliográficas	170
	Anexos	I

Anexo 1. Revisión de antecedentes.....	I
Anexo 2. Actividades libro de texto tercero de primaria	II
Anexo 3. Proyecto presentado a la Escuela Alfredo V. Bonfil.....	VI
Anexo 4. Elementos de variación en las actividades	XI
Anexo 5. Prueba diagnóstica/inicial - final.....	XVII
Anexo 6. Hojas de trabajo.....	XIX
Anexo 7. Figuras presentadas en el programa LDD	XXIV
Anexo 8. Representación de los rompecabezas.....	XXV
Anexo 9. Descripción de lo sucedido durante la secuencia	XXVI
Anexo 10. Resultados diagnóstico grupo de control	XLVI

Introducción

La naturaleza social y pensante del ser humano implica necesidades de orden intelectual muy específicas, tal es el caso de comunicar, contar, describir, ubicar, entre otras. En particular, la descripción de los objetos del entorno juega un papel fundamental a la hora de situarse espacial y temporalmente en un contexto determinado.

En respuesta a esta necesidad, por un lado, se encuentra la elaboración de mapas y planos de lugares concretos, y por otro, algunas estrategias específicas para elaborar representaciones de los elementos que se encuentran en la naturaleza. En la actualidad existen propuestas de enseñanza, de aprendizaje y estados del arte que resaltan la importancia de potenciar en el estudiante habilidades de rotación mental, visualización, construcción y manipulación de objetos en diferentes dimensiones desde los primeros grados de escolaridad.

Estas propuestas están sustentadas en el hecho de que son determinantes no solo en la clase de geometría sino en el aprendizaje de las matemáticas en general. Las cualidades espaciales involucradas en las transformaciones de objetos y comprensión del espacio son necesarias también en otros campos y áreas de conocimiento, como lo son la ingeniería, la ciencia y la tecnología. En esta investigación utilizaremos el término *razonamiento espacial* y será entendido como un sistema que reúne cualidades espaciales de comprensión y transformación mental y/o física de objetos (Davis y el Spatial Reasoning Study Group, 2015). Una discusión más amplia se presentará en el apartado 1.4.2.

Como se mostrará en el apartado 1.3.1., las actuales investigaciones se refieren específicamente a potenciar lo que denominan algunos autores como, competencia, habilidad, pensamiento o *razonamiento espacial*. Sin embargo, los estudios están centrados principalmente en describir la importancia de desarrollar habilidades de razonamiento espacial y son pocos los que realizan propuestas de enseñanza y/o aprendizaje enfocados en el desarrollo de estas habilidades.

En las investigaciones de educación matemática hay prevalencia en estudios de álgebra, aritmética y cálculo. En el estado del conocimiento 2002-2011 donde se presenta resultados de investigaciones realizadas en México, Ávila, Block y Carvajal (2013) encontraron que en primaria son pocos los estudios enfocados en geometría y los temas trabajados son volumen y cálculo de áreas. No se identificó alguno sobre razonamiento espacial en este periodo de tiempo.

A nivel internacional, en los últimos años se ha manifestado un creciente interés en investigar sobre el razonamiento espacial, siendo liderado por países como Canadá y Estados Unidos. Sin embargo, es poca en comparación con otras temáticas. Respecto a los países Iberoamericanos hace falta mayor investigación, así como la difusión de sus resultados. Esta tesis pretende aportar en esta línea de investigación.

Desde lo curricular en la educación primaria también se puede identificar ausencias para la enseñanza del razonamiento espacial. Las propuestas, como se mostrará en el apartado 1.3, están restringidas a ubicación espacial por construcción y lectura de mapas; el estudio de relaciones entre formas bidimensionales y tridimensionales se centra en el reconocimiento de sus características, elementos que las conforman, medición y cómo construirlas. Se ha dejado de lado, por ejemplo, el trabajo con cambio de perspectiva, habilidades que se requieren para el trabajo posterior en geometría y medición.

Para desarrollar el pensamiento matemático en los niños, generalmente se proponen tareas en las que el cálculo mental y la solución de problemas se vuelven imprescindibles. Sin embargo, Benítez y Cárdenas (como se citó en Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014) precisan que se ha dejado de lado el desarrollo de habilidades espaciales y geométricas. Los resultados de este estudio muestran que la mayoría de las instituciones escolares, particularmente en primaria, se centran en desarrollar el pensamiento matemático a partir de habilidades de cálculo mental, memorización de fórmulas para hallar perímetros o áreas de polígonos prototípicos y procedimientos mecánicos que involucran las cuatro

operaciones básicas y la resolución de problemas, sin considerar el desarrollo del pensamiento variacional, aleatorio, geométrico y menos aún, el espacial.

Ahora bien, aquellos estudios enfocados en el desarrollo de actividades, materiales o propuestas que favorezcan el desarrollo del razonamiento espacial, parece que no han permeado lo suficiente en las escuelas, pues además de no influir en la adecuación y/o transformación de prácticas docentes, no se identifican claramente actividades que permitan desarrollar esas competencias espaciales, sino que al parecer simplemente las ponen en uso, sin proporcionarle al estudiante oportunidades de aprendizaje.

De las investigaciones identificadas en la revisión para esta tesis, solo una tercera parte están enfocados en primaria (ver apartado 1.3). Autores como, por ejemplo, Gonzato, Díaz Godino y Neto (2011) enfatizan que el desarrollo del razonamiento espacial debe iniciarse desde tempranas edades. Ellos han encontrado que, de ser así, los niños adquieren mayores capacidades para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, mejorando sus habilidades en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos y elaboración de dibujos. Además, según estos autores, el desarrollo del sentido espacial y el reconocimiento de la geometría es un medio para describir y modelizar el mundo físico.

Para atender a la problemática respecto a la falta de propuestas para los primeros grados de primaria, que proporcionan oportunidades de aprendizaje a los estudiantes, en esta tesis se documenta el trabajo de estudiantes de primaria involucrados con actividades para favorecer el discernimiento de características en el cambio de representaciones bi- y tridimensionales como parte del desarrollo de su razonamiento espacial.

El documento de tesis se organiza en cinco capítulos. En el primero se hace un recuento de la literatura encontrada en correspondencia al razonamiento espacial desde dos perspectivas. Por un lado, desde de la investigación y por otro, desde el currículo. También se describe la aproximación conceptual del razonamiento espacial que articula esta tesis. Con estos elementos se precisará el problema de

investigación, los objetivos y finalmente, la justificación de la misma. En el segundo capítulo se mencionan los elementos del marco teórico, la teoría de la variación, que sustentan el diseño y análisis de las actividades que conforman la secuencia didáctica, los elementos matemáticos y las representaciones utilizadas en las actividades. En el tercer capítulo se describen los aspectos de orden metodológico que se tuvieron en cuentas para esta investigación. El cuarto capítulo presenta la propuesta de actividades y los elementos considerados para su diseño y en el quinto capítulo se muestra un análisis de los datos recolectados. Para dar cierre al documento, se presenta un apartado con conclusiones, en este se destacan puntos relevantes del estudio y posibles trabajos de investigación que surgen de esta tesis.

1. Desarrollo del razonamiento espacial: una necesidad en la actualidad

En este capítulo se problematiza el impacto de los libros de texto en la escuela en torno al desarrollo del razonamiento espacial, se describe lo que las investigaciones, propuestas educativas como STEM¹ y el currículo desarrollan en relación con el razonamiento espacial, luego se menciona la definición de razonamiento espacial adoptada para este estudio y finalmente se precisan los objetivos del estudio y su justificación.

1.1. Libros de texto: material de apoyo en el aula para el desarrollo del razonamiento espacial.

El razonamiento espacial se considera una capacidad vital para el actuar y el pensar del ser humano, pero no ha sido siempre identificado y soportado en la escuela (Whiteley, Sinclair y Davis, 2015). El interés y esfuerzo de algunos docentes por apoyar el desarrollo del razonamiento espacial debe trascender y no considerar que éste puede estar soportado por lo propuesto en los libros de texto.

La revisión de algunas actividades que se encuentran en el programa de estudios de la SEP devela, por un lado, que se enfocan en enseñar figuras tridimensionales por medio de dibujos y no se identifica claramente cómo los procesos de imaginación, transformación y movimiento están implicados. Por otro lado, como lo señalan Watson, Jones y Pratt (2013) las actividades propuestas en los libros de texto son variables y se centran en aspectos declarativos como los nombres, las propiedades de las figuras y el formato que encamina a desarrollar ejercicios presentes en pruebas estandarizadas, lo que puede no generar experiencias en los estudiantes que ayuden a su desarrollo cognitivo. El reto de los materiales educativos² (curriculares y didácticos) es proporcionarles a los maestros las herramientas necesarias para que ellos propicien en sus estudiantes experiencias en las que involucren, en este caso, el desarrollo del razonamiento espacial.

¹ Science, Technology, Engineering and Mathematics, por sus siglas en inglés.

² INEE 2016, definición de materiales de apoyo educativo, encontrado en el documento *Infraestructura, mobiliario y materiales de apoyo educativo en las escuelas primarias*.

1.2. STEM: Un nuevo desafío educativo con un eje transversal, el razonamiento espacial

Una de las problemáticas que se ha identificado es que la educación no está preparando a los ciudadanos para ser competentes en los requerimientos de la vida cotidiana y laboral de la actual época. Las competencias del siglo XXI, según National Research Council (2014), son una mezcla de características cognitivas, interpersonales e intrapersonales que pueden apoyar un aprendizaje profundo y la transferencia de conocimiento. Las competencias cognitivas incluyen el pensamiento crítico y la innovación; los atributos interpersonales incluyen la comunicación, la colaboración y la responsabilidad; y los rasgos intrapersonales incluyen flexibilidad, iniciativa y metacognición. Por lo que hay un desafío educativo para los nuevos profesionales y nuevas carreras.

Para responder a esta demanda, a nivel internacional se ha generado una nueva tendencia denominada STEM, cuyas siglas en español significa una interacción entre cuatro grandes campos Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas. Esta propuesta busca desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para desenvolverse en el actual siglo y alfabetizarse en STEM. Lo anterior implica según National Research Council (2014) favorecer habilidades en los estudiantes para que sean innovadores, solucionadores de problemas tecnológicos, conocedores de la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas, de manera que tengan las herramientas para aplicar estos conocimientos en tareas cotidianas y laborales.

Como lo han enfatizado diferentes autores, cuando se potencia el razonamiento espacial se desarrollan habilidades y destrezas en los cuatro campos considerados por el STEM (Newcombe, 2010 y Uttal, et al. 2013). Las personas que se consideran con habilidades espaciales son generalmente exitosas en matemáticas y en campos afines (Wai, Lubinski, y Benbow 2009; Mix y Cheng, 2012). Entonces, el desarrollar habilidades espaciales debería ser un tema de relevancia tanto en investigación en educación matemática como en los planes de estudio propuestos en los currículos.

1.3. Importancia e impacto de las investigaciones de razonamiento espacial en la escuela

En las diferentes investigaciones reportadas en relación con el razonamiento espacial se reconoce éste como vital para el desenvolvimiento del ser humano en el mundo tecnológico en el que nos encontramos. Sin embargo, se encontraron imprecisiones conceptuales. Lo mismo sucede en los documentos curriculares revisados.

A partir de la revisión realizada, un supuesto que surge es que la manera como se concibe el razonamiento espacial determina las actividades planeadas y desarrolladas con los estudiantes. Como se mostrará en este apartado hay una variedad en la terminología usada, pero son pocos los que describen a qué se refieren al hablar, por ejemplo, de visualización, competencia, habilidad, conocimiento, pensamiento o razonamiento espacial.

Los resultados de la investigación se obtuvieron de revistas de investigación en educación matemática y educación respecto a la geometría espacial y el razonamiento espacial (incluyendo las diferentes formas de nominarla).

La revisión curricular se enfocó en algunas propuestas curriculares de Latinoamérica como las de México, Colombia, Chile y Costa Rica y países donde se ha impulsado el trabajo en STEM como es el caso de Canadá y Estados Unidos (NCTM).

Para identificar las investigaciones relacionadas con el razonamiento espacial se realizó, en once revistas, una búsqueda en los últimos siete años y en la revista Suma, se consideraron estudios de finales de los 90's dado que eran los únicos relacionados con razonamiento espacial. De las 12 revistas de investigación en educación matemática, se identificaron pocos artículos en los que se abordan aspectos del aprendizaje y la enseñanza de la geometría (4,7%) y solo un 0,29% aborda de razonamiento espacial, como se muestra en el anexo 1.

1.3.1. Una mirada al razonamiento espacial desde la investigación

Las investigaciones reportadas en los 23 artículos (el equivalente al 4,7% del total de las investigaciones en educación matemática) permiten construir un panorama

global de acercamientos hacia este tema de investigación. En este apartado nos centraremos en la relevancia dada por las investigaciones al razonamiento espacial y el impacto que tienen en la escuela. Además, se describen dificultades reportadas y se concluye con las necesidades resultado de esta revisión en el campo de la investigación en cuanto a razonamiento espacial se refiere.

La importancia del desarrollo del razonamiento espacial será considerada dentro de un ámbito académico, cotidiano y en relación con el tránsito entre formas, figuras y representaciones bi- y tridimensionales. El impacto hace referencia a la incidencia de los resultados de las investigaciones en la escuela y las dificultades descritas son las reportadas en las investigaciones sobre los estudiantes. Finalmente, en el último apartado se señala algunas ausencias en esta línea de investigación.

1.3.1.1. ¿Por qué enseñar el razonamiento espacial?

El estudio de las relaciones espaciales y el desarrollo del razonamiento espacial en los educandos es una necesidad para su buen desempeño no solo en lo académico sino en la vida cotidiana. En relación con lo académico, se señala que el razonamiento espacial es necesario para el desarrollo de las matemáticas avanzadas (Bruce y Hawes, 2015; Mamolo, Ruttenberg-Rozen, Whiteley, 2015 y Hallowell, Okamoto, Romo, y La Joy, 2015) y el desenvolvimiento en otras áreas como en la ciencia, la tecnología, la ingeniería, la arquitectura (Arıcı, y Aslan-Tutak, 2015; Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade y Robitzsch, 2015 y Sinclair, N. y Bruce, 2015), la geografía, la computación gráfica y las artes visuales (Clements y Sarama, 2011 y Vázquez y Noriega Biggio, 2010).

En cuanto a la vida cotidiana, Gonzato, Fernández y Díaz (2011) reconocen que el desarrollo de habilidades en orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos son necesarios para cualquier ciudadano pues requieren ubicarse, desplazarse, leer mapas en los que objetos bi- y tridimensionales pueden estar presentes.

El estudio de la geometría y, en particular, del razonamiento espacial favorece el desarrollo de habilidades requeridas para alguna tarea en específico, pues como

lo señala Hoffer (como se citó en Dindyal, 2015) potencia habilidades visuales (de reconocimiento, observación de las propiedades, mapas de interpretación, proyección de imagen); aptitudes verbales (correcta terminología y la comunicación precisa en la descripción de los conceptos espaciales y las relaciones); habilidades comunicativas (que se comunican a través del dibujo, la habilidad para representar formas geométricas en 2D y 3D, para hacer gráficos de escala, figuras isométricas, croquis) y habilidades lógicas (clasificación, reconocimiento de las propiedades esenciales como criterios, patrones exigentes, formular y comprobar hipótesis, hacer inferencias utilizando ejemplos de contradicción).

Otros autores como Cárdenas (2016), Gómez, Albaladejo y López (2016) y Thom y McGarvey (2015) aunque no señalan específicamente la relevancia del razonamiento espacial en los estudiantes, se puede derivar de las propuestas de actividades, materiales o recursos para potenciarlo.

Considerando las diferentes habilidades que potencia, las áreas académicas y de trabajo en las que influye el razonamiento espacial y su incidencia en la vida cotidiana, este debería ser desarrollado desde los primeros años de escolaridad. Gonzato, Díaz Godino y Neto (2011) mencionan que de ser así los niños tendrían capacidad para construir y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos y elaboración de dibujos, y, por ende, descripción y modelización su mundo físico en el que se desenvuelven.

Esta breve síntesis da cuenta que el razonamiento espacial se debería enseñar considerando que este es indispensable para que los niños descubran, exploren y aprendan del mundo tridimensional en el que viven y de las representaciones que se hace de este, tanto 2D como 3D. Este aprendizaje es útil para el desarrollo de actividades y/o situaciones en la escolaridad, en el trabajo y en lo cotidiano.

1.3.1.2. ¿Qué utilidad tienen los resultados de las investigaciones para la enseñanza del razonamiento espacial en la educación obligatoria?

Un asunto aún pendiente es cómo seleccionar y usar los resultados de investigaciones sobre razonamiento espacial en propuestas curriculares (Davis, Drefs y Francis, 2015).

A partir de los resultados de las investigaciones revisadas para esta tesis es necesario reflexionar cuál es el momento adecuado para iniciar a los estudiantes escolarmente y qué usar a fin de llevar a cabo actividades que involucren un aprendizaje significativo, generándole experiencias para el desarrollo de su razonamiento espacial.

Aunque son pocos los estudios en relación con la enseñanza del razonamiento espacial (como se mostró previamente), los resultados exponen distintas habilidades que se desarrollan y la incidencia que tienen para cualquier ciudadano. Por ejemplo, para potenciar en los estudiantes habilidades visuales, verbales, comunicativas y lógicas, Hoffer (como se citó en Dindyal, 2015) sugiere actividades de construcción de mapas, interpretación de representaciones bi- y tridimensionales en el plano y construcción de formas y figuras. Sin embargo, no es evidente cómo estudios como estos han incidido en la escuela, pues sigue prevaleciendo la enseñanza centrada en aritmética y cálculo enfocadas en lo numérico (Davis, Drefs y Francis, 2015), en nombrar a las formas en el plano y en espacio, en la medición de longitudes y la aplicación de fórmulas de áreas y volúmenes (Benítez y Cárdenas, como se citó en Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014).

Al analizar en conjunto las actividades, recursos y formas de definir razonamiento espacial en las distintas investigaciones, se encuentran relaciones que podrían aportar al diseño de planes de estudio en los diferentes niveles de escolaridad. Según los estudios revisados, en preescolar y primaria se hace alusión más al razonamiento espacial (Bruce y Hawes, 2015; Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley, 2015; Hallowell, Okamoto, Romo y La Joy, 2015; Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade y Robitzsch, 2015) y a partir de la secundaria hacen referencia

más a habilidades espaciales, relaciones, visualización, competencia (Pittalis y Christou, 2010; Mongeau, Pallascio y Allaire, 1990; Bolt, 1998 y Vázquez y Noriega Biggio, 2010). Estas distinciones, desde nuestra perspectiva, ponen de manifiesto los siguientes supuestos.

Por un lado, cuando se considera que el razonamiento espacial se puede desarrollar desde preescolar y los primeros grados de escolaridad creemos que se acepta la incidencia de este en otras áreas como la lingüística, exploración del medio y las matemáticas. Es decir, se reconoce su pertinencia dado que los niños empiezan a descubrir e identificar el espacio en el que viven o se desarrollan. En esta década han aumentado los estudios en esta edad escolar.

Por otro lado, cuando el énfasis está en la educación secundaria y posteriores haciendo referencia a habilidades, relaciones, visualización y competencia espacial, al parecer se admite una maduración cognitiva en los estudiantes para realizar actividades que implique no solo el reconocimiento sino la identificación de características ocultas de alguna forma bi o tridimensional. En estos niveles es donde se concentran la mayoría de estudios identificados.

Los resultados de las investigaciones mencionadas en el apartado 1.3.1.1, permiten vislumbrar que el desarrollo del razonamiento espacial es gradual y continuo a lo largo de la educación a fin de incidir en las capacidades, las facilidades y las relaciones que tienen los niños con el espacio en el que habitan. En consecuencia, es necesario reflexionar, replantearse y cuestionarse sobre el momento adecuado para iniciar la enseñanza de acciones de razonamiento espacial.

Otra relación encontrada fue entre el recurso usado y la edad en la que lo implementan. Los resultados pueden agruparse en dos. i) Cuando trabajan con niños entre los cuatro y ocho años se utilizan libros de texto (Hallowell, Okamoto, Romo y La Joy, 2015), imágenes para pegar en la pared (Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade y Robitzsch, 2015) y hojas para dibujar (Thom y McGarvey, 2015). ii) Cuando el estudio es con personas entre los 14 y 35 años hacen uso del origami (Arıcı y Aslan-Tutak, 2015), material tangible (Mamolo, Ruttenberg-Rozen,

y Whiteley, 2015), uso de software como Geogebra (Gómez, Albaladejo y López, 2016) y películas, más específicamente CUBE (Tadeo, 2004).

Respecto a esta relación, en preescolar y primaria se busca que el estudiante reconozca representaciones bidimensionales de objetos reales y puedan representarlos mediante un dibujo. Para estudiantes a partir de secundaria se pretende que manipulen objetos tridimensionales, bien sea con geometría dinámica o material tangible, y de esa manera se familiaricen más con su entorno y logren conjeturar sucesos relacionados con algún contexto determinado. No obstante, no se dan argumentos de por qué se usan determinados materiales en los diferentes ciclos escolares.

Este análisis pone de manifiesto que en las investigaciones no se ha procurado proporcionar a los más pequeños experiencias suficientes con el espacio, con objetos tridimensionales, es solo hasta secundaria que podrían analizar, desde las matemáticas, el espacio físico en el que viven.

1.3.1.3. El razonamiento espacial y su incidencia en la resolución de problemas

Al realizar tareas de razonamiento espacial, los estudiantes pueden llevar, sin grandes inconvenientes, actividades en las cuales aplican una fórmula, realizan un dibujo pictórico (sin tecnicismo), reconocen figuras prototípicas como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo (si es presentado como isósceles o equilátero), pero tienen dificultades al trabajar con diferentes figuras y formas y su relación con representaciones bi- y tridimensionales.

Una de las mayores dificultades de los estudiantes está en la interpretación y visualización de representaciones 2D y 3D (Arıcı y Aslan-Tutak, 2015), movimiento (giros) de objetos 2D y 3D (Bruce y Hawes, 2015; Pittalis y Christou, 2010 y Moss, Hawes, Naqvi y Caswell, 2015), comprensión del significado de fórmulas como las de área y volumen (Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley, 2015 y Cardenas, 2016), construcción de figuras en 2D y 3D (Moss, Hawes, Naqvi y Caswell, 2015 y Pittalis y Christou, 2010), conexión entre representaciones 2D y 3D (Dindyal, 2015) y lectura de mapas (Gonzato, Fernández y Díaz, 2011;

Clements 2004 y Weill-Fassina y Rachedi, como se citó en Gonzato, Fernández y Díaz, 2011).

Las dificultades mencionadas inciden en disciplinas y áreas de trabajo que impliquen interpretar representaciones para resolver tareas, pues según Francis y Whiteley (2015) potenciar o no las habilidades de razonamiento espacial afectan la comprensión en química, biología, geología, arquitectura, entre otros.

Las dificultades pueden relacionarse a la falta de experiencia que han tenido los estudiantes con la rotación y movimiento de cuerpos. Gutiérrez (1991) menciona que el camino para reconocer e interpretar representaciones bi- y tridimensionales no es corto, es decir que no se adquiere en una o un par de sesiones de clase, y debe iniciar con el uso de material tangible, donde el estudiante pueda tocar, mover e identificar (experimentar) elementos y formas de los objetos. Realizar cambios de representación, bien sea para su lectura o construcción, según Duval (1999) es una actividad compleja que implica reconocer posiciones y orientaciones de los objetos (aun cuando en estos se haya aplicado alguna transformación), relacionar objetos semejantes e identificar elementos (representaciones 1D y 2D) como parte del todo (representación u objeto 3D).

Leer e interpretar una representación requiere de habilidades de visualización que posibilitan enfocarse en elementos necesarios para realizar alguna actividad requerida. Estas habilidades van ancladas al uso del lenguaje, dado que la distinción visual suscita palabras en la mente que permiten prestar atención a elementos de alguna representación, pues hay una conexión entre el lenguaje interno y el razonamiento (Duval, 1998). Además, uno de los procesos cognitivos en geometría que se deben potenciar en las demostraciones y solución de problemas, según Duval (1998), es el discurso *natural* pues apoya los procesos de argumentación, descripción y explicación.

Derivado de este listado de dificultades y de sus posibles obstáculos, se evidencia en la revisión de antecedentes, la necesidad de mayor investigación (tanto básica como aplicada) a fin de analizar a profundidad a qué se deben y cómo resolver las

dificultades, desde la enseñanza, relacionadas con el desarrollo del razonamiento espacial.

1.3.1.4. Habilidades para el desarrollo de actividades que implique el uso representaciones 2D y 3D

Las actividades de razonamiento espacial identificadas en la revisión de antecedentes están inmersas en interpretación de representaciones 2D/3D para construcción de objetos tridimensionales o viceversa. Estas actividades, como lo afirma Battista (como se citó en Gonzato Fernández y Díaz, (2011) requieren acciones más allá del *ver*, es decir es necesario reflexionar sobre las relaciones de las partes de un objeto, su estructura y examinar las posibles transformaciones de esta. Al mismo tiempo se necesita desarrollar habilidades de comunicación que expresen, por ejemplo, pasos para el desarrollo de una construcción, indicaciones de desplazamiento de objetos o sujetos, posiciones, orientaciones o convenciones de algún objeto/sujeto particular (Dindyal, 2015 y Gutiérrez, 1991). Estas actividades, como se menciona en el apartado 1.3.1.1., no se realizan solamente en clases de geometría, sino que se requieren en demás espacios tanto académicos como cotidianos para el reconocimiento de un mundo físico.

Al mencionar verbalmente objetos en el espacio, se relacionan su posición con términos de orientación (al lado de, arriba de, debajo de, atrás de, a la izquierda de), de proximidad (cerca de, lejos de) y de direccionalidad (hacia, desde, hasta). Esto implica que el sujeto quien comunica debe relacionar puntos de referencia, movimientos de los objetos con palabras aptas que comuniquen desplazamiento de objetos, indicaciones de construcción, entre otras, de forma concreta (Tatha, como se citó en Davis y el Spatial Reasoning Study Group, 2015).

La interpretación y la comunicación de la información espacial de forma figural y/o verbal requiere de un reconocimiento de convenciones (líneas puntiagudas, tonos de colores, dibujo de representaciones en diferentes vistas y perspectivas) y habilidades de discriminación visual para poder relacionar representaciones con objetos (Gutiérrez, 1998).

Desde la investigación se reconoce la importancia de diseñar e implicar a los estudiantes en actividades en las cuales deban leer e interpretar convenciones propias de representación bi- y tridimensionales (proyecciones ortogonales, isométricas) para comunicar o realizar alguna acción que, por ejemplo, favorezca una correcta posición y orientación de objetos.

1.3.1.5. Creación de propuestas didácticas: una necesidad dentro de la investigación

Derivado de lo comentado en los cuatro últimos apartados, si bien se reconoce la importancia de desarrollar habilidades de razonamiento espacial en la escuela, hace falta estudios longitudinales, propuestas de enseñanza y/o aprendizaje que se enfoquen en describir qué tipo de materiales y/o actividades propician espacios en los que se desarrollen habilidades de razonamiento espacial.

En particular se requieren propuestas didácticas que propicien el desarrollo del razonamiento espacial desde los primeros grados escolares. En diversas investigaciones se han reportado dificultades de los estudiantes de niveles superiores o en profesionistas al involucrarse con actividades donde es necesario establecer relaciones entre representaciones 2D y 3D. Por lo que es pertinente preguntarse ¿cuándo?, ¿cómo? y ¿con qué iniciar, desde lo escolar, actividades o tareas a fin de ir desarrollando el razonamiento espacial en el cambio entre dimensiones 2D y 3D?

Como lo precisan Davis, Okamoto, Whiteley (2015) se requiere mayor investigación de propuestas en el aula cuyo objetivo sea generar oportunidades y experiencias a los estudiantes de los primeros grados de primaria para que puedan solventar dificultades como las reportadas y desenvolverse en un mundo con necesidades específicas donde el uso del razonamiento espacial es determinante.

Además, autores como Uribe, Cárdenas y Becerra (2014) señalan la importancia del desarrollo del pensamiento espacial en la medida que es potenciada y relacionada en las distintas áreas de conocimiento trabajadas en la escuela. En

ese sentido, se pueden explorar rutas de trabajo que favorezcan el desarrollo y mejoramiento de las habilidades espaciales de los niños.

1.3.2. El razonamiento espacial desde lo curricular

Distintas propuestas curriculares y planes de estudio, se considera el aprendizaje de habilidades de razonamiento espacial como vital para el desarrollo de actividades tanto en la escuela, como en la vida cotidiana y laboral. Por ejemplo, en los documentos de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP), el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), los National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y el Ministerio de Educación de un estado de Canadá, Ontario. En particular, el Ministerio de Educación de Ontario y los NCTM mencionan que tener habilidades de razonamiento espacial y de medición ayuda al aprendizaje de tópicos matemáticos y puede ser útil en la solución de problemas de situaciones reales.

Algunos documentos curriculares definen, con distintos nombres, el razonamiento espacial y otros comentan la importancia que tiene como parte de la geometría y enfocado en el desarrollo de habilidades en ubicación espacial. En cuanto a definiciones, por un lado, El MEN se refiere a pensamiento espacial y lo define como un conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen, se manipulan, se relacionan y se transforman representaciones mentales de objetos en el espacio. Por otro lado, el Ministerio de Educación de Ontario, hace mención de sentido espacial y comenta que desarrollarlo genera conciencia intuitiva del entorno.

En relación con la importancia del razonamiento espacial como parte de la geometría, el MEP comenta que la introducción a la geometría se propicia a través del desarrollo de habilidades de visualización espacial, movimiento de objetos, coordenadas y relación con el álgebra, dando importancia al estímulo del razonamiento, la argumentación, la comprensión y la manipulación dinámica de objetos geométricos. Por su parte, el MINEDUC señala que el aprendizaje de la geometría es importante en la medida que los estudiantes reconocen, visualizan,

dibujan figuras y describen las características y propiedades de objetos 2D y 3D en situaciones estáticas y dinámicas.

La SEP (2011) se enfoca principalmente en el desarrollado de habilidades en ubicación espacial pues comenta que a partir de las experiencias que los alumnos vivan en el entorno escolar, los estudiantes van construyendo conocimientos relacionados con la “*orientación* (al lado de, debajo de, arriba de, debajo de, delante de, atrás de, a la izquierda de, a la derecha de), la *proximidad* (cerca de, lejos de), la *interioridad* (dentro de, fuera de) y la *direccionalidad* (hacia, desde, hasta)” (p. 90), las cuales se requerirán en lo laboral y en lo cotidiano al desplazarse, leer e interpretar un mapa, etc.

En este apartado se refleja, al igual que en las investigaciones, que en algunos de los currículos revisados el razonamiento espacial es nombrado de distintas formas, algunos lo llaman pensamiento espacial, sentido espacial, ubicación espacial. Otras propuestas curriculares sin definirlo reconocen su importancia, pues mencionan que explorar figuras, formas, describir e interpretar mapas ayuda al estudiante a entender su entorno y desarrollar razonamiento lógico/matemático. Es necesario reconocer el tipo de actividades que se proponen en el currículo para identificar la forma en la cual materializan la importancia que le dan al razonamiento espacial.

1.3.2.1. Actividades espaciales en algunos países de Latinoamérica, Canadá y Estados Unidos

En los primeros grados, y no en todos los planes de estudio, se plantean contenidos relacionados con ubicación espacial, identificación de propiedades y lenguaje geométrico de objetos bi- y tridimensionales prototípicos. Los dos últimos contenidos son considerados únicamente por el MEP y el MEN. Los contenidos relacionados con ubicación espacial están enfocados en el reconocimiento de códigos de un plano y son propuestos por la SEP y el MINEDUC.

Desde cuarto grado, se proponen actividades en las que el estudiante está más involucrado con la comprensión de áreas laterales y totales de sólidos, congruencia y semejanza entre figuras, representación de objetos

tridimensionales desde distintas posiciones y, la construcción, comparación, clasificación y representación de objetos bi- y tridimensionales. En ubicación espacial, se plantean actividades de cálculo de distancias en un mapa y descripción de rutas; además se sugieren actividades en las que se empleen fórmulas de áreas y perímetro.

En Canadá y Estados Unidos, en los primeros años, se proponen actividades en las que el estudiante se involucre en la clasificación por atributos de figuras bi- y tridimensionales, en el reconocimiento de la simetría, en la relación de distintas formas, en la construcción de diseños (representaciones en el plano de figuras y formas) que generan figuras y formas (objetos tangibles) y en la descripción de la posición de alguien o algo haciendo uso del lenguaje posicional. En los cursos más avanzados prevalece la enseñanza del reconocimiento de relaciones de objetos planos (puntos, rectas, figuras planas) y sólidos.

En las propuestas curriculares el razonamiento espacial, es nombrado y definido de distintas maneras o simplemente se alude a como el trabajar geometría ayuda para la adquisición de habilidades visuales y espaciales, como ya se había mencionado.

Los resultados encontrados tanto en las investigaciones que abordan el tema como en las propuestas curriculares revisadas de Latinoamérica, reconocen la importancia de potenciar habilidades de razonamiento espacial y se proponen actividades o contenidos en los primeros grados relacionados con ubicación y reconocimiento de figuras y formas prototípicas, pero no proponen generar oportunidades de aprendizaje en lo que tiene que ver con la construcción, lectura e interpretación de cambios de dimensión al trabajar con objetos y representaciones bi- y tridimensionales. Mientras que en los países en los cuales se ha impulsado el trabajo en STEM, en los primeros años de escolaridad si se considera el aprendizaje que involucra construcción, comprensión y comparación entre formas, figuras y representaciones bi- y tridimensionales.

1.3.2.2. Desarrollo del razonamiento espacial. Ejemplo de actividades del libro de texto gratuito de tercero de primaria del periodo 2016-2017 (México)

A partir de la revisión del libro de texto de tercero primaria³ a fin de identificar actividades explícitamente relacionadas con razonamiento espacial se encontraron únicamente dos (Ver anexo 2). La primera enfocada en el reconocimiento de ángulos como resultado de cambios de dirección y la segunda, encaminada a identificar la cercanía o lejanía de objetos en una imagen.

Las actividades propuestas están en correspondencia con el currículo de la SEP y, como ya se había mencionado, es poco el trabajo en relación con el desarrollo de actividades que potencien habilidades de razonamiento espacial. En la primera actividad trabajan con la identificación de ángulos al realizar cambios de dirección (derecha, izquierda, media vuelta, un cuarto de vuelta y un octavo de vuelta) y en la segunda se cuestiona al estudiante sobre las relaciones de proximidad (cerca de, lejos de) inferidas de una imagen. No hay actividades en este grado que involucren al estudiante con el aprendizaje y la adquisición de habilidades para realizar lo propuesto en relación con los cambios de dirección y de relaciones de proximidad. Al parecer, evalúa lo aprendido al respecto a través de preguntas.

En el mismo libro se identificaron actividades que requerían usar habilidades de razonamiento espacial. A continuación se presenta un ejemplo:

Consideren que los cuatro cuadrados tienen el mismo tamaño



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4

Figura 1.1. Ilustración de la actividad del Bloque V, consigna 3 del libro para el alumno Desafíos matemáticos (Fuente SEP, 2016, p. 146).

³ El libro de texto en México es gratuito y por tanto, el uso de este es obligatorio tanto para escuelas públicas como privadas.

- a) ¿Qué fracción representa la parte sombreada en la figura 1?
- b) ¿Qué parte de la figura 2 representa la parte sombreada?
- c) ¿Qué fracción representa la parte sombreada de la figura 3?
- d) ¿Qué parte de la figura 4 no está sombreada?

Por lo planteado en la actividad, al parecer, se pretendía que los estudiantes reconocieran $\frac{1}{2}$ como fracción de la parte sombreada y no sombreada. Aun cuando la actividad no es propia de razonamiento espacial, si requiere de habilidades propias de dicho razonamiento; cada figura tiene un eje de simetría el cual determinaría la equivalencia entre las partes sombreadas y no sombreadas, pero hasta este momento no se han proporcionado actividades a los estudiantes para el discernimiento e identificación de ejes de simetría. Además es posible que debido al color negro de las imágenes, los estudiantes consideren a la fracción sombreada como mayor. Para realizar actividades como las anteriores, es necesario generarles a los estudiantes experiencias con figuras y transformaciones geométricas.

1.4. Aproximación al razonamiento espacial

En los anteriores apartados se ha referido, desde la investigación y el currículo, a la importancia, el impacto, las dificultades y necesidades relacionadas con potenciar habilidades de razonamiento espacial en y fuera de la escuela. Se hace necesario precisar que se entenderá por razonamiento espacial en este estudio y por tanto, en este apartado se describirá brevemente algunas concepciones de razonamiento espacial y posteriormente se comentará la adoptada para este estudio.

1.4.1. El razonamiento espacial y su compleja definición

Las aproximaciones al razonamiento espacial son diversas. Algunos (como ya se mencionó en el apartado 1.3.1.) se refieren a este con otros nombres, como pensamiento espacial, relación espacial, visualización espacial, habilidades espaciales, competencia espacial y conocimiento espacial. Estos términos se tienen en cuenta en este apartado porque su definición está relacionada con el desarrollo de habilidades propias del razonamiento espacial. A continuación se describirá brevemente cada una de ellas.

El *razonamiento espacial* es definido como la capacidad de visualizar transformaciones de coordenadas espaciales⁴ de un objeto, esta transformación puede ocurrir en el propio objeto o en relación con un marco de referencia (Hallowell, Okamoto, Romo y La Joy, 2015); es conocido como una habilidad esencial para el funcionamiento en el mundo moderno (Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley, 2015); y como una habilidad cognitiva crucial que necesitamos para encontrar algún camino específico, manipular objetos e imaginar situaciones (Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade y Robitzsch, 2015).

Psicólogos y científicos cognitivos entienden el *razonamiento espacial* como un conjunto de habilidades y procesos cognitivos, mientras que educadores matemáticos consideran a la geometría y razonamiento espacial como una cadena unificada de las matemáticas que tienen que ver más con los conceptos geométricos que con las propias habilidades espaciales (Moss, Hawes, Naqvi y Caswell, 2015; Dindyal, 2015).

Pensamiento espacial es definido como la capacidad de adoptar una variedad de formas, incluyendo la construcción y manipulación de objetos de dos y tres dimensiones; la percepción de un objeto desde diferentes perspectivas; y el uso de diagramas, dibujos, gráficos, modelos y otros medios concretos para explorar, investigar y comprender conceptos abstractos tales como las fórmulas o modelos del mundo físico algebraico (Kinach, como se citó en Bruce y Hawes, 2015). También es considerado como la facultad de reconocer y discriminar estímulos visuales y asociarlos con experiencias anteriores (Frostig, como se citó en Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014), así como una posibilidad de desarrollar habilidades, de establecer relaciones espaciales para organizar, analizar y sistematizar los conocimientos espaciales (Sánchez y Bonilla, como se citó en Uribe, Cárdenas y Becerra, 2014).

Relación espacial, según Sinclair et al. (2016), se entiende como la capacidad de representar y manipular mentalmente objetos en dos dimensiones; Mongeau, Pallascio, y Allaire (1990); Sinclair et al (2016); Arıcı y Aslan-Tutak (2015).

⁴ Son las dadas por los ejes x, y, z , que indican largo, ancho y profundidad de un objeto tridimensional.

Gonzato, Díaz Godino y Neto (2011) definen *visualización espacial* como la manipulación mental de objetos tridimensionales. *Habilidad espacial* se precisa como la capacidad de rotar mentalmente un objeto espacial de forma rápida y correcta (Pittalis, y Christou, 2010). Por *competencia espacial* se entiende como un conjunto de habilidades por las que la razón se prolonga en la imaginación, está implicada en todo tipo de saber y su desarrollo no debe limitarse a los primeros años de escolaridad (Vázquez y Noriega, 2010).

Conocimiento espacial se refiere a la adquisición de saberes para dar soluciones a diferentes problemas que implican organizar formas de objetos, ubicar y mover un objeto en el espacio y crear y leer mapas (Soury-Lavergne y Maschietto, 2015).

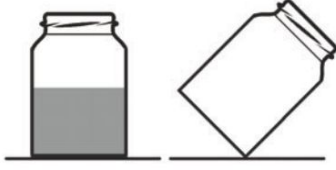
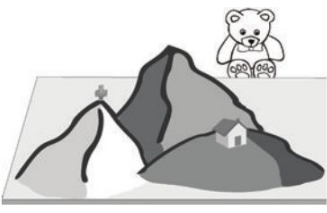
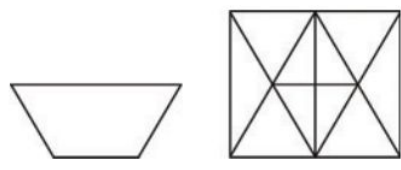

Derivado de lo anterior, las distintas aproximaciones de razonamiento espacial están relacionadas con el desarrollo de procesos, habilidades y capacidades cognitivas que son esenciales para desenvolverse en el actual siglo y en las que la manipulación mental de representaciones bi- y tridimensionales son vitales.

Finalmente, en dos investigaciones (Tahta, como se citó en Davis y Spatial Reasoning Study Group, 2015; Uttal, et al. 2013), se define razonamiento espacial reconociendo la importancia de involucrar procesos cognitivos y el movimiento físico, tanto de objetos como de la persona que ejecuta la acción. En la primera investigación, razonamiento espacial es considerado vital en la medida que se involucran una serie de verbos (localizar, orientar, descomponer, recomponer, cambiar dimensiones, balancear, diagramar, simetrizar, navegar, transformar, comparar, clasificar, percibir y visualizar) y acciones (imaginar, construir y dibujar) en el quehacer cotidiano y educativo (Tahta, como se citó en Davis y Spatial Reasoning Study Group, 2015).

En la segunda investigación, se plantean categorías de razonamiento espacial, en estas se involucra habilidades intrínsecas o extrínsecas (Uttal, et al. 2013) que pueden ser dinámicas y estáticas. En el siguiente esquema se presenta estas categorías.

Tabla 1.1

Categorías de razonamiento espacial

	Estáticas (Objetos/marcos de referencia sin movimiento)	Dinámicas (transformación de objetos y perspectivas)
Extrínsecas	<p>Describe la posición espacial en referencia a un marco.</p> <p>Ejemplo:</p>  <p>El frasco de vidrio tiene algo de agua en ella. Dibuja una línea para mostrar cómo se vería el agua.</p>	<p>Visualiza la relación entre objetos en movimiento o desde diferentes puntos de vista.</p> <p>Ejemplo:</p>  <p>¿Qué ve el osito de peluche?</p>
Intrínsecas	<p>Se identifican formas, no propiedades. Se reconoce, describe y clasifica atributos especiales de las partes de un objeto en relación con el objeto.</p> <p>Ejemplo:</p>  <p>¿Dónde aparece la figura de la izquierda en la imagen de la derecha?</p>	<p>Manipula o transforma mentalmente un objeto.</p> <p>Ejemplo:</p>  <p>¿Cuál de las tres imágenes de la derecha es la misma que la de la izquierda si se gira?</p>

Las habilidades extrínsecas se refieren al reconocimiento de la posición de un objeto en relación con otro (punto de referencia). Las habilidades intrínsecas aluden al reconocimiento de las formas o atributos de un objeto en relación con otro (no se describen propiedades de los objetos). Traducido de "The development of spatial reasoning in young children" por Okamoto, Y., Kotsopoulos, D., Mcgarvey, L. y Hallowell, D, 2015, *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*, p. 16. Copyright 2015 por Taylor y Francis.

1.4.2. Comprensión y transformación: elementos necesarios en la definición de razonamiento espacial del presente estudio

Para este estudio se adoptó la aproximación conceptual propuesta por Davis y un grupo en Canadá, Spatial Reasoning Study Group (SRSG), conformado por matemáticos, educadores matemáticos y psicólogos. Ellos reconocen la importancia de potenciar el desarrollo de razonamiento espacial utilizando diversas tecnologías, actividades dependiendo del nivel educativo y consideran que la inclusión de este tema dentro del currículo ayuda al estudiante a desarrollar actividades en diversas áreas del conocimiento.

El grupo SRSG plantea al razonamiento espacial como un sistema en el que interactúan diferentes elementos que le permiten al sujeto comprender (a nivel cognitivo) y transformar (a nivel físico) el espacio en que vive o desarrolla una tarea. La perspectiva de sistema difiere de un listado de acciones pues permite representar interacciones, movimiento y yuxtaposición entre acciones, elementos y competencias emergentes como se muestra a continuación.

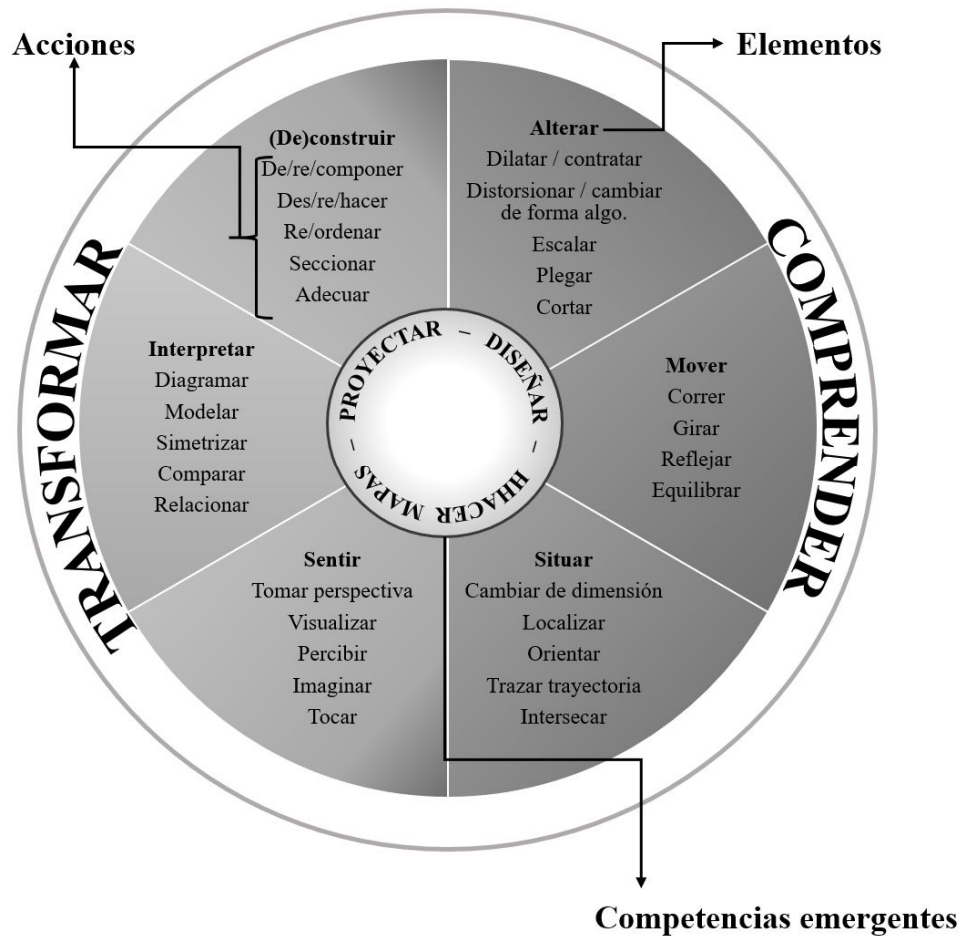


Figura 1.2. Esquema Aproximación conceptual de Razonamiento Espacial. Adaptado de "Spatializing school mathematics" por Davis, B., Okamoto, Y. y Whiteley, W, 2015, *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*, p. 16. Copyright 2015 por Taylor y Francis.

En la propuesta, precisan que el diagrama es circular porque no buscan jerarquizar los componentes considerados (elementos, acciones, competencias emergentes), pues al realizar una actividad donde se involucren habilidades de razonamiento espacial, las competencias emergentes, las acciones y los elementos pueden desarrollarse al mismo tiempo.

En el diagrama se identifican tres subsistemas: exterior, intermedio e interior. En el exterior considera los elementos de comprensión (cognitivo) y transformación (físico). En el intermedio se encuentran seis elementos, *sentir*, *interpretar*, *de-construir*, *alterar (modificar)*, *mover* y *situar*, (los cuales se describirán más adelante), y grupos de acciones que se definen de acuerdo con el elemento al cual pertenecen. Este subsistema tiene dos secciones, una

con un tono de gris oscuro que determina los elementos que dan cuenta de *transformaciones*, y la otra con un tono de gris claro que determina los elementos que hacen parte de *comprensiones*. En el subsistema interior se encuentran tres competencias emergentes, *proyección, diseño, elaboración de mapas*, no estáticas, pues están en movimiento circular continuo lo que significa que pueden estar en correspondencia con cualquier grupo de elementos del subsistema intermedio.

En el subsistema intermedio se encuentran seis elementos. Cabe resaltar que, para este estudio, nos enfocamos en los tres primeros, aunque en el análisis de los datos recolectados estará permeado por acciones de algunos otros elementos del sistema completo, es decir, se puede dar cuenta, por ejemplo, de acciones involucradas con la interpretación de representaciones.

