UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

Descubrimiento del teorema de Pitágoras y su converso en la educación media superior

Tesis que para obtener el Grado de
Maestra en Desarrollo Educativo
Presenta

Lidia Torres Hernández

Director de tesis

Dr. Rodrigo Cambray Núñez

Ciudad de México Junio de 2019

DEDICATORIAS

A mi amada familia.

Por los presentes que con su amor y apoyo incondicional me motivan a continuar adelante.

Por los ausentes cuyos alegres recuerdos me fortalecen y me impiden desistir.

A mi estimado director de tesis, Dr. Rodrigo Cambray Núñez, por su valiosa guía, su inagotable paciencia, comprensión y tolerancia, y su gran calidad humana, imprescindibles para la elaboración de este trabajo. Porque no sólo incidió en mi formación profesional sino también en mi formación personal, quizá sin pretenderlo; además ha sido parte importante en la rescritura de mi historia.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (Conacyt), por el apoyo otorgado como becaria para cursar la Maestría en Desarrollo Educativo (MDE) en la Universidad Pedagógica Nacional.

A los lectores de esta tesis, Mtra. Alicia Lily Carvajal Juárez, Dra. Cristianne Butto Zarzar, Mtra. Tetis Gisela Camacho Espinosa, Dr. Rodrigo Cambray Núñez, Mtro. William José Gallardo, por sus valiosos comentarios, los cuales sirvieron para enriquecer este trabajo y me proporcionaron la oportunidad de crecer profesional y personalmente.

A mi estimada terapeuta quien me ha acompañado durante todo este proceso y me ha ayudado a rescribir mi historia.

A mis queridas amigas y mis estimados amigos por su amistad incondicional, y por compartir conmigo los devenires de la vida.

A mi amigo y compañero, titular del grupo donde se realizó el estudio final, por sus invaluables comentarios y el apoyo proporcionado a la realización de este trabajo.

A mis queridos alumnos que directa o indirectamente han contribuido a la realización este trabajo y a su enriquecimiento.

Finalmente, a mis profesores y a mis compañeros de la maestría porque de la interacción con ellos he aprendido la importancia de la solidaridad, la empatía, la humildad, la tolerancia, la equidad y el respeto a cada ser humano, así como lo imprescindible de su implementación en el aula de clase.

RESUMEN

Para el presente trabajo se analizaron programas de estudio de matemáticas de instituciones de educación secundaria y media superior en México los cuales incluyen el teorema de Pitágoras. En dichos programas generalmente se pide que se presenten algunas demostraciones de este teorema, y después que se use para resolver diversos problemas. Pocos de los programas analizados en el desarrollo de este trabajo incluyen el converso del teorema de Pitágoras, y sólo en dos se sugieren estrategias para que el profesor lo aborde con sus alumnos.

Por lo anterior el propósito de esta investigación fue

- Lograr que los alumnos de bachillerato *descubran* el teorema de Pitágoras y su converso (Proposiciones 47 y 48 del libro I de los *Elementos* de Euclides), así como algunas de sus generalizaciones, es decir algunos resultados para los triángulos obtusángulos y acutángulos (primera parte de las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides) a partir del planteamiento de conjeturas sobre las relaciones entre las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos obtusángulos y acutángulos.

Para lograr este propósito, se diseñaron actividades con problemas y ejercicios para que estudiantes de educación media superior los resolvieran. En el proceso de esta

investigación, como parte de la preparación del estudio final se llevó a cabo un estudio piloto en tres etapas. Además de utilizar los resultados de estas etapas del estudio piloto para hacer un planteamiento final de las actividades, otro objetivo de la primera etapa fue observar cómo manejaban los estudiantes participantes comparaciones de áreas de cuadrados construidos sobre los lados de cualquier triángulo (acutángulo, obtusángulo o rectángulo). Un objetivo adicional de la segunda etapa del estudio piloto fue avanzar en la construcción de las actividades que se implementarían en la tercera etapa del estudio piloto, detectar la viabilidad de estas actividades y determinar la necesidad de agregar otras. Finalmente, el objetivo de la tercera etapa del estudio piloto fue probar la pertinencia de los instrumentos elaborados para el estudio final.

En el estudio final, un grupo de 20 alumnos de bachillerato, con edades de 15 o 16 años, plantearon conjeturas, primero, en cuanto a relaciones entre las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de triángulos obtusángulos o acutángulos. Utilizaron un entramado para calcular las áreas y poner a prueba sus conjeturas. Así, para cada triángulo compararon la suma de las áreas de dos cuadrados con la del cuadrado construido sobre el tercer lado. Dos de los resultados que enunciaron fueron los siguientes (en sus propias palabras), que, cabe señalar, son parte de las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides: *1)* “Si el triángulo es obtusángulo, la suma de las áreas de los dos cuadrados más pequeños es menor que el área del cuadrado grande”; y *2)* “Si el triángulo es acutángulo, la suma de las áreas de dos cuadrados es mayor que el área del tercer cuadrado”.

En el presente trabajo se muestra cómo mediante las actividades aplicadas en el estudio final los alumnos participantes lograron descubrir: *i)* el teorema de Pitágoras, *ii)* el converso del teorema de Pitágoras, y *iii)* teoremas correspondientes a triángulos obtusángulos o acutángulos —proposiciones *1)* y *2)* anteriores—, así como el converso de cada uno.

