UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

LÍNEA: EDUCACIÓN MATEMÁTICA

“Nociones de razones trigonométricas en alumnos de tercer grado de educación secundaria en México”

Tesis que para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta:

Ana Belem Valencia Salazar

Director de tesis

Dr. Rodrigo Cambray Núñez

Ciudad de México Junio de 2019

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

AGRADECIMIENTOS

A mi familia

A papá hiporugoso

Al Dr. Cambray por su paciencia

RESUMEN

Para esta tesis se llevó a cabo una investigación educativa sobre lo que alumnos de tercer grado de educación secundaria entendían, comprendían o conceptualizaban en cuanto a razones trigonométricas, después de haber trabajado este tema en su salón de clases. Es en este grado escolar del Sistema Educativo Nacional de México donde por primera vez se aborda el estudio de la trigonometría. Se recurrió a 172 alumnos distribuidos en 8 grupos; 3 de estos grupos participaron en un estudio piloto, y el resto participó en el estudio definitivo. En esta investigación se utilizó un cuestionario de 8 preguntas sobre relaciones entre los lados de triángulos rectángulos y sus ángulos agudos, así como la solución de un problema. Además, se utilizó una entrevista semiestructurada aplicada a 12 de los estudiantes, seleccionados con base en sus respuestas del cuestionario. También se entrevistó a una de las dos profesoras de los grupos participantes, dando énfasis a sus consideraciones de cómo debe abordarse el tema de razones trigonométricas con los alumnos. Cabe señalar que en esta investigación se tuvo como un referente los Planes y Programas de Estudio de 2011 de la Secretaría de Educación Pública, basados en competencias. Los análisis de los datos permitieron identificar adicionalmente dificultades y confusiones de los estudiantes en su aprendizaje de las razones trigonométricas.

El tema de razones trigonométricas en educación secundaria ha sido poco estudiado; algunas investigaciones y estudios realizados dentro de este campo de las matemáticas dan cuenta de ello a nivel bachillerato y superior; el tratamiento que se le da a las razones trigonométricas es con respecto a una función y no como una razón, además de que se centran únicamente en la parte matemática y algorítmica de las mismas dejando de lado los conocimientos previos de los estudiantes, así como las nociones que tienen del tema después de haber sido aprendido.

Hay pocos antecedentes, de investigación educativa sobre el aprendizaje de las razones trigonométricas en educación secundaria quizás a causa de que en planes y programas de estudio anteriores al de 2011 generalmente se encontraba en el último bloque de conocimientos para ser aprendidos; se dejaba la responsabilidad en bachillerato e inclusive en la universidad de profundizar en el tema en términos de funciones; por lo tanto las investigaciones se centran poco más en esos niveles subsecuentes a la educación secundaria.

Con base en la revisión de literatura de educación matemática, en la tesis se da énfasis a cuestiones relacionadas con términos como conceptuación y conceptualización para la descripción y análisis de tema de tesis: las nociones de razones trigonométricas en alumnos de tercer grado de educación secundaria

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Planteamiento del problema de investigación

El estudio de las razones trigonométricas en secundaria tiene pocos antecedentes, quizá esto se deba a que en planes y programas de estudio anteriores al de 2011 generalmente se encontraba en el último bloque de conocimientos para ser aprendidos; dejando la responsabilidad en bachillerato e inclusive en la universidad de profundizar con el tema en términos de funciones. Por lo tanto las investigaciones se centran poco más en esos niveles subsecuentes a la educación secundaria.

El contenido matemático de educación secundaria que se aborda en esta tesis es *razones trigonométricas.* En mi experiencia como docente con alumnos de educación secundaria, en este tema se abordan algunas nociones básicas como seno, coseno, y tangente. Estas nociones son un antecedente, para desarrollarlas ampliamente en un nivel educativo superior. Sin embargo, al parecer, los alumnos de secundaria a mi cargo no lograban interiorizar y aplicar dichas nociones básicas en la actividad escolar, y así también en la educación media básica y superior. Parecía que había una desvinculación entre lo que se enseñaba en secundaria y lo que se enseñaba en el nivel superior y desvinculaban las nociones básicas que aprendían en secundaria con lo que aprendían posteriormente.

El tratamiento que se le da a las razones trigonométricas en esos niveles, es con respecto a una función y no como una razón, además de que la enseñanza se centra únicamente en la parte matemática y algorítmica de las mismas dejando de lado los conocimientos previos de los estudiantes, así como las nociones que tienen del tema después de haber sido aprendido.

Es por ello que me di a la tarea de investigar qué es lo que los alumnos de tercer grado de educación secundaria entienden, comprenden o conceptualizan sobre lo que aprenden en la escuela secundaria sobre *razones trigonométricas*.

Los objetivos de esta investigación son:

- Explorar cómo conceptúan alumnos de tercer grado de educación secundaria en México las razones trigonométricas.
- Identificar qué dificultades enfrentan alumnos de tercer grado de educación secundaria en México en su conceptualización de las razones trigonométricas.

Preguntas que guiaron la investigación

- ¿Cómo conceptualizan las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente estudiantes de tercer grado de educación secundaria en México?
- ¿Cuál es la significación de las razones trigonométricas en estudiantes de tercer grado de educación secundaria en México?
- ¿Identifican las relaciones entre seno de un ángulo y el coseno del mismo ángulo, en un triángulo rectángulo?

- ¿Qué nociones previas debe tener el alumno para poder comprender los conceptos de seno, coseno y tangente en trigonometría?
- ¿Qué conjunto de herramientas necesita el estudiante de matemáticas en secundaría para poder comprender las razones trigonométricas?

Los instrumentos utilizados en esta investigación educativa fueron los siguientes.

1.- Cuestionarios aplicados a alumnos de cuatro grupos de tercer grado de educación secundaria, después de que la profesora titular de los grupos haya abordado el contenido de razones trigonométricas.

2.- Entrevista semiestructurada con alumnos para indagar cómo conceptúan las razones trigonométricas después de haber desarrollado el tema de aprendizaje en conjunto con la profesora.

Los cuestionarios para los alumnos incluyeron preguntas acerca de los conceptos de razones trigonométricas y de las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo y uno de los ángulos de ese triángulo. Con las preguntas del cuestionario se indagó cómo conceptuaban el triángulo rectángulo, su conceptuación de las relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo y los catetos con la hipotenusa, así como la identificación de los ángulos del triángulo rectángulo.

Se pidió a los alumnos que resolvieran problemas donde se aplican razones trigonométricas y que explicaran los diferentes usos de estas. Se identificó cómo utilizan el lenguaje relacionado con las razones trigonométricas para comunicase entre ellos al dar explicaciones a alguno(s) de sus compañeros.

La entrevista con los alumnos nos ayudará para realizar la clasificación de las dificultades que tienen los alumnos al conceptuar las razones trigonométricas, posterior al desarrollo del tema por parte de la profesora titular. Se establecerán categorías para analizar las respuestas por parte de los alumnos acerca de las razones trigonométricas.

Descripción de cada capítulo

La presente tesis se divide en seis capítulos: el primero de ellos es esta "Introducción", seguido del capítulo II "Aprendizaje de la trigonometría en la educación secundaria en México, desde1975" que presenta un recorrido histórico del tema. El capítulo III "La trigonometría en planes y programas de estudio de la educación secundaria en México, 2006 y 2011" en el marco en el cual se presenta un análisis de los planes de estudio. El cuarto capítulo se denomina "Metodología" describe cómo se procedió para obtener los datos, el quinto capítulo "Análisis de datos", concluyendo con el capítulo VI "Conclusiones".

El capítulo I trata de los motivos por los cuales se decidió realizar este proyecto. Se incluye una breve descripción del procedimiento que se siguió para recabar evidencias sobre lo que los alumnos conceptualizaban sobre razones trigonométricas con base en las preguntas que guiaron esta investigación. Enseguida se describe cada uno de los demás capítulos que conforman esta tesis.

En los capítulos II y III se da un panorama general sobre el contexto y las características de cada uno de los planes de estudio de educación secundaria de la SEP que sirvieron de base para esta investigación: Programas de 1975, Planes y programas de 1993, Programas de 2006 y Programas de 2011. Posteriormente se analiza cada uno de estos programas y planes de estudio. Se analizan materiales educativos que se les proporcionaban a los docentes para la impartición de sus clases en educación secundaria: libro del maestro, fichero de actividades didácticas y planes de clase. Se analizan los conceptos de *trigonometría* como son: el *seno*, el *coseno* y la *tangente* de un triángulo rectángulo, así como los diferentes materiales que se utilizan para la evaluación de las razones trigonométricas, incluyendo los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (Excale) y la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE). En el capítulo II se incluye además una revisión y descripción de publicaciones de investigaciones educativas sobre la enseñanza de razones trigonométricas.

El capítulo IV describe la metodología utilizada para esta investigación, se explica el contexto de la investigación, se describen las características de los participantes involucrados y los instrumentos utilizados; se llevó a cabo un estudio piloto para lograr un mejor diseño del cuestionario. Se explica el diseño de entrevista semiestructurada para alumnos de tercer grado de educación secundaria de acuerdo con su desempeño en el cuestionario y la forma en que se agruparon y seleccionaron los candidatos a entrevista. También se explican las categorías de análisis de datos surgidas de las respuestas al cuestionario aplicado a los alumnos de tercer grado de secundaria, esto con la finalidad de indagar cómo conceptúan las razones trigonométricas los alumnos después de haber desarrollado el tema de aprendizaje.

En el capítulo V se describen los resultados del análisis de las respuestas al cuestionario, así como las categorías en las que se agruparon los datos, se realiza un acercamiento a lo que los alumnos conceptúan sobre las razones trigonométricas.

En el capítulo VI se realizan las conclusiones del trabajo desarrollado.

CAPÍTULO II

APRENDIZAJE DE LA TRIGONOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MÉXICO, DESDE1975

En este trabajo se analizan las nociones que tienen alumnos de tercer grado de educación secundaria en México acerca de las razones trigonométricas (*seno, coseno y tangente*), después de haber sido abordado el tema por parte de su profesor(a). Así, el contenido matemático central de esta tesis es la trigonometría. A continuación se presenta en este capítulo un breve análisis del contexto de la trigonometría y su introducción en los programas de estudio de matemáticas para la educación secundaria en México, de 1975 y 1993. En el siguiente capítulo III, se analizarán los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, éste último aún vigente.

Junto con el contexto de la trigonometría y los programas de estudio, se presenta un análisis de materiales editados por la SEP, como el Libro del Maestro matemáticas secundaria (LMM), el Fichero de actividades didácticas matemáticas (FADM), Planes de clase (PC) y las pruebas estandarizadas ENLACE, y EXCALE. Antes, en la sección que sigue se presenta una breve síntesis de algunas publicaciones relacionadas con el aprendizaje de la trigonometría.

Investigaciones educativas sobre el aprendizaje de la trigonometría en la educación media

En este capítulo se describen algunos de los estudios e investigaciones que se revisaron y que fueron útiles para el desarrollo del presente trabajo de investigación en el tema de razones trigonométricas en educación secundaria. Como se ha mencionado, este tema ha sido poco estudiado; algunas investigaciones y estudios realizados dentro de este campo de las matemáticas dan cuenta de ello a nivel bachillerato y superior. El tratamiento que se le da a las razones trigonométricas en algunos de estos documentos, es con respecto a una función y no como una razón, en otros como el del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM, SUMEM) se describen los estándares para geometría y se dan algunas consideraciones para el tratamiento del tema de razones trigonométricas. Otros estudios se centran únicamente en la parte matemática y algorítmica de las razones trigonométricas dejando de lado los conocimientos previos de los estudiantes, así como las nociones que tienen del tema después de haber sido aprendido.

El estudio de Kee, Mura y Dionne (1996), sobre *la comprensión de los conceptos de seno y el coseno de los alumnos de educación media superior,* se informa que alumnos de universidad cometen una variedad significativa de errores al resolver problemas en los que se utiliza la trigonometría. Algunos autores que se citan en este estudio mencionan que esto se debe a “un malentendido o, al menos, una comprensión incompleta del concepto” (Kee, 1996, p. 19). En este sentido, los autores investigan el estado del conocimiento en un momento dado, así como la “comprensión de los conceptos de seno y coseno”.

Todos los estudiantes sabían qué son el dominio y el rango de una función, y tenían un conocimiento práctico de los conceptos de periodicidad y de función de crecimiento o decrecimiento. Los que no podían formular una definición para estos conceptos tendían a describir una acción o un proceso. Algunas de las dificultades que presentaron fueron las siguientes.

- No pudieron establecer el vínculo entre la gráfica y la ecuación de la función seno (o coseno).
- Se formularon cuatro representaciones de los conceptos *seno* y *coseno*.
- Un método de dividir la longitud de un lado de un triángulo rectángulo entre otro para obtener el seno o el coseno de un ángulo agudo. (A veces, los estudiantes aplican este proceso indebidamente a triángulos que no son rectángulos o a ángulos que no son agudos.)
- Las coordenadas cartesianas de un punto de una circunferencia de radio r=1 con centro en el origen son, para los estudiantes, el coseno y el seno del "punto".
- Las funciones seno y coseno en una calculadora proporciona, de acuerdo con los estudiantes, un número que expresa la medida de un ángulo.
- Las curvas de apariencia ondulada característica que son los gráficos de las funciones seno y coseno. Algunos estudiantes admitieron que estas curvas continuaron representando las mismas funciones cuando eran girados o de escala.

- Los estudiantes también sabían una quinta representación, la forma de la ecuación, pero rara vez recurrieron a ella y eran propensos a fallar cuando lo hicieron. (Kee, 1996, p. 25)

Esta observación condujo a los autores de este artículo (Kee, 1996) a darse cuenta de que el uso de la palabra "trigonometría" no es trivial.

En el documento “Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM”, emitido por el SUMEM el 31 de enero de 2014 (UNAM, 2014), se sintetiza el trabajo de más de un año de un conjunto de profesionales universitarios preocupados por los bajos resultados de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles. En dicho documento se intentan resolver algunas preguntas ¿Cómo enseñar las matemáticas? ¿Qué (conocimientos) debe tener el egresado de bachillerato? ¿Por qué estudiar matemáticas? Para contestar la segunda pregunta, se hace la descripción de los *estándares disciplinarios* que son “los conocimientos, las aptitudes y las habilidades matemáticas que deberían ser parte del acervo tanto estudiantil como docente” (UNAM, 2014, p. 14).

En el área de geometría, y en específico en relación con el tema de trigonometría, el estándar disciplinar es el siguiente.

> *El triángulo y su geometría*. Conocer las propiedades de triángulos rectángulos, en particular el Teorema de Pitágoras, las razones trigonométricas, las identidades pitagóricas y su uso en el planteamiento y la

resolución de problemas. Conocer y utilizar las leyes de senos y cosenos en la solución de problemas. (UNAM, 2014, p. 49)

Las estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje en el aula son una síntesis de varios enfoques de diversos autores en que se aborda el proceso de enseñanza-aprendizaje y el tipo de actividades que profesores y estudiantes pueden realizar para alcanzar los estándares (UNAM, 2014, cap.5). Se describe inicialmente lo que es hacer matemáticas en términos generales. Se toman algunos estándares por considerar que se refieren a la forma en que se pueden abordar los problemas.

- Reconocer si en un problema o situación problemática puede aplicarse un razonamiento lógico, cuantitativo o geométrico.
- Considerar si se puede aplicar un conocimiento matemático previo a esta nueva situación.
- Una vez que se tenga una solución para el problema, buscar otros problemas o situaciones similares en donde se pueda aplicar el mismo procedimiento o idea.
- Generar una afirmación lógica aplicable en forma general a varios de los casos contemplados. (UNAM, 2014, p. 89)

En cuanto a las estrategias didácticas se enfatiza que independientemente del modelo pedagógico que cada docente desea seguir al preparar su clase hay algunos principios generales que se han probado y son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas y están relacionados con acciones que el docente promueve:

- Tareas de aprendizaje que lleven al estudiante a tener curiosidad intelectual por el tema, motivación para aprender a negociar y construir significado, integrando, modificando y desechando conocimientos previos, según sea necesario.
- La retroalimentación oportuna y efectiva sobre los desempeños del estudiante, generando cuestionamientos que le permitan la reflexión. (UNAM, 2014, p. 90)

Se incluye una lista de quince recomendaciones concretas derivadas de la investigación educativa, en los que se retoman los más variados enfoques pedagógicos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (UNAM, 2014, pp. 90-92).

Así, en este documento de la UNAM, (2014) se muestra que la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría continúa presente en el bachillerato y que necesariamente requiere de los conocimientos previos sobre trigonometría que se aprenden en la educación secundaria, además de una serie de vinculaciones cognitivas por parte del estudiante para su aprendizaje, aunado a la preparación del docente en el área de matemáticas para su impartición.

Principios y Estándares para la Educación Matemática (*National Council of Teachers of Mathematics*)

De acuerdo a los Principios y Estándares para la Educación Matemática escolar que emite la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) para la etapa 9-12, en la escuela secundaria, los estudiantes: “Empezarán a comprender aspectos de la forma y la estructura matemática. Deberán ver la interacción del Álgebra, la Geometría, la Estadística, la Probabilidad y la Matemática Discreta, y los distintos modos de representar los fenómenos matemáticos.” (NCTM, 2000, p. 291)

Se espera que todos los alumnos estudien matemáticas durante los últimos cuatro años que permanecen en la educación preuniversitaria, tanto si piensan seguir estudiándolas, como si han decidido entrar en el mundo del trabajo o iniciar otros estudios. En este sentido laboral se hace referencia a una cita de Hoachlander (1997, p. 135) que dice:

> La mayoría de las matemáticas avanzadas de la enseñanza secundaria tiene rigurosas e interesantes aplicaciones en el mundo laboral. Por ejemplo: los diseñadores gráficos emplean rutinariamente geometría. Los carpinteros aplican principios de trigonometría es sus trabajos, así como los agrimensores, los topógrafos, los navegantes, los arquitectos… (NCTM, 2000, p. 292).

Es así cómo desde una perspectiva laboral se le da importancia a la trigonometría que se enseña en la escuela secundaria al hacer conexiones entre la teoría, la práctica y las experiencias matemáticas para resolver problemas desde una amplia gama de contextos.

En geometría, para la etapa 9-12, se consideran los siguientes estándares como elementos que el estudiante debe aprender en relación con la trigonometría (véase el cuadro 2.1).

De acuerdo con estos estándares “Los estudiantes deberían llegar a la escuela secundaria comprendiendo las propiedades de los objetos geométricos básicos y las relaciones entre ellos. Después, éste conocimiento puede aplicarse y aplicarse de varias formas. Los alumnos se Secundaria deberían ir usando progresivamente el razonamiento deductivo para establecer o refutar conjeturas, y deberían ser capaces de usar el conocimiento establecido para deducir información sobre otras situaciones” (NCTM, 2000, p. 314).

Cuadro 2.1. Síntesis de estándares para geometría de la NCTM

Geometría para la etapa 9-12	Expectativas
Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas	- Analizar las propiedades y determinar los atributos de objetos de dos y tres dimensiones; - Explorar las relaciones (incluyendo la congruencia y la semejanza) entre objetos geométricos de dos y tres dimensiones, formular y comprobar conjeturas y resolver problema relativos a ellos; - Establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas, y criticar los argumentos de los otros; - Usar relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas angulares.
Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación	- Usar coordenadas cartesianas y otros sistemas de coordenadas, como el de navegación, el de coordenadas polares o el de coordenadas esféricas, para analizar situaciones geométricas
Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas	- Comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones de

	objetos en el plano, utilizando croquis, coordenadas, vectores, notación funcional y matrices.
Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas	- Usar modelos geométricos para facilitar la comprensión y contestar preguntas relativas a otras áreas de las matemáticas - Utilizar ideas geométricas para resolver problemas y obtener ideas de otras disciplinas y áreas de interés, como el arte y la arquitectura

Previamente se anota que "La Geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo y ver la belleza en sus estructuras. [...] Las propiedades de los objetos geométricos, las relaciones trigonométricas y otros teoremas geométricos proporcionan recursos adicionales para resolver problemas matemáticos" (NCTM, 2000, p. 313).

La trigonometría en la educación secundaria en México de acuerdo con documentos oficiales de la SEP

Desde los primeros meses de 1989 se inició la etapa de reestructuración de los Programas para la educación secundaria, los cuales estaban vigentes desde 1975. El Programa para la Modernización Educativa 1989-1994, resultado de una etapa de consulta iniciada en 1989, estableció como prioridad la renovación de los contenidos y los métodos de enseñanza, el mejoramiento de la formación de maestros y la articulación de los niveles educativos que conforman la educación básica (SEP, 1993b, p. 11).

Así, el sistema educativo nacional de los Estados Unidos Mexicanos (SENM) se ha ido transformando a lo largo de las últimas décadas. Hasta antes de mayo de 1992, sólo se consideraba obligatorio el nivel de educación primaria, siendo opcionales el nivel preescolar y el de educación secundaria. En el sexenio de 1988 a 1994, siendo presidente de la república Carlos Salinas de Gortari y secretario de educación pública Ernesto Zedillo Ponce de León, se firmó el 18 de mayo de 1992 el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica y Normal (ANMEB). Ahí se fijaron los objetivos para mejorar la educación básica y normal, lo cual se enuncia claramente en la introducción de dicho acuerdo en su primer párrafo:

> El desarrollo al que aspiramos los mexicanos entraña fortalecer la soberanía y la presencia de nuestro país en el mundo, una economía nacional en crecimiento y con estabilidad, y una organización social fincada en la democracia, la libertad y la justicia. Estos son objetivos que exigen una educación de alta calidad, con carácter nacional y con capacidad institucional que asegure niveles educativos suficientes para toda la población. Asimismo, precisan la reafirmación y el acrecentamiento del compromiso del Estado mexicano con la educación pública. (SEP, 1992, p. 1)

México estaba experimentando cambios internos en todos los ámbitos de su estructura política, económica, laboral y educativa. El sexenio 1988–1994 se caracterizó por convocar a las empresas internacionales para que invirtieran en México. El presidente Carlos Salinas de Gortari apoyó las iniciativas que daban las condiciones necesarias para que las empresas transnacionales abrieran sucursales dentro del mercado mexicano y así México tendría una mayor presencia a nivel mundial. Es así como se firman diversos acuerdos de cooperación en materia educativa y se suscribe el ANMEB, que para ese momento respondía a la política que se estaba siguiendo en materia educativa en México.

> El Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica recoge el compromiso del Gobierno Federal, de los gobiernos estatales de la República y del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación, de unirse en un gran esfuerzo para que se extienda la cobertura de los servicios educativos, se eleve la calidad de la educación a través de una estrategia que atienda a la herencia educativa del México del siglo veinte; que pondere con realismo los retos actuales de la educación, que comprometa recursos presupuestales crecientes para la educación pública, y que se proponga la reorganización del sistema educativo así como la reformulación de los contenidos y materiales educativos, y la revaloración de la función magisterial. (SEP 1992, p. 2)

Sobre “la revaloración de la función magisterial”, Ornelas (2012, pp. 41–42) informó que el programa *Carrera magisterial* “significó el establecimiento de un mecanismo de promoción horizontal o de pago por méritos, pero administrada por un grupo SEP-SNTE, donde el sindicato, mediante la colonización fijó las reglas del juego".

Es así como el ANMEB de 1992, la reforma educativa de 1993, y las subsecuentes reformas curriculares de 2006 y 2011 llevan una misma línea: la modernización y renovación de los planes y los programas de estudio, producción de nuevos materiales educativos, evaluación de la calidad educativa de maestros y alumnos, una profesionalización de los docentes en sus conocimientos y una pedagogía acorde con las tendencias globales en cuestión de estándares educativos. Con ello se esperaría incrementar la calidad de la educación en México.

Dentro de todo este panorama, los planes y programas de estudio se han modificado en sus partes sustanciales a partir de 1975, "Programas para la educación media básica" (PEMB). Actualmente ese nivel educativo se denomina educación secundaria, y desde el ciclo escolar que inició en septiembre de 1992, forma parte de la educación básica obligatoria, según está establecido en el ANMEB, promulgado oficialmente el 4 de marzo de 1993.

Contexto del plan y programas de estudio 1993

El proceso de cambio y modernización que en la década de 1990 México atravesaba, afectó diversos ámbitos nacionales; uno de ellos, el educativo. El cambio principal que se realizó, fue la reforma al artículo tercero constitucional en el cual se establecía el carácter obligatorio de la educación secundaria; para ello se propone un cambio en la estructura y política educativa como lo suscribe la ANMEB un año antes a 1993. Se realiza entonces la reformulación de los programas de estudio para la educación básica de 1975 al plan y programas de estudio de 1993.

Durante el periodo en el que el plan y programas de estudio 1993 se mantuvo vigente, la línea a seguir fue de una educación básica obligatoria, basada principalmente en adquirir y desarrollar los conocimientos, habilidades, los valores y las competencias básicas para seguir aprendiendo a lo largo de la vida.

La reforma de 1993 planteó una formación general, única y común para todos los alumnos; sin embargo, en la práctica no se ha logrado una efectiva vinculación con los niveles previos de la educación básica (SEP, 2006b, p. 8).

Contexto de los programas de estudio 2006

La Reforma a la educación básica de 2006 surge como resultado de los modelos económicos y políticos globales. México toma políticas educativas de países de primer mundo y recomendaciones de organismos como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Inicialmente la reestructuración de los planes de estudio para secundaria 2006 nace con el eslogan de Reforma Integral a la Educación Secundaria (RIES), dos años después sólo se queda con el nombre de Reforma de Educación Secundaria (RES).

Con la RES, la educación básica se articula en los niveles de educación preescolar, primaria y secundaria, "asegurando la continuidad y congruencia de propósitos y contenidos en los referidos niveles educativos que conforman la educación básica". Así se enuncia en el Acuerdo Secretarial 384 publicado en el Diario Oficial de la Federación el 26 de mayo de 2006.

Uno de los cambios importantes en los planes de estudio de 2006 fue precisamente la articulación de la educación básica, “para configurar un solo ciclo formativo con propósitos comunes, prácticas pedagógicas congruentes, así como formas de organización y de relación interna que contribuyan al desarrollo de los estudiantes y a su formación como ciudadanos democráticos” (SEP, 2006b, p. 8). La educación básica ahora comprendería los niveles de preescolar, primaria y secundaria, volviéndose obligatoria para todos los mexicanos, y los planes de estudio de estos tres niveles se vincularían uno con otro.

Así, se inicia la educación por competencias. Esto se basa en los estándares que emite en los EUA, en relación a la enseñanza de las matemáticas el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés). La educación se define, de acuerdo con las edades de los estudiantes, y los niveles de dominio y destreza que deben alcanzar.

La SEP en México elabora una serie de materiales de apoyo para el trabajo docente:

a) Documentos curriculares básicos (plan de estudios y programas de cada asignatura).
b) Guías para orientar el conocimiento del plan de estudios y el trabajo con los programas.
c) Antologías de textos que apoyan el estudio con las guías, amplían el conocimiento de los contenidos programáticos y ofrecen opciones para seleccionar otras fuentes de información.

d) Materiales digitales con textos, imágenes y sonido que se anexarán a algunas guías y antologías. (SEP, 2008, p. 5)

La SEP elaboró 200 planes de clase, cada uno consiste de una secuencia didáctica, sesión por sesión, para cada uno de los contenidos del Programa de estudios de matemáticas, ya que se determinó el ciclo escolar fuese de 200 días hábiles.

Contexto del plan y programas 2011

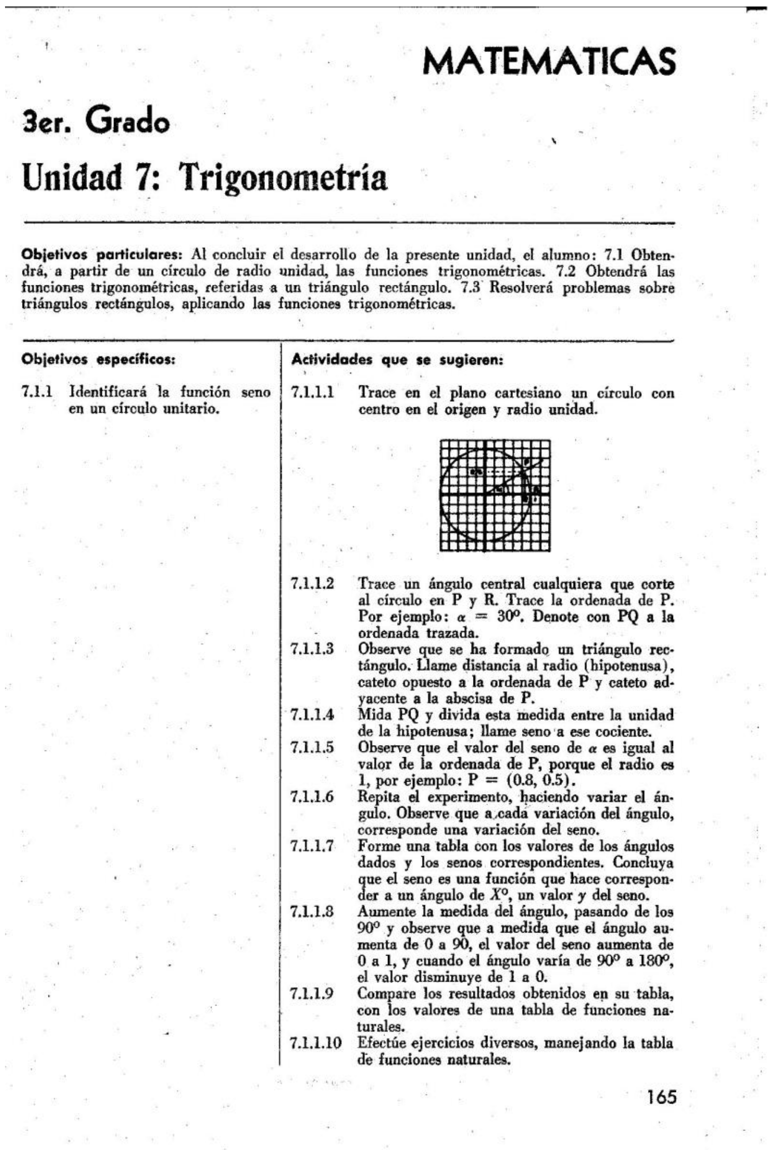
La elaboración de los programas de estudio 2011 se realizó durante la administración federal del segundo sexenio (2006-2012) en el que el Partido Acción Nacional (PAN) estuvo a cargo del poder ejecutivo. Entre sus políticas públicas desarrolló un plan estratégico para “elevar la calidad educativa”, la cual era una de sus principales metas a largo plazo. Así, “La RIEB culmina un ciclo de reformas curriculares en cada uno de los tres niveles que integran la Educación Básica, que inició en 2004 con la Reforma de Educación Preescolar, continuó en 2006 con la de Educación Secundaría y en 2009 con la de Educación Primaria” (SEP a, 2011, p. 9).

Y aún fueron más lejos al continuar el plan estratégico que se venía gestando desde los planes de 2006 para que la política pública pudiera responder a todos en el sector educativo “… y de la sociedad en su conjunto, con una perspectiva abierta durante los próximos 20 años; es decir, con un horizonte hacia 2030 que oriente el proyecto educativo de la primera mitad del siglo XXI)” (SEP, 2011 a, p. 15).

La trigonometría en el programa de estudios de la educación media básica de 1975

El programa de estudios de 1975 se integraba en dos estructuras académicas distintas: asignaturas y áreas. En la primera estructura académica tenemos: español y matemáticas, en la segunda: ciencias naturales (física, química y biología) y ciencias sociales (historia, geografía y civismo). Cada una de estas estructuras a su vez era impartida como materias en los salones de clase por parte de los profesores que las enseñaban en los grados que conformaban la educación media básica (EMB). Cada materia tenía sus particularidades de acuerdo con la naturaleza misma de lo que se debía enseñar. En el caso específico de la asignatura de matemáticas, el programa de estudios correspondiente al 3.er grado de educación secundaria incluía el estudio de la trigonometría.

El programa de matemáticas de tercer grado de la educación secundaria se encontraba dividido en ocho unidades: 1) lógica y conjuntos, 2) factorización [sic], 3) ecuaciones de segundo grado, 4) triángulos y cuadriláteros, 5) círculo, 6) semejanza, 7) *trigonometría*, 8) estadística y probabilidad. La trigonometría ha sido incorporada en los programas de educación al menos aproximadamente en los últimos cincuenta años. Su aprendizaje se ha considerado pertinente para el tercer grado de educación secundaria, nivel previo al inicio de la educación media superior en cualquiera de sus modalidades educativas.



MATEMATICAS

3er. Grado

Unidad 7: Trigonometría

Objetivos particulares: Al concluir el desarrollo de la presente unidad, el alumno: 7.1 Obtendrá, a partir de un círculo de radio unidad, las funciones trigonométricas. 7.2 Obtendrá las funciones trigonométricas, referidas a un triángulo rectángulo. 7.3 Resolverá problemas sobre triángulos rectángulos, aplicando las funciones trigonométricas.

Objetivos específicos:

7.1.1 Identificará la función seno en un círculo unitario.

Actividades que se sugieren:

7.1.1.1 Trace en el plano cartesiano un círculo con centro en el origen y radio unidad.

7.1.1.2 Trace un ángulo central cualquiera que corte al círculo en P y R. Trace la ordenada de P. Por ejemplo: $\alpha = 30^o$. Denote con PQ a la ordenada trazada.

7.1.1.3 Observe que se ha formado un triángulo rectángulo. Llame distancia al radio (hipotenusa), cateto opuesto a la ordenada de P y cateto adyacente a la abscisa de P.

7.1.1.4 Mida PQ y divida esta medida entre la unidad de la hipotenusa; llame seno a ese cociente.

7.1.1.5 Observe que el valor del seno de α es igual al valor de la ordenada de P, porque el radio es 1, por ejemplo: P = (0.8, 0.5).

7.1.1.6 Repita el experimento, haciendo variar el ángulo. Observe que a cada variación del ángulo, corresponde una variación del seno.

7.1.1.7 Forme una tabla con los valores de los ángulos dados y los senos correspondientes. Concluya que el seno es una función que hace corresponder a un ángulo de X^o, un valor y del seno.

7.1.1.8 Aumente la medida del ángulo, pasando de los 90^o y observe que a medida que el ángulo aumenta de 0 a 90, el valor del seno aumenta de 0 a 1, y cuando el ángulo varía de 90^o a 180^o, el valor disminuye de 1 a 0.

7.1.1.9 Compare los resultados obtenidos en su tabla, con los valores de una tabla de funciones naturales.

7.1.1.10 Efectúe ejercicios diversos, manejando la tabla de funciones naturales.

165

Figura 2.1. Unidad de trigonometría para la educación media básica, 3.er grado (SEP, 1975, p. 165)

En la figura 2.1 se muestra la primera página de la unidad 7 correspondiente al tema de trigonometría; nótese que se utilizaba la palabra “funciones” en los tres objetivos particulares 7.1, 7.2 y 7.3, antes de la palabra “trigonometría”; es decir, se consideraba a las funciones trigonométricas y al círculo unitario ¨[“círculo de radio unidad”] como un aprendizaje inicial para desarrollar, de acuerdo con los objetivos particulares 7.2 y 7.3, las funciones trigonométricas referidas a un triángulo rectángulo y su aplicación en la resolución de problemas.

De las actividades propuestas para el logro de los objetivos específicos 7.1.1, 7.1.2 y 7.1.3, se pide que tracen segmentos con el uso de compás y regla; se le da un nombre a cada uno de los segmentos construidos; o se aplica una división entre los valores de cada segmento para formar una tabla con los valores del seno, el coseno y la tangente. En el objetivo específico 7.1.1 se plantea “identificar la función seno", de ahí se deriva la construcción en forma mecánica aplicando únicamente algoritmos y observando las variaciones de los segmentos en el círculo unitario.

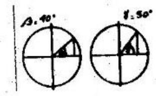
Es en los objetivos específicos 7.2.1 (véase la figura 2.2), 7.2.2 y 7.2.3 (véase la figura 2.3) que se menciona por primera vez la palabra “razón”: establecer “la razón existente entre” los lados de un triángulo rectángulo: catetos e hipotenusa; pero utilizando las definiciones dadas de las funciones seno, coseno y tangente para la construcción en el círculo unitario. Después, en los objetivos 7.3.1 y 7.3.2, se usa de nuevo el término “funciones trigonométricas” para utilizarlas y resolver problemas de todo tipo [*sic*].

Objetivos específicos:

7.1.2 Identificará la función coseno en un círculo unitario.

Actividades que se sugieren:

7.1.2.1 Trace en el plano cartesiano, un círculo con centro en el origen y radio unidad y realice actividades similares a las efectuadas para identificar el seno.



7.1.2.2 Observe que el valor del coseno de α es igual a la abscisa de P, porque el radio es 1 y que su valor disminuye cuando el ángulo varía de 0 a 180°.

7.1.2.3 Convenga que la distancia (hipotenusa) tiene un valor positivo en todos los casos.

7.1.2.4 Observe que el valor del conseno de los ángulos del segundo cuadrante es negativo.

7.1.3 Identificará la función tangente en un círculo unitario.

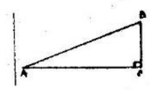
7.1.3.1 Trace en el plano cartesiano un círculo con centro en el origen y radio unidad y realice actividades similares a las efectuadas para identificar el seno y el coseno.

7.1.3.2 Observe la variación de los valores de la función tangente de 0 a 90° y de 90° a 180°.

7.1.3.3 Efectúe ejercicios referidos a las 3 funciones mediante el manejo de tablas.

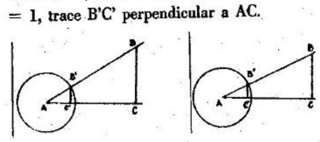
7.2.1 Establecerá la razón existente entre el cateto y la hipotenusa.

7.2.1.1 Dibuje un triángulo rectángulo en C.



7.2.1.2 Mida uno de los ángulos agudos, considere al ángulo A, y localice su cateto opuesto y la hipotenusa.

7.2.1.3 Trace un círculo con centro en A y radio AB' = 1, trace B'C' perpendicular a AC.



7.2.1.4 Observe la semejanza entre los triángulos formados. Aplique la propiedad fundamental de la semejanza: $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = K$.

7.2.1.5 Observe que, como se tomó $\overline{AB'} = 1$; $\overline{B'C'} =$ seno de alfa y sustituyendo los valores: seno $\alpha = \frac{BC}{AB}$, se obtiene la siguiente definición:

$$\text{Seno } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}.$$

166

Figura 2.2. Continuación de unidad de trigonometría para la educación media básica 3.er grado (SEP, 1975, p. 166)

Objetivos específicos:

7.2.2 Establecerá la razón existente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

7.2.3 Establecerá la razón existente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

7.3.1 Resolverá problemas en los que utilice las funciones trigonométricas.

7.3.2 Resolverá problemas de todo tipo, utilizando las funciones trigonométricas.

Actividades que se sugieren:

7.2.1.6 Concluya que la función seno es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

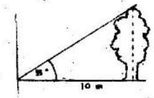
7.2.2.1 Realice actividades semejantes a las efectuadas en la razón seno (7.2.1).

7.2.2.2 Efectúe ejercicios en donde aplique las fórmulas obtenidas anteriormente.

7.2.3.1 Realice actividades semejantes a las efectuadas en la razón seno (7.2.1).

7.2.3.2 Resuelva ejercicios en los que, dada una función de un ángulo, deban calcularse las demás funciones. Aplique el teorema de Pitágoras para encontrar el lado desconocido.

7.3.1.1 Salga al patio de la escuela y calcule la altura de un árbol o un poste, con ayuda de un goniómetro o un teodolito:



7.3.1.2 Establezca la función que resuelva el problema:

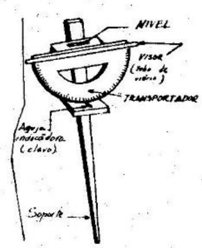
$$\frac{x}{10} = \tan. 35^\circ;\ x = (\tan. 35^\circ)\ 10.$$

7.3.1.3 Analice situaciones problemáticas, en las que aplique las funciones coseno y tangente.

7.3.2.1 Obtenga el área de un triángulo rectángulo, dados un lado y un ángulo.

7.3.2.2 Obtenga la altura de un triángulo isósceles, dados sus lados.

7.3.2.3 Obtenga el área de un polígono regular, dado el lado... etc. Se puede construir un sencillo goniómetro, como el de la figura para medir los ángulos de los problemas que se mencionan en el penúltimo objetivo.



167

Figura 2.3. Continuación de unidad de trigonometría para la educación media básica 3.er grado (SEP, 1975, p. 167)

Nótese que el triángulo rectángulo de los objetivos particulares 7.2 y 7.3 se encuentra fuera del circulo unitario y sólo se hace referencia a división (razón) entre los lados del mismo triángulo rectángulo; el círculo unitario desaparece en todos estos casos y no se vuelve a hablar de él.

En este breve análisis de la unidad 7 del programa de estudios de matemáticas de 3.er grado de educación secundaria de 1975, que estuvo vigente hasta 1993, se ha determinado que el tema de trigonometría estaba enfocado en el concepto de *función,* para después relacionarlo con el concepto de *razón,* y que para el inicio del tema de trigonometría se proponía el círculo unitario como base principal para abordar formalmente las funciones trigonométricas. Se hará una anotación importante que posteriormente nos servirá para establecer las concordancias y diferencias entre cada uno de los planes analizados en esta tesis: que los verbos utilizados en los objetivos tanto particulares como específicos son: *obtener*, *resolver*, identificar y *establecer*; todos en relación con una acción determinada de lo que debía hacer el estudiante para su aprendizaje de la trigonometría.

La trigonometría en el plan y programas de estudio de 1993

Pasaron casi 20 años (1975 a 1993) para que se realizaran cambios en los programas para la educación media básica en México. En 1993 la Secretaría de Educación Pública (SEP) publicó el documento Plan y Programas de Estudio 1993 (PPE 1993), que entró en vigor a partir del ciclo escolar 1993-1994. El siguiente cambio de programas de estudio ocurrió en 2006. En el PPE 1993, se plantearon los siguientes propósitos.

1.- Elevar la calidad de la formación de los estudiantes que han terminado la educación primaria, fortaleciendo los conocimientos y habilidades de carácter básico, además de ser integral ya que también incluye valores.

2.- Facilitar la incorporación productiva y flexible del alumno al mundo del trabajo.

3.- Actividades de actualización de los maestros en servicios (renovación de los métodos de enseñanza).

4.- Articulación de los niveles educativos que conforman la educación básica. (PPE 1993)

En el PPE 1993 se plasmó un cambio sustancial en cuanto al aprendizaje de las matemáticas: se incorporó un modelo basado en una versión del constructivismo, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y el enfoque de resolución de problemas, siendo este último una prioridad del PPE (SEP, 1993 b, p. 13). El mismo modelo se usó en la organización y estructura de los contenidos, quedando los “Programas de Estudio por Asignaturas” y “propuestas programáticas detalladas” (SEP, 1993 b, p. 12).

En el PPE 1993 aparecen cambios significativos con respecto a los programas para la educación media básica de 1975 (PEMB 1975). La estructura académica quedó organizada por asignaturas únicamente (español, matemáticas, biología, introducción a la física y a la química, física y química; y el área de ciencias sociales del PEMB 1975 se desglosó en las asignaturas de historia, geografía y civismo). Además se incluyó el estudio de una lengua extranjera (inglés o francés), así como una asignatura llamada orientación educativa. Antes (en el PEMB 1975) la estructura era por asignaturas para algunas escuelas y por áreas para otras (por ejemplo, ciencias naturales y ciencias sociales). En la organización interna del PPE 1993 cada asignatura de los tres grados de la educación secundaria iniciaba con un enfoque en el que se describía un propósito central y un propósito general, seguidos de los contenidos programáticos detallados.

Para la asignatura de matemáticas, en el enfoque se planteaba que “las matemáticas son[…] un resultado del intento del hombre por comprender y explicarse el universo y las cosas que en él ocurren” (SEP, 1993 b, p. 37). En este enfoque general se destacaba que se “debe fomentar en el alumno la misma curiosidad y las actitudes que la hicieron posible y la mantienen viva” (SEP, 1993 b, p. 37). Se sugería despertar la curiosidad del alumno por las matemáticas, lo cual a su vez le permitiría continuar su aprendizaje de forma independiente dentro o fuera de la escuela (SEP, 1993 b, p. 12).

El propósito central era que el alumno aprendiera a utilizar las matemáticas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y resolución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa (SEP, 1993 b, p. 37). Y tiene como propósito general “el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos” (SEP, 1993b, p. 37).

En el PPE 1993 la educación secundaria se conformó nuevamente por tres grados de estudio, uno por año. Los temas de matemáticas se organizaron en cinco áreas: aritmética, algebra, geometría (para tercer grado se incluyó la trigonometría), presentación y tratamiento de la información, y nociones de probabilidad. Así, el tema de trigonometría se estudió únicamente en el tercer grado al menos desde 1975.