Enseguida se hace la descripción de cada uno de los seis elementos y sus acciones respectivas:

1. De-construir: elemento que agrupa acciones relacionadas con construir, adecuar, hacer, ordenar, (re)componer objetos en 2D y 3D. En este estudio, estas acciones se pueden realizar a través del seguimiento de instrucciones, de lectura de imágenes con representaciones bidimensionales y de réplicas de construcciones tridimensionales.
2. Situar: encierra un grupo de acciones que dan cuenta de los procesos que realizan los estudiantes al construir e interpretar representaciones u objetos. El estudiante al desarrollar estas acciones puede realizar cambios de dimensión (2D-3D), localizar, orientar, trazar trayectorias de movimiento e intersecar bien sea construcciones o figuras de las clases o en el cotidiano (ubicarse o ubicar algo/alguien en algún espacio determinado).
3. Mover: se refiere a los procesos realizados por los estudiantes al moverse o mover algo en el plano o en el espacio. Dependiendo de la actividad, el estudiante puede girar (considerando posición y dirección), reflejar o equilibrar solo su cuerpo o en relación con algún objeto/persona o algún objeto en relación con su posición.

4. Sentir: hace alusión a las acciones que el estudiante realiza cuando interactúa con un objeto. Si el estudiante quiere, por ejemplo, dar alguna instrucción de construcción, deberá tener un punto de referencia, visualizar, percibir e imaginar su posición relativa, la del objeto y la del compañero que recibe la instrucción. Para ello es necesaria usar términos de proximidad (cerca, lejos) y de dirección (arriba, abajo, derecha, izquierda).
5. Interpretar: contiene acciones relacionadas con procesos cognitivos de relación, comparación, modelación que hacen los estudiantes entre representaciones 3D y 2D. El desarrollar estas acciones da lugar a que el estudiante pueda hacer lectura de mapas, cambiar de una representación a otra e identificar características de figuras que le permiten generar o seguir alguna instrucción de construcción.
6. Alterar: implica acciones que generan cambios en la forma de las cosas. Las actividades consideradas para desarrollar en relación con este elemento son las que solicitan hacer figuras o formas a escala del objeto dado, lo cual implica tener proporciones en las magnitudes que se trabajen.

1.5. Justificación

El mundo avanza tecnológicamente y sus nuevas demandas exigen estudiantes creativos, imaginativos y competentes. En este sentido, la escuela debería proporcionar un contexto en el cual los estudiantes se desenvuelvan y se formen atendiendo a estos nuevos cambios.

Propiciar en los estudiantes el desarrollo del razonamiento espacial es fundamental para potenciar sus habilidades visuales, comunicativas, lógicas, sin dejar de lado que su incidencia en la realidad es determinante. Sin embargo, en la actualidad se refleja una realidad en la que prevalece el potenciar la memoria cuando se enseña y evalúa al estudiante definiciones y características de figuras prototípicas.

Un panorama frecuente se genera en el uso de objetos planos como los pizarrones, cuadernos, entre otros, para representar objetos en 3D, lo cual contribuye a la disminución de representaciones tridimensionales, especialmente

en los niños. Lo que hace ver, es que a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias que se proporcionan en el aula son bidimensionales. Es decir, cuando se usan estos recursos sería deseable hacerlo de manera tal que los estudiantes generen, por ejemplo, diferentes representaciones del mismo objeto y busquen estrategias para resolver situaciones que potencien el razonamiento espacial en los estudiantes.

A partir de lo expuesto, con este estudio se busca replantear y/o implementar actividades presentadas en las diferentes propuestas que permita a los estudiantes usar su creatividad, imaginación, movimiento y transformación de objetos de forma física o mentalmente a través de material concreto y tecnología.

Esta propuesta considera, desde su diseño, dificultades reportadas cuando los estudiantes trabajan en dos y tres dimensiones. Además, se enmarca en un proyecto que involucra a los estudiantes con su realidad y que es flexible en términos de que podrá ser usada por otros docentes en la planeación de sus clases.

1.6. Delimitación del problema de estudio y preguntas de investigación

El interés de este estudio es fundamentalmente la construcción de actividades que potencien en los estudiantes el uso de la imaginación, el movimiento y la transformación para el desarrollo del razonamiento espacial trabajando con diferentes herramientas tecnológicas. En consecuencia, la pregunta de investigación en esta tesis es: *¿Cómo proporcionar oportunidades de aprendizaje a estudiantes de siete a ocho años para el discernimiento de características en el cambio de representaciones bi- y tridimensionales como parte del desarrollo de su razonamiento espacial?*

1.7. Objetivo General

Proporcionar espacios de aprendizaje a estudiantes de siete a ocho años, para el desarrollo del razonamiento espacial a través del reconocimiento entre los cambios de dimensión y sus representaciones utilizando el *patrón de variación contraste*.

1.7.1. Objetivos específicos

- Identificar actividades que permitan desarrollar en estudiantes de primaria competencias asociadas con el razonamiento espacial.
- Analizar potencialidades y limitaciones de recursos como el origami, los rompecabezas y entornos digitales para la construcción de la secuencia didáctica.
- (Re)Diseñar e implementar actividades teniendo en cuenta las dificultades identificadas en la literatura revisada, los resultados del diagnóstico y el uso de diversos recursos.
- Diseñar una guía donde se describan las actividades propuestas, sus alcances, posibles dificultades en el trabajo con los objetos de aprendizaje y sugerencias para la implementación en el salón de clase.

2. Marco teórico y matemático

Este capítulo estará dividido en tres partes, la primera, describe el marco teórico utilizado para el diseño y análisis de la propuesta de actividades, la segunda puntualiza los conceptos matemáticos implicados en las actividades y la tercera, refiere al tipo de representaciones empleadas en algunas de las actividades.

2.1. La variación como marco teórico para el diseño y análisis de actividades

En este apartado se presenta el marco teórico que sustenta el diseño de actividades en este estudio. En primera instancia se realiza un breve relato del surgimiento de la teoría de la variación, y en seguida se describe lo entendido por aprendizaje, por objeto de aprendizaje y la definición de los patrones de variación. Las definiciones del marco teórico son retomadas del trabajo realizado por Ling Lo (2012) y Runesson (2005) y Orgill (2012).

2.1.1. Surgimiento de la teoría: breve descripción

La teoría de la variación tiene sus raíces en la investigación fenomenográfica⁵, la cual permite una mejor comprensión de asuntos relacionados con contenidos u objetos de aprendizaje. Su principal exponente es el psicólogo educativo sueco Ference Marton, quien se centra en dos aspectos básicos del aprendizaje: *qué* de los contenidos se van a enseñar y *cómo*, refiriéndose a la metodología a usar para la enseñanza de ese contenido (Rovio-Johansson y Lumsden, como se citó en Figueroa, Aillon, Herrera, Yáñez y Palavecino, 2012).

Esta teoría, según Ling Lo (2012), surge como resultado del trabajo colaborativo entre investigadores y profesores de Hong Kong. Especialistas universitarios consideraron que, si se busca en los estudiantes comprensión, desarrollo de habilidades analíticas y de resolución de problemas, enseñarles a diferenciar entre lo que es y no es un objeto podría ser un camino para lograrlo. En principio,

⁵ La Fenomenografía pretende conocer las formas, cualitativamente diferentes, en que las personas experimentan, conceptualizan, *perciben y comprenden el mundo que les rodea*. No confundir con fenomenología, la cual busca capturar la riqueza de la experiencia, la totalidad de las formas en que la persona experimenta y describe el fenómeno de interés. “El fenomenólogo desea describir el mundo de la vida de la persona. Mientras el fenomenógrafo se ocupa de saber cuáles son los aspectos cruciales de las formas de experimentar el mundo que hacen a la gente capaz de manejarlo en formas más o menos eficientes” (Santos, 2007, p. 42).

el equipo investigador quiso observar cómo eran dadas las clases por los profesores y analizar si estas se corresponderían como la forma de enseñanza que ellos planteaban. Al respecto, encontraron que las clases impartidas consistían en enseñar un objeto de aprendizaje específico a través de su definición, y si es el caso, de su representación, sin dar lugar a lecciones abiertas en las que consideren diferencias de los objetos de aprendizaje.

Investigadores y profesores trabajaron conjuntamente desarrollando una planificación, ejecución y reflexión de las clases teniendo como marco teórico la variación. En la planificación, para cada sesión, los profesores debían indicar el objetivo de aprendizaje que diera cuenta del objeto a estudiar, la forma en la cual se trabajaría (materiales, espacios y tiempos a utilizar) y los resultados esperados; por su parte, los investigadores debían revisar la planeación con el fin de corroborar la relación entre los objetivos para cada clase con la teoría de la variación.

En la ejecución, el profesor era el encargado de trabajar con los estudiantes y el investigador solo podía observar las clases y tomar notas. Las reflexiones se llevaban a cabo finalizadas las sesiones ejecutadas; en esta discutían investigadores y profesores para analizar si las clases cumplieron con los propósitos establecidos. Estas discusiones eran dirigidas por los investigadores y retroalimentadas por los profesores. El trabajo conjunto pretendía construir un conocimiento disciplinario/didáctico el cual favorecería y fortalecería las prácticas docentes diseñadas bajo los objetos de la teoría de la variación (Figuerola, et al. 2012).

Finalmente, con esta metodología de trabajo y los resultados de las investigaciones derivados de ello⁶, se concluye que la teoría de la variación puede utilizarse para el diseño y análisis de actividades que se focalicen en la variación

⁶ El libro *Teaching and learning Mathematics through Variation* editado por Rongjin Huang y Yeping Li y publicado en el 2017, contiene 20 artículos que describen el uso de la teoría de la variación tanto en el aula como en la elaboración de propuestas curriculares en China. Además, en el primer capítulo exponen perspectivas teóricas compatibles con la teoría de la variación que sirven para la elaboración de proyectos pedagógicos.

de características de objetos a fin de mejorar la enseñanza, pero sobre todo de mejorar el aprendizaje de los estudiantes (Orgill, 2012).

A continuación se describirán conceptos claves de esta teoría: aprendizaje, objeto de aprendizaje (directo, indirecto, vivido, expresado, discernimiento, aspectos críticos y horizontes internos y externos) y patrones de variación.

2.1.2. Concepción de aprendizaje

El centro de atención de esta teoría está en el aprendizaje, en cómo a través de las variaciones en la experiencia se puede definir lo que es o no el objeto de aprendizaje en juego.

Según Orgill (2012) el aprendizaje se da cuando el profesor se preocupa por entender como “cambiar la estructura de la conciencia que un alumno tiene respecto a un *fenómeno* o, en otras palabras, ayudar al aprendiz a discernir un *fenómeno* de maneras nuevas o formas más complejas que el profesor considera adecuadas” (p.2). Por otro lado, el aprendizaje lo define Runesson (2005) como un cambio en la forma en que *algo* se ve, experimenta o entiende. Lo determinante de esta definición es que cada aprendiz experimenta de una manera distinta. Esto significa que, por ejemplo, si dos estudiantes tienen experiencias distintas con algún objeto, en este caso bi o tridimensional, sus interpretaciones, soluciones y ritmos de trabajo en alguna actividad serán distintos. Otra manera de ilustrar lo expuesto en este párrafo es una actividad de clasificación con figuras poligonales (cuadrado, triángulo, pentágono) y curvas (círculo, ovalo). En ella, hay dos colores, rojo para el triángulo y círculo y el color azul para cuadrado, óvalo y pentágono. Los estudiantes podrían ver distintas características de un mismo objeto. Algunos podrían clasificarlas de acuerdo con el color (azul o rojo) y otros con sus formas (curvas o poligonales).

En las definiciones de Orgill (2012) y Runesson (2005) “fenómeno” y “algo” hacen referencia al objeto de aprendizaje. El aprendizaje se da cuando el aprendiz logra discernir características y por ende aspectos de algún *objeto de aprendizaje*, con el fin de alcanzar los objetivos determinados por el profesor. Por ejemplo, si el objeto de aprendizaje está centrado en el cubo, entonces el objetivo es lograr que

los estudiantes reconozcan algunas de las características necesarias como número y forma de las caras del cubo. Dentro de las actividades de enseñanza se deberá proporcionar experiencias con objetos que representen y no a un cubo, lo que implica compararlo y diferenciarlo de objetos como esferas, otros prismas, pirámides o figuras en las cuales las caras pueden variar en color, dimensión, tamaño o en forma.

2.1.2.1. Objeto de aprendizaje

El objeto de aprendizaje es “una idea perspicaz (*insight*), una habilidad o una capacidad específica que se espera que los estudiantes desarrollen” (Marton y Pang, 2006). Este se encuentra conformado por el objeto directo e indirecto. El *objeto directo*, hace referencia al contenido de aprendizaje pretendido para el estudiante y, el *objeto indirecto*, determina lo que los aprendices deberían hacer con el contenido aprendido. Retomando el ejemplo del cubo, el *objeto directo* es reconocer cuántas y cómo son sus caras y, un posible *objeto indirecto* es identificar que no todos los prismas son cubos, pues aun cuando pueden tener la misma cantidad de caras, no tendrían la misma forma. Es decir, todo cubo es un prisma, pero no todo prisma es un cubo.

El objeto del aprendizaje puede ser estudiado desde tres perspectivas: i) analizando el *objeto de aprendizaje pretendido*, lo que el profesor busca lograr en sus estudiantes (en el caso de la educación básica está determinado por el currículo); ii) el *expresado*, lo comunicado por el profesor (en la mayoría de casos, esta comunicación en el aula se genera a partir de su interpretación del currículo y es expresada en las planeaciones o en la clase misma) y; iii) el *objeto de aprendizaje vivido*, es lo realmente aprendido por el estudiante. Cabe mencionar que el objeto de aprendizaje pretendido por el profesor puede no estar en correspondencia con el expresado o con el vivido. Es de resaltar que el profesor debe procurar la búsqueda del aprendizaje en los estudiantes manteniendo una relación directa entre lo pretendido y expresado, pues el interés de los estudiantes por discernir características de algún objeto (aprender) podría estar determinado, en cierta medida, por lo expresado por el profesor.

Para el caso del cubo en la educación básica en México, el *objeto de aprendizaje pretendido* es lo planteado en el programa de estudios, por ejemplo, “construye y describe figuras y cuerpos geométricos” (SEP, 2011). El *objeto de aprendizaje expresado* estaría vinculado con las actividades realizadas por un profesor en la sesión de clase. Finalmente, el *objeto de aprendizaje vivido* correspondería con lo aprendido por los estudiantes en cuanto a si logran o no distinguir la forma y número de caras de un cubo.

Al definir aprendizaje y objeto de aprendizaje, en esta teoría, el discernimiento de características y aspectos de un objeto son definiciones indispensables.

Por un lado, el *discernimiento* de una característica equivale a experimentar una diferencia entre dos cosas o entre dos partes de la misma cosa (Marton y Pang, 2006). Se consideran dos tipos de discernimiento para reconocer un objeto *w* cualquiera: i) discernir del objeto *w* sus *horizontes externos*, o sea, identificar las características de un objeto en relación con otro y, ii) discernir del objeto *w* sus *horizontes internos*, lo que quiere decir que se debe entender las partes y el todo del objeto, se debe entender su estructura y su significado.

Si ahora el objeto de aprendizaje es reconocer cuántas y cómo son las caras de un cubo y cuál de las siguientes representaciones pueden cumplir con ese número y forma,



Figura 2.0. Formas de paralelepípedos en la realidad.

una posible actividad que apoyaría estas características del cubo es a partir de desarrollos planos. La instrucción sería la siguiente:

Enunciado: identificar con cuáles de los siguientes desarrollos planos se pueden formar un cubo.

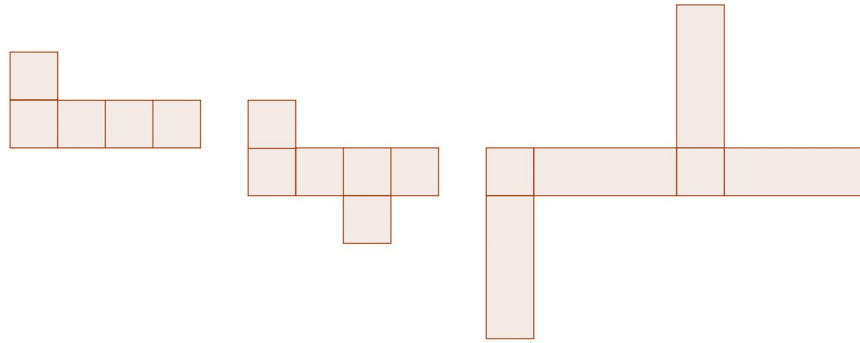


Figura. 2.1. Ejemplo actividad para identificar tipos de discernimiento.

En este ejemplo, el *horizonte externo* identificado tiene que ver con los desarrollos planos que verdaderamente forman un cubo, pues hay un desarrollo plano el cual formaría un paralelepípedo rectangular que no es cubo, por tanto, se identifican las características del cubo en contraste con otro objeto (paralelepípedo rectangular). El *horizonte interno* tiene que ver con entender, ya teniendo todas las caras cuadradas, qué criterios determinan la construcción de un cubo, es decir, cuál es el número de caras para formarlo y en qué posición deben estar ubicadas sin traslaparse.

Por otro lado, Ling Lo (2012) define los *aspectos críticos* como una dimensión de la variación y, las *características críticas* como un valor de esa dimensión de la variación. Por ejemplo, en el reconocimiento del cubo, es posible que el estudiante identifique (discierna) las siguientes *características críticas*: cada lado (cara) del cubo es un cuadrado y para que sea cubo debe estar formado por seis caras iguales. Un estudiante discierne las características críticas si al mismo tiempo discierne sus *aspectos críticos*, tales como cantidad y tamaño/forma.

En la siguiente tabla se ejemplifica, a manera de síntesis, los conceptos de la teoría de la variación descritos previamente:

Tabla 2.1

Resumen de los conceptos de la teoría a través de un ejemplo

Objeto de aprendizaje	Reconocer cuántas y cómo son las caras de un cubo.
Aspectos críticos	Cantidad y tamaño de las caras que componen el cubo.

Características críticas	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer que seis caras componen un cubo. • Identificar que las caras del cubo son cuadrados.
Horizonte externo	Identificar las caras cuadradas a partir de la comparación con prismas rectangulares distintos a los cubos.
Horizonte interno	Reconocer los desarrollos planos que forman un cubo (ubicación de los cuadrados en los desarrollos planos).

2.1.2.2. Patrones de variación

Según la teoría de la variación, un fenómeno y/o sus características críticas se hacen visibles en un contexto de enseñanza a través de la variación (Orgill, 2012). Se identifican cuatro patrones de variación: contraste, generalización, separación y fusión.

1. Marton (como se citó en Ling Lo, 2012) describe *contraste* como la conciencia producida al experimentar la diferencia (variación) entre dos valores. Retomando el ejemplo del cubo, al tener los desarrollos planos presentados en la gráfica 2.1 y al pedirle al estudiante identificar cuales forman un cubo, es necesario *contrastar* los diferentes desarrollos identificando diferencias entre el número y formas de sus caras.
2. La *generalización* se evidencia en una actividad cuando un aspecto de un objeto se deja invariante y los otros aspectos varían. Al trabajar con los desarrollos planos de un cubo, se puede variar la posición de las caras, pero no la cantidad y cuestionar al estudiante sobre que tienen igual los distintos desarrollos planos y que los diferencia.
3. El patrón de *separación* se presenta cuando el estudiante nota un valor (cuadrado) al contrastarlo con otro (cuadrado vs rectángulo). Este valor (cuadrado) se estaría separando del objeto (cubo) y determinaría un aspecto crítico (forma de las caras). Al inicio, el estudiante reconocería el cubo como un todo, pero al tomar conciencia del valor (característica) y su dimensión (aspecto), sería capaz de enfocarse en el valor de forma independiente.
4. La *fusión* hace referencia a la comprensión de un objeto a partir del discernimiento de varios aspectos críticos que guardan relación entre ellos. En

la gráfica 2.1, al analizar un desarrollo plano el cual forma un cubo, el estudiante puede considerar que este debe cumplir con la formación de aspectos críticos a la vez, tales como forma (cuadrado), cantidad (seis cuadrados) y posición (hay 11 posibles arreglos).

Los patrones de variación dan cuenta de las formas en que se puede reconocer las características de un objeto al compararlo con otro. El estudiante en su proceso de aprendizaje trabajando bajo la teoría de la variación, puede contrastar, generalizar, separar y fusionar las características que definen un objeto. Cabe señalar que, en una actividad, pueden estar presentes, de manera simultánea, más de un patrón de variación. Este proceso daría lugar al estudiante a discernir particularidades de objetos o partes de un mismo objeto. En este estudio, nos centraremos en el patrón contraste, pues se busca que, por medio de la variación de dos valores, el estudiante reconozca las características que determinan el objeto de aprendizaje pretendido.

2.2. El amplio panorama de las transformaciones isométricas

En concordancia con Francis y Whiteley (2015) la aplicación de una propuesta cuyo objetivo es apoyar el potenciamiento de razonamiento espacial en niños, permite la comprensión de temáticas relacionadas con biología, química, arquitectura, entre otros. Particularmente en matemáticas influye en el desarrollo del pensamiento lógico y matemático, pero ¿cuántos y cuáles conocimientos matemáticos están implícitos en actividades que involucran el razonamiento espacial? Una respuesta inicial a esta pregunta son las transformaciones isométricas o isometrías. Por tanto, específicamente en este apartado profundizaremos desde el cálculo, la geometría y el álgebra en las transformaciones isométricas.

El concepto de transformaciones isométricas ha evolucionado de tal manera que al referirnos a ellas podemos traer a colación el concepto de congruencia, si se estudia desde la geometría tradicional; el de función, si se estudia desde el álgebra, el cálculo o la geometría analítica, o el de estructura de grupo, si pensamos en este concepto desde la teoría de conjuntos. Abordar el tema de las

transformaciones isométricas desde estas ramas de las matemáticas implica trabajar con una noción de relación funcional suficientemente amplia como para entender estas transformaciones como superposiciones, como expresiones algebraicas o como relaciones.

Históricamente, según Bracho (2005) se puede rastrear una evolución del concepto de transformaciones isométricas, el trabajo de los griegos por ejemplo, muestra evidencia del uso de este concepto de manera implícita al enunciar el axioma “todos los ángulos rectos son iguales”, junto a la noción común “cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí”, la palabra “coinciden” implica el movimiento de figuras para traslaparse una sobre otra, de esta manera la igualdad de los ángulos rectos trae de fondo la idea de transformar (mediante el movimiento) uno en el otro.

Hacia el siglo XVII con el surgimiento del cálculo (Newton y Leibnitz) y la geometría analítica (Descartes) el trabajo con funciones tenía un papel relevante, de manera que el concepto de transformaciones evolucionó al estudio de las correspondencias algebraicas (por medio del álgebra simbólica) entre los puntos del plano y su correspondiente luego de aplicar la función.

Para la segunda mitad del siglo XIX el enfoque que brinda la teoría de conjuntos al estudio de las ideas matemáticas permitió terminar de afinar el concepto de transformaciones isométricas a un nivel formal de rigurosidad, cobrando tanta importancia que a principios del Siglo XX, Klein afirmó que la Geometría es el estudio de un conjunto (como los puntos del plano) junto con un grupo de transformaciones, es decir funciones del conjunto en sí mismo, y de las estructuras que permanecen invariantes bajo el grupo (Bracho, 2005).

La historia muestra evidencia de lo amplio e importante del estudio de las transformaciones, y es por ello por lo que vale la pena hacer un recuento de algunas ideas matemáticas implicadas.

En los siguientes apartados se presentan una definición de transformaciones isométricas, seguido de una descripción desde la geometría analítica y la geometría euclidiana para cada una de las transformaciones más conocidas.

Finalmente se presenta un esbozo de su estudio como estructura de grupo desde la teoría de conjuntos. Para realizar esta descripción se ha construido tomando como referente los libros *Introducción analítica de las geometrías* (Bracho, 2005), *Geometría analítica* (Lehmann, 1959) y *IV Serie Matemática Moderna: Geometría* (Moise y Downs, 1972).

2.2.1. Transformaciones isométricas en el plano y el espacio

Se denomina transformación a una función biyectiva que hace corresponder cada punto del espacio con otro punto del mismo espacio, de esta manera, siempre que podamos establecer una relación que transforme un punto en otro del mismo espacio estaríamos definiendo una transformación. Sin embargo, nos interesa observar las transformaciones isométricas o rígidas que corresponden todos los puntos de un objeto con otro, conservando al final las características de tamaño, dimensión y forma del objeto inicial. Veamos un ejemplo gráfico:

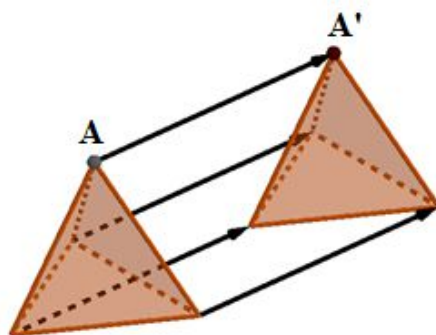


Figura 2.2. Transformación de un tetraedro.

La figura 2.2 muestra una transformación para los puntos de un tetraedro. Gracias a las características propias de unicidad de las rectas que definen cada par de puntos y los planos que definen cada terna de puntos no colineales es posible construir el tetraedro que resulta de la transformación, aplicando ésta únicamente a sus vértices. A esta transformación se le conoce como traslación y consiste en un “desplazamiento” de cada punto A del objeto a otra posición A' definida por un vector.

Ha de notarse que una transformación que no conserve tamaño, forma o dimensiones del objeto no se considera transformación isométrica, un ejemplo

claro son las homotecias, las cuales transforman un objeto en otro que tiene la misma forma, pero diferente tamaño. A continuación un ejemplo en el plano:

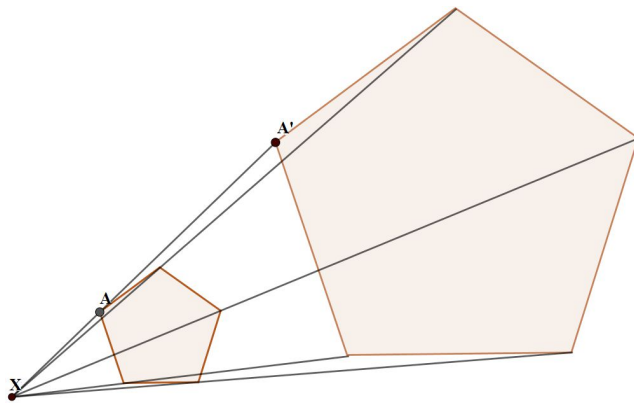


Figura. 2.3. Homotecia de un pentágono

En la Figura 2.3 el pentágono regular fue ampliado en un factor de 3 respecto del punto X , de esta manera se conservan las características propias del pentágono resultante, tales como forma, ángulos y orientación relativa, no obstante, la magnitud de los lados cambia por lo que no puede considerarse una transformación isométrica.

Las transformaciones isométricas que se estudiarán en este apartado son las traslaciones, las rotaciones y las simetrías, cada una de ellas en el plano y en el espacio. Para terminar, se mostrará la estructura algebraica que corresponde a este conjunto de transformaciones y sus propiedades como grupo.

Ha de mencionarse que aun cuando este documento se ocupa del estudio únicamente de transformaciones isométricas, existen otras tres que vale la pena mencionar pues pertenecen al conjunto de las transformaciones más estudiadas en geometría, estas son las homotecias, las proyecciones y las inversiones, estudios posteriores podrían incluir tareas con este tipo de transformaciones en su secuencia de actividades.

2.2.1.1. Traslación

El estudio de las traslaciones cobra importancia en esta investigación dado que las acciones propias de los estudiantes con material concreto pueden describirse mayoritariamente como traslaciones de las piezas desde una posición a otra. En

este apartado se abordará el estudio de las traslaciones desde dos perspectivas, por una parte, desde la geometría analítica, estudiando la función algebraica correspondiente y por otra parte desde la geometría euclidiana estudiando el procedimiento de traslación usando regla y compás (en el sentido griego).

- **Desde la geometría analítica**

Una traslación es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) que asocia cada punto del espacio con un correspondiente punto determinado por un vector que podemos denominar “vector de desplazamiento”, esto es:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = x + \vec{u}$$

Para los casos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , si tenemos un vector de desplazamiento podemos aplicarlo sobre cualquier elemento del dominio (\mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) obteniendo de esta manera la traslación del punto, veamos un par de ejemplos y sus representaciones gráficas.

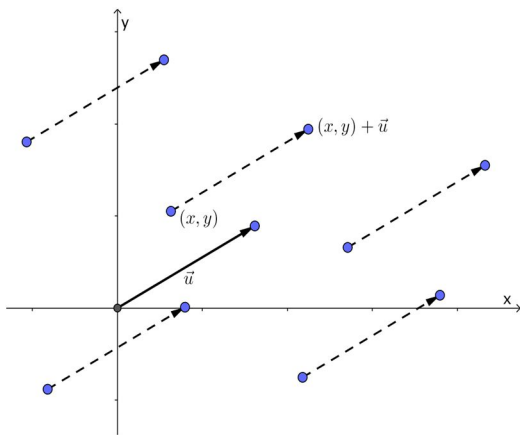


Figura 2.4. Traslación en el plano.

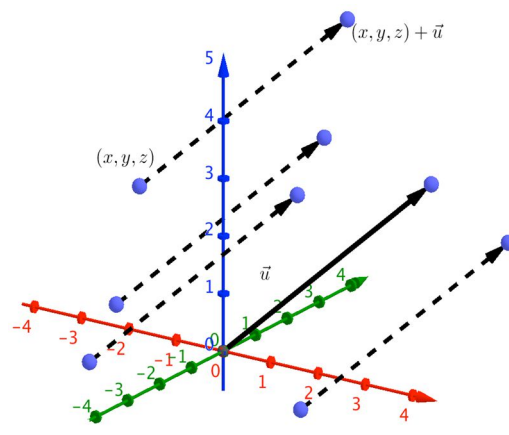


Figura 2.5. Traslación en el espacio.

La Figura 2.6 muestra como al aplicar una traslación sobre un conjunto de puntos claramente definido (e.g. los puntos de un cuadrado) el conjunto resultante poseerá las mismas características del conjunto inicial, aunque su posición relativa en el plano o el espacio cambiará en función del vector de desplazamiento.

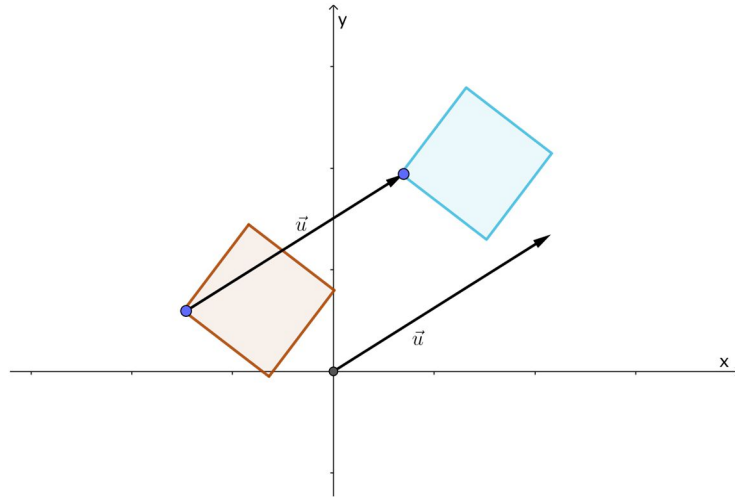


Figura 2.6. Traslación puntos de un cuadrado.

El caso puntual de las traslaciones en \mathbb{R}^2 , o más bien en un plano que no necesariamente posee un sistema de coordenadas, fueron un concepto con gran relevancia en la obra de los Elementos de Euclides. En el Libro 1 se establece como Noción Común 4 “Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí” y en gran parte de las demostraciones a las proposiciones del libro, esta noción se usa con la idea de “trasladar” una construcción sobre otra para demostrar que ambas son congruentes. En estos casos no se hacía uso de métrica por lo que vale la pena observar un procedimiento que permite trasladar un punto en función de su vector de desplazamiento haciendo uso únicamente de las herramientas regla y compás.

- **Desde la geometría euclidiana: Construcción con regla y compás**

Sea A un punto en el plano y \overrightarrow{BC} un segmento con dirección (vector)

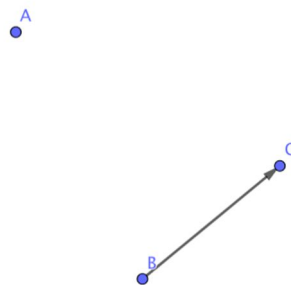


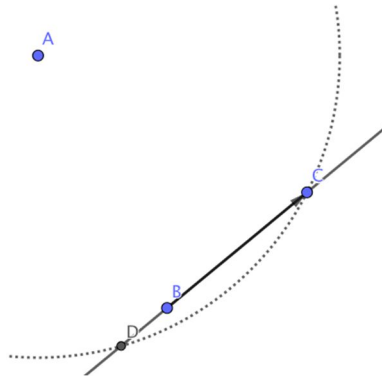
Figura 2.7. Representación de un punto y un vector en el plano.

Para la construcción dividiremos el procedimiento en dos partes.

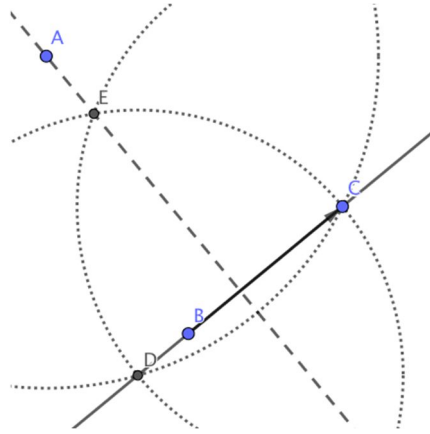
En la primera, construiremos una recta paralela a la recta que contiene a \overline{BC} que pasa por A , y en la segunda trasladaremos el segmento \overline{BC} sobre la recta paralela teniendo a A como uno de sus extremos.

Primera parte:

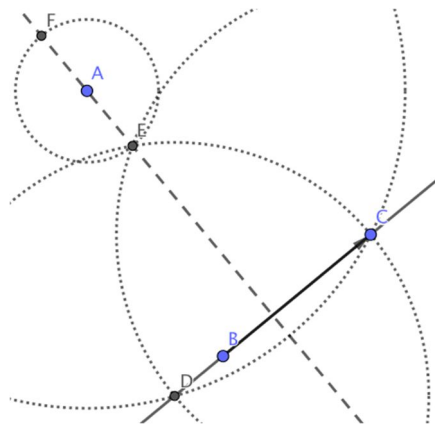
Paso 1: Prolónguese \overline{BC} indefinidamente en ambos sentidos y trácese la circunferencia con centro en A y radio \overline{AC} . Llamaremos D al segundo punto de intersección de la recta y la circunferencia. Si se da el caso de que la circunferencia sea tangente a la recta, trácese \overline{AC} como recta perpendicular a la prolongación de \overline{BC} y continúese el proceso desde el Paso 3, ubicando un punto cualquiera E sobre la recta \overline{AC} .



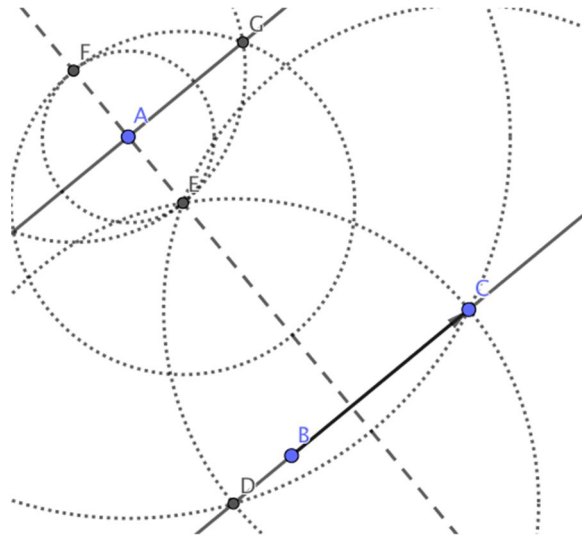
Paso 2: Trácese la circunferencia con centro en C y radio \overline{CD} y la circunferencia centrada en D y radio \overline{DC} , llámese E a uno de los puntos en los cuales las dos circunferencias se intersecan, constrúyase \overline{AE} que será perpendicular a la prolongación de \overline{BC} .



Paso 3: Trácese la circunferencia centrada en A y radio \overline{AE} , llámese F al otro punto de intersección de \overleftrightarrow{AE} con la circunferencia.

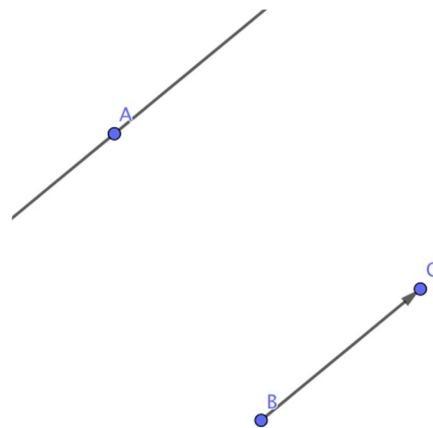


Paso 4: Trácese la circunferencia centrada en E y radio \overline{EF} y la circunferencia centrada en F y radio \overline{FE} , llámese G a alguno de los puntos de intersección entre las circunferencias recién construidas. Finalmente trácese \overleftrightarrow{AG} que será perpendicular a \overleftrightarrow{AE} y por ende paralela a la prolongación de \overline{BC} .

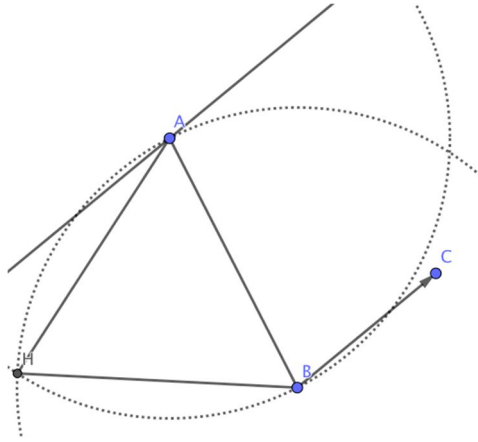


Segunda parte:

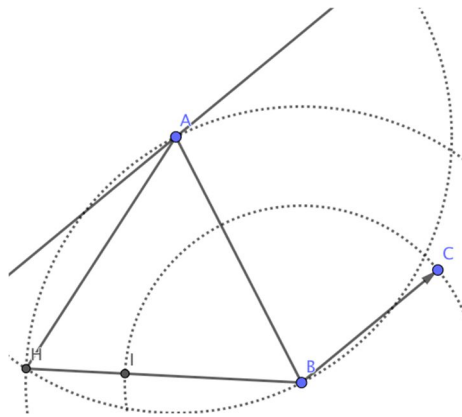
Para la segunda parte de la construcción, y con el objetivo de simplificar la representación gráfica, ocultaremos los trazos anteriores e iniciaremos con el vector \overrightarrow{BC} y la recta paralela que pasa por A



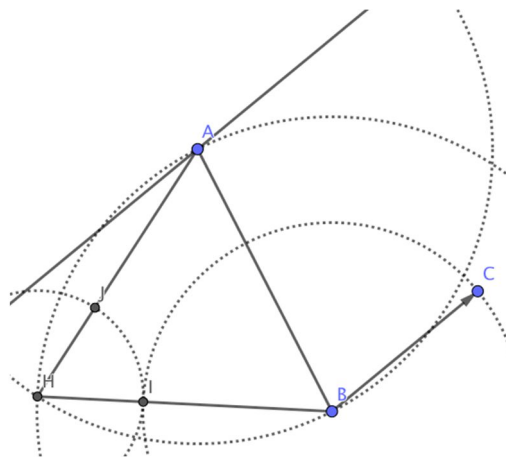
Paso 5: Trácese el segmento \overline{AB} y constrúyase un triángulo equilátero sobre él, para ello se debe realizar la circunferencia centrada en A y radio \overline{AB} y la circunferencia centrada en B y radio \overline{BA} , a uno de los puntos en los que se intersectan las circunferencias llámese H y realice los segmentos \overline{AH} y \overline{BH} que determinan un triángulo equilátero (proposición 1 del libro 1 de Euclides).



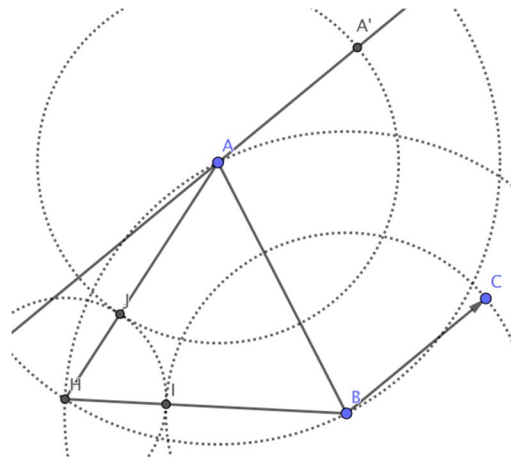
Paso 6: Trácese la circunferencia centrada en B y radio \overline{BC} , llámese I a la intersección entre esta circunferencia y el segmento \overline{BH} .



Paso 7: Trácese la circunferencia centrada en H y radio \overline{HI} , llámese J a la intersección entre esta circunferencia y el segmento \overline{AH} .



Paso 8: Trácese la circunferencia centrada en A y radio \overline{AJ} . Las intersecciones entre esta circunferencia y la recta que pasa por A , construida en la primera parte de este procedimiento, determinan las traslaciones de A en función de \overline{BC} y de A en función de \overline{CB} (vector opuesto). Basta con elegir el punto que se encuentre en el mismo semiplano que C , usando \overline{AB} para dividir del plano.



Para esta construcción es necesario que AB o AC sean mayores a BC , de lo contrario será necesario hacer el procedimiento dos veces sobre un punto X que esté suficientemente alejado de \overline{BC} como para que $\overline{XX'}$ funcione como un nuevo vector de desplazamiento que cumpla con la desigualdad previamente descrita.

2.2.1.2. Rotación

Las rotaciones son una transformación que también tiene un valor considerable en este estudio ya que en varias acciones de los estudiantes se evidenció movimientos de este estilo.

- **Desde la geometría analítica**

Una rotación es una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) que asocia cada punto del espacio con un correspondiente punto determinado por un ángulo θ y un eje de rotación que en \mathbb{R}^2 corresponde a un punto (O_x, O_y) del plano y en \mathbb{R}^3 a una recta del espacio ($l = O + k\vec{u}$). Para el caso particular de \mathbb{R}^2 la fórmula algebraica para la rotación de cualquier punto sería:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) &= \left((x - O_x) \cos \theta - (y - O_y) \operatorname{sen} \theta + O_x, (x - O_x) \operatorname{sen} \theta \right. \\ &\quad \left. + (y - O_y) \cos \theta + O_y \right) \end{aligned}$$

En el caso de \mathbb{R}^3 la rotación de un punto $A(x, y, z)$ se debe dar en torno a una recta, pues ésta permite definir una circunferencia que pertenezca al plano perpendicular a la recta dada y que pase por el punto A , (una representación gráfica de este hecho se presenta en la Figura 2.9). En ese caso, la rotación está dada en función del vector director (que debe ser unitario⁷) de la recta $\langle u_x, u_y, u_z \rangle$, es decir que se cumpla que $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$, de esta manera la rotación se obtiene por medio del producto de la *matriz de rotación* y el vector que define A :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + u_x^2(1 - \cos \theta) & u_x u_y(1 - \cos \theta) - u_z \operatorname{sen} \theta & u_x u_z(1 - \cos \theta) + u_y \operatorname{sen} \theta \\ u_x u_y(1 - \cos \theta) + u_z \operatorname{sen} \theta & \cos \theta + u_y^2(1 - \cos \theta) & u_y u_z(1 - \cos \theta) - u_x \operatorname{sen} \theta \\ u_z u_x(1 - \cos \theta) + u_y \operatorname{sen} \theta & u_z u_y(1 - \cos \theta) + u_x \operatorname{sen} \theta & \cos \theta + u_z^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ha de notarse que esta transformación es válida para cuando la recta pasa por el origen, en caso de que no sea así, será necesario hacer uso de una traslación del sistema cartesiano de manera que el origen de este coincida con un punto de la recta.

Para los casos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , si tenemos un eje de rotación y un ángulo podemos aplicar la función sobre cualquier elemento del dominio (\mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) obteniendo de esta manera la rotación del punto, veamos un par de ejemplos y sus representaciones gráficas.

⁷ Para cualquier vector director \vec{u} , su vector unitario se obtiene como el cociente entre el vector y su norma $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

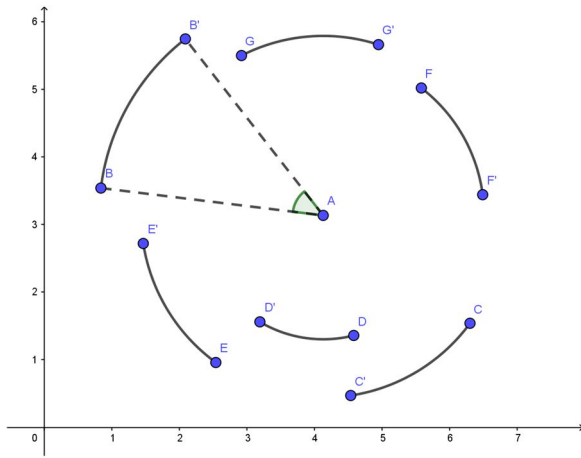


Figura 2.8. Rotación en \mathbb{R}^2 .

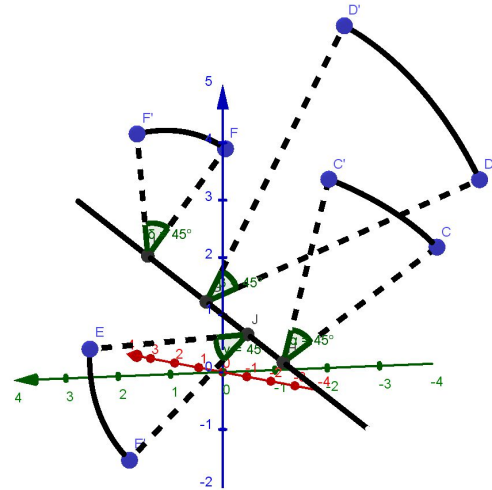


Figura 2.9. Rotación en \mathbb{R}^3 .

La figura 2.8 muestra rotaciones de 45° de los puntos B, C, D, E, F y G en el plano respecto del punto A, resultando en los puntos B', C', D', E', F' y G' respectivamente. La figura 2.9 muestra rotaciones de los puntos C, D, E y F en el espacio respecto de una recta, resultando en los puntos C', D', E' y F' respectivamente.

De la misma manera que con las traslaciones, las rotaciones no afectan las características propias del conjunto que se rota, solo cambian su posición en el plano y en este caso su orientación, veamos este hecho por medio de un ejemplo:

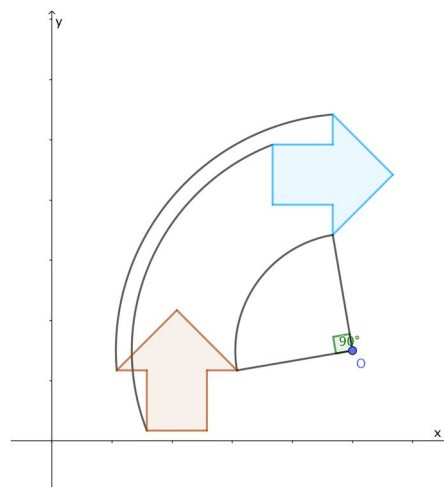
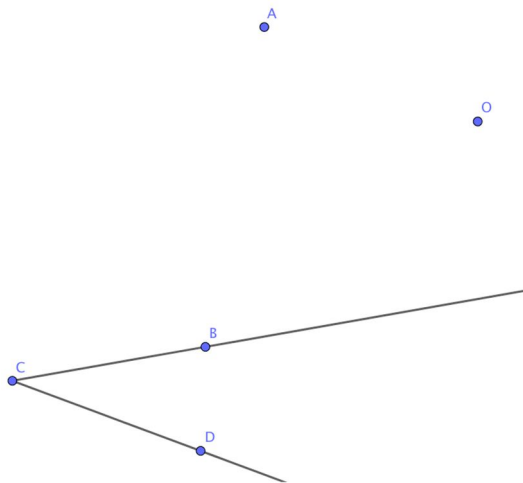


Figura 2.10. Rotación de un polígono.

En el caso de la Figura 2.10, la zona poligonal en forma de flecha roja fue rotada respecto del punto O un ángulo de -90° , ha de notarse cómo la flecha resultante es congruente con la inicial, aunque su posición relativa en el plano y su dirección (ahora “apunta a la derecha”) ha cambiado.