ÍNDICE

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Este capítulo está conformado por dos apartados. En el primer apartado se presenta la justificación de la investigación para esta tesis, así como los objetivos, las actividades diseñadas para lograr los objetivos, y las preguntas que guiaron la investigación. En el segundo apartado se presenta una descripción breve de los cinco capítulos en que se ha estructurado este trabajo de tesis y de los siete apéndices a los que se hace referencia en los capítulos.

Es bien sabido que el teorema de Pitágoras es uno de los resultados matemáticos más recordado por las personas con cierto grado educativo. Incluso diversos libros de divulgación lo abordan (ejemplo de estos libros son: *El hombre que calculaba* (Tahan, 2002, pp. 91-94), *Números increíbles* (Stewart, 2016, pp. 81-84), 17 ecuaciones que cambiaron el mundo (Stewart, 2015, pp. 14-36)), o una consecuencia de este (por ejemplo, la duplicación de un cuadrado en *El diablo de los números* (Enzensberger, 1998, pp. 77-82)). Este resultado se estudia en secundaria y en el bachillerato, pero esto no implica que las personas logren apropiarse de él y lo apliquen correctamente. Incluso muchos profesores de matemáticas constatan año con año que algunos de sus estudiantes tienen dificultades al aplicarlo porque o lo recuerda sólo en su forma algebraica (es decir, como una fórmula, $a^2 + b^2 = c^2$) o lo recuerdan en una especie de *verso*: “La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa", sin haber llegado a dotarlo de un significado que les permita aplicarlo correctamente.

En el siguiente apartado se presenta la justificación del presente trabajo donde se plantea la necesidad de contribuir en el aprendizaje significativo del teorema de Pitágoras y su converso de tal manera que no se limite a los estudiantes para que puedan descubrir otros resultados relacionados con otro tipo de triángulos.

Justificación

Al ingresar a la educación media superior algunos alumnos no logran aplicar correctamente el teorema de Pitágoras a pesar de que en los programas de estudio de matemáticas de secundaria se encuentra contemplado su estudio. También en el segundo año y en el tercer año de bachillerato es posible encontrar alumnos que no aplican correctamente el teorema de Pitágoras, o no detectan las situaciones en las que es posible aplicar este resultado para modelar y resolver problemas de aplicación, a pesar de ser nuevamente abordado en los programas de estudio de primer año de bachillerato. Es frecuente encontrar alumnos de tercer año de bachillerato y de educación superior que desconocen el converso del teorema de Pitágoras o consideran que estos dos teoremas son el mismo teorema.

Así, considerar el teorema de Pitágoras en los programas de estudios no implica que los alumnos logren apropiarse de este resultado para que lo puedan aplicar correctamente porque se suele privilegiar la presentación de su forma algebraica sobre su forma geométrica, lo que les impide desarrollar algunas habilidades geométricas como son la visualización y la percepción, tan necesarias para detectar un triángulo rectángulo en una situación dada que requiera el uso del teorema de Pitágoras.

Postergar el estudio del converso del teorema de Pitágoras hasta el bachillerato o incluso no incluirlo en algunos programas de estudio puede estar generando que los alumnos no logren distinguirlo del teorema de Pitágoras, o incluso lo desconozcan.

Por lo anterior es válido conjeturar que la forma en que se presentan estos resultados en el aula de clases está incidiendo en el aprendizaje de los alumnos, es decir que incide en que los alumnos no estén desarrollando una comprensión adecuada de estos resultados, además de estar limitando el aprendizaje de otros resultados.

Para contribuir a resarcir esta situación se planteó como parte central de este trabajo el diseño de actividades que recuperen los conocimientos previos de los alumnos y les permitan descubrir por sí mismos el teorema de Pitágoras y su converso, además de que les aporte los elementos necesarios para trascender estos resultados y descubrir resultados análogos correspondientes a triángulos obtusángulos y acutángulos que pueden ser retomados para abordar con éxito la ley de los cosenos. Por lo anterior los alumnos tendrán un contexto idóneo para incursionar en el desarrollo de habilidades geométricas como la visualización y la percepción.

Los principales objetivos de esta investigación fueron:

1).- Identificar y analizar la situación que guarda el teorema de Pitágoras en los programas de estudios actuales de educación secundaria y de bachillerato en el Sistema Educativo Nacional de México.

2).- Analizar qué aspectos didácticos de las estrategias sugeridas en los programas de estudio podrían estar impidiendo a los alumnos la comprensión adecuada del teorema de Pitágoras y su converso, así como el descubrimiento de resultados análogos correspondientes a triángulos obtusángulos y acutángulos.

3).- Diseñar e implementar una serie de actividades para que alumnos de educación media superior descubran el teorema de Pitágoras y su converso, así como resultados análogos correspondientes a triángulos obtusángulos y acutángulos.

Para lograr los anteriores objetivos, se realizaron las siguientes actividades de investigación.

1).- Se identificaron en distintos materiales educativos diversas aseveraciones sobre el conocimiento del teorema de Pitágoras en la antigüedad, así como en los *Elementos* de Euclides.

2).- En algunos planes de estudio, tanto de nivel secundaria como de bachillerato, se ubicaron programas de estudio que abordan el teorema de Pitágoras y su converso. Se seleccionaron algunos de estos programas para clasificarlos de acuerdo con temáticas, aprendizajes y estrategias que contienen.