En el PPE 1993 se hace una aclaración sobre la secuencia de temas, advirtiéndole al docente que “el programa no está concebido como una sucesión de temas que deben agotarse uno a continuación del otro” (SEP, 1993 b, p. 37). También le sugería que los contenidos se podían organizar de la forma que estimara conveniente para el aprendizaje de sus alumnos. Esta aclaración se dio en el PPE 1993 porque en los programas de 1975 los objetivos particulares y específicos tenían una secuencia fija que debía seguirse. Así, en los programas de 1975 la geometría se incluía en la unidad 7 del primer y segundo grados de educación secundaria; en el tercer grado se estudiaba en las unidades 4, 5, 6 y 7, correspondiendo la unidad 7 por completo al estudio de la trigonometría.

Lo anterior se describió en el PPE 1993, informándose que en los programas anteriores, para el primer y segundo grados de la educación secundaria, “la geometría aparecía sólo en la séptima unidad”. Por lo que ahora se proponía que la geometría se estudiara durante los tres grados a lo largo de todo el año escolar (SEP, 1993 b, p. 39).

En el PPE 1993 el área de geometría de tercer grado de educación secundaria se componía de los siguientes temas: triángulos y cuadriláteros, círculo, semejanza, el teorema de Pitágoras, sólidos, y elementos de Trigonometría (SEP, 1993 b, p. 51).

Sobre la trigonometría, en el PPE 1993 se puso énfasis en sus aplicaciones:

> La trigonometría sigue siendo importante por sus aplicaciones en la ciencia y la tecnología y presenta numerosas situaciones interesantes que muestran las relaciones de la geometría con la

aritmética y el álgebra. Sin avanzar hacia los temas de álgebra trigonométrica, el nuevo programa de tercer grado propone que los alumnos reconozcan y estudien las razones trigonométricas de un triángulo y las utilicen en la solución de los problemas en los que esta disciplina es tan rica, como son el cálculo de distancias inaccesibles a la medición directa. (SEP, 1993 b, p. 40)

El tema de elementos de trigonometría se desglosaba en (*cf*., SEP, 1993 b, p. 51):

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo (únicamente seno, coseno y tangente).
- Valores del seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30°, 45° y 60°.
- Uso de tablas trigonométricas (ejercicios de interpolación) y calculadora para otros ángulos agudos.
- Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación en la resolución de problemas de cálculo de distancias inaccesibles; del lado y el apotema de polígonos regulares; etcétera.

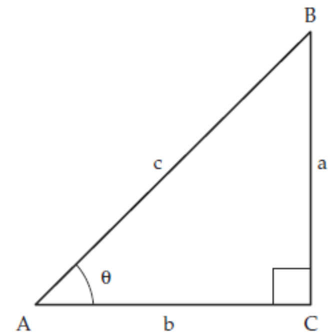
En el PPE 1993 las razones trigonométricas estaban referidas a un ángulo agudo; en el PEMB 1975, en los objetivos particulares y específicos, se hacía referencia a funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente en un círculo unitario. En el PPE 1993 no se usa la palabra función en el tema de elementos de trigonometría.

Además del PPE 1993, se elaboraron materiales curriculares para orientar la práctica docente. Uno de ellos fue el Libro para el maestro matemáticas secundaria (LMM). Su primera edición apareció en 1994 (Alarcón *et al*., 1994); la segunda edición (que es la más reciente) se publicó en 2001 (Alarcón *et al*., 2001). En 1999 la SEP editó el fichero de actividades didácticas matemáticas FADM (Espinoza, García y García, 1999). Ambos materiales contenían problemas y sugerencias didácticas relacionados con los temas que planteaba el PPE de matemáticas de 1993. En ellos se desarrollaban tanto la teoría didáctica de las matemáticas en cuanto al enfoque constructivista, como el enfoque de planteamiento y resolución de problemas.

En el LMM (Alarcón *et al.*, 1994, p. 235) se explicaba que:

> El programa de Matemáticas para el tercer grado de la educación secundaria contempla una introducción a la trigonometría, una vez que los alumnos conocen y han resuelto diversas aplicaciones de los teoremas de Pitágoras y de semejanza. Se inicia con la definición y estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente para ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

En el LMM se muestra el esquema con las definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente (véase la figura 2.4).



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

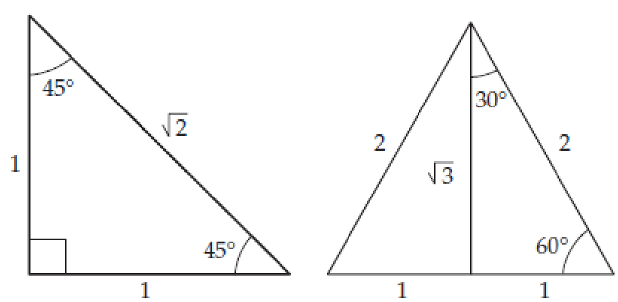
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Figura 2.4. Definición de seno, coseno y tangente

en el LMM (Alarcón *et al*., 1994, p. 235)

Enseguida, se propone completar la tabla de la figura 2.5 (Alarcón *et al.*, 1994, p. 235). Esto es, los alumnos deben utilizar las definiciones de la figura 2.4 y propiedades del triángulo equilátero y del triángulo rectángulo isósceles para calcular las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.



Ángulo θ / Función	30º	45º	60º
Sen θ			
Cos θ			
Tan θ			

Figura 2.5. Ejercicio de razones trigonométricas

en el LMM (Alarcón *et al*.,1994, p. 235)

En el LMM se plantean nueve problemas (véase el anexo 1) (Alarcón *et al.*, 1994, pp. 237-240). Estos problemas deben ser resueltos mediante el uso de razones trigonométricas y su representación gráfica. En el ejemplo 1 (véase la figura 2.6) se pide “Encontrar el valor de sen θ y cos θ sabiendo que tan θ = 0.765”. El proceso para resolver el problema se describe con la palabra “truco”, refiriéndose en realidad a la representación gráfica.

Se observan algunas inconsistencias en el ejemplo resuelto:

1.- Para resolver un problema en matemáticas no se necesitan “trucos”, sino algoritmos y estrategias de resolución (por ejemplo). Entonces, ¿por qué los autores del LMM llamaron de esa forma al proceso de resolución de un problema?

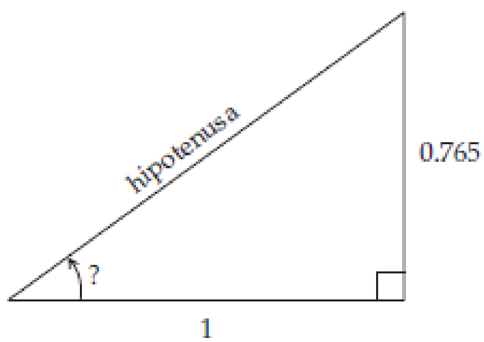
2.- En la figura 2.6, se hace mención de las razones *sen* θ y *cos* θ; y en la representación gráfica del triángulo rectángulo del ejemplo 1 no se anotó θ en ninguno de los tres ángulos internos del triángulo rectángulo; sólo se anotó un signo de interrogación (?) en uno de los ángulos agudos de dicho triángulo.

3.- Se menciona la palabra *función* para obtener el valor de θ, la cual no corresponde a lo que se pide en el PPE 1993, en donde se hace referencia a *razones trigonométricas* y no a *funciones trigonométricas* (*cf*., SEP, 1993 b, p. 51).

4- Se usa la notación sen^{-1} y $\cos^{-1}$, referidas a las teclas de la calculadora; no se especifica qué significa esa notación en el ejemplo 1 (véase la figura 2.6) y tampoco en las razones trigonométricas implicadas (*sen* θ y *cos* θ); además, esta notación no está incluida en los temas de elementos de trigonometría (*cf*., SEP, 1993 b, p. 51).

5.- En el mismo ejemplo 1 (véase la figura 2.6) se hace mención del uso de *tablas* para buscar sen^{-1} y cos^{-1}, sin especificar a qué tablas se refiere. Se da por entendido que se está hablando de las *Tablas trigonométricas*.

Ahora, el "truco" para resolver el problema consiste en dibujar un triángulo cuyos catetos opuesto y adyacente midan 0.765 y 1, respectivamente. Luego se calcula el valor de la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras:



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{1^2 + 0.765^2}$$
$$= \sqrt{1.585225} = 1.259...$$

Utilizando este triángulo se obtienen los valores de las otras razones trigonométricas:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{0.765}{1.259} = 0.607...$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{1.259} = 0.794...$$

Para obtener el valor de θ se utiliza una de las funciones sen^{-1}, cos^{-1} o tan^{-1} en la calculadora o se busca en tablas :

$$\theta = 37^{\circ}\ 25'$$

Figura 2.6. Procedimiento de resolución del ejemplo 1 (Alarcón *et al*., 1994, p. 236)

Sin explicaciones adicionales respecto a las razones trigonométricas, se incluye el apartado “La trigonometría y el estudio de los polígonos regulares”, que contiene seis *problemas interesantes de trigonometría*, en los que básicamente se trata de calcular lado, apotema, perímetro o área de polígonos regulares (de 3, 4, 5, 6, 8, etc., lados).

En 1999 se editó por primera vez el Fichero de Actividades Didácticas. Matemáticas (FADM), concebido como un material de apoyo dirigido a los docentes de educación secundaria. El FADM contiene 18 fichas para cada grado, en las que se abordan temas de la secuencia y organización de contenidos del PPE 1993. Tomando como base el LMM, en el FADM se incluyen actividades de enseñanza.

Para el tema de trigonometría se propone la ficha denominada “Rampas para patinetas” (Espinoza, García y García, 1999, pp. 116-117) y la ficha de nombre “Para medir polígonos regulares” (Espinoza, García y García, 1999, pp. 118-119). En las figuras 2.7 y 2.8 se muestra la ficha “Rampas para patinetas”.

Rampas para patinetas

Tema 16: Trigonometría: razones trigonométricas de un ángulo agudo (cálculo y primeras aplicaciones)

Propósito Utilizar la trigonometría para resolver problemas de cálculo geométrico.

Contenidos Primeros ejemplos para motivar el estudio de la trigonometría. Tangente de un ángulo agudo.

Material Juego de geometría y calculadora.

1 Organizados en equipos de cuatro o cinco alumnos, plantee el siguiente problema:

Se quieren construir rampas para una competencia de patinetas. Para medir el ángulo de inclinación de cada rampa, se considerarán dos medidas:

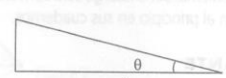
De acuerdo con las medidas especificadas, elijan aquella rampa cuyo ángulo de inclinación sea mayor en cada caso (las medidas están dadas en metros).

Caso	Rampa 1	Rampa 2
1	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.5$ $b = 7.5$
2	$a = 1.5$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 6.5$
3	$a = 1.5$ $b = 6$	$a = 2$ $b = 8$
4	$a = 1.6$ $b = 6.5$	$a = 1.7$ $b = 7$

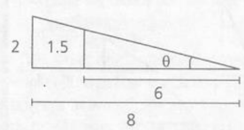
Dé tiempo suficiente a los alumnos para que elijan la rampa que consideren tiene mayor ángulo de inclinación en cada caso. Una vez que los equipos tengan las respuestas, pida que algún integrante pase al frente a darlas a conocer y que, además, explique el por qué eligieron tal o cual rampa.

Los equipos podrán hacer uso de diversas estrategias para resolver el problema. Una de ellas podrá ser el trazar los triángulos que representan las rampas a una escala adecuada, por ejemplo: 1 cm: 1 m.

Con lo que podrán notar (probablemente) la inclinación de cada rampa. Es posible que se les ocurra medir el ángulo de inclinación θ.



Otros equipos podrán notar que para los casos 1 y 2 es suficiente con analizar las medidas. Si a es igual en ambas rampas, la de mayor ángulo de inclinación es aquella en la que b es menor; si b es igual, entonces la de mayor ángulo de inclinación es aquella en la que el valor de a es mayor.



Para el caso 3 se espera que los alumnos hagan uso de lo visto en el tema 13 (semejanza) y noten que la inclinación de las rampas es la misma.

El caso 4 es el que ofrece mayor dificultad, incluso si se hace el trazo a escala. Posiblemente los alumnos lleguen por azar a la respuesta correcta, sin embargo, el hecho de que tengan que validar sus respuestas hará que busquen argumentos lógicos.

116

Figura 2.7. Ficha propuesta en el FADM “Rampas para patinetas” (Espinoza, 1999, p. 116)

En la primera parte de esta ficha se presenta un problema sobre ángulos de inclinación de rampas que los alumnos deben resolver en equipo. En las orientaciones para el docente se mencionan diversas estrategias de resolución: el uso de procedimientos de escalas para trazar las rampas, análisis de las medidas y aplicación de nociones previas sobre semejanza de triángulos, entre otras. En la segunda parte de la ficha (véase la figura 2.8) se presenta una última respuesta, la cual se considera de mayor dificultad. En esta respuesta se espera que el alumno llegue a establecer la razón entre la altura de la rampa y la distancia horizontal recorrida; es decir, la relación entre las longitudes *a* y *b*, que en el esquema del triángulo rectángulo con que se representa la rampa corresponden al cateto opuesto y al cateto adyacente, respectivamente.

Se menciona que si en algunos de los equipos no se les ocurriese el procedimiento de relacionar la altura de la rampa y la distancia horizontal de la misma, el profesor puede sugerir este procedimiento y aprovechar el momento para comunicar que a esta razón se le llama tangente, definiéndola como la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente.

En la misma ficha se incluyen otros dos problemas (véase la figura 2.8). Vale la pena hacer notar que en el problema 3 se usa la palabra “función”. Esto constituye un indicio de la confusión de enfoques conceptuales de la trigonometría en la educación secundaria por parte de los encargados de elaborar los materiales educativos: la tangente de un ángulo agudo se define como la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente (SEP, 1999, p. 117), no como función, lo cual se incluía en los programas de 1975 (SEP, 1975, p. 166). Lo mismo ocurre en el LMM.

Lo ideal sería que a ciertos equipos se les ocurriera establecer la relación o razón que existe entre la altura de la rampa y la distancia horizontal recorrida:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{altura de la rampa}}{\text{distancia horizontal}}$$

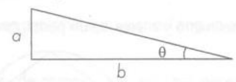
Y comparar estos cocientes para saber cuál rampa tiene mayor ángulo de inclinación. Por ejemplo, para el caso 4:

Rampa 1	Rampa 2
$\frac{1.6}{6.5} = 0.2461$	$\frac{1.7}{7} = 0.2428$

Con lo que se aprecia que la rampa 1 tiene mayor ángulo de inclinación.

Si no se les ocurriese, es conveniente que proponga este procedimiento y aproveche este momento para mencionar a los alumnos que esa razón se llama tangente del ángulo θ.

Tangente del ángulo $\theta = \frac{a}{b}$.



Y que ésta es una medida que permite calcular el ángulo de inclinación de la rampa. Dicho ángulo de inclinación puede calcularse, mediante la división a/b, haciendo uso de la calculadora o de las tablas para encontrar la medida del ángulo θ. Se sugiere que en este momento defina a sus alumnos la tangente de un ángulo agudo como la razón del cateto opuesto entre el cateto adyacente, y que les muestre cómo calcularla, así como ilustrar el caso de cómo calcular el ángulo dada la tangente.

El caso 3 y los conocimientos que sobre semejanza tienen los alumnos, pueden ser utilizados para que exploren el hecho de que el valor de la tangente es el mismo para ángulos con la misma medida, aun cuando pertenezcan a triángulos rectángulos con catetos de diferente medida (la razón se conserva).

2 Nuevamente organizados en equipos, plantee el siguiente problema:

Se quiere construir una rampa cuya altura sea de 2 m y que forme un ángulo de 40° con el piso. ¿Cuál será la distancia horizontal que tendrá la base de la rampa?

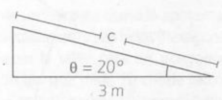
Esta actividad es una extensión de la anterior y supone que el alumno:

- Sabe que la tangente del ángulo es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
- Sabe calcular la tangente de un ángulo dado haciendo uso de la calculadora o de las tablas.

Se trabajará bajo la misma dinámica que en el problema anterior: dé tiempo suficiente para que los equipos busquen la respuesta correcta, socialicen sus estrategias y validen los resultados en forma grupal.

3 Plantee a los equipos el siguiente problema:

Calculen la longitud c de la siguiente rampa:



Básicamente el tratamiento es análogo al de los problemas anteriores, pero en este caso los alumnos tendrán que hacer uso (además de la función tangente) del teorema de Pitágoras.

Este último problema puede ser aprovechado para introducir la función coseno.

VARIANTE

Se sugiere trabajar el problema 2 de la página 268 del *Libro para el maestro*, con el fin de complementar el uso de la tangente cuando se requiera determinar la pendiente o el ángulo de inclinación.

117

Figura 2.8. Continuación de la actividad "Rampas para patinetas" (Espinoza, 1999, p. 117)

En la ficha 16 se pide, como una “variante” del tema, que se trabaje con el problema 2 de la página 268 del LMM. Sin embargo, este último corresponde a un tema diferente, que se refiere a volúmenes. (El problema 2 de la página 237 del LMM sí corresponde a pendientes de subidas.)

En la ficha 17 del FADM, cuyos propósitos son utilizar las relaciones trigonométricas para resolver problemas de cálculo geométrico y el estudio de los polígonos regulares, se inicia con un problema de calcular el perímetro y el área de un pentágono regular (véanse las figuras 2.9 y 2.10).

Nótese que en el inciso *b)* del problema 1 se usa el término “funciones trigonométricas”, siendo el FADM un documento emitido por la SEP para el PPE 1993. Esto se hace notar porque específicamente en el PPE 1993 ya no se recurrió al concepto de *funciones*, sino que se usó el de *razones*.

Las actividades propuestas en esta ficha 17 están relacionadas con algunos de los ejercicios de las páginas 241 y 242 del LMM. En cuatro de los casos son exactamente iguales, por ejemplo, el problema 1 del FADM es el mismo problema 2 del LMM que se encuentra en la página 241. En este problema se pide calcular el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm. por lado. En el FADM se dan orientaciones a los docentes para que los alumnos puedan resolver los problemas; lo mismo ocurre con el problema 2 del FADM, que es exactamente igual al problema 4 del LMM. En el que se pide utilizar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° grados en función del radio (*r*) de los polígonos.

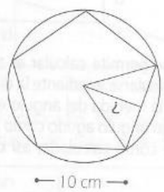
Para medir polígonos regulares

Tema 17: Problemas de trigonometría

Propósitos	Utilizar las relaciones trigonométricas para resolver problemas de cálculo geométrico. Estudio de los polígonos regulares.
Contenidos	Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones. Estudio de los polígonos regulares.
Material	Juego de geometría y calculadora.

1 Proponga al grupo resolver el siguiente problema en equipos de cuatro o cinco alumnos:

a) Calculen el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado.



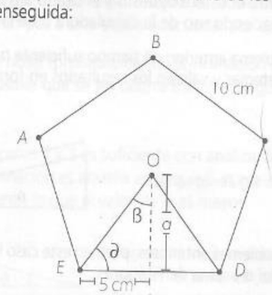
b) Utilizando funciones trigonométricas, calculen el perímetro y el área de un heptágono, un octágono, un eneágono, etcétera, cuyos lados midan 20 cm respectivamente.

El cálculo del perímetro del pentágono no representará dificultad para los alumnos, mas no así el cálculo del área.

Para calcular el área, algunos equipos pueden construir el polígono considerando las medidas reales. Una vez hecho lo anterior, obtendrán las medidas necesarias para efectuar los cálculos.

Otros equipos pueden construir a escala el pentágono y después, aplicando sus conocimientos relacionados con la semejanza, obtendrán el área.

A partir de las soluciones de los alumnos, puede orientarlos para resolver el mismo problema utilizando funciones trigonométricas, en particular la función tangente. Así, la apotema del pentágono se puede expresar en función de uno de los ángulos del triángulo rectángulo *OEL*, como se muestra enseguida:



$\tan \partial = \dfrac{a}{5}$, entonces:

$a = 5\ (\tan \partial)$

Por otra parte, para calcular el valor de la tangente del ángulo ∂, que mide 54, pueden utilizar la calculadora o las tablas. Una vez que se obtiene el valor de la apotema, el área se calcula utilizando la fórmula correspondiente.

Para responder el inciso *b)*, los alumnos tendrán que aplicar sus conocimientos de geometría para determinar el ángulo central o el ángulo interno de los polígonos. Si los alumnos tienen dificultades, puede hacer un breve recordatorio o dar algunas orientaciones para salvar este obstáculo. Por otra parte, quizás sea necesario que los oriente en el uso de las funciones trigonométricas para encontrar el área de cada polígono.

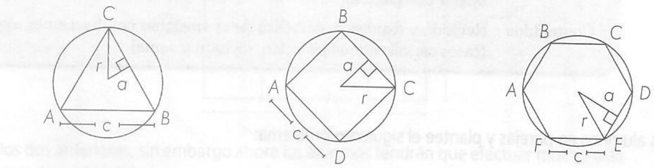
118

Figura 2.9. Ficha 17 propuesta en el FADM “Para medir polígonos regulares”

(Espinoza, 1999, p. 118)

2 Para resolver los siguientes problemas, organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos.

Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°, en función del radio (r) expresen: el valor de un lado (c), la apotema (a) y el área (S) de los polígonos regulares siguientes:



Al igual que en los problemas anteriores, los alumnos deben determinar el valor del ángulo central o interior de cada uno de los polígonos.

Es conveniente que observe el trabajo de los alumnos, de manera que, en caso necesario, haga las orientaciones que considere convenientes.

En el caso del triángulo, si se considera el ángulo de 30°, las siguientes son expresiones que los alumnos podrán encontrar:

$$c = 2r\ (cos\ 30);\ a = r\ (sen\ 30);\ S = 3r^2\ (cos\ 30)(sen\ 30).$$

Con la finalidad de que los alumnos observen que las expresiones encontradas son correctas, puede asignar un valor al radio y pedir que determinen la medida de un lado, la apotema y el área utilizando las expresiones encontradas. Después pida que calculen dichas medidas con otro procedimiento.

VARIANTES

1. En la tabla que se muestra a continuación están dadas las medidas de un lado, así como la apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de tres lados (triángulo equilátero) y seis lados (hexágono regular) inscritos en un círculo que tiene 10 cm de radio. Completen la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados que también están inscritos en un círculo que mide 10 cm de radio. ¿Qué relaciones descubren después de que han completado la tabla? Coméntenlo con sus compañeros y escriban sus conclusiones.

Número de lados	Lado	Apotema	Perímetro	Área
3	17.32	5.00	51.96	129.90
6	10.00	8.59	60	258.58
12				
24				
48				

2. Un polígono regular de 12 lados tiene de área 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto miden los radios de los círculos inscrito y circunscrito? ¿Y si el polígono regular tuviera 8, 9, 10, 18... lados?

119

Figura 2.10. Continuación de la ficha 17 del FADM 1999

(Espinoza, 1999, p. 119)

En este caso se dan orientaciones a los docentes para que no tomen en cuenta la memorización de las funciones trigonométricas, y resuelvan los problemas analizando las relaciones entre los lados del polígono, la apotema y el área, obteniendo el valor del ángulo de los polígonos. Los problemas 1 y 2 del recuadro de variantes de la página 119 del FADM son exactamente iguales a los problemas 6 y 3, respectivamente, del LMM (véanse las figuras 2.11 y 2.12). En el que se dan diferentes polígonos (de12, 24 y 48 lados) inscritos en una circunferencia y se debe calcular el lado, la apotema, el perímetro y el área de cada uno, a partir del perímetro y el área de los demás polígonos (de 3 y 6 lados respectivamente).

Como se observa, los problemas se han trasladado de un material didáctico a otro, se repiten las inconsistencias de la palabra *función* trigonométrica como indistinta de razón *trigonométrica* como lo marca el PPE 1993.

En este breve análisis de los materiales más importantes propuestos por la SEP en relación a la trigonometría a partir de 1993, en tercer grado de educación secundaria, se muestran los *elementos de trigonometría* que deben estudiar los alumnos.

Los materiales didácticos oficiales analizados constituyeron un precedente para la modificación de los dos subsecuentes programas de estudio (2006 y 2011), en cuanto al énfasis dado a la resolución de problemas.

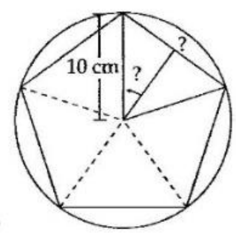
GEOMETRÍA

La trigonometría y el estudio de los polígonos regulares

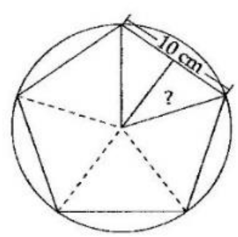
El estudio de los polígonos regulares también da lugar a problemas interesantes de trigonometría.

Por ejemplo

1. ¿Cuál es el perímetro y el área de un pentágono inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio?

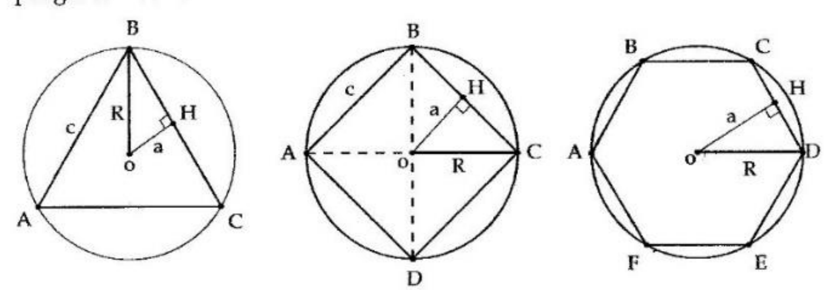


2. Calcular la apotema y el área de un pentágono (o hexágono, o heptágono,...) cuyos lados miden 10 cm.



3. Un polígono regular de 12 lados tiene un área de 24 unidades cuadradas. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Y los radios de los círculos inscrito y circunscrito?

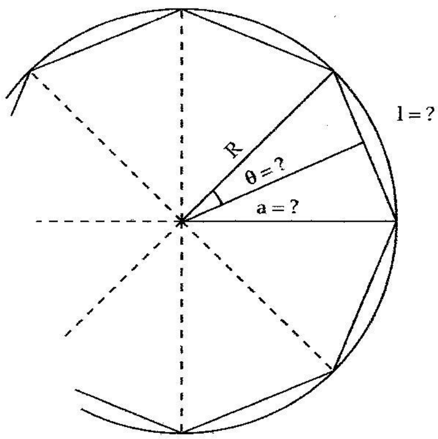
4. Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30º, 45º y 60º, expresar en función de R el lado, la apotema y el área de los siguientes polígonos inscritos en un círculo.



241

Figura 2.11. Problemas propuestos en el LMM (Alarcón *et al.*, 1994, p. 241)

5. ¿Cuáles serían las fórmulas para calcular el lado, la apotema, el perímetro y el área de un polígono de *n* lados inscrito en una circunferencia de radio R?



$l(n) = 2R\,\text{sen}\,\theta$

$a(n) = R\cos\theta$

$P(n) = 2nR\,\text{sen}\,\theta$

$A(n) = nR^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

donde $\theta = 360^\circ/2n$

El propósito no es que los alumnos memoricen las fórmulas anteriores pero es interesante que las utilicen para resolver ejemplos como el siguiente.

6. En la tabla que viene a continuación están dados el lado, la apotema, el perímetro y el área de los polígonos regulares de 3 (triángulo equilátero) y 6 (hexágono regular) lados inscritos en una circunferencia de radio 10 cm. Completa la tabla para los polígonos regulares de 12, 24 y 48 lados. ¿Qué descubres en la tabla? Coméntalo con tu profesor y compañeros.

NÚM. DE LADOS	LADO	APOTEMA	PERÍMETRO	ÁREA
3	17.32	5.00	51.96	129.90
6	10.00	8.59	60.00	258.58
12				
24				
48				

Los resultados de la tabla están redondeados a la segunda cifra decimal.

Figura 2.12. Continuación de problemas propuestos en el LMM (Alarcón *et al.*, 1994, p. 242)

CAPíTULO III

LA TRIGONOMETRíA EN PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MÉXICO, 2006 Y 2011

La trigonometría en los programas 2006

El PPE 1993 estuvo vigente durante 13 años. El gobierno en turno estimó necesario un cambio en la educación básica obligatoria en México; así, de acuerdo con la Ley General de Educación, la Secretaria de Educación Pública plasmó en el programa general de educación 2001-2006 el compromiso de impulsar una reforma de la educación secundaria que incluyera, entre otros puntos, una renovación del plan y de los programas de estudio (SEP, 2006a, p. 5).

En 2006 se dio a conocer el programa de estudios que sustituiría el PPE 1993. Las asignaturas de biología, introducción a la física y a la química, física y química del PPE 1993, se cambiaron por ciencias I, II y III; historia universal I y II por historia I y II; geografía general por geografía de México y el mundo; civismo por formación cívica y ética; expresión y apreciación artística por artes y educación tecnológica por tecnología. Además, se incluyeron la asignatura estatal y orientación y tutoría. En la figura 3.1 se muestra el mapa curricular de secundaria 2006. Según se observa, la asignatura de matemáticas no presentó cambios en su nombre y se siguió estudiando en cada uno de los tres grados de la educación secundaria.

De acuerdo con el PE 2006 (SEP, 2006a, p. 34), los propósitos para la asignatura de matemáticas eran:

1.- Utilicen el lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

2.- Resuelvan problemas mediante la formulación de ecuaciones de distintos tipos.

Primer grado	Horas	Segundo grado	Horas	Tercer grado	Horas
Español I	5	Español II	5	Español III	5
Matemáticas I	5	Matemáticas II	5	Matemáticas III	5
Ciencias I (énfasis en Biología)	6	Ciencias II (énfasis en Física)	6	Ciencias III (énfasis en Química)	6
Geografía de México y del Mundo	5	Historia I	4	Historia II	4
		Formación Cívica y Ética I	4	Formación Cívica y Ética II	4
Lengua Extranjera I	3	Lengua Extranjera II	3	Lengua Extranjera III	3
Educación Física I	2	Educación Física II	2	Educación Física III	2
Tecnología I*	3	Tecnología II*	3	Tecnología III*	3
Artes (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)	2	Artes (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)	2	Artes (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)	2
Asignatura Estatal	3				
Orientación y Tutoría	1	Orientación y Tutoría	1	Orientación y Tutoría	1
Total	**35**		**35**		**35**

Figura 3.1. Mapa curricular del plan de estudios para la educación secundaria de 2006 (SEP, 2006a, p. 31)

3.- Expresen algebraicamente reglas de correspondencia entre conjuntos de cantidades que guardan una relación funcional.
4.- Resuelvan problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes.
5.- Resuelvan problemas que implican realizar cálculos con diferentes magnitudes.
6.- Utilicen las propiedades geométricas para realizar trazos, para establecer su viabilidad o para efectuar cálculos geométricos.
7.- Identifiquen y evalúen experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad.
8.- Utilicen de manera eficiente diversas técnicas aritméticas, algebraicas o geométricas, con o sin el apoyo de tecnología, al resolver problemas. (SEP, 2006a, p. 34)

Estos propósitos se orientaban a “lograr que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos” (SEP, 2006a, p. 34), y se vieron reflejados en los programas de estudio de matemáticas de 2006 para la educación secundaria (PEMS 2006; SEP, 2006b), en los que se expresa tanto la continuidad del enfoque de *resolución de problemas* como el modelo constructivista. En la introducción del PEMS 2006 se menciona cómo expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas. En el enfoque del mismo se dice que en el campo de la didáctica de la matemática es determinante el *medio*, entendido como la situación o las situaciones problemáticas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretende estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir nuevos conocimientos (SEP, 2006b, pp.7 y 11). Así se explicó en el PE 2006 “Así, el desafío de aplicar los enfoques propuestos en el Plan y los Programas de Estudio de 1993 sigue vigente (SEP, 2006a, p. 18). El PE 2006 definió que estos enfoques “centran la atención en las ideas y experiencias previas del estudiante, y se orientan a propiciar la reflexión, la comprensión, el trabajo en equipo y el fortalecimiento de actitudes para intervenir en una sociedad democrática y participativa” (SEP, 2006a, p. 17).

Justificando el porqué de dichos cambios, “La gran apuesta de tales modificaciones fue reorientar la práctica educativa para que el desarrollo de capacidades y competencias cobrase primacía sobre la visión predominantemente memorística e informativa del aprendizaje” (SEP, 2006a, p. 17).

El PE 2006 incluyó la promoción del *trabajo grupal y la construcción colectiva del conocimiento* (SEP, 2006a, p. 47). De acuerdo con Hernández (1998), esta última frase corresponde a las ideas del paradigma sociocultural promovido por L. S. Vigotsky (1896-1934) y retomado por Guy Brousseau (1933- a la fecha) en el campo de la didáctica de la matemática. En el paradigma sociocultural de Vigotsky se plantea que entre el sujeto y el objeto existe una relación de indisociación, de interacción y de transformación recíproca iniciada por *la actividad mediada del sujeto*, referidos a los artefactos o instrumentos socioculturales y a los procesos de influencia de un grupo sociocultural determinado. Así, es el medio sociocultural el que pasa a desempeñar un papel esencial y determinante en el desarrollo del psiquismo del sujeto, pero en definitiva éste no recibe pasivamente su influencia, sino que activamente la reconstruye (Hernández, 1998, p. 220).

Uno de los cambios significativos del PE 2006 fue la inserción de una *educación por competencias*. En el PE 2006 se menciona en las finalidades de la educación básica, "El cumplimiento del carácter obligatorio de la secundaria [...] representa, para todos los alumnos, la adquisición de los conocimientos, el desarrollo de habilidades, así como la construcción de valores y actitudes; es decir, la formación en las competencias propuestas por el currículo común..." (SEP, 2006a, p. 8). Dichas competencias se definen en el PE 2006 de la siguiente manera:

> Lograr que la educación básica contribuya a la formación de ciudadanos con estas características implica plantear el desarrollo de competencias como propósito educativo central. Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado. (SEP, 2006a, p.11)

En el mismo PE 2006 (SEP, 2006a, p.19), el inciso *e)* de las *características del plan y de los programas de estudio* tiene como título "Énfasis en el desarrollo de competencias y definición de aprendizajes esperados". En ese inciso se explica que con el desarrollo de competencias se "propicia que los alumnos movilicen sus saberes dentro y fuera de la escuela, que logren aplicar lo aprendido en situaciones cotidianas" (SEP, 2006a, p. 19).

Esto se relaciona con otro de los cambios del PE 2006 respecto al PPE 1993: que los saberes adquiridos se utilicen en la vida cotidiana o, como se nombra en el PE 2006, *competencias para la vida*.

En el perfil de egreso de la educación básica se plantean un conjunto de rasgos (nueve) que los estudiantes deberán tener al término de todo el ciclo de educación básica (preescolar, primaria y secundaria). En ellos se destaca el discurso de "la necesidad de fortalecer las competencias para la vida" (SEP, 2006a, p. 9) y su logro propone una tarea compartida entre los campos del conocimiento que integran el currículo a lo largo de toda la educación básica.

En relación con las matemáticas, los rasgos deseables son:

> Emplea la argumentación y el razonamiento al analizar situaciones, identificar problemas, formular preguntas, emitir juicios y proponer diversas soluciones.
>
> Selecciona, analiza, evalúa y comparte información proveniente de diversas fuentes y aprovecha los recursos tecnológicos a su alcance para profundizar y ampliar sus aprendizajes de manera permanente. (SEP, 2006a, p. 10)

En el PE 2006 se especifica que desde todas las asignaturas se deben desarrollar las competencias para la vida, se mencionan algunas que podrían ser específicas de matemáticas:

> Competencias para el manejo de la información. Se relacionan con: la búsqueda, evaluación y sistematización de información; el pensar, reflexionar, argumentar y expresar juicios críticos; analizar, sintetizar y utilizar información; el conocimiento y manejo de distintas lógicas de construcción del conocimiento en diversas disciplinas y en los distintos ámbitos culturales. (SEP, 2006a, p. 12)

Estas competencias que se enuncian en el PE 2006, se relacionan directamente con los propósitos del PEMS 2006 en sus tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico (SN y PA); forma, espacio y medida (FEM); y manejo de la información (MI). Así, la estructura académica de los programas de educación básica para matemáticas queda de la siguiente manera como puede verse en la figura 3.2.

El PEMS 2006 queda estructurado por tres ejes temáticos en cada grado: SN y PA, FEM, y MI, los cuales se veían de forma simultánea durante el curso escolar. A su vez, cada uno de esos ejes temáticos se subdivide en temas, como se muestra en la misma figura 3.2.

El tema de Medida en el eje FEM contiene dos subtemas: Estimar, medir y calcular, y Justificación de fórmulas.

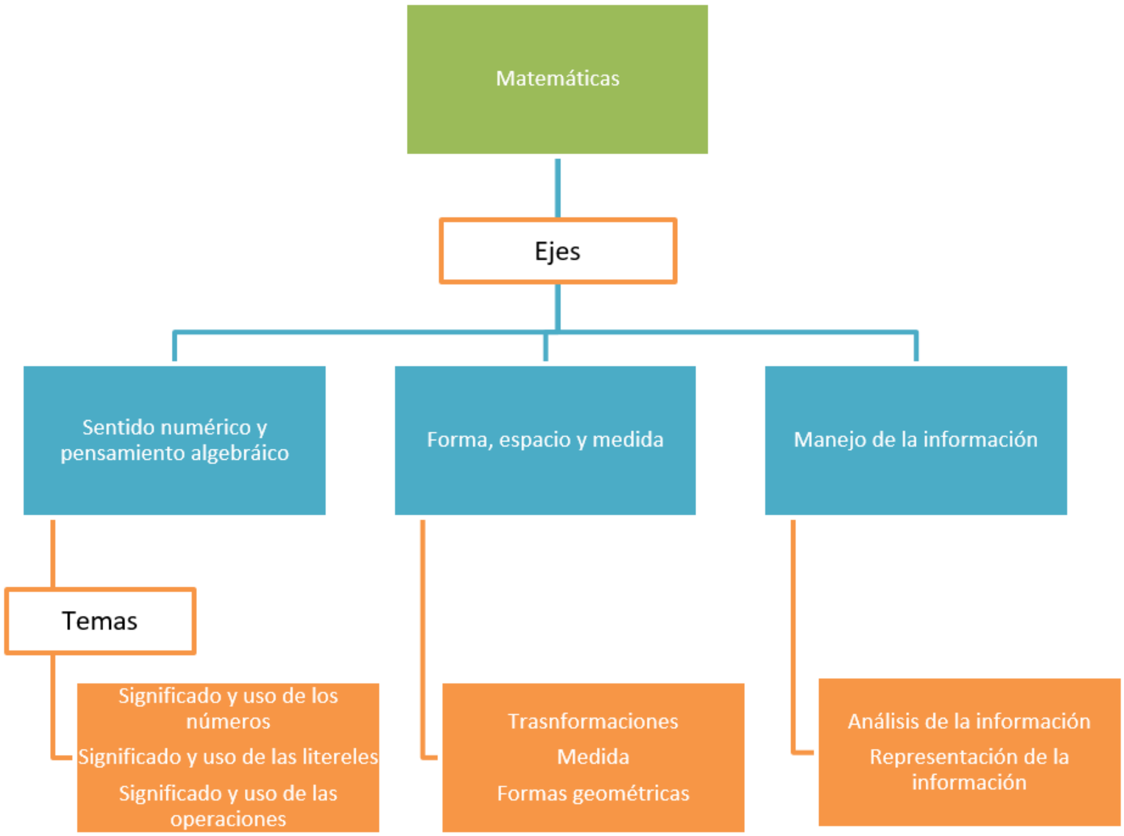


Figura 3.2. Estructura de los programas de matemáticas 2006. Tomado de SEP, 2006a.

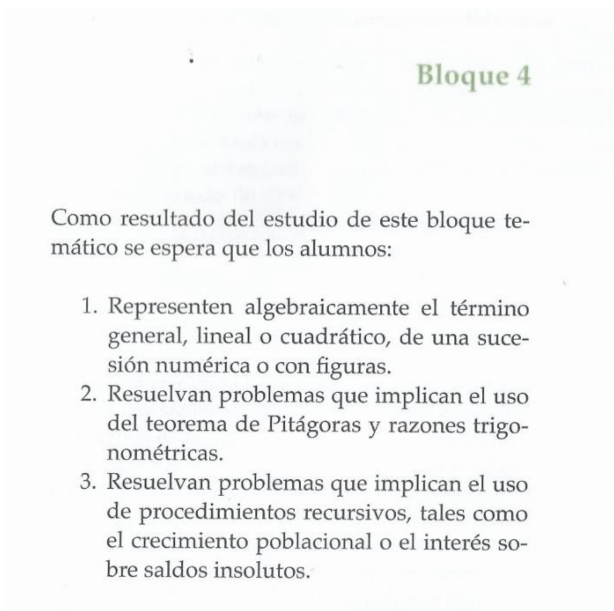
En el PEMS 2006 se enuncia que "la tendencia generalizada en la enseñanza ha sido la fragmentación o la adquisición del conocimiento en pequeñas dosis" (SEP, 2006b, p. 8). Lo que se proponía en el PEMS 2006 era "la vinculación entre contenidos del mismo eje, entre ejes distintos o incluso con los de otras asignaturas" (SEP, 2006b, p. 8), ya que se consideraba que de no hacerlo de esa forma había la posibilidad de que los alumnos quedaran sin establecer conexiones entre conceptos; y en el caso de hacer esas vinculaciones, podrían ampliar los alcances de un mismo concepto. Dicho de otra manera, se esperaba que con esta estructura académica de trasladar cada uno de los ejes temáticos a los cinco bloques dentro del ciclo escolar, se pudiera hacer extensivo un concepto y correlacionarlo en otros contextos matemáticos.

Por lo que la vinculación queda descrita en la secuencia y organización de contenidos de cada grado: por bloques temáticos (cinco para cada grado) que incluyen contenidos y en cada uno hay temas y subtemas de los tres ejes (SN y PA, FEM y MI). En el cuadro 3.1 se muestra la secuencia y organización de contenidos para el cuarto bloque del tercer grado de educación secundaria; en él se puede observar cada uno de los ejes con su tema y subtemas, así como los apartados de cada subtema en donde se enuncian los aprendizajes (conceptos básicos), que se debía enseñar a los alumnos.

Al principio de cada bloque se presentaban los *aprendizajes esperados*, "[…] donde se señalan de modo sintético, los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio del bloque en cuestión" (SEP, 2006b, p. 8). En el PE 2006 se explicó que este apartado constituía una guía fundamental para la elaboración de las evaluaciones que realizarían los maestros (SEP, 2006a, p. 54).

Para el bloque 4 en el tercer grado de educación secundaria del PEMS 2006 los aprendizajes esperados son los siguientes (véase la figura 3.3).

Nótese que el tema de trigonometría se encuentra ubicado en este bloque temático 4. El aprendizaje esperado para ese contenido es el número 2 de la figura 3.3. En el que se expresa "Resuelvan problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras y razones trigonométricas". Para poder desarrollar este aprendizaje esperado se proponen tres conocimientos y habilidades organizadas “de tal manera que los alumnos vayan teniendo acceso gradualmente a contenidos cada vez más complejos y a la vez puedan establecer conexiones entre lo que ya saben y lo que están por aprender” (SEP, 2006b, p. 8). En la introducción del PESM 2006 se mencionó que esto se hizo para “que los alumnos logren un conocimiento menos fragmentado, con mayor sentido y de modo que cuenten con más elementos para abordar un problema” (SEP, 2006b, p. 8). Se hace referencia de esto ya que, se consideraba que con el PPE 1993 se tendía a segmentar el conocimiento en pequeñas dosis. Además se afirmó que con el PE 2006, el nivel de abstracción les permitirá a los alumnos resolver situaciones problemáticas cada vez más complejas.


Bloque 4

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Representen algebraicamente el término general, lineal o cuadrático, de una sucesión numérica o con figuras.
2. Resuelvan problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras y razones trigonométricas.
3. Resuelvan problemas que implican el uso de procedimientos recursivos, tales como el crecimiento poblacional o el interés sobre saldos insolutos.

Figura 3.3. Aprendizajes esperados para el bloque 4 de PEMS 2006. Tomado de SEP, 2006a.