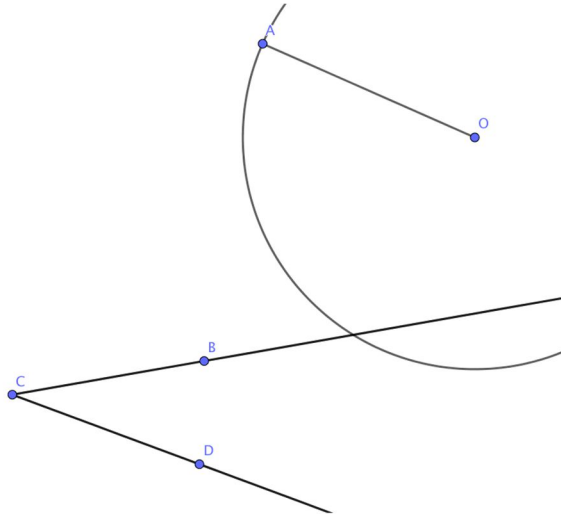
- **Rotación de un punto con regla y compás**

Antes de rotar un punto en el plano por medio de regla y compás debemos recordar que no todo ángulo es construible⁸ aunque sabemos que todo ángulo puede trasladarse. De esta manera, supóngase que se tiene los puntos A y O en el plano, y un ángulo (construible o no) $\angle BCD$, la rotación de A respecto de O en un ángulo congruente con $\angle BCD$ puede realizarse por medio de los siguientes pasos:

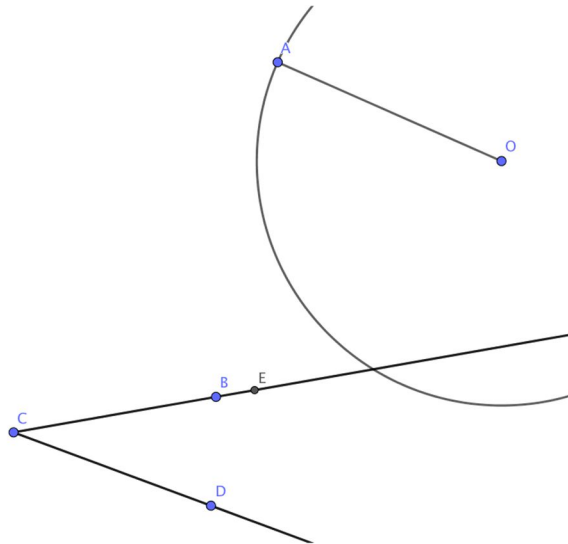


Paso 1: Trácese \overline{AO} y una circunferencia centrada en O y radio \overline{AO}

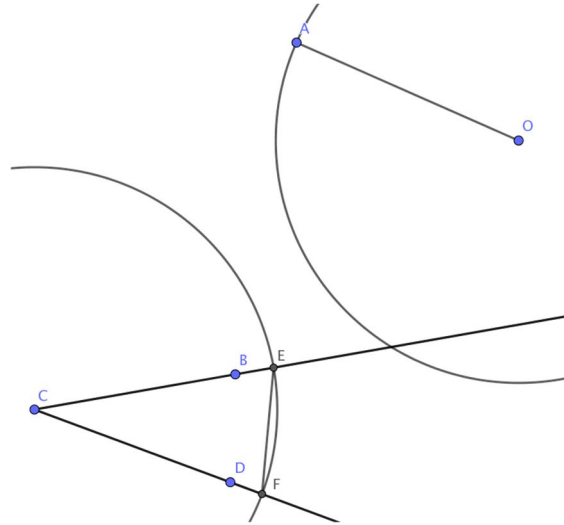
⁸ Las construcciones con regla y compás idealizados (regla sin marcas y compas sin conservación de distancias) permiten construir cualquier número del conjunto de los racionales positivos extendidos con la raíz cuadrada, además Gauss (1777-1855) demostró que los ángulos construibles son exactamente aquellos cuya tangente es un número construible.



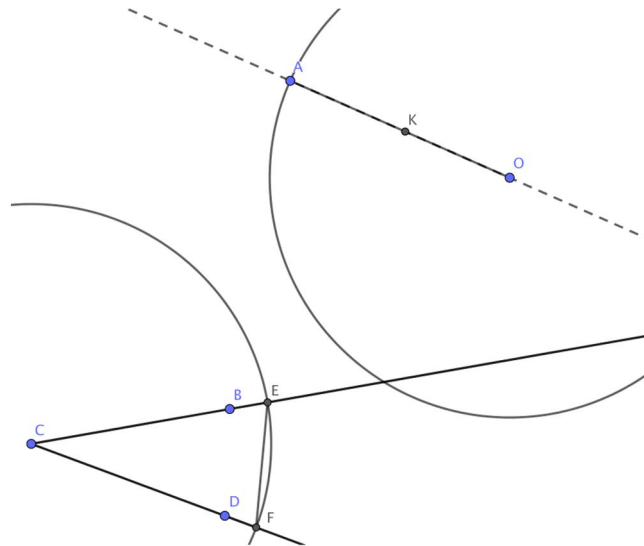
Paso 2: Sígase la parte 2 del procedimiento de traslación de un punto respecto de un vector para construir un segmento congruente con \overline{AO} sobre el rayo \overrightarrow{CB} llámese E al punto construido.



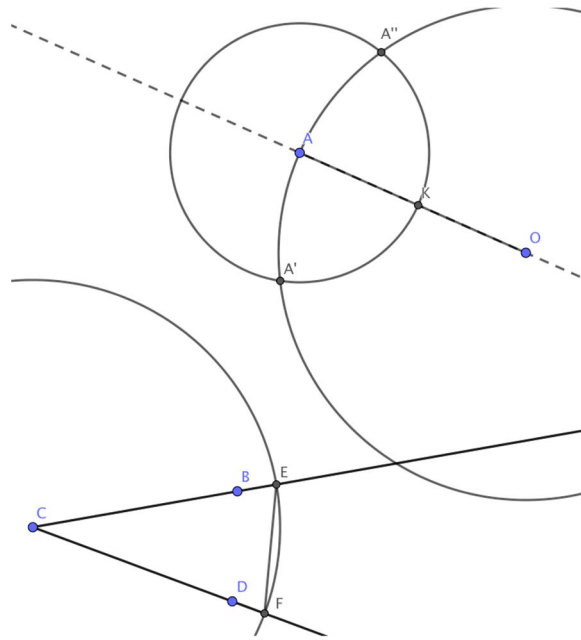
Paso 3: Trácese la circunferencia centrada en C y radio \overline{CE} , llámese F a la intersección entre la circunferencia y el rayo \overrightarrow{CD} y trácese \overline{EF} .



Paso 4: Continúe con la parte 2 del procedimiento de traslación de un punto respecto de un vector para construir un segmento congruente con \overline{EF} sobre la recta que resulta de prolongar \overline{AO} , llámese K al punto construido.



Paso 5: Trácese la circunferencia centrada en A y radio \overline{AK} las intersecciones de esta circunferencia con la circunferencia centrada en O y radio \overline{OA} corresponden a las rotaciones de A respecto de O según el ángulo $\angle BCD$ visto en sentido horario o anti-horario.



2.2.1.3. Simetrías

Si bien las simetrías como una transformación no son evidenciables en las actividades, si se vislumbra en el actuar de los estudiantes sobre algunas actividades concretas. La identificación de este tipo de transformaciones se evidencia en giros de 180° que realizan en el espacio.

La simetría como transformación tiene varias variantes, por una parte, en el caso de \mathbb{R}^2 existe simetría respecto de un punto (puntual), o de una recta (axial), mientras que en \mathbb{R}^3 , existe, además de las mencionadas para el caso de \mathbb{R}^2 , la simetría respecto de un plano (especular). A continuación, se presenta una descripción de estas transformaciones.

2.2.1.3.1. Simetría puntual, vista desde la geometría analítica

Dado un punto $O(x_0, y_0)$, la simetría puntual es una función que asigna a cada punto $A(x, y)$ de \mathbb{R}^2 otro punto $A'(x', y')$ de manera que la distancia AO es igual que OA' y A, O y A' sean colineales, dicho de otra manera se construye A' de manera que O sea punto medio entre A y A' . Teniendo en cuenta esto, es fácil definir la función de la siguiente manera:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$$

Evidentemente esta función puede extrapolarse a cualquier conjunto \mathbb{R}^n , quedando:

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, f(\vec{u}) = 2\vec{O} - \vec{u}$$

Donde \vec{O} corresponde al punto de simetría.

Al observar representaciones gráficas de simetrías puntuales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 (Figuras 9 y 10) notamos nuevamente cómo los objetos transformados no cambian de forma o tamaño, solo de posición absoluta y relativa en el plano o el espacio.

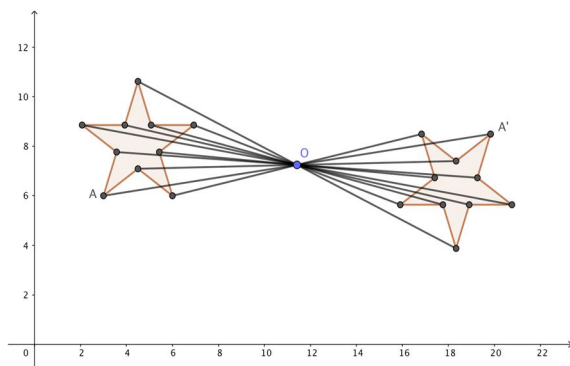


Figura 2.11. Simetría en \mathbb{R}^2 .

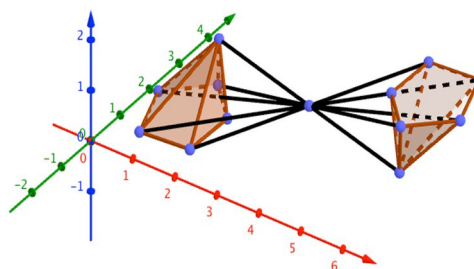
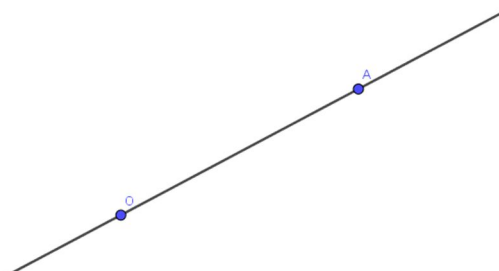


Figura 2.12. Simetría en \mathbb{R}^3 .

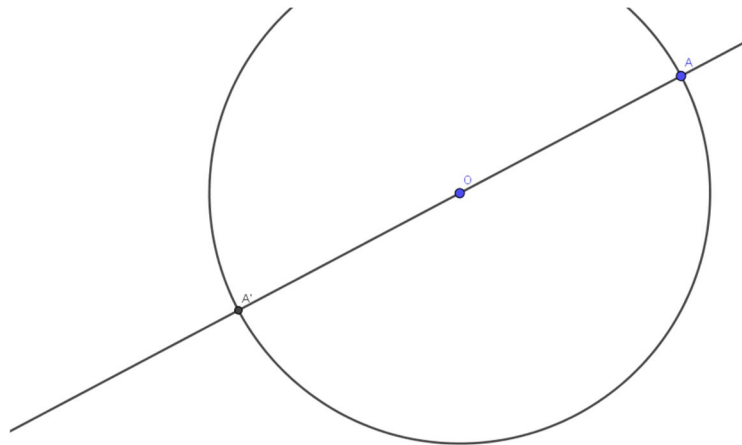
Es de notarse que existe una relación de equivalencia entre las simetrías puntuales y las rotaciones de 180° respecto de un punto, no obstante los procedimientos de cada una difieren así como la idea de fondo en la transformación.

- **Simetría Puntual, vista desde la geometría euclidiana: Construcción con regla y compás**

Sea O un punto fijo en el plano y A el punto a reflejar sobre O , trácese \overleftrightarrow{AO}



Trácese una circunferencia centrada en O y radio \overline{OA} , el punto de intersección de la circunferencia y la recta será la reflexión de A respecto de O .



2.2.1.3.2. Simetría axial desde la geometría analítica

Dada una recta $l = O + k\vec{u}$ la simetría axial es una función que asigna a cada punto A del plano o del espacio, un elemento A' que se encuentra a igual distancia de l como lo está A de l , siendo $\overrightarrow{AA'} \perp l$.

La expresión algebraica para determinar el punto A' en función de A y l no resulta tan inmediata como en las transformaciones previas, sin embargo, fraccionando el procedimiento en dos es posible determinarla, por ello a continuación se presenta una breve descripción de cómo obtener sus coordenadas.

Para el caso de \mathbb{R}^2 :

Sea la recta l una recta cualquiera en el plano cuya función esté dada por $y = mx + b$ y sea el punto $A(x_1, y_1)$ un punto cualquiera en el plano cartesiano. Se sabe que A' y A determinan una recta que será perpendicular a l , por lo que la ecuación de esta recta puede determinarse al conocer el valor de m y las coordenadas de A de la siguiente manera.

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1$$

A esta recta le pertenecerán entonces los puntos A , A' y un punto de l , el cual podemos determinar si igualamos las expresiones de ambas rectas:

$$mx + b = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1$$

Obteniendo como valor de x

$$x = \frac{x_1 - m(b - y_1)}{m^2 + 1}$$

Al reemplazar este valor en $y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1$ y simplificar la expresión, obtenemos como valor para y :

$$y = \frac{b + x_1 + y_1 m^2}{m^2 + 1}$$

Nótese como ahora el punto A' puede determinarse como una simetría puntual respecto del punto (x, y) recién encontrado, por lo que su expresión algebraica resultaría ser:

$$A' \left(2 \frac{x_1 - m(b - y_1)}{m^2 + 1} - x_1, 2 \frac{b + x_1 + y_1 m^2}{m^2 + 1} - y_1 \right)$$

Para el caso de \mathbb{R}^3 podemos hacer uso del hecho de reconocer la simetría axial como una rotación de 180° respecto de la recta, en ese sentido y tomando la matriz de rotación mencionada en el apartado de rotaciones en \mathbb{R}^3 encontraríamos el siguiente producto entre matrices:

$$\begin{bmatrix} 2u_x^2 - 1 & 2u_x u_y & 2u_x u_z \\ 2u_x u_y & 2u_y^2 - 1 & 2u_y u_z \\ 2u_z u_x & 2u_z u_y & 2u_z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nuevamente, esta transformación se realiza sobre una recta con vector director unitario $\langle u_x, u_y, u_z \rangle$ y que pasa por el origen, para rectas por cualquier punto, será necesario realizar traslaciones del sistema cartesiano de manera que su origen coincida con un punto de la recta.

Las figuras 2.13 y 2.14 muestran ejemplos de cómo se ve la simetría axial de un objeto, ha de notarse nuevamente que este movimiento es equivalente a una rotación en \mathbb{R}^3 respecto de la recta que en este caso sirve como eje de simetría.

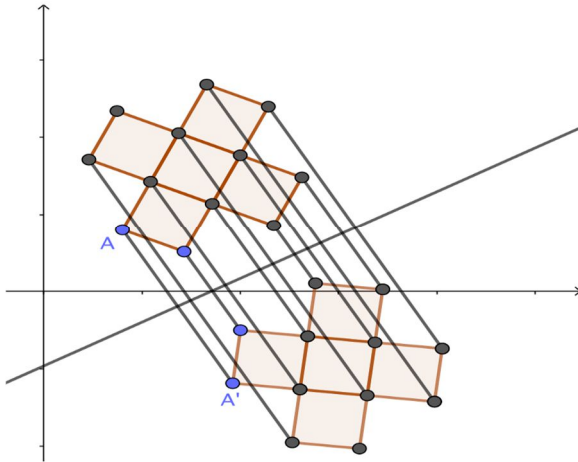


Figura. 2.13. Simetría en \mathbb{R}^2

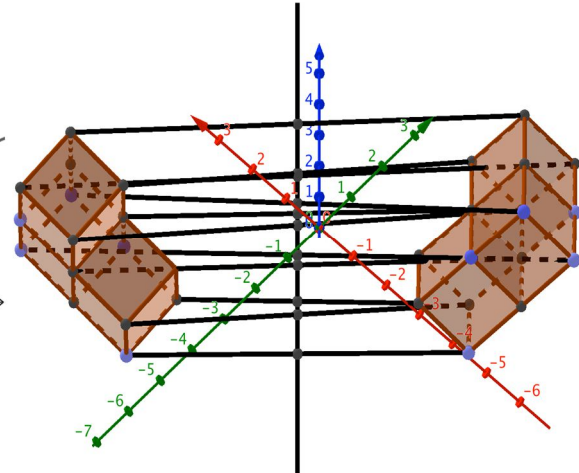
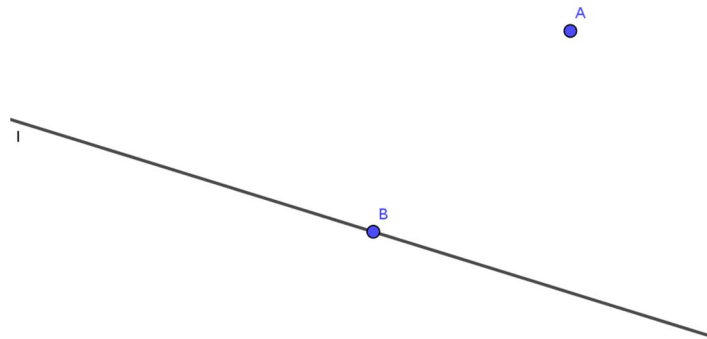


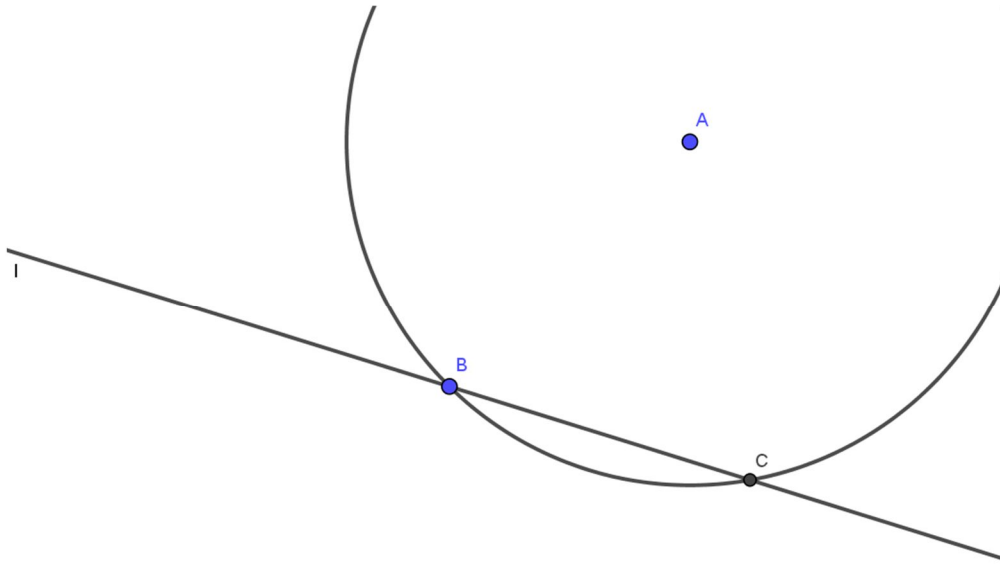
Figura. 2.14. Simetría en \mathbb{R}^3

- **Simetría Axial: Construcción con regla y compás**

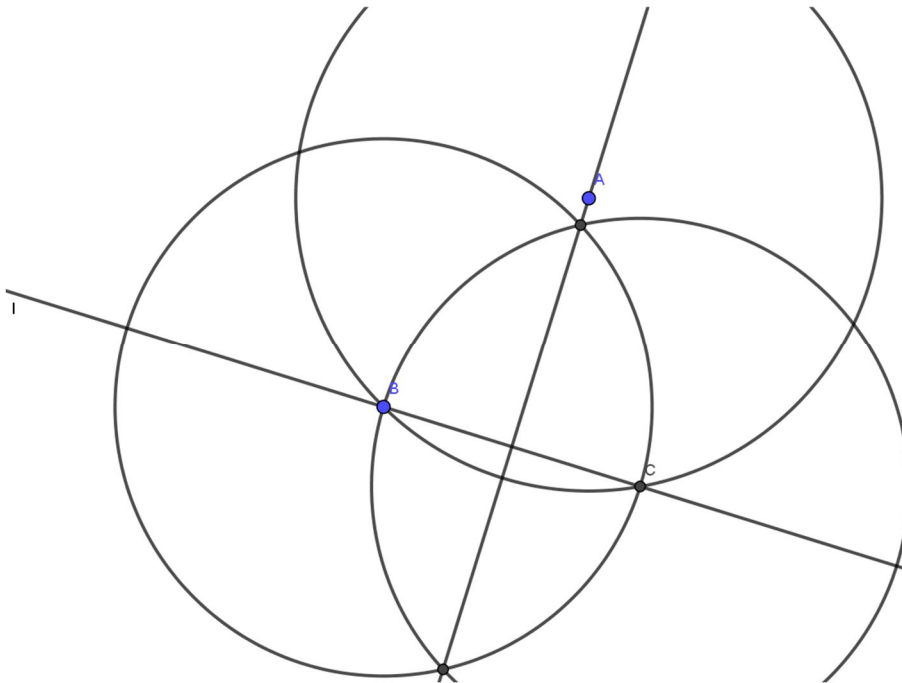
Sea la recta l y un punto A , debemos primero construir una recta perpendicular a l y que pase por A , para ello colocamos sobre l un punto cualquiera que llamaremos B



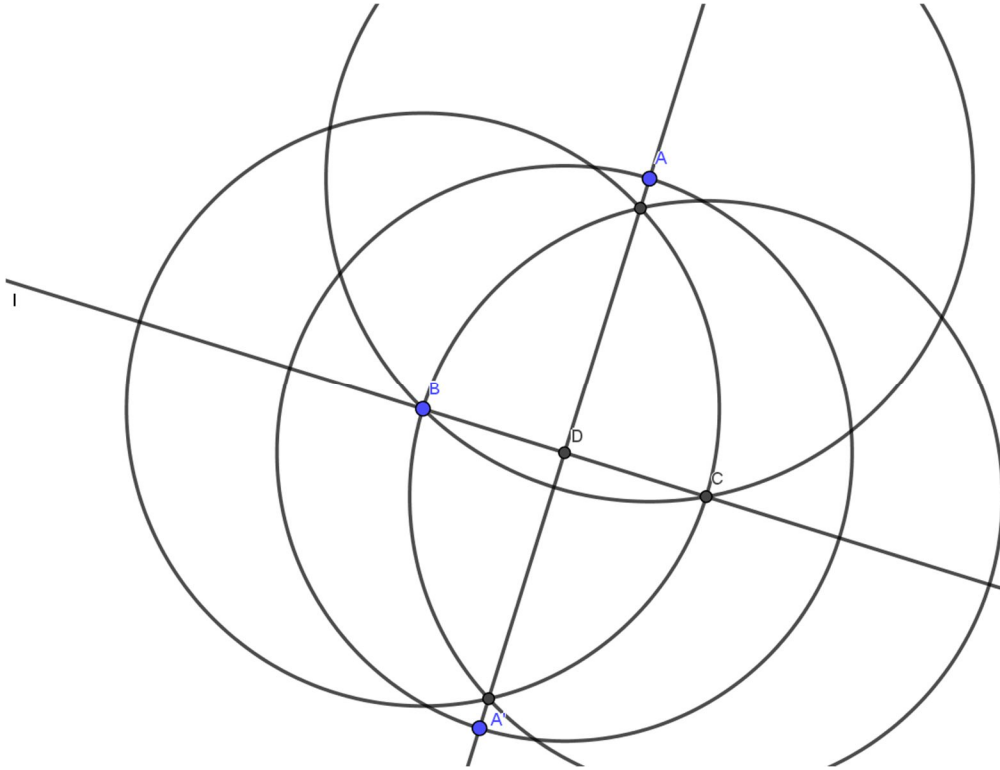
Trácese una circunferencia con centro en A y radio \overline{AB} y llámese C al otro punto de intersección entre la recta y la circunferencia.



Trazar la circunferencia con centro en B y radio \overline{BC} y la circunferencia con centro en C y radio \overline{CB} , los puntos en los que estas circunferencias se intersecan entre ellas determinan la recta perpendicular a l que pasa por A



Llámesse D al punto de intersección de las dos rectas y trácese una circunferencia con centro en D y radio \overline{DA} , las intersecciones entre la circunferencia y la recta que es perpendicular a l serán los puntos A y A' .



- **Simetría especular**

La simetría especular solo es posible en los conjuntos \mathbb{R}^n con $n > 2$, pues consiste en reflejar los puntos sobre un plano que consta de dos dimensiones. Ha de mencionarse que para \mathbb{R}^n existen exactamente n tipos de simetrías, estas van desde la puntual (sobre un objeto sin dimensiones), la axial (sobre una recta de una dimensión), la especular (sobre un plano de dos dimensiones) y así de manera sucesiva hasta simetrías sobre un conjunto de $n - 1$ dimensiones. Simetrías en conjuntos iguales o mayores a \mathbb{R}^4 no pueden ser representadas gráficamente por lo que no serán tema de estudio.

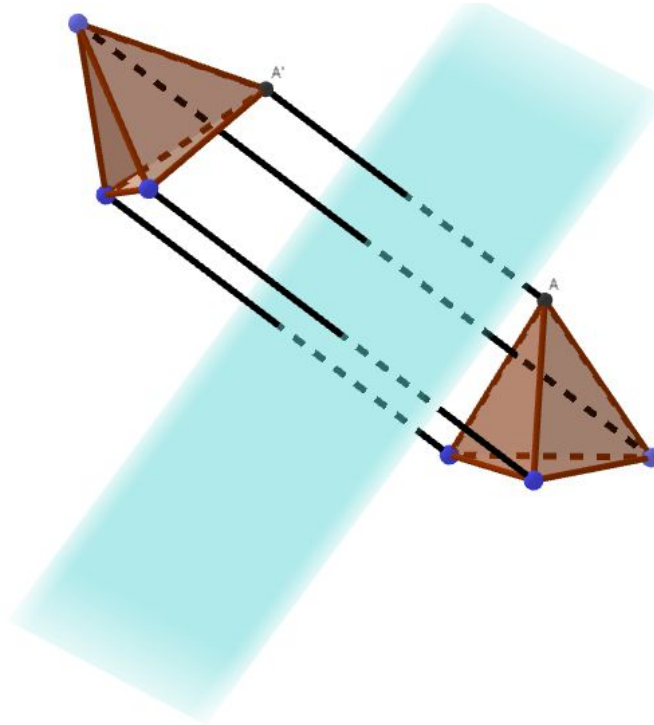


Figura 2.15. Simetría especular de un tetraedro.

Para realizar una simetría especular es necesario tener las coordenadas del punto que se va a reflejar y del plano sobre el que se realizará, se sabe que un plano α puede representarse algebraicamente por la expresión $Ax + By + Cz + D = 0$ y que el vector $\langle A, B, C \rangle$ será un vector normal del plano, esto es un vector perpendicular al plano.

Con las premisas anteriores, si se tiene un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ la simetría especular de P sobre α consiste en calcular el punto de intersección de α con la recta que pasa por P y que es perpendicular a α y posteriormente realizar una simetría puntual. La recta que buscamos estará dada por:

$$\langle A, B, C \rangle t + \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

Esto haciendo uso de la particularidad de $\langle A, B, C \rangle$ de ser perpendicular a α y por ende paralelo a la recta buscada. Así, para encontrar el punto de intersección entre la recta y el plano se soluciona la ecuación:

$$A(At + x_1) + B(Bt + y_1) + C(Ct + z_1) + D = 0$$

Que resulta de sustituir los valores de x, y y z por los correspondientes de la ecuación de la recta. La solución para la ecuación sería:

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Así, el punto de intersección entre la recta y el plano sería:

$$\left(-A \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + x_1, -B \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + y_1, -C \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + z_1 \right)$$

Con este punto, la simetría de P sobre α se reduce a una simetría puntual de P sobre el punto recién mencionado, por lo que las coordenadas de P' serían:

$$\left(-2A \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + x_1, -2B \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + y_1, -2C \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2} + z_1 \right)$$

Ha de aclararse que solo para transformaciones en \mathbb{R}^2 es posible realizar una descripción de la construcción con regla y compás.

2.2.1.4. La estructura algebraica de las transformaciones isométricas

El comportamiento como función de las transformaciones isométricas permite que sean estudiadas como una estructura algebraica que tiene unas propiedades particulares.

Llamaremos T al conjunto de todas las transformaciones isométricas posibles (incluyendo todas aquellas no estudiadas en este capítulo) y \mathfrak{R} al espacio sobre el que se aplican tales transformaciones (para los ejemplos usaremos \mathbb{R}^2 por el referente gráfico, aunque las afirmaciones aplican para cualquier conjunto). Es importante reconocer que, al igual que con las funciones, las transformaciones pueden componerse y obtener una nueva transformación. A continuación se mostrarán cinco ejemplos de transformaciones compuestas:

- Al componer dos traslaciones se obtiene una nueva traslación:

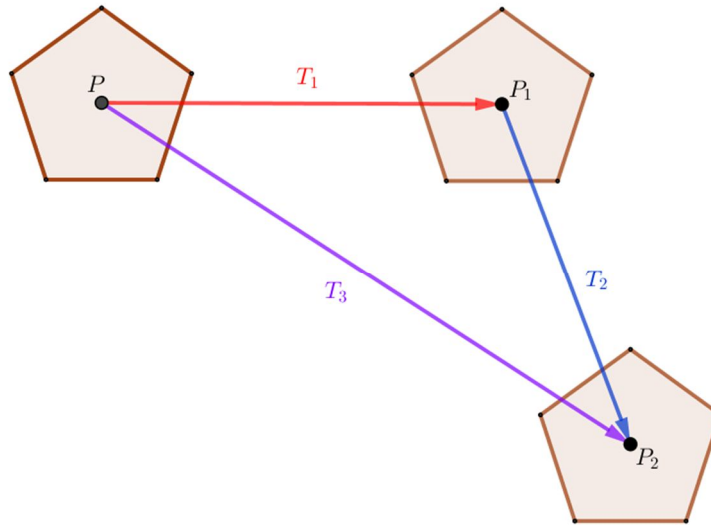


Figura 2.16. Composición de dos traslaciones.

En este caso la aplicación de dos traslaciones T_1 y T_2 genera una nueva traslación (T_3) que particularmente tiene como vector de desplazamiento el correspondiente a la suma de los vectores de desplazamiento de T_1 y T_2 . Sin embargo, no necesariamente las composiciones de transformaciones dan como resultado una transformación del mismo estilo.

- La composición de dos simetrías axiales que dan como resultado una traslación.

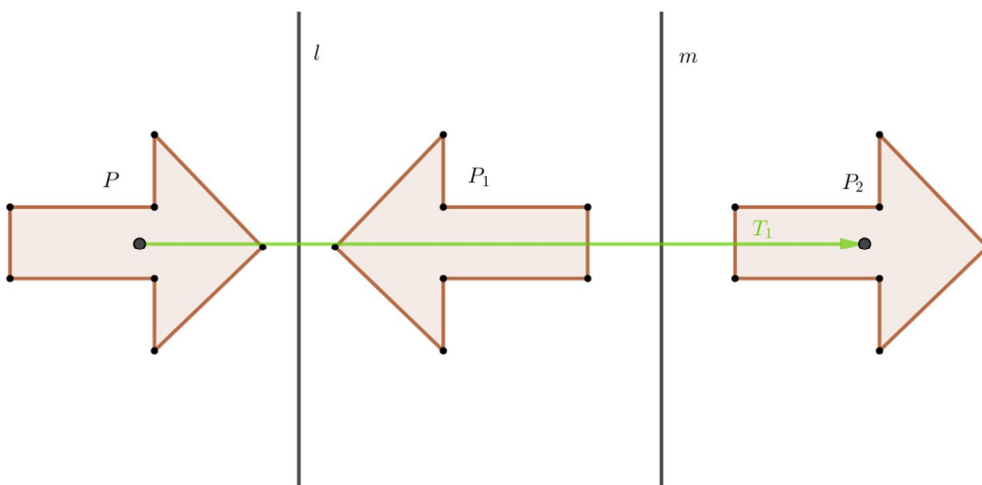


Figura 2.17. Composición de dos simetrías axiales.

La figura 2.17 muestra la aplicación de una simetría axial al polígono P sobre la recta l , lo que genera P_1 luego otra simetría axial a P_1 sobre la recta m generando así el polígono P_2 que es equivalente al polígono que se generaría al realizar la traslación T_1 sobre P .

- Dos simetrías sobre rectas que se cortan (l, m) generan una rotación sobre el punto de corte.

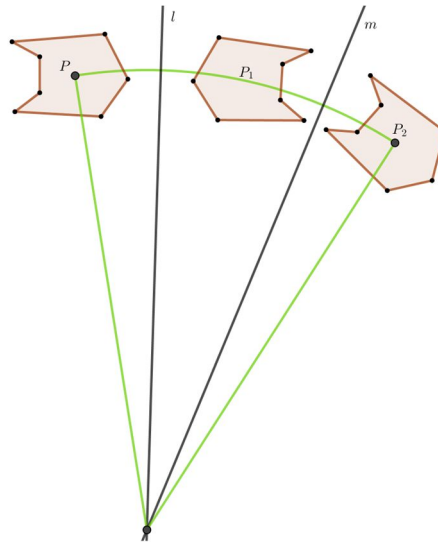


Figura 2.18. Composición de dos simetrías con rectas que comparten en punto.

- Una traslación (T_1) y una rotación (R_1) generan una rotación (R_2) sobre otro punto.

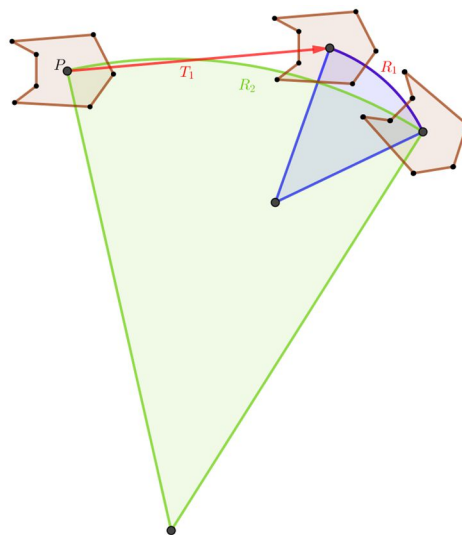


Figura 2.19. Composición de traslación y rotación.

- Una rotación (R_1) y una simetría (S_1) generan una simetría (S_2) con traslación (T_1).

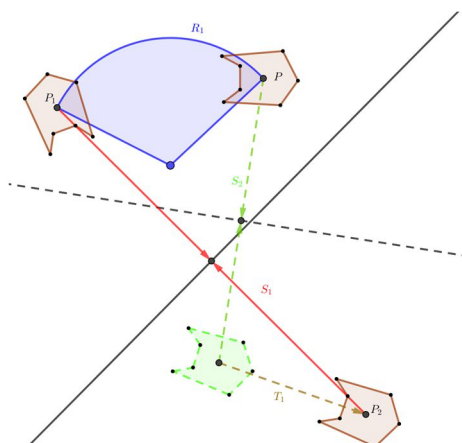


Figura 2.20. Composición de rotación y simetría.

La estructura algebraica de las transformaciones rígidas es la de *grupo*, pues su composición (producto de dos o más transformaciones) tiene las siguientes propiedades:

1. Es una operación: esto es que para cualquier composición de transformaciones rígidas se obtiene otra transformación rígida. Los ejemplos anteriores dan cuenta de esto.
2. Es asociativa: la composición de movimientos es independiente del modo de asociarse.
3. Tienen elemento neutro: Puede definirse como elemento neutro cualquier transformación que asocie un punto con el mismo, por ejemplo, giros de 360° , traslación de cero unidades, o composiciones de transformaciones con su inversa, trasladar \vec{u} y luego $-\vec{u}$, rotar α y luego $-\alpha$ sobre el mismo punto, una doble simetría axial o puntual sobre la misma recta o punto, etc.
4. Elemento inverso: toda transformación rígida tiene su simétrica, de tal manera que al componer ambas transformaciones se genera una transformación neutra.

Conviene hacer mención de esta estructura y de la composición de transformaciones puesto que los movimientos que los estudiantes realizan con el material, rara vez se tratan de transformaciones individuales como las estudiadas

al inicio de este capítulo, más bien, en general se realizan composiciones entre transformaciones pues, por ejemplo, a medida que se va llevando la pieza a su lugar (traslación) también se está cambiando su orientación para situarla (rotación).

Lo estudiado en este apartado muestra una estrecha relación entre la geometría, el álgebra simbólica y la teoría de conjuntos, cada una de estas ramas de las matemáticas ha permitido estudiar el concepto de transformación rígida desde aspectos distintos, ya sea con las ideas de congruencia y semejanza, con la manipulación de expresiones algebraicas o con el entendimiento de la estructura del conjunto de las transformaciones. Este hecho postula al tema de las transformaciones como un elemento de suma importancia en el currículo de matemáticas.

Para este estudio nos centraremos en la interpretación geométrica de las acciones de los estudiantes, ya que nuestro objetivo recae sobre las habilidades de razonamiento que tales acciones implican, no obstante, estudios posteriores podrían aplicar en niveles más avanzados de formación, tareas cuya intencionalidad recaiga sobre el trabajo con expresiones algebraicas o con las propiedades de estructura de grupo que las transformaciones rígidas poseen.

2.3. Representaciones bi- y tridimensionales

La representación de un objeto puede ser tridimensional o bidimensional. En las actividades propuestas se utilizan los dos tipos de representaciones y por tanto en este apartado se mencionan algunas de ellas. La información incluida en este apartado es retomada de un documento que refiere los métodos de proyección para la representación de objetos y el trabajo de Gutierrez (1998) relacionado con la enseñanza de representaciones planas de cuerpos tridimensionales. Estas proyecciones están relacionadas con formas que tienen lados rectos (e.g. cubos).

Las representaciones tridimensionales se realizan con el fin de plasmar un objeto real. Estas se realizan con técnicas de dibujo en las cuales, por ejemplo, las sombras o tonos de grises juegan un papel importante pues reflejan

tridimensionalidad del objeto. Dentro de estas representaciones se reconocen proyecciones en perspectiva, oblicuas y axonométricas.

Las proyecciones en perspectiva (ver figura 2.21) buscan representar los objetos tal como los visualiza un observador, más no como son en realidad. En esta proyección se generan una visión que converge a un punto, conocido en las técnicas de dibujo, como punto de fuga, el cual permite una sensación de profundidad en la representación.

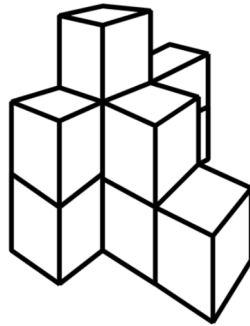


Figura 2.21. Representación de proyección en perspectiva. Tomado de Gutiérrez (1998) de su trabajo: Las representaciones planas de cuerpos 3 – dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.

La proyección oblicua (ver figura 2.22), conocida también como proyección caballera, tiene un plano frontal y las líneas paralelas para indicar profundidad. El plano frontal guarda dimensiones reales en escala del alto y ancho del objeto representado. Las rectas paralelas deben formar 45° con la horizontal.

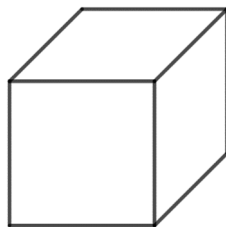


Figura 2.22. Representación de proyección oblicua.

La proyección axonométrica (ver figura 2.23) permite representar objetos mediante la proyección en los tres ejes de referencia. Las caras del objeto se inclinan en relación con la horizontal.

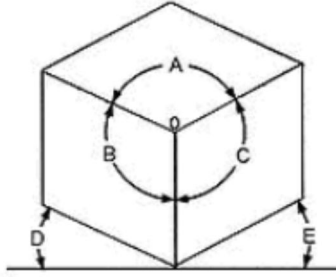


Figura 2.23. Representación de proyección axonometrica. Tomado del documento que refiere los métodos de proyección para la representación de objetos. Recuperado de: <https://cervantics.files.wordpress.com/2018/04/metodosproyeccion.pdf>

Según el ángulo formado con la horizontal se pueden generar tres proyecciones más de la axonométrica: la isométrica, la dimétrica y la trimétrica. En el diseño de actividades la proyección utilizada es la isométrica la cual representa módulos multicubo (en la sección 4.2.2. se hace una descripción de lo que son los módulos multicubo).

La proyección isométrica sitúa el objeto, que debe tener lados rectos, de forma que las aristas que salen de determinado vértice se dibujan con la misma longitud (en el caso de los cubos) y forman ángulos de 120° con la horizontal.

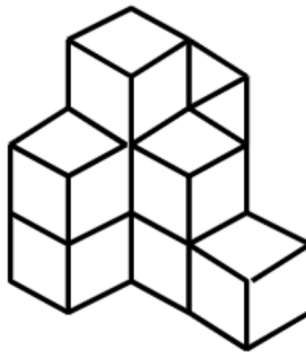


Figura 2.24. Representación de proyección isométrica. Tomado de Gutiérrez (1998) de su trabajo: Las representaciones planas de cuerpos 3 – dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.

En cuanto a las representaciones bidimensionales de módulos multicubos, se reconocen dos: por nivel y ortogonal codificada. La representación por niveles (ver figura 2.25.a), según Gutiérrez (1998), consiste en hacer al sólido diversos cortes paralelos, por puntos significativos (en este caso, por cada plano de cubos). La representación ortogonal (ver figura 2.25.b) tiene codificación que aporta información sobre la cantidad de cubos por fila (Gutierrez, 1998).

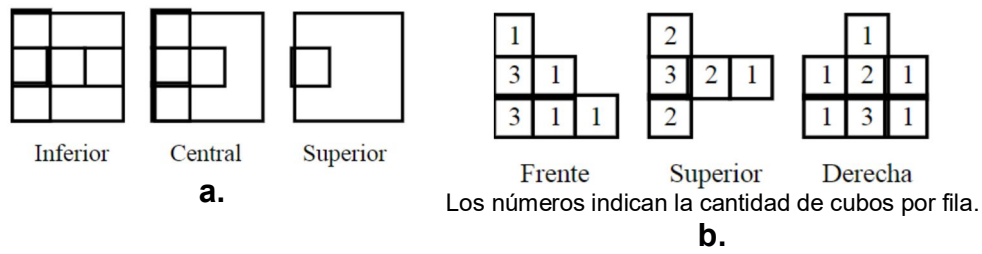


Figura 2.25. Representaciones por nivel (a) y ortogonal codificada (b). Tomado de Gutiérrez (1998) de su trabajo: Las representaciones planas de cuerpos 3 – dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial.

En esta tesis, se utiliza la representación ortogonal, pero sin codificación con el fin de que el estudiante identifique las caras/vistas laterales y superiores e inferiores de los módulos multicubo.

3. Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo y la metodología elegida es el experimento de enseñanza. Esta última, según Gravemeijer (como se cita en Cobb, 2000), se desarrolla en el aula y se inicia con la clarificación de objetivos de aprendizaje matemático y con la elaboración de un experimento en el cual el equipo investigador prevé el proceso de enseñanza-aprendizaje para realizarse en el aula.

El experimento de enseñanza implica una secuencia de actividades⁹ (Steffe, como se citó en Cobb, 2000). En este estudio, para cada actividad se contó con la participación de 26 estudiantes de tercero de primaria, la docente/investigadora que implementaba y, en algunas ocasiones, quien asesoró este estudio. Se utilizaron dos videocámaras para la toma de datos y se registró en las notas de campo/clase lo sucedido en cada clase (en el apartado 3.3. se describe a detalle). Estos registros se utilizaron para preparar episodios posteriores, así como para realizar un análisis retrospectivo del experimento.

El diseño e implementación de las actividades conllevó las siguientes fases tomando como punto de partida lo propuesto por Cobb (2000) y por Rodríguez, Gil y García (1999):

1. El *Diseño instruccional y planificación* inició desde la delimitación del tema y finalizó con un proyecto escrito (2017-I). Esta fase se dividió en dos momentos, el primero reflexivo que se encuentra relacionado con el establecimiento de un marco teórico conceptual, y el segundo de diseño en el cual se planificaron las actividades a ejecutar (ver capítulo 4).
2. La *Experimentación en el aula* comprendió todas las acciones necesarias para la toma de datos (2017), iniciando con el primer contacto del profesor/investigador para el acceso a alguna escuela a fin de implementar las lecciones diseñadas. La toma de datos se realizó en dos ciclos.

⁹ Una actividad se puede llevar a cabo en una o más sesiones/lecciones de clase.

En el primer ciclo se implementaron las lecciones para identificar las falencias respecto a la aproximación conceptual y el marco teórico definido, así como la viabilidad de las mismas. Al final de cada lección/sesión de clase, se realizó un análisis para reflexionar sobre la actividad de los estudiantes y el papel desempeñado por el investigador y profesor. A partir de ello, se hicieron los reajustes necesarios para las siguientes sesiones. En el capítulo 4 se presenta la propuesta de actividades definitiva.

En el segundo ciclo se reajustaron y aplicaron las actividades según lo obtenido del primer ciclo. Cabe señalar, que finalizadas algunas sesiones se siguió el mismo proceso de replantear la actividad para abordar el objetivo propuesto para la clase.

3. El *Análisis retrospectivo* se realizó terminada tanto el primer como el segundo ciclo. El análisis del primer ciclo sirvió para construir categorías e indicadores que daban cuenta de aspectos desarrollados del razonamiento espacial. En esta fase, como lo plantean Rodríguez, Gil y García (1999), se realizó reducción, disposición y transformación de datos. En el capítulo 5, se explican las acciones y momentos dados en las sesiones de clase para mostrar la viabilidad de la propuesta.

El informe escrito que da cuenta del diseño e implementación de las actividades se realizó a lo largo de la investigación (2017 y 2018).

En resumen, el objetivo de esta tesis se materializa en la elaboración de una secuencia de actividades que se desarrolló bajo las fases del experimento de enseñanza. El primer momento fue de *búsqueda de información* sobre las diferentes perspectivas e investigaciones realizadas en el campo educativo en torno al *razonamiento espacial* a fin de delimitar la problemática de estudio y se estableció a *la teoría de la variación* como soporte para el diseño y análisis de las actividades. Con este marco de referencia, se construyeron los objetivos y preguntas de la investigación y el *diseño de las actividades*. Luego se implementaron las actividades en un primer ciclo para analizar su viabilidad. Un análisis de los resultados de esta prueba y de la propia experiencia sirvió para

reformular las actividades y puntualizar las participaciones del docente con el fin de tener coherencia entre los elementos considerados para el diseño de las actividades.

El siguiente esquema muestra el proceso del diseño de actividades realizado a la luz de la teoría de la variación y la aproximación conceptual de razonamiento espacial adoptada para este estudio.

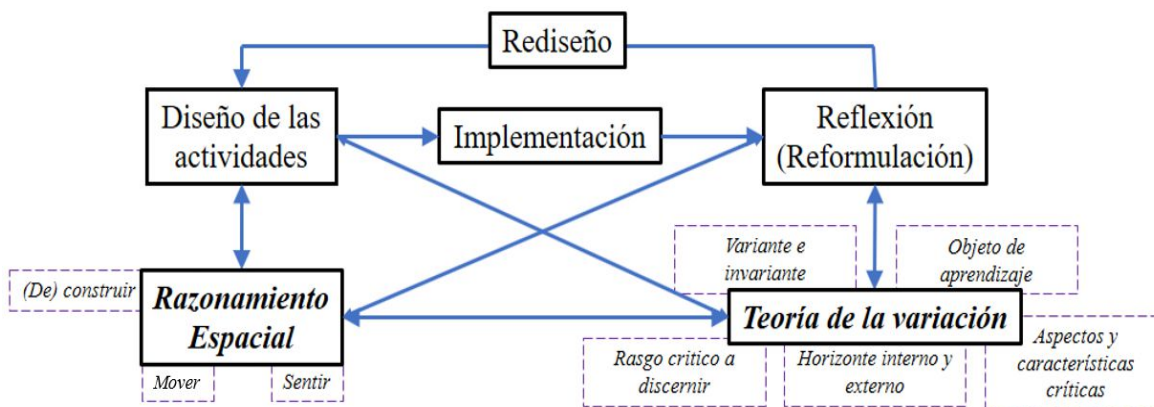


Figura 3.1. Proceso de diseño de la secuencia didáctica.

La lectura del esquema anterior inicia con el *diseño de las lecciones*, considerando principalmente tres de los elementos de la aproximación de *razonamiento espacial*, de-construir, situar y mover, y se explicita el objeto de aprendizaje para cada sesión, en términos de la *teoría de la variación*. Las lecciones diseñadas se *implementan* en un primer momento (primer ciclo) para *reflexionar* sobre su viabilidad y a partir de los resultados, se *rediseñan* la secuencia para una segunda implementación (segundo ciclo). En el esquema se encuentran flechas en doble sentido, lo cual significa que, para llevar a cabo alguna acción, bien sea el diseño de lecciones o la reformulación de las mismas, interactúan la aproximación conceptual de razonamiento espacial con los componentes de la teoría de la variación.

En los siguientes puntos se describen las acciones realizadas para dar cumplimiento a los objetivos planteados en esta tesis. Inicialmente, se refiere cómo se llevó a cabo la revisión de antecedentes y de qué forma aporta al presente estudio; luego se menciona como se utilizó el marco teórico para el

diseño de las actividades; seguido de esto, se relata el proceso de construcción de las actividades y su implementación. Finalmente se menciona como se hizo la construcción de las categorías de análisis y como se llevó a cabo el análisis de los datos.

3.1. Revisión de antecedentes y definición del marco teórico

Para la descripción de antecedentes se organizó la información considerando: tipo de población reportada en los estudios, ideas principales de los textos, recursos usados, metodología a seguir, dificultades presentadas en los estudiantes al abordar la temática, importancia del razonamiento espacial y definición de razonamiento espacial. La información encontrada, por un lado, permitió la delimitación del objetivo de este estudio, pues se identificó que las investigaciones relacionadas con diseño de secuencias didácticas para el desarrollo de razonamiento espacial son pocas; y por otro, las dificultades documentadas, algunas propuestas de actividades y recursos sirvieron para el diseño de la propia secuencia.

La aproximación de razonamiento espacial asumida para este estudio (apartado 1.4.2.), resultó de la revisión exhaustiva del libro *Spatial Reasoning in the Early Years* (2015) elaborado por Brent Davis y un grupo de estudio de razonamiento espacial en Canadá. Este grupo retoma elementos identificados en varios estudios en diferentes latitudes, y a diferencia de estos, lo plantea como un sistema de interacción entre lo cognitivo y lo físico para el desarrollo del razonamiento espacial. Esta aproximación fue fundamental al momento de especificar los objetos de aprendizaje pretendidos para desarrollar en los estudiantes.