3).- Se analizó cómo se presentan en algunos libros de texto, en los resultados de algunas investigaciones educativas, y en otros materiales educativos, el teorema de Pitágoras, su converso, y algunas de sus aplicaciones.

4).- Se analizaron algunos videos educativos sobre el teorema de Pitágoras, su converso, y sus aplicaciones, para determinar qué tipo de contenido prefieren consultar los alumnos. Los videos analizados fueron los más recomendados por 51 alumnos de bachillerato (que no participaron como sujetos en la investigación para esta tesis).

5).- Se realizó un estudio piloto en tres etapas para probar actividades mediante las cuales alumnos de educación media superior descubrieron el teorema de Pitágoras y su converso, así como resultados análogos correspondientes a triángulos obtusángulos y acutángulos. Con los resultados de este estudio piloto se modificaron las actividades y en el estudio final se aplicaron ocho.

Así, acorde con los objetivos y actividades indicadas, las siguientes preguntas guiaron este trabajo de investigación educativa.

1).- ¿Cuáles son las estrategias sugeridas en los programas de estudio a nivel secundaria y bachillerato para abordar la enseñanza del teorema de Pitágoras y su converso?

2).- ¿Cuál es el tipo de contenido de los materiales consultados frecuentemente por los alumnos para estudiar el teorema de Pitágoras, su converso, y sus aplicaciones?

3).- ¿Cómo contribuir a un aprendizaje significativo, mediante descubrimiento, del teorema de Pitágoras y su converso, así como de los resultados análogos correspondientes a triángulos obtusángulos y acutángulos?

En el siguiente apartado se presenta la descripción del contenido de la tesis.

Descripción del contenido de la tesis

Esta tesis está divida en cinco capítulos. En el capítulo I se presenta la justificación del trabajo, los objetivos, las preguntas que guiaron la investigación y la descripción del contenido de la tesis. En el capítulo II se presenta la revisión de la literatura que proporciona los elementos que sustentan la necesidad del presente trabajo de tesis. En el capítulo III se describe la metodología utilizada en el presente trabajo. Se incluyen observaciones de resultados de las primeras dos etapas del estudio piloto y modificaciones de las actividades planteadas a los participantes; asimismo se presenta la tercera etapa del estudio piloto: actividades, resultados, así como adecuaciones y restructuraciones de las actividades. Además, se describe brevemente el estudio final. En el capítulo IV se presentan los resultados de cada sesión, su análisis y algunos hallazgos obtenidos a partir de las observaciones realizadas durante el desarrollo de las actividades del estudio final. Mientras que algunas conclusiones y recomendaciones surgidas de esta investigación se presentan en el capítulo V. Para una mejor comprensión de lo que contienen algunos de estos capítulos, se han incluido 7 apéndices.

En el apéndice A, se presentan los resultados obtenidos de la ubicación del teorema de Pitágoras en algunos planes y programas de estudio de educación secundaria; en el apéndice B, se presentan los resultados obtenidos de la ubicación del teorema de Pitágoras en algunos planes y programas de estudio de educación media superior. Y en el apéndice C, se presentan las 3 actividades implementadas en la primera parte del estudio piloto; en el apéndice D, se presentan las 5 actividades implementadas en la segunda parte del estudio piloto; en el apéndice E, se presentan las 7 actividades implementadas en la tercera parte del estudio piloto; en el apéndice F, se presentan las 8 actividades implementadas en el estudio final. Finalmente, en el apéndice G, se presentan resultados realizados por algunos alumnos participantes en el estudio final.

En el siguiente capítulo se presentan los resultados obtenidos de la revisión de la literatura que proporciona los elementos que sustentan la necesidad del presente trabajo de tesis.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LA LITERATURA

En el presente capítulo se discuten diversas facetas sobre el estudio del teorema de Pitágoras en la educación escolar: la divulgación de su historia, su ubicación en planes y programas de estudio, su abordaje en materiales educativos (libros de texto y videos, principalmente). Este capítulo se divide en seis apartados. En el primer apartado se presenta el teorema de Pitágoras, su converso y otros resultados sobre los triángulos en el libro de los *Elementos* de Euclides y en diversos materiales educativos. En el segundo apartado se presenta la estructura del Sistema Educativo Nacional de México (SENM) y la justificación de la selección de los planes y programas de estudios elegidos para ubicar los resultados abordados en el presente trabajo. En los apartados tercero y cuarto se presenta la ubicación del teorema de Pitágoras y su converso en los planes y programas de estudio, seleccionados en el apartado anterior, de educación secundaria y de educación media superior, respectivamente. En el quinto apartado se presentan los resultados obtenidos del análisis de la forma en que se presenta el teorema de Pitágoras, su converso, y sus aplicaciones en materiales educativos y en publicaciones de investigación educativa. Finalmente, en el sexto apartado se presenta el análisis de algunos videos recomendados por alumnos de bachillerato sobre el teorema de Pitágoras, su converso, y sus aplicaciones.