Cuadro 3.1. Plan general del bloque 4 del tercer grado de educación secundaria

BLOQUE N° 4			
EJE	**TEMA**	**SUBTEMA**	**APARTADOS (Conceptos básicos)**
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Significado y uso de las literales	Patrones y fórmulas	4.1 Determinar una expresión general cuadrática para definir el enésimo término en sucesiones numéricas y figurativas utilizando el método de diferencias.
Forma espacio y medida	*Medida*	*Estimar, Medir y Calcular*	*4.2 Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas*
			4.3 Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los ángulos. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.
Manejo de la información	Representación de la información	Gráficas	4.4 Interpretar y comparar las representaciones gráficas de crecimiento aritmético o lineal y geométrico o exponencial de diversas situaciones.
			4.5 Analizar la relación entre datos de distinta naturaleza, pero referidos a un mismo fenómeno o estudio que se presenta en representaciones diferentes, para producir nueva información.

Las secciones del PEMS 2006 se manejaron como apartados. En el apartado 4.3 del subtema “Estimar, medir y calcular” para las razones trigonométricas, se desarrollaban los siguientes conocimientos y habilidades (véase el cuadro 3.1):

1.- Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados.

2.- Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas.

3.- Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.

De estas intenciones didácticas y apartados, se hacen las siguientes observaciones.

1.- Previo al tema de razones trigonométricas, se encuentra el tema de teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

2.- Uno de los fines del apartado es resolver problemas que implican el uso de razones trigonométricas utilizando los conocimientos del teorema de Pitágoras.

3.- En las orientaciones didácticas de la figura 3.4 se propone el uso de rectángulos semejantes de otra actividad referida al tema de semejanza.

4.- Se da la definición de razón trigonométrica como *el cociente entre los lados del triángulo rectángulo que se forma al trazar la diagonal de los rectángulos semejantes*.

5.- Se mencionan por primera vez los términos *cateto adyacente* y *cateto opuesto.*

6.- Se menciona que las *razones trigonométricas* son las *funciones trigonométricas*: seno, coseno y tangente.

7.- Existe una inconsistencia entre lo que se dice previamente respecto al cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo como una razón *que se pueden traducir en medidas de ángulos* y la palabra *función*.

En la figura 3.4, se incluyen los “conocimientos y habilidades” del apartado 4.3.

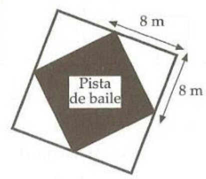
Eje	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Subtema	ESTIMAR, MEDIR Y CALCULAR

Conocimientos y habilidades — Orientaciones didácticas

4.2. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.

Sin duda alguna, el teorema de Pitágoras es una herramienta fundamental en el cálculo geométrico, y para que los alumnos puedan usarla con soltura es necesario que conozcan la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo y logren un manejo adecuado de la fórmula que expresa dicha relación. Un ejemplo de los problemas que se pueden resolver mediante el teorema de Pitágoras es el siguiente:

- En un salón de fiestas se dejó como pista de baile una superficie cuadrada que será cubierta con madera. ¿Cuántos metros cuadrados de madera se necesitarán para cubrir el piso de la pista de baile?



Actividad complementaria: “Teorema de Pitágoras”, en *Geometría dinámica.* EMAT, México, SEP, 2000, pp. 158-159.

Conocimientos y habilidades — Orientaciones didácticas

4.3. Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.

Para el desarrollo de esta habilidad se puede retomar la situación que plantea ampliar fotografías de diferentes medidas que se usó para el estudio de la semejanza. Pida a los alumnos que dibujen sobre el plano cartesiano una fotografía de 3 unidades de base y 4 de altura. Enseguida pídales que dibujen otras tres fotografías ampliadas (como se propuso en el bloque 2, tercer apartado de este mismo grado). Una vez que se han dibujado varios rectángulos cuya diagonal está sobre la misma recta, se plantea el problema de averiguar la medida del ángulo formado por la diagonal y el eje horizontal. Los alumnos pueden probar con el único recurso con el que cuentan, que es la medición directa con el transportador, después de lo cual se les puede explicar que otra manera de calcular la medida de ese ángulo es mediante los cocientes entre los lados del triángulo rectángulo que se forma —por ejemplo, la base del triángulo (cateto adyacente) entre la altura (cateto opuesto)—. Dichos cocientes son razones trigonométricas que se pueden traducir en medidas de ángulos. Pídales que verifiquen con varios triángulos semejantes y con diferentes cocientes. Finalmente dígales los nombres de las tres funciones directas: seno, coseno y tangente. Para realizar esta actividad es conveniente contar con calculadoras que tengan funciones trigonométricas.

132

Figura 3.4. Apartado 4.3 con la secuencia y organización de contenidos del PEMS 2006 para el tema de trigonometría. Tomado de SEP, 2006a.

Así, de acuerdo con estas observaciones sobre las intenciones didácticas en los apartados de los planes de estudio de 2006, se tiene que:

1.- Se sigue planteando un conocimiento por medio de la resolución de problemas como en el enfoque del PPE 1993.
2.- Las inconsistencias entre los términos y conceptos han aparecido desde el PPE 1993 (razón y función).
3.- Se menciona el uso de la calculadora con funciones trigonométricas, y no se hace mención de tablas trigonométricas como en el PPE 1993.

El apartado 4.3 del subtema *Estimar, medir y calcular* se divide en cinco planes de clase, en los cuales se van incrementando de forma gradual los *conocimientos y las habilidades* en las *Intenciones Didácticas* (ID). En la figura 3.5 se muestra un ejemplo de un plan de clase.

Los planes de clase se dividen en apartados. En ellos se explican las ID y se dan consignas sobre lo que deben hacer los estudiantes, así como la descripción y el desglose de cada una de las actividades propuestas. Al final de cada una de las consignas se encuentran las *consideraciones previas*, es decir, las orientaciones o problemas que probablemente pueden surgir durante la aplicación de la secuencia didáctica y que el docente debe tomar en cuenta, así como los saberes y conocimientos previos del alumno. Las *observaciones posteriores* las debían anotar los profesores como una especie de evaluación propia del plan de clase, y así poder tomar decisiones para mejorar el proceso de enseñanza y, por tanto, también el plan de clase.

PLAN DE CLASE 1 / 5

Escuela: ____ Fecha: ____________

Profesor (a): ____

Curso: Matemáticas 3 **Eje temático**: Forma, espacio y medida

Apartado: 4.3 ***Conocimientos y habilidades:*** *Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados.*

Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.

Intenciones didácticas (*ID)*: Que los alumnos empiecen a construir la noción de razón trigonométrica

Consigna: Organizados en equipos y con base en la información que proporciona el siguiente diagrama, completen la tabla. Redondeen sus resultados sólo hasta centésimos. Después contesten las preguntas.

Consideraciones previas: Este es el primer acercamiento que tienen los alumnos a las razones trigonométricas y su nombre, por lo que es probable que el maestro tenga que decir al grupo qué se entiende por cateto opuesto y cateto adyacente a un ángulo, o bien, que entre todos lo deduzcan, antes de iniciar con el llenado de la tabla. También es probable que se den cuenta de que éstas no son las únicas relaciones, pues existen sus inversas (cotangente, secante y cosecante). Aquí será necesario indicarles que por lo pronto sólo estudiarán las tres primeras.

Observaciones posteriores:

____

____

Figura 3.5. Formato de un plan de clase del PE 2006 (apartado 4.3). Tomado de DGEST, 2006

El conjunto de planes de clase para trigonometría se inicia con la intención didáctica (ID) de *construir la noción de razón* y concluye con la *resolución de problemas donde se utilicen razones trigonométricas*. Las ID para cada uno de los planes de clase eran las siguientes (DGEST, 2006).

1.- Que los alumnos empiecen a construir la noción de *razón* trigonométrica.
2.- Que los alumnos reflexionen acerca de la relación que existe entre las *razones trigonométricas* de un ángulo y las de su complemento.
3.- Que los alumnos usen las *funciones* trigonométricas para resolver problemas.
4.- Que los alumnos adquieran habilidad en la resolución de triángulos rectángulos y establezcan relaciones entre *funciones* trigonométricas y [el] teorema de Pitágoras (DGEST, 2006).

Nótese que en las primeras dos ID se menciona la palabra *razón*, y en las otras dos se hace uso de la palabra *función.* Se usan indistintamente uno y otro concepto, sin que se dé explicación del uso de cada uno en el contexto de los materiales educativos de la SEP.

De acuerdo con el PEMS 1996, las ID se referían al alcance de los contenidos, es decir, hasta dónde se vería el tema o cuál sería la profundidad del mismo. Estas ID se relacionaban con las *orientaciones didácticas y las consideraciones previas* de los planes de clase, en las que se fundamentaba la necesidad de estudiar los aspectos planteados en la columna de *conocimientos y habilidades* de los apartados de cada bloque del PEMS 2006 (véase la figura 3.4).

En cuanto a los c*onocimientos y habilidades*, se privilegiaba la construcción de significados y de herramientas matemáticas por parte de los alumnos, con base en la resolución de problemas; en las o*rientaciones didácticas* se daban ejemplos de problemas o situaciones que se pudieran plantear para organizar el estudio; también se sugerían actividades con la hoja de cálculo o de geometría dinámica y se establecía la vinculación con otros temas de matemáticas, o incluso de otras asignaturas (SEP, 2006b, p. 21).

¿Por qué en la ID 2 se utiliza la palabra *reflexionar* y en la ID 3 la palabra *usar*, además de cambiar el término razón por el de *función*?

Por otra parte, las *consideraciones previas* se referían a los posibles conocimientos previos que los alumnos pudieran tener, las posibles dificultades que tendrían al resolver los problemas que se les propusieran, y los procedimientos que pudieran utilizar. En el cuadro 3.2 se presentan las consideraciones previas de cada plan de clase.

1.- Nótese que en la consideración previa 1 se mencionan las razones trigonométricas "inversas (cotangente, secante y cosecante)". Realmente debiera hablarse de "razones trigonométricas recíprocas" o, en todo caso, de "razones trigonométricas inversas multiplicativas": $\cot\theta = \frac{1}{tg\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$ y $\csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$ .En el segundo párrafo se explica que uno de estos cocientes se puede usar para calcular el valor del ángulo; esto sí corresponde a la "*función* inversa" de la relación trigonométrica (nótese que en la consideración previa 4 se usa el término "*función*"): por ejemplo, la inversa de la secante –*sec* θ – es el ángulo tangente – áng *tan* θ o arc *tan* θ o "tan^{-1}" en algunas calculadoras). Se mencionan también los conceptos de triángulos semejantes y el de cociente (como una división).

2.- En la cuarta consideración previa se propone usar el teorema de Pitágoras como parte de la comprobación de los problemas de razones trigonométricas expuestos en el plan de clase, el uso de programas electrónicos y *software*. (Un análisis cuidadoso del tipo de problemas propuestos en los materiales oficiales que se resuelven por medio del teorema de Pitágoras, se encuentra en Reyes, 2009, pp.19-25).

Cuadro 3.2. Consideraciones previas de planes de clase de trigonometría 2006

PLAN DE CLASE	CONSIDERACIONES PREVIAS 2006
1	Este es el primer acercamiento que tienen los alumnos a las razones trigonométricas y su nombre, por lo que es probable que el maestro tenga que decir al grupo qué se entiende por cateto opuesto y cateto adyacente a un ángulo, o bien, que entre todos lo deduzcan, antes de iniciar con el llenado de la tabla. También es probable que se den cuenta de que éstas no son las únicas relaciones, pues existen sus inversas (cotangente, secante y cosecante). Aquí será necesario indicarles que por lo pronto sólo estudiarán las tres primeras. La discusión de las respuestas al inciso c es muy importante y se espera que los alumnos se den cuenta de que se trata de triángulos semejantes y a eso se debe que todos los cocientes que resultan de dividir, por ejemplo, el cateto opuesto entre la hipotenusa son constantes. Este cociente constante, con ayuda de una calculadora, puede servir para obtener el valor del ángulo y a la inversa, conociendo el valor del ángulo se puede obtener el valor del cociente constante. Esto mismo sucede con otras razones. Si los estudiantes usaron transportador para medir el ángulo A para llenar la tabla, habrá que hacerlos reflexionar en que la longitud de los lados no cambia la medida del ángulo (concepto visto en grados anteriores).

(Continúa)

Cuadro 3.2 (concluye)

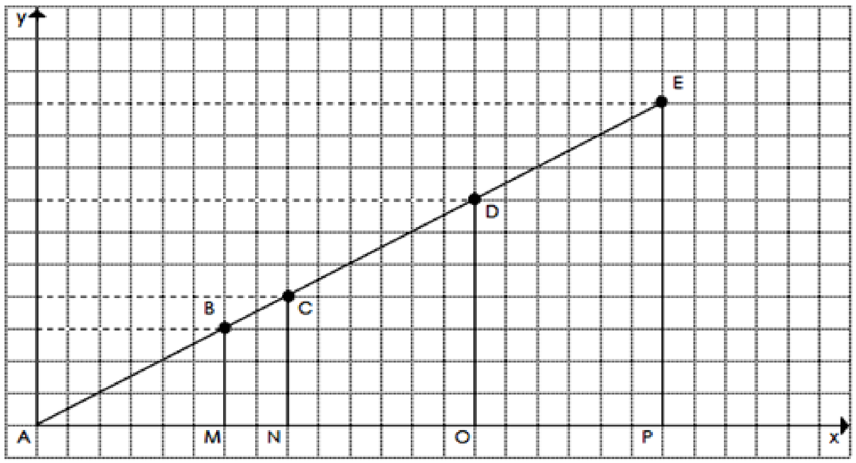
2	En este momento es importante que los alumnos recuerden que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre son complementarios (suman 90º) y dejarlos que exploren con diferentes triángulos rectángulos para responder la última pregunta. También es importante que concluyan que: el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento y que la tangente de un ángulo es inversa multiplicativa a la tangente de su complemento. Se les puede dejar como tarea el problema que se enuncia más abajo. La finalidad es que indaguen la manera de obtener la medida que falta. Al revisarla es importante que vean la necesidad de recurrir al teorema de Pitágoras para obtenerla.
3	En la puesta en común es importante que los alumnos expongan y argumenten claramente a sus compañeros su procedimiento y cálculo, para que concluyan que dependerá de la situación que plantee el problema y los datos que contenga, la elección de la razón trigonométrica.
4	En la puesta en común los estudiantes fundamentarán por qué usaron determinada función, es importante que se analice primero un problema y hasta que todos estén de acuerdo y les quede claro se pasará al siguiente. Si el tiempo lo permite se puede plantear el siguiente problema y si no se puede dejar como tarea y analizarlo en la siguiente clase.
5	Consigna 1 En la puesta conviene resaltar la utilidad del teorema de Pitágoras para comprobar los resultados que se obtienen mediante razones trigonométricas. Consigna 2 En el proceso de resolución se puede sugerir a los alumnos que necesiten ayuda, el uso de un gráfico. Si existen condiciones, se sugiere trabajar la resolución de problemas usando el Programa Cabri Géomètre (Geometría Dinámica, EMAT) u otro Software.

Para la intención didáctica 1, “[…] construir la noción de razón trigonométrica”, se propuso el problema que se muestra en la figura 3.6.

Nótese que para llenar los espacios en blanco de la tabla se establecen de antemano las relaciones entre los lados de cada uno de los cuatro triángulos rectángulos que se forman en la figura que aparece antes de la tabla. Al alumno se le pide completar la tabla y contestar las preguntas; y se le da una pista en un recuadro con las razones entre los lados correspondientes de los triángulos rectángulos semejantes que se forman.

Intención didáctica 1. Que los alumnos empiecen a construir la noción de razón trigonométrica

Consigna: Organizados en equipos y con base en la información que proporciona el siguiente diagrama, completen la tabla. Redondeen sus resultados sólo hasta centésimos. Después contesten las preguntas.



$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AM}{AB} = \frac{A\,N}{AC} = \frac{AO}{AD} = \frac{AP}{AE}$$

TRIÁNGULO	ÁNGULO A	CATETO ADYACENTE	CATETO OPUESTO	HIPOTENUSA	$\frac{cat.opuesto}{hipotenusa}$ (SENO)	$\frac{cat.adyacente}{hipotenusa}$ (COSENO)	$\frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$ (TANGENTE)
AMB	27º	6		6.71			
ANC	27º		4	8.90			
AOD		14	7	15.65			
APE			10	22.36			

a) ¿Cómo fue el resultado de la razón seno en los cuatro triángulos?____

b) ¿Qué sucede con la razón coseno y tangente en los cuatro triángulos?____

Figura 3.6. Plan de clase (1/5) PEMS 2006 (DGEST, 2006)

En las consideraciones previas para este plan de clase se sugiere al docente que, como es la primera vez que el alumno se encuentra en acercamiento con este tipo de términos en su educación escolar, debe explicar qué es cateto opuesto y qué es cateto adyacente; y también debe explicar que existen sus recíprocas (cotangente, secante y cosecante).

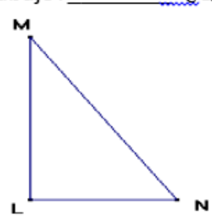
Para la intención didáctica 2 se propone el problema de la figura 3.7.

De acuerdo con el plan de clase 1/5, se espera que los alumnos hayan *construido la noción de razón trigonométrica,* y resuelvan el problema en el plan de clase 2/5. Al resolver el problema los estudiantes deberán recordar conocimientos previos tales como que *la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre 90°*.

Intención didáctica 2. Que los alumnos reflexionen acerca de la relación que existe entre las razones trigonométricas de un ángulo y las de su complemento.

Consigna: Organizados en equipos, contesten lo que se plantea enseguida.

¿Cuánto suman los ángulos M y N en el triángulo rectángulo que aparece abajo?_________ ¿Qué nombre reciben esos ángulos?________________



sen M =	sen N =
cos M =	cos N =
tan M =	tan N =

¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el coseno de sus complemento?______________________________

¿Si el seno de un ángulo de 30 grados es igual a 0.5, ¿a qué es igual el coseno de un ángulo de 60 grados?______________

¿A qué es igual el producto de la tangente de un ángulo de 30 grados por la tangente de un ángulo de 60 grados?__________________

Figura 3.7. Problema propuesto en el plan de clase 2/5 de trigonometría del PEMS 2006 (DGEST, 2006)

Como refuerzo de la intención didáctica 2, se propone un segundo problema: un triángulo rectángulo (véase la figura 3.8) el cual puede resolverse por medio del teorema de Pitágoras, de esa misma figura se solicita escribir las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

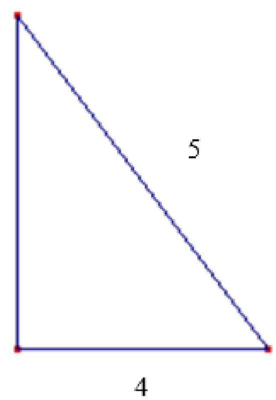


Figura 3.8 Ejercicio de tarea en el plan de clase 2/5 de trigonometría (DGEST, 2006)

Para el plan de clase 3/5 el problema es el que se muestra en la figura 3.9, nótese que se usa primero la palabra *función* y al final la palabra *razón*. Para resolver el problema propuesto en el plan de clase 3, los alumnos necesitan tener dominio de la noción de *razón trigonométrica*.

La intención didáctica para este plan de clase es la misma que en el plan de clase 3/5, por lo que los conocimientos implicados son las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente).

Intención didáctica 3. Que los alumnos usen las funciones trigonométricas para resolver problemas.

Consigna 1. Organizados en parejas calculen la altura del asta bandera, si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37°.

Consideraciones previas: En la puesta en común es importante que los alumnos expongan y argumenten claramente a sus compañeros su procedimiento y cálculo, para que concluyan que dependerá de la situación que plantee el problema y los datos que contenga, la elección de la razón trigonométrica.

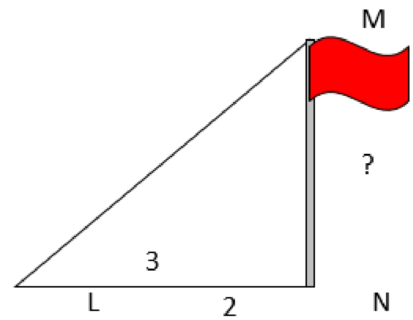


Figura 3.9. Plan de clase 3/5 de trigonometría (DGEST, 2006)

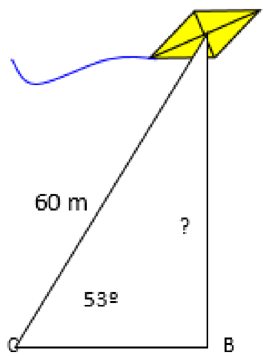
Nótese que los datos de los problemas propuestos en los dos primeros planes de clase son las medidas de dos lados del triángulo rectángulo implicado. En los planes de clase 3/5 y 4/5 los datos son la medida de uno de los lados y el valor de uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo implicado. (Una revisión sobe la resolución de problemas trigonométricos de acuerdo con el tipo de datos en el plan de estudios de 2006 se encuentra en la tesis de maestría de Reyes (2009), en la que se presenta una clasificación de los problemas que se resuelven mediante teorema de Pitágoras y los que se resuelven mediante trigonometría, dependiendo del tipo de datos.)

El problema del plan de clase 4/5 es el que se muestra en la figura 3.10

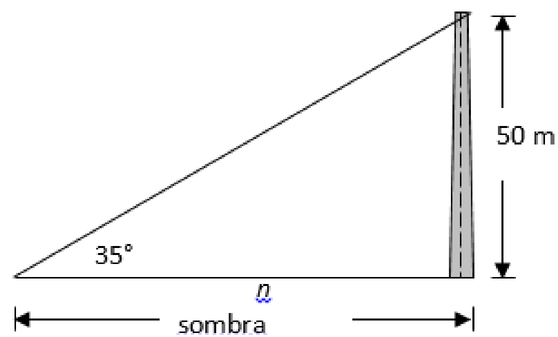
Intención didáctica 4. Que los alumnos usen las funciones trigonométricas para resolver problemas.

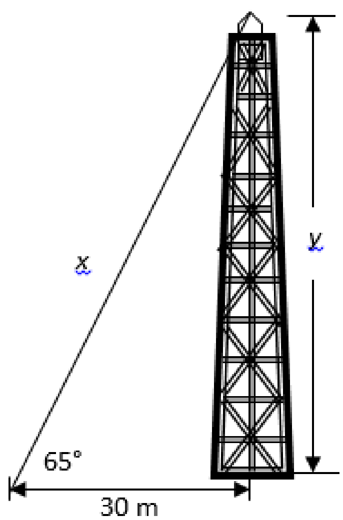
Consigna 1. En parejas, resuelvan los problemas siguientes:

a) ¿A qué altura del piso se encuentra la punta del papalote, cuando el hilo que lo sostiene mide 60 m y forma con el piso un ángulo de 53°.



b) Calculen cuánto mide la sombra de la torre.



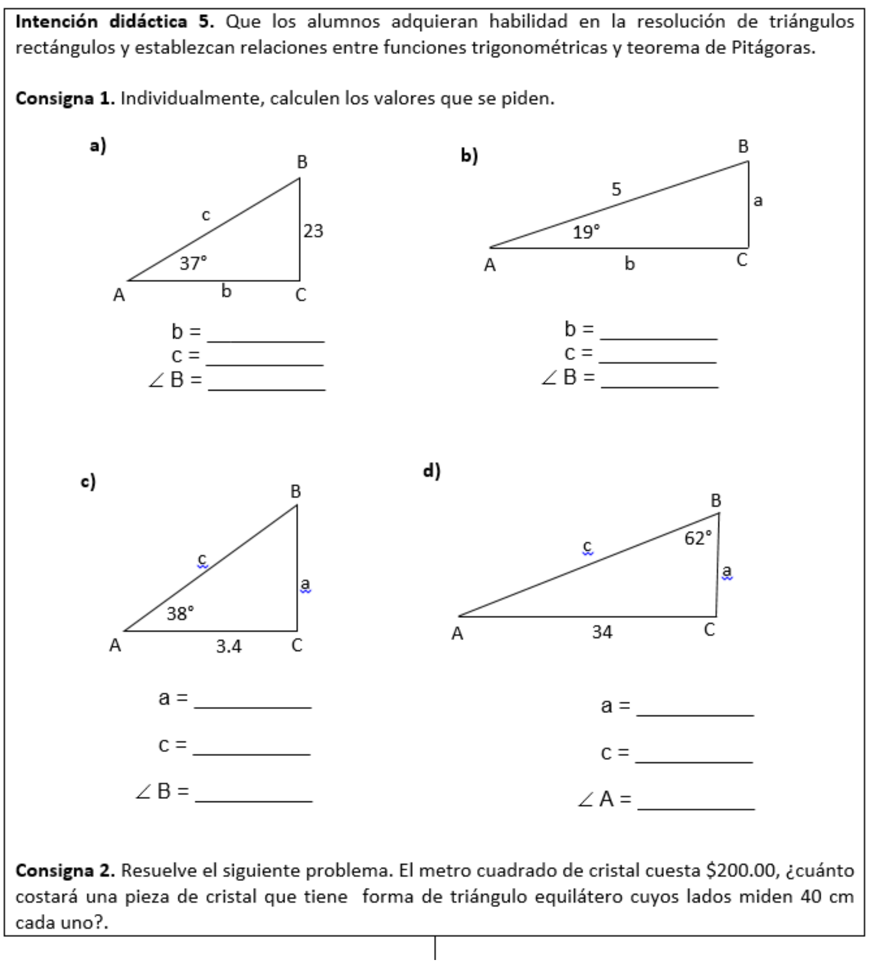


Encuentren la altura de la torre y la longitud del tirante que la sostiene.

Figura 3.10. Problema propuesto para el plan de clase 4/5 trigonometría (DGEST, 2006)

En el plan de clase 5/5 se proponen algunos problemas (véase la figura 3.11), se muestran triángulos rectángulos y se pide calcular la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo y la amplitud de uno de sus ángulos agudos a partir de los datos: la longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo y la amplitud del otro ángulo agudo.

Así, en todos los casos de este conjunto de planes de clase únicamente se pide calcular la longitud de dos de los lados de un triángulo rectángulo por medio de una razón trigonométrica. La amplitud del otro ángulo agudo se puede determinar mediante la diferencia de ángulos complementarios.



Intención didáctica 5. Que los alumnos adquieran habilidad en la resolución de triángulos rectángulos y establezcan relaciones entre funciones trigonométricas y teorema de Pitágoras.

Consigna 1. Individualmente, calculen los valores que se piden.

a)

b = ___________
c = ___________
∠ B = ___________

b)

b = ___________
c = ___________
∠ B = ___________

c)

a = ___________
c = ___________
∠ B = ___________

d)

a = ___________
c = ___________
∠ A = ___________

Consigna 2. Resuelve el siguiente problema. El metro cuadrado de cristal cuesta $200.00, ¿cuánto costará una pieza de cristal que tiene forma de triángulo equilátero cuyos lados miden 40 cm cada uno?.

Figura 3.11. Plan de clase 5/5 de trigonometría (DGEST, 2006)

El problema que se propone como evaluación del cuarto bloque es similar a los que se han descrito anteriormente (véase la figura 3.12). En éste se pide calcular la altura de una torre, dada la distancia y el ángulo desde donde se observa su punto más alto.

En la evaluación estaban implícitas las competencias. En el PPEM 2006 se consideró este rubro como un aspecto fundamental de cualquier propuesta curricular y, en la medida de su eficacia, permitiría mejorar los niveles de desempeño de los alumnos y del maestro así como la calidad de las situaciones didácticas que se plantean para lograr el aprendizaje (SEP, 2006a, p. 52).

Así, por medio de este tipo de evaluaciones se determinaba si el alumno tenía los conocimientos, habilidades, competencias y valores para enfrentar la resolución de problemas y seguir aprendiendo a lo largo de su vida (así lo mencionaba el PPEM 2006): “Las pruebas o los exámenes que se utilicen deben permitir a los maestros conocer si los adolescentes han adquirido ciertos conocimientos o ciertas habilidades” (SEP, 2006 a, p. 54).

1. Calcular la altura de una torre si desde una distancia de 50 m se observa su punto más alto con un ángulo de 48º.

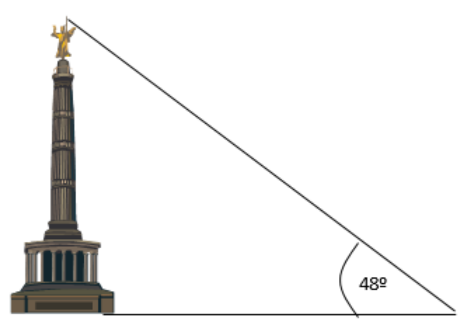


Figura 3.12. Problema propuesto como evaluación de bloque 4 en el PPEM 2006

Además de los PE 2006 y de los planes de clase, la SEP proporcionó de manera gratuita libros de texto para todos los alumnos que cursaban la educación secundaria, la selección de dichos libros de texto correspondía a las escuelas secundarias, de manera individual y colegiada. Los libros de texto los elaboraban las editoriales privadas, y eran sometidos para su aprobación a la SEP. Aunado a esto, se decidió en el PE 2006, que las escuelas secundarias contarían con equipos de cómputo y se promovería la conectividad para tener acceso a diversos programas educativos como Enseñanza de la Física con Tecnología (EFIT) y Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT) (SEP, 2006 a, p. 51).

La trigonometría en los instrumentos Excale y ENLACE

En 2005 y 2008 se aplicaron los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (Excale), un instrumento desarrollado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), a muestras de estudiantes en función de su grado escolar (tercer grado de educación preescolar, sexto grado de educación primaria y tercer grado de educación secundaria), para conocer el comportamiento del sistema educativo nacional. En su página de internet el INEE, se menciona que Excale "está apegado al currículum": "Los Excale son pruebas de aprendizaje de gran escala que miden el logro escolar de los estudiantes de Educación Básica en distintas asignaturas y grados. Estos exámenes tienen tres características distintivas: son criteriales, están alineados al currículo y son matriciales".

Por cada una de estas características el INEE refiere que:

> (Excale) Se diseñan para evaluar el dominio que tienen los estudiantes de una disciplina (matemáticas), están alineados al currículo porque su propósito es evaluar los aprendizajes pretendidos por los planes y programas de estudio nacionales; y son matriciales porque los reactivos que conforman una prueba se agrupan en bloques para ser distribuidos entre los alumnos; no todos contestan las mismas preguntas, pero con las respuestas de todos se obtienen resultados del examen en su conjunto. (Sánchez, 2009)

En el área de matemáticas se encuentra el eje de contenido de geometría, en el que se incluye el contenido “Resolver problemas que implican calcular razones trigonométricas” con un nivel de dificultad de 795 puntos de un máximo de 800 puntos. En la figura 3.13 se muestra la descripción técnica del contenido temático, y en la figura 3.14 se muestra el reactivo con el que se evaluó dicho contenido en dos años (2005 y 2008).

Si Excale está alineado al “currículo” (planes y programas de estudio) y evalúa los aprendizajes de los alumnos como lo menciona el INEE, el reactivo propuesto para trigonometría (véase la figura 3.14) requiere que se apliquen no sólo los conocimientos de trigonometría, sino también los conocimientos referidos a los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, la construcción de las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia, la caracterización de una recta secante y la tangente a una circunferencia, así como los conocimientos sobre el perímetro de una circunferencia. Todos estos conocimientos van más allá de lo que se plantea en los problemas propuestos tanto en el LMM, el FADM y los planes de clase del PEMS 2006 (véanse las figuras 2.4 a la 2.12, y 3.6 a la 3.12); en éstos únicamente se pide encontrar el valor de uno de los lados referidos a un triángulo rectángulo, ya sea en un polígono inscrito en una circunferencia o el triángulo que se forma con la base y altura de un edificio, una torre, un papalote, un poste, etc. En el reactivo propuesto de Excale se le pide al alumno que calcule la distancia *d*, misma que no se especifica en la figura propuesta y se facilitan los datos mínimos para la resolución del problema (véase la figura 3.14).

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas	**b. Grado y nivel educativo:** 3º Secundaria
c. Área : Aritmética	**d. Tema:** Medición y cálculo geométrico
e. Contenido: Resolución de triángulos rectángulos **f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos:** Resolución de problemas que impliquen aplicar las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

En 3° de secundaria se presenta a los estudiantes un nuevo panorama de aplicaciones prácticas con el estudio de las razones trigonométricas. La posibilidad del cálculo de distancias inaccesibles, por ejemplo, abre la posibilidad de una gran cantidad de problemas reales a resolver. También por primera vez se pueden resolver triángulos combinando ángulos y lados. Por otro lado, el teorema de Pitágoras aparece como una poderosa herramienta en la que conviene, para su mayor comprensión, poner énfasis en sus diversas demostraciones, "muchas de ellas basadas en la idea de partición y equivalencia de áreas que por su fuerte carácter visual las hace accesibles a los alumnos" y les permite ver sus aplicaciones más allá de la relación entre las longitudes de los catetos y la hipotenusa.

b. Delimitación del contenido:

En tanto que no se está evaluando la capacidad del estudiante para calcular raíces cuadradas, se debe evitar expresar los números irracionales en forma decimal.

c. Importancia del contenido:

En el inciso anterior ya señalamos algunos puntos importantes de este contenido. Además, como se afirma en el Libro para el Maestro: "La generalización de las razones trigonométricas a las funciones circulares permite construir modelos para una multitud de fenómenos periódicos que se estudian en la física, la biología y otras disciplinas. Aunque en secundaria sólo se presentan algunos de los temas iniciales de la trigonometría, su estudio es rico en situaciones que pueden interesar a los alumnos (cálculo de distancias inaccesibles, estudio de polígonos regulares). También los prepara para el estudio de temas más avanzados, como son los números complejos, los vectores, las coordenadas polares, etc." (Libro para el maestro, pp. 235, 237).

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

Tanto el teorema de Pitágoras como las razones trigonométricas se estudian por primera vez en tercero de secundaria.

e. Conocimientos y habilidades previos:

- Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas a la resolución de triángulos rectángulos
- Saber operar con expresiones algebraicas que se relacionan comúnmente con el teorema de Pitágoras; por ejemplo, reconocer $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$.

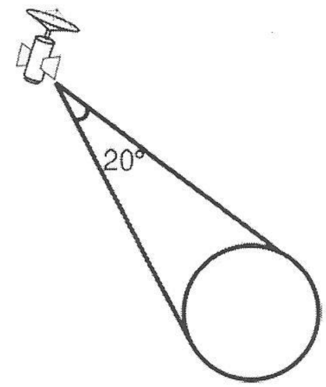
3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

J. J. Rivaud, Trigonometría, Ed. Limusa, México, 1987.
J. Alarcón Bortolussi, et al., *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP, 2001.
J. Alarcón Bortolussi, et al., *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, SEP, 1994.
SEP-DGMME, *Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Secundaria*, México, SEP, 2004.

Figura 3.13. Descripción técnica del contenido de trigonometría en Excale

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En un momento dado desde un satélite artificial se ve la Tierra bajo un ángulo de 20°. Si el radio de la Tierra es de 6371 Km, calcula la distancia d del satélite a la superficie de la Tierra.



A) $d = \dfrac{3185.5}{\tan 10°} - 6371$ *

B) $d = \dfrac{6371}{\tan\ 20°} - 6371$

C) $d = \dfrac{3185.5}{sen\ 20°} - 6371$

D) $d = 3185.5 \times sen 10° - 6371$

* Respuesta correcta

Figura 3.14. Ejemplo de reactivo de trigonometría en Excale

Si bien en la ficha técnica del reactivo del Excale (véase la figura 3.13) se menciona que en el libro para el maestro "[…] la generalización de las razones trigonométricas a las funciones circulares permite construir modelos para una multitud de fenómenos […] que se estudian en la física, la biología y otras disciplinas" (Alarcón *et al.*,1994, pp. 235 y 237), esta afirmación no se ve reflejada en los problemas de aplicación propuestos en esos documentos (LMM, FADM y PEMS 2006): los problemas ahí planteados se refieren únicamente al cálculo de distancias inaccesibles y a elementos de polígonos regulares, destacándose el uso del triángulo rectángulo como el principal polígono de estudio para las razones trigonométricas.

Por ser un instrumento de gran escala que mide el logro escolar de los estudiantes de educación básica en matemáticas en México, las estadísticas expresan los porcentajes de aciertos nacionales obtenidos en la evaluación del contenido de trigonometría, siendo 26% en 2005 y 23% en 2008.

En 2005 los contenidos que se evaluaron para geometría fueron 42. El porcentaje nacional más alto en la escala de esos contenidos fue de 85%, que correspondió al contenido de "Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros"; el más bajo fue de 12%, que correspondió a "Identifica el poliedro que corresponde con un desarrollo plano"; quedando en el lugar 34.° el contenido de "Resolver problemas que implican calcular razones trigonométricas", con 26% nacional (véase el cuadro 3.3).

En 2008 los contenidos que se evaluaron para geometría fueron 49. El porcentaje nacional más alto en la escala de esos contenidos fue de 85%, que correspondió al contenido de "Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros", y el más bajo fue de 14%, que correspondió a "Resolver problemas que implican calcular el área de partes de un círculo". Quedó en el 42.° lugar el contenido de "Resolver problemas que implican calcular razones trigonométricas", con 23% (véase el cuadro 3.3).

Cuadro 3.3. Porcentajes de Excale en contenidos de geometría

Año	Contenidos	% Nacional
2005 42 contenidos evaluados	Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros	85%
	Resolver problemas que implican calcular razones trigonométricas	26%
	Identifica el poliedro que corresponde con un desarrollo plano	12%
2008 49 contenidos evaluados	Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros	85%
	Resolver problemas que implican calcular razones trigonométricas	23%
	Resolver problemas que implican calcular el área de partes de un círculo	14%

El contenido referido a trigonometría en Excale quedó a 8 lugares en 2005 y a 7 lugares en 2008 del último contenido; esto indica que los conocimientos sobre el tema que planteó el PEMS 2006 no se cumplieron en su totalidad y que habría que reflexionar sobre ello.

> […] esto quiere decir que los alumnos no interiorizaron los conocimientos previstos por el PE 2006. A nivel nacional, en ninguna de la áreas del currículo (aritmética 46.86%, geometría 45.73%, tratamiento de la información y probabilidad 42.34% y álgebra 35.74%) se obtienen resultados aceptables, es decir, ni siquiera 50% de las preguntas de cada una de las áreas fueron resueltas correctamente. […] Los estudiantes manifiestan dificultades para usar de manera flexible sus conocimientos para calcular perímetros de figuras, […] o bien si se les presenta información que no

coincide textualmente con las fórmulas que conocen […], también en la comprensión de instrucciones. (Sánchez, 2009, pp. 111-113)

Las estadísticas nos indican que el nivel de logro nacional está por debajo del básico (Indica carencias importantes en el dominio curricular de los conocimientos, habilidades y destrezas escolares, lo cual expresa una limitación para progresar satisfactoriamente en la materia) en el tema de resolver problemas que implican calcular razones trigonométricas y un porcentaje mínimo en el nivel básico (Indica un dominio suficiente o elemental de conocimientos, habilidades y destrezas para poder progresar satisfactoriamente en la materia) en los temas de aritmética. Con ello se justifica el interés de esta tesis en conocer las nociones que tienen los alumnos de tercer grado de educación secundaria después de que el docente les imparte el tema de razones trigonométricas.

Por otro lado, a partir del año 2006 se implementó en México la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), misma en la que en los años de 2006, 2007 y 2008 se incluyó un reactivo para el tema de trigonometría; en los años 2009 y 2010 se incluyeron tres reactivos para el tema de trigonometría.

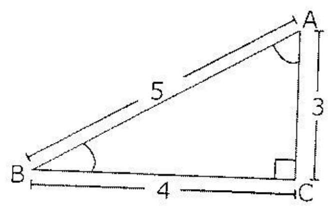
A continuación se presentan dichos reactivos. Nótese que en el reactivo 116 propuesto para el examen ENLACE de 2006 se incluye en las respuestas como una opción *csc B* (cosecante de *B)*, que es una razón trigonométrica recíproca o inversa multiplicativa ($csc\ B = \frac{1}{sen\ B}$) , $csc\ B = \frac{5}{3}$, aunque es una de las tres opciones incorrectas, la razón trigonométrica *cosecante* no se incluye en parte alguna de los

PE 2006, sólo en la ID 1 del plan de clase 1/5 (véase la figura 3.15) se menciona de forma inadecuada.

ENLACE.06_M1_ 3°SEC

MATEMÁTICAS

116. Observa el siguiente triángulo:



En relación con los datos del triángulo anterior, ¿cuál de las siguientes razones trigonométricas es **correcta**?

A) sen $A = \frac{4}{3}$

B) cos $B = \frac{4}{5}$

C) tan $A = \frac{5}{4}$

D) csc $B = \frac{3}{5}$

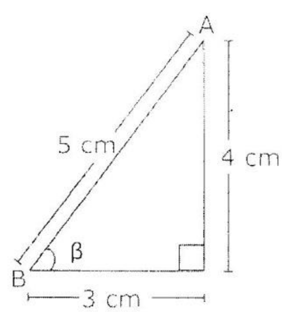
Figura 3.15. Reactivo propuesto en el examen ENLACE de 2006

En un reactivo distinto, véase la figura 3.16, se propone la tangente trigonométrica como un contenido para ser evaluado. Esto concuerda con lo que se pide en el plan de clase 1/5 (véase la figura 3.6), en donde la intención didáctica es “construir la noción de razón trigonométrica (seno, coseno y tangente)” y problema propuesto en el plan de clase 2/5 (véase la figura 3.7). El reactivo del cuadernillo de ENLACE de 2007 contiene los mismos datos numéricos en la figura que el reactivo en ENLACE de 2006; un triángulo rectángulo con la primera terna pitagórica: 3, 4 y 5 unidades de longitud. En la figura de 2007 se añadió la notación del ángulo *B* como β, la segunda letra del alfabeto griego usada convencionalmente en los libros de texto especializados en matemáticas. Nótese además que los datos numéricos de la figura propuesta para el reactivo 116 de enlace de 2007 contienen unidades de longitud (cm), mismas que en la figura del reactivo 116 del examen ENLACE de 2006 (véase la figura 3.16) no están considerados y en ella sólo se encuentran los datos numéricos carentes de unidades de medida.

ENLACE.07_M1_3 SEC°

MATEMÁTICAS

116. Observa el siguiente triángulo rectángulo:



¿Cuál es la razón de la tangente del ángulo β?

A) $\text{Tan}(\beta) = \frac{3}{4}$

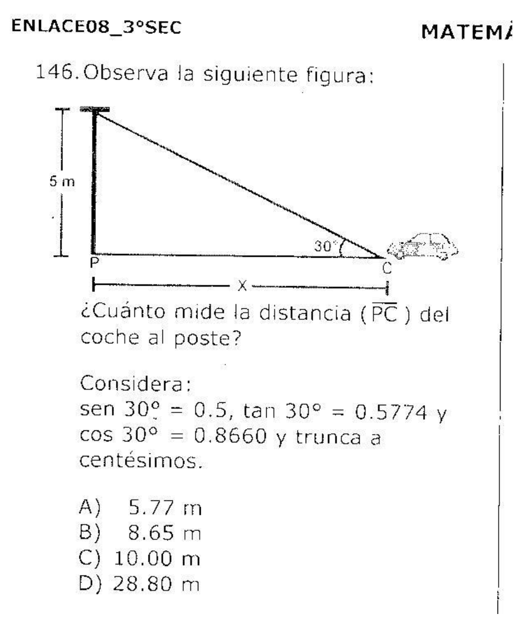
B) $\text{Tan}(\beta) = \frac{4}{3}$

C) $\text{Tan}(\beta) = \frac{3}{5}$

D) $\text{Tan}(\beta) = \frac{4}{5}$

Figura 3.16. Reactivo propuesto en ENLACE de 2007

Para contestar el reactivo 146 del cuadernillo ENLACE de 2008 (véase la figura 3.17), se necesita conocer y aplicar algunos de los conocimientos que el alumno aprendió respecto a las razones trigonométricas y que se especifican en los programas de estudio 2006, ya que se requiere resolver un problema de cálculo de distancia. Los datos son el valor del *seno*, el *coseno* y la *tangente* del ángulo de 30°, además de la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° (5 m). El alumno deberá seleccionar cuál de las tres razones trigonométricas necesita para calcular la longitud *x* del otro cateto (adyacente). Este reactivo es muy similar a los de los planes de clase 3/5 y 4/5, en donde la ID es “Que los alumnos usen las funciones trigonométricas para resolver problemas” (véanse las figuras 3.9 y 3.10). El contexto que se plantea en este reactivo de ENLACE está acorde a lo que propone el programa de estudios de 2006, aunque como se había mencionado antes los planes de clase hacen mención a una función y no a una razón trigonométrica.