En relación con el marco teórico, se optó por el de la variación dado que su concepción sobre el aprendizaje y los patrones de variación permitieron construir las actividades. En su diseño, se logró complejizar las actividades de manera gradual, especificando en cada una los aspectos en los cuales los alumnos deberían focalizarse, esto es, las características críticas del objeto de aprendizaje en cuestión. No se consideró una teoría enfocada en analizar los procesos

cognitivos de los estudiantes o en el papel del profesor, porque esta tesis está enfocada en reconocer la viabilidad de la propuesta de actividades.

3.2. Diseño inicial de actividades

El diseño de las actividades se realizó bajo parámetros de la teoría de la variación (Ling Lo, 2012; Orgill, 2012; Runesson 2005). Se planearon una prueba diagnóstica/inicial – final, cinco actividades y un proyecto final.

La prueba diagnóstica (véase anexo 5) se realizó, por un lado, para reconocer el nivel cognitivo de los estudiantes en el campo de razonamiento espacial, y por otro lado, para identificar, con la aplicación de esta misma prueba al final del desarrollo de todas las actividades, el nuevo (o no) aprendizaje adquirido producto del desarrollo de actividades.

Esta prueba diagnóstica se elaboró para identificar habilidades y competencias de razonamiento espacial que, según estudios mostrados en Davis y el Spatial Reasoning Study Group (2015), podrían tener alumnos en estas edades. Algunos de los ítems de esta prueba fueron retomados de estos autores.

Para cada actividad de la secuencia de acuerdo con la teoría de la variación, se describió el objeto de aprendizaje, aspectos y características críticas, horizonte externo e interno, materiales a utilizar y edad de los participantes (Ver anexo 4). Seguido de esto, se hizo una descripción de cada actividad exponiendo el inicio, el desarrollo y el cierre de las mismas (ver capítulo 4). Como ya se había mencionado al principio de este capítulo, cada actividad se diseñó considerando los elementos: *mover*, *situar (cambiar de dimensión)* y *de-construir* que se encuentran en la aproximación conceptual de razonamiento espacial propuesto por Davis y el Spatial Reasoning Study Group (2015).

De manera específica, en la primera actividad se trabajaron *movimientos isométricos en el plano (2D)*, en la segunda y tercera actividad el objeto de aprendizaje se enfocó en *cambios de dimensión (2D-3D)*, en la cuarta y quinta actividad se realizaron *construcciones* de objetos tridimensionales.

El proyecto final fue diseñado para dar cierre a las sesiones de la secuencia, y reconocer cómo los estudiantes usan las habilidades desarrolladas durante las sesiones.

3.3. Primer ciclo: implementación de la secuencia

En la búsqueda de la institución que permitiera la implementación de las actividades, se estableció contacto con el maestro Mario Moctezuma, egresado de la maestría en Desarrollo Educativo de la Universidad Pedagógica Nacional y quien fue estudiante de la Doctora que dirige la presente investigación. Él labora en la escuela primaria Alfredo Bonfil, ubicada en Ciudad de México en la delegación Tlalpan y, aprovechando esta condición, se le solicitó realizar el contacto con las autoridades de la escuela. Al tener contacto directo con la escuela, se hizo una primera visita para hablar con el director acerca de la investigación a realizar.

En el primer acercamiento a la escuela se dialogó con la Coordinadora de la jornada vespertina y se presentó una carta y un proyecto a fin de formalizar el permiso para llevar a cabo la investigación. Dicho proyecto (ver Anexo 3) explica el objetivo de la secuencia, por qué es importante desarrollar el razonamiento espacial en los niños de educación primaria y cómo puede impactar estas habilidades no solo en matemáticas sino en su vida académica y cotidiana. Al final del proyecto presentado, se encuentran los requerimientos¹⁰ necesarios para aplicar la secuencia y un cronograma de las actividades propuesto para llevar a cabo el primer ciclo de implementación (2017-I) y el cual se encuentra a continuación.

¹⁰ Se solicitó un salón para el trabajo con los estudiantes, mínimo 6, máximo 20 estudiantes, que se encuentren entre los 7 y 8 años, un aula de cómputo que tenga entre 10 y 20 computadoras y disponibilidad de dos horas semanales.

Tabla 3.1

Cronograma implementación: primer ciclo

Fecha¹¹	Actividad	Sesiones	Material	Resultado esperado
17, 18, 23 y 31 de mayo y 1 de junio.	Localizar piezas de pentominó en la configuración dada.	5	Piezas de pentominó.	Comparación, visualización y localización y rotación de objetos.
6, 8, 13 y 14 de junio	Interpretar las representaciones en dos dimensiones de configuraciones en tres dimensionales elaboradas con policubos.	4	Policubos	Comparación y relación de las piezas y las representaciones bidimensionales.
20 de junio	Diseñar las configuraciones dadas.	1	Software Lego Digital Designer (LDD)	Comparación, rotación y orientación de piezas de Lego en el software.
21 de junio	Construcción libre de figuras.	1	Lego ¹²	Relación de leguaje con orientación y localización de piezas.
27 y 28 de junio	Elaborar construcciones (lugares, objetos, etc) de acuerdo con lo realizado durante las anteriores sesiones.	2	Lego	Construcción de algún objeto por medio de rotaciones, comparaciones y relaciones entre representaciones (2D-3D).

Cada sesión contó con la participación de 8 estudiantes, cuatro de primer grado y los restantes de segundo grado, con edades entre 7 y 8 años.¹³

Para el registro de los datos se contó con dos cámaras, una de ellas realizaba una toma general del salón y la otra, se enfocaba en el trabajo específico de

¹¹ Las fechas no estaba previamente establecidas, estas fueron añadidas luego de realizarse el primer ciclo.

¹² Se denominará Lego a aquellos bloques de plástico interconectarles.

¹³ Los alumnos fueron seleccionados por los docentes de cada grupo. Se pidió que participaran niños y niñas. No se dio ningún otro criterio de selección, aunque algunas profesoras comentaron que los eligieron por su nivel académico o por problemas de comportamiento. Las actividades fueron desarrolladas finalizando el ciclo escolar.

algunos estudiantes. A cada estudiante se le proporcionó materiales concretos 2D y 3D dependiendo de la actividad y se hizo uso de un software interactivo que fue instalado en las computadoras de la escuela. Inmediatamente terminada cada sesión, se realizó un registro como notas de campo/clase a fin de describir lo sucedido (la organización del grupo, las habilidades y destrezas de los estudiantes). Dicho registro cierra con comentarios sobre puntos a mejorar (en términos de material, planeación de clase e intervenciones de la profesora en formación que estaba frente a grupo).

3.4. Rediseño de las actividades

Derivado de los resultados del primer ciclo se incluyeron algunos cambios. En relación con la prueba diagnóstica/inicial - final se incluyeron dos puntos de visualización e interpretación de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales. El esquema de las actividades no se modificó, es decir que, para cada lección se definieron objetos de aprendizaje de acuerdo con los objetos/elementos propios de la teoría de la variación.

Respecto a las actividades se agregó una más, resultando seis lecciones en total. La primera no tuvo modificaciones, en esta se trabajan *movimientos* isométricos en el plano (2D), se agregó una segunda actividad que involucra el uso adecuado del lenguaje (términos de dirección y proximidad) al dar indicaciones de *movimiento* en el plano. La tercera y cuarta, al igual que en el diseño inicial, se enfocan en los *cambios de dimensión (2D – 3D)* y finalmente, sin realizar cambios, la *quinta* actividad tiene como propósito realizar *construcciones* de objetos tridimensionales. El proyecto final no es modificado, el objetivo de éste es cerrar las sesiones de la secuencia y que los estudiantes usen las habilidades desarrolladas para cumplir con lo solicitado.

3.5. Segundo ciclo: implementación definitiva

Para validar esta propuesta, se consideró necesario aplicarla en un grupo completo de tercer grado¹⁴. La población objeto de estudio estuvo formada por 26

¹⁴ La propuesta fue desarrollada en el inicio del ciclo escolar de tercer grado de primaria. Es decir, se consideró pertinente su aplicación para los estudiantes de segundo con los cuales se aplicó la prueba piloto y estaban terminando su ciclo escolar. Algunas actividades tenían mayor grado de

estudiantes (8 años), 15 niños y 11 niñas. Se llevaron a cabo 15 sesiones y se describen en la siguiente tabla.

Tabla 3.2

Cronograma prueba definitiva

Fecha	Actividad	Sesiones	Material	Resultado esperado
14 de septiembre	Aplicación prueba diagnóstica/inicial.	1	Hoja blanca con prueba diagnóstica.	Respuestas de los estudiantes que permiten identificar sus habilidades de razonamiento espacial.
17, 19, 26 y 30 de octubre	Localizar piezas de pentominó en la configuración dada.	4	Piezas de pentominó.	Comparación, visualización, localización y movimiento de objetos planos en el espacio.
31 de octubre y 6 de noviembre	Dar indicaciones de movimiento en el plano utilizando términos de dirección y proximidad.	2	Petolas de tenis, dados de plástico de 10 cm x 10 cm, paliacates, conos.	Reconocimiento de lenguaje adecuado para indicar y realizar movimientos en el plano.
7, 8 y 9 de noviembre	Interpretar las representaciones en dos dimensiones de construcciones en tres dimensionales elaboradas con cubos.	3	Cubos de madera	Reconocimiento de vistas superior, inferior y lateral de una construcción en tres dimensiones.
13 y 21 de noviembre	Interpretar las representaciones y vistas en dos dimensiones de construcciones en tres dimensionales para replicarlas.	2	Cubos soma	Relación de lenguaje con orientación y localización de piezas.
22 y 27 de	Interpretar representaciones y	2	Programa	Reconocimiento de vistas en

dificultad para los estudiantes de primero quienes: desarrollaron el piloto y posteriormente empezaban su ciclo escolar en segundo de primaria.

noviembre	vistas dinámicas en dos dimensiones para realizar construcciones en tres dimensiones.		digital LDD	representación dinámica bidimensional.
30 de noviembre	Elaborar construcciones (lugares, objetos, etc) de acuerdo con lo realizado durante las anteriores sesiones.	2	Lego	Construcción de algún objeto por medio de rotaciones, comparaciones y relaciones entre representaciones (2D-3D).
6 de diciembre	Aplicación prueba final.	1	Hoja blanca con prueba diagnóstica.	Respuestas de los estudiantes que permiten identificar sus habilidades de razonamiento espacial.

El anterior cronograma muestra que el tiempo transcurrido entre la prueba diagnóstica y el desarrollo de la primera actividad fue aproximadamente un mes. Esto sucedió porque el día planeado para iniciar la implementación de actividades, el 19 de septiembre, ocurrió el sismo y por la suspensión de clases, se logró retomar actividades académicas entre la segunda y tercera semana de octubre.

3.6. Construcción de las categorías de análisis

En esta tesis también se pretendió generar categorías e indicadores que permitan identificar el desarrollo de aspectos del razonamiento espacial. El proceso de construcción involucró, por un lado, un proceso inductivo y por otro, uno deductivo.

Las primeras categorías de análisis emergieron de los resultados del piloto a partir de un proceso inductivo. Para su desarrollo se retomaron los aspectos y características críticas de cada actividad. El análisis estuvo dividido en tres casos relacionados con los elementos retomados de la aproximación adoptada para este estudio: a) movimientos en el plano, b) cambios de dimensión (2D – 3D) y, c) construcción de objetos.

En estos tres casos se analizaron mediante un proceso deductivo las acciones de los estudiantes y de los profesores en relación con cuatro características críticas: comparación y visualización, localización, organización de piezas y movimiento. A continuación, se define cada característica en términos de sus aspectos críticos.

Comparación y visualización (CV): relacionado con el reconocimiento de las formas de cada pieza (pentominó, cubos de madera, cubos soma, Lego) utilizada en las distintas actividades, la comparación entre piezas para ensamblarlas y la identificación de como unir las piezas para formar secciones o construcciones solicitadas. Para el segundo caso (cambios de dimensión usando cubos de madera y soma), en el análisis se consideró además la lectura de representaciones bidimensionales de construcciones tridimensionales con distintas tonalidades de gris. Los indicadores de esta categoría son:

- *Reconocer la forma de cada pieza.*
- *Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas.*
- *Reconocer en el dibujo las piezas que lo componen (estén explícitas o implícitas). (Ideas de congruencia por percepción inmediata y superposición).*
- *Generar/construir una estrategia para resolver la tarea de construcción.*

Localización (L): se refiere a las acciones que dan cuenta de la unión y ubicación de las piezas. Considera acciones o uso de lenguaje utilizado para describir la posición relativa de las piezas. El indicador de esta categoría es: *dar instrucciones que describen la posición relativa de una pieza (pentominó y policubos).*

Movimiento (M): se identifican los movimientos corporales realizados (en el plano o en el espacio, según corresponda) respecto al material dado y que sirven para completar o realizar la construcción solicitada. El indicador de esta categoría es: *mover las piezas para completar una configuración determinada.*

Organización de las piezas (OP): en esta categoría se describen las estrategias utilizadas para ensamblar las piezas que conforman una sección o la construcción completa. En relación con el segundo (cambios de dimensión) y tercer

(construcción de objetos) caso, se expone la forma en la cual elaboran una construcción o interpretan su representación bi- y tridimensional a partir de vistas superiores, inferiores y laterales. El indicador de esta categoría es: *crear estrategias para ensamblar las piezas que conforman una sección*.

En el análisis del segundo caso emerge una categoría adicional: *cambio de dimensión* (CD) en la cual se reconocen formas tridimensionales en las representaciones bi- y tridimensionales y se identifican e interpretan representaciones tridimensionales a escala. Sus indicadores son:

- *Relacionar las formas tridimensionales con sus correspondientes representaciones bi- y tridimensionales.*
- *Interpretar el significado de los distintos tonos de color gris en las representaciones tridimensionales.*
- *Identificar que las representaciones bi- y tridimensionales están en escala y se relacionan con las policubos.*
- *Reconocer las vistas de las representaciones bi- y tridimensionales.*

Cada categoría se acompaña con un numeral que indica el caso al que se refiere. Por ejemplo, para el análisis de transformaciones isométricas en el plano las categorías se identifican como CV1, L1, OP1, M1).

3.7. Análisis de los datos

El análisis de los datos se dividió en tres momentos: en el primero se da cuenta de la evolución de los estudiantes al comparar la prueba diagnóstica aplicada antes y después de la secuencia de actividades, la cual señala cambio en relación con interpretación de representaciones 2D. En un segundo momento, se describen acciones de los estudiantes que dan cuenta de evolución durante el desarrollo de secuencia en correspondencia con la interpretación y los cambios de representaciones 2D y 3D. Finalmente, en un tercer momento se presentan construcciones de los estudiantes que dan cuenta de su creativa e imaginación.

4. Desarrollo de razonamiento espacial: una propuesta de enseñanza

Los aspectos y características críticas, en esta propuesta, describen los elementos del razonamiento espacial que se espera desarrollen los estudiantes en cada actividad. Además, que considera variantes e invariantes para que el estudiante discierna, y por ende según la teoría de variación, adquiera conocimiento en relación con los objetos de aprendizaje pretendidos.

En los siguientes apartados se definen los elementos de la teoría de la variación relacionados con objetos de aprendizaje determinados, se describen las actividades, las potencialidades de estas y los materiales, el papel del alumno y el profesor y las normas de clase.

4.1. Propuesta de actividades

El diseño de actividades, como ya se comentó en el apartado 3.2., esta permeado por tres grandes elementos: *mover*, *situar (cambios de dimensión)* y *construir* objetos. Cada elemento se abordó desde dos actividades respectivamente y las actividades se planearon en diferentes lecciones/sesiones de clase.

Transversal al trabajo con estos elementos está el uso del lenguaje. En las actividades es visible cuando se solicita a los estudiantes dar y recibir indicaciones de movimiento o instrucciones de construcción de rompecabezas y módulos multicubo. Particularmente las lecciones que tienen sombreado gris en la tabla 4.1, tienen por objetivo emplear y desarrollar un lenguaje relacionado con vocabulario de dirección y proximidad. A continuación se presenta una tabla que resume las actividades y lecciones diseñadas.

Tabla 4.1

Resumen propuesta de actividades

Elementos	Actividades	Sesión/lección		
		Primera	Segunda	Tercera ¹⁵
Movimiento	Transformaciones isométricas en el plano.	Familiarización con el pentominó.	Construcción de rompecabezas (primer nivel de dificultad).	Construcción de rompecabezas (segundo nivel de dificultad).
	Movimientos del plano en el espacio.	Actividad de movimiento en un espacio abierto.		
Cambios de dimensión	Reconocimiento de vista superior, inferior, lateral e isométrica.	Identificación, en representaciones bi- y tridimensionales en escala de grises, de las diferentes vistas de módulos multicubo.	Construcción de módulos multicubo (se diferencian las vistas laterales, superior e inferior por colores) a partir de indicaciones dadas.	
	Interpretación de representaciones tridimensionales para la elaboración de un módulo multicubo.	Uso de algunos policubos para la construcción de objetos representados en una hoja en escala de grises.	Uso de todos los policubos para la construcción de objetos representados en una hoja donde se distinguen por colores los policubos a utilizar.	
Construcción de objetos 3D	Construcción de entornos	Uso de piezas de Lego para construir castillos. Uso del	Uso de piezas de Lego para construir parques de diversiones.	

¹⁵ Se llevó otra sesión de clase en la construcción de rompecabezas porque se consideró falta de trabajo con el material.

		programa digital LDD que muestra, según el estudiante lo requiera al manipular el software, diferentes vistas del objeto (este será acomodado en el castillo) a construir con piezas de Lego.	Uso del programa digital LDD que muestra, según el estudiante lo requiera al manipular el software, diferentes vistas del objeto (este será acomodado en el parque de diversiones) a construir con piezas de Lego.
Proyecto final	Elaboración de un zoológico	Uso de representaciones tridimensionales con vistas laterales de objetos (animales) para construirlos.	Uso de piezas de Lego para construir entre todo el grupo de tercero un zoológico.

Cada lección consideró tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. En el inicio, con duración de 10 a 15 minutos, se organiza por grupos a los estudiantes y se explican las actividades a realizar durante la sesión de clase. En el desarrollo, de 30 a 40 minutos, los estudiantes realizar las lecciones propuestas y en el cierre, de 10 a 15 minutos, se socializa con todo el grupo de estudiantes para reflexionar principalmente sobre las dificultades presentadas, las estrategias utilizadas y las acciones realizadas durante la sesión de clase en el desarrollo de las actividades.

A continuación se presentan las actividades con sus respectivas lecciones y momentos considerados.

4.1.1. Movimientos en el plano

Para abordar el tema (elemento) se diseñan e implementan dos actividades. La primera consiste en armar rompecabezas con piezas de pentominó y la segunda en desplazarse de un lugar A, a un lugar B pasando por diferentes puntos. En las dos actividades se requiere del uso del lenguaje para dar indicaciones de armado

y desplazamiento respectivamente. En los dos siguientes apartados se describirán dichas actividades y sus potencialidades.

- **Actividad 1: Transformaciones isométricas en el plano**

El objeto de aprendizaje está enfocado en las *implicaciones de los movimientos isométricos en el plano y el espacio* al usar pentominós. El desarrollo de esta actividad requiere del uso de *diferentes* rompecabezas que son armados con las *mismas* piezas de pentominó. Esto supone el reconocimiento de que los distintos rompecabezas tienen la misma área, pero diferente perímetro. En el anexo 4, actividad 1, se presenta en detalle los aspectos y características críticas y el horizonte interno y externo que determina los elementos de aprendizaje considerados dentro de la variación para esta actividad. A continuación se presentan las lecciones de esta actividad con sus respectivos momentos.

- ✓ **Primera lección: Familiarización con el material**

Se inicia la lección proporcionándole a cada estudiante 12 piezas de pentominó y un marco rectangular de $4u \times 15u$. Las piezas deben ensamblarse sobre el marco rectangular de tal manera que no sobre ni falte espacio.

Luego se hace una puesta en común guiada para nombrar las piezas de pentominó. Para ello en la intervención se realizan las siguientes preguntas:

¿Todos tienen las mismas piezas? ¿Las piezas entre sí son diferentes o iguales? ¿Por qué son diferentes o iguales? ¿Cómo las podríamos diferenciar?

En esta sesión los estudiantes tendrán que:

- Reconocer la forma de cada pieza (ver Anexo 4, actividad 1. materiales).
- Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas.

✓ **Segunda y tercera¹⁶ lección: Construcción de rompecabezas**

Para las actividades de esta parte se consideran tres momentos y los estudiantes deberán tener en cuenta que:

- Cada estudiante debe armar el rompecabezas asignado.
- Si un integrante del equipo tiene dificultades, sus compañeros podrán ayudarlo dándole indicaciones, pero nadie podrá tocar su material.
- Cada rompecabezas armado equivale a un punto.

➤ **Inicio**

Se entrega a cada estudiante un marco rectangular y las piezas de pentominó para que los estudiantes realicen la siguiente actividad:

- Organizar las piezas de pentominó en el marco asignado sin que sobre o falte alguna pieza.
- Al principio no contarán con pistas para solucionarlo, solo si se evidencia dificultad en el ejercicio se les dará pistas.

➤ **Desarrollo**

Se entrega a cada estudiante un rompecabezas de pentominó cuyo marco es de un animal y se indica armarlo.

En esta actividad los niños tienen que identificar:

- Movimientos isométricos: rotaciones y traslaciones de las piezas de pentominó.
- Trazos de lados ocultos: correspondencia uno a uno (correspondencia entre las piezas dadas y la forma que se identifica en el dibujo), comparación/contraste de las piezas que faltan (superposición) para imaginar trazos.

¹⁶ La tercera lección es igual que la segunda pero los rompecabezas utilizados en esta tienen un mayor grado de dificultad porque tienen menos divisiones.

- Agrupamiento de piezas compuestas a partir de las que faltan por usar.
- Número de piezas que componen una división.

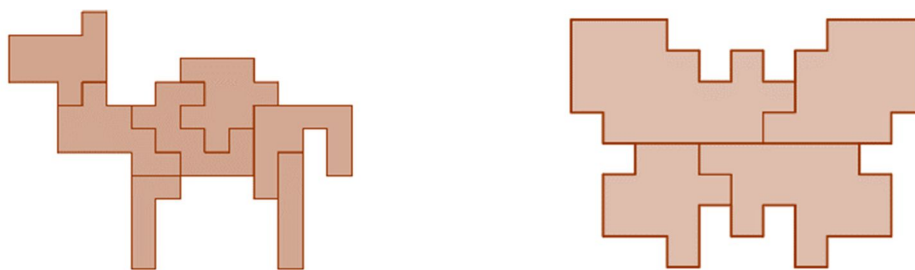
➤ **Cierre**

El cierre de esta lección conlleva la reunión de los estudiantes para que compartan las soluciones a las que llegaron (verbalización de acciones). Se aprovecha el espacio para cuestionar sobre cómo llevar a cabo el proceso de discernimiento en cuanto a traslación y rotación de las piezas. En este espacio se considerarán los siguientes puntos:

- Dificultades al realizar los rompecabezas. El énfasis estará en incorporar términos adecuados para describir posiciones relativas, relación entre figuras y movimientos en el plano.
- Descripción de las estrategias utilizadas para realizar las construcciones. Pedir a algunos estudiantes (dependiendo del tiempo que quede de la sesión) que nos compartan las construcciones realizadas y nos expliquen cómo lo lograron (generar un diálogo que permita identificar cómo llevaron a cabo movimientos de traslación y rotación de las piezas).
- Generar preguntas como: ¿todos los rompecabezas son iguales?, ¿todas las piezas son diferentes?, ¿Cómo identificaste las piezas que se usaban en esta sección?, ¿cómo moviste la pieza para que quedará en esta posición?

En estas tres primeras lecciones el estudiante se enfrenta al armado de rompecabezas que le permite realizar al mismo tiempo acciones cognitivas y de movimiento. Particularmente, la familiarización con el material le posibilita al estudiante reconocer la forma de las piezas, encajarlas por ensayo y error (movimiento) y *comparar* (cognitivo) sus formas para ensamblarlas.

Los rompecabezas con formas de animal tienen divisiones. En la segunda lección los estudiantes arman los rompecabezas con más divisiones; en la tercera lección se proporcionan otros con menos divisiones con la intención de que la actividad tuviera un mayor grado de dificultad. En la siguiente imagen se ejemplifica lo comentado con dos rompecabezas.



a. Rompecabezas con más divisiones

b. Rompecabezas con menos divisiones

Figura 4.1. Representación de rompecabezas utilizados.

El rompecabezas de la figura 4.1.a. tiene algunas divisiones con la forma de alguna de las piezas del pentominó lo que permite al estudiante ver la congruencia del espacio que falta cubrir en el rompecabezas con alguna de las piezas y agrupar piezas a partir de las faltantes. El rompecabezas con menos divisiones (ver figura 4.1.b.) no permite directamente ver la posición de alguna pieza, sin embargo, las divisiones que tiene ayuda al estudiante a agrupar las piezas por la congruencia de su composición con alguna división.

En la segunda y tercera lección se planeó la indicación de quienes terminaran de armar el rompecabezas apoyaran a sus compañeros de equipo dando indicaciones de posición y orientación de las piezas, lo cual permite que tanto el que dice como el que recibe las indicaciones, haga lectura del plano donde debe colocar la pieza e identifique un punto de referencia.

La lección fue diseñada para que el estudiante a partir de la variación de rompecabezas, posiciones y orientaciones de las piezas y de la invariancia en el número y forma de las piezas, *rote* y *traslade* las piezas del pentominó, *corresponda* uno a uno las piezas dadas con la forma identificada en el dibujo, *compare* los espacios faltantes con las piezas sin usar y *visualice* e *imagine* su composición.

- **Actividad 2: Movimientos del plano en el espacio**

El objeto de aprendizaje de esta actividad está centrado en el *uso adecuado del lenguaje al dar indicaciones de movimiento en el plano* (una descripción de los elementos de variación implícitos de la actividad se encuentra en el anexo 4, actividad 2). Esta actividad requiere de un espacio amplio (por ejemplo: cancha de juegos de pelota) y grupos de 3 y 4 estudiantes. Uno o dos estudiantes deben pasar por determinados puntos con los ojos vendados, otro da indicaciones para pasar por los diferentes puntos y el faltante, traza la ruta indicada por quien da las instrucciones. A continuación se describen los momentos de la actividad.

- **Inicio: Explicación y organización de la actividad**

En el aula de clase se da a los estudiantes las siguientes indicaciones:

- Formen grupos de cuatro personas.
- Van a bajar a la cancha de baloncesto y allá dos estudiantes se vendarán los ojos y se amarrarán entre ellos las manos con la ayuda de sus compañeros, un estudiante será el encargado de dar indicaciones y otro estudiante se encargará de dibujar la ruta que indica su compañero.
- En cada punto que pasen habrá un objeto, deberán recogerlo. La obtención de cada objeto suma 10 puntos.

Al estar en las canchas, la docente en formación dirá a los encargados de dar indicaciones los puntos de salida, de llegada y por los cuales deben pasar.

- **Desarrollo de la actividad**

Cada grupo seguirá las indicaciones dadas. En esta actividad los estudiantes deben:

- Usar un lenguaje que propicie la orientación y localización adecuada de objetos (*uso de términos de dirección: arriba,*

abajo, a la derecha de..., a la izquierda de...; de proximidad: cerca de..., al lado de...).

- Dar instrucciones y construir un mapa para llegar de un lugar a otro.
- Interpretar indicaciones y mapas dados.

➤ **Cierre de la actividad**

Esta última parte de la actividad tiene tres momentos:

- Reunión de dos equipos que tengan la misma ruta para comparar la elaboración del mapa.
- Reunión de todos los estudiantes para que compartan lo realizado (verbalización de acciones). Se aprovecha el espacio para cuestionar sobre que palabras usaron para dar las instrucciones. En este espacio se consideran los siguientes puntos:
 - ❖ Dificultades al dar las instrucciones (determinación del lenguaje adecuado teniendo en cuenta la posición de quienes hacen el recorrido) y seguirlos (interpretación de las instrucciones). El énfasis está en identificar lenguaje relacionado con dirección (arriba, abajo, a la derecha de..., a la izquierda de...) y proximidad (cerca de..., al lado de...).
 - ❖ Descripción de las estrategias utilizadas para dar las instrucciones. Pedir a algunos estudiantes (dependiendo del tiempo que quede de la sesión) que compartan el lenguaje que utilizaron y lo que tuvieron en cuenta para que sus compañeros llegaran al destino pedido.
 - ❖ Comparación entre los mapas realizados.

- Ejemplificar situación particular con un(a) estudiante donde entre todos le demos indicaciones para llegar de un punto a otro.

En esta actividad, al vender al o los estudiantes se pretende que ellos pasen por los puntos trazados para que se sitúen en el espacio con indicaciones dadas de dirección y proximidad. Aquellos que dan indicaciones deben considerar el punto de referencia de la persona que sigue las instrucciones y pensar en qué palabras permiten el desplazamiento de un lugar otro. Quien dibuja la ruta debe considerar el punto de referencia de quien da las indicaciones y utilizar algún dibujo que represente los puntos por los cuales pasan (convención de mapas).

Esta segunda lección fue diseñada con el fin de usar un lenguaje que propicie la orientación y localización adecuada de objetos (uso de términos de dirección: arriba, abajo, a la derecha de..., a la izquierda de...; de proximidad: cerca de..., al lado de...), *interpretar*, dar instrucciones y construir un mapa para llegar de un lugar a otro.

4.1.2. Cambios de dimensión

Los cambios de dimensión, en esta propuesta, se abordan en dos actividades (actividad 3 y actividad 4) en las cuales su objeto de aprendizaje está centrado en la *interpretación de imágenes (representaciones bi- y tridimensionales) para la construcción de objetos (3D) y por consecuente, relación de dichas imágenes con el objeto*. Las imágenes tienen notaciones como tonos de colores y vistas isométricas por tanto el reconocimiento de estos elementos se considera dentro de las actividades.

A continuación se describe las lecciones y momentos considerados en la tercera y cuarta actividad implicadas en el cambio de dimensión.

- **Actividad 3: Reconocimiento de vistas**

Esta actividad estar compuesta por dos lecciones/sesiones de clase. En la primera se requiere interpretar y relacionar vistas (representaciones) bi- y tridimensionales con sus respectivos módulos multicubo. En la segunda es

necesario el uso del lenguaje para dar y seguir instrucciones de construcción. A continuación se especifica los momentos de cada lección.

✓ **Primera lección: Reconocimiento vista isométrica**

➤ **Inicio: Organización del grupo**

Se inicia esta parte organizando a los estudiantes sentados en el piso en el centro del salón. Desde esta posición deben mirar cuatro distintas construcciones de cubos (módulos multicubos) que se verán iguales por la forma como están ubicadas. Cuando ya los estudiantes estén sentados, se les pregunta qué pueden decir de las distintas construcciones. La conversación se dirige a que digan que son iguales para luego preguntarles sobre qué las podría hacer diferentes.

Luego se le da a cada estudiante una hoja¹⁷ en la cual encontrarán la vista isométrica frontal de cada figura. En esta parte de la actividad deberán relacionar esta vista con las construcciones de cubos. Luego se reúnen nuevamente a los estudiantes para que comenten y comparen sus respuestas.

➤ **Desarrollo de la actividad: Reconocimiento vistas laterales, superior e inferior**

Se dice a los estudiantes que hay otras vistas diferentes. Para ejemplificar, la profesora hará uso de un cono y mencionará cómo se pueden ver la vista superior, inferior y laterales izquierda y derecha. En este espacio preguntará a los estudiantes qué formas tienen las vistas del cono.

En seguida, se proporciona a los estudiantes una nueva hoja de trabajo¹⁸ en la cual se encuentra la vista inferior. En esta parte de la

¹⁷ Anexo 6. Hoja de trabajo Número 1.

¹⁸ Anexo 6. Hoja de trabajo Número 2.

actividad deben relacionar esta vista con las construcciones de cubos.

Para finalizar esta parte se trabaja con una nueva hoja¹⁹ en la cual deben dibujar vista superior y lateral izquierda de las construcciones indicadas. Por cada trabajo completo realizado por un estudiante, se darán 5 puntos.

En las dos primeras partes de esta sesión, los estudiantes deberán:

- Reconocer que el dibujo (representación tridimensional) es una representación de la construcción física que tienen a la mano (objeto tridimensional).
- Comparar y relacionar la unión de cubos con las representaciones tridimensionales que se proporcionan en la hoja de trabajo número 3.
- Reconocer las vistas de las representaciones bi- y tridimensionales (superior, inferior, isométrica, lateral izquierda, lateral derecha, frontal).

➤ **Cierre: Discusión sobre elaboración de vistas**

Se finaliza la actividad preguntando a los estudiantes cómo elaboraron las vistas superior y lateral izquierda provocando que ejemplifiquen como se posicionaron para ver las distintas vistas. También se solicita que comparen la vista superior e inferior y a raíz de esta comparación se pregunta por lo que tienen igual y diferente.

✓ **Segunda lección: Elaboración de construcciones de módulos multicubos**

➤ **Inicio: Organización e indicaciones**

Se organiza a los estudiantes en parejas y se entrega a un estudiante un módulo multicubo. Uno de ellos, debe dar indicaciones

¹⁹ Anexo 6. Hoja de trabajo Número 3.

de construcciones a su pareja y el otro, debe replicar el módulo multicubo según las indicaciones dadas. Quien realice la construcción no puede verla. Los dos estudiantes deben estar uno al lado del otro con un objeto en medio de ellos que hace que ninguno vea el trabajo que realiza el otro.

➤ **Desarrollo de la actividad**

Los estudiantes realizan la actividad indicada y finalizada la primera construcción la profesora da indicaciones para que intercambien papeles, es decir, quien estaba dando indicaciones, ahora construirá y quien estaba construyendo, ahora dará indicaciones. Es de resaltar que las construcciones diferencian la vista lateral izquierda y derecha, la superior e inferior con distintos colores.

➤ **Cierre y discusión**

Se socializa con todos los estudiantes para que compartan como realizaron el trabajo (verbalización de acciones). Se aprovecha el espacio para cuestionar sobre cómo llevaron a cabo el proceso de discernimiento en cuanto a cambios de dimensión. En este espacio se considerarán los siguientes puntos:

- Dificultades al realizar las construcciones (movimiento de las piezas) y al dar las indicaciones (considerando la posición del compañero). El énfasis está en que los estudiantes describan los cambios de representación (vistas).
- Descripción de las estrategias utilizadas para realizar las construcciones. Pedir a algunos estudiantes (dependiendo del tiempo que quede de la sesión) que compartan las construcciones realizadas y expliquen cómo lo lograron (generar un diálogo que permita identificar cómo llevaron a cabo el cambio de dos a tres dimensiones).

- Generar preguntas como: ¿Qué palabras utilizaron para dar las indicaciones?, ¿realizaron las mismas construcciones? (en esta pregunta se direccionará a los estudiantes a que digan que las construcciones eran las mismas pero la forma como estaban posicionadas no eran las mismas).

La tercera actividad, en su primera lección busca acercar al estudiante al reconocimiento de vistas de un módulo multicubo, que, en principio, todas las vistas tienen un mismo color (color madera) y luego son diferenciadas por distintos colores. Además, la actividad pretende que el estudiante relacione las representaciones bi- y tridimensionales, que tienen información sobre las vistas del módulo, con el módulo multicubo.

En la segunda lección se enfrenta a los estudiantes a reconocer e indicar el espacio en el que están ubicados los distintos cubos del módulo para generar una réplica y afianzar el trabajo realizado con la identificación de las diferentes vistas del módulo. Es posible que al dar indicaciones de construcción los estudiantes indiquen por vistas como se debe ver el objeto.

Esta actividad les permite a los estudiantes reconocer que el dibujo (representación bi- y tridimensional) es una representación de la construcción física que tienen a la mano (objeto tridimensional), *comparar* y *relacionar* la unión de cubos con las representaciones bidimensionales proporcionadas, *identificar* las vistas de las representaciones bidimensionales (superior, inferior, isométrica, lateral izquierda, lateral derecha, frontal) y dar y seguir instrucciones de construcción.

- **Actividad 4: Interpretación de representaciones tridimensionales para la elaboración de un módulo multicubo**

Esta actividad está compuesta por dos lecciones/sesiones de clase. Tanto en la primera como en la segunda lección se debe leer e interpretar las imágenes (representaciones tridimensionales) que dan información de la forma, la posición y la orientación de los policubos y permiten la construcción de los módulos multicubo. A continuación se especifica los momentos de cada lección.

✓ **Primera lección: Interpretación de representaciones en escala de grises**

➤ **Inicio: Familiarización con los policubos²⁰**

Se da siete policubos a cada estudiante para que realicen una primera construcción (un cubo) y se comenta que la construcción de cada cubo suma 5 puntos.

➤ **Desarrollo de la actividad: Construcciones con policubos**

Cuando el estudiante finalice con la actividad descrita, se proporciona una nueva hoja²¹ de trabajo en la cual encontrará representaciones tridimensionales de configuraciones realizadas con policubos. Se solicita a cada grupo de estudiantes que con los policubos asignados construyan la representación (que tiene escala de grises) que se encuentra en la hoja y al finalizar cada construcción comparen e identifiquen si se utilizaron las mismas piezas y en la misma posición.

Aquí los niños tendrán que:

- Imaginar y reconocer la forma de cada policubo en la representación tridimensional asignada.
- Reconocer las vistas de las representaciones tridimensionales.
- Interpretar el significado de los distintos tonos de gris en las representaciones tridimensionales.
- Comparar las formas de los policubos para ensamblarlas.
- Rotar las piezas en el espacio para completar una configuración determinada.
- Organizar las piezas para lograr el ensamble.

²⁰ Piezas del cubo soma

²¹ Anexo 6. Hoja de trabajo Número 4

➤ **Cierre y socialización**

El cierre de esta sesión conlleva la reunión de los estudiantes para que compartan las soluciones a las que llegaron (verbalización de acciones). Se aprovechará el espacio para cuestionar sobre cómo llevaron a cabo el proceso de discernimiento en cuanto a cambios de dimensión. En este espacio se considerarán los siguientes puntos:

- Dificultades al realizar las construcciones (movimiento de las piezas, lectura de las imágenes proporcionadas). El énfasis estará en describir cómo interpretaron las representaciones y cuáles fueron los elementos (por ejemplo: diferentes tonos de gris) que influyeron para un reconocimiento y construcción exitoso del objeto representado.
- Descripción de las estrategias utilizadas para realizar las construcciones. Pedir a algunos estudiantes (dependiendo del tiempo que quede de la sesión) que nos compartan las construcciones realizadas y nos expliquen cómo lo lograron (generar un diálogo que permita identificar cómo llevaron a cabo el cambio de dos a tres dimensiones).
- Generar preguntas como: ¿las construcciones y las piezas eran iguales o diferentes?, ¿Cómo identificaste los policubos que se usaban para realizar la construcción solicitada?

✓ **Segunda lección: interpretación de representaciones con distinción de colores**

➤ **Inicio: Explicación de la actividad**

Se proporciona a cada estudiante los siete policubos del cubo soma y una representación tridimensional isométrica que distingue por color la posición y orientación de los policubos. La indicación para realizar la actividad es construir con todos los policubos lo plasmado

en la representación. Se aclara que los colores de cada policubo en la representación son los mismos de los policubos tangibles.

➤ **Desarrollo de la actividad**

Los estudiantes realizarán la actividad indicada. Aquí los niños tendrán que:

- Comparar y relacionar los policubos y la vista isométrica proporcionada en la representación tridimensional.
- Imaginar policubos en las representaciones tridimensionales.
- Rotar piezas en el espacio para completar la configuración proporcionada.
- Organizar los policubos para lograr el ensamble dado en la representación tridimensional.

➤ **Cierre y socialización**

El cierre de esta sesión conlleva la reunión de los estudiantes para que compartan las soluciones a las que llegaron (verbalización de acciones). Se aprovechará el espacio para cuestionar sobre cómo llevaron a cabo el proceso de discernimiento en cuanto a cambios de dimensión. En este espacio se considerarán los siguientes puntos:

- Dificultades al realizar las construcciones (movimiento de las piezas, lectura de las imágenes proporcionadas). El énfasis estará en describir cómo interpretaron las representaciones y de qué forma los distintos tonos de color les fueron de utilidad para elaborar las construcciones solicitadas.
- Descripción de las estrategias utilizadas para realizar las construcciones. Pedir a algunos estudiantes (dependiendo del tiempo que quede de la sesión) que nos compartan las construcciones realizadas y nos expliquen cómo lo lograron

(generar un diálogo que permita identificar cómo llevaron a cabo el cambio de dos a tres dimensiones).

- Generar preguntas como: ¿cuáles construcciones se facilitaron más, con colores o con escala de grises (relacionada con la primera lección de la cuarta actividad)? ¿Cómo identificaste en las representaciones la posición y orientación de los policubos para la elaboración de las construcciones?,

Las dos lecciones de esta actividad proponen el uso de cubos soma para que construyan diferentes cuerpos a partir de representaciones en escala de grises, que suponen el uso de algunos policubos, y con diferentes colores, los cuales ayudan a identificar la posición y orientación de los policubos, que supone el uso de todas las piezas.

Esta lección le permite al estudiante *imaginar* y *reconocer* la forma de cada policubo en la representación tridimensional asignada, *visualizar* las vistas de las representaciones bidimensionales, *interpretar* el significado de los distintos tonos de gris en las representaciones bidimensionales, *comparar* las formas de las piezas para ensamblarlas, *rotar* las piezas en el espacio para completar una configuración determinada y *organizar* las piezas para lograr el ensamble.

4.1.3. Construcción de objetos

La construcción de objetos se realiza a lo largo de toda la secuencia de actividades, pues tanto al utilizar el pentominó, cubos y policubos, los estudiantes bien sean armando los rompecabezas o replicando alguna figura asignada en una representación, realizan construcciones. Sin embargo, estas construcciones son asignadas con el objetivo de realizar movimientos isométricos en el plano y cambiar de dimensión.

Esta última sección enfocada en la construcción de objetos tiene por objetivo que los estudiantes imaginen y creen formas de un conjunto particular, como es el caso, por ejemplo, de objetos pertenecientes a un parque de diversiones. Por tanto el objeto de aprendizaje está enfocado en *la construcción*, es decir, no es

medio para adquirir otro conocimiento o habilidad como en el caso de los movimientos isométricos y cambios de dimensión. A continuación se describen las lecciones y momentos considerados para el trabajo con construcciones.

- **Actividad 5: Construcción de espacios de entretenimiento**

Esta actividad se considera en dos lecciones/sesiones de clase. En las dos se trabaja con Lego y el programa digital LDD. En esta actividad tienen la necesidad de ser creativos, deben utilizar conocimientos previos (reconocimiento de vistas, lectura de representaciones) para construir objetos plasmados en un programa digital y todo en conjunto incluirlo dentro de un mismo espacio y contexto. En la primera lección deben construir castillo y la segunda lección, un parque de diversiones.

- ✓ **Primera lección: Construcción de castillos**

- **Inicio: Familiarización con el material**

Por grupos se reparten piezas de Lego para que hagan pequeños ensambles y se familiaricen con ellas. Luego cada estudiante clasificará las piezas de acuerdo con: i) la cantidad de círculos verticales y horizontes y, ii) su forma, gruesa y delgada.

- **Indicaciones y desarrollo de la actividad**

En la segunda parte de la lección, se da la indicación que, por falta de equipos de cómputo, la mitad de cada grupo de trabajo debe replicar con piezas de Lego la representación asignada (véase anexo 7) vista en el programa digital LDD y, la otra mitad de cada grupo debe construir el entorno y objetos relacionados con castillos. Cinco minutos antes de finalizar este momento, aquellos estudiantes que trabajaron en el programa digital acomodaran y adecuaran sus construcciones en el espacio donde cada grupo construye su castillo.

Al desarrollar esta lección cada equipo deberá:

- Ubicar en la construcción el lugar de cada pieza (encima de, al lado de,...).

- Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la representación tridimensional asignada.
- Rotar piezas de Lego para completar una configuración determinada.
- Re-construir algún objeto con piezas de Lego del programa LDD.

➤ **Cierre de la actividad**

El cierre de esta lección conlleva la reunión de los estudiantes para que por equipos muestren y expliquen las construcciones realizadas. Además, se aprovecha el espacio para cuestionar sobre cómo interpretaron las representaciones tridimensionales de LDD para la construcción de los objetos. En este espacio se considerarán los siguientes puntos:

- Dificultades al realizar las construcciones (uso y movimiento de las piezas).
- Descripción de las estrategias utilizadas para realizar las construcciones. Pedir a algunos estudiantes (dependiendo del tiempo que quede de la sesión) compartir las construcciones realizadas y explicar cómo lo lograron.
- Generar las siguientes preguntas: ¿cómo identificaste qué piezas debía ir en determinado lugar?, ¿cómo moviste la pieza para que quedará en esta posición?

✓ **Segunda lección: Construcción parque de diversiones**

➤ **Inicio: Indicaciones de la actividad**

Se solicita a los estudiantes organizarse en grupos y la mitad de cada grupo de trabajo que no utilizó el programa digital, debe replicar con piezas de Lego la representación asignada (mismas representaciones de la anterior lección) en el programa digital LDD

y, la otra mitad de cada grupo debe construir el entorno y objetos relacionados con parques de diversiones.

➤ **Desarrollo de la actividad**

Los estudiantes desarrollaran la actividad asignada y al igual que en la anterior lección, cada equipo deberá:

- Ubicar en la construcción el lugar de cada pieza (encima de, al lado de,...).
- Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la representación tridimensional asignada.
- Rotar piezas de Lego para completar una configuración determinada.
- Re-construir algún objeto con piezas de Lego del programa LDD.

Cinco minutos antes de finalizar este momento aquellos estudiantes que trabajaron en el programa digital acomodaran y adecuaran sus construcciones en el espacio donde cada grupo construye su parque de diversiones.

➤ **Cierre de la actividad**

El cierre de esta lección será el mismo que la lección anterior. Por equipos deben mostrar y explicar las construcciones realizadas y se aprovechará el espacio para cuestionar sobre cómo interpretaron las representaciones tridimensionales de LDD para la construcción de los objetos, que dificultades tuvieron y cuales estrategias de construcciones utilizaron.

La actividad 5 requiere del uso de LDD que muestra en su interfaz una representación dinámica con el paso a paso de la construcción de un objeto identificando la forma de las piezas de Lego a usar para la construcción de este objeto, su lugar y orientación. Para el desarrollo de esta actividad, el estudiante requiere *comparar* y *visualizar* las formas de las piezas que tiene a su disposición

con las vistas en el programa y seleccionar la que corresponda para ubicarla en la posición y orientación indicada, *interpretar* las diferentes vistas de la representación tridimensional en el programa y rotar las piezas de Lego para completar una configuración determinada. Además, que la construcción de castillos y parques de diversiones supone *imaginar* y *visualizar* las formas a construir para que todo en conjunto guarde una escala (un tamaño estándar en el grupo) y una proporción.

4.1.4. Proyecto: Construyendo un zoológico

La instrucción de esta lección es realizar entre todo el grupo un zoológico. Para ello, por equipos deben realizar dos construcciones asignadas y construcciones libres de objetos y animales pertenecientes a un zoológico, como jaulas, zona de comidas, señalizaciones, animales faltantes, etc. Cada equipo tendrá a su disposición dos rompecabezas (véase anexo 8) que al armarlo tiene las vistas laterales de los animales que deben construir y un gran número de piezas para realizar objetos libres del zoológico.

Durante el desarrollo del proyecto, los estudiantes tendrán que:

- Imaginar la ubicación, orientación y posición de las piezas de Lego que no se ven en las vistas laterales obtenidas del rompecabezas.
- Construir algún objeto con piezas de Lego indicado en el rompecabezas.
- Imaginar objetos pertenecientes a un zoológico para construirlos con Lego.
- Construir objetos de un zoológico los cuales entre ellos guarden una proporción.
- Rotar piezas de Lego para completar una configuración determinada.

En la construcción del zoológico, se da un rompecabezas con dos vistas del animal a construir y ellos, con unas piezas (el color de las piezas en el rompecabezas es el mismo que el de las piezas) dadas deben armarlo sin que sobre o falte alguna. El resto de los animales y elementos del zoológico deben ser creación de los estudiantes. Este proyecto permite a los estudiantes *imaginar*, *visualizar* y *construir* objetos específicos guardando una escala, pues si hacen

objetos muy grandes o muy pequeños pueden no ser útiles en las construcciones realizadas.

La descripción de las actividades en términos de sus potencialidades permite identificar que acciones como *imaginar, construir, comparar, visualizar, interpretar* y *organizar* son las que se espera los estudiantes realicen al desarrollar las actividades propuestas. Acciones que según Davis y Spatial Reasoning Study Group (2015) permiten adquirir y potenciar habilidades de razonamiento espacial.

Las lecciones además de estar permeadas por la aproximación de razonamiento espacial adaptada para este estudio están diseñadas a la luz de la teoría de la variación, que como se mencionó en el apartado 2.2.2. Se espera que por medio del contraste (elemento de la teoría) entre dos valores, el estudiante reconozca las características que determinan el objeto de aprendizaje pretendido. A continuación se presenta una tabla que indica los elementos que varían y no varían (que permite el contraste) y el rasgo crítico a discernir de cada lección.