El teorema de Pitágoras en los *Elementos* de Euclides y en diversos materiales educativos

La figura de Pitágoras de Samos se encuentra grabada en la conciencia colectiva como el padre de la más exacta de las ciencias, las matemáticas, y de disciplinas como la música, la medicina, la astronomía e incluso la filosofía (a quien también debe su nombre). Pitágoras vivió aproximadamente entre los años 570 y 490 a. c. en la Grecia antigua, su vida transcurrió entre la isla de Samos, en la costa de Asia Menor, y la ciudad de Crotona, en el sur de la península italiana (Alsina, 2010, p. 17).

Algunos consideran que fue Pitágoras quien dio la primera demostración del teorema por lo cual lleva su nombre, otros consideran que fue producto de alguno de los alumnos de la escuela Pitagórica quien cedió el crédito al maestro, pero no existen pruebas ni de lo uno ni de lo otro.

Por otro lado, varios autores han escrito acerca de que los egipcios usaban el triángulo cuyos lados tienen respectivamente 3, 4 y 5 unidades de longitud.

A continuación se presentan algunas citas textuales que ilustran lo antes mencionado:

> - *Es bien sabido que* [énfasis añadido], como recurso práctico para verificar la perpendicularidad de las construcciones, utilizaban una cuerda con 3, 4 y 5 nudos (una terna pitagórica) dispuestos en intervalos regulares (Alsina, 2010, p. 19).

En realidad, la redacción de esta información es confusa. Para dejar más clara la información es pertinente realizar las siguientes consideraciones (Cedillo *et al.*, 2006, p. 61): Usando una cuerda con 13 nudos igualmente espaciados (véase la figura 2.1) que la dividían en 12 partes iguales. Una persona sostenía la cuerda por los extremos juntos de ésta (el primer y el décimo tercer nudo) y otras dos personas sostenían la cuerda en el sexto y el noveno nudos respectivamente, tensándola y formando así un ángulo recto con vértice en el noveno nudo (véase la figura 2.2).

Figura 2.1. Representación gráfica de una cuerda con 13 nudos igualmente espaciados (Cedillo *et al.*, 2006, p. 61)

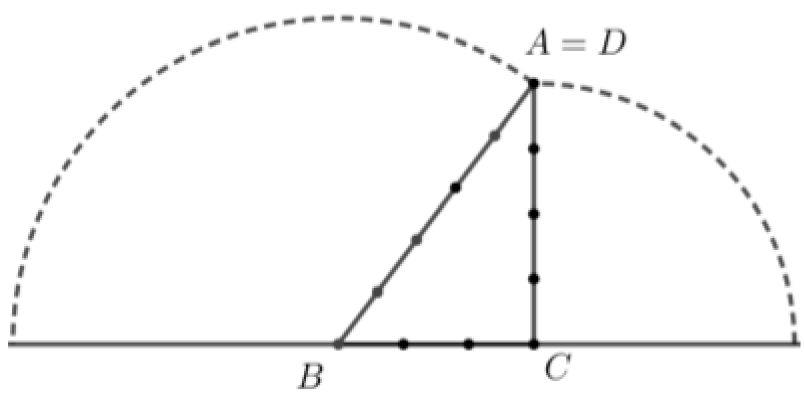


Figura 2.2. Construcción de un ángulo recto mediante una cuerda de 13 nudos igualmente espaciados (Cedillo *et al.*, 2006, p. 61)

- […] En la actualidad sabemos que los eruditos babilonios conocían el teorema en su forma aritmética, aunque tampoco lo demostraran, de modo que podría ser que el germen de la historia sea que Pitágoras fuera conocido únicamente como transmisor de un importante y elegante elemento del conocimiento matemático. (Brown, 2015, p. 101)

- En Babilonia y Egipto se desarrolló el conocimiento para construir edificaciones y trazar ciudades, el cual perdura hasta nuestros días. Uno de los puntos básicos de esta tecnología es poder trazar ángulos rectos, pues da lugar a formas racionales de dividir los espacios, y para lograrlo se usaba el siguiente método. Al trazar un triángulo cuyos lados mide 3, 4 y 5 unidades de longitud —no importa si son metros, pies o una vara cualquiera—, se forma un ángulo recto entre los lados que miden 3 y 4.

  […] Esta manera de trazar triángulos rectángulos se manejaba como conocimiento empírico, es decir, práctico y corroborado por la experiencia hasta que los griegos exhibieron lo que hacía tan especial a la terna de números 3, 4 y 5. Para esto, deben haberse preguntado algo como: ¿habrá otras ternas de números con la propiedad de formar ángulos rectos?, ¿qué las distingue?

  La respuesta a la pregunta sobre qué ternas forman ángulos rectos es sorprendente: tiene que ver con áreas. Si nos fijamos en los tres cuadrados cuyos lados son los números dados, la suma de las áreas de los dos cuadrados chicos tiene que ser igual al área del cuadrado grande. Cualquier albañil babilonio estará de acuerdo en que con 25 losetas cuadradas se pueden cubrir un cuadrado de 5 por 5, o bien uno de 3 por 3 y uno de 4 por 4. con la notación de nuestros días, podríamos escribir lo anterior como:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16=25=5^2$$

> Se sabe que los babilonios ya habían observado esta relación numérica y, además, de que conocían otros ejemplos. Pero que esto no fuera una casualidad, sino la razón profunda de que el método para trazar ángulos rectos funcionara, es un salto a otro nivel de entendimiento […] (Siglo XXI Editores, 2010, p. 34).