ENLACE08_3°SEC MATEM

146. Observa la siguiente figura:

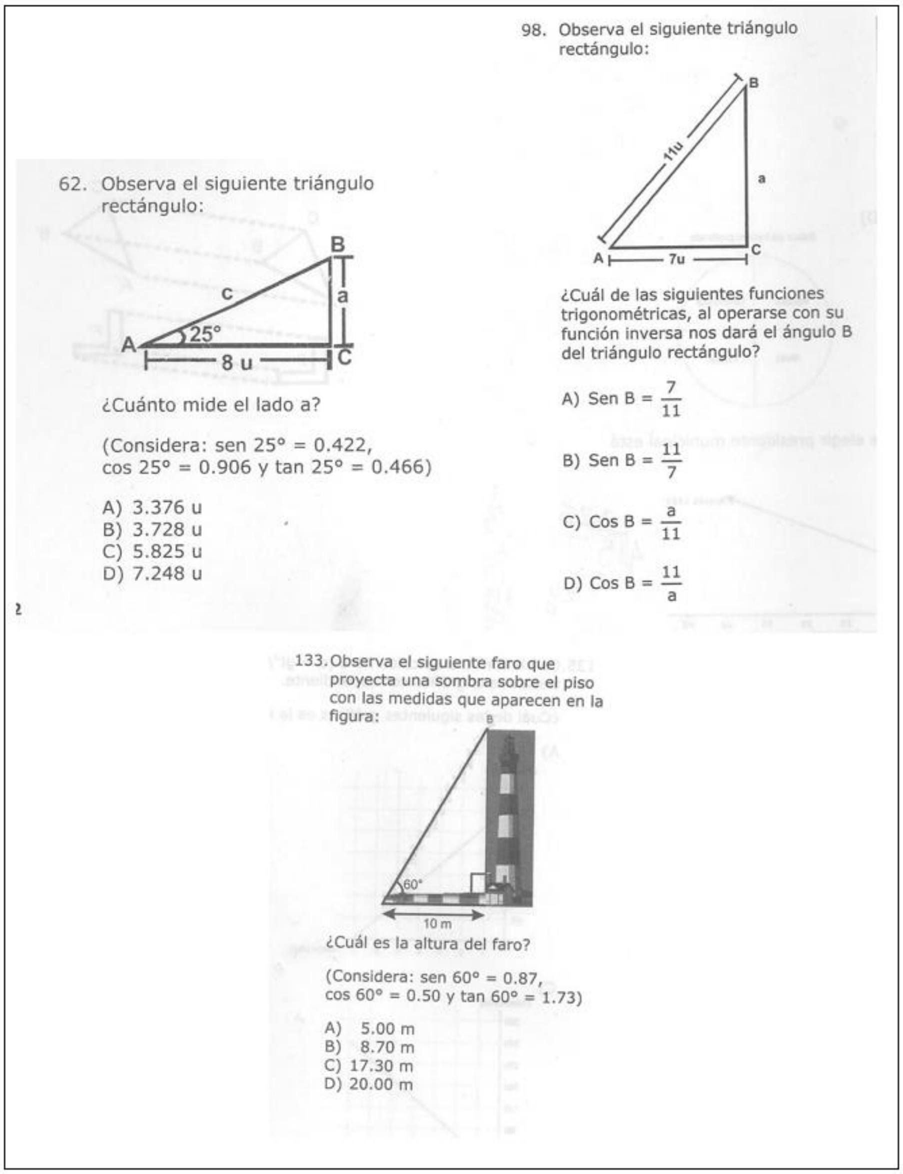
¿Cuánto mide la distancia ($\overline{PC}$) del coche al poste?

Considera:
sen 30° = 0.5, tan 30° = 0.5774 y cos 30° = 0.8660 y trunca a centésimos.

A) 5.77 m
B) 8.65 m
C) 10.00 m
D) 28.80 m

Figura 3.17. Reactivo propuesto en ENLACE de 2008

Los reactivos 62 y 98 de la prueba ENLACE de 2009 (véase la figura 3.18), se refieren a la resolución de un triángulo rectángulo convencional; en el reactivo 62, se solicita la medida de longitud del lado opuesto al ángulo de 25°. En el reactivo 98 se usan los términos *función* y *función inversa*, en lugar de función recíproca o función inversa multiplicativa, la confusión se traslada a la prueba ENLACE a nivel nacional.


62. Observa el siguiente triángulo rectángulo:

¿Cuánto mide el lado a?

(Considera: sen 25° = 0.422, cos 25° = 0.906 y tan 25° = 0.466)

A) 3.376 u
B) 3.728 u
C) 5.825 u
D) 7.248 u

98. Observa el siguiente triángulo rectángulo:

¿Cuál de las siguientes funciones trigonométricas, al operarse con su función inversa nos dará el ángulo B del triángulo rectángulo?

A) Sen B = $\frac{7}{11}$

B) Sen B = $\frac{11}{7}$

C) Cos B = $\frac{a}{11}$

D) Cos B = $\frac{11}{a}$

133. Observa el siguiente faro que proyecta una sombra sobre el piso con las medidas que aparecen en la figura:

¿Cuál es la altura del faro?

(Considera: sen 60° = 0.87, cos 60° = 0.50 y tan 60° = 1.73)

A) 5.00 m
B) 8.70 m
C) 17.30 m
D) 20.00 m

Figura 3.18. Reactivos propuestos en ENLACE de 2009

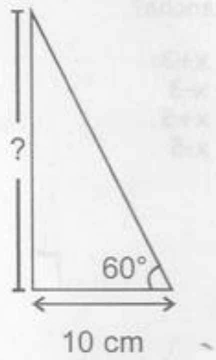
El reactivo 133 de la misma prueba es un problema de distancia como en el reactivo del cuadernillo de enlace de 2007. Para este reactivo el alumno debe poner en práctica sus conocimientos sobre las razones trigonométricas y decidir cuál es el valor que debe usar (*seno*, *coseno* o *tangente*) para poder calcular el cateto opuesto al ángulo de 60° y encontrar el dato de la altura del faro.

Para la prueba ENLACE 2010 se proponen nuevamente tres reactivos a resolver, la línea que se sigue al proponer los reactivos 62, 98 y 134 del cuadernillo de ese año (véase la figura 3.19), es similar a los reactivos de enlace anteriores: resolución de triángulos rectángulos, así como seleccionar la razón trigonométrica que se necesita para poder encontrar el valor de la medida solicitada. Sin embargo hay un cambio en el reactivo 134 ya que se solicita que se obtenga el valor del ángulo λ, situación que no había ocurrido en ninguno de los reactivos de la prueba ENLACE anteriores, para ello el alumno deberá tener los conocimientos para utilizar las funciones arco coseno ($\lambda = \frac{1}{cos\ 8/9}$), o coseno a la menos uno, $\lambda = cos^{-1}\ \frac{8}{9}$.

Las ambivalencias en el lenguaje se siguen presentando en el reactivo 98 al usar razones y funciones trigonométricas.

La elaboración de conjeturas y de relación de conceptos en el tema de razones trigonométricas queda en manos del alumno como lo hace notar el programa de estudios de 2006.

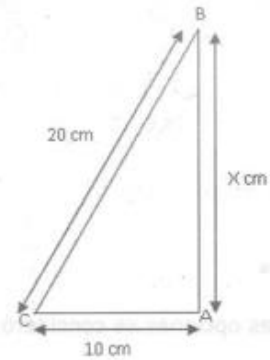
62. Observa el siguiente triángulo rectángulo:



¿Cuál es la longitud del cateto faltante? (Considera sen 60°=0.86, cos 60°=0.5, tan 60°=1.73)

A) 5.00 cm
B) 8.60 cm
C) 17.30 cm
D) 20.00 cm

98. Observa el siguiente triángulo rectángulo:

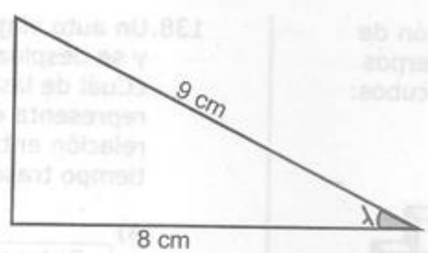


¿Cuál es la razón trigonométrica que nos da el valor de la función trigonométrica con la que se puede calcular la medida del ángulo B?

A) Sen B = 10/20
B) Sen B = 20/10
C) Cos B = x/10
D) Cos B = 20/x

ENLACE.10_3°SEC

134. Eréndira tiene que obtener el valor de (λ) del siguiente triángulo mediante razones trigonométricas:



¿Cuál es el valor de λ que Eréndira debe encontrar?

A) 30.3°
B) 42.0 °
C) 46.25°
D) 69.7°

Figura 3.19. Reactivos propuestos en ENLACE de 2010

“No obstante los cambios de enfoque, así como el énfasis en lo básico de los conocimientos y en el desarrollo de habilidades y actitudes, los contenidos de los programas de estudio de las diferentes asignaturas han impedido la puesta en práctica de los enfoques pedagógicos introducidos en 1993. Además, la atomización de los contenidos ha generado dificultades en la práctica, por lo que el trabajo de integración para relacionar los contenidos fragmentados que cada profesor aborda en el tiempo de clase queda en manos de los alumnos” (SEP, 2006a, p. 17).

GRADO	ENTIDAD	AÑO	MATEMÁTICAS					ALUMNOS
			MODALIDAD				GLOBAL	
			GENERAL	PARTICULAR	TÉCNICA	TELESECUNDARIA		
1°	DISTRITO FEDERAL	2009	494.1	576.9	512.0	464.3	511.7	146,771
		2010	466.3	565.4	489.1	467.9	487.7	147,122
		2011	473.0	565.6	487.2	456.1	491.2	144,279
		2012	497.0	589.3	513.3	473.5	515.6	142,317
2°	DISTRITO FEDERAL	2009	502.8	588.5	513.6	490.3	519.2	141,478
		2010	492.3	578.8	511.9	493.1	511.3	141,397
		2011	497.2	597.2	515.5	484.2	517.8	137,756
		2012	515.7	606.2	526.6	511.1	533.2	136,559
3°	DISTRITO FEDERAL	2006	512.6	599.9	524.9	495.6	529.2	118,191
		2007	525.6	621.2	530.6	507.9	542.5	130,776
		2008	529.0	631.0	536.9	515.3	548.0	133,226
		2009	525.1	604.9	537.0	491.5	541.4	134,906
		2010	516.8	589.1	528.6	490.4	531.6	132,457
		2011	515.8	590.8	533.3	510.6	533.1	127,866
		2012	535.6	616.8	539.4	510.9	550.0	125,104
GLOBAL	DISTRITO FEDERAL	2006	512.6	599.9	524.9	495.6	529.2	118,191
		2007	525.6	621.2	530.6	507.9	542.5	130,776
		2008	529.0	631.0	536.9	515.3	548.0	133,226
		2009	506.8	590.1	520.5	482.4	523.7	423,155
		2010	490.8	577.7	509.0	483.6	509.4	420,976
		2011	494.4	584.3	510.8	483.2	513.2	409,901
		2012	515.2	603.9	525.7	498.6	532.2	403,980

Figura 3.20. Media aritmética a nivel nacional de la prueba ENLACE. Periodo de 2006 a 2012.

De acuerdo con las estadísticas de la prueba ENLACE (véanse las figuras 3.20 y 3.21), se observa que el porcentaje más bajo en tercer grado de educación secundaria fue en el año 2007 y 2008, en la modalidad de secundaria general en el nivel *insuficiente*, con 50.8 % y el más porcentaje más alto fue en el año 2011 con 56.8%; el porcentaje cambia en la modalidad de escuela secundaria particular con 17.2 % en 2008 y 31.9% en 2011 en el nivel insuficiente; para la modalidad de escuela secundaria técnica se observa que el porcentaje más bajo es de 46.6% en 2009 y 56.6% en 2006 y 2012 en el nivel insuficiente; por último en la modalidad de telesecundaria el porcentaje es 56.0 % y el más alto 65.1% en 2009. Estos porcentajes a nivel nacional concuerdan con el informe que emitió el INEE acerca de los logros obtenidos en matemáticas, se está en el nivel insuficiente, no se han alcanzado los aprendizajes esperados por parte de los alumnos. A nivel Distrito Federal el nivel excelente se alcanzó en un 5.7 % en el año de 2012, aunque la estadística nos muestra que ha ido en aumento el nivel de logro *bueno* y excelente, no es suficiente para las expectativas y propósitos de la educación secundaria que plantea el PE 2006 y el perfil de egreso de ese mismo plan de estudios.

SECUNDARIA MATEMÁTICAS

SECUNDARIA MATEMÁTICAS			MODALIDAD – NIVEL DE LOGRO: GENERAL					PARTICULAR					TÉCNICA					TELESECUNDARIA					GLOBAL				
GRADO	ENTIDAD	AÑO	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS	INSUFICIENTE	ELEMENTAL	BUENO	EXCELENTE	ALUMNOS
1°	DISTRITO FEDERAL	2009	57.5	33.4	8.4	0.7	80,552	25.5	43.3	25.8	5.3	22,671	50.0	37.1	11.8	1.1	41,995	71.7	22.7	5.0	0.6	1,553	50.6	35.9	12.0	1.5	146,771
		2010	65.8	26.6	6.9	0.7	80,953	30.7	39.0	24.6	5.6	22,043	57.3	31.6	9.8	1.3	42,375	67.2	20.0	8.2	4.6	1,751	58.1	29.8	10.4	1.7	147,122
		2011	63.3	27.3	8.0	1.5	78,675	31.8	38.0	21.5	8.7	22,332	57.7	30.6	9.8	2.0	41,499	67.8	23.8	6.9	1.5	1,773	56.9	29.8	10.6	2.8	144,279
		2012	55.4	30.1	11.8	2.7	77,930	26.4	35.0	26.0	12.7	22,052	49.1	33.3	14.3	3.3	40,597	65.7	21.9	8.1	4.3	1,738	49.2	31.7	14.7	4.4	142,317
2°	DISTRITO FEDERAL	2009	51.9	38.3	9.1	0.7	77,876	20.0	44.9	30.2	4.9	22,268	47.5	40.3	11.2	1.0	39,628	58.7	31.3	8.3	1.8	1,706	45.7	39.8	13.0	1.5	141,478
		2010	59.1	32.0	8.0	0.8	77,701	26.7	39.9	26.2	7.2	21,981	50.7	36.3	11.5	1.6	39,989	59.0	27.3	11.8	1.9	1,726	51.7	34.4	11.9	2.0	141,397
		2011	55.5	31.9	10.6	2.0	75,669	23.2	36.4	27.5	12.9	21,499	48.9	33.6	14.0	3.5	38,756	62.1	25.1	10.2	2.7	1,832	48.7	33.0	14.2	4.1	137,756
		2012	52.3	32.5	11.3	3.9	73,986	22.8	35.3	26.3	15.6	21,907	48.8	33.1	12.9	5.2	38,780	56.3	27.9	10.1	5.7	1,886	46.7	33.1	14.1	6.1	136,559
3º	DISTRITO FEDERAL	2006	55.8	39.2	4.7	0.4	65,014	23.4	56.5	17.5	2.6	18,197	50.9	42.7	6.0	0.5	33,307	62.8	33.0	4.1	0.1	1,673	49.5	42.7	7.0	0.7	118,191
		2007	50.8	43.2	5.7	0.4	72,133	18.6	53.8	23.6	3.9	21,674	48.7	44.4	6.4	0.5	35,152	57.8	37.9	4.0	0.3	1,817	45.0	45.2	8.8	1.0	130,776
		2008	50.8	39.0	9.4	0.8	72,171	17.2	44.1	32.1	6.7	22,149	47.3	40.9	10.9	0.8	37,148	56.0	33.2	10.4	0.4	1,758	44.3	40.3	13.6	1.8	133,226
		2009	51.4	39.4	8.6	0.7	72,867	21.6	46.7	27.0	4.7	22,576	46.6	40.7	11.4	1.3	37,874	65.1	26.8	7.4	0.6	1,589	45.2	40.8	12.4	1.5	134,906
		2010	52.1	38.8	7.9	1.2	72,152	27.4	45.2	21.0	6.4	21,616	48.3	39.4	10.3	2.0	37,012	63.3	28.9	5.9	1.9	1,677	47.2	39.9	10.7	2.3	132,457
		2011	56.8	31.3	9.3	2.6	69,406	31.9	36.9	21.0	10.2	21,284	50.6	33.1	12.1	4.2	35,494	62.0	21.1	10.8	6.1	1,682	51.0	32.6	12.1	4.3	127,866
		2012	52.0	30.4	12.7	4.9	67,619	27.4	33.0	24.2	15.4	21,112	50.9	30.1	13.8	5.2	34,747	62.2	23.2	9.7	4.8	1,626	47.6	30.7	14.9	6.8	125,104
GLOBAL	DISTRITO FEDERAL	2006	55.8	39.2	4.7	0.4	65,014	23.4	56.5	17.5	2.6	18,197	50.9	42.7	6.0	0.5	33,307	62.8	33.0	4.1	0.1	1,673	49.5	42.7	7.0	0.7	118,191
		2007	50.8	43.2	5.7	0.4	72,133	18.6	53.8	23.6	3.9	21,674	48.7	44.4	6.4	0.5	35,152	57.8	37.9	4.0	0.3	1,817	45.0	45.2	8.8	1.0	130,776
		2008	50.8	39.0	9.4	0.8	72,171	17.2	44.1	32.1	6.7	22,149	47.3	40.9	10.9	0.8	37,148	56.0	33.2	10.4	0.4	1,758	44.3	40.3	13.6	1.8	133,226
		2009	53.7	36.9	8.7	0.7	231,295	22.4	45.0	27.7	5.0	67,515	48.1	39.3	11.4	1.2	119,497	65.0	27.1	7.0	1.0	4,848	47.3	38.8	12.5	1.5	423,155
		2010	59.3	32.2	7.6	0.9	230,806	28.3	41.3	24.0	6.4	65,640	52.3	35.6	10.5	1.6	119,376	63.2	25.3	8.6	2.8	5,154	52.5	34.5	11.0	2.0	420,976
		2011	58.6	30.1	9.3	2.0	223,750	29.0	37.1	23.3	10.6	65,115	52.6	32.4	11.9	3.1	115,749	63.9	23.4	9.3	3.4	5,287	52.3	31.8	12.3	3.7	409,901
		2012	53.3	31.0	11.9	3.8	219,535	25.5	34.4	25.5	14.5	65,071	49.5	32.3	13.7	4.5	114,124	61.2	24.5	9.3	5.0	5,250	47.9	31.8	14.6	5.7	403,980

Figura 3.21. Comparación de los niveles de desempeño de la prueba ENLACE de 2009 a 2012.

La trigonometría en el plan y programas 2011

En 2011 se efectuaron adecuaciones al plan de estudios de secundaria de 2006 y se "articuló el diseño, y el desarrollo del currículo para la formación de los alumnos de, primaria y secundaria" (SEP, 2011a, p. 9). La reforma en los contenidos de la educación básica se realizó con un nuevo enfoque: Competencias y Estándares Curriculares (EC). Este enfoque permea la educación en otros países tales como los Estados Unidos de Norteamérica, España, Alemania, Argentina y Brasil.

El plan de estudios de 2011 para la educación básica (PE 2011) se elaboró tomando como base las recomendaciones y los estándares curriculares emitidos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (sus siglas en inglés NCTM), así como las orientaciones de los dos planes anteriores (1993 y 2006), y los materiales diseñados a partir del PPE 2006: libro del maestro, fichero de actividades didácticas, y planes de clase. También se integró el uso de las Tecnologías de la Información en el aula (TIC) y las Habilidades digitales, que desde el plan 2006 estaban considerados en el uso de algunos *software* de matemáticas para una mayor comprensión de los contenidos.

De acuerdo con el PE 2011, el mapa curricular de la educación básica quedó articulado por los niveles educativos de preescolar, primaria y secundaria; en él "se presenta por espacios organizados en cuatro campos de formación" (SEP, 2011a. p. 44): Lenguaje y comunicación; Pensamiento matemático; Exploración y comprensión del mundo natural y social, y Desarrollo personal y para la convivencia. Estos campos de formación se dividen en cuatro periodos escolares, el primer periodo corresponde a los grados 1.°., 2.° y 3.° de la educación preescolar; el segundo periodo a los grados 1.°., 2.° y 3.° de educación primaria (se le denomina primaria baja); el tercer periodo corresponde a los grados 4.°., 5.° y 6.° de educación primaria (se le denomina primaria alta); y el cuarto periodo corresponde a los tres grados de la educación secundaria. Los estándares curriculares (EC) pertenecen a: español, matemáticas, ciencias, segunda lengua (inglés), y habilidades digitales. Estas asignaturas se imparten en la educación primaria y en la secundaria (véase la figura 3.22).

En el mapa curricular de la educación básica se muestran los EC. Los EC se organizan en cuatro periodos escolares de tres grados cada uno "[…] son el referente para el diseño de instrumentos que, de manera externa, evalúen a los alumnos" (SEP, 2011a, p. 46). Para lograr los EC se representa el mapa por espacios organizados en cuatro campos de formación, uno de ellos es el campo de formación *Pensamiento Matemático*, que abarca los cuatro periodos escolares. Para el segundo, tercer y cuarto periodos se cambia el nombre a matemáticas. En el cuarto periodo, que corresponde a la educación secundaria, se tienen las materias de matemáticas I, II y III, una por cada grado escolar. En matemáticas III se ubica el estudio de la *Trigonometría* (véase la figura 3.22).

El PE 2011 (SEP, 2011a) quedó regido por doce principios pedagógicos (véase el anexo 1), en los que se destaca que "la evaluación sea una fuente de aprendizaje y permita detectar el rezago escolar de manera temprana […] además de incluir los diversos aspectos que conforman el desarrollo curricular en su sentido más amplio" (SEP, 2011a, p. 30).

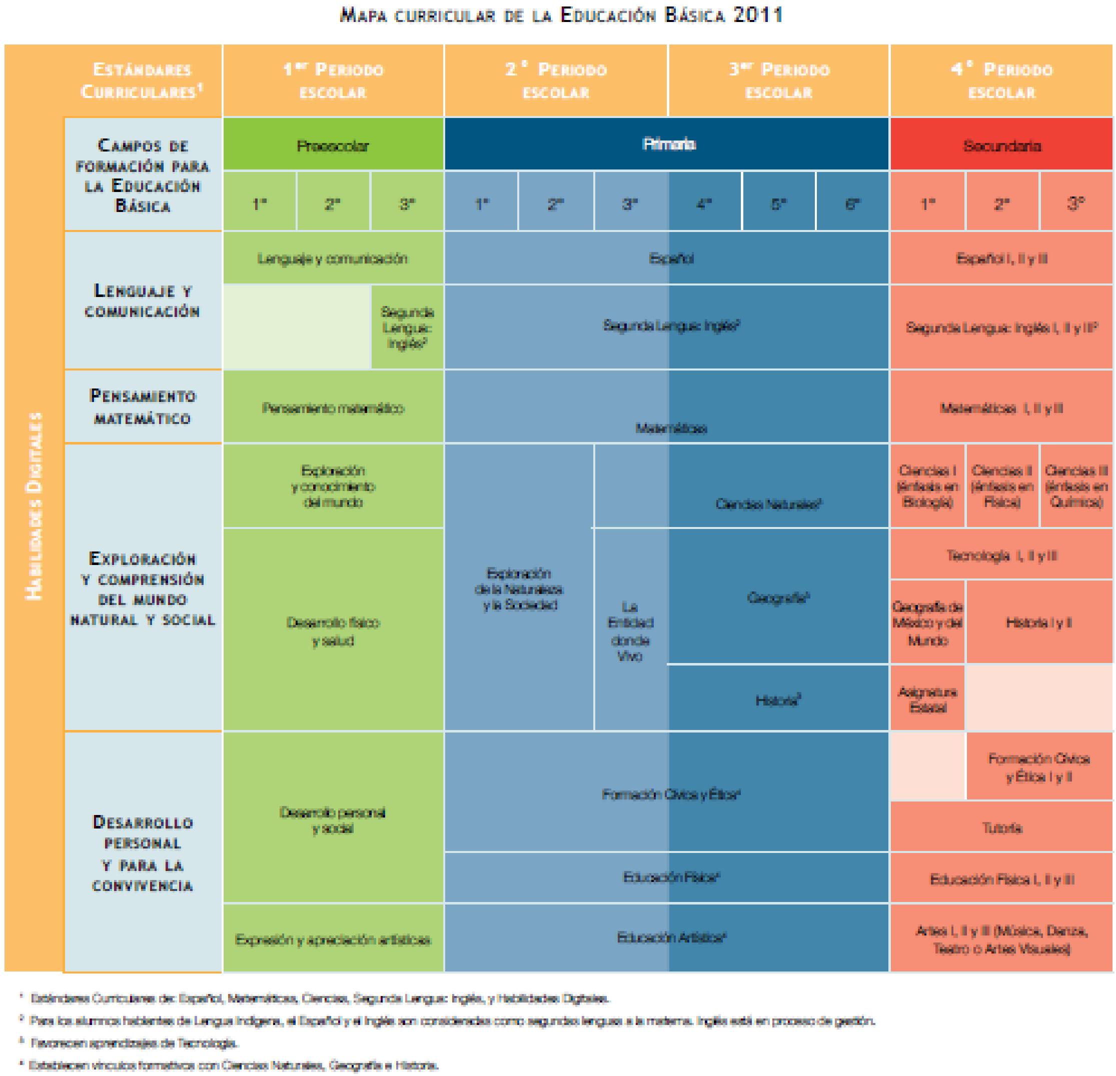


Figura 3.22. Mapa curricular de la educación básica Plan 2011

Para la elaboración del PE 2011 se tomaron en cuenta los estándares de matemáticas emitidos por la NCTM. Para efectos de análisis de esta investigación, se retomarán más adelante algunos estándares de matemáticas en relación con el tema de trigonometría.

De acuerdo con el PE 2011, el campo de formación Pensamiento matemático "articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla" (SEP, 2011a, p. 52). El pensamiento matemático en "[…] el nivel secundaria atiende al tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información al análisis de los recursos que se utilizan para presentarla" (SEP, 2011a, p. 53).

En el plan de estudios se menciona que a lo largo de la EB el campo de formación Pensamiento matemático en secundaria busca "que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica:

- Formular y validar conjeturas
- Plantearse nuevas preguntas
- Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución
- Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas de manera eficiente" (SEP, 2011a, p. 49).

Con esta y otras informaciones, se establecen las competencias que los alumnos deben desarrollar a lo largo del campo de formación pensamiento matemático en secundaria y aparecen en cada uno de los cinco bloques del plan de estudios de tercer grado de educación secundaria, quedando como "competencias que se favorecen": Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, Manejar técnicas eficientemente.

El plan de estudios de matemáticas 2011 está dividido en cuatro ejes:

1.- Sentido numérico y pensamiento algebraico
2.- Forma, espacio y medida
3.- Manejo de la información
4.- Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Al igual que en el plan de estudios 2006, en el plan de estudios 2011 se incluyen tres ejes en la materia de matemáticas, en el eje Forma espacio y medida se ubica el tema de trigonometría; el PE 2011 se compone de cinco bloques para cada grado escolar del nivel secundaria; el conjunto de habilidades, destrezas y valores que se promovían en el PE 2006 se transforman en competencias para este nuevo plan de estudios 2011.

La forma en que se estructuran los ejes de matemáticas es la siguiente:

> De cada uno de los ejes se desprenden varios temas y para cada uno hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Los temas son *grandes ideas matemáticas* cuyo estudio requiere un desglose más fino (los contenidos), y varios grados o incluso niveles de escolaridad. Además de los ejes, temas y contenidos, existe un elemento más que forma parte de la estructura de los programas que son los *aprendizajes esperados* y se enuncian en la primera columna de cada bloque temático. Estos

aprendizajes señalan, de manera sintética, los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio de varios contenidos, incluidos o no en el bloque en cuestión. (SEP, 2011b, p. 26)

Una de esas *grandes ideas* matemáticas que se mencionan en el PE 2011 es el tema de trigonometría, que se ubica en el cuarto bloque del tercer grado de educación secundaria. Los contenidos que se incluyen en ese bloque se sitúan en el tema de medida, los aprendizajes esperados relativos al tema son la *gran idea matemática* de trigonometría (véase la figura 3.23).

Los aprendizajes esperados “son saberes que se construyen como resultado de los procesos de estudio mencionados” (SEP, 2011b, p. 27). Uno de los tres aprendizajes esperados de los alumnos en el bloque IV, en el tema de medida, es: “Resuelve problemas que implican el uso de *las razones trigonométricas seno, coseno y tangente”.* Los tres contenidos que deben estudiar en consecuencia de ese aprendizaje esperado son: *1)* Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta; el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente; *2)* Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo, *3)* Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente (véase la figura 3.23).

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

<table>
<tr><th colspan="7">Matemáticas. Noveno grado
Bloque IV</th></tr>
<tr><th>Aprendizajes esperados</th><th colspan="2">Sentido numérico y pensamiento algebraico</th><th colspan="2">Forma, espacio y medida</th><th colspan="2">Manejo de la información</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">• Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
• Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
• Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.</td>
<td rowspan="4">PATRONES Y ECUACIONES</td>
<td rowspan="4">9.4.1 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.</td>
<td>FIGURAS Y CUERPOS</td>
<td>9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.</td>
<td>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</td>
<td>9.4.6 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">MEDIDA</td>
<td>9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.</td>
<td rowspan="3">ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</td>
<td rowspan="3">9.4.7 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y PLANES DE CLASE DE LOS CONTENIDOS:
9.4.1, 9.4.2, 9.4.3, 9.4.4,
9.4.5, 9.4.6, 9.4.7</td>
<td>9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.</td>
</tr>
<tr>
<td>9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.</td>
</tr>
</table>

Figura 3.23. Mapa curricular del bloque IV de matemáticas. Plan de estudios 2011, pág. 50.

Con respecto al aprendizaje esperado y los contenidos, se hace notar que:

1.- La relación directa entre el aprendizaje esperado y el contenido 9.4.5 es relativamente explícita.

2.- No queda claro el porqué de la introducción del valor de la pendiente de una recta en el contenido 9.4.3, si se requiere que el alumno analice la relación del cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente de un triángulo rectángulo; son dos contextos diferentes en los que se da dicha relación: pendiente-recta-ángulo-abscisa, y ángulo-cateto opuesto-cateto adyacente. La primera en relación a un eje de coordenadas, y la segunda a cualquier triángulo rectángulo, no importando si uno de los catetos de éste se encuentre sobre en un eje de coordenadas o no.

3.- Los contenidos 9.4.4 y 9.4.5 se refieren únicamente a triángulos rectángulos, dejando de lado por completo el uso de la pendiente como un concepto usado en trigonometría.

En los PE 2011, Guía para el maestro Educación Básica Secundaria Matemáticas, existe una sección llamada “Orientaciones pedagógicas y didácticas”. En este documento “se presentan ejemplos de situaciones de aprendizaje que ilustran el desarrollo de distintos tipos de pensamiento matemático”. En estas orientaciones se redacta el funcionamiento de la propuesta pedagógica del enfoque por competencias vigente en el plan 2011 y se muestra “cómo se gesta la construcción de ideas, argumentos, explicaciones y conocimientos matemáticos a lo largo de la situación y no sólo como el resultado de la resolución de un problema” (SEP, 2011b, p. 99). El cuadro para ejemplificar y sintetizar las ideas matemáticas del estudio de la trigonometría queda como se muestra en el cuadro 3.4.

Para el desarrollo de los contenidos se sugieren siete planes de clase en los que se hace referencia a la guía para el maestro/secundaria/matemáticas y al portal de aula *Explora secundaria*, en donde se ofrecen herramientas que permiten generar contenidos digitales; interactuar con los Objetos Didácticos de Aprendizaje (ODA), realizar trabajo colaborativo a través de redes sociales como blogs, wikis, foros y utilizar la herramienta de proyecto de aprendizaje. También existen

Orientaciones didácticas para los maestros en formato Power Point y ligas de internet que llevan a diferentes lecturas y documentos para complementar las actividades de aprendizaje dentro del aula.

Cuadro 3.4. Cuadro sintetizado del estudio de la trigonometría en secundaria

AÑO	Tercer grado de educación secundaria.
BLOQUE	IV.
COMPETENCIAS	Resolver problemas de manera autónoma. Comunicar información matemática. Validar procedimientos y resultados. Manejar técnicas eficientemente.
COMPETENCIA EN HABILIDADES DIGITALES	Uso de *software,* Geogebra, portal de aula *Explora secundaria.*
EJE	Forma, espacio y medida.
TEMA	Medida.
CONTENIDO	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno coseno y tangente.
APRENDIZAJES ESPERADOS	Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente (finalidad práctica).
ESTÁNDARES	Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.

De los siete planes de clase que se proponen para el desarrollo de los contenidos de trigonometría, dos son para el contenido *Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa [sic] y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente;* dos para el contenido *Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo,* y tres para el contenido *Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente*. (DGEST, 2011)

Cuadro 3.5. Tabla de concentración de contenidos e intenciones didácticas

PLAN DE CLASE	CONTENIDO	INTENCIONES DIDÁCTICAS DE LOS PLANES DE CLASE
9.4.3	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	Que los estudiantes, a partir de la gráfica de una recta, identifiquen a la pendiente como la razón de los catetos de los triángulos rectángulos construidos con la recta y el eje de las abscisas. Que los estudiantes analicen la relación entre la medida del ángulo y el valor de la pendiente en diferentes rectas.
9.4.4	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	Que los alumnos adviertan la constante de dividir el cateto opuesto o adyacente entre la hipotenusa en triángulos rectángulos semejantes y la relacionen con la medida del ángulo agudo de referencia. Que los alumnos reflexionen acerca de la relación que existe entre las razones trigonométricas de un ángulo y las de su complemento.
9.4.5	Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.	Que los alumnos utilicen el círculo unitario para identificar la variación de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, a medida que crece o disminuye el ángulo agudo asociado. Organizados en parejas resuelvan los siguientes problemas. Para ello, usen su calculadora científica o la tabla de razones trigonométricas. Que los alumnos utilicen las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para calcular valores de ángulos y lados de triángulos rectángulos.

La nomenclatura utilizada en los planes de clase en el PE 2011 se compone de tres números, cada uno seguido de un punto. Por ejemplo, 9.4.1 significa contenido 1 del bloque 4 de noveno grado (tercer grado de educación secundaria). El primer número corresponde al grado escolar, el segundo número corresponde al bloque, y el tercer número corresponde al contenido. Así, para los planes de clase son tres los contenidos, por lo que la nomenclatura va del 9.4.3 al 9.4.5.

Para los planes de clase del PE 2011, en el formato cambia el nombre de *Conocimientos y habilidades* a *Contenidos,* siendo éstos los que los alumnos deben aprender a lo largo del ciclo escolar (véase el cuadro 3.5).

Se hace mención que cada plan de clase tiene un apartado llamado consideraciones previas (véase el anexo 2), en dónde se dan orientaciones al docente de cómo puede abordar el tema, los conceptos y temas que el alumno debe saber antes de abordar el tema de razones trigonométricas y algunas consideraciones de corte matemático que el docente no debe olvidar al momento de la clase. En estas consideraciones previas se dan sugerencias de los temas o conceptos que se deben reforzar en los alumnos, así como un acercamiento a lo que se espera que los alumnos contesten a cada plan de clase, o cómo debiera ser la secuencia de aprendizaje de los conceptos por parte de los alumnos.

Para la intención didáctica "*que los estudiantes, a partir de la gráfica de una recta, identifiquen a la pendiente como la razón de los catetos de los triángulos rectángulos construidos con la recta y el eje de las abscisas*" del contenido 9.4.3, se propone el plan de clase 1/2 (véase la figura 3.24, DGEST, 2011)

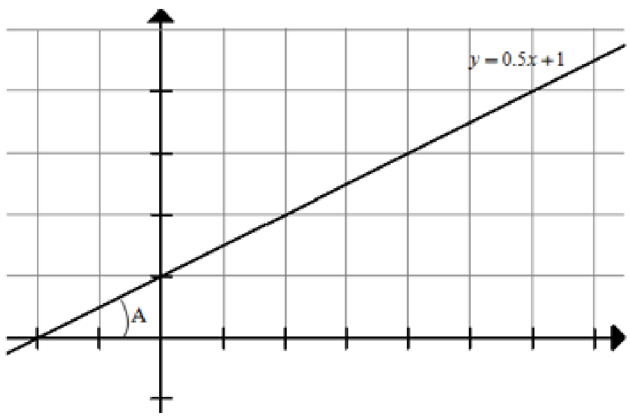
Plan de clase (1/2)

Curso: Matemáticas 9 **Eje temático: FE y M**

Contenido: 9.4.3 *Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente*.

Intención didáctica: Que los estudiantes, a partir de la gráfica de una recta, identifiquen a la pendiente como la razón de los catetos de los triángulos rectángulos construidos con la recta y el eje de las abscisas.

Consigna: Organizados en binas, y a partir de la gráfica de la recta $y = 0.5x + 1$, realicen lo que se pide:



a) Determinen la medida del ángulo "A" que se forma con la recta y el eje x.
b) Construyan tres triángulos rectángulos, considerando la recta y el eje de las abscisas o una paralela a ésta.
c) Identifiquen y midan los catetos opuestos y adyacentes al ángulo "A" en cada triángulo.
d) Obtengan los cocientes de las razones formadas por el cateto opuesto entre el adyacente.
e) Verifiquen que los cocientes obtenidos son iguales y expliquen por qué.

Contesten: ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta y los cocientes de los catetos? Argumenten su respuesta.

Figura 3.24. Plan de clase 1/2, contenido 9.4.3. Tomado de DGEST, 2011

En la consigna 1 del plan de clase 1/2 se les pide a los alumnos que contesten una serie de preguntas, las preguntas, se enlazan como una secuencia para que el alumno pueda relacionar la pendiente de una recta y los cocientes de los catetos. En la segunda pregunta se pide al alumno dibujar una serie de triángulos rectángulos que se forman con el ángulo agudo dado y la abscisa del plano cartesiano. La secuencia de las preguntas planteadas debería llevar al alumno a comparar el cociente de cada uno de los triángulos dibujados, con la función que incluye a la pendiente. Sin embargo, la función $y = 0.5\ x + 1$ queda olvidada en todo este proceso. En el inciso *e)* se le pide al alumno verificar que todos los cocientes de los triángulos dibujados sean iguales; esto hace suponer que no es necesario realizar las operaciones, ya que no importando qué medidas tengan los catetos de cada triángulo rectángulo, los cocientes serán iguales. Así se plantea en el inciso e). En la última pregunta (sin inciso) se retoma la función $y = 0.5x + 1$, si el alumno recuerda la forma general de una función lineal $y = ax+b$, en dónde a es la pendiente, podrá realizar la conexión entre la pendiente de la recta y el cociente de los catetos de los triángulos rectángulos dibujados. De otra forma, será complejo que el alumno pueda hacer esta comparación; aún más complejo resultará vincular una función con una razón trigonométrica. Considerando que el cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente y la pendiente es un número, que dependiendo del contexto es la interpretación de dichos números.

En el plan de clase 2/2 del contenido 9.4.3 (véase la figura 3.25), se pide que el alumno realice una actividad similar a la anterior. La variante consiste en que son tres rectas en lugar de una y los ángulos son de 30°, 45° y 60°. Cada cociente del cateto opuesto entre el cateto adyacente debe colocarse en una tabla. Suponiendo que con la actividad anterior haya quedado clara la relación del cociente de los catetos y la pendiente de la recta, entonces el número que se obtenga del cociente de los catetos se relacionará con la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que a su vez es la pendiente de la recta con un ángulo de inclinación ya sea de 30°, 45° o 60°. Sin embargo, el contexto sigue siendo en relación a la función de una recta: todavía no se realiza la conexión con las razones trigonométricas, aunque se esté explicitando el cociente de los catetos.

El dibujo de este plan de clase se tomó para la elaboración de uno de los reactivos del cuestionario (véase la figura 3.25). En este plan de clase 1/2 del contenido 9.4.4, el proceso que se plantea para resolver la consigna es el mismo que el plan 2/2 del contenido 9.4.3, en la tabla de valores que se proporciona, los alumnos deben colocar los valores respecto a las razones (cocientes) entre el cateto opuesto y el cateto adyacente; la variante en este caso es la introducción del nombre de esa relación (*tangente*) y de la relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa (*seno*), y el cateto adyacente y la hipotenusa (*coseno*). De nueva cuenta se hace notar que la función $y = 1.5\,x + 1$, no se utiliza más que para comparar la pendiente con la razón cateto opuesto y cateto adyacente.

Las figuras 3.26 y 3.27 del plan de clase 2/2 del contenido 9.4.4, son triángulos rectángulos. El plano cartesiano que se proponía en los planes anteriores (1/2) se omite en este plan de clase. En ellos, los alumnos deben identificar los ángulos agudos y escribir las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de esos ángulos agudos. Las preguntas planteadas propician la reflexión que en la intención didáctica se menciona. Sin embargo, es en la pregunta 4 que se hace referencia a la relación existente entre el seno de un ángulo y el coseno de su complemento en un triángulo rectángulo. Esta pregunta se hace de forma general para cualquier triángulo rectángulo, y no se utiliza el triángulo LNM del que previamente se pide escribir las razones trigonométricas.

Plan de clase (2/2)

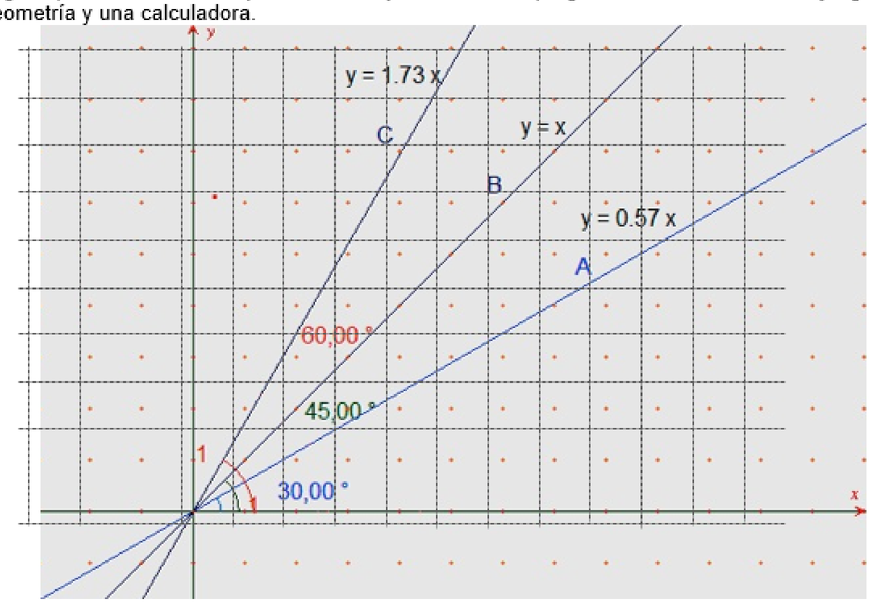
Curso: Matemáticas 9 **Eje temático: FE y M**

Contenido. 9.4.3 *Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.*

Intención didáctica: Que los estudiantes analicen la relación entre la medida del ángulo y el valor de la pendiente en diferentes rectas.

Consigna. Organizados en equipos realicen la siguiente actividad:

Consideren las rectas de la siguiente ilustración, las cuales forman con el eje horizontal un ángulo de 30°, uno de 45° y otro de 60°; para formar tres triángulos rectángulos, uno para cada ángulo, posteriormente completen la tabla y contesten las preguntas. Pueden utilizar un juego de geometría y una calculadora.



(Continúa)

Angulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Razón $\left(\frac{C.\ Opuesto}{C.\ Adyacente}\right)$	Cociente (decimal)	Pendiente
30°					
45°					
60°					

Comparen los resultados de su tabla con la elaborada por otro equipo, verifiquen que aunque los datos de las tres primeras columnas fueran diferentes, los de las dos últimas coinciden y expliquen por qué.

¿Sucederá lo mismo con otros ángulos? Compruébenlo y concluyan.

Figura 3.25. Plan de clase 2/2, contenido 9.4.3. Tomado de DGEST, 2011

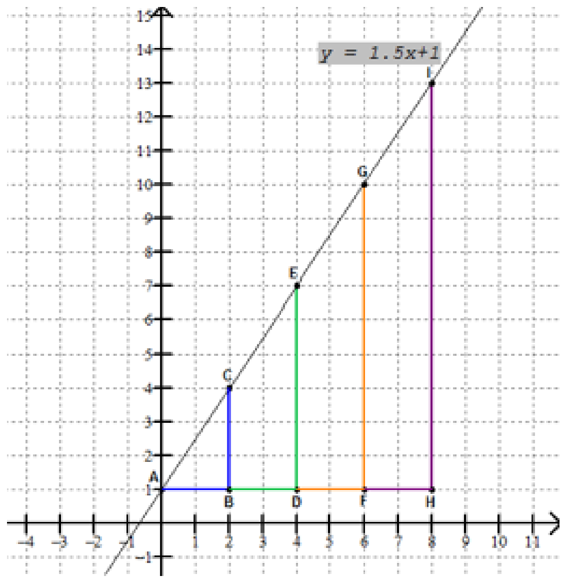
Plan de clase 1/2

Curso: **Matemáticas 9** **Eje temático: FE y M**

Contenido: 9.4.4 *Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.*

Intenciones didácticas: Que los alumnos adviertan la constante de dividir el cateto opuesto o adyacente entre la hipotenusa en triángulos rectángulos semejantes y la relacionen con la medida del ángulo agudo de referencia.