Tabla 4.2

Elementos de variación en las actividades

Elementos/ temas	Actividades	Invariante	Variante	Rasgo crítico a discernir
Movimientos isométricos en el plano	Transformaciones isométricas en el plano.	Cantidad y forma de las piezas.	Posición y orientación de las piezas.	Identificar movimiento de rotación y traslación de las piezas.
	Movimientos del plano en el espacio.	Ruta trazada.	Posición y orientación de los estudiantes.	Reconocimiento del lenguaje de movimiento en el plano.
Cambios de dimensión	Reconocimiento de vista superior, inferior, lateral e isométrica.	Módulo multicubo.	Vistas del módulo multicubo.	Relacionar las vistas de un módulo con su representación en el plano.
	Interpretación de representaciones tridimensionales para la elaboración de un módulo multicubo.	Cantidad y forma de los policubos.	Posición y orientación de los policubos.	Reconocer la ubicación de las piezas.
			Dimensión (paso de 2D a 3D).	Identificar las convenciones que permitan el cambio de representación 2D a 3D.
			Escala de la	Relacionar las vistas

			representación.	de la representación con la composición de policubos.
Construcción de objetos	Construcción de entornos.	Forma y número de piezas.	Color de las piezas. Dimensión (paso de 2D a 3D).	Corresponder las piezas físicas de Lego con las de LDD por la congruencia de sus formas.

Las variaciones de las lecciones expuestas en la tabla 4.2 fueron determinadas para que los estudiantes contrastaran dos valores y discernieran el rasgo crítico pretendido. Por ejemplo, en la última actividad los estudiantes deben reconocer la congruencia (invariancia) entre las piezas físicas de Lego y las del programa LDD en las distintas dimensiones (varianza de segunda a tercera dimensión) en las que estaban. El objetivo era trabajar con representaciones y objetos en distintas dimensiones. En esta actividad el color de las piezas también variaba dado que se esperaba que los estudiantes compararan las piezas e identificaran que había congruencia en sus formas aun cuando sus colores eran diferentes.

4.2. De lo concreto a lo abstracto: Potencial de los materiales utilizados

El diseño de las actividades fue producto de la búsqueda de información sobre materiales, que consideramos, apoyan el desarrollar de razonamiento espacial. Entre los materiales sugeridos a partir de la revisión de la literatura (ver apartado 1.3.1.2) se encontraron origami, dominós, sólidos platónicos, softwares computacionales mostrando desarrollos planos de figuras 3D y viceversa, pentominós, módulos multicubo, cubos soma, bloques para ensamble como Lego y mecano.

Los materiales seleccionados fueron el pentominó, módulos multicubo, los cubos soma, el programa LDD y Lego. El primero sirvió para el trabajo de movimientos isométricos en el plano y el resto permitió interpretación, cambios de representaciones 2D y 3D y construcción de objetos.

No se optó, por ejemplo, por el origami porque es un material que requiere de instrucciones para construir algún objeto, y las actividades diseñadas buscaban que fueran los estudiantes los encargados de dar instrucciones y construir objetos a partir de las indicaciones dadas por los compañeros.


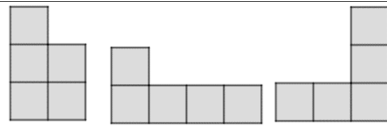
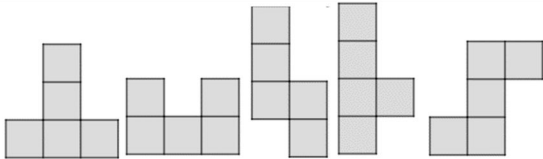
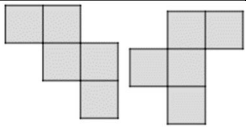
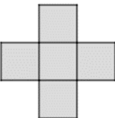
A continuación se describe las potencialidades y el uso dado a los materiales utilizados en la secuencia de actividades.

4.2.1. Pentominó: Apoyo para movimientos en el plano

Es un rompecabezas conformado por doce piezas. Cada pieza es conocida como poliminó puesto que se compone de varios cuadros del mismo tamaño que comparten una arista. Los poliminós se clasifican según la cantidad de cuadrados, si son dos, se denominan donimós, tres, triminós, cuatro, tetraminós, cinco, pentaminós y seis, hexaminós. En la tabla 4.3 se presenta una clasificación según el número de lados que tiene los 12 pentominós

Tabla 4.3

Clasificación de pentominós según número de lados

Clasificación	Representación
Cuadrilátero	
Hexágono	
Octágono	
Decágono	
Dodecágono	

Los pentominós tienen la misma superficie y área, pero distinta forma como se aprecia en la tabla 4.3. El área tiene una unidad que está compuesta por un cuadrado de longitud unitaria (AB, BC, CD, DA) y sus puntos interiores (Hemmerling, como se citó en Trujillo 2011, p.372), es decir lo que está sombreado en un tono claro de café en la figura 4.2. Su medida es expresada en unidades cuadradas porque tiene dos dimensiones, largo y alto.

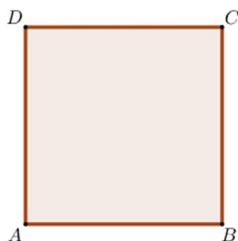
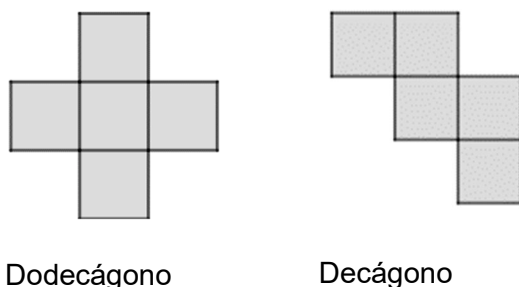


Figura 4.2. Área de cuadrado unitario.

El área de una región poligonal es el número que expresa cuantas veces una unidad de área dada está contenida en la región poligonal (Hemmerling, como se citó en Trujillo 2011, p.372). Por ejemplo, en la figura 4.3, el área poligonal de las piezas de pentominó es $5u^2$.



Dodecágono

Decágono

Figura 4.3. Piezas de pentominó.

Al igual que los pentominós de la figura 4.3, las demás piezas tienen la misma (invariante) área poligonal de $5u^2$. Las formas de cada pieza *varían* lo cual permite que el estudiante comprenda que las piezas ocupan la misma superficie en el rompecabezas aun cuando sus formas son distintas (su contorno varía).

En la escuela el área es vista de forma aritmética, por ejemplo, una de las lecciones trabajadas para ejercitar el algoritmo de la multiplicación es solicitar al estudiante hallar el área de rectángulos (que implica la multiplicación de dos

magnitudes) y demás polígonos de preferencia regulares haciendo uso de fórmulas. Al utilizar el pentominó se busca generar un acercamiento a la noción de área de forma dinámica tomando como unidad de área cada cuadrado que conforma una pieza del pentominó.

La noción de área se puede desarrollar a partir del recubrimiento de objetos (Godino, 2002) con unidades de medida no estándar, pues según Olmo et al (como se citó en Trujillo, 2011) permite un acercamiento a la naturaleza continua de medida y ayuda al estudiante a relacionar procesos de medida con el entorno en el que se encuentra. Con el pentominó se busca el recubrimiento de diferentes superficies (rompecabezas) con piezas que tienen cinco unidades de medida y diferente forma y perímetro.

Como se reporta en el apartado 1.3.1.3., los estudiantes tienen dificultades cuando se ven implicados en lecciones que trabajan la comprensión del significado de área. Estas dificultades se atribuyen, en gran parte, a la falta de experimentación y exploración con materiales tangibles (Gutiérrez, 1991) donde el estudiante puede percibir, a través de su uso, diferentes formas y tipos de movimientos en el plano y en el espacio. En la propuesta de lecciones se usa el pentominó con el fin de generar experiencias relacionadas con movimientos isométricos en el plano.

En resumen, el pentominó tiene aspectos invariantes (cantidad y área de las piezas) e variantes (perímetro y formas de los diferentes rompecabezas) que favorecen procesos de visualización para localizar y mover piezas en posiciones que permitan el armado de los rompecabezas.

4.2.2. Módulo multicubo: Potencial para cambios de dimensiones

El módulo multicubo es un sólido formado por varios cubos iguales (ver figura 4.4). Este material permite trabajar lecciones que involucran la interpretación y el tránsito de objetos y representaciones bi- y tridimensionales (Gutiérrez, 1998).

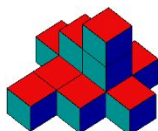


Figura 4.4. Ejemplo de multicubo.

Transitar por representaciones 2D y 3D en la geometría espacial no es una tarea sencilla de realizar por parte de los estudiantes, pues implica, por un lado, interpretar una figura plana (con vista superior, inferior, lateral o isométrica) para construir un objeto 3D y por otro lado, interpretar ese objeto 3D para convertirlo en un concepto geométrico (Gutiérrez, 1998). Además, según Duval (1999) la relación entre objetos y representaciones 2D y 3D implica un reconocimiento de elementos unidimensionales, figuras bidimensionales y la identificación representaciones tridimensionales que se leen según la vista presentada (e.g. isométrica).

En este trabajo, el uso de este material para realizar cambios de dimensión, implicó la construcción consciente de lecciones que permitieran a los estudiantes la comprensión e interpretación de los objetos en estudio y que no generaran frustración.

Uno de los potenciales del material es que se puede estudiar el volumen como el espacio que ocupa un cuerpo y no como las medidas del espacio de tres dimensiones ocupadas por un cuerpo. Es decir no ver el volumen de un cubo, por ejemplo, como la mera multiplicación de tres magnitudes sino considerar que cada cubo ocupa un lugar en el espacio y que un cuerpo como el que se ve en la figura 4.4., ocupa 11 cubos en el espacio sin importar como estén ubicados.

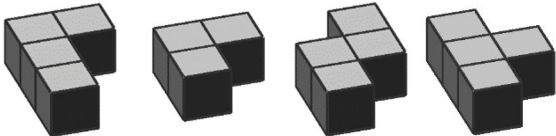
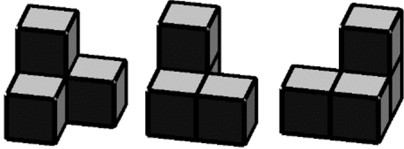
El reconocimiento del volumen de un módulo multicubo implica *visualizar* aquellos elementos que no se ven en la representación y en algunos casos en el mismo cuerpo tridimensional. Esta visualización se potenció en la lección al permitir al estudiante manipular, contar, ver el cuerpo (multicubo) desde las diferentes vistas y realizar subconfiguraciones.

4.2.3. Cubo soma: Tecnología útil para comprensión de volumen

Es un cubo tridimensional compuesto por siete policubos. Seis de ellos formados por 4 cubos y el restante por tres. Las siete figuras se pueden identificar con una letra, que es asignada por el parecido de esta con la figura, o si tienen uno o dos niveles. En la siguiente tabla se presenta una clasificación por nivel.

Tabla 4.4

Clasificación de policubos soma por nivel

Clasificación	Representación
Policubos de un nivel	
Policubos de dos niveles	

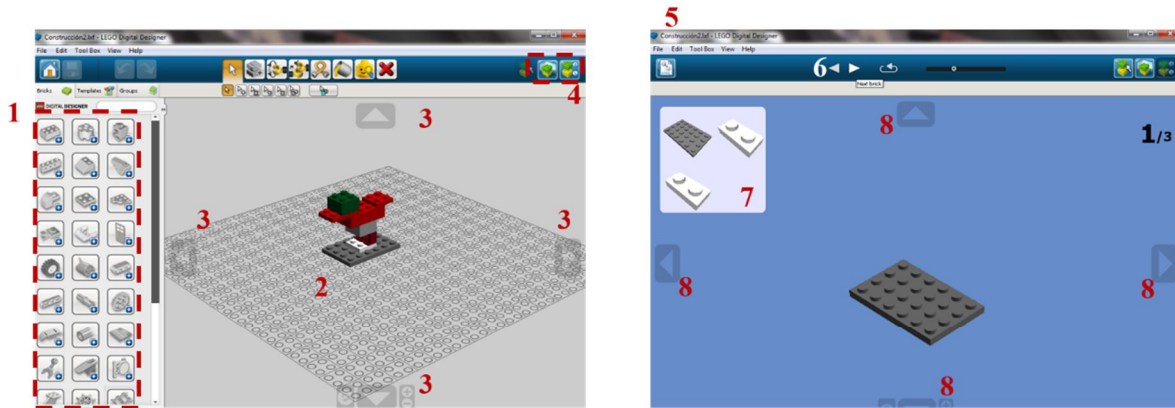
Los policubos aparte de construir el cubo, permiten armar diferentes cuerpos o módulos multicubos con formas semejantes a sillas, edificios, entre otros. Este uso apoya la idea de volumen en la cual el estudiante reconoce que con las mismas piezas se obtiene mismo volumen y diferentes cuerpos. Además permite al estudiante mover las piezas usando transformaciones rígidas en el espacio para obtener alguna construcción asignada.

El uso de este material en las lecciones diseñadas e implementadas requirió por parte de los estudiantes la interpretación de una representación bidimensional de un objeto tridimensional para lograr su construcción física. Como ya se comentó en el uso de los módulos multicubo, son lecciones con un nivel de complejidad mayor por lo que requirieron de un diseño cuidadoso que apoyara el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial de los estudiantes.

4.2.4. Lego Digital Designer: Plataforma digital desde diferentes vistas

Es una plataforma digital que permite realizar cualquier construcción con piezas de Lego digitales. A su disposición tiene un número ilimitado de piezas con

diferentes formas, tamaños y colores. Además permite ver el objeto realizado desde diferentes vistas y genera un espacio que muestra el paso a paso de cualquier construcción elaborada. En la figura 4.5, se presenta la interfaz del programa señalando los elementos utilizados en la preparación e implementación de las lecciones.



- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Piezas disponibles. 2. Lugar, plano de construcción. 3. Flecha de rotación. 4. Paso a paso de construcción | <ol style="list-style-type: none"> 5. Interfaz de paso a paso de construcción 6. Flechas para mostrar anterior o siguiente pieza de la construcción 7. Pieza utilizada y las consecutivas. 8. Flecha de rotación. |
|--|---|

Figura 4.5. Interfaz Lego Digital Designer.

El programa LDD permite un tránsito favorable en el cambio de representaciones 2D y 3D dado que con la opción de rotación (ver Figura 4.5, punto 4 y 8) los estudiantes pueden reconocer las piezas a utilizar para elaborar alguna construcción viendo sus diferentes vistas. Además es un software accesible, que según Kortenkamp y Dohrmann (2010), es un elemento vital para que las dificultades posiblemente presentadas por los estudiantes no sean atribuidas al software. La lección diseñada no requería la construcción de algún objeto en el software, sino estaba enfocada en la re-construcción de objetos físicos a partir de las representaciones previamente construidas en LDD. Esta lección requería del reconocimiento principalmente de los elementos 3, 6 y 8 (ver figura 4.5) con movimientos del mouse.

4.2.5. Bloques de Lego: Gran posibilidad para la creación de formas

Lego tiene piezas de variadas formas, colores y tamaños. Es un material compuesto por bloques de plástico que se pueden encajar gracias a su sistema de unión. Es de uso comercial y su venta viene acompañado de planos para la construcción de los objetos. Lego, al igual que los módulos multicubo y soma permiten al estudiante experimentar cambios de dimensión. Además, para la construcción de objetos requiere *discernir* entre las distintas formas, colores y tamaños de las piezas. En las lecciones propuestas, luego de construir objetos a partir de planos, debían construir objetos asignados con libertad en su forma y tamaño lo que requirió no solo de movimientos de piezas sino de imaginación.

De acuerdo con Hawes, Tepylo y Moss (2015) utilizar materiales como módulos multicubos, material manipulable y Lego para construir objetos, ofrece oportunidades de desarrollo del razonamiento espacial pues las experiencias físicas y visuales con el material, involucran *composición* y *descomposición* de estructuras tridimensionales, *toma de perspectiva* (moverse alrededor de la estructura) y transformaciones isométricas en el espacio.

4.3. Ejes transversales: Trabajo colaborativo y autoevaluación

Las lecciones aplicadas en el primer ciclo, como se comenta en el apartado 3.3., se llevaron a cabo con 8 estudiantes entre los 6 y 7 años de forma individual y en parejas. Considerando que estas lecciones, con los cambios y ajustes realizados, se implementarían en un grupo de 26 estudiantes fue necesario replantear la forma de organización, de roles (estudiantes y profesora) y considerar estrategias para el desarrollo de las actividades que requerían del uso de material tangible y digital al cual, en este último, no podían tener acceso todos los estudiantes al mismo tiempo. Además, en este nuevo contexto y a partir del análisis de lo logrado (y no) en el primer ciclo del experimento de enseñanza, el reto fue construir un ambiente que generará oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

La alternativa que se construyó fue la negociación de normas de clase en las que se busca dar al estudiante un rol como participante activo y constructivo de las

clases y no como alguien que solo sigue instrucciones. Además, en relación con la gestión de la clase, se determinó la organización de cuatro grupos conformados por 6 y 7 estudiantes.

Las normas de clase se establecen también con el fin de organizar y lograr la realización de las actividades planteadas que requieren uso de material. Aun cuando son propuestas por la profesora, se prevén y direccionan en su construcción seis reglas: 1) escuchar y respetar ideas y opiniones de los compañeros, 2) cuidar y ordenar el material con el que trabaja, 3) levantar la mano para participar y esperar el turno, 4) trabajar con respeto hacia los demás, 5) ayudar a los compañeros a resolver las tareas (no haciendo las actividades sino dando indicaciones) y 6) disponerse a los espacios de socialización y trabajo cuando la profesora lo indique (se hace una señal con la mano levantada y el puño cerrado).

El cumplimiento de estas normas se materializa en dos acciones: una autoevaluación de los estudiantes y una evaluación de la profesora finalizada cada sesión de clase. Para la autoevaluación los estudiantes deben llenar una plantilla que tiene en la primera columna las normas, en la primera fila el número de sesiones y en su intersección hay unos árboles que deben colorear de la siguiente manera al final de cada sesión: si cumple con la norma, colorea todo el árbol, medio árbol si no cumple completamente con la norma y nada del árbol, si definitivamente no cumple la norma (ver figura 4.6). La evaluación se realiza a través de asignación de puntos por equipos si hubo cumplimiento de normas y culminación de la actividad propuesta.









































	Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4	Clase 5	Clase 6	Clase 7	Clase 8
Escucho y respeto ideas y opiniones de mis compañeros.								
Cuido y ordeno el material con el que trabajo.								
Demuestro mi compromiso por terminar con las tareas asignadas.								
Trabajo con respecto hacia los demás.								
Ayudo a mis compañeros a resolver las tareas.								

Figura 4.6. Plantilla de autoevaluación.

La autoevaluación permite que los estudiantes reflexionen sobre sus propias acciones y adquieran/fortalezcan valores como la honestidad, el respeto, el compañerismo, entre otros. Además, en el trabajo en equipo, acciones como: relevarse para entregar y recoger el material utilizado en las sesiones y, al término de la mitad de la implementación, reunirse para discutir cualidades y aspectos a mejorar, generan en el estudiante responsabilidades y trabajo autónomo.

La profesora encargada de impartir las lecciones es una de las investigadoras del proyecto cuyo rol era instruir a los estudiantes en las actividades, indagar sobre las acciones que realizan y dirigir el momento de socialización al final de cada sesión. La indagación se considera con dos objetivos: reportar las acciones de los estudiantes cuando se enfrentan a actividades de razonamiento espacial y ayudar ante cualquier dificultad presentada con preguntas, por ejemplo, cómo: ¿de qué otra manera puedes colocar la pieza?, ¿qué otra pieza podrías utilizar?, ¿dónde te puedes ubicar para ver la vista...?

Los momentos de socialización en cada temática están dirigidos por preguntas previamente elaboradas. En general, se cuestionaba sobre las dificultades presentadas en las actividades, las estrategias utilizadas y acciones particulares relacionadas con la identificación del material, el lenguaje utilizado para dar

indicaciones, los elementos que variaban y no en una actividad. Además en estos cierres se destacaba el trabajo de los estudiantes y se comentaban aspectos a mejorar.

Francis y Whiteley (2015) afirman que los niños desarrollan el razonamiento espacial a partir de experiencias en 3D, representaciones 2D, sus convenciones asociadas a la realidad, las imágenes vistas en pantalla táctil y en software dinámico y la retroalimentación que tienen cuando interactúa con sus compañeros y adultos. De acuerdo con lo anterior, la propuesta de actividades presentada, permite a los estudiantes una construcción, tanto colectiva como individual, de conocimiento y habilidades relacionadas con razonamiento espacial, pues usan diferentes tecnologías y además, están inmersos en un ambiente de clase que les permite interactuar entre ellos y con la profesora. Es de resaltar que todos los aspectos considerados, el uso de la teoría y aproximación conceptual para el diseño de las actividades, los materiales usados y el establecimiento de normas de clase, tienen una relación dual simbiótica, es decir, no se hubiese podido implementar la secuencia sin la atención e inclusión de alguno de ellos.

5. Del plano al espacio, una posible transición en edades tempranas

A lo largo del desarrollo de las actividades, los estudiantes realizan acciones que dan cuenta de las habilidades de razonamiento espacial puestas en juego. La evidencia de ello se refleja, por un lado, en los resultados de la prueba diagnóstica/inicial – final y, por otro lado, durante la realización de la secuencia.

A continuación, se describe la evolución de los estudiantes en relación con el trabajo en dos dimensiones, cambios de dimensión y construcción de objetos.

5.1. Evolución prueba comparativa

La prueba diagnóstica/inicial- final²² se conformó de seis puntos y fue aplicada antes y después del desarrollo de las actividades propuestas. Como ya se mencionó en el apartado 3.5, se trabajó con 26 estudiantes en todo el estudio. Sin embargo, solo 20 realizaron las dos pruebas y son las respuestas que se analizaron.

Para dar cuenta de la evolución de los estudiantes se comparan las respuestas de la primera con la segunda prueba. Los resultados de la prueba inicial se clasifican en válidos (V) e inválidos (I).

En el primer punto, el estudiante debía hacer *interpretación* de una representación tridimensional, proyección isométrica de un módulo multicubo, reconociendo sus convenciones (proyección ortogonal) para identificar las vistas que observan tres sujetos.

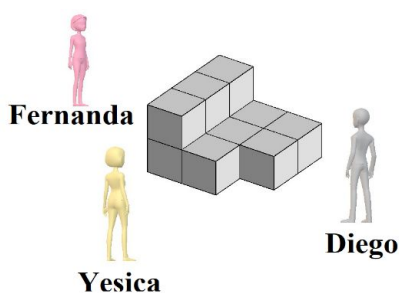


Figura 5.1. Representación observada desde diferentes vistas

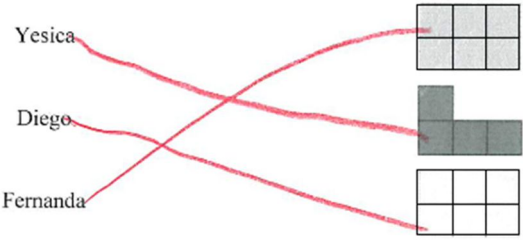
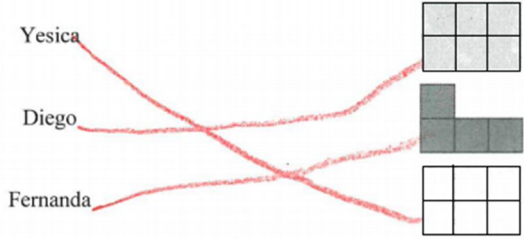
En este punto se consideran respuestas válidas aquellas en las que se relaciona cada sujeto con la *forma* de la vista lateral o frontal del módulo multicubo. Se

²² Ver anexo 5.

cuentan como respuestas inválidas aquellas que no hayan sido respondidas o que no relacionaran correctamente la forma de las vistas con los sujetos. En la tabla 5.1, se presentan ejemplos de respuestas, válida e inválida.

Tabla 5.1

Ejemplo de respuestas primer punto

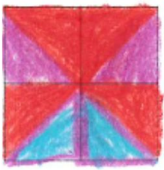
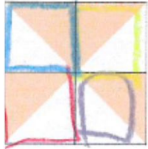
Respuesta válida	Respuesta inválida
<p>Yesica</p> <p>Diego</p> <p>Fernanda</p> 	<p>Yesica</p> <p>Diego</p> <p>Fernanda</p> 

Cabe mencionar que la forma de la vista lateral que ve Diego y Fernanda es la misma, la diferencia es el tono de color que tiene. Pues Fernanda ve un rectángulo más oscuro que Diego por la sombra que éste proyecta.

El objetivo del segundo punto es remarcar triángulos, que en algunos casos son *composición* de otros, de diferentes tamaños, colores y posiciones. Se consideran respuestas válidas cualquier marca que evidencia el reconocimiento de uno o más triángulos y respuestas inválidas las no respondidas y que no remarquen triángulos. En la tabla 5.2 se muestra un ejemplo de respuestas válidas e inválidas.

Tabla 5.2

Ejemplo de respuestas segundo punto

Respuesta válida	Respuesta inválida
	

En el punto tres el estudiante debía relacionar una representación tridimensional con alguna de tres representaciones tridimensionales que están en diferentes posición y orientación (ver figura 5.2).

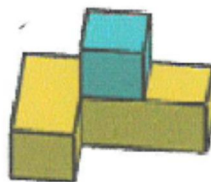


Figura 5.2. Representación tridimensional – punto tres

Se marca respuesta válida si el estudiante relacionó las representaciones tridimensionales correctamente (solo había una opción) y respuesta inválida si no correspondía las representaciones adecuadas o si no marcaba alguna opción. En la tabla 5.3 se muestra un ejemplo de respuesta válida e inválida.

Tabla 5.3

Ejemplo de respuestas tercer punto

Respuesta válida	Respuesta inválida

El objetivo del cuarto punto es identificar de cuatro imágenes (representaciones 2D) cual no correspondía con la presentada en la figura 5.3.

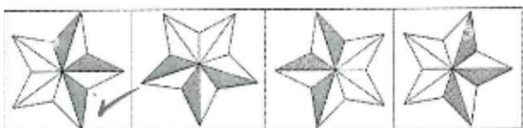
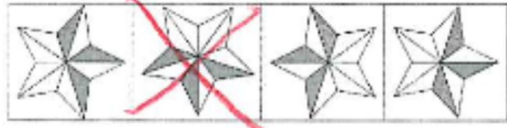


Figura 5.3. Representación bidimensional – punto cuatro

Se marca respuesta válida si el estudiante identificó la representación que al rotarla no correspondía con la presenta en la figura anterior y respuesta inválida si no correspondía las representaciones adecuadas o si no marcaba alguna opción. En la tabla 5.4 se muestra un ejemplo de respuesta válida e inválida.

Tabla 5.4

Ejemplo de respuestas cuarto punto

Respuesta válida	Respuesta inválida
	

En el quinto punto el estudiante debía identificar en cuál(es) de tres figuras estaba contenida la siguiente subconfiguración²³.





Figura 5.4. Representación - punto cinco

Se considera respuesta válida si el estudiante reconoció en, al menos una de las dos figuras, la inclusión de la subconfiguración en cuestión e inválida si el estudiante no responde o no la identifica completamente.

Tabla 5.5

Ejemplo de respuestas quinto punto

Respuesta válida	Respuesta inválida
	

²³ Se entiende subconfiguración como una figura contenida en otra. Esta otra es conocida como configuración (Duval, 1998)

El objetivo del sexto punto es dibujar como se vería la marca de leche en un vaso al inclinarlo hacia la derecha.

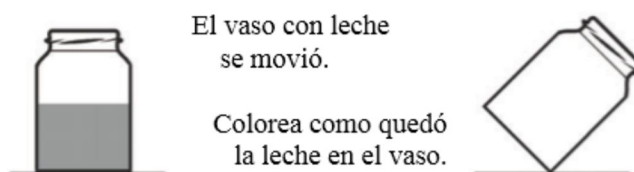
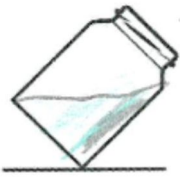
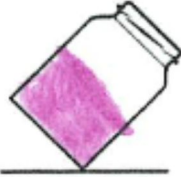


Figura 5.5. Representación para solución del sexto punto

Se reconocía respuesta válida si el estudiante realizaba una marca que aproximadamente tuviera una inclinación diagonal a la base del vaso que indicara movimiento de la leche e inválida si la marca era aproximadamente paralela a la base del vaso, si realizan otro tipo de marca o si no contestaron. En la tabla 5.6 se muestran dos ejemplos de respuestas, válida e inválida.

Tabla 5.6

Ejemplo respuestas sexto punto

Respuesta válida	Respuesta inválida
	

En la prueba final, dependiendo de la validación de las respuestas de la prueba inicial (válidas e inválidas), las respuestas de los estudiantes se clasifican en: i) retroceso: rendimiento más bajo en comparación con la prueba inicial; ii) sin cambio: igual respuesta que en la prueba inicial y; iii) mejora: mejor rendimiento en comparación con la prueba inicial.

A continuación se presentan los resultados de la prueba inicial y final considerando su evolución según los criterios mencionados.

Tabla 5.7

Comparación de resultados.

Objetivos de los puntos	Prueba inicial		Prueba final	
	Respuestas	Retroceso	Sin cambio	Mejora
Reconocer vistas de un módulo multicubo	V 15	5	10	
	I 5		3	2
Remarcar triángulos en un cuadrilátero	V 18	2	5	11
	I 2			2
Relacionar representaciones 3D	V 15	6	9	
	I 5		3	2
Identificar diferencias entre representaciones 2D	V 1	1		
	I 19		10	9
Reconocer marcas ocultas en representaciones 2D	V 16	2	6	8
	I 4		1	3
Imaginar trazo al mover un vaso con contenido líquido.	V 12	6	6	
	I 8	1	3	4

La evolución evidenciada (aunque no en todos los estudiantes) en la prueba se refleja en la interpretación de representaciones bidimensionales de objetos 2D al reconocer subconfiguraciones y al identificar la no pertenencia de una figura en un conjunto porque al rotarla tiene características que la hacen diferente.

Por ejemplo, los estudiantes presentaron mejora cuando en la prueba final remarcaron más triángulos o triángulos de distintos tamaños, es decir reconocieron subconfiguraciones (triángulos) del cuadrilátero (ver tabla 5.8). Otro ejemplo es cuando identificaron, remarcando, en la(s) configuración(es) en la(s) que se encontraba la subconfiguración en cuestión (punto 5, ver tabla 5.8). Una última evidencia se presenta cuando los estudiantes reconocen en cuatro representaciones bidimensionales la figura que, al rotarla para hacerla coincidir con una representación bidimensional en cuestión, no coincide.

Tabla 5.8

Reconocimiento de subconfiguraciones

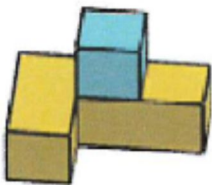
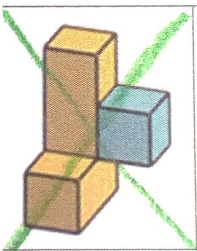
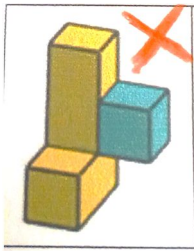
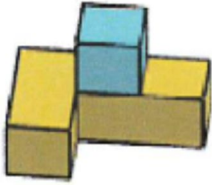
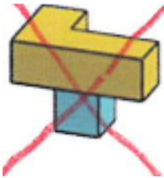
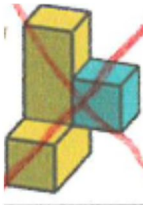
	Aspectos de evolución	Prueba inicial	Prueba final
	Identificación de triángulos		
	Reconocimiento de triángulos diferentes tamaños		
Reconocimiento de subconfiguraciones	(punto 5) Reconocimiento de la siguiente subconfiguración		
	en más de una configuración.		
	Reconocimiento de la siguiente subconfiguración		
Identificación de diferencias entre representaciones	en tres configuraciones.		
	Reconocimiento de la figura que al rotarla no es congruente a la siguiente		

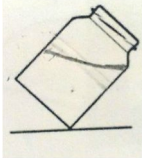
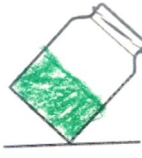
En cuanto a la lectura de representaciones tridimensionales, los estudiantes siguen presentando dificultades (sin cambio) y algunas respuestas evidencian retroceso cuando se enfrentan a la tarea de reconocer las vistas de un objeto, corresponder dos representaciones tridimensionales cuando se hace rotación de alguna de ellas e identificar el trazo generado cuando se mueve en diagonal un vaso ubicado sobre una base horizontal.

Por ejemplo, algunos estudiantes no presentan cambios cuando se les pide corresponder dos representaciones tridimensionales, tanto en la prueba inicial como final corresponden las mismas representaciones (ver tabla 5.9), y se identifica un posible retroceso cuando en la prueba inicial corresponden correctamente las representaciones tridimensionales y en la prueba final no lo logran. Otro ejemplo se presenta cuando al realizar el sexto punto en la prueba inicial trazan una línea más o menos en diagonal a la base de la base y en la prueba final trazan una línea paralela a la base del vaso (ver tabla 5.9).

Tabla 5.9

Ejemplos que evidencian permanencia en respuestas incorrectas y retroceso

	Permanecía/retroceso	Primera prueba	Segunda prueba
Correspondencia entre representaciones tridimensionales	<p>La correspondencia de la siguiente figura,</p>  <p>con</p> <p>una de tres representaciones tridimensionales es la misma respuesta incorrecta tanto en la prueba inicial como final.</p>		
	<p>La correspondencia de la siguiente figura</p>  <p>con</p> <p>una de tres representaciones tridimensionales es correcta en la prueba</p>		

	inicial pero no en la final.		
Trazo de línea al inclinar vaso con agua	El trazo de la línea en la prueba inicial está ubicado aproximadamente diagonal a la base del vaso en cambios en la prueba final la línea esta paralela a la base del vaso, lo cual supone un retroceso		

Las dificultades presentadas en la tabla son comunes en los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de tareas que implican lectura de representaciones tridimensionales (Dindyal, 2015). Pues identificar en una configuración (representaciones tridimensionales), subconfiguraciones (identificación de vistas bidimensionales) o congruencia de esta con otra configuración que tiene distinta dirección y sentido, implica reconocer elementos uni-, bi- y tridimensionales en la misma representación (Duval, 1999).

Sin embargo, considerando que la secuencia de actividades buscaba el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial (en las que se considera, por ejemplo, rotación mental), se analizaron las posibles causas por las no presentaron evolución en la prueba diagnóstica final en relación con el trabajo de representaciones tridimensionales y *se encontraron tres*. La primera puede estar relacionada con las demandas curriculares que le permiten al estudiante experimentar y reconocer preferentemente representaciones bidimensionales.

La segunda pudo deberse a un fallo de diseño. En el punto donde debían trazar una línea diagonal a la base de un vaso cuando este estaba inclinado, por ejemplo, ninguna actividad de las planeadas favoreció la toma de conciencia (experimentación) de cómo se veía cualquier líquido en un recipiente luego de inclinarlo.

La tercera podría estar vinculada con normas sociales habituales en el aula de clase. Suponemos que la prueba inicial quizás no fue contestada individualmente

a conciencia, los estudiantes posiblemente “copian” para ser beneficiados con una buena calificación, por ejemplo, el 75% de los estudiantes relacionan correctamente las representaciones 3D en la primera prueba, cuando antes no habían tenido la experiencia, según la profesora encargada del grupo, de trabajar con estas representaciones. En la prueba final el 55% correspondió las representaciones 3D correctamente y se notó (aunque no se tiene evidencia) que los estudiantes respondieron de forma individual. Además, la prueba diagnóstica fue aplicada a otro grupo, grupo de control (ver resultados en anexo 10), que, según las profesoras de la escuela, el rendimiento académico de este grupo es mayor que el grupo que desarrolló la secuencia de actividades y aproximadamente el 36% de este segundo grupo logró relacionar representaciones 3D.

Ahora bien, considerando que para este trabajo el razonamiento espacial es entendido como un sistema en el que interactúan elementos que le permiten al sujeto comprender (cognitivo) y transformar (físico, de movimiento) el espacio en el que desarrolla una tarea, los resultados de una prueba escrita comparativa no determinan las habilidades que el estudiante realmente desarrolló en relación con su razonamiento espacial. Hubiese sido afortunado la inclusión de puntos en los que el estudiante a partir de la lectura de alguna representación tridimensional construyera e identificara vistas de un objeto físico. Sin embargo, aun cuando esto no se tuvo en cuenta en el diseño de la prueba diagnóstica, en la realización de las actividades se evidencia un proceso evolutivo en cuanto al trabajo en tres dimensiones y se ratifica la evolución en relación con lo bidimensional. En el siguiente apartado se darán ejemplos particulares y se describirán acciones que dan cuenta del avance de los estudiantes en relación con interpretaciones de representaciones 2D y 3D.

5.2. Acciones que evidencian desarrollo del razonamiento espacial

En este apartado se presentan las acciones de los estudiantes que dan cuenta de cada una de las categorías descritas en el apartado 3.6 y las cuales se consideraron según las definidas en la propuesta de razonamiento espacial adoptada para este estudio. Se presenta dos ejemplos de estudiantes (est1, est2)

que muestran evolución en el desarrollo de su razonamiento espacial al involucrarse en actividades de movimientos isométricos en el plano y cambios de dimensión; y ejemplos del trabajo de varios alumnos que refleja la construcción de objetos a partir del trabajo en equipo.

5.2.1. Movimientos isométricos en el plano

La primera actividad se llevó a cabo en cuatro sesiones, cada una con duración aproximada de una hora. En este tiempo, se identificó, y para este caso se ratifica, evolución y comprensión de los estudiantes al hacer movimientos isométricos en el plano (trabajo con representaciones 2D). Con el objetivo de dar cuenta de dicha evolución, se refiere el trabajo de una estudiante quien ejecuta las actividades planteadas con el material asignado y se reportan acciones realizadas por los estudiantes las cuales son consideradas indicadores de desarrollo de razonamiento espacial. Para cumplir con este objetivo, se relatan hechos sucedidos en las primeras sesiones de clase apoyados de imágenes y transcripciones.

Ejemplo de evolución en el plano

En la primera sesión, la estudiante (identificada como est2) no intenta armar individualmente el rompecabezas, sino que decide colocar las piezas en la posición que su compañera lo hace. Esta acción se puede dar por dos razones: i) no comprende como encajar las piezas y ii) por la cultura escolar en la que está inmersa, acostumbra a hacer lo que sus compañeros realizan.



Figura 5.6. Trabajo de estudiantes.

En la socialización de esta misma sesión, la estudiante (identificada en el siguiente fragmento como est2) participa y de lo que comenta refleja haber

realizado comparación entre las piezas de pentominó, pues las identifica y relaciona con letras por las formas que tienen (ver fragmento 1).

1. Prof: ¿Las piezas son iguales entre sí?
 2. Est1: Porque son de diferentes colores
 3. Est2: Y de tamaño
 4. Prof: Las piezas que tú tienes [refiriéndose al est1], ¿son iguales entre ellas?
 5. [el Est1 no respondió y se le dio la palabra a Est2 quien quería participar]
 6. Est2: No
 7. Prof: No, ¿por qué?
 8. Est2: Porque unas son como eles y otras como emes.
- Fragmento 1.

En la segunda sesión (ver figura 5. 7.a.), luego de 40 minutos intentando armar el rompecabezas, la estudiante no lo logró. En la tercera sesión (ver figura 5.7.b.) sucede lo mismo que la anterior, pasados 20 minutos, no logra completar el rompecabezas, además que no está comparando los espacios que tiene en el rompecabezas con la forma de las piezas.

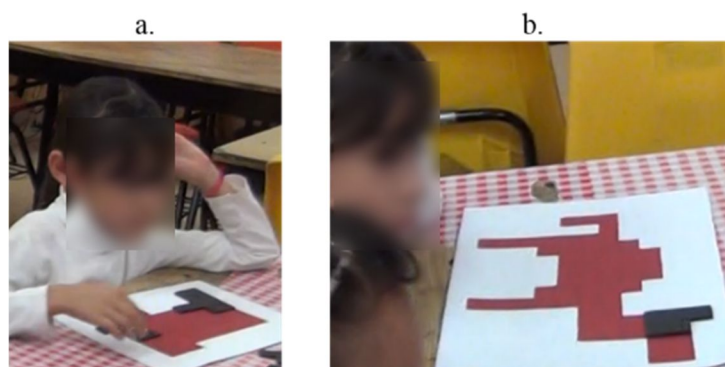


Figura 5.7. Intentos fallidos armado de rompecabezas.

En la cuarta sesión, la profesora al notar la dificultad de la estudiante le permite ver en una hoja las divisiones del rompecabezas para que lo pueda replicar. Esta réplica por error de impresión salió simétrica a la imagen del rompecabezas. La profesora decidió aprovechar la oportunidad y le solicitó a la estudiante armarlo (ver fragmento 2).

1. Prof: ¿Este es igual? [la profesora da una hoja a la estudiante en la que se encuentra el diseño del rompecabezas con todas las divisiones para que la estudiante lo pueda replicar, pero este es simétrico al rompecabezas]



2. Est2: Sí, pero esta al revés
3. Prof: A ver, inténtalo así para ver qué pasa, ¿sí?
4. Est2: Sí
5. Prof: pero bueno la idea es que lo hagas en la ... o sea esta es la réplica [señala la hoja dada con las divisiones] pero que lo hagas aquí [señala el rompecabezas]



6. Est2: ¿Listo? Si o sea que pongas... las piezas las pongas acá [asiente con la cabeza]
 7. Prof: ¿Listo? Entonces, esa es la que tienes y esta [la hoja con la solución del rompecabezas] es la ayuda que te voy a dar, ¿listo? A ver cómo te sale
 8. Est2: Y aquí lo copio [la estudiante señala el rompecabezas]
 9. Prof: Exactamente, y ahí lo copias
- Fragmento 2.

La estudiante empezó a colocar las piezas de los bordes de la figura (ver figura 5.8.a.) sin dificultad, hasta que notó que algunas piezas no podía colocarlas en la posición que consideraba era la indicada por la réplica (ver figura 5.8.b.).

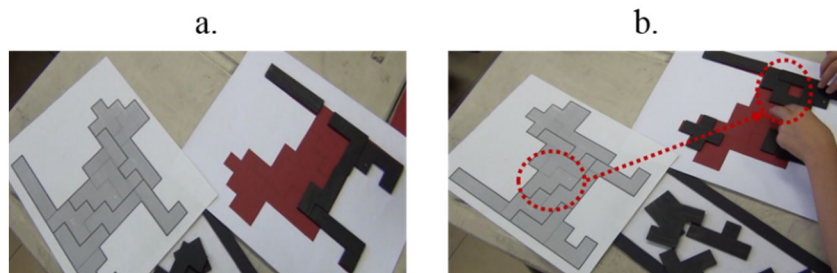


Figura 5.8. Ubicación de piezas de pentominó en el plano.

La estudiante ubicó la réplica del rompecabezas simétricamente (ver figura 5.9.a. y 5.9.b.), y luego, con la estrategia de colocar primero las piezas de los bordes, selecciona una pieza de uno de los bordes (ver figura 5.9.c.) para ubicarla según la réplica lo indicaba.

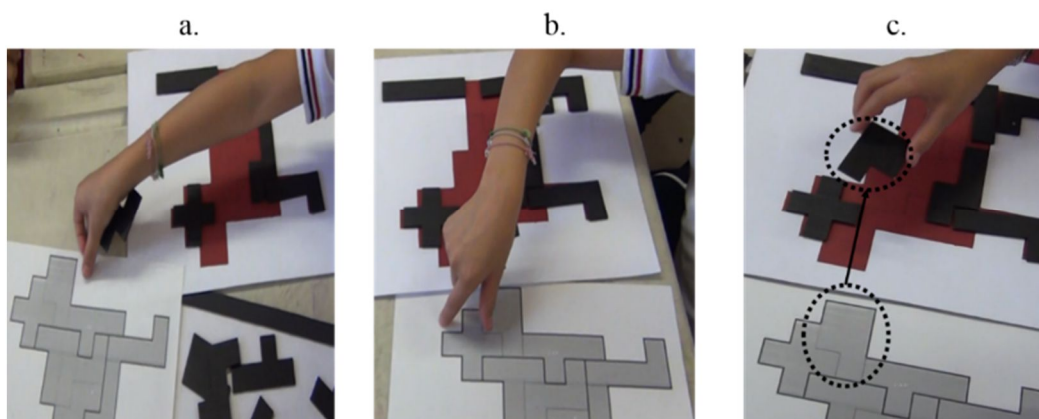


Figura 5.9. Selección de piezas para replica de rompecabezas.

Acomodó la pieza de tal manera que esta quedara en la misma orientación de la réplica (leer figura 5.10 de izquierda a derecha). Luego la rotó y la ubicó simétricamente. Como en esta oportunidad, así lo repitió con el resto de piezas.

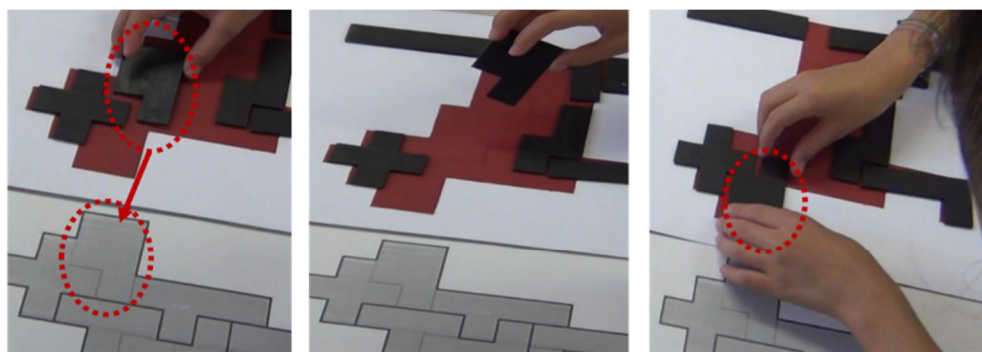


Figura 5.10. Rotación de pieza de pentominó.

A continuación, se presenta otro ejemplo (leer figura 5.11 de izquierda a derecha) donde la estudiante primero superpone la pieza en la réplica y luego la rota para ubicarla simétricamente. Es una de las estrategias que utilizó la estudiante en algunas oportunidades para ubicar la pieza simétricamente.

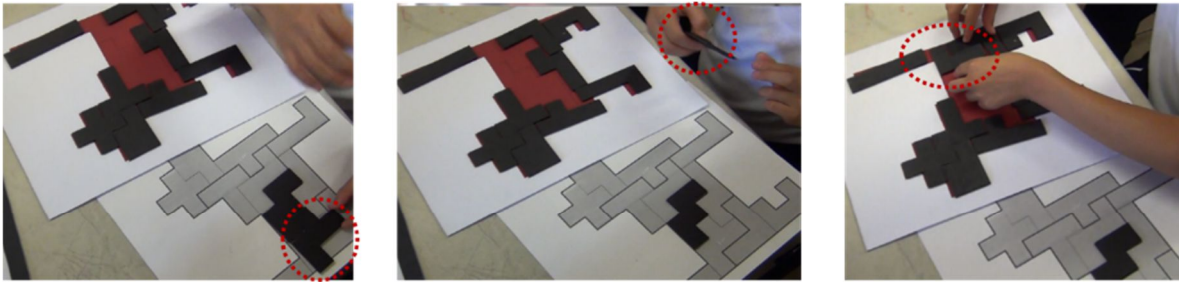


Figura 5.11. Rotación de piezas de pentominó.

En la socialización, se solicitó a los estudiantes explicación de las dificultades y estrategias utilizadas para la construcción. La estudiante participó y comentó lo reflejado en los anteriores ejemplos (ver fragmento 3), primero colocó las piezas de los bordes y las piezas que no pudo colocar con facilidad las ubicó como consideró y luego las “voltiaba”[sic].

1. Est2: Primero se construyeron las esquinas [...] casi todo fue fácil, pero lo del medio fue difícil... [No se entiende por el ruido que hay]... A veces la ponía chueca
2. Prof: A veces la ponías chueca
3. Est2: Y luego la voltiaba [sic].

Fragmento 3.

En el anterior ejemplo se evidencia una evolución en la estudiante, pues en principio no *discernió* que piezas debían ir en determinada sección y posición, luego, aunque la réplica le indicaba la posición de las piezas y la orientación de forma simétrica, realizó rotación, traslación y reconocimiento de simetría de las piezas para ubicarlas. En este proceso *comparó* los espacios faltantes en el rompecabezas con la forma de las piezas, *superpuso* en la réplica las piezas y luego las *rotó* para ubicarlas simétricamente en el rompecabezas. Su estrategia de construcción fue empezar con la ubicación de las piezas por los bordes y luego *discernir*, superponiendo y rotando, la orientación de las piezas faltantes.

Los demás estudiantes experimentaron, al ubicar las piezas en el rompecabezas, movimientos de rotación y traslación principalmente. Esta acción de movimiento conllevó *reconocer* la forma de las piezas, *comparar* las secciones y espacios del

rompecabezas con las formas de las piezas e identificar qué movimientos y estrategias de construcción les permitía armar el rompecabezas asignado. En la tabla 5.10, por las características críticas definidas como categorías para movimientos isométricos en el plano, se describen las acciones realizadas por los estudiantes que les permitió *discernir* qué pieza se ubicaba en determinada posición y orientación.

Tabla 5.10

Acciones al realizar movimientos isométricos en el plano

Comparación y visualización (CV1)

CV1-1. Reconocer la forma de cada pieza de pentominó

- Asignan nombres a las piezas.
Est: la T
Est-1: ¿ésta?