Sin embargo, ninguno de estos textos cita alguna fuente en la que basen las aseveraciones que realizan.

Las fuentes principales de donde se obtienen actualmente los conocimientos matemáticos de la antigua civilización egipcia son: El papiro de Rhind, el papiro de Moscú, el rollo de cuero de las matemáticas egipcias, los papiros de Kahum, Berlín, Reisner, y Akhmin, entre otros (Collete, J. P., 1985, pp. 39-42).

Aun con eso el teorema de Pitágoras es el resultado considerado como “la única parte de las matemáticas que todos podemos recordar” (Singh, 2003, p. 24) y “un logro de la humanidad equiparable al descubrimiento del fuego o de la rueda” (Siglo XXI Editores, 2010, p. 34). Tiene un sin fin de aplicaciones no sólo en las matemáticas sino también en otras áreas como la física. En su trabajo Okun (2008, p. 1) muestra cómo el efecto más importante de la teoría de la relatividad especial y general se puede entender de manera simple y directa, si se trabaja con el sistema de unidades en el que la velocidad de la luz *c* se toma como unidad de velocidad; esto es, se pueden convertir todas las fórmulas en formas más simples. El teorema de Pitágoras relaciona gráficamente energía, momento y masa. Además, la conjetura conocida como “el último teorema de Fermat”, demostrada en 1994, se basa en el teorema de Pitágoras; dicha conjetura tiene sus orígenes en la antigua cultura griega y puede enunciarse de forma sencilla en términos aritmético-algebraicos (Cedillo *et al.*, 2006, p. 32).

El conocimiento de que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades de longitud *no* es el teorema de Pitágoras, aunque muchos así lo crean. Lo anterior puede contrastarse con los enunciados del teorema de Pitágoras y su converso (o recíproco) que aparecen en el libro I de los *Elementos* de Euclides, escrito alrededor del año 300 a. n. e. La proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides corresponde al teorema de Pitágoras, mientras que la proposición 48 del mismo libro es denominada el converso del teorema de Pitágoras. A continuación se presentan estos resultados tal como aparecen en los *Elementos*.

> Proposición 47
>
> En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.
>
> Proposición 48
>
> Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto. (Euclides, 2015, pp. 74-77)

La forma lógica del teorema de Pitágoras (Proposición 47) es $p \Rightarrow q$ y la del converso (o recíproco) del teorema de Pitágoras (Proposición 48) es $q \Rightarrow p$ donde p corresponde a la proposición “el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto” y q corresponde a la proposición “en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a los cuadrados de los dos lados restantes del triángulo” (Cedillo *et al.*, 2006, p. 68).

Lo anterior hace que cobren relevancia los cuestionamientos que plantea Cambray (2017) porque con ellos se puede tener un punto de partida para la reflexión tanto de la constitución actual del currículo de matemáticas como de la manera en que se presentan el teorema de Pitágoras y su converso a los alumnos en el aula de clases:

- ¿El teorema de Pitágoras es álgebra?
- ¿Las proposiciones sobre triángulos obtusángulos y triángulos acutángulos son trigonometría?
- ¿Hace falta este tipo de relatos supuestamente históricos, sin valor alguno, en el aprendizaje de las matemáticas?
- ¿Qué tipo de obstáculos se pueden generar en nuestros alumnos con estos cuentos, en caso de que se los contemos?

La segunda pregunta resalta ahora, después de presentar las proposiciones 47 y 48 del libro de los *Elementos*, el libro más importante de geometría que ha trascendido hasta los tiempos actuales, porque si bien en la escuela se reserva el estudio de la ley de los cosenos hasta que los alumnos estén entrados en trigonometría, en el libro II de los *Elementos* de Euclides se tienen los resultados correspondientes a los triángulos obtusángulos y acutángulos en las proposiciones 12 y 13 respectivamente:

Proposición 12

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un (lado) de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la (recta) exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

Proposición 13

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la (recta) interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo. (Euclides, 2015, pp. 98 y 101)

Cabe mencionar que las proposiciones 12 y 13 sobre triángulos obtusángulos y triángulos acutángulos, respectivamente, son abordadas en trigonometría en los programas de estudios consultados para este trabajo de tesis, mientras que la proposición 47 se aborda en geometría plana, y sólo un programa de estudios hacen referencia a la proposición 48 (véase el cuadro 2.2, páginas 27 y 28).

Para fines de este trabajo sólo se considerará la primera parte tanto de la proposición 12 como de la proposición 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides porque corresponden a las desigualdades de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo obtusángulo y de un triángulo acutángulo, respectivamente.

Proposición 12

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso […]

Proposición 13

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo […]

(Euclides, 2015, pp. 98 y 101)

Para efectos de este trabajo se considera posible y de interés que los alumnos logren conjeturar sobre los conversos de las primeras partes de las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides.

Es momento de cuestionarnos sobre cómo se aborda el teorema de Pitágoras y su converso actualmente en los programas de estudio que se siguen en México, y de qué manera los cuentos que se han sociabilizado en la literatura están repercutiendo en su aprendizaje. En el siguiente apartado se presenta la justificación de la selección realizada de planes y programas de estudio para ubicar en ellos el teorema de Pitágoras y su converso.