Consigna: Organizados en parejas, y a partir de la gráfica de la recta y = 1.5x + 1, realicen lo que se pide:



Tomen los datos necesarios de la gráfica y completen la siguiente tabla. Utilicen su calculadora y consideren hasta diezmilésimos en los cálculos y resultados. Luego, respondan lo que se cuestiona.

Triángu lo	Medid a del ángulo A	Medid a del cateto opuesto	Medid a del cateto adyacente	Medid a de la hipotenusa	Razó n Seno ($\frac{C.\ opuesto}{hipotenusa}$)	Razó n Coseno ($\frac{C.\ adyacent}{hipotenusa}$)
ABC						
ADE						
AFG						
AHI						

a) ¿Cómo es el resultado de la razón seno en los cuatro triángulos? _________ ¿Y el de la razón coseno? ________________________ ¿A qué creen que se deba esto?__

Con una calculadora científica, obtengan el seno y el coseno de los cocientes obtenidos. ¿Los resultados coinciden con la medida del ángulo A?______________ ¿Por qué?

Figura 3.26 Plan de clases 1/2, contenido 9.4.4. Tomado de DGEST, 2011

Plan de clase 2/2

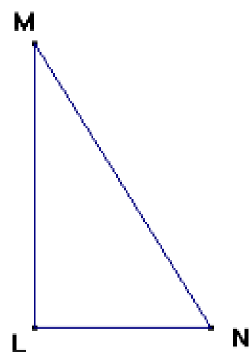
Curso: Matemáticas 9 **Eje temático: FE y M**

Contenido. *9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.*

Intenciones didácticas: Que los alumnos reflexionen acerca de la relación que existe entre las razones trigonométricas de un ángulo y las de su complemento.

Consigna: Organizados en equipos, contesten lo que se plantea enseguida.

1. ¿Cuánto suman los ángulos M y N en el triángulo rectángulo que aparece abajo?_________
2. ¿Qué nombre reciben esos ángulos?_________________
3. Calculen los valores de las razones de los ángulos M y N.



sen M =

cos M =

tan M =

sen N =

cos N =

tan N =

4. ¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el coseno de sus complemento?______
5. Si el seno de un ángulo de 30 grados es igual a 0.5, ¿a qué es igual el coseno de un ángulo de 60 grados?______________________________
6. ¿A qué es igual el producto de la tangente de un ángulo de 30 grados por la tangente de un ángulo de 60 grados?___________________

Escriban las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) para el siguiente triángulo rectángulo.

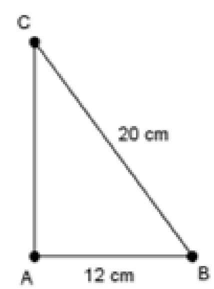


Figura 3.27. Plan de clase propuesto para el contenido 9.4.4 del Programa de Estudios. Matemáticas 2011. Tomado de DGEST, 2011

Cabe señalar que el triángulo rectángulo LNM se utilizó para la tarea 7 del cuestionario aplicado a los estudiantes de esta investigación. Se realizó la adaptación del mismo para los fines de investigación de esta tesis.

Desde el plan de estudios de 1975 no se hacía referencia al círculo unitario. Éste reaparece en un documento oficial en el plan de estudios de 2011; en el plan de estudios de 1975 se planteaba como una primera actividad para el aprendizaje de las razones trigonométricas (véase la figura 2.1 de la página 23). En el plan 2011 tiene otra finalidad: se plantea como una actividad de reforzamiento en relación con las actividades anteriores, en las que ya se ha hecho explícita la relación del seno, coseno y la tangente con las razones trigonométricas y el ángulo que se da en cada caso. Con el uso de *GeoGebra* (*software* de matemáticas) se hace evidente el planteamiento del enfoque educativo del plan de estudios 2011: incluir el uso de nuevas tecnologías para alcanzar las metas propuestas en dicho plan. Así, el papel que juega el círculo unitario en este plan de clase es trasladar el concepto de las razones trigonométricas visto en los planes anteriores, además de ver la relación de variación de cada una de las razones trigonométricas respecto al ángulo asociado (Véase la figura 3.28). Sin embargo, se deja de lado la riqueza de dicho recurso para las razones trigonométricas que, si bien en el contexto del triángulo rectángulo se relacionan con un cociente, al trasladarlo al contexto del círculo unitario se relaciona más con el concepto de función, por considerarse no sólo un cuadrante del círculo sino los cuatro cuadrantes del mismo.

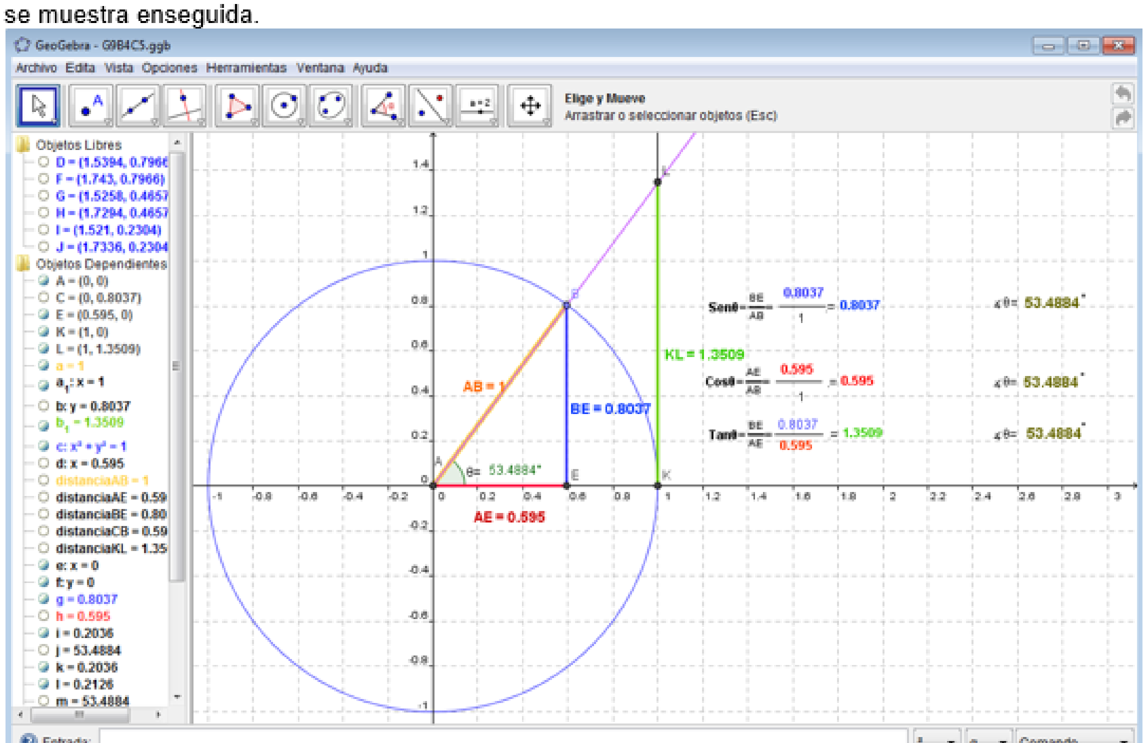
Plan de clase 1/3

Curso: Matemáticas 9 **Eje temático: FE y M**

Contenido: 9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.

Intenciones didácticas: Que los alumnos utilicen el círculo unitario para identificar la variación de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, a medida que crece o disminuye el ángulo agudo asociado.

Consigna. En parejas, abran el archivo G9B4C5.ggb. En él aparece un círculo con radio igual a 1 como se muestra enseguida.



1. Den clic en el ícono , luego, muevan el punto B sobre la circunferencia de manera que el ángulo θ crezca o disminuya. Analicen con detalle qué es lo que sucede con cada una de las razones trigonométricas.

2. ¿Es verdad que el seno del ángulo θ es igual a ***y***? _______ ¿por qué? ________________

3. ¿Es verdad que el coseno del ángulo θ es igual a ***x***? _______ ¿por qué? _______________

4. ¿Es verdad que la tangente del ángulo θ es igual a $\overline{KL}$? _______ ¿por qué? __________

Figura 3.28. Plan de clase 1/3 propuesto para el contenido 9.4.5 del Programa de Estudios. Matemáticas 2011. Tomado de DGEST, 2011

Plan de clase 2/3

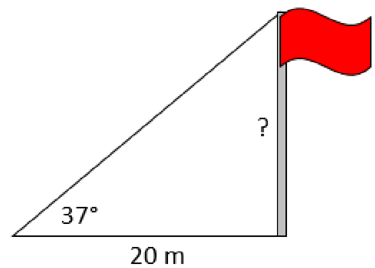
Curso: Matemáticas 9 **Eje temático: FE y M**

Contenido. *9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.*

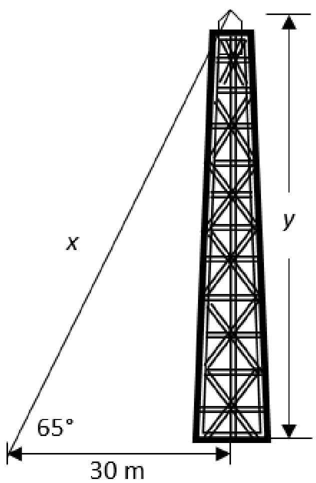
Intenciones didácticas: Que los alumnos usen las razones trigonométricas para resolver problemas.

Consigna. Organizados en parejas resuelvan los siguientes problemas. Para ello, usen su calculadora científica o la tabla de razones trigonométricas.

1. ¿Cuál es la altura del asta bandera, si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la punta del asta mide 37º?



2. ¿Cuál es la altura de la torre y la longitud del tirante que la sostiene?



3. Un puente de 18 m de largo atraviesa por una barranca como se muestra en el siguiente esquema. ¿Cuál es la profundidad de la barranca?

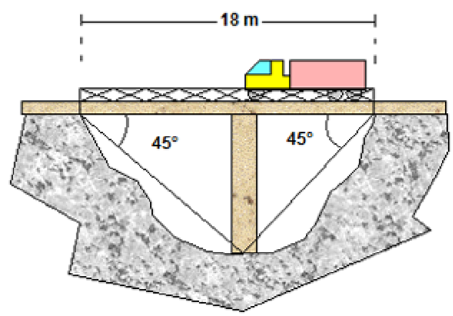
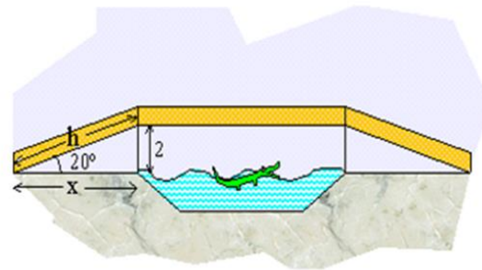


Figura 3.29.a. Plan de clase 2/3 propuesto para el contenido 9.4.5 del Programa de Estudios. Matemáticas 2011

4. Se desea construir un puente sobre un río que mide 10 m de ancho, de manera que quede a una altura de 2 m sobre el agua y que las rampas de acceso tengan una inclinación de 20°

a) ¿Cuál debe ser la longitud del barandal?

b) ¿A qué distancia del cauce se situará el comienzo de la rampa?



5. Se desea calcular la altura de la torre, para ello se miden los ángulos de elevación desde los puntos A y B. Con los datos de la figura, ¿cuál es la altura de la torre?

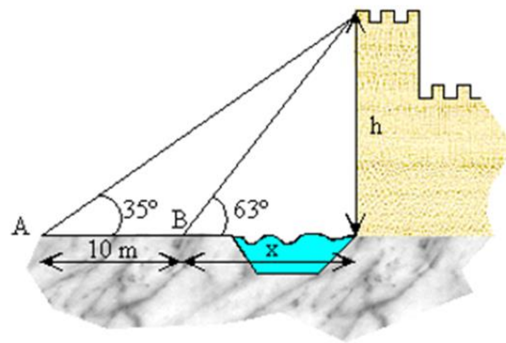


Figura 3.29.b. Plan de clase 2/3 propuesto para el contenido 9.4.5 del Programa de Estudios. Matemáticas 2011

En este plan de clase 2/3 (véanse las figuras 3.29. a y 3.29. b), se muestran problemas en donde se debe hacer uso de las razones trigonométricas para el cálculo de distancias inaccesibles. Dos de los problemas que se presentan aquí se tomaron de uno de los planes de clase del PE 2006 (véase la figura 2.24 del capítulo II de esta tesis) Para resolver este tipo de problemas los alumnos deben saber las relaciones y el uso de las razones trigonométricas. Nótese que en ningún caso se pide obtener el ángulo agudo de un triángulo rectángulo. Todos los problemas se limitan al cálculo de una de las distancias que se forman en relación a un triángulo rectángulo, desaprovechando las demás aplicaciones que tienen las razones trigonométricas para este mismo tipo de problemas.

En este plan de clase 3/3 del contenido 9.4.5 (véase la figura 3.30) se plantea la posibilidad de encontrar el valor de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, situación que no se había planteado antes. Sin embargo, el uso de las razones trigonométricas no es necesariamente aplicable en la *figura A y en la figura B*, ya que el valor del ángulo agudo puede determinarse mediante la diferencia entre los valores de los dos ángulos del mismo triángulo rectángulo. Si suponemos que el alumno contestó correctamente la pregunta 1 del plan de clase 2/2 del contenido 9.4.4 (véase la figura 3.27), donde se pregunta *¿Cuánto suman los ángulos M y N en el triángulo rectángulo que aparece abajo?* y sabe que uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 90° y la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es 180°, el alumno no necesitará aplicar las razones trigonométricas para calcular uno de los ángulos del triángulo rectángulo *A y B*, y lo hará mediante la diferencia de datos, tomando en cuenta el ángulo recto. Por lo contrario, para calcular el ángulo agudo que se pide en las figuras *C* y *D*, se debe establecer la razón trigonométrica que relacione el ángulo y los catetos respecto a ese ángulo, así como realizar las relaciones entre los catetos de cada uno de los triángulos. Por otra parte para calcular las medidas de los lados que se piden en cada una de las figuras *A* y *B*, se requieren de las razones trigonométricas, y en el caso de las figuras *C* y *D*, se pueden calcular mediante el teorema de Pitágoras, tema que se imparte previamente al de razones trigonométricas. Nótese que el grado de complejidad de este plan de clase es menor al anterior (véase la figura 3.29. a y 3.29. b), ya que sólo se solicita la resolución de los triángulos rectángulos y se les permite el uso de la calculadora científica o la tabla de razones trigonométricas para obtener los valores de los ángulos y de los lados, sin tomar en cuenta el contexto de los mismos.

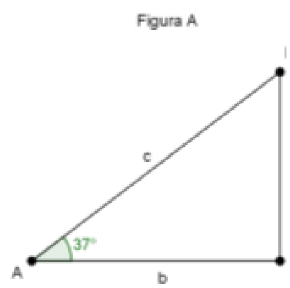
Plan de clase 3/3

Curso: Matemáticas 9 **Eje temático: FE y M**

Contenido. *9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.*

Intenciones didácticas. Que los alumnos utilicen las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para calcular valores de ángulos y lados de triángulos rectángulos.

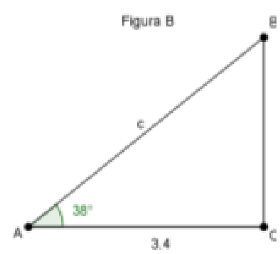
Consigna: Individualmente, calculen los valores que se piden en cada caso. Usen su calculadora científica o la tabla de razones trigonométricas.



b = ___________

c = ___________

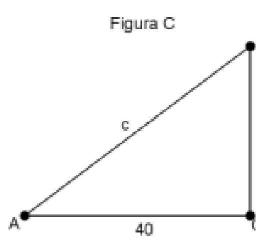
∠ B = ___________



a = ___________

c = ___________

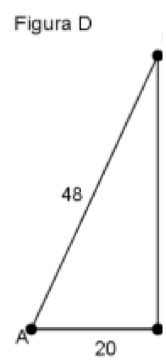
∠ B = ___________



c = ___________

∠ A = ___________

∠ B = ___________



a = ___________

∠ A = ___________

∠ B = ___________

Figura 3.30. Plan de clase 3/3 propuesto para el contenido 9.4.5 del Programa de Estudios. Matemáticas 2011

En las orientaciones didácticas de los contenidos 9.4.3 al 9.4.5, se describen los aprendizajes previos que el alumno debe tener para iniciarse en el tema de razones trigonométricas:

1.- Función lineal y su representación gráfica.

2.- Valor de la pendiente en una ecuación del tipo $y=0.5 + 1$

3.- Las razones entre dos de los lados de un triángulo rectángulo (cateto opuesto y cateto adyacente).

Se propone que se trace una gráfica como la de la figura 3.31 para una pendiente con valor de 0.5, y se realice el cociente de los catetos opuesto y adyacente de cada triángulo que se forma. Estableciendo que esta relación es el valor de la tangente de un ángulo de aproximadamente 26.6º.

En la orientación didáctica del contenido 9.4.4 (véase la figura 3.32) se retoma el anterior procedimiento para establecer las relaciones de cada uno de los ángulos de 30º, 45º y 60º respectivamente y así obtener el valor tangente de cada uno de los triángulos que se forma en la figura. Nótese que tanto en el plan de clase como en la orientación didáctica no menciona ningún procedimiento o alguna técnica nemotécnica para nombrar las razones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente*, sólo se mencionan, como el cociente del cateto opuesto sobre la hipotenusa (seno), el cateto adyacente sobre la hipotenusa (coseno) y el cateto opuesto sobre el cateto adyacente (tangente).

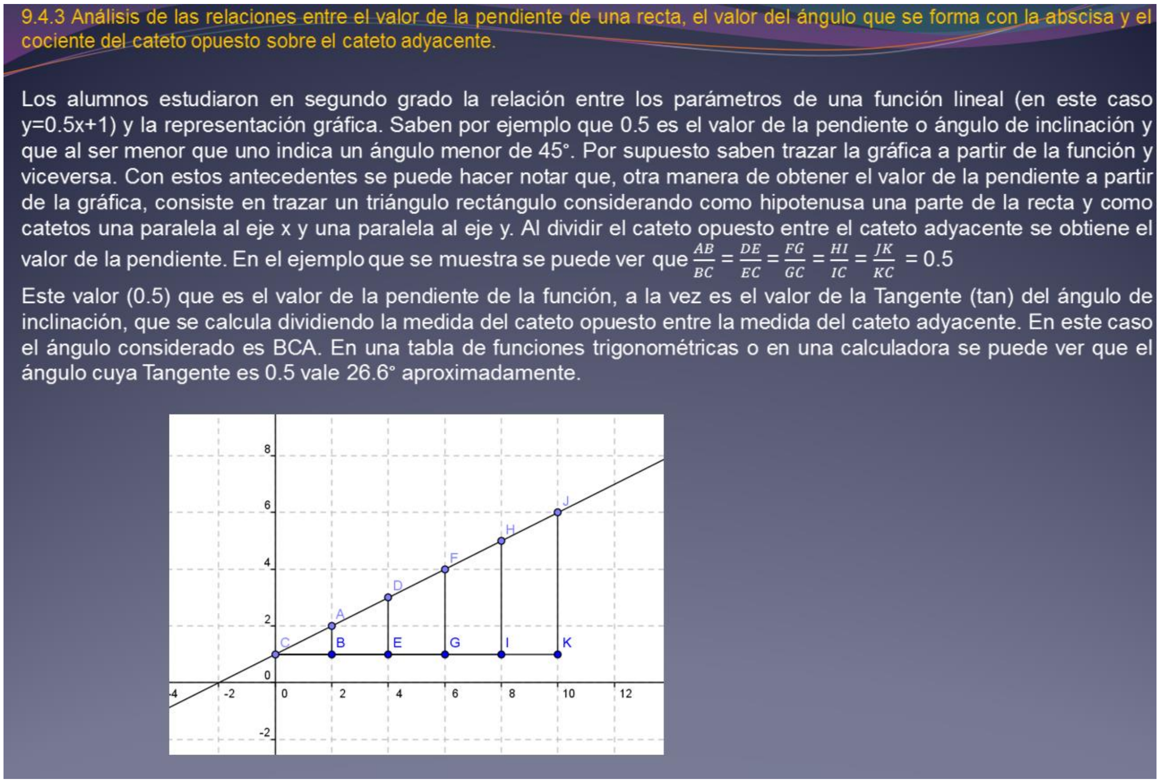


Figura 3.31. Orientaciones didácticas para el contenido 9.4.3 del Programa de estudios 2011

Tanto las consideraciones previas, como las orientaciones didácticas que propone el PE 2011 (véase la figura 3.33) tienen la finalidad de orientar al docente en su práctica, sin embargo cabe mencionar que en ninguna de ellas se proporciona como un recurso didáctico alguna técnica nemotécnica para la enseñanza de las razones trigonométricas. El PE 2011 considera la teoría constructivista como el eje para que el alumno construya su propio concepto de lo que es una razón trigonométrica por medio de la exploración de las relaciones entre los catetos y la hipotenusa, “Los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos” (SEP, 2011a, p.52).

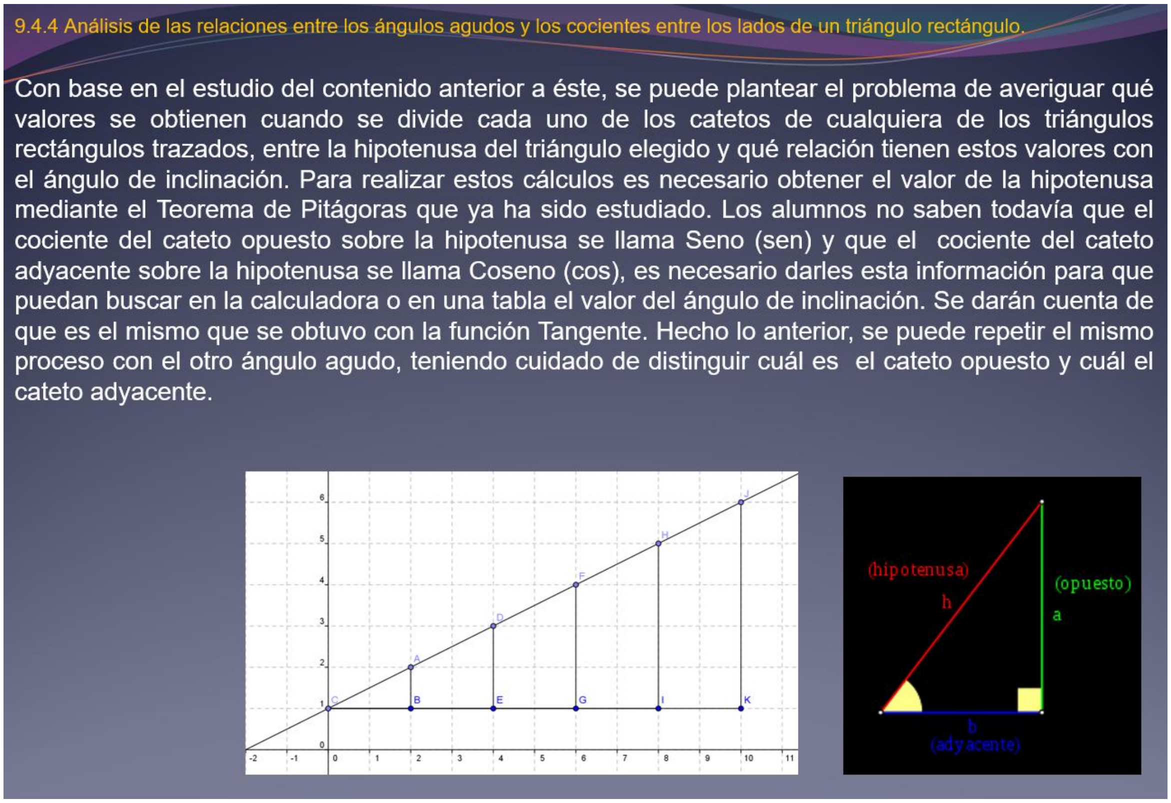


Figura 3.32. Orientaciones didácticas para el contenido 9.4.4 del Programa de estudios 2011

Por tanto se espera que “La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización” (SEP, 2011a, p.52) La secuencia del conocimiento no es lineal ni se debe seguir de manera cronológica como lo marcan los temas propuestos en el PE 2011 (véase la figura 3.23), sino que el docente puede acomodar dichos temas en el orden que considere necesario para que los alumnos los aprendan.

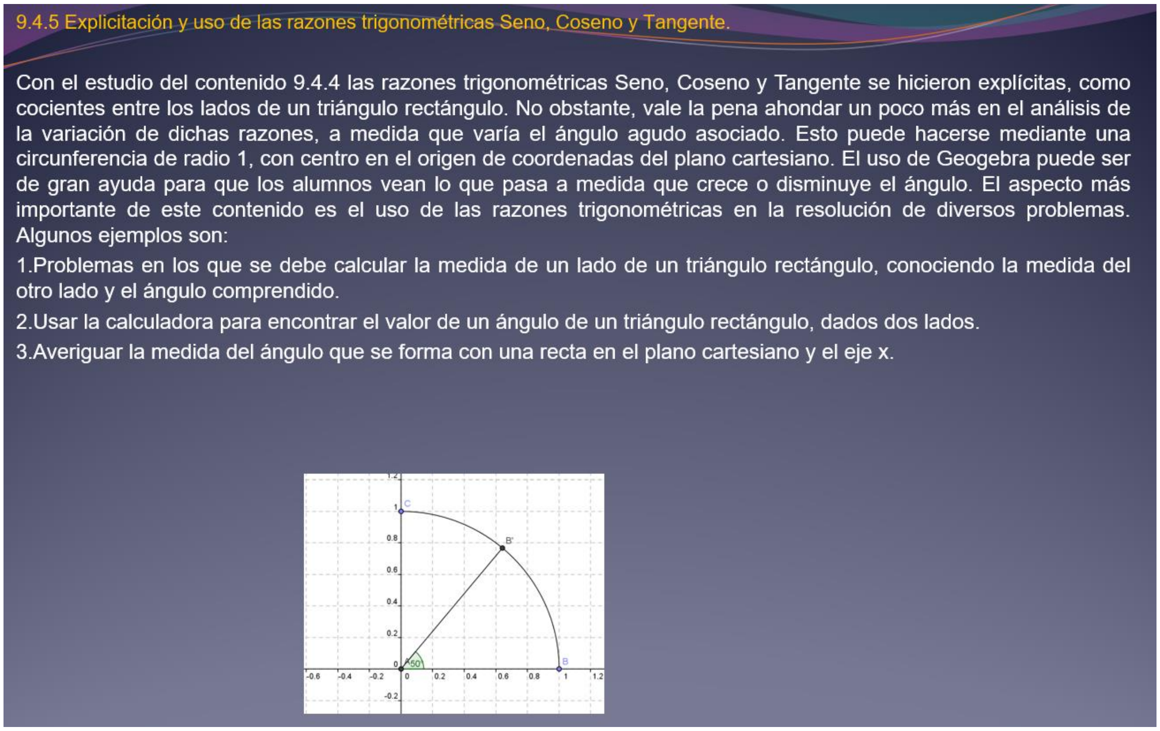


Figura 3.33. Orientaciones didácticas para el contenido 9.4.5 del Programa de estudios 2011

La prueba ENLACE se vuelve a implementar en México con el PE 2011 como referente para evaluar los conocimientos de los alumnos en varios niveles educativos para saber el logro de los conocimientos que han adquirido a lo largo del ciclo escolar. Cabe mencionar que en la página de internet de dicha prueba se advierte lo siguiente

> Los resultados del 2009 de 3º de secundaria, no son comparables con los resultados del 2008 por el cambio de enfoque del contenido evaluado –del 2006 al 2008 la prueba de 3º de secundaria evaluó el contenido de los tres

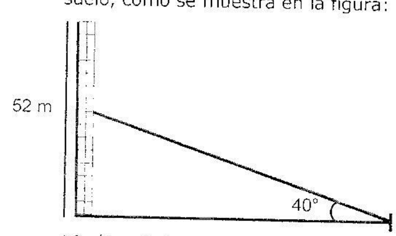
grados de secundaria y a partir del 2009, al evaluarse 1º y 2º grado, la prueba se diseñó para evaluar solo los contenidos de dicho ciclo escolar.

Por lo que a partir de 2009 los reactivos propuestos se apegan al plan de estudio vigente, en este caso al PE 2011.

Los reactivos propuestos para la prueba ENLACE 2011 son los de las figuras 3.34, 3.35 y 3.36.

Como se observa en la figura 3.34 y 3.35, los Reactivos 62 y 73 respectivamente, son muy similares a los reactivos de las anteriores prueba ENLACE en donde se requiere sólo de ciertos datos conocidos para poder encontrar un tercero, una clasificación de este tipo de problemas y de los datos que se requieren para resolverlos los podemos encontrar en el cuadro 2.1 de la tesis de maestría de Reyes 2009 (véase el cuadro 3.6); así los problemas que se presentan se resuelven y abarcan los conocimientos necesarios y suficientes que los alumnos de tercer grado de secundaria deben adquirir al concluir este nivel educativo.

62. Juan quiere fijar una antena de 52 m de altura con un cable que vaya de la mitad de la misma al suelo. El cable hace un ángulo de 40° respecto al suelo, como se muestra en la figura:



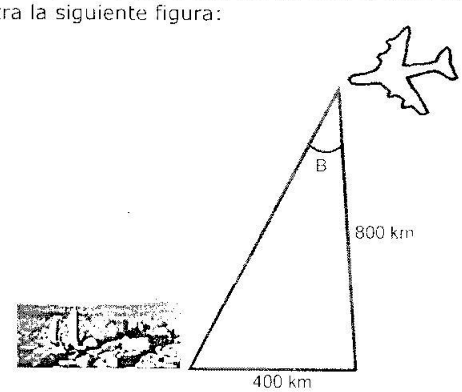
¿Cuál es la longitud del cable?
Considera: seno 40° =0.6427
cos 40° = 0.7660.

A) 80.8976 m B) 67.8811 m
C) 40.4488 m D) 33.9405 m

Figura 3.34. Reactivos propuestos para el examen enlace 2011

ENLACE.3°_11

73. Un piloto que maneja un avión a 800 km de altura, observa a lo lejos una ciudad como lo muestra la siguiente figura:



¿Con cuál función trigonométrica se puede calcular el ángulo B del anterior problema?

A) $\tan B = \frac{400}{800}$ B) $\tan B = \frac{800}{400}$

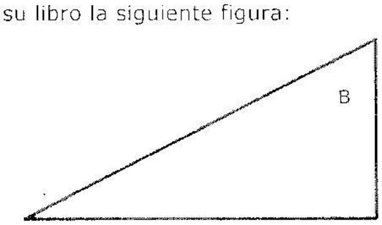
C) $\text{sen } B = \frac{400}{800}$ D) $\cos B = \frac{800}{400}$

Figura 3.35. Reactivos propuestos para el examen enlace 2011

Nótese que en reactivo 108 de esa misma prueba enlace 2011 (véase la figura 3.36), se requiere, además de los conocimientos sobre razones trigonométricas, el uso de la lógica y de los algoritmos convencionales del álgebra (leyes de los exponentes, ecuaciones de primer grado con una incógnita, sustitución de variables, ecuaciones simultáneas, la división de fracciones y el razonamiento matemático), en el reactivo se pide que se encuentre el *coseno* del ángulo *B*; sin embargo, los datos que se proporcionan para resolverlo no son los valores de los lados como se había manejado en los demás reactivos, se dan únicamente los valores de *seno B (0.9369)* y *tangente B* (2.7474) del mismo ángulo. Este reactivo supone un grado de dificultad y conocimientos superiores a lo que se plantea en los reactivos propuestos como guía para la enseñanza del tema, ya que, en el PE 2011 sí se plantea la posibilidad de la vinculación y la transversalidad de los contenidos, pero tanto en los contenidos, como en los planes de clase propuestos no se observa un reactivo con tal nivel de dificultad que involucre el uso del álgebra, específicamente la relación de ecuaciones, despeje y sustitución de las variables *cateto adyacente* $CA = \frac{Cateto\ opuesto}{\tan B}$ e *hipotenusa* $hip\ = \frac{Cateto\ opuesto}{\operatorname{sen} B}$ en la sustitución de la razón trigonométrica original $coseno\ B = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ que se supone debe plantear el alumno para resolver el reactivo de manera correcta, quedando de la siguiente manera $\cos B \frac{\frac{Co}{\tan B}}{\frac{CO}{sen\ B}}$ que al operar y sustituir los valores de *seno B (0.9369)* y *tangente B* (2.7474) nos da como resultado el valor de 0.39199 que se acerca a la respuesta A (0.3420) del mismo reactivo.

ENLACE.3°_11

108. Rosita encontró en su libro la siguiente figura:



Quiere conocer el coseno del ángulo B, y tiene como dato que seno de ese mismo ángulo es 0.9396 y la tangente es 2.7474, ¿cuál será el valor correcto del coseno?

A) 0.3420 B) 0.9396
C) 2.7474 D) 2.9238

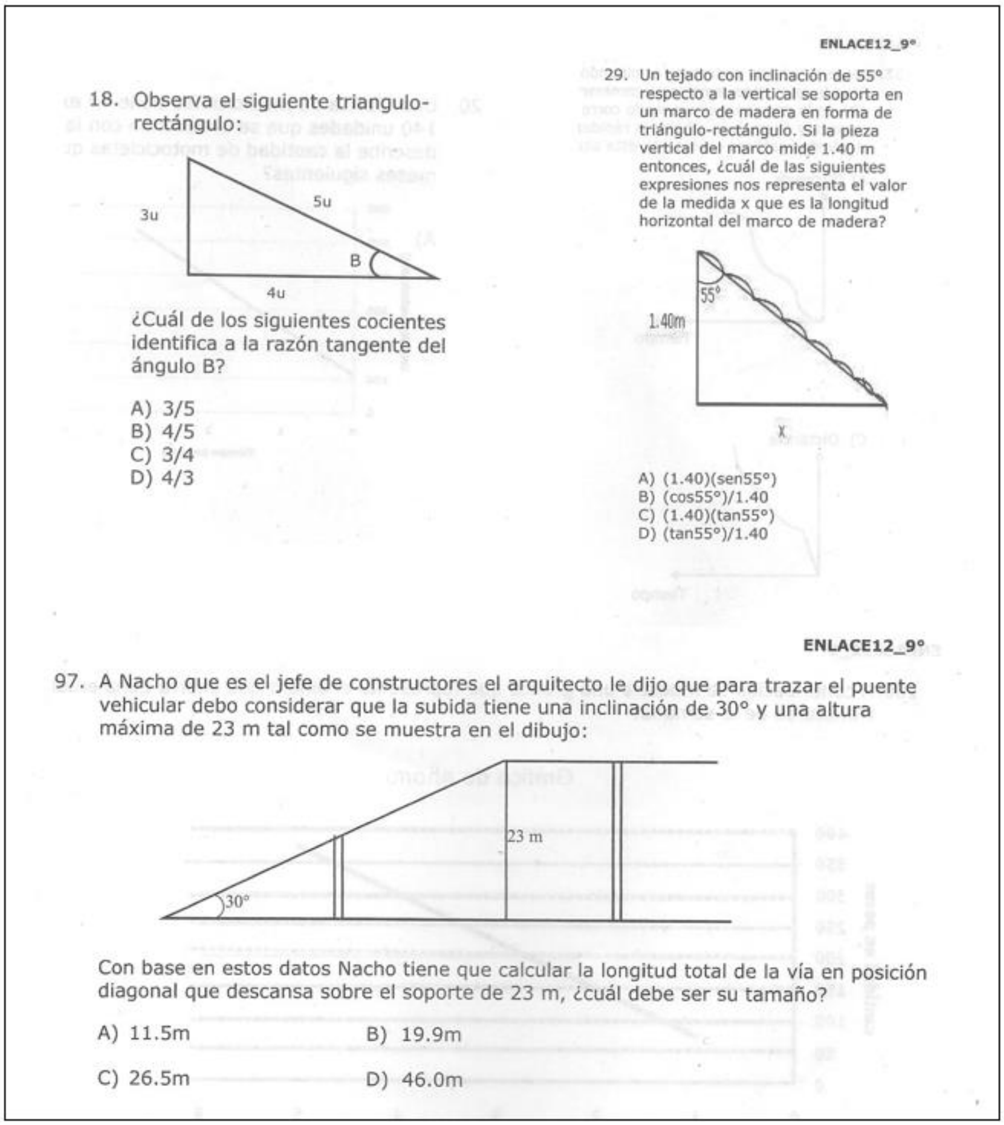
Figura 3.36. Reactivos propuestos para el examen enlace 2011

Cuadro 3.6. Tipos de problemas de trigonometría para tercer grado de educación secundaria. (Reyes, 2009, p. 24)

DATOS CONOCIDOS / TIPO DE PROBLEMA		No. 1	No. 2	No. 3
LL (lado - lado)	1	Ángulo recto	L: Cateto A	L: Cateto B
	2	Ángulo recto	L: Cateto (A ó B)	L: Hipotenusa
AL (ángulo – lado)	3	Ángulo recto	A: Ángulo agudo	L: Cateto adyacente
	4	Ángulo recto	A: Ángulo agudo	L: Cateto opuesto
	5	Ángulo recto	A: Ángulo agudo	L: Hipotenusa

En la prueba ENLACE 2012, en los reactivos 18 y 29 (véase la figura 3.37) se pide identificar la razón trigonométrica con la que se puede resolver el problema; de la misma manera que en las anteriores pruebas; para el reactivo 97, sin embargo se solicita la medida de la rampa del puente vehicular (diagonal), para ello se dan los datos necesarios para su resolución, la medida del ángulo (30°) y la altura del soporte que es de 23 m. En esta ocasión no se dan los valores de las razones trigonométricas del seno, coseno o tangente del ángulo como en anteriores reactivos (véase reactivo 62 de la figura 3.34), para que el alumno tome la que considere conveniente y la sustituya en su planteamiento. En este reactivo se le pide al alumno que recuerde de memoria el valor del seno de un ángulo de

30° (1/2 o 0.5 en decimal). Se presume que al haber estudiado el tema en clase con su docente titular debería recordar dicho dato, sin embargo las estadísticas nos muestran que no es así, ya que, como se mencionó en este mismo capítulo la media nacional está en un 47.9 % en el nivel insuficiente, 31.8 % en el nivel elemental, 14.6 en el nivel bueno y sólo el 5.7 % en el nivel excelente (véase figura 3.21 de esta tesis).



ENLACE12_9°

18. Observa el siguiente triangulo-rectángulo:

¿Cuál de los siguientes cocientes identifica a la razón tangente del ángulo B?

A) 3/5
B) 4/5
C) 3/4
D) 4/3

29. Un tejado con inclinación de 55° respecto a la vertical se soporta en un marco de madera en forma de triángulo-rectángulo. Si la pieza vertical del marco mide 1.40 m entonces, ¿cuál de las siguientes expresiones nos representa el valor de la medida x que es la longitud horizontal del marco de madera?

A) (1.40)(sen55°)
B) (cos55°)/1.40
C) (1.40)(tan55°)
D) (tan55°)/1.40

ENLACE12_9°

97. A Nacho que es el jefe de constructores el arquitecto le dijo que para trazar el puente vehicular debo considerar que la subida tiene una inclinación de 30° y una altura máxima de 23 m tal como se muestra en el dibujo:

Con base en estos datos Nacho tiene que calcular la longitud total de la vía en posición diagonal que descansa sobre el soporte de 23 m, ¿cuál debe ser su tamaño?

A) 11.5m
B) 19.9m
C) 26.5m
D) 46.0m

Figura 3.37. Reactivos propuestos para el examen enlace 2012

108. Un árbol que mide 17.5 m de altura proyecta una sombra de 48 m cuando el ángulo de elevación del Sol es de 20°. ¿Cuál será la longitud de la sombra que proyecta ese árbol cuando el ángulo de elevación del Sol sea de 35°?

Considera los valores de la tabla para resolver el problema y que todos los cálculos sean truncados a centésimos:

grados	seno	coseno	tangente
35	0.5735	0.8191	0.7002

A) 12.25 m
B) 21.26 m
C) 24.99 m
D) 33.60 m

8

Figura 3.38. Reactivo propuesto para el examen enlace 2013

Para la prueba ENLACE 2013 se propuso un reactivo referente a razones trigonométricas (véase la figura 3.38), nótese que en este reactivo por primera vez se mencionan las palabras *ángulo de elevación*, en ningún problema de la prueba ENLACE de años anteriores desde 2006 se había utilizado el concepto. Para resolver el problema el alumno deberá tener los conocimientos de ángulos entre paralelas, razones trigonométricas y ubicar cuál es el ángulo de elevación del sol.

Para el año 2014 no se aplicó la prueba ENLACE, únicamente en el nivel medio superior.

CAPÍTULO IV
METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta una descripción del contexto en que se llevó a cabo la recopilación de datos para este estudio sobre nociones de razones trigonométricas en alumnos de tercer grado de educación secundaria en México: los sujetos, el diseño de los instrumentos para la recopilación de datos, y el tipo de análisis que se siguió, así como los criterios de selección de los sujetos a quienes se entrevistó.

El tema de esta tesis se centra en *nociones de razones trigonométricas,* por lo cual la investigación se realizó en el nivel de educación secundaria, ya que el contenido bajo estudio se ve por primera vez en este nivel, en el tercer grado. Así se delimitó la investigación a ese grado escolar. La recolección de datos se efectuó mediante los cuestionarios (piloto y final), y entrevistas semiestructuradas. Para ello se recurrió a cuatro grupos de una Escuela Secundaria Técnica en la Ciudad de México en el turno vespertino, G, H, I y J, y cuatro de los seis grupos, B, D, E y F, con que cuenta la misma escuela en el turno matutino. Primero se llevó a cabo un estudio piloto con tres grupos del turno vespertino por medio de un cuestionario, y posteriormente se realizó el estudio definitivo con los grupos restantes del turno vespertino y del turno matutino.

La población total de los cuatro grupos G, H, I y J del turno vespertino fue de 90 alumnos, quienes tuvieron a *Y* como profesora titular. Mientras que la población de los grupos B, D, E y F del turno matutino fue de 82 alumnos y tuvieron a x como profesora titular. Los alumnos tenían de 14 a 15 años de edad, con un nivel socioeconómico medio. La escuela se encuentra cerca de los límites territoriales de la delegación Azcapotzalco, colindante con el Estado de México, por lo que a sus instalaciones asisten adolescentes de diferentes partes del estado de México.

Para el diseño de los instrumentos de investigación se tomaron en cuenta las siguientes condiciones: objetivos de la investigación, revisión de los programas de estudio anteriores al vigente (2006), así como el que se está implementando actualmente (2011), y el tiempo específico para la recolección de los datos. En los siguientes párrafos se describe cada una de las pautas que se siguieron para la planificación de las tareas.

En el capítulo II y III se presentó un análisis de los Programas de estudio de 1975, los Planes y programas de 1993, los Programas de 2006 y de 2011 de la educación secundaria en México, en lo referente al tema de razones trigonométricas. Se incluyó también un análisis de publicaciones, artículos y literatura específica (libros de texto) sobre el tema de trigonometría. Con esta información se determinaron las características que debían tener los instrumentos que se ocuparon para la recolección de datos. Entonces, la primera fase para determinar situaciones problemáticas consistió en consultar y revisar distintas fuentes documentales (investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y libros de texto, entre otros).

Uno de los objetivos de esta investigación fue indagar acerca de cuáles son las nociones de los alumnos sobre trigonometría después de que la docente impartió el tema. Se identificaron dificultades que tuvieron en su conceptualización y la exploración de los conceptos de razones trigonométricas que pudieran haber conservado.

El tiempo de diseño y de aplicación de los instrumentos para la investigación fue preciso, ya que el tema de razones trigonométricas en tercer grado de educación secundaria era cercano al cierre del ciclo escolar, que comprendió del 14 de agosto de 2012 al 5 de julio de 2013; por otra parte, los alumnos de tercer grado de educación secundaria tenían que presentarse en el Concurso de Ingreso a la Educación Media Superior (COMIPEMS) el sábado y domingo últimos del mes de junio de 2013. (Todos los docentes de tercer grado de educación secundaria realizan un repaso de los temas durante la segunda quincena del mes de junio, por lo que los tiempos para el estudio piloto, el análisis de los resultados del mismo, las adecuaciones, la recolección de datos y las acciones posteriores fueron breves.)