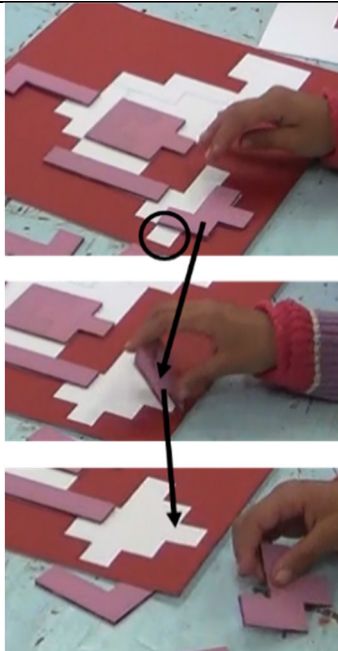
- Identifican tamaños en las piezas.



[la pieza de la derecha del estudiante es pequeña y la de su izquierda es grande]

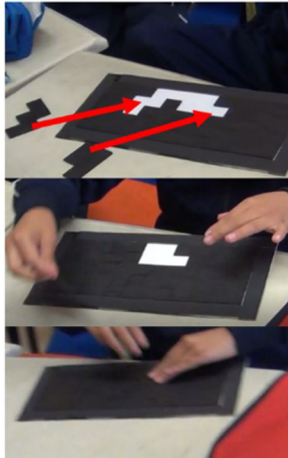
CV1-2. Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas.

- Colocan piezas en determinado lugar por la congruencia de estas con el rompecabezas y las quitan al notar que no hay congruencia del espacio faltante (encerrado en la siguiente imagen con un círculo negro) con alguna de las piezas.
-



CV1-3. Reconocer en el dibujo las piezas que lo componen (estén explícitas o implícitas). (*Ideas de congruencia por percepción inmediata y superposición*).

- Relacionan la forma de las piezas con los espacios faltantes.



CV1-4. Generar/construir una estrategia para resolver la tarea de construcción.

- Colocar las piezas donde, por forma y división, su posición en el rompecabezas es explícita.

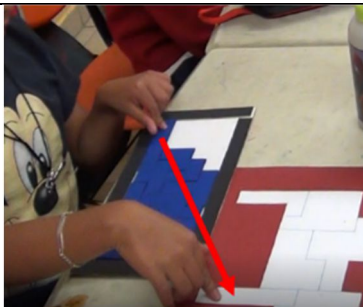
Ejemplo 1:

Est-1: [...] el imán y la doble u y luego...

Prof: y ¿por qué pusiste esos de primero?

Est-1: Nada más me sabía estos, los demás ya no me los sabía.

Ejemplo 2:



- Colocar las piezas que van en los bordes del rompecabezas.
- Est-1: yo empecé con esta [señala la pieza que puso primero].



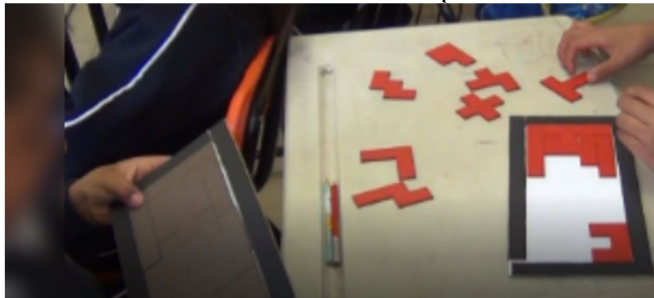
Est-2: y luego con este [señala la segunda pieza colocada]



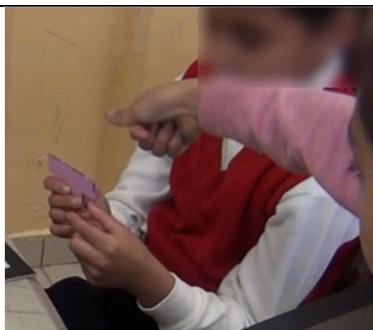
Localización (L1)

L1-1. Estrategias para guiar cuando alguien presente una dificultad, contar lo realizado y/o reflexionar sobre el proceso seguido.

- Nombran las piezas para referirse a ellas.
- Indican la posición de aquellas piezas que se encuentran en los bordes del rompecabezas.



- Mueven sus manos para indicar giros.
-

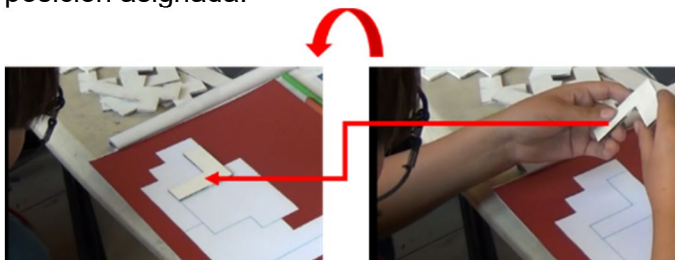


- Usan palabras como: al revés, acostada, volteada.

Giros (G1)

G1-1. Mover las piezas para completar una configuración determinada.

- Rotan en el espacio las piezas para encajarlas en la posición asignada.

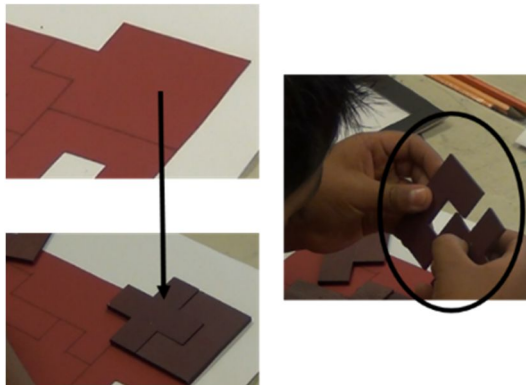


(El movimiento en la anterior imagen se lee de derecha a izquierda).

Organización de piezas (OP1)

OP1-1. Estrategias para ensamblar las piezas que conforman una sección.

- Prueban fuera del rompecabezas la unión de las piezas de determinada sección.



En este apartado se ratifica que los estudiantes, a partir de la rotación, la traslación y en algunos casos, la reflexión de las piezas, logran los ensambles solicitados. Experimentar con estas acciones de movimiento les permitió identificar subconfiguraciones y realizar rotaciones mentales para contestar, posiblemente, los puntos relacionados con representaciones bidimensionales en la prueba diagnóstica/final.

Cabe señalar que las acciones de los estudiantes cuando ubicaron alguna pieza no son lineales. En el ejemplo considerado como evidencia de evolución, se vislumbra que la estudiante, para colocar en el rompecabezas la pieza simétrica a la réplica, primero *traslada-superpone-traslada* la pieza encima de la réplica, luego la *rota* en el espacio y finalmente la ubica de tal forma que queda *simétrica* a la réplica. En esta acción, realizó una composición de transformaciones (traslación-rotación) aun cuando el movimiento buscado de las piezas era para generar una simetría (reflexión).

En resumen, se evidencia que los estudiantes reconocieron que las formas de las figuras eran distintas y por lo tanto la ubicación, orientación y sentido también, pero las piezas usadas eran las mismas en los diferentes rompecabezas.

Este reconocimiento permite a los estudiantes comprender que las piezas ocupan la misma superficie en el rompecabezas aun cuando sus formas son distintas. Estas características discernidas posiblemente ayuden en la comprensión del significado de área, que según Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley (2015) y Cardenas (2016), es una dificultad común en los estudiantes.

A través del contraste de las diferentes figuras y la invarianza de las piezas, los estudiantes identificaron que hay movimientos de traslación, rotación y simetría (axial) que se generan al ubicar una pieza en plano.

5.2.2. Trabajo con 3D

La prueba diagnóstica no reflejó evolución en relación con cambios de dimensión e interpretación de representaciones 3D, pero, como ya se comentó en el apartado 5.1, al considerar razonamiento espacial como sistema en el que interactúan el actuar (movimientos) y la comprensión (cognitivo) del sujeto para realizar alguna tarea, los resultados de la prueba no son suficientes para referirnos o no a una evolución. Se hace necesario visitar el proceso de los estudiantes en el trabajo relacionado con los cambios de dimensión y las interpretaciones de representaciones 3D. Por tanto, en este apartado se menciona el trabajo de un estudiante quien realiza las actividades planteadas con el material asignado y se describen acciones realizadas por los estudiantes las

cuales son consideradas indicadores de desarrollo de razonamiento espacial en relación con cambios de dimensión.

Ejemplo de evolución

En la primera sesión de la tercera actividad, los estudiantes identificaron la vista superior e inferior sin dificultad, sin embargo, las vistas laterales y frontales no podían identificarlas rápidamente, pues requería de ubicarse en un solo punto para lograr reconocer cuál vista era la que debían relacionar. La vista lateral de un objeto depende, por ejemplo, de la posición del sujeto frente al objeto. La figura 5.12.a representa el módulo multicubo que debían relacionar con la vista frontal representada en la figura 5.12.b.

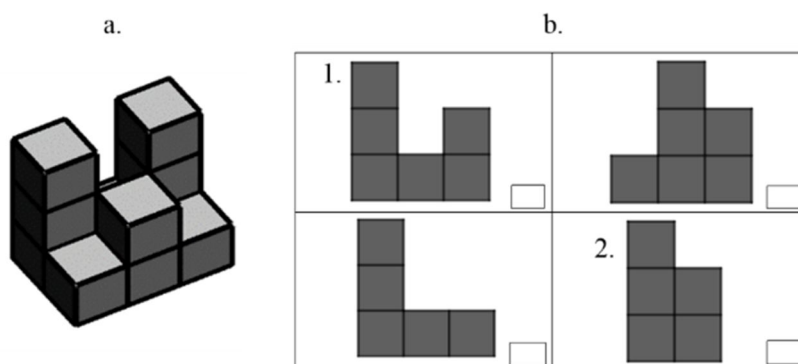


Figura 5.12. Representación tridimensional y vistas de un módulo multicubo.

Uno de los estudiantes (est1, quien es considerado para evidencia de evolución) inicialmente relacionó (ver figura 5.13.a) el módulo con la representación 5.12. b1 posiblemente porque vio una vista isométrica (como la que se muestra en la figura 5.12.a) del objeto y la opción seleccionada se asemejaba a lo observado. Sin embargo, la profesora les solicitó a todos los del equipo ubicarse frente al objeto armado (con módulo multicubo) para que identificaran la vista. Los estudiantes se ubicaron y est1 relacionó correctamente la representación bidimensional con el objeto (ver figura 5.13.b. La imagen seleccionada es la misma que se aprecia en la figura 5.12. b2).

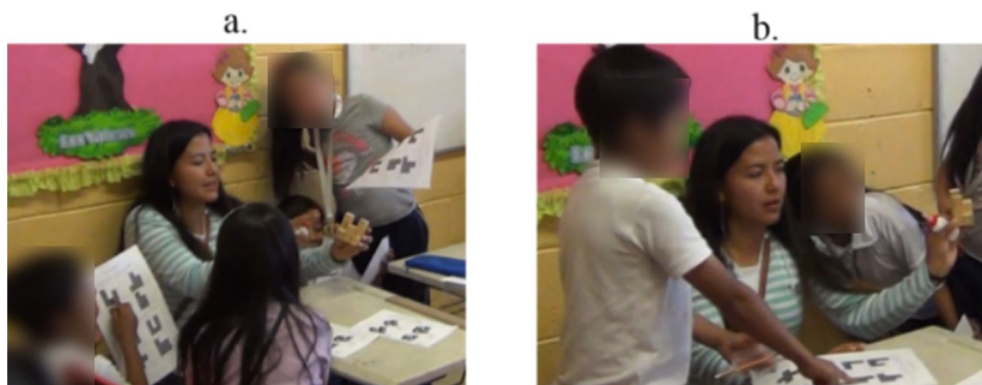


Figura 5.13. Relación de objeto 3D con vistas 2D.

En la siguiente sesión, se profundizó en la identificación de representaciones, pero en esa ocasión se solicitó dibujar la vista indicada. El objeto del cual dibujaron sus vistas es el representado en la figura 5.14.a. A partir del conteo y la ubicación de la pieza, Est1 realizó su dibujo (ver figura 5.15.b).

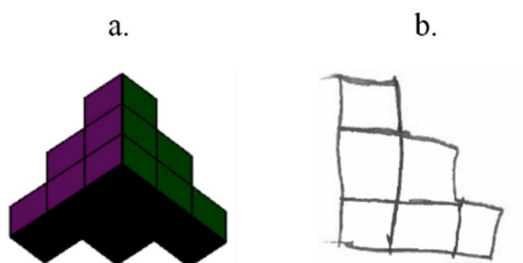


Figura 5.14. Dibujo de vista lateral derecha.

Est1 para realizar esta actividad, ubicó el módulo frente a él (ver imagen 5.15.a), según la vista a dibujar. Después, usó el conteo de caras de los cubos visibles, considerando el color de cada vista y el nivel²⁴ (ver figura 5.15.b).



Figura 5.14. Estrategias para reconocer vistas de módulo multicubo.

²⁴ Se entiende nivel como la cantidad de cubos que hay en cada configuración horizontal. Por ejemplo, en la figura 5.14.a, hay tres niveles; específicamente la vista lateral derecha con color morado tiene en su primer nivel tres cubos, en su segundo nivel dos cubos y en su tercer nivel un cubo.

Para la tercera sesión de esta actividad, cada equipo se dividió en dos. Una mitad eran los encargados de dar indicaciones para construir un objeto, mientras que los demás, cada uno con sus cubos, seguía las indicaciones para replicarlo. Est1 nuevamente se valió de la estrategia de conteo (ver figura 5.16) para comunicar la cantidad de piezas que debían colocar en cada nivel.



Figura 5.16. Estrategia de conteo para dar indicaciones de construcción.

En la segunda sesión de la cuarta actividad, los estudiantes replicaron con policubos lo indicado en la representación tridimensional dada. A pesar de que est1 ya había relacionado vistas isométricas y bidimensionales con algunos módulos, tenía dificultad en interpretar la construcción (ver figura 5.17), pues no ubica correctamente los policubos y parece no usar su estrategia de conteo, pues no relaciona la cantidad de cubos vistos en la representación con los cubos vistos en el módulo formado por policubos. Dado que algunos no se ven en su totalidad, requirió que el estudiante interpretara la ubicación o colores de las piezas ocultas, tarea que le representó un reto.

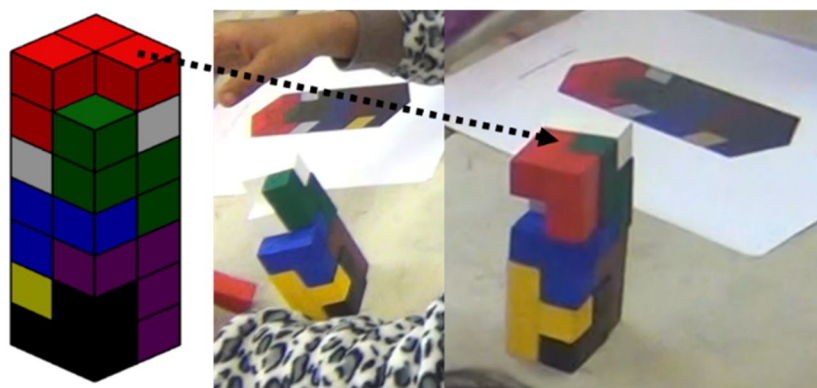


Figura 5.17. Construcción de objeto 3D a partir de interpretación de representación 3D.

La profesora al ver la dificultad del estudiante le indicó el orden en el que podía colocar los policubos por colores: “*coloca la azul, la verde, la blanca...*” no le dijo en qué posición u orientación y el estudiante solo las colocó y obtuvo la

construcción indicada (ver figura 5.18). A pesar de no haber realizado correctamente la construcción, el estudiante relacionó los policubos por colores y los ubicó manteniendo la conexión entre ellos. Por ejemplo: la pieza de color negro va junto al color amarillo y morado y se une en una arista con el color azul. Siguiendo con esta forma de acomodación est1 colocó las piezas sin fijarse en la posición de las piezas.

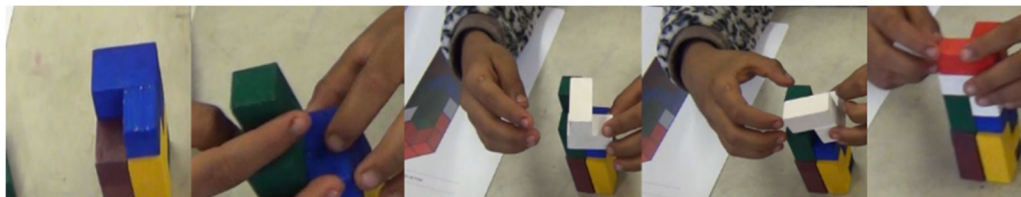


Figura 5.18. Proceso de construcción de objeto 3D.

Una de las principales estrategias de est1 y de otros estudiantes era el conteo. Para promover el aprendizaje de otras estrategias, la profesora optó por enfocarse en que los estudiantes, al inicio de la siguiente sesión, interpretaran una representación en escala de grises (figura 5.19) aun cuando en ella había información oculta pero que se puede inferir al saber que el objeto es compacto, no tiene huecos. Anteriormente, en otra sesión, los estudiantes ya se habían familiarizado con la representación al replicarla.

La profesora solicitó a los estudiantes indicar la cantidad de cubos que tenía la representación (figura 5.19). Algunos solo contaban aquellos cubos que se veían, otros contaban todas las caras de los cubos, y particularmente, est1 solo vio dos cubos al ver la representación de la figura 5.19.

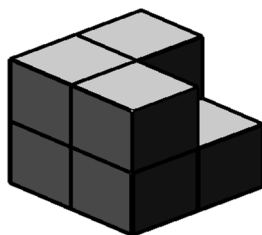


Figura 5.19. Representación tridimensional de objeto 3D

Solo uno de los estudiantes (diferente a est1) respondió que siete eran los cubos del objeto. La profesora le pidió a este estudiante explicar a los compañeros

porque eran 7. Él pasó al frente y señaló en la representación los cubos que había contado mencionando que había cubos “escondidos”.

Luego, por equipos, se solicitó a los estudiantes indicar cuántos cubos tenía la representación dada (cada equipo tenía una representación diferente). Est1 contó los cubos del primer y segundo nivel (ver figura 5.20) de la figura que le correspondió, y en este caso sí consideró aquellos que estaban ocultos, pues su respuesta, en relación con la cantidad de cubos de la representación (imagen señalada con lápiz en la figura 5.20), fue 12.

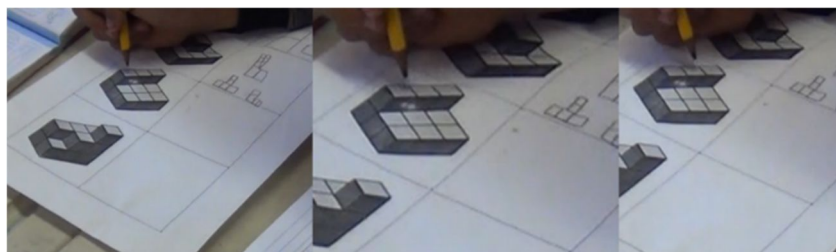


Figura 5.20. Conteo de cubos en representación 3D

En un equipo diferente al del est1, los estudiantes contaron en la representación dada 10 cubos (ver figura 5.21).

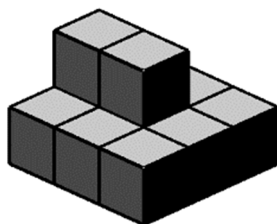


Figura 5.21. Representación 3D para conteo de cubos

Est1 contó 11 cubos y considerando que había dos respuestas, la profesora hizo el módulo con los cubos y luego, junto con el grupo, contaron la cantidad de cubos, estos eran 11. La profesora pidió explicación a todo el grupo de cómo se obtuvo esa cantidad de cubos. Est1 hizo lectura de su imagen y participó aludiendo en principio que había dos cubos escondidos. A continuación, se presenta un fragmento que da evidencia de este suceso.

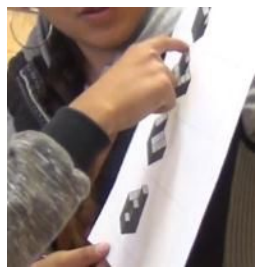
1. Est1: 11 porque dos están escondidos



2. Prof: Ven a ver. Ven, explícame... ¿cuáles están escondidos, ¿dónde?...

¿Dónde? Abajo, al lado.

3. Est1: Aquí al lado

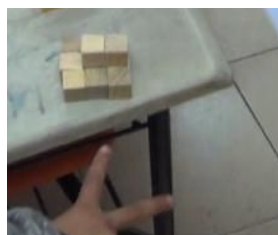


4. Prof: Y abajo ¿no hay nada escondido?

5. Est1: no, porque los de abajo son esos dos

6. Prof: En esa [refiriéndose a la construcción del módulo multicubo] ¿cuáles son los escondidos?

7. Est1: Dos



8. Prof: ¿Cuáles dos?

9. Est1: El que está debajo de estos dos [refiriéndose al cubo del primer nivel que está en medio de los cubos de los bordes]

10. Prof: Esos dos

11. Est1: Este [refiriéndose al cubo del centro del primer nivel]



12. Prof: Esos dos y...

13. Est1: Y este [reconoce que hay otro cubo, el señalado en la parte inferior derecha]



14. Prof: Esos dos
 15. Est1: Los cuatro [refiriéndose a los cuatro cubos que no se ven en la imagen 5.21]
 16. Prof: [La profesora asiente con la cabeza y afirmó lo dicho por est1] esos parece que también están escondidos ¿no? [...] ¿Cuántos hay escondidos?
 17. Est1: Tres y medio.
- Fragmento 4.

El estudiante (est1) tuvo un proceso de evolución. En principio no logró identificar y relacionar las vistas de módulos multicubo con sus respectivas representaciones. A medida que experimentó con los módulos multicubo, el estudiante adoptó la estrategia de conteo para relacionar cada vista del módulo con las representaciones bi- y tridimensionales. Luego, al tener que interpretar una representación tridimensional que no brindaba información de la ubicación y cantidad de todos los cubos, su estrategia de conteo no le fue útil. La socialización, al parecer, le permitió notar que había cubos ocultos y de esta manera logró desarrollar habilidades de interpretación de representaciones tridimensionales para la construcción de objetos e identificación de vistas.

En el trabajo con cambios de dimensión los demás estudiantes, a través de las actividades propuestas y el uso de módulos multicubo y policubos, compararon las diferentes representaciones, identificaron las vistas de un objeto tridimensional y realizaron construcciones a partir de información suministrada por una representación tridimensional. En la ejecución de estas actividades, se evidencia comprensión e interpretación en la lectura de imágenes de objetos tridimensionales. A continuación, en la tabla 5.11, se describen acciones realizadas por algunos estudiantes que dan cuenta del proceso de *discernimiento* que los llevó a relacionar las presentaciones 2D y 3D con sus respectivos objetos.

Tabla 5.11

Acciones al realizar cambios de dimensión

Comparación y visualización (CV2)

CV2-1. Reconocer la forma de cada policubo.

Cada estudiante tenía 7 policubos para realizar la cuarta lección. Una pareja de estudiantes juntó todos los policubos y refundieron algunos, entonces empezaron a comparar los que tenían para identificar los que hacían falta.

Est1: ¿tienes está?



Est2: sí

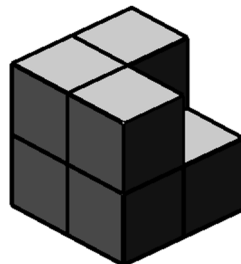


La anterior imagen da cuenta de la comparación entre las formas de dos policubos lo cual muestra que los estudiantes reconocen su forma.

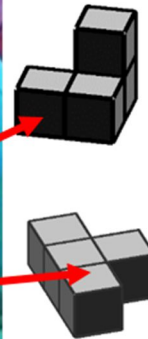
CV2-2. Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas.

Para realizar la construcción indicada en la representación tridimensional, los estudiantes comparan y prueban que unión de policubos satisface lo solicitado.

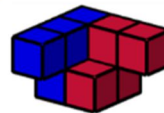
En este ejemplo, la estudiante debe construir lo siguiente:



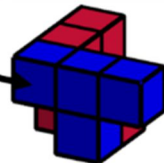
Primero busca ensamblar dos policubos



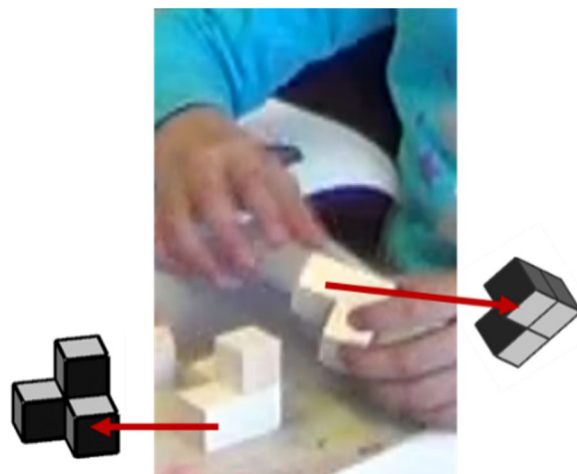
Vista frontal respecto de la posición de la estudiante



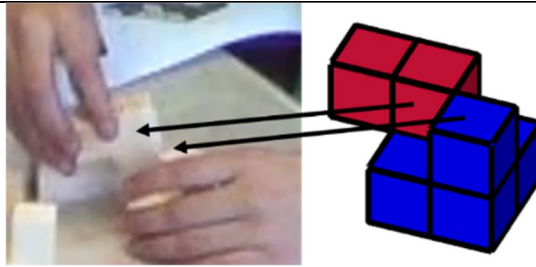
Vista posterior respecto de la posición de la estudiante



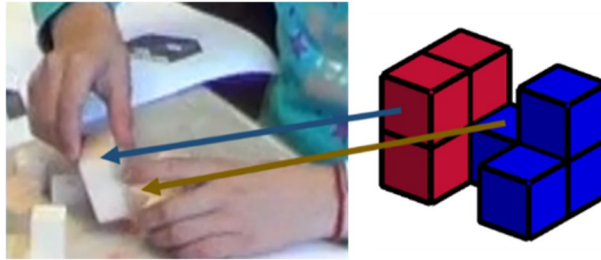
Luego toma un policubo de primer nivel y uno de segundo nivel, reconoce que la unión de estos podría efectuarle la construcción solicitada y empieza a rotar las piezas para lograr su ensamble.



Primero ubica las piezas como se ve en la siguiente imagen



Al ver que no resulta la construcción solicitada, cambia el policubo de un nivel (identificado de rojo) de orientación.

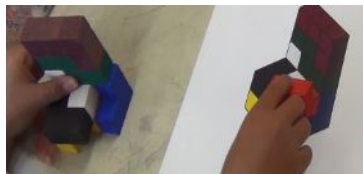


Finalmente obtiene la construcción requerida.



CV2-3. Reconocer en el dibujo las piezas que lo componen.

Un estudiante al explicar como hizo la construcción, tomó una de las piezas y la superpuso en el dibujo.



Localización (L2)

L2-1. Dar instrucciones que describen la posición relativa de una pieza.

Al dar indicaciones de construcción, los estudiantes cuentan el número de cubos en cada nivel y utilizan palabras de dirección.

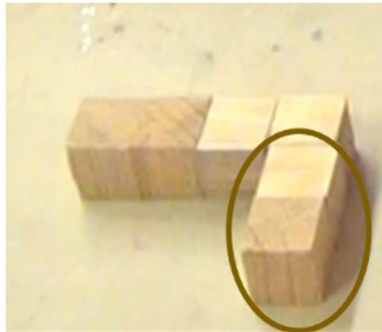
El siguiente ejemplo muestra uso de vocabulario especializado, relaciona con relaciones espaciales.

Est: Coloca tres cuadritos (quien sigue la construcción coloca tres cubos como se muestra

en la siguiente imagen)



Pon uno arriba (quien sigue las instrucciones coloca el cubo encerrado y adiciona tres cubos más)



Cambio de Dimensión (CD2)

CD2-1. Relacionar las formas tridimensionales con sus correspondientes representaciones bi- y tridimensionales.

En la actividad para establecer la correspondencia entre la representación 2D de una construcción dada, los estudiantes lo logran relacionándolo con formas ya conocidas.

En el siguiente ejemplo, en un grupo de trabajo, se refleja como un estudiante relaciona la representación con el objeto.

Est1. A ver, ¿cómo lo ves? (pregunta a su compañero por cual representación correspondería con el objeto)

Est2. [El estudiante 2 se inclina para ver la figura] escalera [relaciona el objeto con una escalera].



[Luego ve la representación tridimensional y selecciona la correcta]

¡Es esta, es esta!



CD2-2. Interpretar el significado de los distintos tonos de color gris en las representaciones tridimensionales.

Para realizar la construcción indicada en la representación tridimensional, los estudiantes reconocen en esta que diversos tonos de gris en una representación indican que en ese lugar no se ubica alguna pieza.

En el siguiente ejemplo se presentan imágenes donde un estudiante indica que falta una pieza (ver imagen 1), pues en la imagen se refleja la existencia de otra pieza (ver imagen 2) por los tonos de gris que tiene.

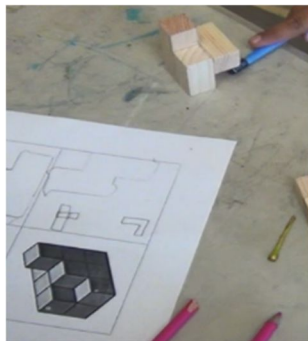


Imagen 1

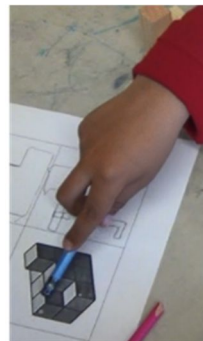


Imagen 2

En este caso, el estudiante interpretó la ausencia de cubos

en el segundo nivel del objeto por los tonos de gris que tenía, sin embargo, los policubos no están en la misma posición que en la representación, estos se ubican simétricamente.

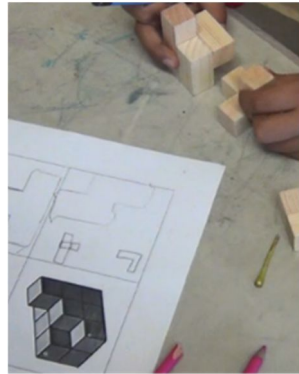
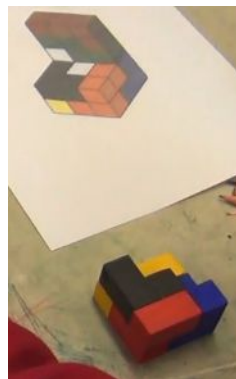


Imagen 3

CD2-3. Identificar que las representaciones tridimensionales están en escala y se relacionan con los policubos

En la actividad de replicar lo indicado en la representación tridimensional, los estudiantes relacionaban las posiciones y orientaciones de los policubos.



CD2-4. Reconocer las vistas de las representaciones tridimensionales.

Se solicitó a los estudiantes ubicarse en la posición que consideraran mejor para ver la vista que tenía color verde. En el siguiente ejemplo, se muestra como una estudiante observa la vista ubicándose en frente de ella (ver imagen 4), luego se arrodilla intentado ver solo el color verde (ver imagen 5). Sobre la mesa, sin escribir directamente sobre ella, hace un bosquejo del dibujo de la vista y dice: “es *un pastel*”.



Imagen 4

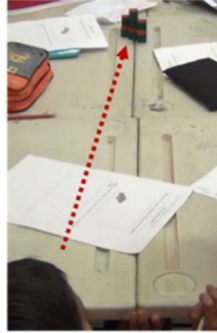
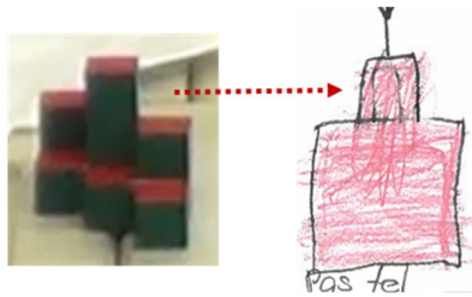


Imagen 5



Imagen 6

En la hoja dada, dibuja la vista correspondiente al color verde. En su dibujo se identifica que puso una división en la parte superior y lo colorea de rosa, lo que deja ver que se fijó en la forma de toda la vista y no en su color y todas las divisiones que este tenía.

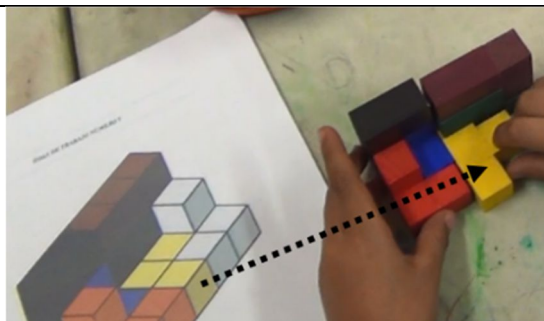


Movimientos (M2)

M2-1. Rotar piezas en el espacio para completar una configuración determinada.

Al replicar la construcción de la representación tridimensional, el estudiante reconoce la posición y orientación de la pieza, puesto que, al tener la pieza acomodada horizontalmente, la mueve hacia su derecha para dejarla en posición vertical y luego la vuelve a acomodar horizontalmente hacia la derecha para encajarla y acomodarla donde la imagen lo indica.

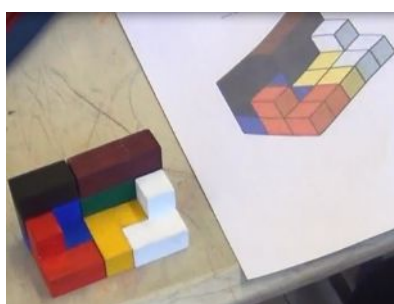




Organización de Piezas (OP2)

OP2-1. Adecuar las piezas según las representaciones tridimensionales.

Los estudiantes rotan, giran, mueven las piezas para construir las representaciones tridimensionales dadas.



El desarrollo de las actividades involucradas con cambios de dimensión permitió desarrollar habilidades en los estudiantes de interpretación de representaciones bien sea para la construcción de módulos multicubo o el reconocimiento de vistas, las cuales, según Arıcı y Aslan-Tutak (2015) y Dindyal (2015) son dificultades comunes cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de problemas que impliquen lectura de representaciones.

Además, permitió implícitamente por medio de la rotación, el encajamiento de las piezas, el conteo y la visualización de las piezas ocultas en las representaciones tridimensionales, identificar que con las mismas piezas (invariante) se podían armar diferentes módulos (variante) los cuales ocupaban el mismo espacio. Estas características discernidas posiblemente ayuden en la comprensión del significado de volumen, que según Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley (2015) y Cardenas (2016), es una dificultad común en los estudiantes.

El desarrollo de estas habilidades es posible, en concordancia con Gutiérrez (1998) porque en el paso del plano al espacio se genera en los estudiantes la experiencia de construir sólidos a partir de sus representaciones tridimensionales.

El trabajo con representaciones tridimensionales en escalas de grises permitió en principio a los estudiantes reconocer en qué nivel y posición no iba alguna pieza, pues había sombras (tonos de grises más oscuro) que daban cuenta de ello. De este modo al trabajar con representaciones con colores, se les facilitó interpretar en la representación 3D la posición y ubicación de los policubos.

Los momentos de socialización permitieron que los estudiantes identificaran cubos ocultos en las representaciones tridimensionales. Esta experimentación les permitió, además, lograr interpretar y reconocer que aun cuando las representaciones con colores (tridimensionales) no permitían ver la ubicación de todos los cubos de los policubos, éstas estaban ocultas.

La actividad de mover los policubos para encajarlas y relacionarlas con una representación tridimensional, dibujar vistas laterales, superiores e inferiores, discernir las piezas a utilizar en una determinada construcción y reconocer en una imagen la posición y orientación de las piezas, apoyó al desarrollo de habilidades de razonamiento espacial. Es decir, se conjugan el *movimiento* del cuerpo y los objetos, con la *interpretación* de movimientos isométricos, la *de-construcción* para identificar los policubos a utilizar y poder replicar (*construir*) un objeto dado y el conteo y relación de cubos de las representaciones con los objetos.

5.3. Imaginación y creatividad: construcción de objetos

A lo largo de las actividades los estudiantes debían encajar las piezas del pentominó o del cubo soma, los policubos, en un espacio determinado que les permitió al finalizar obtener alguna figura o forma específica. En este trabajo, *construir* fue una acción permanente que, como se mencionó en el apartado 4.1.3., se efectuó con el objetivo de realizar movimientos isométricos en el plano y cambiar de dimensión, es decir se utilizó como medio más no como fin.

En las actividades 5 y 6, el objetivo es la construcción de objetos usando Lego que, por un lado, debían ser replicados del programa Lego Digital Designer (LDD)

y por otro lado, contruidos libremente pertenecientes a un espacio específico (castillos, parques de diversiones y zoológico). A continuación se describan las acciones involucradas en las actividades de construcción.

5.3.1. De la experiencia física a lo digital

El programa LDD tiene una representación tridimensional dinámica que, como se comentó en el apartado 4.2.4, permitía al estudiante ver el objeto desde diferentes vistas e identificar la forma, el tamaño, la posición y orientación de las piezas.

El sistema de unión de las piezas que son encajes circulares facilitó que los estudiantes por medio del conteo de estos encajes relacionaran las piezas de Lego tangibles con las digitales. La construcción de objeto involucró a los estudiantes en la *composición y descomposición* de objetos, en la *toma de perspectiva* (moverse alrededor del objeto) y en las transformaciones isométricas en el espacio.

En la tabla 5.12 se describen acciones realizadas por los estudiantes que dan cuenta del reconocimiento de las piezas, la comparación entre las diferentes formas y tamaños de piezas, ubicación de las piezas, según lo que la representación tridimensional dinámica refiera, y construcción de objetos con piezas de Lego.

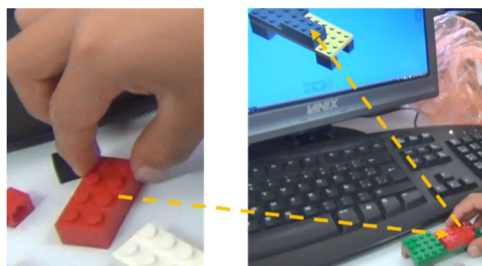
Tabla 5.12

Acciones al realizar construcción de objetos tridimensionales

Visualización y Comparación (VC)

VC3-1. Reconocer las formas de cada pieza de Lego disponible.

A medida que los estudiantes replicaban las construcciones indicadas en el software, identificaron las diferentes formas de las piezas, aun cuando el color no era el mismo, pues la réplica de construcciones lo requería.

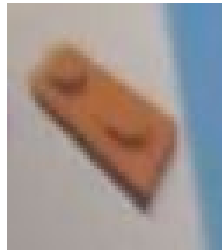


VC3-2. Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas.

Al replicar los objetos representados en el programa LDD, los estudiantes buscan las piezas faltantes y al encontrarlas las comparan para identificar cual es igual a la indicada en LDD.

A continuación, se presenta un ejemplo donde un estudiante identifica que no tiene a su disposición la pieza vista en LDD. Él pide ayuda a la profesora y comparando piezas la encuentra.

Prof: ¿Cómo es la pieza? [la pieza que se debía colocar era la que aparecía en LDD]



[el profesor se dirige con el estudiante a una mesa donde hay muchas piezas de Lego y el estudiante encuentra dos piezas que considera son las indicadas por el programa LDD]

Est: Es esta [refiriéndose a la pieza que se muestra en la imagen 7]



porque esta [ver imagen 7] de aquí no tiene esto [señala el hueco que tiene la pieza que se muestra en la imagen 8]



Imagen 7



Imagen 8

Prof: ¿Y solo por eso?

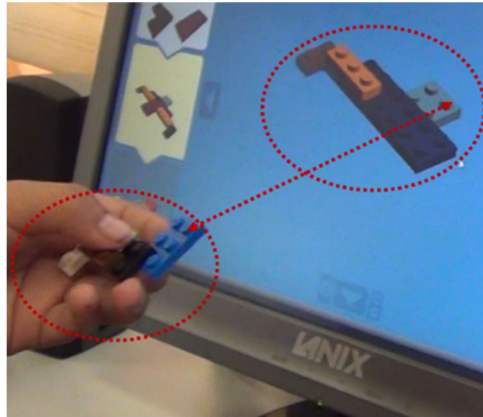
Est: Y porque esta [toma la pieza más gruesa] es más grande



Localización (L3)

L3-1. Ubicar las piezas de Lego según las representaciones tridimensionales.

Las representaciones utilizadas para la réplica de objetos son las emitidas por el programa dinámico LDD que le permitió al estudiante ver las diferentes vistas y ubicar las piezas según las formas mostradas por el programa.



Organización de Piezas (OP3)

OP3-1. Leer representaciones bi- y tridimensionales de todas las vistas para construir el objeto tridimensional.

Los estudiantes utilizan el conteo de los encajes para reconocer en las vistas las piezas de Lego que se deben ubicar en determinada posición. El siguiente ejemplo da cuenta de cómo un estudiante identifica la pieza contando cuatro encajes.

Prof: Mira cómo es la figura

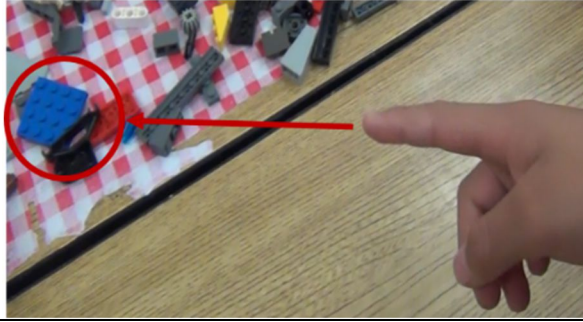
Est:



[la anterior imagen muestra la pieza amarilla delgada de 16 o 4×4 encajes que el estudiante no tenía] Cuatro.

Prof: De cuatro, muy bien.

Est: El estudiante selecciona de las piezas que tenía a su disposición, la indicada por el programa.



OP3-4. Estrategias de construcción Los estudiantes rotaban el objeto en el programa LDD para ver las diferentes vistas del objeto y contaban los encajes de las piezas de Lego para corresponderlos con las piezas mostradas en el programa.

5.3.2. De ideas a construcciones

Las construcciones libres fueron realizadas con piezas de Lego y estas debían pertenecer a contextos de castillos, parques de diversiones y un zoológico. Hacer estas construcciones requirió de creatividad, imaginación y movilización de las habilidades desarrolladas en las anteriores actividades. Los estudiantes debían, *reconocer* que piezas de Lego y de qué tamaño debían ser para que encajaran en las construcciones realizadas por equipos (conservación de una escala), imaginar piezas ocultas en representaciones, *discernir* que rotaciones de una forma se deben realizar para ver las vistas que permitan la réplica de objetos e idear (ser *creativos*) formas incluyentes dentro de un contexto.

En este apartado para dar cuenta de la creatividad e imaginación que tuvieron los estudiantes, se toma como evidencia fotos de las construcciones obtenidas y los relatos de los estudiantes cuando explican sus construcciones, pues no es posible dar cuenta de las ideas discutidas para el encaje y armado de objetos.

Las dos primeras construcciones (castillos y parques de diversiones) fueron por equipos y la última (zoológico) fue producto del trabajo hecho por todo el grupo de estudiantes. A continuación se describe el proceso que los estudiantes tuvieron para construir objetos asociados al contexto indicado.

La construcción de castillos fue un reto para los estudiantes. Ellos tenían una gran variedad y cantidad de piezas y debían escoger/*discernir* la forma y el tamaño de las piezas que encajaran para obtener el objeto a construir. Además, que los

objetos debían guardar una proporción, eso implicaba que entre ellos se comunicarán para acordar el tamaño y los objetos necesarios para el armado del castillo.

En esta primera actividad de construcción, sólo un equipo logró (ver figura 5.22.d) realizar una forma parecida a la de un castillo, el resto de los equipos (ver figura 5.22.a, b y c.) fue ensamblando las piezas, pero sin generar alguna forma. Esto posiblemente sucedió porque era un primer acercamiento con las piezas de Lego, por lo cual estaban identificando ensambles, tamaños y formas.

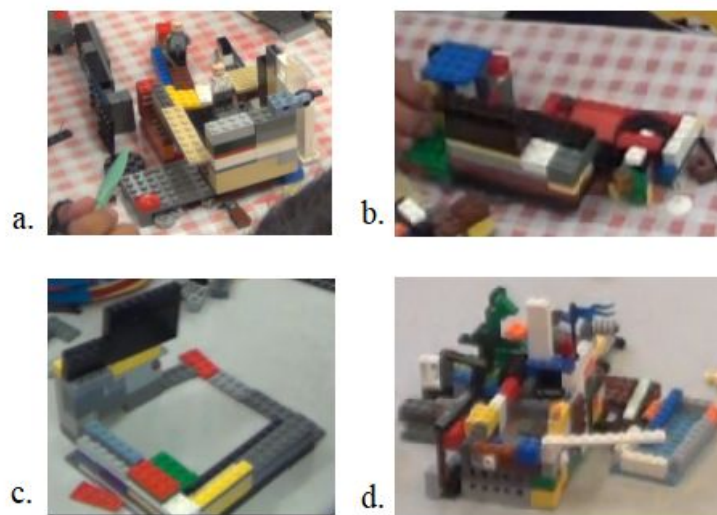


Figura 5.22. Construcciones de castillos

En la segunda actividad se solicitó la construcción de un parque de diversiones. En esta ocasión todos los equipos lograron construir objetos pertenecientes a este contexto. Una construcción estaba relacionada con la atracción de carros chocones (ver figura 5.23.a); otra, era la construcción de una alberca/piscina con un trampolín (ver figura 5.23.b); una tercera construcción que por falta de tiempo no terminaron, es la atracción de sillas giratorias las cuales se elevan lentamente por una torre, de esta sólo pudieron realizar la torre y el techo donde van colgadas las sillas (ver figura 5.23.c).

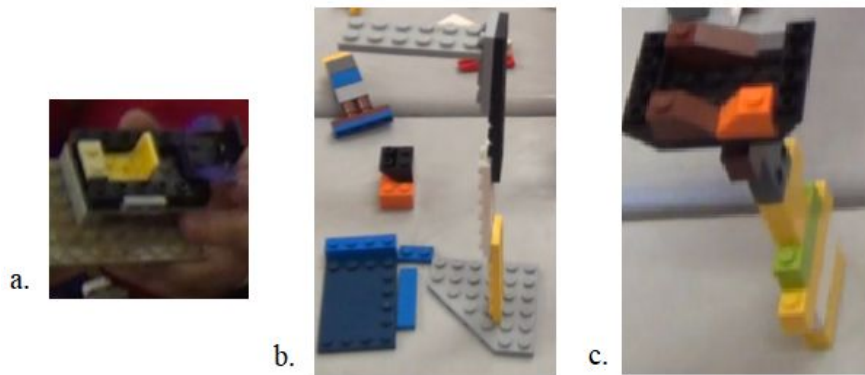


Figura 5.23. Objetos relacionados con atracciones de parques de diversiones

Dos equipos lograron construir un entorno de parque de diversiones, es decir que realizaron no solo la construcción de objetos particulares sino objetos como puertas de acceso, zonas de descanso, entre otras que reflejan la estructura del parque. Por ejemplo, un equipo (ver figura 5.24.a) juntó piezas de color verde para hacer el piso, realizó un rodadero, un carro pequeño de transporte dentro del parque, un castillo del terror y junto a este, la puerta de acceso al público.

El otro equipo, pensó en zonas de hidratación y descanso para los visitantes, pues realizaron una zona cubierta (ver la parte superior derecha de la figura 5.24.b) que protegiera a las personas de sol o lluvia y un bebedero de agua (ver en la figura 5.24.b objeto circular que se encuentra encima de los dedos de la estudiante). Además la estudiante que explica los objetos construidos, relata que estaba en proceso la construcción de un rodadero para niños y toma, de las piezas que tenía a su disposición, una pieza gris larga y dice: “le tengo que poner una de estas, pero más chiquita”, esto da cuenta que la estudiante está considerando la proporción que deben tener los objetos para que cumplan la función asignada (rodadero para niños) y que guarde relación con el tamaño de las escaleras que permiten subir al rodadero.

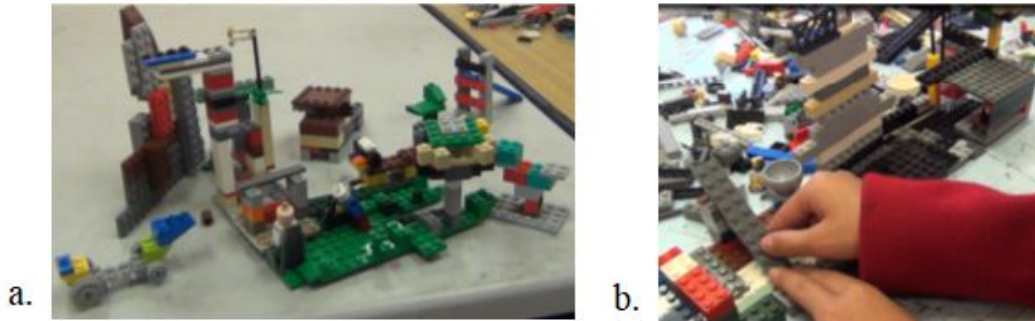


Figura 5.24. Construcción de algunos entornos de parques de diversiones

La tercera actividad, que es el proyecto con el que culmina la secuencia, fue la construcción de un zoológico que debía ser armado con la participación de todo el grupo de estudiantes.

Una estrategia para lograr conseguir esta empresa se les propuso que por equipos acordaran, entre ellos, las construcciones a realizar. Un equipo se encargó de las jaulas para los animales del zoológico, otro escogió realizar zonas de entretenimiento y descanso, otro de la seguridad del parque y el grupo faltante, de la construcción de más animales y objetos que permitieran el acceso de visitantes al zoológico. Además, cada equipo debía construir dos animales visualizados en rompecabezas que debían armar previamente y los cuales tenían solo dos vistas de los animales.