Estructura del Sistema Educativo Nacional de México

El Sistema Educativo Nacional de México (SENM) se compone de cinco niveles (SEM, s/a): Educación Preescolar, Educación Primaria, Educación Secundaria, Educación Media Superior que comprende tres subsistemas: Bachillerato General (incluye las modalidades de bachillerato abierto y a distancia), Educación Profesional Técnica (ofrece la carrera de profesional técnico y también prepara a los estudiantes para el ingreso a la educación superior) y el Bachillerato Tecnológico (de modalidad bivalente, se puede estudiar el bachillerato al mismo tiempo que una carrera técnica). Finalmente, en el quinto nivel se ubica a la Educación superior que se puede estudiar en universidades, institutos tecnológicos o escuelas formadoras de maestros (educación normal), este nivel comprende cuatro subniveles: Licenciatura, Especialidad, Maestría y Doctorado. Los tres primeros niveles conforman un bloque denominado educación básica y se estudia de los 3 años a 15 años de edad. El cuarto nivel, también conocido como bachillerato o preparatoria, integra el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) y se estudia de los 15 años a los 18 años de edad.

La Educación Preescolar se encuentra integrada por el Jardín de niños, el Centro de Atención Psicopedagógico de Educación Preescolar (CAPEP) y el Centro de Desarrollo Infantil (CENDI); la Educación primaria se integra por la Escuela Primaria General, Escuela Primaria de Tiempo Completo, el Internado y Escuela de Participación social, y el Programa SEAP 9-14 (Servicio Escolarizado Acelerado de Educación Primaria dirigido a la población de 9 a 14 años, en situación vulnerable, con rezago escolar en edad y grado); y la Educación Secundaria se integra por las secundarias generales, las secundarias técnicas, las telesecundarias y las secundarias para trabajadores. La Educación Media superior (EMS) se divide de la siguiente manera (SEMS, s/a; SEMS / DGB, 2016).

1).- Bachillerato Escolarizado

a).- Bachillerato Tecnológico (Bivalente)

- Bachillerato Intercultural

BI (Bachillerato Intercultural)

- DGECyTM (Dirección General de Educación en Ciencia y Tecnología del Mar)

  CETAC (Centro de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales)

  CETMAR (Centros de Estudios Tecnológicos y Tecnología del Mar)

- DGETI (Dirección General de Educación Tecnológica Industrial)

  CBTIS (Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicio)

  CETIS (Centro de Estudios Tecnológico Industrial y de Servicio)

- DGETA (Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria)

  CBTA/CBTF (Centros de Bachillerato Tecnológico Agropecuario y Forestal)

- CONALEP (Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica)

- CETI (Centro de Enseñanza Técnica Industrial)

- IPN (Instituto Politécnico Nacional)

  CECyT (Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos)

b).- Bachillerato General (BG)

- Dirección General de Bachillerato

  CEB (Centros de Estudios de Bachillerato)

  PFLC (Preparatorias Federales "Lázaro Cárdenas")

  PREFECO'S (Preparatorias Federales por Cooperación)

  EPPIS (Escuelas Preparatorias Particulares Incorporadas)

  EMSAD (Educación Media Superior a Distancia)

  TBC (Telebachillerato Comunitario)

  Bachilleratos de las Universidades Autónomas

  Bachilleratos Estatales

  Bachilleratos de Artes

Bachilleratos Militares del Ejército

Bachillerato de la Heroica Escuela Naval Militar

Preparatorias Abiertas

Bachilleratos Federalizados

COLBACH o CB (Colegio de Bachilleres)

- Sistema de Bachillerato del Gobierno del Distrito Federal (SBGDF)

IEMS (Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal)

o Preparatorias de la Ciudad de México

2).- Bachillerato no escolarizado

a).- Certificación por evaluaciones parciales

- DGB (Dirección General del Bachillerato)

Preparatoria Abierta

- SEA (Sistema de Enseñanza Abierta del COLBACH)

Certificación por evaluaciones parciales

b).- Virtual

- SEP-Sistema Nacional de Bachillerato en Línea

Prepa en Línea

- COLBACH en Modalidad Virtual

- SBGDF

Sistema de Educación a Distancia del IEMS (para alumnos que interrumpen sus estudios por un periodo de tiempo mayor a año y medio)

3).- Bachillerato Mixto

- MMFD (Modelo Mexicano de Formación Dual)

- DGECyTM

  CMM (Centro Multimodal de Estudios Científicos del Mar y Aguas Continentales)

- DGETI

  CBTA (Bachillerato Tecnológico Auto-planeado)

- DGETA

  SAETA (Sistema Auto-planeado de Educación Tecnológica Agropecuaria)

- CONALEP

4).- Certificación de bachillerato por examen

- Examen CENEVAL (Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.) – Acuerdo 286 Bachillerato

- COLBACH (Examen de Certificación del COLBACH)

  Certificación de Bachillerato por Examen

  EXACER (Certificación por evaluaciones parciales)

5).- Capacitación para el trabajo

- DGCFT (Dirección de Centros de Formación para el Trabajo)

  CECATI (Centro de Capacitación para el Trabajo Industrial)

  ICAT (Institutos de Capacitación para el Trabajo)

  CIDFORT (Centro de Investigación y Desarrollo de la Formación para el Trabajo)

- CECATI

  CAPACITA T (Cambia tu Vida)

6).- Discapacidad

- DGB

  CAED (Centros de Atención para Personas con Discapacidad)

- DGCFT

Centros POETA-CECATI (Programas de Oportunidades Económicas a través de la Tecnología en las Américas)

Las instituciones que integran el SNB se basan en el mismo modelo educativo, por competencias, además aquellos que ofrecen la educación propedéutica retoman los programas del BG para lograr ese objetivo. Algo que tienen en común todos los subsistemas de educación media superior antes mencionados y que ofrecen una educación de carácter bivalente es que retoman los programas de estudio del BG para impartir la formación propedéutica. Además, los subsistemas que ofrecen educación virtual retoman los programas de estudio del BG, así como los que ofrecen la certificación del bachillerato por examen.