El cuestionario utilizado para la investigación

El cuestionario utilizado en el estudio piloto constó de ocho tareas generadoras de experiencias matemáticas observables, cinco de respuesta abierta y tres de opción múltiple con potencial para hacer emerger durante su resolución distintos usos del conocimiento matemático. Este cuestionario del estudio piloto se aplicó a los grupos, G, I y J del turno vespertino, quienes recibieron la enseñanza del tema por parte de la profesora Y.

Quedando de la siguiente manera:

1.- Anota diez palabras que recuerdes del tema de razones trigonométricas.

2.- Da un ejemplo de una razón trigonométrica.

3.- ¿Qué razones trigonométricas conoces?

4.- Explica qué es una razón trigonométrica.

5.- ¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?

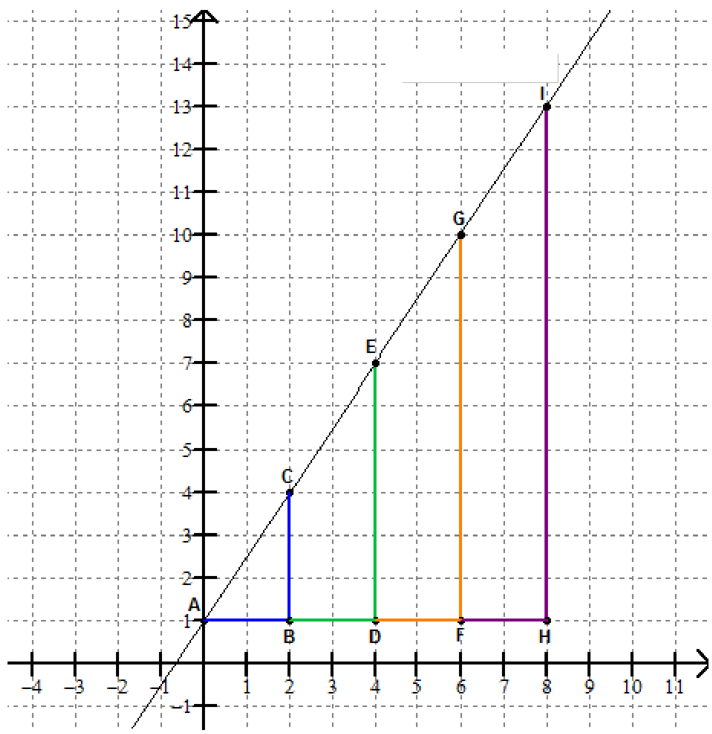
6.- En el triángulo rectángulo *ADE* de la siguiente figura, indica cuál es el cateto opuesto al ángulo *A*.

a) $\overline{CB}$

b) $\overline{AE}$

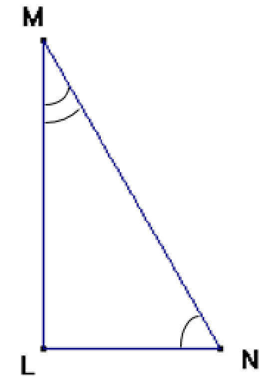
c) $\overline{ED}$

d) $\overline{AD}$



(Tomado de los planes de clase 2011, secundaria. 9.4.4, y modificado)

7.- ¿Cuál es la relación entre el seno del ángulo *M* y el coseno de su ángulo complementario en el triángulo rectángulo *LNM* siguiente?



a) El seno del ángulo *M* es mayor que el coseno de su ángulo complementario.

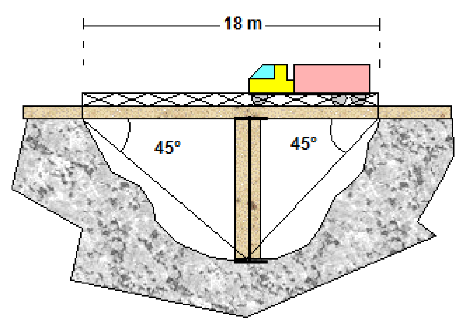
b) El seno del ángulo *M* es igual al coseno de su ángulo complementario.

c) El seno del ángulo *M* es opuesto que el coseno de su ángulo complementario

d) El seno del ángulo *M* es menor que el coseno de su ángulo complementario.

8.- Encierra en un círculo la respuesta correcta del siguiente problema.

Sobre una barranca se ha construido un puente de 18 m de largo, como se muestra en el esquema. ¿Cuánto mide la profundidad de la barranca?



p = profundidad

a) (9 m) (sen 45°)

b) (9 m) (cos 45°)

c) (9 m) (tan 45°)

d) (9 m) (sen 45° + cos 45°)

(Tomado de los planes de clase 2011, secundaria. 9.4.5, y modificado)

A partir de un análisis preliminar de las respuestas de los alumnos, se detectó que era preferible invertir el orden de las preguntas de respuesta abierta 2 y 3. De esta manera se garantizó la utilidad de las situaciones como instrumento operativo en la valoración de las respuestas. En la pregunta 7 se detectó una inconsistencia en el inciso *c*, y se decidió eliminarlo, ya que causó confusión en los alumnos que participaron en el estudio piloto, además de que al eliminarlo se obtenía una tarea exclusivamente problemática para el alumno.

Con el nuevo cuestionario (véase el anexo 3) se realizó el estudio con el grupo restante del turno vespertino, H; y con cuatro de los seis grupos del turno matutino, B, D, E y F.

Agrupación y análisis de las respuestas del cuestionario

Las respuestas del cuestionario se agruparon y analizaron en dos partes: la primera consistió de las preguntas de respuesta abierta, y la segunda de las preguntas de opción múltiple. Para describir la estructura correspondiente a las nociones de razones trigonométricas se realizó un procedimiento de clasificación por categorías respecto a las palabras y los modelos utilizados con mayor frecuencia por los alumnos en sus respuestas.

Para el análisis de las respuestas a la pregunta 1, se a los ocho grupos de tercer grado de educación secundaria, dando un total de 172 alumnos a quienes se les aplicó el cuestionario. Las respuestas son tanto del cuestionario del estudio piloto como de la versión utilizada en el estudio final.

Para las respuestas de la pregunta *1.- Anota diez palabras que recuerdes del tema de razones trigonométrica,* se elaboró un cuadro de acuerdo con la frecuencia de uso de los términos anotados, y otro con los bloques por categorías. En el bloque 1. *Nomenclatura propia de triángulos rectángulos,* se consideraron términos como: *hipotenusa*, *cateto opuesto*, *cateto adyacente*, *ángulo*, *triángulo* y *triángulo rectángulo*.

En el bloque 2. *Nomenclatura de razones trigonométricas,* los términos que se consideraron se relacionan de manera directa con las razones trigonométricas básicas y sus inversos multiplicativos: *seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante*. En el bloque 3. *Terminología general*, se consideraron términos que se relacionan indirectamente con las razones trigonométricas, como son: *razón, grados, trigonometría y función trigonométrica*. Y para el bloque 4 *otros* se consideraron otras palabras que no tenían relación con el tema pero que los alumnos anotaron, así como los que no contestaron o no entendieron la pregunta.

En sus respuestas a las preguntas *2.- ¿Qué razones trigonométricas conoces?* y *3.- Da un ejemplo de una razón trigonométrica*, los alumnos escribieron términos separados, modelos como una razón o figuras, abreviaturas de forma individual o en una estructura de fracción, redacción de un problema, etc., los cuales también se registraron en un cuadro para su análisis. Se consideraron sólo cinco de ocho grupos a los que se les aplicó el cuestionario, ya que fueron las preguntas que se intercambiaron de lugar en la versión final del cuestionario. El cuestionario final se aplicó a los cinco grupos restantes.

Para las respuestas a las preguntas *4.- Explica qué es una razón trigonométrica* y 5.- *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas*?, se hizo una lista de cotejo. Los cuestionarios se enumeraron por grupo y conforme al número se transcribieron las respuestas de forma literal por alumno en forma lineal para su posterior análisis. Se consideró a los ocho grupos, ya que no hubo cambios en esa pregunta para el cuestionario final. Estas respuestas se clasificaron en tres categorías: 1) *Nociones cercanas*, en la que se agruparon las respuestas más representativas del tema razones trigonométricas; 2) *Sin relación*, respuestas que no tenían concordancia con el tema, y 3) *No contestaron.* cuándo dejaron en blanco la pregunta.

En las respuestas a las preguntas 6, 7 y 8 el criterio de agrupación de respuestas fue realizar una estadística con la frecuencia de las respuestas por inciso, tomando en cuenta si el alumno hizo anotaciones adicionales a la pregunta o si realizó algún cálculo. El criterio de las notas adicionales en las respuestas de opción múltiple fue uno de los indicadores importantes que se utilizaron para seleccionar a los candidatos de entrevista. Se tomaron cinco de los ocho grupos: sólo se utilizaron las respuestas de los grupos a los que se les aplicó la versión final del cuestionario.

Después del análisis preliminar de respuestas al cuestionario y tomando en cuenta los indicadores anteriores, se seleccionó a 20 alumnos para ser entrevistados.

Entrevistas semiestructuradas

El diseño de la entrevista semiestructurada para los alumnos de tercer grado de educación secundaria seleccionados se basó en el análisis de sus respuestas que tuvieron en el cuestionario sobre nociones de razones trigonométricas. La entrevista se realizó dentro de la misma institución en el horario correspondiente al turno de cada alumno, con el método de *pensamiento en voz alta,* que consiste en hacer que el entrevistado verbalice sus pensamientos mientras realiza tareas

(Clark, 1986, p. 454), así como una variación de *estimulación del recuerdo,* usado por J. Bloom en 1954, y que, como su nombre lo indica, consiste en recordar lo que se escribió y el porqué de cada respuesta o, en su caso, cómo resolverían en ese momento alguna de las tareas asignadas, hablando sobre lo que están haciendo mientras escriben. El tiempo destinado a cada entrevista fue de 23 a 45 minutos. Para la entrevista se diseñó un guion con algunas preguntas basadas en las respuestas que los alumnos habían anotado en el cuestionario; durante el desarrollo de la entrevista se plantearon más preguntas, además de adecuar las del guion para indagar con mayor profundidad en las nociones de los alumnos sobre las razones trigonométricas.

Las preguntas iniciales fueron las siguientes:

- ¿Por qué escribiste estas palabras? (Haciendo referencia a lo escrito en el cuestionario de cada alumno.)
- ¿Qué significa lo que escribiste en la pregunta 2? (Dependiendo de lo que hubiese escrito, ya sea palabras, abreviaturas, figuras, dibujos, etc.)
- ¿Puedes representar geométricamente alguna de las palabras que escribiste anteriormente?
- ¿Por qué anotaste valores en la figura?
- ¿Cómo fue que decidiste que esta respuesta es la correcta?
- ¿Podrías indicar el seno del ángulo A en la pregunta 6?
- ¿Cómo harías para resolver el problema de la pregunta 8? (Para esta pregunta, previamente se cubrió la respuesta dada por el alumno y se tomó como una tarea que tenía que realizar durante la entrevista.)

Selección de candidatos para la entrevista. Para la selección de candidatos a entrevistar se tomaron en cuenta varios indicadores: que el alumno hubiese contestado correctamente la mayoría de los ítems del cuestionario sobre razones trigonométricas; las notas que escribieron en las preguntas de opción múltiple, especialmente en la pregunta 8 donde únicamente se le pide al alumno que encierre con un círculo la respuesta correcta, (algunos alumnos realizaron operaciones o esquemas, tratando a la tarea como un problema).

En total se llevaron a cabo 12 de las 20 entrevistas contempladas, la causa de que los días en que se acudió a realizarla, algunos alumnos no asistieron a clase (ya sea por enfermedad, permisos o alguna situación familiar) el día de su entrevista. Las 12 entrevistas fueron audio grabadas y transcritas para su análisis; también se tomaron notas mientras se desarrollaban las entrevistas para su posterior análisis.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se analizan los datos obtenidos mediante la aplicación de los cuestionarios y las entrevistas respecto a las nociones de las razones trigonométricas en alumnos de tercer grado de educación secundaria. Los datos recabados con los cuestionarios se dividieron en dos partes. Una que corresponde a las preguntas de respuesta abierta (preguntas 1–5) y otra que corresponde a las preguntas de opción múltiple (preguntas 6, 7 y 8). En el capítulo de metodología se expuso el diseño del cuestionario, las entrevistas semiestructuradas y el número de alumnos a los que se les aplicó. Así también se explicaron los criterios de análisis y clasificación de los datos de las respuestas al cuestionario.

En la revisión del aprendizaje de la trigonometría y el análisis de los Planes y Programas de estudio del capítulo II y III, el lenguaje técnico que se utiliza en el tema de trigonometría son: funciones trigonométricas, razones trigonométricas, círculo de radio unidad, triángulo rectángulo, seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, etcétera.

Palabras relacionadas con razones trigonométricas

Como se mencionó en el capítulo de metodología, la pregunta 1 fue: *Anota diez palabras que recuerdes del tema de razones trigonométricas.* Las preguntas 2 y 3 sufrieron cambios en el orden en que aparecían para el cuestionario final. Para el cálculo de porcentajes de las respuestas a la pregunta 1, se tomó en cuenta el total de cuestionarios, que fue de 172, quedando las palabras mencionadas por los alumnos agrupadas como se muestra en el cuadro 5.1. Los porcentajes de la columna final de la tabla se deben leer como el porcentaje que ocupa la palabra en el total de palabras que se mencionaron (1280 palabras), es decir, la suma de las palabras por rubro entre en número de alumnos (172) que contestaron esa palabra.

Como se observa en el cuadro 5.1, con el *término* “palabras que no son de trigonometría” se hace referencia a las palabras cuyo uso no es habitual dentro del lenguaje de razones trigonométricas tanto en la literatura oficial como en la no oficial y la relación que guardan con el tema de razones trigonométricas no es tan directo como lo pueden ser otras palabras que guardan una relación directa con el tema, tal es el caso de las palabras, seno, coseno y tangente, se puede observar con más detalle esto en el cuadro 5.2 “Palabras propias de trigonometría” de este mismo capítulo.

Cuadro 5.1. Frecuencias de palabras anotadas por los alumnos en la pregunta 1 del cuestionario

N°	Palabras/Grupo	B	D	E	F	G	H	I	J	Suma	%
1	Palabras que no son de trigonometría	27	39	35	11	6	24	12	8	162	94.19
2	Hipotenusa	7	18	13	13	18	16	21	21	127	73.84
3	Tangente	5	17	15	10	20	15	19	10	111	64.53
4	Coseno	6	11	14	10	20	16	20	13	110	63.95
5	Seno	6	11	14	10	17	18	18	14	108	62.79
6	Cateto opuesto	3	15	10	10	19	14	19	14	104	60.47
7	Cateto adyacente	4	14	10	9	18	13	19	13	100	58.14
8	Secante	1	7		3	17	15	19	9	71	41.28
9	Ángulo	6	16	15	8		5	2	11	63	36.63
10	Cotangente	3		1	5	15	12	18	9	63	36.63
11	Cosecante	0			2	15	12	19	8	56	32.56
12	Triángulo	1	9	6	4	12	3		15	50	29.07
13	Ángulo adyacente		1	13	1		13	19		47	27.33
14	Cateto	3	6	5	3		3	2	13	35	20.35
15	Razón	2	1	4	2	2	1	1	1	14	8.14
16	Triángulo rectángulo	1	2	2	2	1			4	12	6.98
17	Adyacente		2	3	1	1	1		2	10	5.81
18	Grados	1		1	1		3	1	3	10	5.81
19	Trigonometría	1	1	3	1	2				8	4.65
20	No contestaron	4		1	1	2				8	4.65
21	Opuesto			3	2				1	6	3.49
22	Función trigonométrica					1	2			3	1.74
23	Ángulo opuesto		1							1	0.58
24	No comprendió la pregunta			1						1	0.58
	TOTAL									1280	94.19

En esta primer clasificación (véase el cuadro 5.1) se encuentra como primer lugar con un porcentaje de alumnos que anotaron 94.19% palabras que no se relacionaban directamente con el tema de razones trigonométricas. Algunas de estas palabras fueron: *medida, espacio, forma, área, plano cartesiano*, entre otras (véase el cuadro 5.2). Nótese que el uso de la palabra *ángulo de elevación* y *ángulo de depresión*, así como *ángulo inscrito*; los anotaron alumnos de tres grupos de la profesora Y. Estas palabras coinciden con el lenguaje utilizado en el reactivo 108 de la prueba ENLACE 2013 (véase la figura 3.38).

La palabra *hipotenusa* la anotaron 127 de los 172 alumnos (73.84%); la palabra *tangente* la anotaron 111 de los 172 alumnos (64.53%). En el cuadro 5.2 se observa cómo va decreciendo el porcentaje en lo que anotaron los alumnos respecto a las diferentes palabras que se solicitaron en la pregunta 1 del cuestionario. Esta primer clasificación del cuadro 4.1 dio pauta para hacer una segunda clasificación de las palabras anotadas por los alumnos a la pregunta uno del cuestionario (véase la figura 5.2).

Un alumno del grupo F no entendió la pregunta; sin embargo dio una definición de lo que para él es una razón trigonométrica.

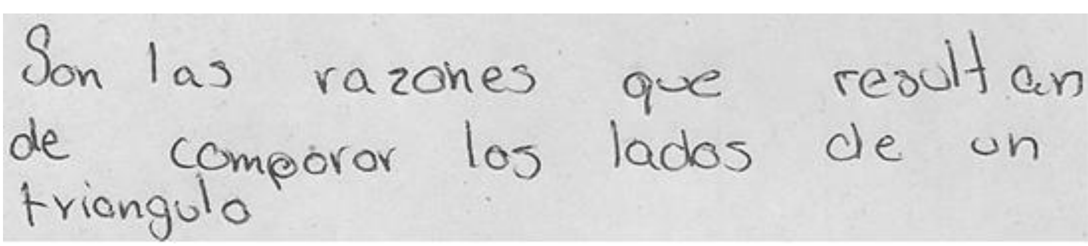

Son las razones que resultan de comparar los lados de un triangulo

Figura 5.1. Respuesta de un alumno a la pregunta 1 del cuestionario

Otro alumno, del grupo J, escribió: “*coca coca hip hip”.* Seguramente a causa de que la profesora Y utilizó técnicas mnemotécnicas para el aprendizaje de las razones trigonométricas.

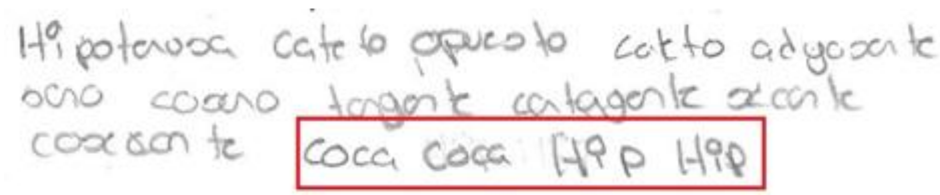


Figura 5.2. Respuesta de un alumno a la pregunta 1 del cuestionario

La organización y el formato del conjunto de palabras que anotaron en la pregunta 1 llevó a una nueva clasificación de las mismas en cuatro bloques: bloque 1. N*omenclatura propia de triángulos rectángulos,* bloque 2*. Nomenclatura propia de razones trigonométricas,* bloque 3*. Conceptos generales y* bloque 4. *Otros.*

Como se muestra en el cuadro 5.2. En *nomenclatura propia de triángulos rectángulos.* La palabra *hipotenusa* fue escrita por 127 alumnos de 172 (25.05%). Seguido de la palabra *cateto opuesto* y *cateto adyacente* que fueron escritas por 104 y 100 (20.51% y 19.72%) respectivamente. Las palabras *ángulo, triángulo, cateto y triángulo rectángulo* fueron escritas por 63, 50, 35 y 12 alumnos de 172 que respondieron el cuestionario, estas palabras tienen porcentajes menores al 10%. Nótese que seguido de éstas cuatro palabras hay dos más: *adyacente* y *opuesto*, con un porcentaje de anotación del 1.97% y 1.18%. Estas dos últimas palabras que carecen de un sustantivo se incluyeron en el bloque 1 por considerar que los alumnos que las anotaron (10 y 6 alumnos respectivamente) se estaban refiriendo al cateto adyacente como al cateto opuesto, pero no lo pudieron escribir de forma correcta y completa.

Cuadro 5.2. Palabras propias de *trigonometría*

		Palabras/Grupo	B	D	E	F	G	H	I	J	Suma	%
Nomenclatura propia de triángulos rectángulos	1	Hipotenusa	7	18	13	13	18	16	21	21	127	25.05
	2	Cateto opuesto	3	15	10	10	19	14	19	14	104	20.51
	3	Cateto adyacente	4	14	10	9	18	13	19	13	100	19.72
	4	Ángulo	6	16	15	8		5	2	11	63	12.43
	5	Triángulo	1	9	6	4	12	3		15	50	9.86
	6	Cateto	3	6	5	3		3	2	13	35	6.90
	7	Triángulo rectángulo	1	2	2	2	1			4	12	2.37
	8	Adyacente		2	3	1	1	1		2	10	1.97
	9	Opuesto			3	2				1	6	1.18
		TOTAL									507	100.0
Nomenclatura propia de razones trigonométricas	1	Tangente	5	17	15	10	20	15	19	10	111	19.57
	2	Coseno	6	11	14	10	20	16	20	13	110	19.4
	3	Seno	6	11	14	10	17	18	18	14	108	19.04
	4	Secante	1	7		3	17	15	19	9	71	12.52
	5	Cotangente	3		1	5	15	12	18	9	63	11.11
	6	Cosecante	0			2	15	12	19	8	56	9.876
	7	Ángulo adyacente		1	13	1		13	19		47	8.289
	8	Ángulo opuesto			1						1	0.176
		TOTAL									567	100

(Continúa)

Cuadro 5.2 (concluye)

		Palabras/Grupo	B	D	E	F	G	H	I	J	Suma	%
Conceptos generales	1	Razón	2	1	4	2	2	1	1	1	14	40
	2	Grados	1		1	1		3	1	3	10	28.57
	3	Trigonometría	1	1	3	1	2				8	22.85
	4	Función trigonométrica					1	2			3	8.571
		TOTAL									35	100
Otros	1	Palabras diferentes	27	39	35	11	6	24	12	8	162	94.73
	2	No contestaron	4		1	1	2				8	4.678
	3	No comprendió la pregunta			1						1	0.584
		TOTAL									171	100

Aparecen en el mismo bloque 1 las palabras *ángulo adyacente* y *ángulo opuesto* con 8.28 % y 0.17 % Estas palabras se incluyen en este bloque porque los alumnos intentaron relacionar la palabra *ángulo* con *cateto adyacente* y *cateto opuesto*. Sin embargo, en los problemas revisados de trigonometría en planes y programas de estudio de la educación secundaria en México, no hay algún problema en que se utilicen los términos ángulo adyacente o ángulo opuesto.

En el bloque 2 del cuadro 5.2; la suma de las palabras por bloque que más aparecieron son las que se refieren a la *nomenclatura propia de razones trigonométricas*. Quedando en primer lugar de frecuencia la palabra tangente con

19.57 %, seguido de secante 12.52 %, posteriormente coseno con 19.4 %, seno con 19.04 %, cotangente con 11.11 % y cosecante con 9.8 %.

Nótese que el orden en que aparecen las palabras en la clasificación del bloque 2 *Nomenclatura propia de razones trigonométricas*, no corresponde al orden en que fueron anotadas en las preguntas 2 y 3 del cuestionario aplicado, así como también en algunas de las entrevistas.

En la entrevista que se realizó con un estudiante, argumentó por qué escribió esas palabras.

B: ¿Por qué escribiste estas palabras?

Estudiante: porque el tema era sobre razones trigonométricas, son algunas palabras que la profesora de matemáticas nos enseñó que son cateto adyacente, cateto opuesto, hipotenusa, ángulo alfa, ángulo beta son las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Nótese que menciona las palabras en el orden en que fue su enseñanza de las razones trigonométricas por parte de la docente.

En el cuadro 5.2. En *nomenclatura propia de razones trigonométricas* los porcentajes que se pueden observar para las palabras que corresponden al lenguaje específico de las razones trigonométricas básicas de acuerdo al discurso oficial escolar (*seno, coseno y tangente*), cada una de ellas tiene un porcentaje del 19%, mientras que las razones trigonométricas inversas multiplicativas o recíprocas (*cotangente, secante y cosecante*) oscilan entre el 09% y 12%. Hay un considerable decremento en el porcentaje en estas últimas, ya que los alumnos de la profesora X, no las mencionaron repetidamente en el cuestionario, se puede inferir que es probable que no las utilizara en su práctica pedagógica.

En el bloque 3 *Terminología general,* de la figura 5.2 Se mencionan las palabras razón con un porcentaje de 40%, grados con 28.5%, trigonometría con un porcentaje de 22.8% y la palabra función trigonométrica con un porcentaje de 8.5%. Cabe mencionar que en los PPE de 1993, 2006 y de 2011 existen confusiones entre *razón* trigonométrica y *función* trigonométrica, especialmente en el libro para el maestro y el fichero de actividades matemáticas que se utiliza como un referente para la actividad de enseñanza del docente, por ello se infiere que así como en esos documentos se usan las palabras razón trigonométrica como sinónimo de función trigonométrica; el docente pudo haber empleado de igual manera las palabras con los alumnos y a su vez estos la mencionen en la pregunta uno del cuestionario.

En estas dos primeras estadísticas se puede inferir que los alumnos de tercer grado de educación secundaria saben algunos de los elementos que se utilizan en el tema de trigonometría. Pero la pregunta es si realmente comprenden lo que significa cada una de ellas.

Nótese que en los primeros cuatro grupos, B, D, E y F las palabras *cotangente*, *secante* y *cosecante* no se repiten con frecuencia; a diferencia de los últimos cuatro grupos: G, H, I y J; en donde se mencionan en una frecuencia igual a la de las razones trigonométricas básicas. Esto se debe a que los primeros cuatro grupos encuestados pertenecían a la enseñanza de la profesora X y los cuatro restantes a la enseñanza de la profesora Y.

Análisis de las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario

Para la pregunta 2 del cuestionario, *¿Qué razones trigonométricas conoces?,* los alumnos utilizaron modelos de lo que ellos conocían sobre las razones trigonométricas.

De acuerdo con la clasificación que se muestra en el cuadro 5.3, en el bloque de respuestas con palabras están los términos *seno, coseno, tangente, secante, cosecante* y *cotangente.*

Cuadro 5.3. Clasificación de respuestas a la pregunta 2 del cuestionario

Respuestas	Cuantificaciones pregunta 2	Grupo					
	¿Qué razones trigonométricas conoces?	B	D	E	F	H	Total
Palabras	Básicas (seno, coseno, tangente)	2	5	9	11		27
	Recíprocas (cotangente, secante, cosecante)	1				1	2
	Ambas					12	12
Abreviaturas	Como una razón con palabras	2	3	2	4	6	17
	Como una razón a/b (fracción)						
Dibujos y modelos	Modelo triángulo		1				1
	Modelo triángulo combinado						
Otros	Escribió una palabra		4	2			6
	Escribió un problema		1				1
	No contestaron	4		1			5
	No comprendió la pregunta	6	8	10	3	2	29
	Alumnos encuestados	15	22	24	18	21	

En este estándar y contenido se le denomina razones trigonométricas únicamente a seno, coseno y tangente, sin tomar en cuenta las razones inversas multiplicativas o recíprocas: *cotangente*, *secante* y *cosecante*. De acuerdo con PEM 2011 son éstas las que se deben enseñar; sin embargo en las palabras y modelos que escriben los alumnos para responder la pregunta 2 del cuestionario aparecen las razones trigonométricas recíprocas. Esto ocurrió porque en la enseñanza de las razones trigonométricas ambas profesoras incluyeron las seis razones trigonométricas, por lo que se infiere que se basaron en el plan y programas 2006 (PP. 2006). En éste plan se sugiere que “es probable que se den cuenta que estas no son las únicas relaciones, pues existen sus inversas (cotangente, secante y cosecante). Aquí será necesario indicarles que por lo pronto sólo estudiarán las tres primeras.”

Algunas de las respuestas de los alumnos que coinciden con esta convención se muestran a continuación.

Razones trigonométricas conforme a PPE 2011. Respuestas con palabras a la pregunta 2 del cuestionario aplicado.

Figura 5.3. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

En la figura 5.3 se observa cómo uno de los alumnos colocó las palabras en el orden convencional de acuerdo con la enseñanza de las mismas por parte de las profesoras, sólo mencionó tres de las seis que se les enseñaron; en la figura 5.4 se nota que otro de los alumnos escribió las seis razones trigonométricas siguiendo el orden convencional como fue la enseñanza de la profesora Y.

En la entrevista con un estudiante, se observó cómo su conocimiento inicial del tema es acorde a lo enseñado por su profesora y a su propia imagen mental de lo que comprendió del tema (confróntese con la figura 5.4).

B: En la pregunta 2, ¿qué razones trigonométricas conoces? Colocaste únicamente los nombres, habrá alguna otra representación para esos nombres? Colocaste: seno, coseno, tangente; las que ya mencionaste anteriormente, ¿habrá alguna otra representación para ellas?

Estudiante: pues sí, cada una sirve para sacar el ángulo o la medida de cada figura como: seno que es cateto opuesto sobre hipotenusa, coseno cateto adyacente sobre hipotenusa, coseno cateto. (hace una pausa) se me olvidó…

Al indagar sobre su comprensión del tema se muestran evidencias de nociones sobre las razones trigonométricas, sin embargo el estudiante no pudo continuar mencionando cada una de ellas respecto a la relación que guarda con los lados del triángulo, no obstante sabía las palabras en forma lineal y así contestó la pregunta 1 del cuestionario, aunque sólo mencionó las dos primeras en la entrevista.

De acuerdo al Plan y Programas de Estudio de 2006, las respuestas de alumnos fueron, como las siguientes.

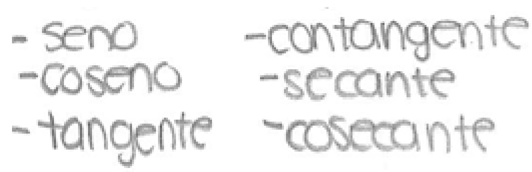


Figura 5.4. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

Para el bloque de respuestas con abreviaturas del cuadro 5.3, los alumnos escribieron como una razón de dos elementos y con palabras completas en el numerador y el denominador.

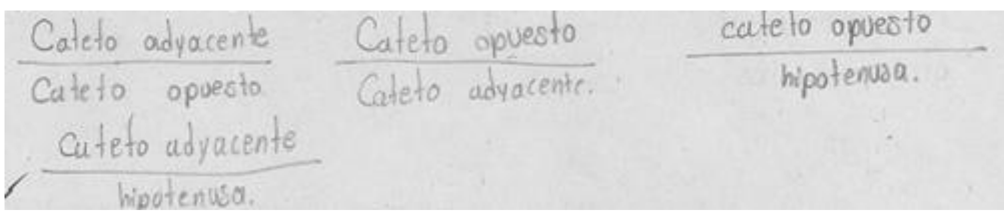


Figura 5.5. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

Otros alumnos escribieron las razones trigonométricas como una razón *a/b* (fracción) abreviando las palabras cateto opuesto (CO), cateto adyacente (CA) e hipotenusa (hip). (Véanse las figuras 5.6 y 5.7)

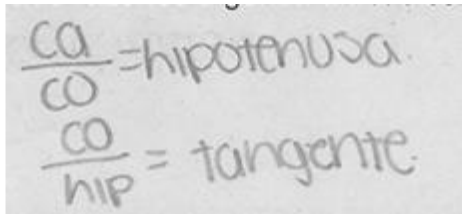

$\frac{ca}{co}$ = hipotenusa.
$\frac{co}{hip}$ = tangente.

Figura 5.6. Respuestas de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

En entrevista con un estudiante, se observa cómo describe las razones trigonométricas.

B: en la pregunta 2 qué razones trigonométricas conoces tu escribiste que no recordabas todas las fórmulas pero colocaste algunas. ¿Crees que haya otras?

Estudiante. No es que no recuerde todas, pero por ejemplo no recuerdo si va arriba el coseno o abajo la hipotenusa o las clases de ese tipo no me acuerdo muy bien cómo se llevan y que hay una aparte pero no me acuerdo si es la de coseno.

B: Sabes que hay más pero en este momento no podrías decirlas.

Estudiante: Sí.

B: Aquí escribiste abreviaturas CO e Hip ¿qué significan las abreviaturas?

Estudiante: Hip, quiere decir hipotenusa, CA cateto adyacente, la C y la O cateto opuesto.

B: Crees que haya alguna representación geométrica de ellas.

Estudiante: yo recuerdo que así se expresa en un triángulo, la hipotenusa es la parte más larga, el cateto opuesto se encuentra enfrente del ángulo que se esté presentando, en este caso el cateto adyacente es el que está entre la hipotenusa y el otro lado.

En este fragmento de entrevista con un estudiante se observa que su comprensión de los conceptos de razones trigonométricas es una idea de algunas de éstas según con lo que recuerda de la instrucción en el tema: tiene la idea de relación como una fracción, pero no recuerda el orden en que se deben colocar. La técnica nemotécnica que utilizó la docente no le hizo recordar el orden en que fueron enseñadas. Sin embargo, logra identificar las abreviaturas como los lados de un triángulo (el adyacente y el opuesto), visualmente puede identificar las abreviaturas en un nivel intuitivo; aunque en su discurso menciona que el lado más largo siempre es la hipotenusa y establece la relación que hay entre los lados, identifica al cateto opuesto como el que se encuentra frente al ángulo que se solicita; las relaciones que hace infiere que sus nociones sobre razones trigonométricas se encuentran establecidas para dar paso a la parte procedimental.

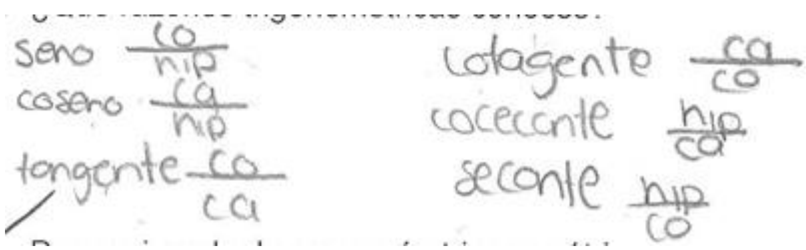


Figura 5.7. Respuestas de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

La figura 5.7 pertenece a una de las alumnas entrevistadas. En la entrevista contestó de la siguiente manera.

B: En la pregunta 2, qué razones trigonométricas conoces, escribiste palabras con algunas abreviaturas; que significan cada una de ellas CO, HIP, CA.

Estudiante: Bueno CO es cateto opuesto, CA es cateto adyacente, HIP es hipotenusa es para ver cómo se puede dar el resultado de las palabras que están aquí (señalando las palabras seno, coseno y tangente).

B: De estas razones que escribiste por ejemplo: el coseno *CA/HIP* ¿cómo lo representarías?

Estudiante: Es una división por ejemplo cateto adyacente lo que mide un lado sobre la hipotenusa que es lo que mide el otro lado de la figura.

B: ¿de cualquier figura?

Estudiante: Del triángulo.

En este fragmento de entrevista se logra observar que el estudiante, identifica y verbaliza las abreviaturas, como una relación (división) con la palabra (seno, coseno y tangente), tiene una idea del concepto de razón trigonométrica, lo identifica como una división de dos cantidades en un modelo del triángulo. Su visualización y lo intuitivo de sus preconceptos le ayudan a construir el concepto de seno coseno y tangente como una cantidad que resulta de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y la hipotenusa.

En la figura 5.8 uno de los alumnos escribió las seis razones trigonométricas en el orden convencional en que fueron enseñadas, además de anotar las razones abreviadas como una fracción a/b. En esta respuesta se observa que el alumno conoce todas las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. Sin embargo, nótese que las palabras seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante están separadas de la razón correspondiente.

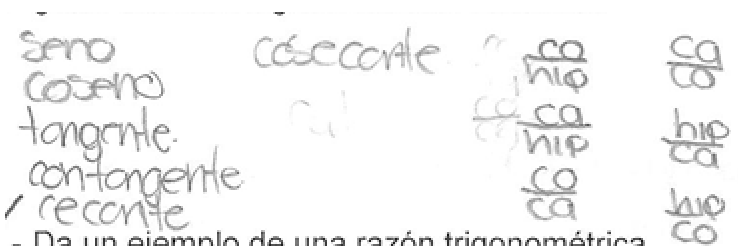


Figura 5.8. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

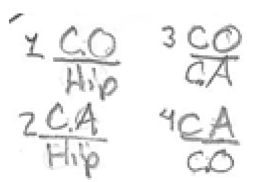


Figura 5.9. Respuestas de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

En la figura 5.9 se observan nuevamente las abreviaturas colocadas en forma de fracción *a/b*, pero con la diferencia de que no se les colocó ninguna razón trigonométrica que se relacionara con ellas, se puede inferir que este alumno es probable que utilizara la técnica nemotécnica de la instrucción del tema.

Como dibujos y modelos. En este bloque de respuestas sólo hubo un alumno que realizó el dibujo de un triángulo rectángulo en el que anotó en cada uno de los lados del triángulo las abreviaturas c. o, c. a e hipotenusa, con la denotación de un ángulo de 60º en la parte inferior derecha del triángulo rectángulo (véase la figura 5.10).

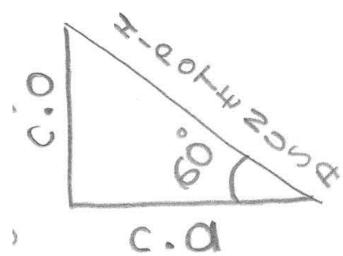


Figura 5.10. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

Algunos de los alumnos escribieron un enunciado que se leía de manera ambigua (véanse las figuras 5.11 y 5.12), tienen ciertos elementos y relación con el tema de razones trigonométricas; la interpretación que se puede dar a estos enunciados es que quizá se podían utilizar en la resolución de un triángulo rectángulo, sin embargo no queda claro lo que quisieron decir, no se logra interpretar de manera clara, esto hace inferir que no comprendieron la pregunta o el tema no les significó en su comprensión intuitiva.

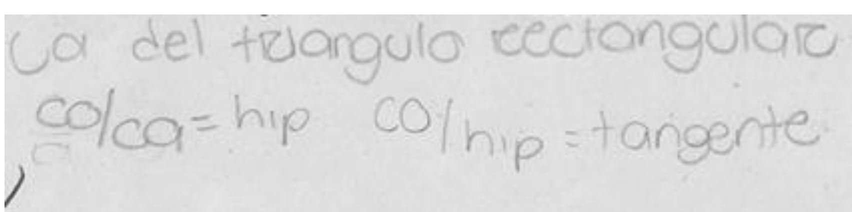


Figura 5.11. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

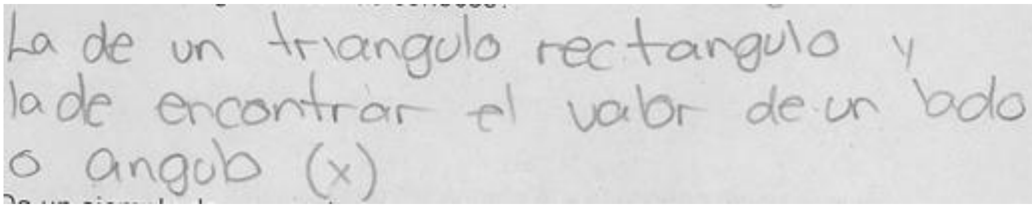

La de un triangulo rectangulo y
la de encontrar el valor de un lado
o angulo (x)

Figura 5.12. Respuesta de un alumno a la pregunta 2 del cuestionario

Cuando respondieron de manera diferente (*otros*), es como se muestra en la figura 5.13, nótese que ninguna de las imágenes muestra rastros de nociones de razones trigonométricas y que las respuestas son relacionadas a la clasificación de triángulos, criterios de congruencia, medidas de uno de los lados de un triángulo, palabras sobre trazos de figuras (homotecia, traslación, rotación).

Se puede inferir que los alumnos confundieron el tema de razones trigonométricas con uno de los temas previos a este (criterios de congruencia y semejanza y teorema de Thales), por ello tenían presente el concepto del triángulo; sin embargo no lograron relacionar las razones trigonométricas con el concepto de triángulo.

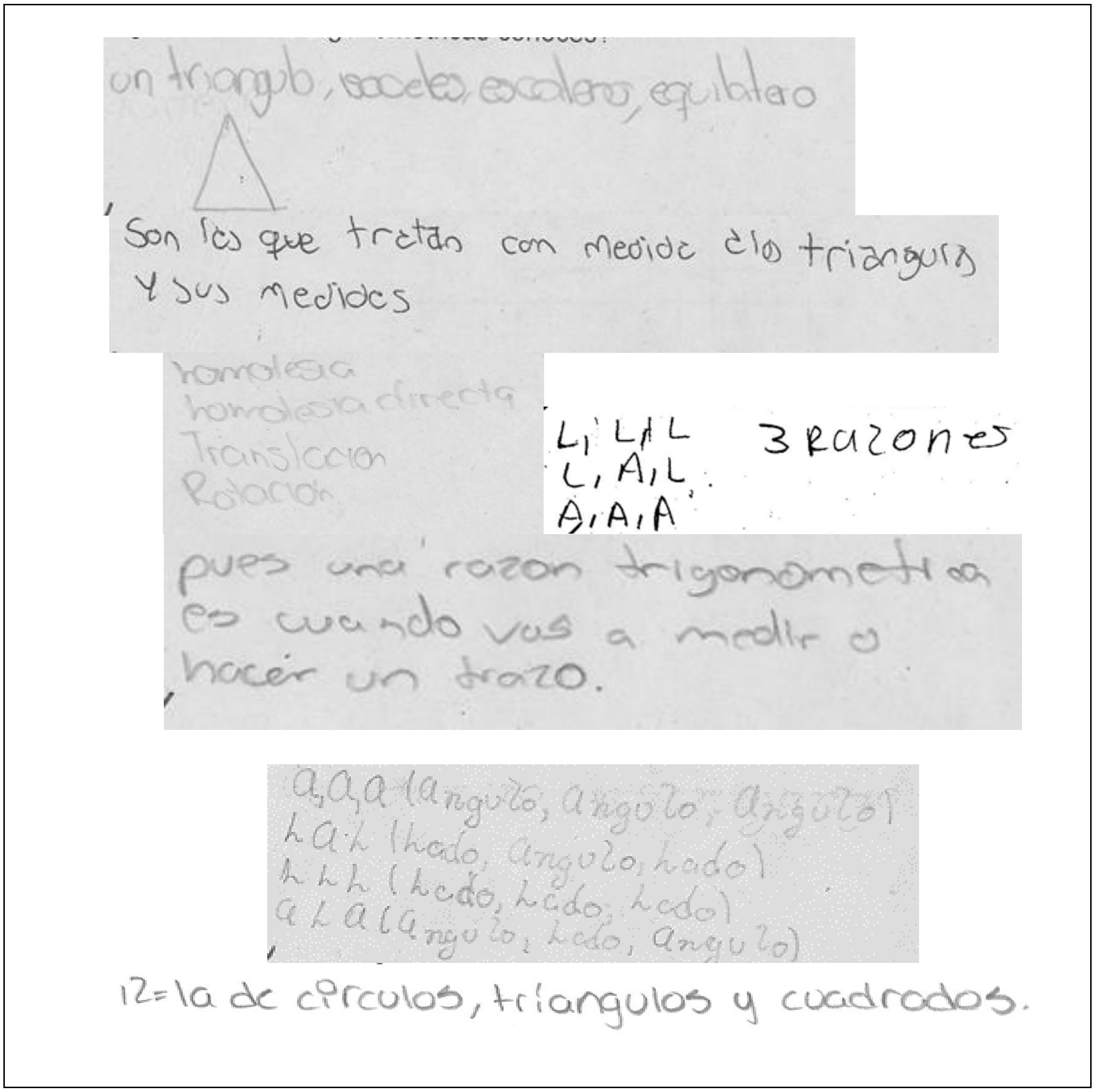


Figura 5.13. Respuestas de alumnos a la pregunta 2. Clasificación, *otros*.

Análisis de las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario

Para la pregunta 3 del cuestionario, *Da un ejemplo de una razón trigonométrica,* los alumnos utilizaron modelos.

La clasificación quedó de la siguiente manera: palabras sueltas, modelos como *a)* una razón, *b)* modelos de figuras, abreviaturas y *c)* redacción de un problema.