Cada equipo armo los rompecabezas dados con piezas de Lego asignadas y lograron ensamblarlas según las vistas proporcionadas por el rompecabezas porque relacionaron los colores y formas de las piezas de Lego tangibles con las de la representación. El armado de estos animales requirió de imaginación pues las vistas de las representaciones no proporcionaban información completa de la ubicación de todas las piezas. Por tanto, los estudiantes reconocían los animales a construir, ensamblaban las piezas que reconocían en las vistas proporcionadas y las que sobraban las encajaban de tal forma que se asemejara a las representaciones del rompecabezas. En la figura 5.25 se presenta un ejemplo de un equipo que está realizando la construcción del objeto gracias a la identificación y relación de las piezas vistas en el rompecabezas.

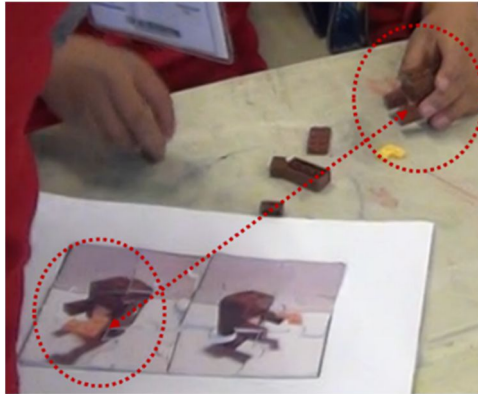


Figura 5.25. Construcción de mono a partir de vistas dadas.

El equipo al cual le correspondía las jaulas realizó no sólo dichos elementos sino objetos que consideraron necesarios para que los animales sobrevivieran. Por ejemplo, al elefante y al rinoceronte, les construyeron un estanque de agua (ver figura 5.26.a) y al mono (ver figura 5.26.b) le colocaron un árbol con bananos (los objetos de color amarillo de la figura 5.26.b).

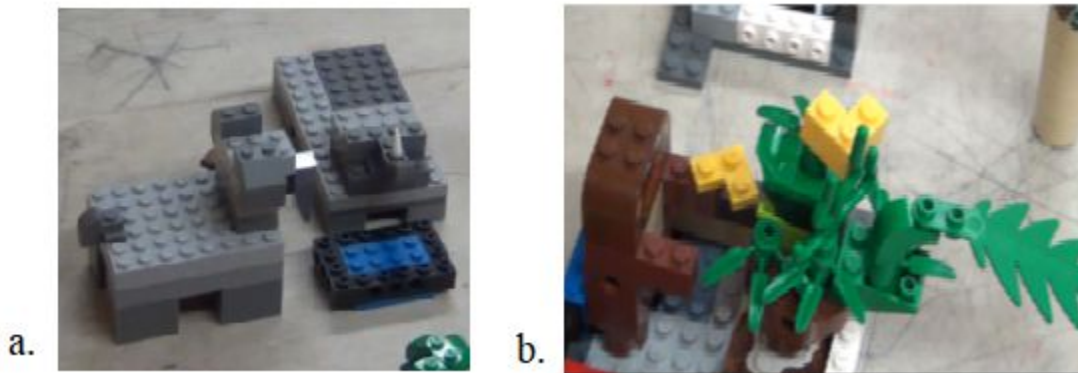


Figura 5.26. Construcción de jaulas y objetos para los animales

El equipo encargado de las zonas de entretenimiento construyó espacios para ver cine (último objeto que se observa cerca al borde derecho de la figura 5.27.a), jugar video juegos (objeto cercano al borde superior derecho de la figura 5.27.a) y comer. Para este último construyeron una plazoleta de comidas (figura 2.27.b) en la cual consideraron un lugar para la preparación de alimentos (ver objetos centrados y alineados al borde de la derecha de la figura 5.27.b); y mesas y sillas para que los visitantes se sentaran a comer (ver objetos cercanos a la parte superior de la figura 5.27.b).

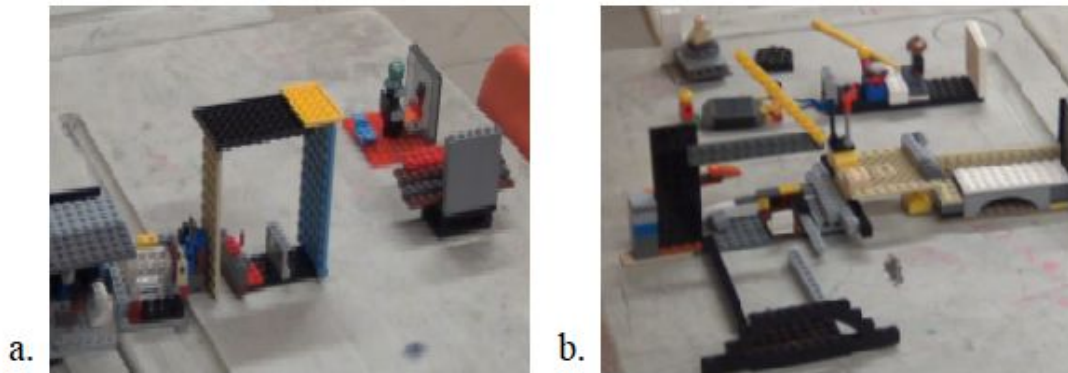


Figura 5.27. Zonas de entretenimiento y descanso

El grupo encargado de la seguridad construyó vigilantes que se desplazaran por el zoológico en patines eléctricos (muñeco ubicado al lado izquierdo de la figura 5.28.a), que estuvieran en el lugar de acceso a visitantes, además colocó cámaras de seguridad y semáforos (ver figura 5.28.b). El equipo faltante construyó una barrera de acceso para coches (ver figura 5.28.a), la taquilla del vigilante que da acceso a las personas que no van en coche (ver figura 5.28.a) y animales con sus jaulas, por ejemplo, realizaron un serpentario y colocaron una pieza transparente con el fin de que los visitantes observaran las serpientes.



Figura 5.28. Construcción de animales, seguridad y acceso

Las construcciones realizadas en el proyecto guardan una proporción²⁵ entre ellas. Para lograrlo, los estudiantes consideraron necesario acordar que tan grande iba a ser un objeto para que el encargado de hacer otro objeto vinculado con éste lo tuviera en cuenta. Por ejemplo, el equipo encargado de la seguridad del zoológico y el encargado de los objetos que permitían acceso, tuvieron que

²⁵ Los objetivos del proyecto aun cuando no van encaminados a trabajar proporción entre figuras, en el aula si se presentó implícitamente esta idea. Faltaría más investigación al respecto que podría ser tema de investigación resultado de esta tesis.

acordar y trabajar en conjunto para lograr que los vigilantes no fueran más grandes que la barrera de acceso para coches (ver figura 5.28.a). De la misma manera lo hicieron los demás grupos, pues los que realizaron la plazoleta de comidas y zonas de entretenimiento identificaron qué tamaño era el óptimo para que no se viera más llamativo que el zoológico.

Además de guardar proporción entre los objetos, los estudiantes valiéndose de su *experiencia*, posiblemente adquirida bien sea al visitar o ver un zoológico en programas de televisión, y desarrollando su *creatividad e imaginación*, realizaron objetos que, según ellos, permitía que los animales en cautiverio llevarán una vida más amable y que los visitantes disfrutaran viendo los animales expuestos.

A lo largo de estas tres actividades propuestas, los estudiantes mostraron progreso, pues en un primer momento fueron pocos los que realizaron construcciones parecidas a algún objeto, pero todos, al experimentar con el ensamble de las piezas, reconocieron sus diferentes tamaños y formas. En la segunda actividad ya empezaron con la construcción de objetos pertenecientes al contexto parque de diversiones y finalmente, en el desarrollo del proyecto, construyeron más objetos e idearon la organización de equipos de trabajo para lograr la construcción del contexto de zoológico. Es decir, se evidenció trabajo colaborativo.

Cabe resaltar que la construcción del zoológico, aun cuando estaba enfocada en desarrollar habilidades de creatividad e imaginación, también buscaba reconocer el progreso en actividades involucradas con cambios de dimensión. Como se comenta en el apartado 4.1.4, una de las tareas que debían realizar para la construcción de animales era armar un rompecabezas y con un número de piezas de Lego determinado, construir el animal plasmado en el rompecabezas. En esta tarea, se identificó que los estudiantes sí logran cambiar de dimensiones pues la elaboración de los animales dio cuenta de ello.

Como se ha mostrado a lo largo de este apartado 5.3., durante el desarrollo de las actividades 5 y 6 y, el proyecto, los estudiantes *imaginaron* y *construyeron* objetos y entornos asignados con piezas de Lego, *visualizaron* objetos para armarlos en

menor escala y consideraron aspectos de diseño (colores) y de espacio (por ejemplo, en el zoológico sitios para los transeúntes). El ensamble de las piezas de Lego para la construcción de objetos los llevó primero a *discernir* cuales piezas eran las indicadas según el tamaño y forma del objeto. Además, al construir objetos plasmados en el programa LDD, los estudiantes *interpretaron* representaciones tridimensionales, *realizaron cambio de dimensión* e *identificaron* la *congruencia* entre las formas de las piezas aun cuando estas no se relacionaban por colores.

La experimentación de ensamble les permitió a los estudiantes reconocer como se podían *unir* las piezas, además el trabajo anterior con cambios de dimensión les facilitó realizar las construcciones plasmadas en el rompecabezas y el programa LDD. Estas actividades de construcción y manipulación de formas, en concordancia con Gonzato, Díaz Godino y Neto (2011), son de utilidad para que los estudiantes diseñen y lean mapas, planos y dibujos, planifiquen rutas al usar mapas, y describan y modelen su mundo físico en el que se desenvuelven.

A manera de cierre

La propuesta de actividades de la secuencia descrita en el cuarto capítulo permitió promover el desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas (7-8 años). Esta afirmación se sustenta en las evidencias dadas en este capítulo. En particular, las acciones realizadas por los estudiantes, tanto los que se les dio seguimiento (est1 y est2) como al grupo completo, en el desarrollo de las actividades propuestas, permiten inferir que:

- Hay apropiación de vocabulario para comunicar relaciones espaciales entre piezas, objetos, posición y orientación. Ello se evidencia en los diálogos que tenían para dar indicaciones a sus compañeros sobre alguna construcción en particular.
- La experimentación con objetos tridimensionales (construcciones, posicionarse en diferentes vistas, ensamble de piezas y conteo de cubos) les permitió identificar y reconocer representaciones bidimensionales, elementos unidimensionales, lectura de representaciones isométricas y

reconocimiento de vistas, así como visualizar elementos ocultos en las representaciones.

- Los gestos identificados en los estudiantes al manipular el material, las palabras con las que expresaron sus ideas y los dibujos realizados para representar lo que veían, fueron evidencia de su evolución en relación con habilidades de razonamiento espacial.
- Durante las actividades se pusieron en uso de conocimientos de distintos tipos en particular ideas matemáticas tales como el conteo, las nociones de superficie y volumen, así como movimientos isométricos en el plano y en el espacio. Estos últimos fueron los más presentes a lo largo de la secuencia.
- Se evidenció un refinamiento de estrategias para resolver tareas que involucran razonamiento espacial. Por ejemplo, en el conteo de cubos de representaciones planas los estudiantes, primero, realizaron conteos de los que eran visibles en la ilustración; luego lograron identificar cubos ocultos al comparar estas representaciones con sus equivalentes tridimensionales.

Conclusiones

Para dar respuesta a la pregunta de investigación *¿Cómo proporcionar oportunidades de aprendizaje a estudiantes de siete a ocho años para el discernimiento de características en el cambio de representaciones bi- y tridimensionales como parte del desarrollo de su razonamiento espacial?*, conviene puntualizar específicamente dos asuntos centrales. Por una parte, en la elección del material manipulable con el que los estudiantes trabajaron a lo largo de la secuencia y, por otra, el diseño teórico-metodológico que se siguió en este estudio. Después, se incluye una sección con algunas reflexiones sobre el impacto que la secuencia propuesta tuvo, según comentarios de la profesora titular del grupo participante en el estudio. Este apartado finaliza con sugerencias para estudios posteriores y reflexiones personales sobre mi práctica.

La elección de materiales favoreció el discernimiento de características

Desarrollar habilidades de razonamiento espacial a través del contraste de aspectos específicos de figuras y formas, permite que los estudiantes discernan características de los objetos las cuales posibilitan la realización de alguna actividad propuesta. Las lecciones que involucraban el uso de pentominó variaban las figuras a construir con las mismas piezas. Esto supuso un contraste entre la posición y orientación de las piezas que permitió a los estudiantes *comparar* las piezas, *visualizar* movimientos y configuraciones en los rompecabezas para la *ubicación* de piezas, *describir* posiciones y *rotar* las piezas para lograr un ensamble.

En el trabajo con módulos multicubo, la invariancia de los módulos y la varianza de sus vistas permitieron un reconocimiento de la vista superior, inferior, lateral izquierda y derecha e isométrica de los objetos según la ubicación de cada estudiante. Además, que *relacionar* las vistas de representaciones bi- y tridimensionales con el módulo multicubo favoreció *interpretar* el significado de los distintos tonos de color gris en las representaciones tridimensionales.

Al utilizar los cubos soma se varió la posición y orientación de los policubos y, la dimensión (2D y 3D). No varió la cantidad y forma de los policubos que posibilitaron la construcción de varios módulos. En esta actividad la variación permitió que los estudiantes *compararan* y *relacionaran* representaciones, *cambiaran* de dimensión ($2D \leftrightarrow 3D$) y formas (construcción de distintos módulos con las mismas piezas), *interpretaran* la posición y orientación de algún policubo bien sea para su construcción o para comunicar la ubicación de la pieza y, *visualizar*, *rotar* y *organizar* los policubos para obtener alguna construcción solicitada.

La construcción de objetos con piezas de Lego permitió la *comparación* de distintas piezas al replicar un objeto visto en el programa digital Lego Digital Designer (LDD) y la comparación con dos vistas laterales de los objetos en forma de un rompecabezas que, a su vez, implicó *variación /cambio* de dimensión. Además, los estudiantes *rotaron* tanto las piezas de Lego como los objetos vistos en LDD para *ubicar* las piezas en la posición y orientación asignada. Durante las actividades de construcción también desarrollaron la *creatividad e imaginación* pues inventaron objetos pertenecientes a un contexto específico.

La articulación entre lo conceptual, teórico y metodológico permea el diseño de la secuencia propuesta

El desarrollo de las habilidades descritas, en el capítulo cinco, relacionadas con razonamiento espacial fue posible, no sólo gracias al diseño de las actividades permeado por la teoría de la variación sino a la conexión establecida entre esta, la aproximación de razonamiento espacial y la metodología utilizada.

Considerar al razonamiento espacial como sistema e identificar las acciones que dan cuenta del potenciamiento de habilidades de razonamiento espacial, permitió establecer los aspectos y características críticas (elementos de la teoría de la variación) de cada actividad que serían desarrolladas en la clase.

Utilizar el experimento de enseñanza como metodología para este estudio permitió, a través de los dos ciclos, construir una secuencia de actividades

permeada por el contraste de valores (eg, posición y orientación de piezas) y la posibilidad de desarrollar habilidades de razonamiento espacial.

Un elemento adicional considerado en el diseño de actividades fue el uso del material manipulable y digital. Esta complementariedad hizo posible variar valores en cada lección para el potenciamiento del razonamiento espacial, apoyar nociones de área y superficie, en el caso del pentominó, y, las de volumen y capacidad, en el caso del uso de módulos multicubo y cubos soma. La confusión de estas nociones ya ha sido reportada por Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley (2015) y Cardenas (2016), dificultades y errores que se evidencian en la solución de problemas geométricos, aritméticos y algebraicos.

Acciones de estudiantes y comentarios de la profesora titular del grupo evidencian desarrollo de razonamiento espacial

Para el desarrollo de las actividades en el aula de clase fue necesario un establecimiento de normas que posibilitaron a los estudiantes trabajar colectivamente y construir conocimiento. Para la realización de las actividades, era indispensable la participación de los estudiantes tanto al interior de cada equipo como en las socializaciones realizadas al final de cada sesión.

La comparación entre el diagnóstico aplicado antes y después de la secuencia de actividades (apartado 5.1) permitió reconocer habilidades desarrolladas por los estudiantes e identificar falencias de la prueba que no permitieron dar cuenta de evolución en lo relacionado con el trabajo y el cambio de 2D y 3D. Un análisis de las acciones de los estudiantes al enfrentarse con actividades relacionadas con representaciones 2D y 3D y objetos 3D, permitió dar cuenta de habilidades de interpretación y cambios de dimensión.

Al finalizar la secuencia de actividades se realizó una entrevista informal a la profesora encargada del grupo. Aun cuando no fue reportado este diálogo en alguno de los capítulos de este documento, vale la pena mencionar aspectos que ella considera como logros en sus estudiantes. Sus comentarios ratifican la evolución que se ha descrito en el capítulo 5.

La profesora comentó que, por un lado, las normas de clase propiciaron en el aula un ambiente de respeto, colaboración y participación, que al inicio del ciclo escolar no se tenía. Los estudiantes escuchaban las ideas y participaciones de los compañeros y trabajaban en equipo para completar una actividad en la clase. En aquellos que ella identificó como tímidos y con temor a participar en las socializaciones o en el trabajo en equipo lograron romper esa barrera de comunicación. Ella lo notó cuando ellos pasaban frente al grupo para explicar el desarrollo de alguna actividad.

Por otro lado, la profesora percibió en sus estudiantes mejoras respecto a interpretar mejor los problemas y tareas asignadas en el aula, no solo de matemáticas sino en otras asignaturas. Los estudiantes identificaban diferentes caminos para llegar a la solución de un problema y cuestionaban procedimientos y respuestas a ejercicios aritméticos, asuntos que no lo hacían antes de este estudio.

Al final del diálogo, la profesora manifestó su interés por darle continuidad al proyecto, pues notaba en sus estudiantes un cambio favorable tanto actitudinal como académico. Consideró que:

el uso de materiales les permitió a los estudiantes no solo construir objetos sino interpretar imágenes, localizar objetos, relacionar representaciones y objetos y, desarrollar habilidades matemáticas implícitas como el conteo y el acercamiento a las nociones de área y volumen.

Uno de los aspectos en los cuales la profesora consideró que se debe trabajar más en el aula es el lenguaje, pues nota que aun los estudiantes se confunden al dar o seguir indicaciones de movimiento. El uso del lenguaje se tuvo en cuenta para el diseño de la secuencia cuando se solicitaba a los estudiantes dar o recibir indicaciones para la construcción de objetos (Ciclo 1), pero al notar que no consideraban, por ejemplo, la posición y orientación de sus compañeros (puntos de referencia) y no utilizaban un lenguaje común, (eg. lo que significaba para alguno un cubo para otro era un cuadro) se diseñó la segunda actividad (Ciclo 2).

No obstante, por un lado, no se contempló en la prueba diagnóstica aplicada antes y después de la secuencia, numerales que rastrearán la evolución en este aspecto y, por otro, no se realizó un seguimiento de algún estudiante o grupo de estudiantes en relación con el progreso en el lenguaje. En el análisis de los datos se utilizan diálogos o expresiones de los estudiantes con el fin de evidenciar evolución de habilidades de razonamiento espacial, más no centrados en el lenguaje.

Sugerencias para estudios posteriores

Derivado de lo anterior, se le puede dar continuidad al trabajo de esta tesis es:

- Evidenciar evolución de los estudiantes cuando se involucran en actividades centradas en el uso de un lenguaje necesario para la realización de tareas de razonamiento espacial.
- Realizar más ciclos de rediseño de las actividades a fin de lograr construir una secuencia más refinada que eventualmente mostrara mejores resultados en el aula.
- Un análisis del rol que juegan los materiales utilizados en actividades que buscan el desarrollo del razonamiento espacial.
- Diseñar e implementar actividades en diferentes contextos y grados escolares en el marco de un estudio longitudinal que den cuenta de la implicación del desarrollo de habilidades de razonamiento espacial en edades tempranas.
- Estudiar el papel del profesor en un ambiente de aprendizaje que busca el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial de los estudiantes.

Reflexiones personales en relación con mi propia práctica

Los estudiantes son seres humanos en proceso de formación y por ende todas y cada una de las acciones que los maestros realicemos para apoyarlos en ese proceso deben tener un discernimiento profundo, pues tienen implicaciones a largo plazo. Es necesario difundir los resultados de este estudio a la comunidad

de maestros a fin de dotarlos de herramientas para el diseño de sus propias prácticas de enseñanza.

Si bien considero que el material manipulable es una herramienta poderosa para el desarrollo de habilidades en edades tempranas (no solo relacionadas con el razonamiento espacial), se, por experiencia que algunas instituciones no cuentan con recursos suficientes para adquirirlas. En estos casos, la creatividad del docente es central pues puede hacer uso de material reciclado para adecuarlo y usarlo como material de enseñanza. Los materiales usados en la realización de este estudio fueron en un inicio, elaboraciones propias (el pentominó y cubos soma) y posteriormente, elaborados por una empresa que realiza corte láser de madera. Las piezas de Lego fueron conseguidas mediante donativos y el programa digital es de acceso gratuito.

Las reflexiones teóricas a las que me enfrenté durante el desarrollo de esta tesis me permitieron tomar conciencia no solo de la importancia del desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas, sino además de lo complejo que es llevar a cabo este propósito y la falta de trabajo al respecto que tienen los planes curriculares.

Una reflexión importante es el valor académico y sobre todo comportamental que tiene el establecimiento de normas, la asignación de roles y el trabajo en equipo. Noté en las acciones de los estudiantes que cuando cada uno de ellos se siente una parte activa de su grupo, el trabajo se potencia enormemente y la autorreflexión individual y colectiva se hace presente permitiendo así mejorar el ambiente del salón y la construcción de conocimiento. Además, logré construir un rol diferente en mi participación. En el ciclo 1 mi papel fue de mayor control sobre los estudiantes, estaba enfocada en mantener la disciplina y dirigir demasiado las actuaciones de los estudiantes. Verme en el video me permitió tomar conciencia de este papel que asumí. En el ciclo 2, mi papel fue cambiando gradualmente, daba mayor autonomía a los estudiantes y confiaba que el diseño de las actividades y la organización de los equipos favorecía el desarrollo de su razonamiento espacial.

Finalmente, considero que este trabajo cambió profundamente mi forma de ver la enseñanza y a los estudiantes, noté cómo los niños logran realizar acciones que antes creía que por su corta edad no podrían. Esto me obliga a regresar al aula con la profunda intención de explorar a fondo el verdadero potencial con el que cuentan.

Referencias bibliográficas

- Arıcı, S., y Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(1), 179-200.
- Ávila, A., Block, D., Carvajal, A., Camarena, P., Eudave, D., Sandoval, I., y Solares, A. (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México.
- Bolt, B. (1998). ¿Qué es la geometría? *Suma*, (29), 5-16.
- Bracho, J. (2009). Introducción analítica a las geometrías. Fondo de Cultura Económica.
- Bruce, C. D., y Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?. *ZDM*, 47(3), 331-343.
- Cárdenas, E. T. (2016). 3D, 2D, 1D. *Números*, (92), 93-103.
- Clements, D. H., y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of mathematics teacher education*, 14(2), 133-148.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers.
- Davis, B., y Spatial Reasoning Study Group. (2015). Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations. Routledge.
- Davis, B., Drefs, M., Francis, K. (2015). A history and analysis of current curriculum. In *Spatial Reasoning in the Early Years* (pp. 47-62). Routledge.
- Davis, B., Okamoto, Y., y Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations, 139-150.

- Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM*, 47(3), 519-529.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. (pp. 37-52)
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.
- Figueroa, B., Aillon, M., Chandía, J., Yáñez Monje, V., y Palavecino Bustos, M. (2012). " El estudio de aprendizaje", un modelo para el desarrollo del conocimiento pedagógico. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 38(2), 55-68.
- Francis, K., y Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. En *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations*, 121-136.
- Gibbs, G. (2012). *El análisis de datos en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.
- Gómez, I. M., Albaladejo, I. M. R., y López, M. D. M. G. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, 1-16.
- Gonzato, M., Díaz Godino, J., y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación matemática*, 23(3), 5-37.
- Gonzato, M., Fernández, M., y Díaz, J. J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 99-117.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, España (pp. 44-59).

- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193-220.
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., y La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM*, 47(3), 363-375.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Editorial Mc Graw Hill.
- Kortenkamp, U., y Dohrmann, C. (2010). User Interface Design for Dynamic Geometry Software. *Acta Didáctica Napocensia*, 3(2), 59-66.
- Lehmann, C. H., Díaz, R. G., y Sors, M. S. (1959). *Geometría analítica* (No. QA551. L43 1953.). Uteha.
- Ling Lo, M. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R., y Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM*, 47(3), 483-496.
- Marton, F. y Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, 15(2), 193-220.
- Mix, K. S., y Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: developmental and educational implications. In J. B. Benson (Ed.), *Advances in child development and behavior*. 42(1), 197-243. San Diego, CA: Academic Press.
- Moise, E. E., y Downs, F. L. (1972). *IV Serie Matemática moderna: Geometría*. Estados Unidos: Fondo Educativo Interoamericano.
- Mongeau, P., Pallascio, R., y Allaire, R. (1990). El desarrollo geométrico de la representación espacial. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (7), 5-12.

- Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., y Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM*, 47(3), 377-390.
- Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM*, 47(3), 511-517.
- National Research Council (2014). *STEM integration in K-12 education: Status, prospects, and an agenda for research*. National Academies Press.
- Newcombe, N. S. (2010). Picture this: increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34(2), 29–43.
- Orgill, M. (2012). Variation theory. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* Dordrecht, The Netherlands: Springer. (pp. 3391-3393).
- Pittalis, M., y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, J. (1999). Metodología de la investigación cualitativa, 2.
- Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge journal of education*, 35(1), 69-87.
- Ortega, T. (2007). La fenomenografía, una perspectiva para la investigación del aprendizaje y la enseñanza. *Pampedia*, 3, 39-citation_lastpage.
- SEP. (2011). *Programas de estudio 2011 guía para el maestro. Educación básica, secundaria, matemáticas*. México: Ciudad de México.
- SEP. (2016). *Desafíos matemáticos, libro para el alumno tercer grado*. México: Ciudad de México.

- Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). *Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report*. *ZDM*, 48(5), 691-719.
- Sinclair, N., y Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM*, 47(3), 319-329.
- Soury-Lavergne, S., y Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47(3), 435-449.
- Tadeo, E. T. (2004). Proyecto cube: una introducción a la geometría tridimensional. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (47), 11-18.
- Tepylo, D. H., Moss, J., y Stephenson, C. (2015). A developmental look at a rigorous block play program. *YC Young Children*, 70(1), 18.
- Thom, J. S., y McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing (s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM*, 47(3), 465-481.
- Uribe, S. M., Cárdenas, Ó. L., y Becerra, J. F. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación matemática*, 26(2), 135-160.
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., y Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352-402. doi: 10.1037/a0028446.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Iliade, E., y Robitzsch, A. (2015). Kindergartners' performance in two types of imaginary perspective-taking. *ZDM Mathematics Education*, 47(3).
- Vázquez, S. M., y Noriega Biggio, M. (2010). La competencia espacial: Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad. *Educación matemática*, 22(2), 65-91.

- Wai, J., Lubinski, D., y Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 817–835.
- Watson, A., Jones, K., y Pratt, D. (2013). Spatial and geometrical reasoning. En A. Watson, K. Jones, y D. Pratt, *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based guidance for ages 9-19* (págs. 92-104). Oxford: OUP Oxford.
- Whiteley., Sinclair, N., y Davis, B., (2015). What is spatial reasoning? En *Spatial Reasoning in the Early Years* (pp. 13-24). Routledge.

Anexos

Anexo 1. Revisión de antecedentes

Tabla 7.1

Revistas en educación matemática

Revista	Total (2010-2016)	artículos	Artículos geometría	de	Artículos relacionados con el tema
ZME	600		35		13
MERJ	200		5		
ESM	520		24		1
JMTE	240		5		1
SUMA	857		60		3
AIEM (2012-2016)	45		2		
Revista Iberoamericana de Educación Matemática	324		22		
Números	232		14		2
Enseñanza de las Ciencias	981		7		
Educación Matemática	126		15		3
RELIME	143		14		
PNA	85		5		
Total	4353		208		23

Tabla 7.2

Revistas investigación en educación

Revista	Total	Artículos de matemáticas
Investigación educativa	142	1
Mexicana de investigación educativa	395	3
Perfiles educativos	431	5
Innovación educativa	155	9
Total	1123	18

Anexo 2. Actividades libro de texto tercero de primaria

Primera actividad

62

Una vuelta por México

Consigna 1

En equipos de cuatro integrantes, reúnanse para jugar Una vuelta por México, del material recortable (página 177). Además del tablero, deben contar con una ficha para cada uno y un dado.

Las reglas son las siguientes:

1. Todos los jugadores deben colocar su ficha sobre la línea de salida que está marcada en el dibujo.
2. El jugador que inicie el juego debe lanzar el dado y avanzar en el sentido que indique la flecha, de acuerdo con la información de la tabla.
3. A partir de la segunda tirada, cada jugador debe avanzar desde donde quedó su ficha.
4. Cada vez que un jugador llegue o pase por San Luis Potosí, se anotará una vuelta.
5. Gana el primer jugador que complete tres vueltas.

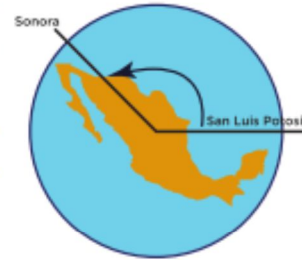
Puntos	Giros
 o 	$\frac{1}{2}$ de vuelta
 o 	$\frac{1}{4}$ de vuelta
 o 	$\frac{1}{8}$ de vuelta

Consigna 2

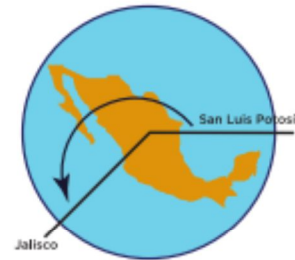
En cada equipo formen dos parejas para contestar las siguientes preguntas. Posteriormente, comenten sus respuestas.

1. En el grupo de Larissa también jugaron Una vuelta por México.

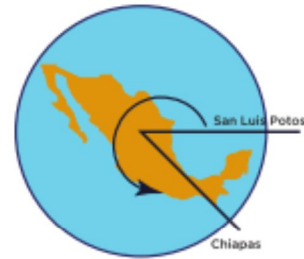
a) En dos tiros ella avanzó lo que se muestra en el dibujo. ¿Cuánto giró en cada tiro?



b) Samuel avanzó, con dos tiros, lo que se muestra en el dibujo. ¿Cuáles fueron sus giros?



c) Después de tirar el dado tres veces, Clara avanzó lo que se muestra en el dibujo. ¿Cuánto giró en cada uno?



Consigna 3

En equipo, resuelvan lo siguiente.

Escribe a qué ciudad llegué si...

a) Estaba en Nayarit e hice un giro de $\frac{1}{4}$ y otro de $\frac{1}{8}$ de vuelta.

b) Estaba en Tamaulipas y realicé un giro de $\frac{1}{8}$ y otro de $\frac{1}{4}$ de vuelta.

c) Estaba en Sonora e hice un giro de $\frac{1}{4}$ y otro de $\frac{1}{8}$ de vuelta.

d) Estaba en Guerrero y llevé a cabo dos giros de $\frac{1}{4}$ de vuelta.



Segunda actividad

Bloque II

Consigna 2

En equipo, observen la imagen y contesten las siguientes preguntas.



a) ¿Qué está más cerca del niño, el gusano o la paloma?

b) ¿Qué está más cerca del niño, la maceta o el gusano?

c) ¿Qué está más cerca del árbol, el gusano o la paloma?

d) ¿Qué distancia será mayor, la del gusano al niño o la del niño al árbol?

e) ¿Qué está más lejos del niño, la canasta de fruta o el gusano?

f) ¿Será igual la distancia entre la maceta y el niño que la de la maceta a la canasta de fruta?

Anexo 3. Proyecto presentado a la Escuela Alfredo V. Bonfil

Ciudad de México, a 06 de abril de 2017

Esteban Albañil Bello

Director de la Escuela Alfredo V. Bonfil

Turno vespertino. Zona escolar 506, dirección operativa N°. 5. Educación primaria.

En el marco del programa de formación de Maestría en Desarrollo Educativo de la Universidad Pedagógica Nacional sede Ajusco, se llevan a cabo proyectos de investigación que requieren de la colaboración de instituciones educativas. Por la anterior razón, de manera respetuosa nos permitimos solicitarle a usted, en calidad de profesores investigadores, su autorización para la implementación de una secuencia didáctica que está enmarcada en el proyecto de maestría *El razonamiento espacial en edades tempranas. Diseño de una secuencia didáctica.*

Los resultados que se obtengan permitirán mejorar dicha secuencia y comprender las habilidades de razonamiento espacial que los niños van desarrollando. Para el proceso de investigación es muy importante contar con datos que den cuenta del trabajo realizado por los niños y de las intervenciones de los investigadores, por tanto, también le solicitamos nos informe el proceso a seguir para videografiar y entrevistar a los profesores de los alumnos que participen así como los niños participantes. Cabe señalar que se cuidará la integridad de los niños por lo que ni sus nombres ni caras serán utilizadas en el informe final.

Anexo a esta solicitud, se encuentra un documento que explica el objetivo de la secuencia, por qué es importante desarrollar el razonamiento espacial en los niños de educación primaria y cómo puede impactar estas habilidades no solo en matemáticas sino en su vida académica y cotidiana. Para finalizar se encuentra un cronograma de las actividades que se proponen realizar en su institución. Cabe señalar que todos los materiales a utilizarse serán proporcionados a los niños y nos ajustaremos a los horarios y condiciones establecidas por ustedes.

Los resultados de este trabajo podrán compartirse, si así usted lo determina, con:

- Los profesores de la institución en una sesión de Consejo Técnico.
- Con los padres de familia y demás estudiantes en una exposición abierta.

Agradecemos la atención prestada y estaremos atentos a su respuesta.

Desarrollo de razonamiento espacial: un camino para la comprensión y transformación del entorno.

Se presenta una propuesta alternativa de enseñanza y aprendizaje que busca, por medio de una secuencia didáctica, aportar al desarrollo de habilidades de razonamiento espacial de niños entre los siete y ocho años (primero y segundo de primaria). Esta propuesta se enmarca en un proyecto de investigación denominado: *El razonamiento espacial en edades tempranas. Diseño de una secuencia didáctica.*

Razonamiento espacial. Su importancia en y fuera de la escuela

El razonamiento espacial se considera una capacidad vital para el actuar y el pensar del ser humano, pues implica necesidades de orden intelectual muy específicas, tal es el caso de comunicar, contar, describir, ubicar, entre otras. En particular, la descripción de los objetos del entorno, juegan un papel fundamental a la hora de situarse espacial y temporalmente en un contexto determinado.

Respuesta a esta necesidad, por un lado, se encuentra la elaboración de mapas y planos de lugares concretos, y por otro, existen estrategias específicas para elaborar representaciones de los elementos que se encuentran en la naturaleza. En la actualidad aparecen propuestas de enseñanza, de aprendizaje y estados del arte que resaltan la importancia de potenciar en el estudiante, desde los primeros grados de escolaridad, habilidades de rotación mental, visualización, construcción y manipulación de objetos en diferentes dimensiones.

Estas sugerencias están sustentadas en el hecho de que son determinantes no solo en la clase de geometría sino en el aprendizaje de las matemáticas en general. Las cualidades espaciales involucradas en las transformaciones de objetos y comprensión del espacio son competencias necesarias también en otros campos y áreas de conocimiento, como lo son la química, la biología, la geografía, entre otras.

Además, de acuerdo con el currículo para primer y segundo ciclo se encuentran como propósitos de formación: i) *ubicar objetos y lugares utilizando relaciones*

espaciales y puntos de referencia; ii) desarrollar la percepción geométrica mediante la construcción, transformación y descripción de figuras geométricas y; iii) describir la ubicación de objetos y lugares utilizando relaciones espaciales y puntos de referencia.

Objetivo de la secuencia

- Aportar al desarrollo de habilidades propias del razonamiento espacial por medio de actividades en las cuales se involucren la imaginación, la transformación y el movimiento.

Descripción breve de la secuencia

Atendiendo a la importancia de potenciar habilidades de razonamiento espacial, se diseña una secuencia didáctica en relación con los propósitos planteados en el currículo, que involucra al estudiante en la comprensión y transformación de su entorno usando e interactuando con diversas tecnologías (material concreto 2D y 3D y software interactivo). La secuencia está planteada para desarrollarse a lo largo del primer semestre escolar 2017-2018 y consta de 5 actividades que pueden conllevar una o dos sesiones dependiendo del trabajo realizado por los niños. Las actividades no representarán carga extra para los niños, padres de familia o maestros, puesto que estas serán abordadas en las diferentes sesiones.

Sería deseable poder realizar un piloto con 5 niños una vez realizadas las evaluaciones finales del ciclo escolar 2016-2017 para hacer los ajustes necesarios. Cabe mencionar que el proyecto busca favorecer la formación de los estudiantes y, si la institución lo requiere, se pueden llevar a cabo sesiones de trabajo con los maestros (en alguna sesión de Consejo Técnico o al inicio/intermedio/cierre del ciclo escolar), para dar a conocer la propuesta y los resultados de su implementación en el aula.

Requerimientos

Para llevar a cabo las diferentes actividades de la secuencia didáctica, se requiere: i) un salón para el trabajo con los estudiantes (mínimo 6, máximo 20

estudiantes) que se encuentren entre los 7 y 8 años; ii) un aula de cómputo que tenga entre 10 y 20 computadoras y; iii) disponibilidad de dos horas semanales.

Tabla 7.3

Cronograma de actividades

Actividad	Sesiones	Material	Resultado esperado
Localizar piezas de pentominó en la configuración dada.	2	Piezas de pentominó.	Comparación, visualización y localización y rotación de objetos.
Interpretar las representaciones en dos dimensiones de configuraciones en tres dimensionales elaboradas con policubos.	2	Policubos.	Comparación y relación de las piezas y las representaciones bidimensionales.
Seguimiento de instrucciones para la elaboración de una configuración determinada.	2	Lego	Relación de leguaje con orientación y localización de piezas.
Diseñar las configuraciones elaboradas en las anteriores sesiones en un software.	2	<i>Lego Digital Designer</i>	Comparación, rotación y orientación de piezas de Lego en el software.
Elaborar construcciones (lugares, objetos, etc) de acuerdo a lo realizado durante las anteriores sesiones.	2		Construcción de algún objeto por medio de rotaciones, comparaciones y relaciones entre representaciones (2D-3D).

Anexo 4. Elementos de variación en las actividades

Actividad 1

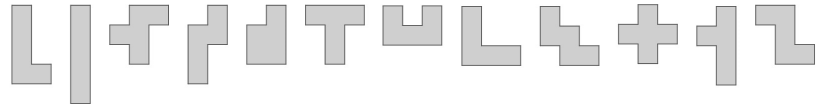
Tabla 7.4

Movimientos isométricos en el plano

Objeto de aprendizaje	Implicaciones de los movimientos isométricos (transformaciones) en el plano (traslación, rotación y simetría) y el espacio al usar pentominós.
Invariante	Cantidad y forma de las piezas.
Variante	Posición y orientación de las piezas.
Rasgo crítico a discernir	Identificar movimiento de rotación, traslación y simetría de las piezas.
Aspectos críticos	Comparación, visualización de piezas, posición (localización) y orientación (giros y organización) de las piezas.
Características críticas	<ul style="list-style-type: none">• Comparación y visualización<ul style="list-style-type: none">○ Reconocer la forma de cada pieza (F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z)○ Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas.○ Reconocer en el dibujo las piezas que lo componen (estén explícitas o implícitas). (<i>Ideas de congruencia por percepción inmediata y superposición</i>)○ Imaginar lo que representa la unión de las piezas en la configuración dada. (<i>El todo</i>)• Localización<ul style="list-style-type: none">○ Ubicar en el dibujo el lugar de cada pieza.○ Describir la posición relativa de cada pieza usando términos de proximidad (cerca, lejos), de dirección (arriba, abajo, derecha, izquierda).• Giros<ul style="list-style-type: none">○ Rotar piezas para completar una configuración determinada.• Organización de piezas<ul style="list-style-type: none">○ Organizar las piezas para lograr el ensamble solicitado.○ Ensamblar las piezas que conforman una sección.
Horizonte externo	Comparación entre las formas de las piezas (formas) dadas.

Horizonte interno	Rotación y traslación de la pieza (forma) de pentominó que considera va en una posición determinada.
--------------------------	--

Materiales	1. Pentaminós de madera. Cada estudiante contará con 12 piezas.
-------------------	---



	2. Hojas de trabajo.
--	----------------------

Actividad 2

Tabla 7.5

Movimientos del plano en el espacio

Objeto de aprendizaje	Implicaciones del uso adecuado del lenguaje al dar indicaciones de movimiento en el plano.
Invariante	Número y ubicación de las estaciones
Variante	Ruta trazada, posición y orientación de los estudiantes.
Rasgo crítico a discernir	Reconocimiento del lenguaje de movimiento en el plano.
Aspectos críticos	Relación de lenguaje, al usar palabras que permitan, orientar y localizar objetos, con movimientos isométricos en el plano.
Características críticas	<ul style="list-style-type: none"> • Relación de lenguaje con orientación y localización de objetos <ul style="list-style-type: none"> ○ Usar un lenguaje que propicie la orientación y localización adecuada de los objetos (piezas de pentominó) colocados en diferentes puntos (<i>uso de términos de dirección: arriba, abajo, a la derecha de..., a la izquierda de...; de proximidad: cerca de..., al lado de...</i>). • Interpretación y Toma de perspectiva <ul style="list-style-type: none"> ○ Dar las instrucciones necesarias teniendo en cuenta la posición de otra persona. ○ Leer mapa de ubicación. ○ Interpretar indicaciones dadas. • Construcción de mapa <ul style="list-style-type: none"> ○ Elaborar ruta para llegar de un punto a otro.
Horizonte externo	Comparación entre mapas realizados.
Horizonte interno	Comparación de mapa con ruta realizada.
Materiales	Hoja blanca y lapicero.

Actividad 3 y 4

Tabla. 7.6

Cambios de dimensión

Objeto de aprendizaje	Interpretación de representaciones en dos y tres dimensiones de figuras en tres dimensionales elaboradas con módulos multicubo y policubos.	
Actividad 3	Invariante	Módulo multicubo.
Reconocimiento de vista superior, inferior, lateral e isométrica.	Variante	Vistas del módulo multicubo.
	Rasgo crítico a discernir	Relacionar las vistas de un módulo con su representación en el plano.
Actividad 4	Invariante	Cantidad y forma de los policubos.
Interpretación de representaciones tridimensionales para la elaboración de un módulo multicubo.	Variante	<ul style="list-style-type: none"> • Posición y orientación de los policubos. • Dimensión (paso de 2D a 3D). • Escala de la representación.
	Rasgo crítico a discernir	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer la ubicación de las piezas. • Identificar las convenciones que permitan el cambio de representación 2D a 3D. • Relacionar las vistas de la representación con la composición de policubos.
Aspectos críticos	Comparación y relación de representaciones, cambio de dimensión y forma, toma de perspectiva, visualización y rotación.	
Características críticas	<ul style="list-style-type: none"> • Comparación y relación de las piezas y las representaciones bi- y tridimensionales <ul style="list-style-type: none"> ○ Reconocer la forma de cada policubo. ○ Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas. ○ Interpretar el significado de los distintos tonos de color gris en las representaciones tridimensionales. • Cambio de dimensión <ul style="list-style-type: none"> ○ Reconocer objetos tridimensionales en las representaciones tridimensionales. ○ Identificar que las representaciones bidimensionales están en escala y se relacionan con las distintas construcciones y policubos. • Toma de perspectiva 	

-
- Reconocer las vistas de las representaciones bi y tridimensionales.
 - Visualización
 - Imaginar policubos en las representaciones tridimensionales.
 - Giros
 - Rotar piezas en el espacio para completar una configuración determinada.
 - Organización de piezas
 - Adecuar las piezas según las representaciones tridimensionales.
 - Organizar las piezas para lograr el ensamble.
 - Relación de lenguaje con orientación y localización de objetos
 - Usar un lenguaje que propicie la orientación y localización adecuada de las piezas de Lego (uso de términos de dirección: arriba, abajo, a la derecha de..., a la izquierda de...; de proximidad: cerca de..., al lado de...).
 - Interpretación y Toma de perspectiva
 - Dar las instrucciones necesarias teniendo en cuenta la posición de otra persona.
 - Interpretar indicaciones dadas.
-

Horizonte externo

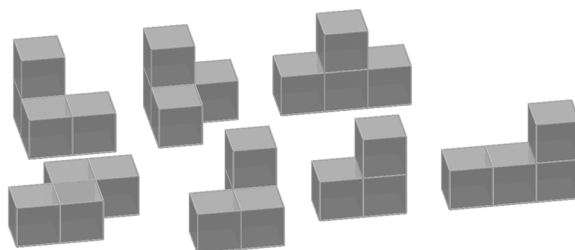
Comparación entre las representaciones bi y tri-dimensionales.

Horizonte interno

Comparación entre las formas de las distintos policubos.

Materiales

1. Módulos multicubos (construcción formada por cubos).
2. Policubos de madera. Cada estudiante contará con siete piezas.



3. Construcciones elaboradas con cubos de madera.
 4. Hojas de trabajo.
-

Actividad 5

Tabla 7.7

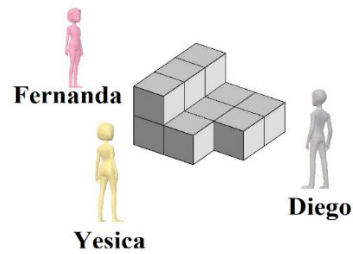
Construcción de objetos

Objeto de aprendizaje	Construcción de objetos tridimensionales.
Invariante	Forma y número de piezas
Variante	Color de las piezas. Dimensión (paso de 2D a 3D).
Rasgo crítico a discernir	Corresponder las piezas físicas de Lego con las de LDD por la congruencia de sus formas.
Aspectos críticos	Comparación, visualización, localización y movimientos de piezas de Lego manipulables y del programa digital LDD (Lego Digital Designer) para la construcción de objetos.
Características críticas	<ul style="list-style-type: none"> • Comparación y visualización <ul style="list-style-type: none"> ○ Comparar las distintas piezas de Lego. ○ Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la construcción que se quiere realizar. • Localización <ul style="list-style-type: none"> ○ Ubicar las piezas de Lego según la construcción asignada en LDD (encima de, al lado de,...). • Giros <ul style="list-style-type: none"> ○ Rotar piezas de Lego para completar una construcción determinada. • Ensamble de piezas <ul style="list-style-type: none"> ○ Re-construir algún objeto con piezas de Lego a partir de la construcción asignada en el programa LDD.
Horizonte externo	Comparación de las distintas piezas de Lego (formas) para realizar una construcción asignada.
Horizonte interno	Rotación de una pieza (forma) de Lego para que encaje con las piezas ensambladas y las que faltan por ensamblar.
Materiales	5. Programa LDD. 6. Piezas de Lego.

Anexo 5. Prueba diagnóstica/inicial - final

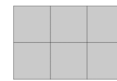
Nombre: _____ Curso: _____

1. Observa la siguiente imagen.



Relaciona con una línea lo que Diego, Yesica y Fernanda están viendo

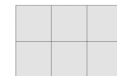
Yesica



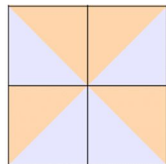
Diego



Fernanda

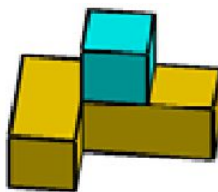


2. ¿Cuántos triángulos escondidos hay?

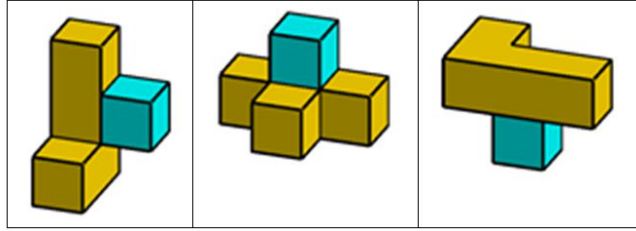


Remárcalos con diferentes colores.

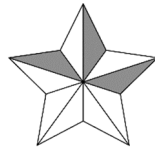
3.



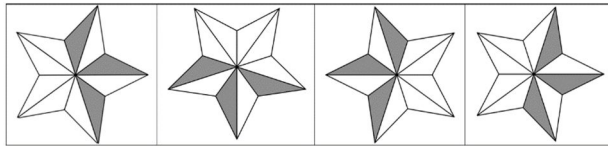
La anterior figura se movió ¿cómo quedaría ahora?



4.



La anterior figura se movió, hay un intruso ¿cuál es?



5. Observa la siguiente forma



¿En cuáles de las de abajo está? Remárcalas con color



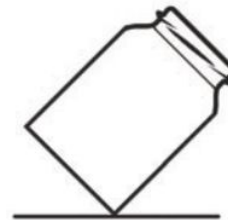
6.

El vaso con leche

se movió.