Por su parte la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) cuenta con su propio sistema de bachillerato que incluye a la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) y a la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH). Actualmente la ENP 2 “Erasmo Castellanos Quinto” es el único plantel de la UNAM que cuenta con un plan de seis años que integra el sistema de Iniciación Universitaria (Secundaria) y el de la ENP (Bachillerato). (Frías, 2015, p. 4; UNAM / DGENP, s/a)

Por todo lo anterior para conocer la situación actual que guarda el teorema de Pitágoras en la educación secundaria se considera pertinente ubicar dicho teorema en los planes y programas de estudio tanto de la Secretaría de Educación Pública (SEP) como de Iniciación Universitaria de la UNAM. Para la educación media superior se considera pertinente la ubicación en los planes y programas de estudio del BG porque se retoma en la mayoría de los subsistemas de modalidades escolarizado o virtual, los del COLBACH o CB (por su abreviatura en los programas de estudio) porque a pesar de que su cobertura es la Ciudad de México y su zona metropolitana también se retoman sus programas para su bachillerato virtual que sí tiene cobertura nacional. La ubicación en el plan y programas de estudio de la Preparatoria de la Ciudad de México se debe a que es de las más jóvenes de las instituciones que imparten el bachillerato, mientras que se incluyen los bachilleratos de la UNAM por sus modelos educativos tan distintos de sus subsistemas de bachillerato como por la cantidad de estudiantes que cubre, así como por la importancia y trascendencia que tiene la UNAM a nivel nacional e internacional.

Considerando la selección de las instituciones planteadas anteriormente en el siguiente apartado se presenta una síntesis de los resultados de la ubicación de los planes y programas de estudios de educación secundaria, si se desean consultar los resultados completos véase el apéndice A.

El teorema de Pitágoras en planes y programas de estudio de la educación secundaria del SENM

En el cuadro 2.1 se presenta una síntesis de los resultados obtenidos de la ubicación del teorema de Pitágoras en dos programas de estudio de educación secundaria; si se desean consultar los resultados completos, véase el apéndice A. De este cuadro se puede concluir que el teorema de Pitágoras se aborda durante el tercer año de secundaria. Se puede apreciar que mientras en la secundaria de la SEP se plantea que a partir del análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo se explicite el teorema de Pitágoras y su uso para resolver problemas, en el tercer año de Iniciación universitaria de la UNAM se indica la demostración de algunos teoremas, entre ellos el teorema de Pitágoras.

Cuadro 2.1. El teorema de Pitágoras en algunos programas de estudios de educación secundaria del SENM

Dependencia	Nivel/ dependencia	Materia y unidad o bloque temático	Contenido o aprendizaje	Eje o descripción del contenido
SEP	Educación básica (secundaria) (SEP, 2011a, p. 13)	Matemáticas tercer grado Bloque II	Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	MEDIDA - Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. - Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
UNAM	ENP (Iniciación universitaria) (ENP, 2006, p. 10)	Matemáticas III Cuarta Unidad: Triángulos	Demostración de algunos teoremas.	Se demostrará el teorema de Pitágoras.

Puesto que la mayoría de los alumnos que concluyen la secundaria en México lo hace bajo el programa de estudios de la SEP, se esperaría que al egresar de la secundaria estos adolescentes conozcan el teorema de Pitágoras, particularmente su forma geométrica puesto que el programa de estudios de Matemáticas tercer grado de secundaria indica que la presentación del teorema sea abordado a partir del análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo, su explicitación y uso del teorema. Mientras que los pocos adolescentes, en comparación con los egresados de las secundarias de la SEP, egresados del sistema de Iniciación universitaria de la UNAM (sólo en la ENP 2 se tiene este sistema) se les ha presentado el teorema de Pitágoras a partir de alguna o algunas de sus demostraciones. En ambos casos, los adolescentes que logran concluir el nivel de estudios secundarios conocen alguna de las formas del teorema de Pitágoras, y puesto que su uso o aplicación se encuentra considerado en los programas de estudio se entendería que los alumnos que llegan al nivel medio superior ya lo han utilizado de una u otra manera.

Considerando la selección de las instituciones planteadas al inicio del apartado anterior en el siguiente apartado se presenta una síntesis de los resultados de la ubicación de los planes y programas de estudios de educación media superior; si se desean consultar los resultados completos, véase el apéndice B.