De acuerdo con los registros escritos de los alumnos para la pregunta tres del cuestionario, se puede observar que las representaciones para las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente son en forma de fracción *a/b* (véase la figura 5.14), en el orden convencional, ya sea con abreviaturas de las palabras cateto opuesto y cateto adyacente, o con las palabras completas; así también nótese que las nociones que tienen los alumnos son en correspondencia con un número, es decir que una razón trigonométrica puede tomar un valor para transformarlo en un número sin unidades de medida; en uno de los ejemplos de la figura 5.14 se puede observar que un alumno escribió la representación de una razón trigonométrica como un problema que había que resolver, dándole valores a un ángulo de 19º (en el ejemplo le faltó al alumno escribir el símbolo de grados) cuya tangente es (0.344), que al multiplicarla por 1.6 da como resultado 0.55. Este alumno describió con un problema lo que para él era un ejemplo de una razón trigonométrica.

a) Una razón

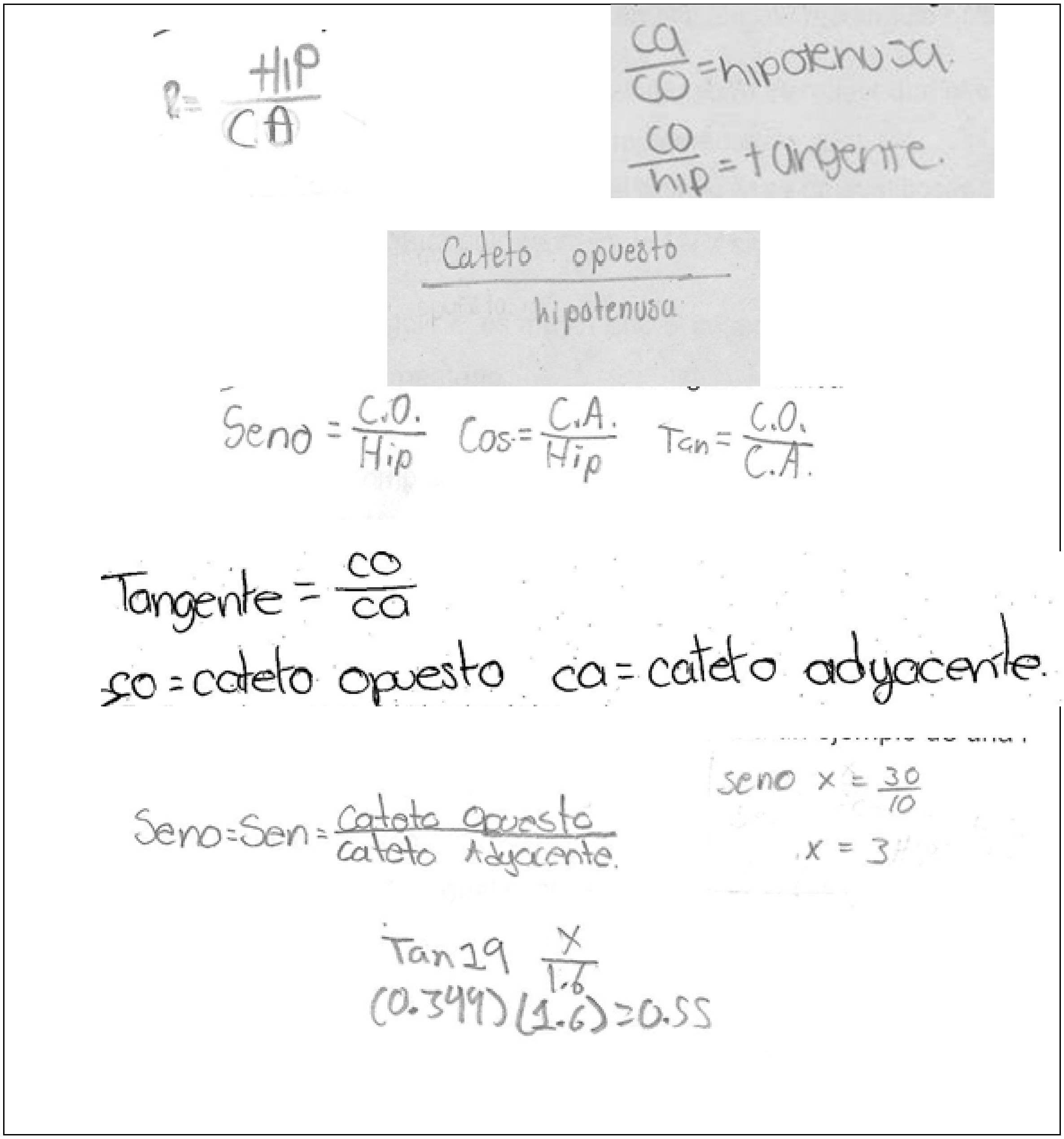


Figura 5.14. Respuestas de alumnos a la pregunta 3 del cuestionario. Como una razón

Entre una forma *a/b* con las abreviaturas y el planteamiento de un problema como un ejemplo para una razón trigonométrica, se observa una diferencia en las nociones de los estudiantes, esta diferencia no tiene que ver con la enseñanza de las docentes, ni con el plan de estudios llevado a la práctica, sino con los niveles de comprensión de los propios alumnos al interiorizar en sus estructuras mentales los conceptos, las representaciones como imagen (no necesariamente la imagen debe ser pictórica) y su comprensión de las mismas.

En la clasificación de un ejemplo de razón trigonométrica como un *modelo de figura* se encuentran las de la figura 5.15. Nótese que el triángulo rectángulo está presente en todas estas representaciones de modelos, además de que todos los triángulos tienen anotaciones a los lados, ya sea para nombrar los lados del mismo (cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa) o para colocarles valores tentativos (6, 10), además de que las representaciones del triángulo (modelos pictóricos) están acompañadas de una razón de la forma a/b; nótese que en algunos casos el triángulo rectángulo tiene escrito en uno de sus ángulos una medida (50º, 60º, 52º), esto hace que los datos escritos se interrelacionen con las propiedades geométricas de los triángulos y muestre evidencias no sólo de nociones de razones trigonométricas, sino de la comprensión en un siguiente nivel: el procedimental; ya que el alumno que le da valores a los lados del triángulo (10,6) no sólo identifica los lados y relaciona la razón trigonométrica para encontrar el ángulo superior (que no está denotado con alguna letra), sino que realiza el cociente de los valores y encuentra el valor del seno del ángulo. Aunque en este ejemplo se dejan rastros de comprensión de la resolución de un problema, no se logra identificar que exista un siguiente nivel: el de abstracción, porque no consigue identificar el valor de 1.6 como el número que lo puede llevar a encontrar el ángulo superior de la figura que propuso.

b) Modelos de figuras

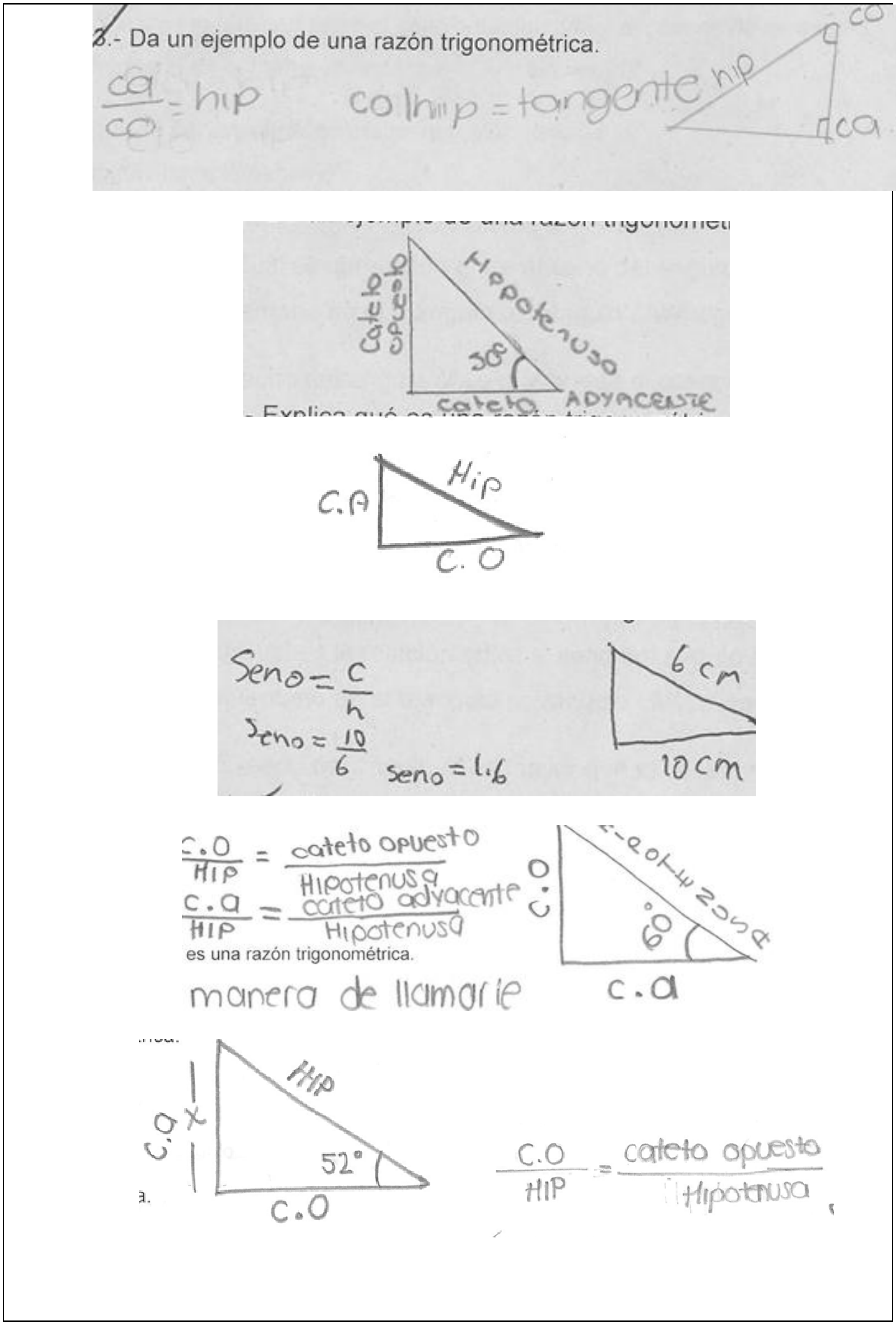


Figura 5.15. Respuestas de alumnos a la pregunta 3 del cuestionario

En la figura 5.16 se muestra una representación de una alumna a quien se seleccionó para entrevista. La alumna dibujó un modelo pictográfico de una razón trigonométrica, trazó un triángulo refiriéndose a él como un problema de un barco, anotó algunas abreviaturas (*CO/HIP*); en la entrevista menciona las palabras ángulo de depresión y elevación al cual le dio valor de 52°. Se refiere a *x* como la altura del triángulo.

Este es un fragmento de la entrevista con una estudiante:

B: En la pregunta 3 diste un ejemplo, colocaste unas abreviaturas CO; HIP ¿Qué significan?

Estudiante: Cateto opuesto sobre hipotenusa.

B: También dibujaste un triángulo, ¿qué fue lo que representaste con ese triángulo?

Estudiante: Para resolver un problema que es de cateto opuesto sobre cateto adyacente entre el ángulo de depresión, perdón, elevación, (corrige su respuesta) de un barco que es lo que nos habían enseñado.

B: Colocaste un ángulo que es de 52°y le colocaste CA y una *x,* ¿Qué representa esa *x*?

Estudiante: Lo que no sabemos, la altura que no sabemos del triángulo el dato que no sabemos.

B: ¿Cómo podrías representarlo para saber este valor de *x* en este triángulo? ¿Cuál razón ocuparías tú? ¿Cómo lo harías?

Estudiante: Con las razones trigonométricas de cateto adyacente sobre cateto opuesto.

B: ¿Y esa razón cuál es?

Estudiante: De tangente de 52º.

B: ¿Tú calcularías tangente de 52º para saber el valor de *x*?

Estudiante: Sí.

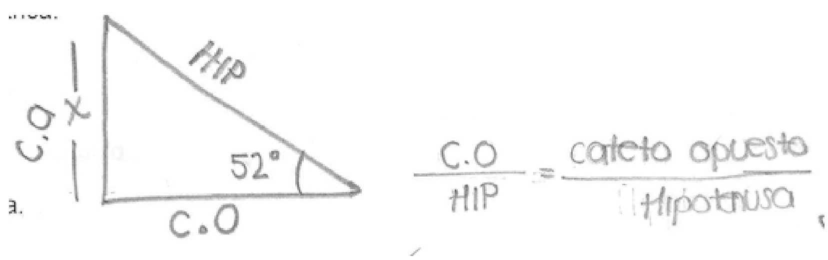


Figura 5.16. Representación de una razón trigonométrica para un alumno

En el modelo de figura que trazó el estudiante, el triángulo rectángulo simboliza la representación de la razón tangente, pero no sólo el triángulo le representa una razón trigonométrica, sino el contexto en el que lo suscribe el estudiante le da significado de dicha razón, reconoce lo que es una razón trigonométrica como la relación *a/b*, identifica su relación con los catetos del triángulo, aunque en un primer momento lo describió correctamente (tangente es cateto opuesto entre cateto adyacente), al preguntarle qué razón ocuparía para resolver el problema, lo mencionó de manera inversa. En la entrevista se deduce que relaciona su representación de una razón trigonométrica con ¿Para qué le podría servir esa razón trigonométrica? Este ejemplo contiene los tres niveles de comprensión que menciona Herscovics: intuitivo, procedimental y de abstracción.

En el caso de la entrevista con otro estudiante, se hace notar que no menciona la palabra razón, sino función para referirse a las razones trigonométricas.

Fragmento de entrevista con un estudiante.

B: En la pregunta 3 colocaste un triángulo, ¿Qué significa para ti el triángulo que colocaste como ejemplo?

Estudiante: Bueno el triángulo así se me hace más fácil sacar las… (hace una pausa) en la posición derecha como está el triángulo se me hace más fácil sacar cualquier función.

B: Tú colocaste tangente de A igual a CO entre CA ¿Qué fue lo que quisiste representar ahí?

Estudiante: El triángulo lo dibujé como se me hizo en su posición más cómoda le coloqué las letras a cada vértice A B y C, la hipotenusa era AB, era el que estábamos calculando, la hipotenusa, nos dieron el valor de cateto opuesto y de cateto adyacente.

B: ¿Resolvían en clase algunos ejercicios parecidos a los que tú colocaste aquí?

Estudiante: Un poco más difíciles.

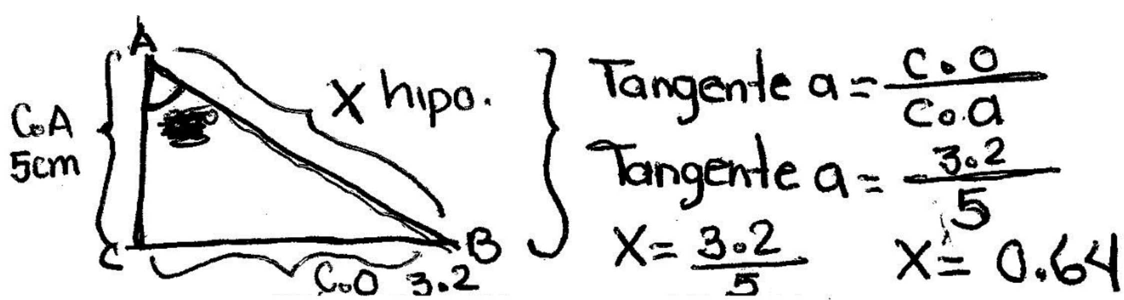
B: Más difíciles; entonces para ti este sería un ejemplo…

Estudiante: Sencillo.

B: ¿De una razón trigonométrica?

Estudiante: ¡Ajá! (el ajá es en tono de afirmación, como un sí)

En la entrevista con el estudiante, también se hace notar que una razón trigonométrica le representa un problema a resolver con la representación del modelo del triángulo rectángulo, su conocimiento intuitivo pasa al siguiente nivel, el procedimental, dado que relaciona las medidas de los lados del triángulo con la razón tangente de *a* y llega a un cociente numérico. Aunque en la parte procedimental el valor numérico es correcto; (0.64), nótese que cambia la razón tangente de *a* por la incógnita *x*. De acuerdo con lo que escribió el estudiante, para él, el valor de 0.64 representa el valor de *x* y no el valor de la tangente de *a*; hay confusión en su concepto de tangente, no se da cuenta del cambio de concepto. Si la idea era saber cuánto vale el segmento *AB* que denota con la letra *x*, no necesitaba calcular la tangente de *a*, en cambio si quiere saber el valor del ángulo *A*, requería realizar el despeje de la incógnita, en este caso el ángulo *a*.



5.17. Representación de una razón trigonométrica hecha por una estudiante

La parte visual que da el dibujo de un triángulo rectángulo en las representaciones de los conceptos de razón trigonométrica en los alumnos es representativa en su mayoría de los alumnos entrevistados, el nivel intuitivo y procedimental de calcular el valor de uno de los lados del mismo hace que las nociones queden establecidas bajo un esquema de resolución de problemas al encontrar la medida de uno de los lados del triángulo rectángulo. Los ejemplos de una razón trigonométrica están constituidos por la representación en forma de razón *a/b* y en la figura pictográfica de un triángulo rectángulo en su mayoría.

c) Redacción de un problema

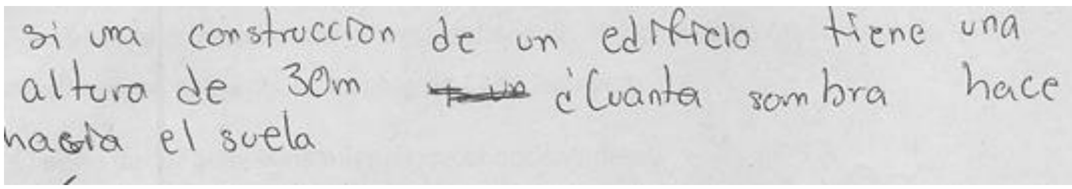

si una construccion de un edificio tiene una altura de 30m ¿Cuanta sombra hace hasta el suela

Figura 5.18. Respuesta de un alumno a la pregunta 3 del cuestionario

En la clasificación de un ejemplo de una razón trigonométrica como la redacción de un problema, se observa que las alumnos tienen la imagen de calcular la “sombra” que es una distancia de una figura, en este caso un edificio, el nivel intuitivo se hace evidente por la creación de una imagen que adquiere un significado en este contexto (calcular la sombra que proyecta el edificio), aunque no se mencionan las razones trigonométricas, se infiere que el alumno debe usarlas para resolver el problema que planteó.

En el caso de la clasificación *d)* O*tros,* nótese que estas respuestas no tienen relación directa con el tema de nociones de razones trigonométricas; las representaciones como el dibujo de un cuadrado, un rectángulo, o la referencia a los criterios de congruencia no muestran evidencia de que haya un concepto de lo que es una razón trigonométrica, por lo que un porcentaje de los alumnos encuestados no tienen los elementos necesarios para estar en un nivel de comprensión del tema.

d) otros

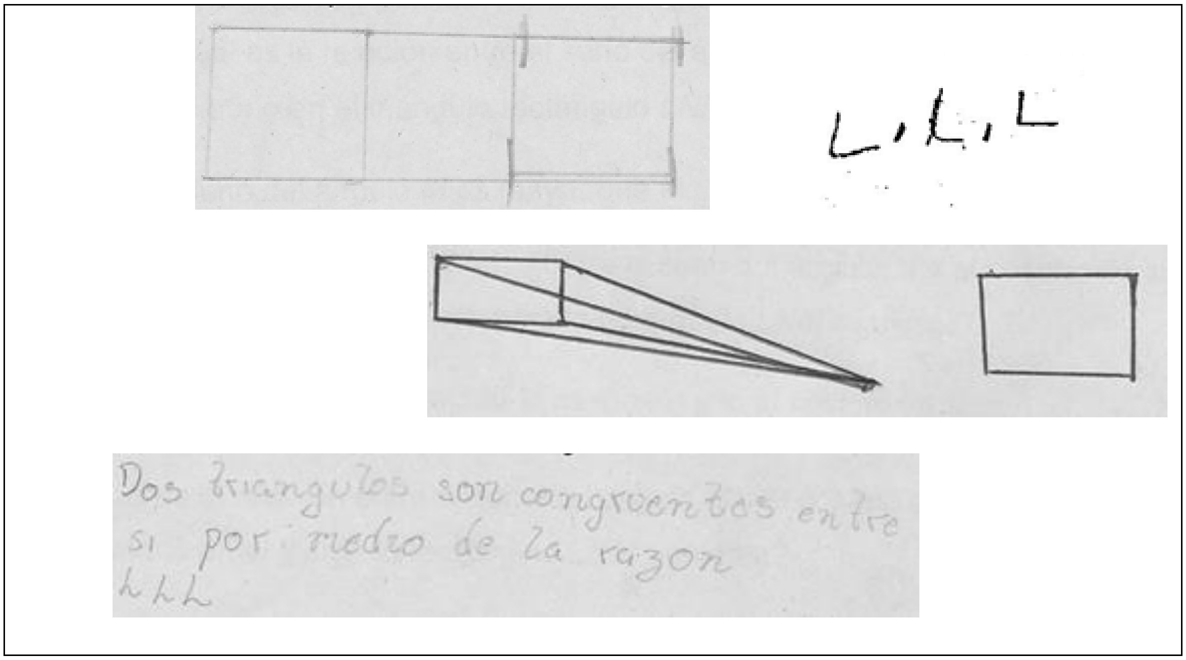


Figura 5.19. Respuestas de alumnos a la pregunta 3 del cuestionario

Análisis de las respuestas a las preguntas 4 y 5 del cuestionario

Para las preguntas número *4 Explica qué es una razón trigonométrica* y 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas*? Se realizó una tabla en forma de lista de cotejo por grupo con las respuestas de cada alumno en ambas preguntas, las tablas completas se pueden consultar en el anexo 4. Dada la extensión de los datos, se decidió realizar una segunda clasificación quedando de la siguiente manera, *Nociones cercanas*, sin relación y *no contestaron* (véase el cuadro 5.4).

Cuadro 5.4. Pregunta 4 del cuestionario. Explica que es una razón trigonométrica

Nociones cercanas	Sin relación	No contestaron
-El cateto opuesto sobre la hipotenusa (5) -La función - Es cuando una razón ejemplo: seno tiene su relación con el triángulo cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa - Es una función con la cual puedes deducir el tamaño de algún lado de un triángulo rectángulo con un ángulo - Sirve para calcular las medidas, lados o ángulos de un triángulo rectángulo - Es una fórmula o ecuación que se usa para solucionar un problema trigonométrico - La comparación de dos magnitudes (4) - Son problemas en los cuales tienen un ángulo de 90 ° tienen un cateto opuesto y un adyacente y también tienen una hipotenusa - Es cuando la usas para sacar la medida de algún lado de algún triángulo utilizando una tangente, seno, coseno, etc. - Una fracción, una división - Una función para obtener medidas o ángulos - Es cosecante entre dos cantidades. Ejemplo 2/3 - Son seis diferentes ecuaciones o fórmulas que nos ayudan a encontrar diferentes valores de un triángulo rectángulo ya sean sus ángulos o sus medidas dependiendo de la función	Es el valor de una figura - Es una forma de resolver problemas (35) - Es la medida que nos da un ángulo (2) - Es una razón sobre cómo hacer construcciones matemáticas - Es la fórmula de una figura para encontrar su volumen - Es un conjunto de diagonales adyacentes - Es una figura que tiene tres lados (3) - Una figura que se encuentra en un plano cartesiano - Cuando dos rectas forman un triángulo rectángulo - Es la distancia de una línea a otra - Son las medidas que nos permiten saber cosas como peso, volumen y forma, etc. - Es aquella que nos ayuda a definir si dos figuras son semejantes o congruentes entre si - Un tipo de método para encontrar las medidas de las aristas o los ángulos de un triángulo	3 I 4 de 20 no contestaron, equivale al 20% 3 J 13 de 24 no contestaron, equivale al 54% 3 B 6 de 18 no contestaron, equivale al 33% 3 D 14 de 24 no contestaron la pregunta Equivale al 58.3 % 3 F 5 de 18 no contestaron Equivale al 27.7% 3 G 5 de 24 no contestaron Equivale al 20.83% 3 H 8 de 21 no contestaron, equivale al 66%

Algunas respuestas que se destacan en el cuadro 5.4 para la clasificación de *nociones cercanas* son:

- Es cuando una razón ejemplo: seno tiene su relación con el triángulo cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa
- Es una función con la cual puedes deducir el tamaño de algún lado de un triángulo rectángulo con un ángulo
- La comparación de dos magnitudes (4)
- Son seis diferentes ecuaciones o fórmulas que nos ayudan a encontrar diferentes valores de un triángulo rectángulo ya sean sus ángulos o sus medidas dependiendo de la función
- Es el cociente o resultado de una división

La comprensión y definición del concepto matemático de razón trigonométrica es sumamente complejo para el alumno de secundaria, intuitivamente algunos alumnos tienen la idea de razón como una fracción o comparación entre dos magnitudes; esta noción de la razón trigonométrica nos da una idea de que el alumno está elaborando sus procesos mentales para intentar establecer un vínculo entre la realización de actividades específicas (como resolver un problema) y la imagen abstracta del concepto matemático.

La indistinción entre la palabra razón y función trigonométrica continúa presentándose en el lenguaje de los alumnos al referirse a las razones trigonométricas.

Nótese que las respuestas en relación con las nociones cercanas es menor a las respuestas que están sin relación alguna respecto al tema, algunas de estas son tan ambiguas como fuera del contexto del triángulo rectángulo y en su mayoría asocian la razón trigonométrica con la resolución de un problema suscrito al contexto del triángulo rectángulo y cálculo de distancias.

En el cuadro 5.5 se observan las respuestas más representativas a la pregunta ¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas? La clasificación que se realizó fue de la siguiente manera: generales, específicas y ambiguas.

Cuadro 5.5. Pregunta 5 del cuestionario ¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?

Generales	Específicas	Ambiguas
3 I - Para resolver un problema en el que se pida ángulo de un triángulo - Para sacar una medida para hacer una escalera - Para saber la medida de un ángulo - Obtener un ángulo - Para sacar el resultado de un triángulo - Para sacar un ángulo - Para buscar un lado sin número de una figura o una distancia entre algo - Para medir las distancias o alturas	- Para poder medir o calcular una pirámide - Para realizar un problema que utiliza CO, CA, hip. - Para calcular la altura de un edificio y los ángulos - Para resolver un problema de altura o de ángulos. Para saber cuál es el ángulo de una figura - Sirve para calcular el valor de la hipotenusa de un triángulo - El alumno dibujó un triángulo con las abreviaturas hip, ca. y 9 cm. - Para sacar grados de un triángulos- alturas	En una operación o problema - No contestó (1) - Para encontrar los lados - Para resolver problemas - Para resolver problemas y calcular algo que queramos saber.

(Continúa)

Cuadro 5.5 (continuación)

3 J - En el teorema de Pitágoras - En construcciones o calcular con los ingenieros - Para calcular la medida de un triángulo - Para calcular algo que pide en forma de triángulo	- En algún problema de ángulos - Para resolver problemas de cómo encontrar la altura, distancia o grados y acabar con la duda. - Para saber o aproximar el tamaño, altura, distancia de alguien o algo	- Para medir profundidades - Supongo que a lo mejor los arquitectos - Cuando necesitas saber el volumen de una figura - Para poder sacar las áreas de los triángulos - Para resolver un problema - Para calcular un triángulo - No contestaron (11/24)
3 B - En un problema para medir un terreno u otra cosa - Para calcular la medida de una figura o resolver un problema de una forma geométrica por medio de ecuaciones - Para resolver problemas o cualquier otra cosa - Para la medición de terrenos	- Para calcular el área de un triángulo rectángulo (sus lados, ángulos) - La situación es cuando quieres saber algún lado de un triángulo rectángulo y sólo te dan un ángulo y un lado y con eso ya lo puedes saber - Para calcular algunos de los ángulos o lados de cualquier triángulos - Para conocer la medida de algún lado faltante de un triángulo	- Al hacer figuras que quiero que tengan alguna semejanza - En figuras que quiero que tengan un parecido - Para medir algo - Para resolver problemas o cualquier otra cosa - En ubicar diversos puntos - Para calcular la medida - Para formar figuras - Para resolver problemas matemáticos y hasta en la vida cotidiana. (para el empleo contable de un establecimiento) - Los podría utilizar par asacar las medidas de las figuras - En todos los problemas matemáticos
3 D - Para saber el lado o el ángulo de la figura - Para sacar alguna medida necesaria de un triángulo - Para sacar alguna medida de algún triángulo - Para cuando se presentan problemas de triángulos - Cuando te pide el valor de una medida de algún triángulo - Hacer figuras, sacar ángulos, medidas, conocer cierta figura por sus medidas	- Para saber la medida de sus catetos o la hipotenusa de un triángulo, coseno , seno o tangente del mismo - Para sacar la hipotenusa, coseno , seno, de un triángulo, para saber la medida de sus catetos y el ángulo - Para saber una medida de un lado del triángulo que desconoces - Para un problema o algo que tengan que ver con las razones trigonométricas	- Para poder resolver problemas con una medida desconocida - Para formar figuras o prismas - Las podría usar para hacer ecuaciones y algo matemático, sacar ángulo, medias, etc. - En la vida cotidiana , para resolver problemas que se nos presentan - Hacer un dibujo, sacar un ángulo, conocer a detalle una figura - Para un problema

(Continúa)

Cuadro 5.5 (continuación)

Generales	Específicas	Ambiguas
- Son problemas de triángulos-En una construcción		- Para divertirse y en la escuela - Para ampliar figuras - Para poder ampliar figuras
3 E - Tal vez para sacar una medida en alguna figura - Para medir o calcular distancias o alturas - Para un proyecto en casa medir a lo mejor un ángulo o un espacio - Para saber el ángulo y medidas de a que distancia está un objeto de otro - Para poder saber el problema de una figura o lugar trigonométrico	- Para sacar la medida de un lado o un ángulo de un triángulo y de descubrir la incógnita - Cuando tenga un problema de qué altura o cuánto ángulo me piden - En los triángulos, para altura, en cosas que tengan que ver con triángulos	- Teorema de Pitágoras - Para los ángulos - Para resolver un problema - En los exámenes, en el trabajo si me llegaran a pedir medidas acerca de altura que sea como ésta - Para localizar alguna medida que este en "x" - Para estudiarlas o aprenderlas de memoria
- Para saber la altura de ciertas cosas en los exámenes. Para saber distancias y ángulos - En un ejercicio. Examen. En el teorema de Pitágoras - Para encontrar el lado que mide un triángulo - Para encontrar el valor de los lados de un triángulo		
3 F - Al querer saber cuánto mide un lado de cualquier cosa triangular - Para medir los tres lados de un triángulo - Para medir el lado o el ángulo de un triángulo. - Para medir el lado o el ángulo de un triángulo. - Para calcular el ángulo de un triángulo o algunas cosas así	- Recuerdo que mediante el ángulo se encontraba en una figura y la medida de uno de sus lados puedes determinar de qué razón trigonométrica se trata y dependiendo la razón trigonométrica que es, se utiliza una tabla que dice a cuanto equivale el ángulo.	- Para medir cosas en forma de triángulo - Para encontrar el valor de x - Para encontrar el valor de "x" - En ciertos problemas

(Continúa)

Cuadro 5.5 (concluye)

Generales	Específicas	Ambiguas
- En ciertos problemas donde se tenga que encontrar la medida de algún lado de un triángulo rectángulo (3) - Para saber los lados de un triángulo - Para encontrar la medida de un lado de un triángulo - Para poder sacar las medidas de triángulos o un problema similar - Para saber un dato de un triángulo		
3 G - El ángulo de la elevación de algo - Las medidas - Para encontrar la medida de un lado o un ángulo (5) - Para determinar el ángulo de la elevación de algo (2)- Para calcular alturas o distancias - Para saber cuánto miden los objetos unos de otros (2) - Para saber problemas o para calcular los grados de un ángulo - Para sacar el ángulo de un triángulo - Para encontrar algún valor ya sea de la luz de un poste, sobre cuánto mide una escalera o para encontrar un valor- Para calcular ángulos de un triángulo	- Para formar una figura (cuadro, triángulo, pentágono) con ciertas medidas o alturas en la gráfica - Para poder calcular la distancia de un punto a otro - Para sacar los grados de una pirámide o la altura de un poste de luz (2) y poder tomar medidas - Para saber la altura o ancho de un edificio o la distancia a la que un objeto se encuentra	- No contestó (3) - Para sacar el área de algún triángulo - Para los triángulos rectángulos
3 H - Para medir y sacar ángulos (3) - Para resolución de un triángulo - Es para la resolución de un problema (4) - Para conocer medidas o cantidades que se presentan como x	- Para calcular los ángulos de los triángulos o la medida de alguno de sus lados - Para sacar el ángulo del triángulo rectángulo (2) - Para resolver un problema como a que distancia se encuentra alguien o alguna cosa o la altura de alguna cosa	- Se puede decir que para así saber más de ellas - No contestó - Para saber la distancia de un objeto a otro

En términos generales la mayoría (60%) de los alumnos coincidió en que las razones trigonométricas sirven para resolver problemas de triángulos, en segundo lugar resolver problemas cuando tenemos las medidas de los triángulos y en tercer lugar resolver problemas cuando tenemos medidas de los lados y ángulos.

El hecho de haber resuelto varios problemas de cálculo de distancias en diversos contextos, les proporcionó a los alumnos elementos para responder que conocer las razones trigonométricas sirve para resolver problemas suscritos en el contexto del triángulo rectángulo. Sin embargo el hecho de saber para qué se podrían utilizar las razones trigonométricas necesariamente está relacionado en que utilicen el procedimiento, el algoritmo y las representaciones de comprensión de la imagen para hacerlo.

Algunas respuestas destacadas del contexto en el que se produce esta resolución de triángulos rectángulos son:

- Para saber los grados que hay en un poste y poder tomar medidas
- Para saber la altura o ancho de un edificio o la distancia a la que un objeto se encuentra

Análisis de las respuestas a las preguntas 6,7 y 8 del cuestionario

De acuerdo con los datos obtenidos con el cuestionario aplicado a los alumnos de tercer grado de educación secundaria, respecto a las nociones de razones trigonométricas. En las preguntas de respuesta abierta se obtuvieron los siguientes resultados.

En las preguntas de los incisos 6, 7 y 8 el criterio de agrupación de datos fue realizar una estadística con el número de frecuencias de las respuestas por inciso, tomando en cuenta si el alumno hizo anotaciones adicionales a la pregunta o si realizó algún cálculo para poder resolverla (véase el cuadro 5.6). El criterio de las notas adicionales en las respuestas de opción múltiple fue uno de los indicadores importantes que se utilizaron para seleccionar a los candidatos de entrevista.

Cuadro 5.6. Frecuencia de respuestas a las preguntas 6, 7 y 8 del cuestionario.

	Pregunta 6				Pregunta 7			Pregunta 8			
Grupo	A	B	C	D	A	B	C	A	B	C	D
B	2	2	12	2	4	4	9	1	5	5	7
D	0	2	12 1 sin relación	6	4	4 1 sin relación	9	1	5	5	7
E	4 2 sin relación	0	16	2	4 2 sin relación	5	12	6	5	6	6
F	3	1	1	6	11	2	7	4	3	4	9
H	2 2 sin relación	4	7	3	1	7 1 sin relación	9	4	0	8	6
Total	11 y 4 sin relación	9	48 y 1 sin relación	19	24 y 2 sin relación	17 y 2 sin relación	46	16	18	28	35

De acuerdo con la literatura sobre trigonometría, algunos autores mencionan el valor numérico de una razón trigonométrica como parte de la razón trigonométrica y su relación con los lados del triángulo rectángulo.

"…el valor numérico de las razones entre los lados *no depende* del triángulo rectángulo que tomemos, sino exclusivamente de la magnitud del ángulo α. Cada una de estas razones recibe un nombre especial:" Rivaud, 1984, p. 36.

7.- En el triángulo rectángulo *ADE* de la siguiente figura, indica cuál es el cateto opuesto al ángulo *A*.

e) $\overline{CB}$

f) $\overline{AE}$

g) $\overline{ED}$

h) $\overline{AD}$

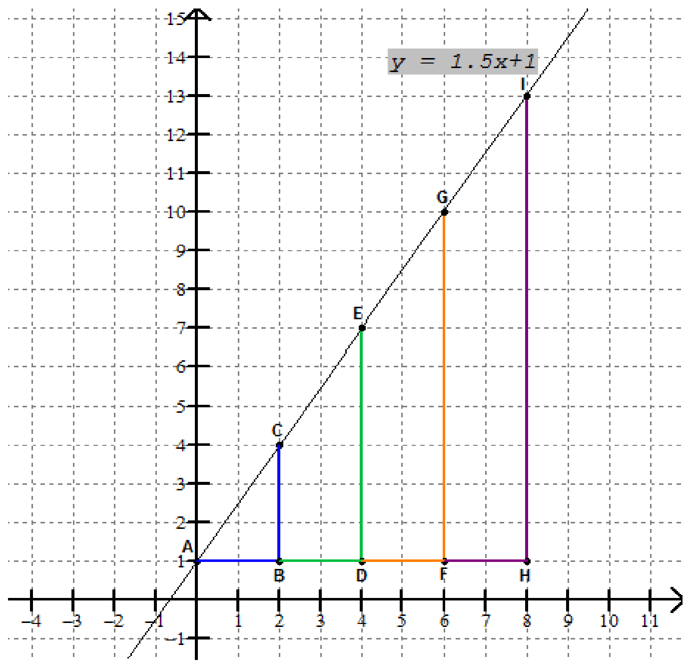


Figura 5.20. Pregunta 6 del cuestionario sobre nociones de razones trigonométricas

En el caso de la respuesta de los alumnos a esta pregunta el inciso c es la que tuvo mayor número de elección entre los alumnos con un 52.17% de respuesta (véase la figura 5.20), la entrevista con un estudiante explica porque escogió este inciso.

Fragmento de entrevista con un estudiante:

B: En la pregunta 6 colocaste como respuesta correcta el inciso C, ¿Por qué escogiste este inciso?

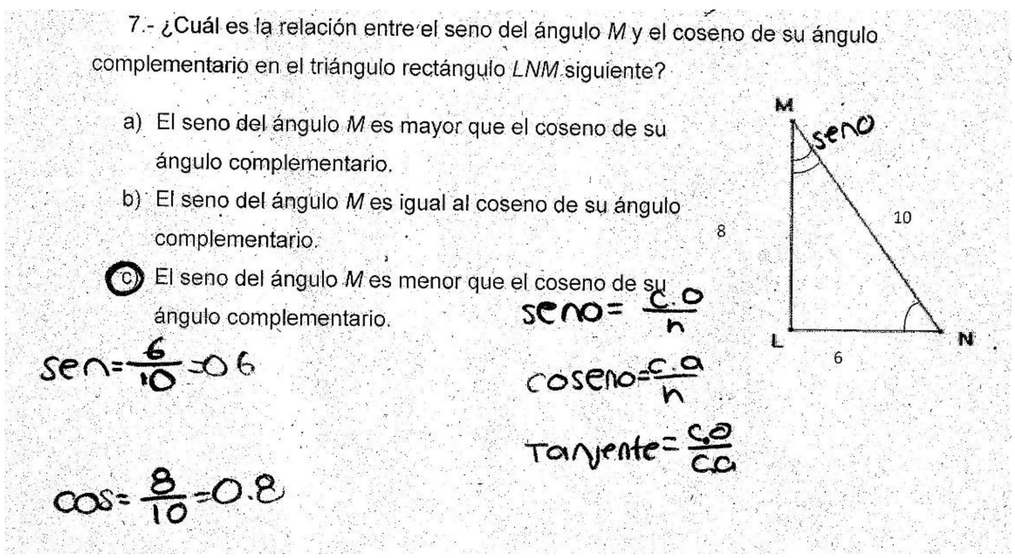
Estudiante: Porque era el opuesto al ángulo A yo primero marqué en el triángulo las letras que necesitaba antes en la pregunta A D y E y ya que lo marque (refiriéndose al triángulo que se forma con las letras) fui poniendo los opuestos y salió el inciso C que es ED.

El estudiante primero estableció cuál era el triángulo ADE en la figura, posteriormente, definió su ángulo A, y buscó en las opciones que se le daban, alguna elección que coincidiera con su representación mental del cateto opuesto al ángulo A, escogiendo el inciso C. La comprensión que tiene el estudiante sobre el cateto opuesto a un ángulo se ve reflejada en la elaboración de conjeturas para contestar de manera acertada a la pregunta. Cuando el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas, alcanza un nivel de comprensión situado en la abstracción.

En las respuestas a la pregunta 7 del cuestionario, el mayor número de respuestas fue el inciso c, con un porcentaje de 50.54%, aunque esta no es la respuesta correcta a la pregunta; es la respuesta que tuvo mayor frecuencia. Los alumnos no lograron relacionar que el seno del ángulo M es igual que el coseno de su ángulo complementario.

En la figura 5.21 se muestra un ejemplo de cómo relacionó un alumno la pregunta con la respuesta.

Nótese que el alumno seleccionó al ángulo M para calcular el seno y el coseno de ese ángulo, las relaciones entre los lados del triángulo y la hipotenusa los realiza conforme a lo enseñado (anota todas las razones trigonométricas básicas) y a su imagen mental de lo que representa una razón trigonométrica. Para poder identificar el seno y el coseno del ángulo M realiza primero la relación respecto al modelo de una fracción del tipo a/b, posteriormente sustituye los valores que representan las distancias del cateto opuesto (6), el cateto adyacente (8) y la hipotenusa (10) y por último realiza el cociente de dicha división (seno = 6/10 y coseno = 8/10), así obtiene como resultado 0.6 y 0.8 por lo que deduce que la respuesta correcta a la pregunta 7 es el inciso c.



7.- ¿Cuál es la relación entre el seno del ángulo *M* y el coseno de su ángulo complementario en el triángulo rectángulo *LNM* siguiente?

a) El seno del ángulo *M* es mayor que el coseno de su ángulo complementario.

b) El seno del ángulo *M* es igual al coseno de su ángulo complementario.

c) El seno del ángulo *M* es menor que el coseno de su ángulo complementario.

Figura 5.21. Ejemplo de la tarea 7 del cuestionario

Este ejemplo es representativo del razonamiento que siguieron algunos de los alumnos para poder contestar la pregunta. La comprensión de los alumnos respecto a la palabra “complementario” queda en un nivel intuitivo de acuerdo con su experiencia previa con otros temas, no toman en cuenta que hay tres ángulos interiores en un triángulo (L, M, N) y que dos de ellos son complementarios (M y

N), es decir, suman 90 grados. Al no cambiar de ángulo agudo M para realizar el procedimiento de relación de catetos e hipotenusa en la razón coseno del ángulo N, no descubren que el seno del ángulo M es igual al coseno de su ángulo complementario.

Para las respuestas a la pregunta 8 el mayor porcentaje de respuestas fue el inciso d con un porcentaje de 36.08%, esta tarea explora hasta dónde los alumnos eran capaces de llevar sus representaciones e imágenes del concepto de una razón trigonométrica a la práctica en la resolución de un problema específico.

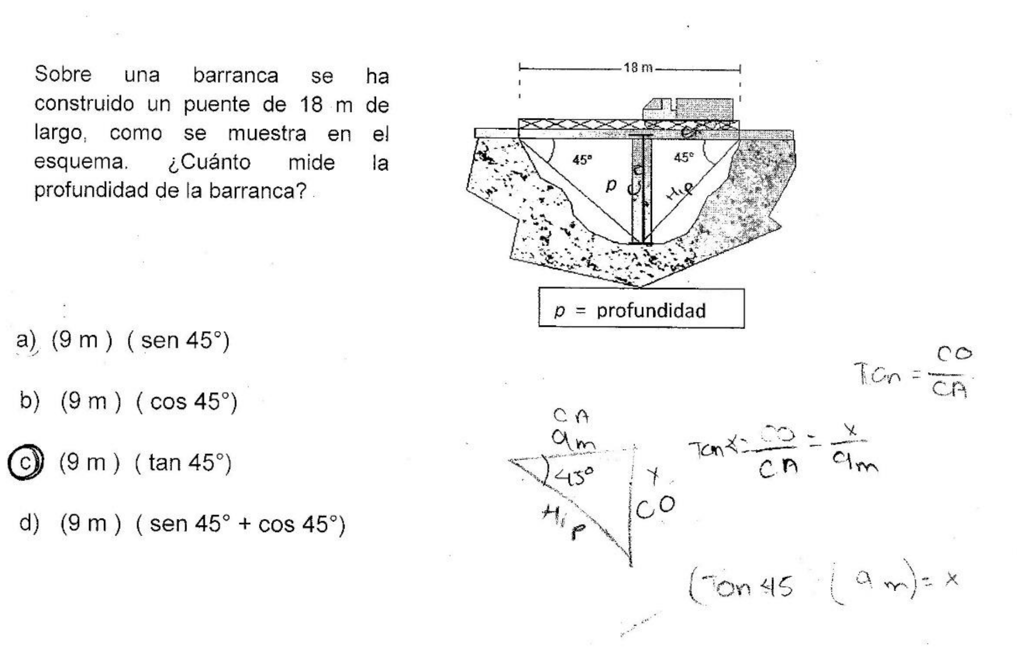


Figura 5.22. Ejemplo de resolución del problema de la tarea 8

En esta tarea (véase la figura 5.22) el alumno escoge como respuesta correcta el inciso c, la forma en que determina que esa es la respuesta correcta la describe en el procedimiento que realizó. En las notas adicionales a la tarea que se solicita, se observa que dibuja un triángulo rectángulo con abreviaturas CA, CO e Hip; denota el ángulo de 45° en la parte superior izquierda y coloca una x en donde se encuentra la abreviatura CO, posteriormente realiza la representación de la razón tangente para relacionar CO con la letra *x* y CA con un valor de 9 m, se infiere que al tener una longitud de 18 metros en el puente de acuerdo con el dibujo que se presenta y sólo utilizar la mitad del triángulo isósceles que se forma en el dibujo, por eso utiliza el valor de 9 para relacionarlo con CA; posteriormente realiza el despeje de la letra *x* y obtiene (*tan 45*°) (*9m*) = *x*, quien en su representación de imagen mental significa que es la profundidad de la barranca denotada con la letra P en el dibujo que se observa en la tarea.