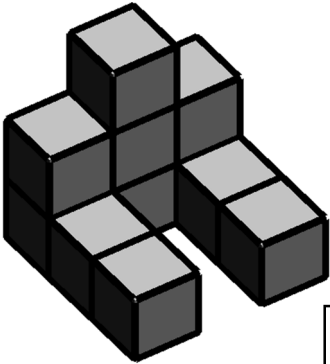
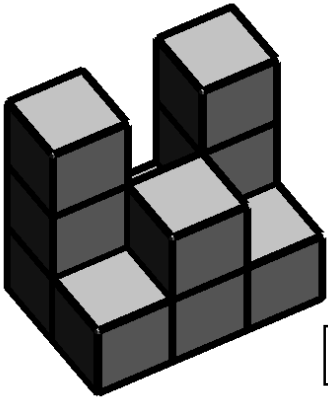
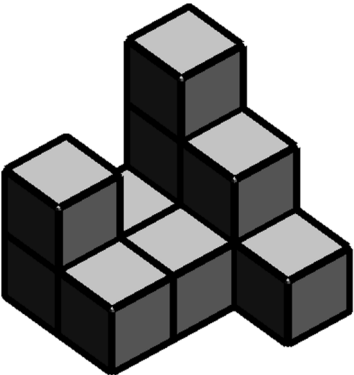
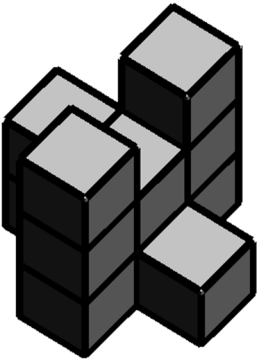
Colorea como quedó la
leche en el vaso.



Anexo 6. Hojas de trabajo

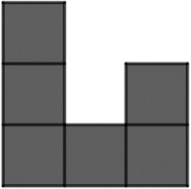
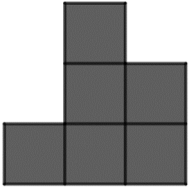
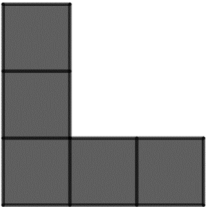
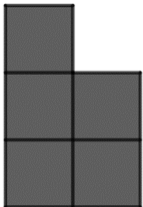
Hoja de trabajo número 1

Relaciona las distintas construcciones con el dibujo que representa cada construcción. Para esto, en cada recuadro pequeño coloca A, B, C o D según como lo consideres.


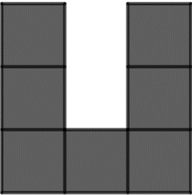
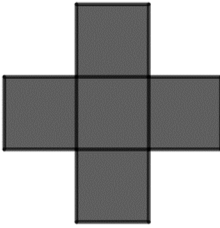
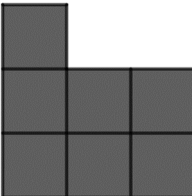
 <p>A 3D construction of 10 cubes. The front row has 3 cubes, the middle row has 4 cubes, and the back row has 3 cubes. The back row is offset to the right.</p> <input data-bbox="680 837 768 903" type="text"/>	 <p>A 3D construction of 10 cubes. The front row has 3 cubes, the middle row has 4 cubes, and the back row has 3 cubes. The back row is offset to the left.</p> <input data-bbox="1260 837 1360 903" type="text"/>
 <p>A 3D construction of 10 cubes. The front row has 3 cubes, the middle row has 4 cubes, and the back row has 3 cubes. The back row is offset to the left.</p> <input data-bbox="670 1264 768 1329" type="text"/>	 <p>A 3D construction of 10 cubes. The front row has 3 cubes, the middle row has 4 cubes, and the back row has 3 cubes. The back row is offset to the right.</p> <input data-bbox="1260 1255 1360 1320" type="text"/>

Hoja de trabajo número 2

Relaciona las distintas construcciones con las distintas vistas lateral derecha. Para esto, en cada recuadro pequeño coloca A, B, C o D según como lo consideres.

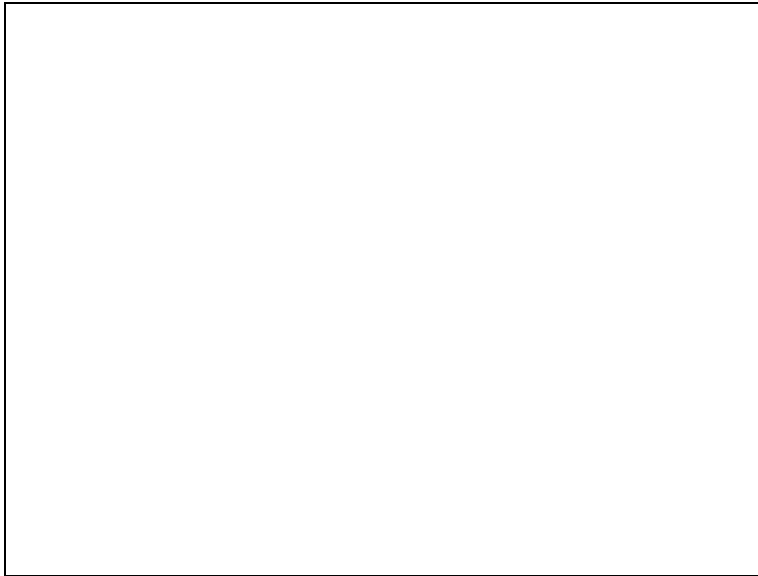
 <input data-bbox="678 552 764 615" type="text"/>	 <input data-bbox="1219 552 1305 615" type="text"/>
 <input data-bbox="683 800 769 863" type="text"/>	 <input data-bbox="1203 800 1289 863" type="text"/>

Relaciona las distintas construcciones con las distintas vistas inferiores. Para esto, en cada recuadro pequeño coloca A, B, C o D según como lo consideres.

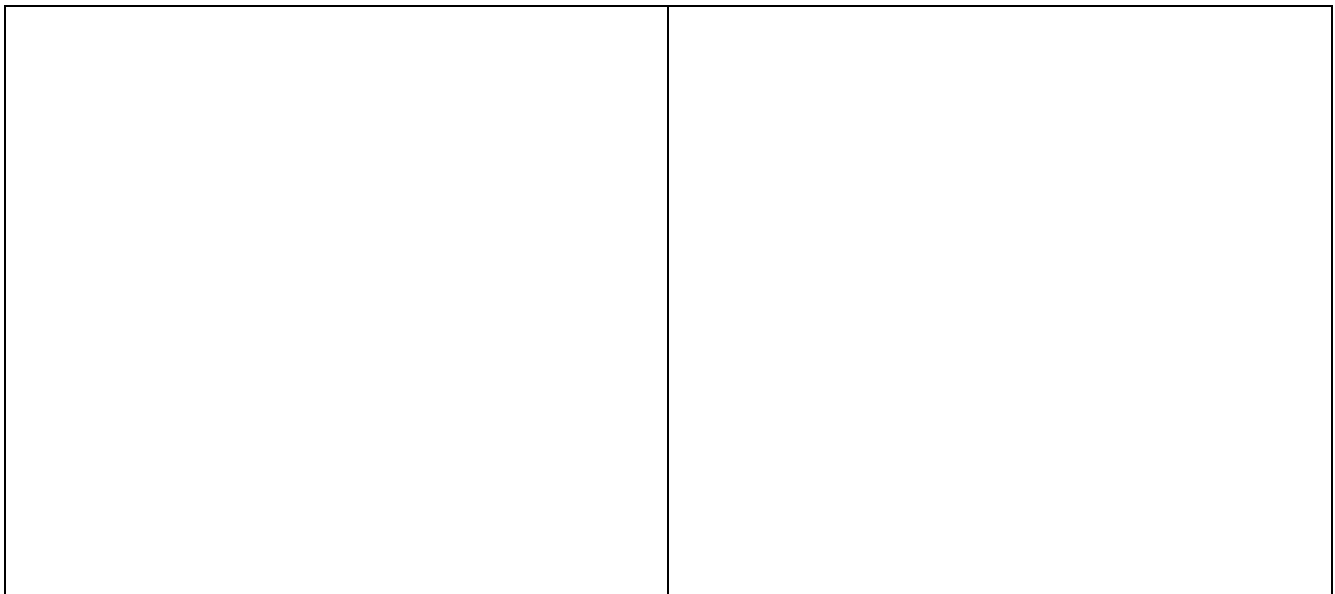
 <input data-bbox="683 1161 769 1224" type="text"/>	 <input data-bbox="1211 1161 1313 1224" type="text"/>
 <input data-bbox="675 1430 777 1493" type="text"/>	 <input data-bbox="1211 1419 1313 1482" type="text"/>

Hoja de trabajo número 3

Dibuja en cada recuadro la vista inferior de la construcción asignada

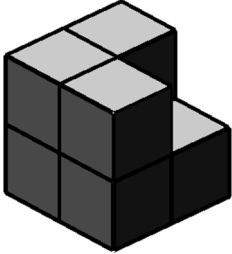
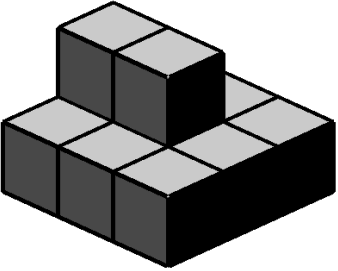
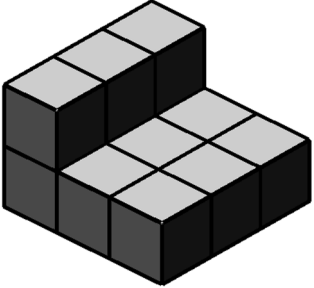
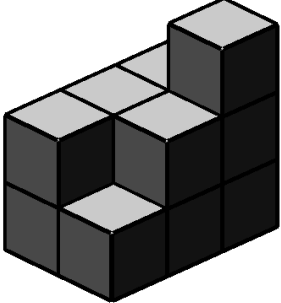


Dibuja en cada recuadro la vista lateral izquierda de las construcciones asignadas.



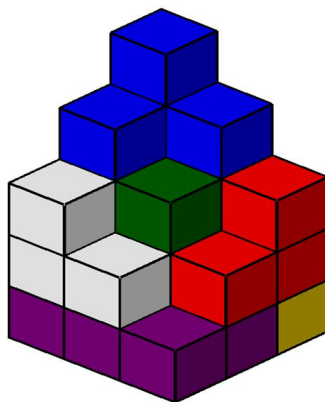
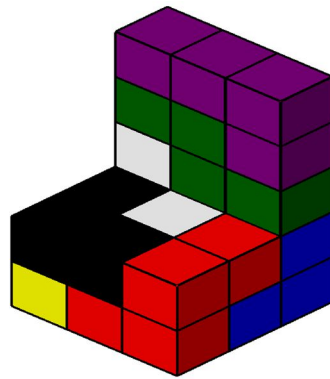
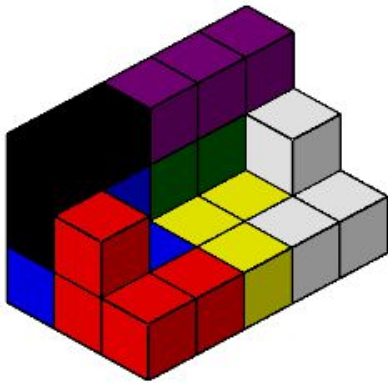
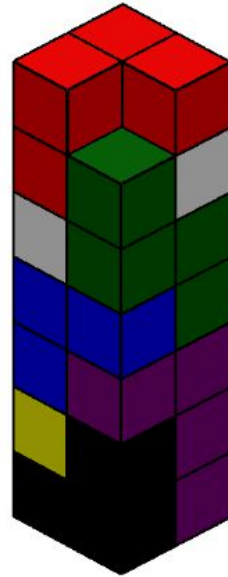
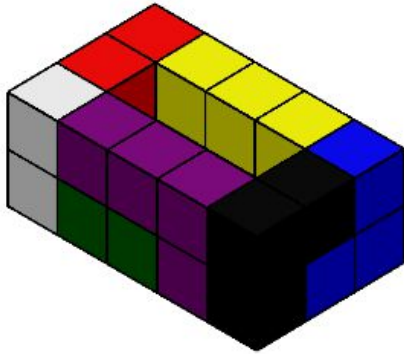
Hoja de trabajo número 4

Usa las piezas soma para realizar las siguientes construcciones y dibuja al frente de cada construcción las piezas utilizadas.

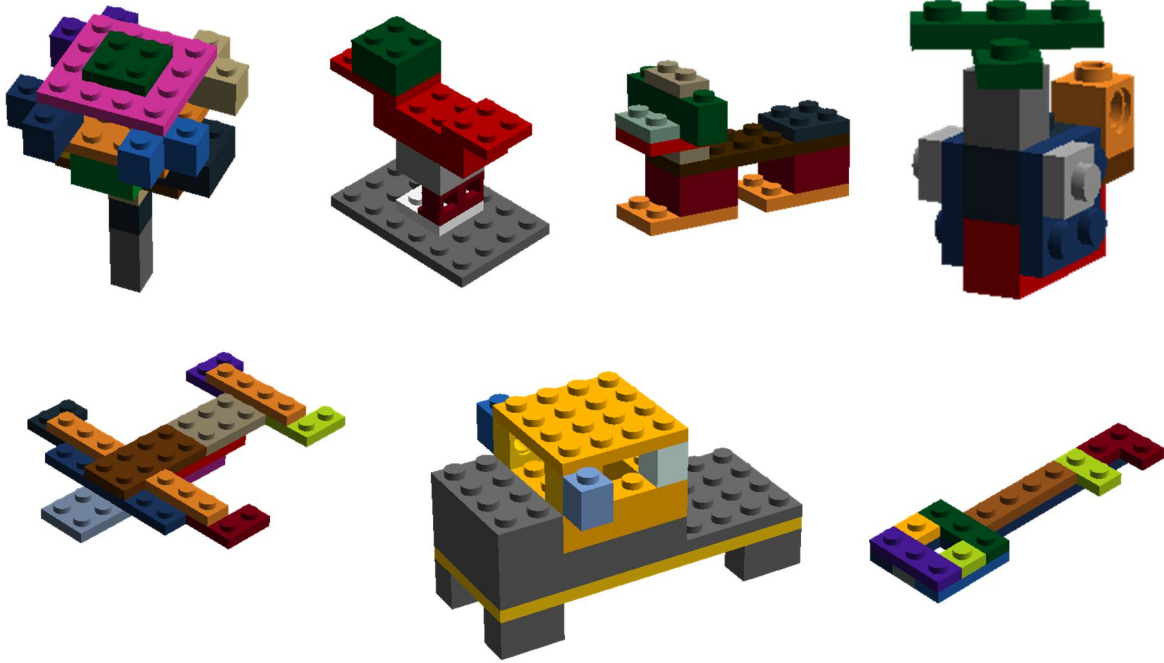
CONSTRUCCIONES	DIBUJO DE LAS PIEZAS
	
	
	
	

Hoja de trabajo número 5

Cada estudiante contaba con una hoja que tenía una de las siguientes representaciones tridimensionales



Anexo 7. Figuras presentadas en el programa LDD



Anexo 8. Representación de los rompecabezas.



Se presenta a cada grupo de estudiantes ocho rompecabezas con dos vistas diferentes.

Anexo 9. Descripción de lo sucedido durante la secuencia

Se organizó el trabajo conformando dos grupos con 7 estudiantes y otros dos grupos con 6 estudiantes. Cada sesión inició con la explicación del trabajo a desarrollar, la organización por equipos y la entrega del material y, finalizó con una socialización en la que se comentó estrategias de construcción y explicaciones sobre soluciones a las lecciones.

Como ya se mencionó en el apartado 3.4., la secuencia de actividades está conformada por seis. Siguiendo con esta organización se hace una descripción de lo sucedido en las clases.

- **Transformaciones isométricas en el plano**

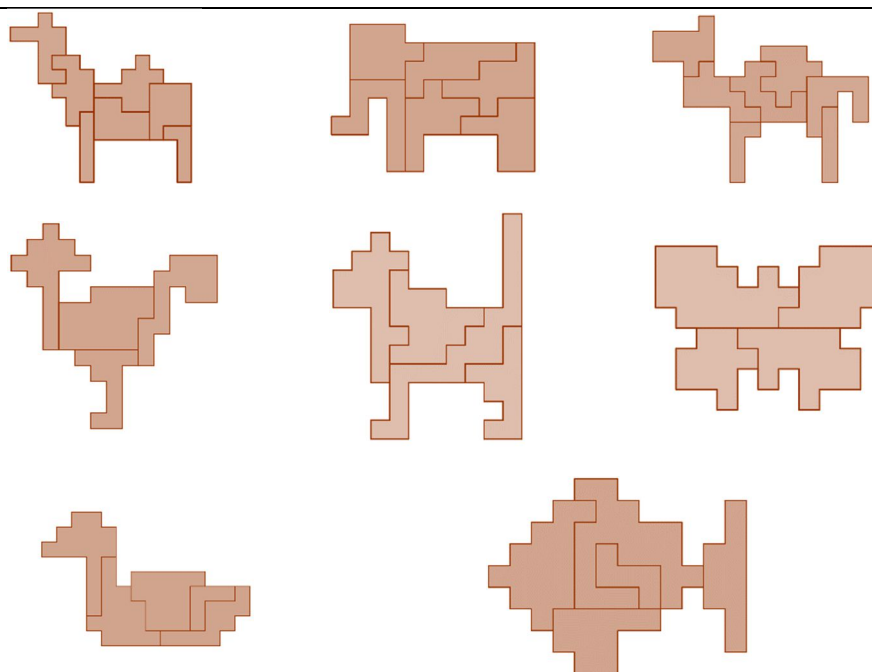
La primera actividad se llevó a cabo en cuatro sesiones y la segunda en dos. Como estaba planeado, se utilizó el pentominó para el trabajo en el plano y, en el espacio de juegos de la escuela se desarrolló la segunda actividad donde los estudiantes experimentaron movimiento del cuerpo a partir de indicaciones dadas. En la tabla 4.4., se presentan las sesiones de la primera actividad y en la 4.5., se presentan las sesiones de la segunda actividad.

Tabla 4.4.

Implementación primera lección.

Sesión	Primera
Fecha	17-10-2017
Alumnos asistentes	22.
Duración	1 hora, 10 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none">• Conocer el material de trabajo.• Reconocer implicaciones de falta de convenciones al dar indicaciones.• Hacer movimientos isométricos en el plano.• Comparar, visualizar y localizar las piezas en el plano (pentominó).
Actividades	<ol style="list-style-type: none">1. Armar rompecabezas rectangulares de $4u \times 15u$.2. Dar indicaciones para armando de rompecabezas (dirección y proximidad).

Descripción	<p>Inició la sesión con la explicación de las normas de clase y la organización de los grupos de trabajo. Seguido de esto, se entregaron 12 piezas de pentominó y un marco rectangular a cada estudiante donde debían colocar, sin que sobrara o faltara algún espacio, todas las piezas dadas. Esta primera actividad permitió la exploración del material.</p> <p>En el intermedio de la clase se puso como reto que todos los rompecabezas debían resultar armados. Por cada rompecabezas armado, se otorgó un punto. Ante la dificultad de algunos al desarrollar la actividad, se indicó que aquellos estudiantes que terminaron podían dar indicaciones a sus compañeros sin tocar su material y sin dejar ver la solución. En este reto se buscaba el desarrollo de la segunda actividad.</p> <p>Finalizó la clase preguntando a los estudiantes diferencias y similitudes de las piezas del pentominó. Este cuestionamiento estuvo direccionado para que los estudiantes reconocieran la importancia de establecer convenciones (nombre de las piezas según su forma) que facilitarían la comunicación al indicar posición de piezas. Posterior a la socialización, se recogió el material y los estudiantes realizaron la evaluación de la clase.</p>
Sesión	Segunda
Fecha	19-10-2017
Alumnos asistentes	25.
Duración	55 minutos
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Hacer movimientos isométricos en el plano. • Comparar, visualizar y localizar las piezas en el plano (pentominó). • Comparar y relacionar forma (congruencia), posición y orientación de las piezas de dos rompecabezas. • Crear convenciones de las piezas utilizadas.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Asignar nombre a las piezas. 2. Armar los rompecabezas dados. 3. Dar indicaciones para armado de rompecabezas.
Descripción	<p>Se inició la sesión organizando el grupo por equipos y se entregaron los rompecabezas rectangulares armados. La indicación fue asignar nombres a las piezas para tener una mejor comunicación a la hora de dar instrucciones de construcción.</p> <p>Luego se entregó, a cada estudiante, nuevos rompecabezas con diferentes formas de animales y algunas divisiones.</p>



Los estudiantes debían de armarlos y al igual que en la sesión anterior, se indicó que aquellos estudiantes que terminaron podían dar indicaciones a sus compañeros sin tocar su material y sin dejar ver la solución.

En el desarrollo de la actividad la maestra pasaba por cada grupo preguntando el nombre asignado a las piezas. Finalizó la sesión con la socialización en la que se comentó sobre lo complejo de dar indicaciones (de dirección) aun cuando tienen convenciones establecidas.

Sesión	Tercera
Fecha	26-10-2017
Alumnos asistentes	24.
Duración	49 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Hacer movimientos isométricos en el plano. • Comparar, visualizar y localizar las piezas en el plano (pentominó). • Comparar y relacionar forma (congruencia), posición y orientación de las piezas de dos rompecabezas.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Armar rompecabezas con diferentes formas sin o con replica. 2. Dar indicaciones para armado de rompecabezas (dirección y proximidad).

Descripción	<p>Luego de organizados los equipos, se entregaron los rompecabezas de animales usados en la sesión anterior.</p> <p>Cada estudiante por equipo tenía un rompecabezas diferente que debían armar. Se indicó a quienes terminaban primero, ayudar a los que faltaban dando indicaciones de piezas y su lugar de ubicación a partir de lo que veían en una réplica.</p> <p>A algunos estudiantes se les proporcionó una solución del rompecabezas para lograr su armado. En este caso se buscó el reconocimiento de piezas por congruencia. No todos los estudiantes quisieron recibir las ayudas brindadas, optaron, por ensayo y error, armar el rompecabezas.</p> <p>Finalizó la sesión con comentarios sobre estrategias utilizadas para el armado de rompecabezas y la evaluación de la clase por parte de los estudiantes.</p>
-------------	--

Sesión	Cuarta
Fecha	30-10-2017
Alumnos asistentes	25.
Duración	45 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Hacer movimientos isométricos en el plano. • Comparar, visualizar y localizar las piezas en el plano (pentominó). • Comparar y relacionar forma (congruencia), posición y orientación de las piezas de dos rompecabezas.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Armar rompecabezas con diferentes formas sin o con replica. 2. Dar indicaciones para armado de rompecabezas (dirección y proximidad). 3. Trazar las divisiones faltantes en el dibujo que representaba los rompecabezas.

Descripción	<p>Inició la sesión con la entrega del material y la organización por grupos de trabajo. Continuó con el armado de los rompecabezas trabajados en la sesión anterior. Posterior a esto, se entregó hojas en las que se encontraron un dibujo de los rompecabezas asignados y se cuestionó sobre lo que faltaba para que el dibujo fuera una solución de los rompecabezas. Luego colocaron los faltantes (divisiones en la hoja) en el dibujo dado. Finalizó la sesión con la evaluación de la clase por parte de los estudiantes.</p>
-------------	---

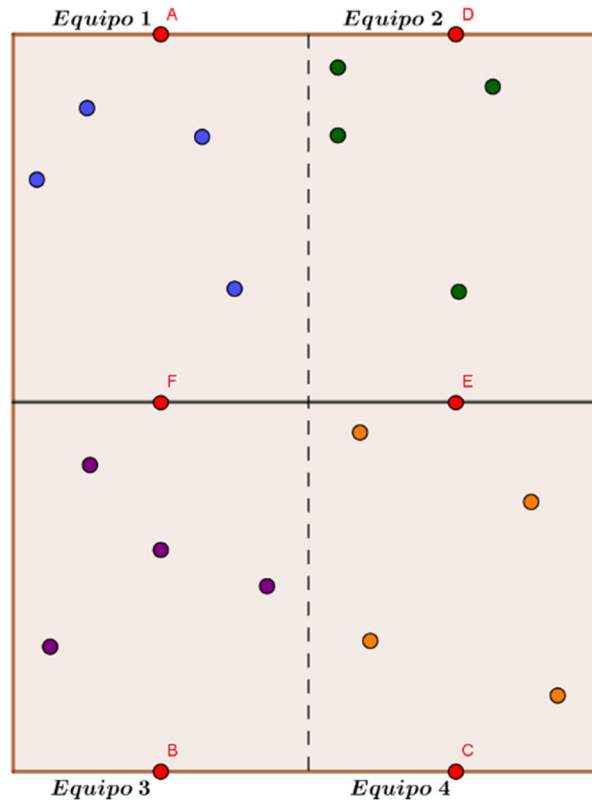
En esta actividad los estudiantes rotaban, trasladaban y reflejaban sus piezas para lograr los ensamblajes solicitados. Reconocieron que las formas de las figuras eran distintas y por lo tanto la ubicación, orientación y sentido también, pero las

piezas que se usaban eran las mismas en los diferentes rompecabezas. A través del contraste de las diferentes figuras y la invariancia de las piezas, los estudiantes reconocieron que hay movimientos de traslación, rotación y simetría que se generan al ubicar una pieza en plano.

Tabla 4.5.

Implementación segunda actividad.

Sesión	Primera
Fecha	31-10-2017
Alumnos asistentes	24
Duración	50 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Trazar ruta de mapas. • Usar un lenguaje que propicie la orientación y localización adecuada de las piezas de pentominó. • Interpretar las indicaciones dadas para situarse en el espacio sugerido.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Dos o un estudiante(s) deben ir de un lugar a otro orientados por las indicaciones de uno de sus compañeros y, pasando por puntos determinados donde recogerán una pieza para armar un rompecabezas rectangular. 2. Dar indicaciones usando palabras (de dirección y proximidad) que orienten el movimiento de sus compañeros para ir de un lugar a otro. 3. Elaborar un mapa en el que se encuentre la ruta descrita por quien da indicaciones.
Descripción	<p>La maestra organizó el grupo por equipos en el patio de la escuela, así como se aprecia en la siguiente imagen. El equipo 1 empezó la ruta desde el punto A hasta el punto F pasando por los puntos azules. El equipo 2 inició en el punto D y finalizó en el punto E pasando por los puntos verdes. El equipo 3 comenzó en el punto B y pasando por los puntos morados llegó al punto F. El equipo 4 inició su recorrido en C y finalizó en E pasando por los puntos naranja.</p>



En la actividad estaba planeado que los equipos uno y tres y, dos y cuatro, debían encontrarse en los puntos F y E respectivamente, para que aquellos quienes trazaran rutas, entregaran los mapas al equipo contrario y de esta manera continuaran la ruta con el dibujo proporcionado. Sin embargo, organizar a todo el grupo para indicar los diferentes roles que tenían por equipos no resulto como se había planeado. El grupo se desorganizo y finalmente no se pudo llevar a cabo la actividad.

En el tiempo de socialización se reflexionó sobre la actividad y se cuestionó si se había cumplido con las normas y objetivos de la clase.

Sesión	Segunda
Fecha	6-11-17
Alumnos asistentes	21
Duración	50 minutos
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Usar un lenguaje que propicie la orientación y localización adecuada de las piezas de pentominó. • Interpretar las indicaciones dadas para situarse en el espacio sugerido. • Trazar ruta de mapas.

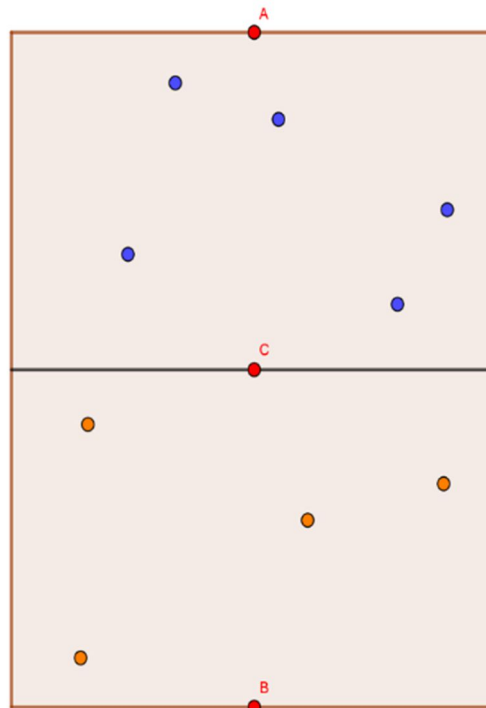
Actividades

1. Dos o un estudiante(s) deben ir de un lugar a otro orientados por las indicaciones de uno de sus compañeros y, pasando por puntos determinados donde recogerán una pieza para armar un rompecabezas rectangular.
 2. Dar indicaciones usando palabras (de dirección y proximidad) que orienten el movimiento de sus compañeros para ir de un lugar a otro.
 3. Elaborar un mapa en el que se encuentre la ruta descrita por quien da indicaciones.
-

Considerando que la anterior actividad no se llevó a cabo como estaba planeada, se rediseñó e implementó trabajando consecutivamente por equipos.

Al iniciar la clase, se organizó el grupo por equipos, se entregaron los rompecabezas de pentominó con los que habían trabajado solicitando que lo armaran. Luego se llamó al primer equipo para realizar la actividad en el patio de la escuela. Este grupo estaba conformado por seis integrantes, tres de ellos iniciaron la ruta en el punto A y finalizaron en el punto C, y los otros tres, empezaron en el punto B y terminaron en el C. En cada subgrupo un estudiante era el encargado de trazar/dibujar la ruta, otro daba indicaciones y el faltante seguía las indicaciones con los ojos vendados. Al llegar al punto C había dos rompecabezas, debían armarlo y con esto finalizaba la actividad el equipo 1. Seguido de esto, se hizo lo mismo con el equipo dos (que tenía 5 integrantes), tres (con 6 integrantes) y cuatro (con 4 integrantes).

Descripción



Al finalizar el cuarto equipo la actividad, se llevó en el aula de clase la

socialización. En esta se cuestionó sobre las dificultades y estrategias empleadas en la actividad, el lenguaje usado para dar indicaciones y los aspectos considerados para el dibujo de rutas.

Reconocer y situarse en un espacio determinado bien sea para dar instrucciones, seguirlas o trazas una ruta, permitió a los estudiantes: identificar el uso de un vocabulario específico (uso de términos de dirección: arriba, abajo, a la derecha de, a la izquierda de; de proximidad: cerca de, al lado de), relacionar el lenguaje con el espacio en que cual se encontraban, reconocer su punto de referencia y el de su compañero. Al finalizar las actividades los estudiantes comentaron que dar indicaciones requiere de ser muy específicos, pues no solo, es decir, por ejemplo, izquierda o derecha, sino indicar el giro que se debe dar y aproximar la cantidad de pasos para llegar de un punto a otro.

- **Cambios de dimensión**

Se desarrollaron tres actividades. La primera en tres sesiones, la segunda y la tercera en dos. En la primera se utilizaron módulos multicubo enfocado en el reconocimiento de vistas (ver tabla 4.6), en la segunda se utilizaron policubos y se hizo lectura de representaciones tridimensionales para la construcción de cuerpos con los policubos (ver tabla 4.7) y en la tercera si utilizaron piezas de lego y el programa LDD para armado de construcciones a partir de la lectura de representaciones tridimensionales dinámicas (ver tabla 4.8). A continuación se presenta una descripción de lo sucedido en cada sesión.

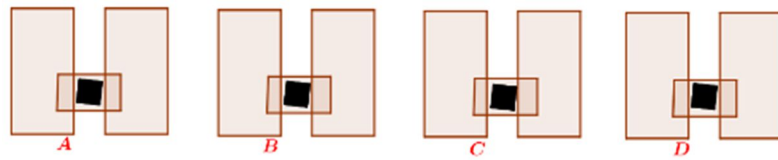
Tabla 4.6.

Implementación tercera actividad.

Sesión	Primera
Fecha	07-11-2017
Alumnos asistentes	21.
Duración	55 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none">• Reconocer las vistas de los módulos multicubo.• Relacionar las vistas del objeto con sus representaciones bi- y tridimensionales.

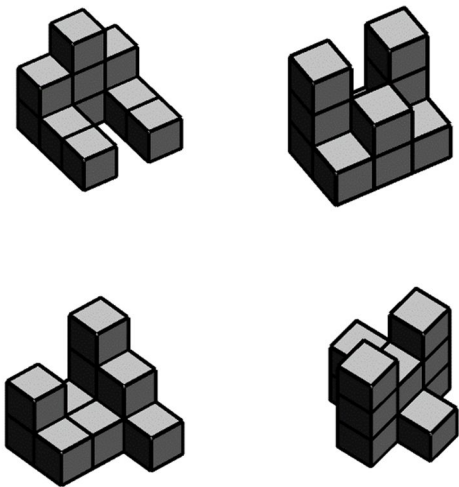
	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar los diferentes tonos de gris de la representación tridimensional del objeto.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ubicarse en la posición indicada para ver determinada vista del policubo. 2. Escoger cual dibujo representa el módulo indicado.

Se organizó al grupo por equipos y se dieron las indicaciones de la actividad. Para llevarla a cabo se dispuso el aula de clases de la siguiente manera:



Cada sección (A, B, C, D) contaba con dos mesas unidas por un acetato que sostenía (lo que esta con color negro) una construcción de módulos multicubo. La actividad para esta sesión consistía en relacionar las distintas construcciones de cubos con las representaciones bidimensionales:

Descripción



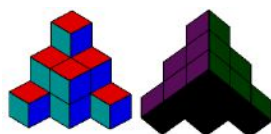
Además, se solicitó relacionar las vistas superior e inferior de las construcciones con representaciones planas plasmadas en una hoja.

En la actividad los estudiantes se ubicaron dependiendo de la vista a relacionar, por ejemplo, si la indicación era reconocer vista inferior, se colocaban en el piso debajo del acetato.

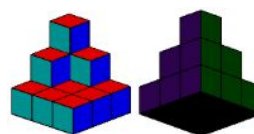
En la socialización se preguntó a los estudiantes por las relaciones encontradas (representación bidimensional con construcción). Si no eran correctas las relaciones, se pedía verificación de la respuesta.

Sesión	Segunda
Fecha	08-11-17
Alumnos asistentes	23
Duración	45 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer las vistas de los módulos multicubo por el color. • Representar algunas vistas bidimensionales del multicubo asignado.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ubicarse en la posición indicada para ver determinada vista del policubo. 2. Dibujar la vista de color verde e inferior.

Luego de organizar el grupo, se continuó con el reconocimiento de vistas con los módulos multicubo cuyas vistas se identificaban por colores. Cada equipo tenía un módulo como los siguientes:

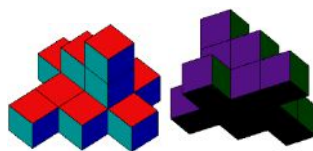


Primer módulo

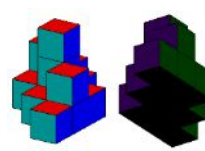


Segundo módulo.

Descripción



Tercer módulo



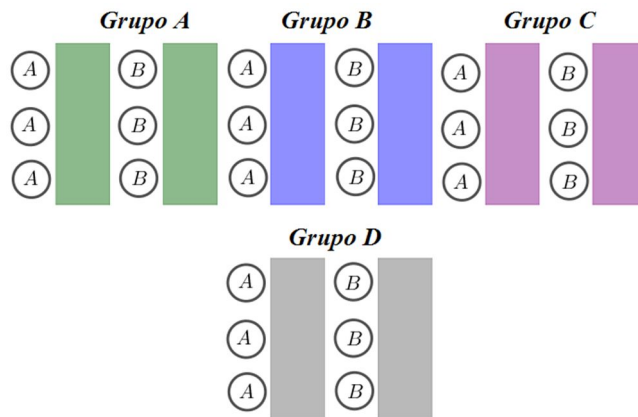
Cuarto modulo

Al tener cada equipo el multicubo, la maestra les pregunto por la ubicación de ellos respecto al módulo para ver el color rojo, azul claro y oscuro, negro y verde. Luego se les pidió dibujar la vista inferior y la de color verde. Finalizó la sesión repasando las diferentes vistas de los módulos.

Sesión	Tercera
Fecha	09-11-2017
Alumnos asistentes	24.
Duración	40 minutos.

Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Relacionar el uso de palabras de dirección con el movimiento de cubos. • Interpretar indicaciones dadas para la réplica de un módulo.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Indicar posición y orientación de los cubos. 2. Construir el multicubo a partir de las indicación es dadas.

Luego de organizado el grupo, la maestra solicita la organización por equipos de la siguiente manera:



Descripción

Los que están marcado con la letra B fueron los que dieron indicaciones y con la letra A, quienes las siguieron para construir los módulos. Lo que esta distinguido por colores son las mesas utilizadas por cada equipo. Tanto los que daban como quienes seguían las indicaciones miraban hacia el frente (para lectura de la representación, miraban hacia la derecha), es decir que quien construía no podía ver el módulo que estaba replicando. Al terminar de dar indicaciones compararon las construcciones obtenidas con las réplicas y la maestra cuestionada a cada equipo sobre por qué las diferencias en las construcciones.

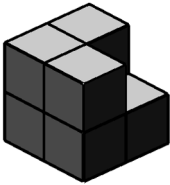
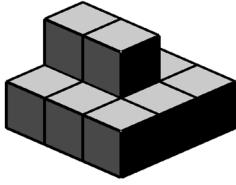
La socialización en esta sesión se dio por equipos reflexionando sobre las indicaciones que faltaron precisar para que se lograra la réplica del módulo.

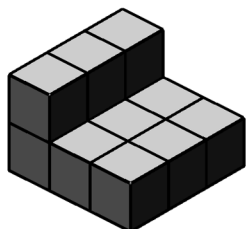
En esta actividad los estudiantes identificaron y relacionaron con su representación bi- y tridimensional, la vista isométrica, superior e inferior. Tuvieron dificultades en reconocer vistas laterales dado que implicaba comprender y relacionar la ubicación de cada vista del módulo con el punto de referencia de quien observaba. Al dar indicaciones de construcción faltó más precisión, pero se

avanzó en relación con las anteriores sesiones dado que se utilizaban palabras de dirección y proximidad.

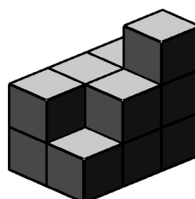
Tabla 4.7.

Implementación cuarta actividad.

Sesión	Primera
Fecha	13-11-2017
Alumnos asistentes	25.
Duración	1 hora.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer la forma de cada policubo • Comparar las formas de los policubos para ensamblarlas. • Interpretar el significado de los distintos tonos de color gris en las representaciones bidimensionales. • Relacionar los objetos con las representaciones bidimensionales. • Identificar que las representaciones tridimensionales están en escala y se relacionan con las distintas construcciones y policubos. • Visualizar policubos en las representaciones bidimensionales. • Rotar piezas en el espacio para completar una configuración determinada.
Actividades	1. Construir el objeto indicado en la representación tridimensional utilizando algunos policulos.
Descripción	<p>Organizado el grupo por equipos, la maestra repartió los cubos soma a cada estudiante, se permitió cinco minutos para la exploración del material (no se solicitó el armado del cubo, simplemente los estudiantes rotaban y miraban la forma de los policubos) y luego se repartieron hojas de trabajo con las siguientes representaciones:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><i>Construcción A</i></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><i>Construcción B</i></p> </div> </div>



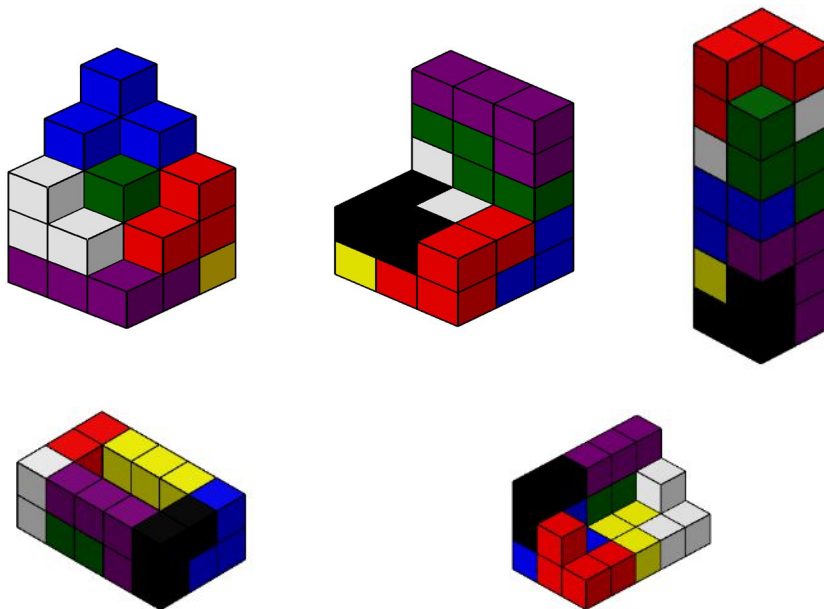
Construcción C



Construcción D

La maestra indicó que no debían usarse todas las piezas. Debían identificar cuales permitían la construcción de la representación tridimensional. Además al lado derecho de cada imagen se solicitó dibujar las piezas utilizadas. Todos los estudiantes realizaron las dos primeras construcciones, pero solo algunos lograron el armado de las dos últimas.

Sesión	Segunda
Fecha	21-11-17
Alumnos asistentes	24.
Duración	55 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer la forma de cada policubo • Comparar las formas de los policubos para ensamblarlas. • Relacionar las piezas por colores. • Relacionar los objetos con las representaciones bidimensionales. • Identificar que las representaciones tridimensionales están en escala y se relacionan con las distintas construcciones y policubos. • Visualizar policubos en las representaciones bidimensionales. • Rotar piezas en el espacio para completar una configuración determinada.
Actividades	2. Construir el objeto indicado en la representación tridimensional utilizando todos los policubos.
Descripción	La sesión empezó retomando lo realizado durante la sesión anterior, la maestra, como de costumbre les pregunto por las cosas que les generó dificultades, cómo realizaron las construcciones, a lo que algunos estudiantes respondieron que se fijaron en cómo estaban las formas y comentaron que los distintos tonos de gris les permitieron identificar las vistas. Luego la maestra repartió los mismos policubos utilizados pero pintados de distintos colores y entregó a cada uno la hoja con la construcción que debía realizar. A continuación se presentan las seis construcciones utilizadas en la clase:



Para esta actividad si se requería el uso de todas las piezas. La maestra explicó a los estudiantes que los colores de la representación iban de acorde con los de las piezas. En la socialización se cuestionó las dificultades y estrategias de construcción.

En esta actividad los estudiantes reconocieron la forma de cada pieza asignando nombres a cada una, identificaban las piezas que forman un primer, segundo o tercer nivel, según corresponda y realizaban las construcciones solicitadas, en principio, por ensayo y error. Identificaron que las representaciones bidimensionales estaban a escala y se relacionaban con los policubos. Al replicar una construcción, identificaron la pieza que iba en determinada posición y la rotaban para encajarla, reconocieron la posición de las piezas por sus colores (encima de alguna pieza, al lado) y las adecuaron de acuerdo con la forma del policubo y de la construcción final. A través del contraste de la posición, orientación de los policubos y cambio de dimensión y la invariancia entre la cantidad y formas de los policubos, los estudiantes interpretaron representaciones tridimensionales de objetos 3D.

Tabla 4.8.

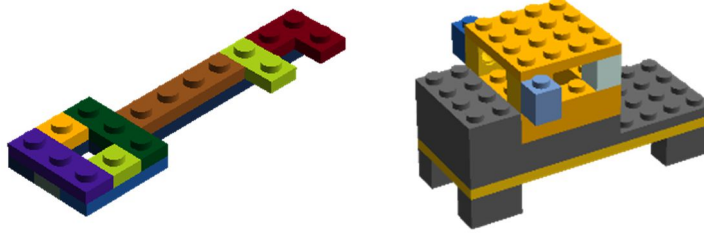
Implementación quinta actividad.

Sesión	Primera
Fecha	22-10-2017
Alumnos asistentes	23
Duración	55 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar las distintas piezas de LEGO. • Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la construcción que se quiere realizar. • Ubicar las piezas de LEGO según la construcción asignada en LDD (encima de, al lado de, ...). • Rotar piezas de LEGO para completar una construcción determinada.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Elaborar con piezas de LEGO la construcción indicada en LDD. 2. Realizar por equipos la construcción de un castillo.

Luego de organizado el grupo, se entregó un número determinado de piezas a la mitad de los integrantes de cada equipo para que realizaran la construcción indicada en la vista del programa LDD. A continuación se presenta la representación de dichas construcciones.

Descripción





La otra mitad del grupo, por equipos, debía realizar, sin seguir las indicaciones de alguna representación, un castillo. El desarrollo y desenlace de la clase giro entorno a la elaboración de las construcciones asignadas.

Sesión	Segunda
Fecha	27-11-17
Alumnos asistentes	22
Duración	45 minutos.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar las distintas piezas de LEGO. • Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la construcción que se quiere realizar. • Ubicar las piezas de LEGO según la construcción asignada en LDD (encima de, al lado de, ...). • Rotar piezas de LEGO para completar una construcción determinada.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Elaborar con piezas de LEGO la construcción indicada en LDD. 2. Realizar por equipos la construcción de un parque de diversiones.
Descripción	Luego de organizado el grupo, se realizaron las mismas actividades de la sesión interior. Lo que cambió fue que quienes hicieron construcción del castillo, en esta oportunidad elaboraron con piezas de lego la construcción indicada en LDD y quienes habían utilizado el programa la sesión pasada, en esta oportunidad construyeron, por equipos, un parque de diversiones.

En esta actividad los estudiantes reconocieron que dos piezas con la misma forma se pueden diferenciar por su grosor (gruesa o delgada), interpretaron las representaciones bidimensionales para ubicar las piezas de LEGO que formaban un objeto determinado, unían las piezas por los “encajes” que tienen y según lo indicaban las representaciones tridimensionales dinámicas, realizaban las construcciones asignadas identificando las piezas que se debían usar al ver las

diferentes vistas del objeto. A través del contraste de la posición, orientación de las piezas, colores y cambio de dimensión y la invariancia entre la cantidad y formas de las piezas de LEGO, los estudiantes interpretaron representaciones tridimensionales para la elaboración de la construcción solicitada.

- **Construcción de objetos tridimensionales**

La construcción de objetos tridimensionales se trabaja en una actividad de dos sesiones. En la primera los estudiantes construyen objetos 3D con ayuda de una de las vistas en su representación tridimensional y empezaron con la construcción de un zoológico, en la segunda, continuaron con la construcción del zoológico.

Tabla 4.9.

Implementación sexta actividad.

Sesión	Primera
Fecha	30-11-17
Alumnos asistentes	24
Duración	1 hora, 20 minutos
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar las distintas piezas de LEGO. • Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la construcción que se quiere realizar. • Imaginar las piezas que componen la construcción asignada. • Rotar piezas de LEGO para completar una construcción determinada.
Actividades	<ol style="list-style-type: none"> 1. Elaborar con piezas de LEGO la construcción indicada en su representación tridimensional. 2. Realizar por equipos la construcción de un zoológico.
Descripción	Luego de organizar el grupo, se entregaron dos rompecabezas que debían armar por equipo. Al terminar, construyeron con piezas dadas la figura obtenida en el rompecabezas que contaba solo con dos vistas, por lo que los estudiantes imaginaron como y donde ubicar las piezas no vistas. Las siguientes imágenes son una representación de los rompecabezas.



Luego de armarlos continuaron con la construcción del zoológico. Hicieron las jaulas para los animales.

Sesión	Segunda
Fecha	30-11-17
Alumnos asistentes	24
Duración	2 horas
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar las distintas piezas de LEGO. • Identificar el tipo de pieza que conviene ubicar dependiendo de la construcción que se quiere realizar. • Imaginar piezas que formen el objetivo pretendido.

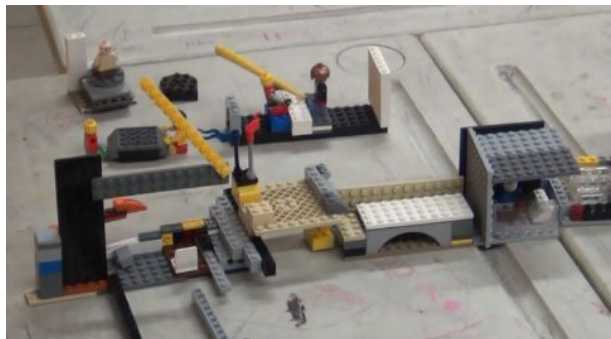
-
- Rotar piezas de LEGO para completar una construcción determinada.
-

Actividades 1. Realizar por equipos la construcción de un zoológico.

Esta sesión continuó en seguida de la anterior luego de un breve descanso. Los estudiantes siguieron en la construcción del zoológico. A continuación se presentan algunas de las construcciones realizadas.



Descripción



Construir objetos tridimensionales sin tener un mapa, unas instrucciones, una guía requiere de imaginación, de reconocer el espacio (la escala) en el cual está inmersa la construcción, visualizar objetos reales y construirlos en menor tamaño, considerar aspectos de diseño (colores), de espacio (por ejemplo, en el zoológico sitios para los transeúntes), entre otros. Estas acciones fueron las que

desarrollaron los estudiantes con la última lección, experimentaron la construcción de objetos pertenecientes a un mismo entorno y con trabajo en equipo, armaron un zoológico que tenía cámaras de seguridad, plazoletas de comida, baños, jaulas para los animales, entre otros.

Anexo 10. Resultados diagnóstico grupo de control

Objetivos de los puntos	Respuestas
1. Reconocer vistas de un módulo multicubo	V 11 I 14
2. Remarcar triángulos en un cuadrilátero	V 19 I 6
3. Relacionar representaciones 3D	V 9 I 16
4. Identificar diferencias entre representaciones 2D	V 7 I 18
5. Reconocer marcas ocultas en representaciones 2D	V 17 I 8
6. Imaginar trazo al mover un vaso con contenido líquido.	V 13 I 2