En esta tarea se infiere que el alumno tiene las nociones de razones trigonométricas establecidas en su comprensión en el nivel de formalización en el que logra conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, tiene construidos objetos mentales de clases de imágenes similares para cada razón trigonométrica, y logra reconocer sus propiedades observadas para lograr identificar que realizando el procedimiento (*tan* 45°) (9m) = *x* puede encontrar la longitud de la barranca.

En la figura 5.23 se observa que otro alumno realiza un procedimiento similar al de la figura 5.22, sin embargo este alumno utiliza la razón coseno para poder identificar la respuesta a la tarea de la barranca. En el caso de este alumno que utiliza la razón coseno, no se da a la tarea de reflexionar que lo que encontró fue el valor de h (hipotenusa) y no el valor de *x*, la representación de las razones trigonométricas está establecida en su estructura mental como la imagen de una fracción *a/b*, la relación del cateto y la hipotenusa en esa representación es correcta, sin embargo el vínculo que guarda la imagen del concepto no es válido para poder resolver la tarea que se le está presentando.

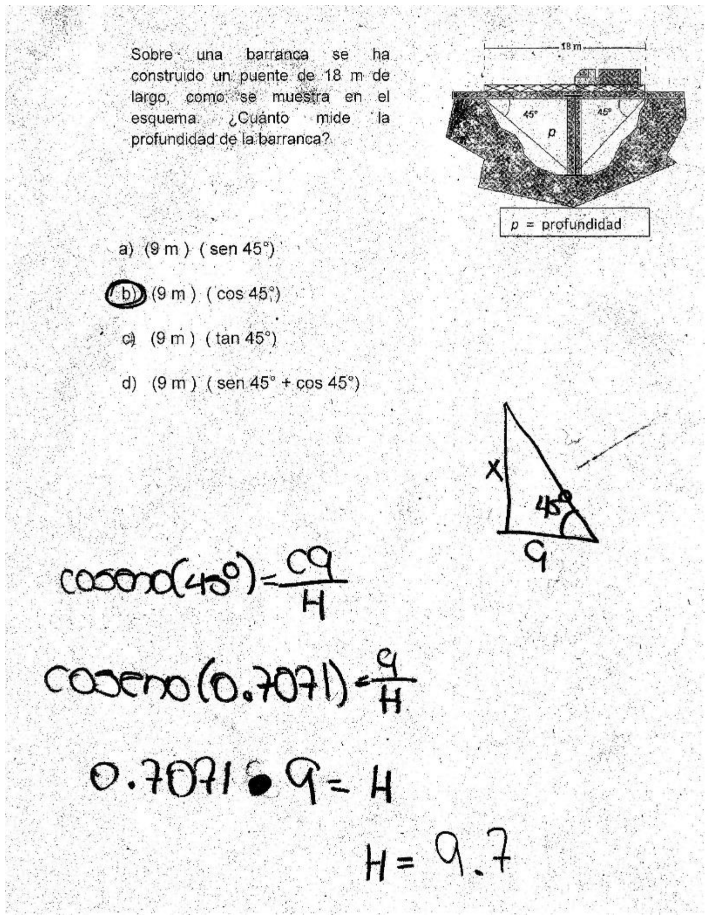


Figura 5.23. Ejemplo de resolución a la tarea 8

En el caso de la tarea 8, se identifica que existe una recursión en las estructuras que pasan de un nivel a otro para poder relacionar y consolidar el concepto matemático de razón trigonométrica y aunque los alumnos logran identificar, contestar y resolver el problema de la distancia de la barranca, todavía existen estructuras que no se encuentran consolidadas en la comprensión del propio concepto matemático de razón al no poder definir o describir que es una razón trigonométrica si necesidad de recurrir al uso del modelo del triángulo rectángulo.

De acuerdo con la teoría recursiva de Sierpinska la “comprensión es un acto, pero un acto relacionado con un proceso de interpretación que es una dialéctica del desarrollo, entre más y más se elaboren suposiciones” (Sierpinska, 1990, p. 26).

CAPíTULO VI

CONCLUSIONES

El uso del lenguaje propio de la trigonometría, no necesariamente refleja las nociones que los alumnos de tercer grado de educación secundaria tienen acerca de la misma, ya que usan indistintamente, ángulo adyacente que cateto adyacente, confundiendo los catetos con los ángulos a los que se está refiriendo en la relación de ángulos con los lados de un triángulo rectángulo.

En el PEM 2011, sólo se enuncian como enseñanza tres de las seis razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. Esta investigación estableció que los docentes han decidido también enseñar las razones trigonométricas que no se encuentran enunciadas en el PEM 2011 (*cotangente, secante y cosecante*) ya que consideran pertinente así hacerlo. Una pregunta que se deja para análisis posterior es ¿Qué pasaría cuando los docentes decidan apegarse íntegramente al PEM 2011? ¿Qué nociones tendrán los estudiantes de secundaria en relación con las razones trigonométricas? ¿Qué implicaciones tendrán esas nociones en su aprendizaje en el siguiente nivel de escolaridad?

El análisis de las respuestas a las preguntas determinan que los alumnos no se percatan en su totalidad de este hecho, si bien no colocan unidades de medida en las representaciones de y una razón trigonométrica, tampoco se cuestionan por qué no tiene unidades de medidas el cociente de dicha razón.

Una función relaciona la amplitud de un ángulo respecto a las longitudes de sus lados, la confusión de los alumnos al mencionar razón indistintamente que función, nos denota que el contexto del círculo de radio unidad no se ve en la escuela secundaria en México o no se le da la importancia y el tiempo debido para poder analizar las propiedades que éste tiene. En la investigación no se pudo rescatar ningún indicio de que las docentes hayan abordado el tema de razones trigonométricas en el contexto de círculo de radio unidad y que el plan de estudios sí establece como un tema a tratar por medio del programa *Cabri Geometre.*

El uso de técnicas nemotécnicas es frecuente entre los docentes, ya que en su práctica pedagógica les resulta conveniente para que los alumnos se aprendan la secuencia (lineal) de la relación entre los catetos y la hipotenusa y así formar los conceptos de seno, coseno, tangente, como sus inversas multiplicativas, cotangente, secante y cosecante.

Las técnicas nemotécnicas que enseñan los decentes en el tema de razones trigonométricas dificultan el aprendizaje de estas por parte de los alumnos.

Algunos hallazgos de la investigación con alumnos son los siguientes.

- Usan el lenguaje propio de la trigonometría, en términos de razones, pero mediante técnicas nemotécnicas.
- Usan la calculadora para calcular razones trigonométricas, pero esto provoca que se le reste sentido a las tareas de comprensión.
- Hay una desvinculación entre los reactivos del plan y programas de estudio tanto de 2006 como de 2011 con los reactivos de las pruebas ENLACE y Excale.

- Los estudiantes logran resolver los problemas, determinando el valor de las incógnitas, pero no logran la comprensión del concepto de razón trigonométrica.
- La comprensión es un proceso complejo y recursivo, en el que no se puede determinar que a largo plazo los estudiantes logren recordar cómo se hacía o resolvía un problema de este tipo. Sin embargo en los niveles intuitivos, y de nociones sí logran definir el contexto del triángulo rectángulo como un referente para las razones trigonométricas.
- No así en el contexto del círculo unitario en el que no se le procuró énfasis y por lo que en niveles superiores tienden a confundir la parte de razón y función, ya que en su estructura mental la imagen que representa a una razón trigonométrica se observa sólo con la representación de un triángulo rectángulo.
- Logran reconocer las imágenes de razón como una abreviatura.
- Realizan operaciones entre la relación de los catetos e hipotenusa.
- La imagen del triángulo rectángulo, ya sea en un contexto de problema del "barco" o simplemente como una distancia AB, debe estar presente para poder estructurar su hipótesis sobre qué razón trigonométrica utilizar para resolver el problema.
- El uso de la técnica nemotécnica para poder "definir" una razón trigonométrica les es muy necesaria, necesitan escribir en la mayoría de los casos las seis razones trigonométricas o por lo menos las primeras tres razones trigonométricas para poder identificar cual es la que se va a utilizar en la resolución de un problema.

Esta investigación puede continuarse para indagar más acerca de los niveles de comprensión de las razones trigonométricas. Otra perspectiva consistiría en abarcar las prácticas pedagógicas de los docentes y la relación de estas con la comprensión y conceptualización de los alumnos.

REFERENCIAS

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero, R., 1994 *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*, SEP, México.

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero, R., 2001 (2.ª ed.), *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*, SEP, México.

Anfossi, A., 1967, *Curso de trigonometría rectilínea,* Progreso, México.

Bloom, B., *et al.,* 1971, *Taxonomía de los objetivos de la educación: la clasificación de las metas educacionales,* Manuales I y II, Centro Regional de Ayuda Técnica, Agencia para el Desarrollo Internacional, Buenos Aires.

Cédillo Á., T. E., V. Cruz O., E. Vega R. y R. Cambray N., 2006, *Enseñanza de las Matemáticas*, *Geometría: Medición y razones trigonométricas*, Proyecto: Tecnología y educación a distancia en América latina y el Caribe, Programa interamericano de Capacitación de Maestros, SEP/UPN/ILCE/BID, México.

Clark, Ch., 1986, Procesos de pensamiento de los docentes, en M. Wittrock, 1990, La investigación de la enseñanza, III. Profesores y *alumnos,* pp. 444–443, Paidós/Ministerio de Educación y Ciencia, Barcelona.

DGEST (Dirección General de Escuelas Secundarias Técnicas), 2006, *Planes de clase* (Matemáticas 3, Apartado 4.3) México. [páginas mecanografiadas.]

DGEST (Dirección General de Escuelas Secundarias Técnicas), 2011, *Planes de clase* (Matemáticas 3, Apartado 4.3) México. [páginas mecanografiadas.]

Espinoza, H.; S. García y M. García, 1999 (2.ª ed.), *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, SEP, México.

Gallardo R., J., J. L. González M. y V. Aurora Quintanilla B., 2013, Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: Aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental, *Educación Matemática,* vol. 25, núm. 2, pp.61-88.

Gallardo R., J., J. L. González M. y V. A. Quintanilla B., 2006, *Assessing understanding in mathematics, Steps Towards and operative model, for the learning of mathematics*, vol.26, n°2, pp. 10-15.

Hernández, G., 1998, *Paradigmas en psicología de la educación.* Paidós, México.

Herscovics, N. y J. Bergeron, 1982, Des modéles de la compréhensión, *Revue des sciences de l´educaction*, vol. 8, núm. 3, pp. 576-596.

Herscovics, N. y J. Bergeron, 1988, APME-NA, vol. 10, pp.15–22.

International group for the psychology of mathematics education of the sixteenth PME conference. University of New Hampshire Durham, NH (USA) August 6-11, 1992. Vol. III

Kee, S. R. Mura. y J. Dionne,1996, La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des éléves du secondaire*, For the Learning of Mathematics*, vol. 16, núm 2, pp. 19–22.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), 2000, *Principles and standards for school mathematics,* NCTM, Reston, VA. (Versión en castellano: NCTM.SAEM Thales, 2003, *Principios y estándares para la educación matemática,* SAEM Thales, Sevilla.)

Ornelas, C., 2012, *Educación, colonización y rebeldía: la herencia del pacto Calderón-Gordillo*, Siglo XXI, México.

Piñero, E. M. (1998) Trigonometría. Educación Matemática en secundaria. Síntesis. España.

PIRIE, S. y T. Kieren, 1989, *A recursive theory of Mathematical understanding*, For the Learning of Mathematics, vol. 9, núm. 3, pp. 7–11

PIRIE, S. y T. Kieren, 1994, *Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it?,* Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, núm. 2, 3, pp. 165-190.

Ramírez, A. I. de Zapata, 1975, *Trigonometría. Programa nacional de formación de profesores.* ANUIES (Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Enseñanza Superior). México.

Reyes Cruz, X. Y., 2009, *Resolución de problemas de trigonometría: estrategias de alumnos de educación secundaria*, México. Tesis de Maestría.

Rivaud, J. J., 1984, *Trigonometría*. Limusa. México.

Sánchez M., A. y E. Andrade M. (coords.), 2009, *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe sobre los resultados del Excale 09, aplicación 2008. Español, Matemáticas, Biología y Formación cívica y ética*, INEE, México.

Sarton, G., 1950, *Notes on the reviewing of learned books,* ISIS, vol. 41, pp. 149–158

SEP (Secretaría de Educación Pública),1975 *Programas para la educación media básica.* Tomo I, México.

SEP, 1992, Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica. Secundaria. México: SEP. p. 1.

SEP, 1993a, *Libro del maestro de matemáticas de educación secundaria*, México.

SEP, 1993b, *Plan y Programas de Estudios 1993. Educación básica secundaria*. México.

SEP, 1999, *Fichero de actividades didácticas de matemáticas para la educación secundaria*. México.

SEP, 2006a, *Educación básica. Secundaria matemáticas. Programas de estudio 2006.* México.

SEP, 2006b, *Educación básica. Secundaria. Plan de estudios 2006.* México.

SEP, 2011a, *Plan de Estudios 2011. Educación básica*. México.

SEP, 2011b *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica secundaria*. Matemáticas. México.

Sfard, A., 1991, *On the dual nature of mathematical concepcions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, vol. 22, núm. 1, pp. 1–36.

Sfard, A., 1994, *Reification as the birth of metaphor*, For the Learning of Mathematics, vol. 14, núm. 1, pp. 44–55.

Sierpinska, A.,1990, *Some remarks on understanding in mathematics,* For the Learning of Mathematics vol. 10, núm. 3, pp. 24–36.

Sparks, F. W., 1966, *Trigonometría plana*. Trad. Ing José Emilio Amores. Reverté Mexicana. México.

UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México), 2014, *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM*, SUMEM (Seminario para la mejora de la educación matemática en la UNAM), UNAM, México, pp. 39–105.

ANEXOS

Anexo 1. Principios pedagógicos que sustentan el Plan de estudios 2011

1.1. Centrar la atención en los estudiantes y en sus procesos de aprendizaje

1.2. Planificar para potenciar el aprendizaje

1.3. Generar ambientes de aprendizaje

1.4. Trabajar en colaboración para construir el aprendizaje

1.5. Poner énfasis en el desarrollo de competencias, el logro de los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados

1.6. Usar materiales educativos para favorecer el aprendizaje

1.7. Evaluar para aprender

1.8. Favorecer la inclusión para atender a la diversidad

1.9. Incorporar temas de relevancia social

1.10. Renovar el pacto entre el estudiante, el docente, la familia y la escuela

1.11. Reorientar el liderazgo

1.12. La tutoría y la asesoría académica a la escuela

Anexo 2. Consideraciones previas de los planes de clase, Plan de estudios 2011

Bloque IV	
Plan de clase	Consideraciones previas
9.4.3	Con respecto a la primera pregunta, seguramente los alumnos se auxiliarán de transportador para determinar la medida del ángulo, sin embargo, después de que hayan concluido que la razón entre los catetos de los triángulos formados entre la recta y el eje de las abscisas o una paralela a esta, es la pendiente de la recta o ángulo de inclinación, se podrá explicar que esta razón (cateto opuesto entre cateto adyacente) se le llama tangente y que en una tabla de funciones trigonométricas o en una calculadora se puede ver que el ángulo cuya Tangente es 0.5 vale 26.6° aproximadamente. La idea principal de la actividad es que los alumnos determinen que el valor de la pendiente de la recta (0.5) es el cociente de la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente de cualquier triángulo rectángulo que se forma con la recta. En este caso, se espera que los alumnos puedan determinar que los cocientes de las razones formadas por el cateto opuesto entre el cateto adyacente es 0.5 de cualquier triángulo rectángulo formado entre la recta y el eje de las abscisas. Si a algunos estudiantes les pareciera mejor trazar cada recta en un plano cartesiano, permítales que lo hagan para que tengan más claridad en los procedimientos. Es posible que al construir los triángulos rectángulos algunos equipos no consideren las medidas de los catetos con números enteros, permita que lo hagan para comparar libremente los cocientes, identifiquen que están tratando con triángulos semejantes y puedan llegar de manera más natural a la generalización. Priorice la atención a las dudas que surjan y aproveche el trabajo de los equipos para que ellos mismos puedan identificar y aclarar sus diferencias. Observe que las conclusiones se dirijan a identificar la relación entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente de los catetos (opuesto/adyacente).
	La idea central es que los alumnos concluyan que todos los cocientes que resultan de dividir, por ejemplo, el cateto opuesto entre la hipotenusa son constantes. Este cociente constante, con ayuda de una calculadora, puede servir para obtener el valor del ángulo de la recta y a la inversa, conociendo el valor del ángulo se puede obtener el valor del cociente constante. Prever que los estudiantes lleven calculadora científica a la clase y el profesor las tablas con los valores de las razones trigonométricas de seno y coseno. En ambos casos, se sugiere que el profesor explique su uso para obtener la medida del ángulo a partir del cociente del cateto opuesto o adyacente y la hipotenusa. La discusión de las respuestas al inciso ***a*** es muy importante y se espera que los alumnos se den cuenta de que se trata de triángulos semejantes y a eso se debe que todos los cocientes que resultan de dividir, por ejemplo, el cateto opuesto entre la hipotenusa son constantes. Esto mismo sucede con las otras razones. Con respecto al inciso ***b***, se espera que puedan determinar que sen(0.8320) es aproximadamente 56° y lo mismo que para el cos(0.5547) es aproximadamente 56°.
9.4.4	En este momento es importante que los alumnos recuerden que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre son complementarios (suman 90º) y dejarlos que exploren con diferentes triángulos rectángulos para responder la última pregunta. También es importante que concluyan que: el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento y que la tangente de un ángulo es recíproco o inverso multiplicativo a la tangente de su complemento. Se les puede dejar como tarea el problema que se enuncia más abajo. La finalidad es que indaguen la manera de obtener la medida que falta. Al revisarla es importante que vean la necesidad de recurrir al teorema de Pitágoras para obtenerla.

Plan de clase	Consideraciones previas
9.4.5	Para realizar esta actividad es necesario contar equipo de cómputo y con el programa Geogebra instalado. Si no hay suficientes equipos para que los alumnos los utilicen individual o en grupos pequeños, el profesor puede utilizar un equipo y un proyector, de tal manera que todos los alumnos puedan ver los efectos al manipular la construcción geométrica. La idea central de esta actividad es que los alumnos analicen qué sucede cuando varía el ángulo θ. Para ello, será necesario hacerles alguna preguntas, como por ejemplo, ¿cuál es el valor de seno, coseno y tangente cuando el ángulo θ mide 30°, 45°, 60° y 90°? El círculo unitario se llama así porque el radio mide una unidad, el centro del círculo está en el origen del plano cartesiano, los ángulos se generan de derecha a izquierda. Cuando se marca un ángulo se hace con el giro del radio que mide uno. Si se traza una perpendicular del punto que forma el radio con la circunferencia hacia el eje de las X se forma un triángulo rectángulo. La función seno en el círculo unitario queda entonces como ***y***/***h*** (cateto opuesto entre hipotenusa) pero como ***h*** = 1, entonces el seno es igual a ***y***. El coseno queda como ***x***/***h***, pero como ***h*** = 1, el coseno es igual a ***x***. En el triángulo ABE, la tangente es igual a ***y/x***. Si se traza un triángulo ALK, semejante a ABE, con la prolongación de ***h*** y la tangente KL, entonces puede establecerse la siguiente igualdad: BE/AE = KL/AK, pero como AK = 1, entonces, BE/AE = KL Se puede concluir que la tangente de θ (BE/AE) es igual a KL o bien al valor de la ordenada del punto L. En caso de que no se pueda realizar la actividad con el Software propuesto, se podría realizar con lápiz y papel. Para ello se puede proporcionar a los alumnos el siguiente círculo unitario y pedirles que determinen los triángulos rectángulos, para lograrlo tendrán que trazar las perpendiculares al eje X y que pasen por los puntos C; D; E y F. Posteriormente los alumnos tendrán que hacer las mediciones necesarias para concluir que el seno, coseno y tangente del ángulo θ es igual a ***y***, ***x*** y ***BK***, respectivamente. Será necesario ayudar a los alumnos para el trazo de los triángulos semejantes ABK
	Es importante asegurar que los alumnos cuenten con una calculadora científica o la tabla de razones trigonométricas que va como anexo 1 en este plan. En el caso del problema 1, sólo existe un camino para resolverlo, que es usando la razón tangente. En el problema 2, es probable que surjan diversos caminos, por ejemplo, con la razón tangente se puede calcular la altura de la torre. Luego, con este dato se podría aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa, que en este caso, representa la longitud del tirante que sostiene a la torre. Otros alumnos, quizá no se les ocurra usar el Teorema de Pitágoras, por lo que para resolver el problema usen la razón coseno para calcular la longitud del tirante, luego, con la razón seno, obtengan la altura de la torre. Con respecto al problema 3, se espera que los alumnos reconozcan que el esquema del puente representa un triángulo isósceles, por lo que se puede dividir en dos triángulos rectángulos, donde uno de los catetos mide 9 m. Por lo que haciendo uso de la razón tangente se determina que la profundidad de la barranca es de 9 metros porque: (tan 45°)(9 m) = (1) (9 m) = 9 m En el caso del problema 4, para responder el inciso a, se debe calcular h con la razón seno y que resulta 5.84 m; sin embargo, hay que considerar que es un cálculo aproximado. Finalmente, se espera que puedan determinar que la longitud total del barandal es de aproximadamente 21.6 metros y la distancia del cauce al comienzo de la rampa es de aproximadamente 5.5 metros. En el caso del problema 5, una forma de resolverlo es a partir de establecer un sistema de ecuaciones y despejar ***h*** en cada ecuación para luego resolver el sistema por igualación. $\tan 35° = \frac{h}{10+x} \quad \Rightarrow \quad h = (10+x)(\tan 35°) \quad \tan 63° = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = (x)(\tan 63°)$ Finalmente, resulta que la altura de la torres es de aproximadamente 10.88 metros. En la puesta en común es importante que los alumnos expongan y argumenten claramente a sus compañeros sus procedimientos y cálculos, para que concluyan que dependerá de la situación que plantee el problema y los datos que contenga, la elección de la razón trigonométrica.

Anexo 3. Cuestionario final aplicado a los alumnos

Nombre: ____ **Grupo:** _______

Curso: Matemáticas 3 **Eje temático: Forma, espacio y medida**

Lee y responde las siguientes preguntas. Si requieres de mayor espacio para contestar, puedes utilizar el reverso de la hoja.

1.- Anota diez palabras que recuerdes del tema de razones trigonométricas.

2.- ¿Qué razones trigonométricas conoces?

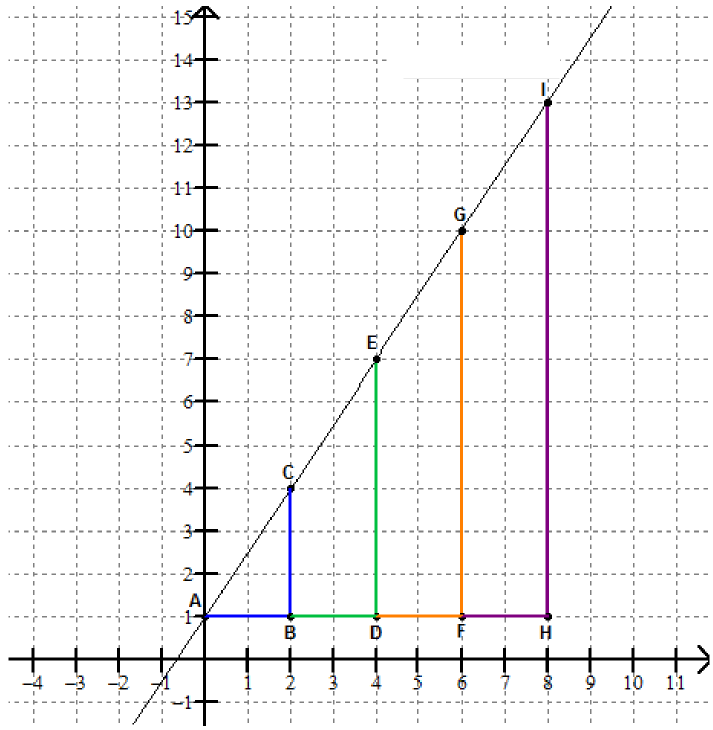
3.- Da un ejemplo de una razón trigonométrica.

4.- Explica qué es una razón trigonométrica.

5.- ¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?

Nombre: ____

6.- En el triángulo rectángulo *ADE* de la siguiente figura, indica cuál es el cateto opuesto al ángulo *A*.



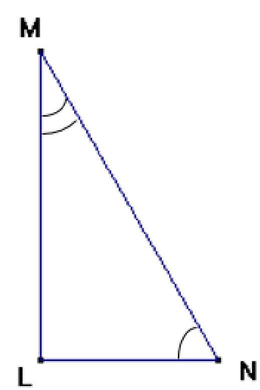
a) $\overline{CB}$

b) $\overline{AE}$

c) $\overline{ED}$

d) $\overline{AD}$

7.- ¿Cuál es la relación entre el seno del ángulo *M* y el coseno de su ángulo complementario en el triángulo rectángulo *LNM* siguiente?



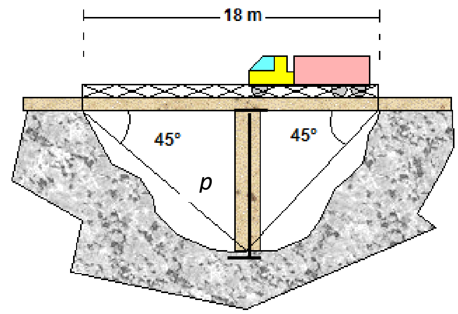
a) El seno del ángulo *M* es mayor que el coseno de su ángulo complementario.

b) El seno del ángulo *M* es igual al coseno de su ángulo complementario.

c) El seno del ángulo *M* es menor que el coseno de su ángulo complementario.

8.- Encierra en un círculo la respuesta correcta del siguiente problema.

Sobre una barranca se ha construido un puente de 18 m de largo, como se muestra en el esquema. ¿Cuánto mide la profundidad de la barranca?



p = profundidad

a) (9 m) (sen 45°)

b) (9 m) (cos 45°)

c) (9 m) (tan 45°)

d) (9 m) (sen 45° + cos 45°)

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?* Grupo 3 B

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	No contestó	Al hacer figuras que quiero que tengan alguna semejanza
2	No contestó	En figuras que quiero que tengan un parecido
3	Es una figura que tiene tres lados	Para medir algo
4	Es una figura que tiene tres lados	En un problema para medir un terreno u otra cosa
5	Sirve para calcular las medidas, lados o ángulos de un triángulo rectángulo	Para calcular el área de un triángulo rectángulo. (sus lados, ángulos)
6	Es una función con la cual puedes deducir el tamaño de algún lado de un triángulo rectángulo con un ángulo	La situación es cuando quieres saber algún lado de un triángulo rectángulo y solo te dan un ángulo y un lado y con eso ya lo puedes saber
7	Son las que ayudan a saber cuánto medirá algo de un triángulo rectángulo	Para calcular algunas de los ángulos o lados de cualquier triángulo
8	Que es una figura formada por tres lados y tres ángulos	Para resolver problemas o cualquier otra cosa
9	Una figura que se encuentra en un plano cartesiano	En ubicar diversos puntos
10	No contestó	Para conocer la medida de algún lado faltante de un triángulo
11	Es una fórmula o ecuación que se usa para solucionar un problema trigonométrico	Para calcular la medida de una figura o resolver un problema de una forma geométrica por medio de ecuaciones
12	Cuando dos rectas forman un triángulo rectángulo	Para formar figuras
13	No contestó	No contestó
14	No contestó	No contestó
15	Es la distancia de una línea a otra	Para resolver problemas matemáticos y hasta en la vida cotidiana. (para el empleo contable de un establecimiento)
16	La fórmula para conocer las medidas de un lado	Para la medición de terrenos
17	No contestó	Los podría utilizar par asacar las medidas de las figuras
18	Una figura formada por medidas	En todos los problemas matemáticos

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?* Grupo 3 D

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	Es el resultado de una figura que tienes que sumar y hacer un tipo de operación	Para saber el lado o el ángulo de la figura
2	Pensar en varios o diferentes métodos para poder sacar u obtener u lado, un ángulo o cualquier otra cosa de una figura	Para poder resolver problemas con una medida desconocida
3	Es como la forma de conocer si una figura es proporcional o para saber a través de mediciones si forma una figura	Para formar figuras o prismas
4	Es una manera de sacar algún lado de un triángulo ya sea hipotenusa, cateto opuesto o adyacente	Para sacar alguna medida necesaria de un triángulo
5	El método para sacar alguna medida de algún triángulo	Para sacar alguna medida de algún triángulo
6	La comparación de dos magnitudes	Para saber la medida de sus catetos o la hipotenusa de un triángulo, coseno , seno o tangente del mismo
7	Comparación entre dos magnitudes	Para sacar la hipotenusa, coseno , seno, de un triángulo , para saber la medida de sus catetos y el ángulo
8	Son problemas en los cuales tienen un ángulo de 90 ° tienen un cateto opuesto y un adyacente y también tienen una hipotenusa	Para cuando se presentan problemas de triángulos
9	Es cuando la usas para sacar la medida de algún lado de algún triángulo utilizando una tangente , seno , coseno, etc.	Cuando te pide el valor de una medida de algún triángulo
10	Es una fórmula que ayuda a saber el lado de un triángulo , la cual requiere ángulo	Para saber una medida de un lado del triángulo que desconoces
11	Es un conjunto de habilidades matemáticas que nos ayudan en problemas ángulos, ecuaciones medidas, etc.	Las podría usar para hacer ecuaciones y algo matemático, sacar ángulo, medias etc.
12	Son las medidas que nos permiten saber cosas como peso, volumen y forma , etc.	En la vida cotidiana, para resolver problemas que se nos presentan

(Continúa)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
13	Es la comparación de dos magnitudes	Hacer un dibujo, sacar un ángulo, conocer a detalle una figura
14	Es la comparación de dos magnitudes	Hacer figuras, sacar ángulos, medidas, conocer cierta figura por sus medidas
15	Dibujó un triángulo	Son problemas de triángulos
16	Permiten saber volumen y perímetro	Para un problema o algo que tengan que ver con las razones trigonométricas
17	Las medidas que nos permiten saber peso, forma y medida	Para un problema
18	Es la variable de ángulos de los triángulos o centímetro de ellos	En una construcción
19	Es cuando una figura geométrica se duplica formando una ampliación	Para divertirse y en la escuela
20	Es una ampliación o un desplazamiento de una figura	Para ampliar figuras
21	Es un desplazamiento o una amplitud	Para poder ampliar figuras

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?* Grupo 3 E

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	No contestó	Tal vez para sacar una medida en alguna figura
2	No contestó	No contestó
3	Es aquella regla que te muestra cómo medir algunas cosas	Para medir o calcular distancias o alturas
4	Es para medir y saber cuál es el lado más cercano a la hipotenusa	Teorema de Pitágoras
5	Es aquella que nos ayuda a definir si dos figuras son semejantes o congruentes entre si	No contestó
6	No contestó	Para un proyecto en casa medir a lo mejor un ángulo o un espacio
7	Es la forma de obtener y resolver una incógnita (algo no conocido) en base a una sustitución de valores; de acuerdo a los valores establecidos	Para sacar la medida de un lado o un ángulo de un triángulo y de descubrir la incógnita
8	No contestó	No contestó
9	No contestó	No contestó

(Continúa)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
10	No contestó	Para saber el ángulo y medidas de a que distancia está un objeto de otro
11	No contestó	Para poder saber el problema de una figura o lugar trigonométrico
12	Como que una parte	Para los ángulos
13	Dibujó unos triángulos con "x" a cada lado	Para resolver un problema
14	Sirve para calcular ángulos y medidas de un triángulo	Cuando tenga un problema de que altura o cuanto ángulo me piden
15	Es cuando se trata de sacar una medida de un triángulo o compararlo con otro	En los triángulos, no para altura, en cosas que tengan que ver con triángulos
16	No contestó	No contestó
17	No contestó	No contestó
18	No contestó	En los exámenes, en el trabajo si me llegaran a pedir medidas acerca de altura que sea como ésta
19	No contestó	Para localizar alguna medida que este en "x"
20	No contestó	Para saber la altura de ciertas cosas en los exámenes. Para saber distancias y ángulos
21	No contestó	En un ejercicio. Examen. En el teorema de Pitágoras
22	No contestó	Para encontrar el lado que mide un triángulo
23	Es una parte que tú puedes explicarla	Para estudiarlas o aprenderlas de memoria
24	Es una fórmula que nos ayuda a descubrir el lado de un triángulo	Para encontrar el valor de los lados de un triángulo

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?* Grupo 3 F

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	Es la que te hace saber por medio de operaciones cuánto mide un lado	Al querer saber cuánto mide un lado de cualquier cosa triangular
2	Son las razones que resultan comprobar los lados de un triángulo	Para medir los tres lados de un triángulo

(Continúa)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
3	Son las razones que resultan comprobar los lados de un triángulo	Para medir cosas en forma de triángulo
4	Son las razones que resultan de comparar los lados de un triángulo	Para medir el lado o el ángulo de un triángulo.
	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
5	No contestó	Para calcular lados o medidas de figuras geométricas
6	Sirve para explicar cómo hacer figuras congruentes	En planos
7	Sirve para explicar cómo hacer figuras congruentes	En planos
8	No contestó	Recuerdo que mediante el ángulo se encontraba en una figura y la medida de uno de sus lados puedes determinar de qué razón trigonométrica se trata y dependiendo la razón trigonométrica que es, se utiliza una tabla que dice a cuanto equivale el ángulo.
9	Es lo que ayuda a encontrar el valor de "*x*"	Para encontrar el valor de x
10	Es lo que nos ayuda a encontrar el valor de "x" ubicada en un triángulo: seno , coseno y tangente	Para encontrar el valor de "x"
11	Son las razones que se utilizan para calcular el ángulo o podría ser una medida de un triángulo	Para calcular el ángulo de un triángulo o algunas cosas así
12	No contestó	En ciertos problemas donde se tenga que encontrar la medida de algún lado de un triángulo rectángulo
13	No contestó	En problemas donde se tenga que encontrar la medida de algún lado de un triángulo rectángulo
14	Son operaciones que utilizamos para definir un triángulo	Para saber los lados de un triángulo
15	No contestó	En ciertos problemas
16	Son datos del triángulo o posiciones, también el nombre de cada lado del triángulo	Para saber un dato de un triángulo
17	Un tipo de método para encontrar las medidas de las aristas o los ángulos de un triángulo	Para encontrar la medida de un lado de un triángulo
18	Es cuando le tenemos que sacar cierta medida a un triángulo x	Para poder sacar las medidas de triángulos o un problema similar

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS 4 Y 5 3 G

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?*

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	Es el ángulo rectángulo	El ángulo de la elevación de algo
2	Una fracción, una división	Para los triángulos rectángulos
3	Son para saber medidas de objeto, cosas, etc.	Las medidas
4	Una función para obtener medidas o ángulos	Para encontrar la medida de un lado o un ángulo
5	No contestó	Para sacar el área de algún triángulo
6	Es una fracción con la que puedes sacar el área de una figura	Para formar una figura (cuadro, triángulo, pentágono) con ciertas medidas o alturas en la gráfica
7	Es la ecuación que se realiza para poder resolver el problema	Para poder calcular la distancia de un punto a otro
8	Fracción que saca el área de cualquier figura	Para sacar la medida de un lado o ángulo
9	Es una fracción en la que obtienes el área de cualquier figura	Para sacar la medida de un ángulo
10	Es una fracción en la búsqueda del área del triángulo	Para buscar la medida de un ángulo o para buscar la medida de un lado
11	Es cociente entre dos cantidades. Ejemplo 3/4	Para sacar el ángulo de un triángulo
12	Es una fracción en la que sacas el área de una figura	Para sacar la medida de un lado o un ángulo
13	Es cosecante entre dos cantidades. Ejemplo 2/3	No contestó
14	Dibujó un triángulo, sin datos	No contestó
15	No contestó	No contestó
16	No contestó	Para determinar el ángulo de la elevación de algo
17	Una razón trigonométrica es el ángulo rectángulo	Para determinar el ángulo de elevación de algo
18	Son seis diferentes ecuaciones o fórmulas que nos ayudan a encontrar diferentes valores de un triángulo rectángulo ya sean sus ángulos o sus medidas dependiendo de la función	Para encontrar algún valor ya sea de la luz que un poste, sobre cuánto mide una escalera o para encontar un valor
19	Es la forma para poder saber los grados que tiene un poste de luz de altura	Para sacar los grados de una pirámide o la altura de un poste de luz

(Continúa)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
20	Es una forma para poder sacar grado o medidas de cosas que formen un triángulo rectángulo	Para saber los grados que hay en un poste etc. Y poder tomar medidas
21	Una función para obtener el lado faltante de un triángulo	Para calcular alturas o distancias
22	Es como saber u obtener un lado o un ángulo y cuánto mide el triángulo	Para saber cuánto miden los objetos unos de otros
23	Es como saber u obtener un lado o un ángulo del triángulo , saber cómo mide	Para saber cuánto mide un objeto de otro
24	No contestó	Para saber problemas o para calcular los grados de un ángulo

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?* Grupo 3 H

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	No contestó	Para medir ángulos
2	Dibujó un triángulo	Para sacar ángulos
3	No contestó	Para medir y sacar ángulos
4	No contestó	Para medir ángulos y sacar sombra
5	No contestó	Para calcular los ángulos de los triángulos o la medida de alguno de sus lados
6	Es la que va poner cada lugar ejemplo, cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa	Se puede decir que para así saber más de ellas
7	Otra manera de llamarle a los lados de un triángulo	Para resolución de un triángulo
8	La forma en la que puedes distinguir los lados de un triángulo para resolver un problema	Es para la resolución de un problema
9	Una fórmula para conocer medidas o cantidades en problemas	Para conocer medidas o cantidades que se presentan como x
10	Para el resultado de una división	En los triángulos
11	Es el cociente o resultado de una división	Para calcular ángulos de un triángulo

(Continúa)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
12	Es la fórmula con que nos podemos apoyar para sacar el ángulo de un triángulo	Para sacar el ángulo del triángulo rectángulo
13	Es la fórmula con que podemos sacar de la manera más fácil el ángulo de un triángulo	En sacar el ángulo de un triángulo
14	Es el cociente o resultado de una división	No contestó
15	No contestó	Para saber la distancia de un objeto a otro
16	Es el igual de un resultado, el procedimiento de él	Para resolver un problema como a que distancia se encuentra alguien o alguna cosa o la altura de alguna cosa
17	No contestó	Para saber cuánto mide el lado de una figura que no te están dando
18	No contestó	Para un problema
19	No contestó	Para saber la altura o ancho de un edificio o la distancia a la que un objeto se encuentra
20	Es una función matemática que te sirve para poder solucionar cualquier problema trigonométrico	Para resolver problemas
21	Sirve para resolver cualquier problema matemáticas	Sirve para resolver problemas

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?*

Grupo 3 I

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	Una razón trigonométrica sirve para hacer o sacar el valor de un lado	En una operación o problema
2	Una forma parecida a la fracción	Para resolver un problema en el que se pida el ángulo de un triángulo
3	Medidas de figuras	Para poder medir o calcular una pirámide
4	Cateto opuesto/ hipotenusa	Para saber la medida de un ángulo
5	La fracción	Obtener un ángulo

(Continúa)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
6	El cateto opuesto sobre la hipotenusa	Para sacar el resultado de un triángulo
7	No contestó	Para sacar una medida para hacer una escalera
8	Cateto opuesto/hipotenusa	Para realizar un problema que utiliza CO, CA, hip
9	No contestó	Para sacar un ángulo
10	Lo que te indica que operación hacer	Para calcular la altura de un edificio y lo ángulos etc.
11	Cuando se busca un lado “x” de una figura	Para buscar un lado sin número de una figura o una distancia entre algo
12	Es el valor de una figura	No contestó
13	La función	Para medir las distancias o altura
14	Es el que te ayuda a saber el ángulo de una figura	Para resolver un problema de altura o de ángulos .Para saber cuál es el ángulo de una figura
15	No contestó	Sirve para calcular el valor de la hipotenusa de un triángulo
16	Cos= Ca/hip	Para encontrar los lados
17	No contestó	Dibujó un triángulo con las abreviaturas: Hip, Ca y 9 cm
18	Es para resolver un problema	Para resolver problemas
19	Es la división entre los catetos o bien sobre la hipotenusa	Para sacar grados de un triángulos - alturas
20	Es el valor de una figura o algo que nos sirve para lograr lo que se te pide en un problema	Para resolver problemas y calcular algo que queramos saber

Anexo 4. RESPUESTAS PARA LAS PREGUNTAS 4 Y 5

Pregunta 4 *Explica qué es una razón trigonométrica*

Pregunta 5 *¿En qué situaciones o para qué podrías utilizar las razones trigonométricas?* Grupo 3 J

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
1	Es cuando una razón ejemplo: seno tiene su relación con el triángulo cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa	En el teorema de Pitágoras
2	En un problema que podemos resolver	Para resolver un problema

(Continúa)

Anexo (4 concluye)

	PREGUNTA 4	PREGUNTA 5
3	No contestó	No contestó
4	Cateto, hipotenusa	No contestó
5	Es una forma de resolver problemas	En algún problema de ángulos
6	Es la medida que nos da un ángulo	Para medir profundidades
7	No contestó	Supongo que a lo mejor los arquitectos
8	Es la fórmula de una figura para encontrar su volumen	Cuando necesitas saber el volumen de una figura
9	No contestó	Para poder sacar las áreas de los triángulos
10	No contestó	No contestó
11		En construcciones o calcular con los ingenieros
12	Para calcular la medida de un triángulo	Para calcular un triángulo
13	No contestó	No contestó
14	No contestó	Para resolver problemas de cómo encontrar la altura , distancia o grados y acabar con la duda
15	No contestó	No contestó
16	No contestó	No contestó
17	No contestó	No contestó
18	No contestó	No contestó
19	Para calcular un triángulo	Para calcular la medida de un triángulo
20	Es un conjunto de diagonales adyacentes	Para saber o aproximar el tamaño , altura, distancia de alguien o algo
21	No contestó	No contestó
22	No contestó	No contestó
23	No contestó	No contestó
24	Para calcular un lado de un triángulo	Para calcular algo que pide en forma de triángulo

RESUMEN DE *CURRICULUM VITAE*

Ana Belem Valencia Salazar nació en la Ciudad de México, el 16 enero de 1998. Realizó sus estudios en las escuelas de educación básica en las escuelas “Valentín Orozco” y “Manuel Heyser Jiménez”. Egresó en 1996 del CECyT núm. 1 “Gonzalo Vázquez Vela”, perteneciente al Instituto Politécnico Nacional, en el área de construcción.

De 2003 a 2007 estudió la licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en matemáticas en la Escuela Normal Superior de México. Para obtener su título profesional, en agosto de 2007 presentó el documento recepcional “El estudio y aprendizaje de la trigonometría en tercero de secundaria, tomando como base el contexto histórico, matemático y la tecnología”.

Durante 12 años ha ejercido su profesión cómo profesora de matemáticas en la Ciudad de México en diferentes escuelas secundarias técnicas.

Ingresó en julio de 2012 a la Maestría en Desarrollo Educativo y egresó en julio de 2014 de la línea de Educación Matemática, habiendo obtenido como promedio general 9.31 durante sus estudios de maestría. Con sus estudios de maestría participó en el 50 ° Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, realizado en octubre de 2017.