El teorema de Pitágoras en planes y programas de estudio de la educación media superior del SENM

En el cuadro 2.2 se presenta la ubicación del teorema de Pitágoras y su converso en cinco programas de estudio de educación media superior; si se desean consultar los resultados completos, véase el apéndice B. De este cuadro se puede concluir que el teorema de Pitágoras y su converso se abordan durante el primer año de bachillerato. Se puede apreciar que mientras en el bachillerato de la SEP (BG, CB, IEMS) se plantea abordar el teorema de Pitágoras a partir de su presentación y demostración para posteriormente abordar situaciones contextuales y la resolución de triángulos rectángulos, también se considera abordar su generalización a través del cálculo de áreas de polígonos regulares en geometría dinámica en el plano y en el espacio. Al igual que en el bachillerato de la SEP, en el programa de estudios de la ENP de la UNAM se aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos al abordar la trigonometría; se puede conjeturar que su deducción no se aborda porque ha sido abordada en el último año del Sistema de Iniciación Universitaria o en la secundaria si se proviene del subsistema de la SEP. No es claro si los alumnos que cursan el bachillerato con los programas de estudios mencionados hasta ahora estudien el converso del teorema de Pitágoras porque en ningún momento estos programas hacen referencia a este resultado.

Finalmente, el único programa de estudios de matemáticas que sí considera el estudio del teorema de Pitágoras y su recíproco, así como su aplicación en la resolución de problemas que involucren longitudes y área, es el de la ENCCH. Para el teorema de Pitágoras se sugiere como estrategia la presentación de una demostración por parte del profesor para que posteriormente los alumnos investiguen otras. Mientras que para abordar el recíproco del teorema de Pitágoras se sugiere como estrategia que los alumnos construyan triángulos que satisfacen la conclusión del teorema de Pitágoras y verifiquen que son triángulos rectángulos.

Para averiguar cómo se aborda el teorema de Pitágoras y si es común que no se aborde su converso se procedió a ubicar estos resultados en algunos libros de texto y otros materiales educativos para analizar la forma en que se presentan. En el siguiente apartado se presentan los resultados obtenidos.

Cuadro 2.2. El teorema de Pitágoras en algunos programas de estudios de educación media superior del SENM

Subsistema	Dependencia	Materia y unidad o bloque temático	Contenido o temática	Estrategias sugeridas o referentes para evaluación o caracterización
Bachillerato General (Dirección General de Bachillerato)	Bachillerato General (DGB/DCA, 2013, pp. 20-22)	Matemáticas II Bloque III	Teorema de Pitágoras	Presentar y demostrar al alumnado el teorema de Pitágoras
Bachillerato Tecnológico (Dirección General de Bachillerato)	CB o COLBACH (SEP/CB, 2015)	Matemáticas II Bloque II - Elementos de trigonometría Bloque III - Geometría dinámica en el plano y en el espacio	- Teorema de Pitágoras - Perímetros, áreas de figuras geométricas inscritas y circunscritas. 1. Generalización del teorema de Pitágoras	- Aplica el teorema de Pitágoras en la solución de problemas de la vida cotidiana, utilizando el GeoGebra. - Calcula el perímetro de la circunferencia y el área del círculo. - Calcula perímetros y áreas de figuras compuestas: inscritas y circunscritas. - Comprueba la generalización del teorema de Pitágoras, a través del cálculo de áreas de polígonos regulares.
Bachillerato General (SBGDF)	IEMS (IEMS, 2006, pp. 24-25)	Matemáticas II	- Geometría 3. Teorema de Pitágoras.	- Aplica el concepto de proporcionalidad en la geometría a través de triángulos.

(Continúa)

Cuadro 2.2. (Concluye)

Subsistema	Dependencia	Materia y unidad o bloque temático	Contenido o temática	Estrategias sugeridas o referentes para evaluación o caracterización
Bachillerato UNAM (Propedéutico)	ENP (ENP, 2006, pp. 16-17, 43)	Matemáticas IV	- Resolución de triángulos rectángulos. - Clasificación de los polígonos por sus lados y por sus ángulos.	- El alumno en forma individual o por equipos, bajo la asesoría de su profesor y en el aula: Resolverá problemas del tipo "Un topógrafo que está en el fondo de una barranca determina que el ángulo de elevación de uno de los bordes de la barranca es de 150º13'. Si el topógrafo está a 5 m. de la base. ¿Cuál es la profundidad de la barranca?
	ENCCH (ENCCH, 2016, pp. 43-44)	Matemáticas II 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras	- Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación. - Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. - Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.	- El profesor hace una demostración del teorema de Pitágoras y solicita a los alumnos que investiguen otras demostraciones, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos. Además, solicita a los alumnos que construyan triángulos que satisfacen la conclusión del teorema de Pitágoras y verifiquen que son rectángulos. - El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas planteados.

El teorema de Pitágoras en materiales educativos y en publicaciones de investigación educativa

Con el objetivo de identificar si es común sólo abordar el teorema de Pitágoras y no su converso en los libros de texto. Se procedió a seleccionar una serie de libros de textos que se encuentran en el catálogo de la biblioteca de una escuela de nivel media superior, cabe mencionar que algunos de estos textos seleccionados forman parte de las referencias tanto para el profesor como para el alumno en los programas de estudio del área de matemáticas.

Puesto que el interés de este análisis se centró en las formas que siguieron los autores para presentar el teorema de Pitágoras y su converso, el objetivo de este análisis fue detectar si los autores incurrían en alguno de estos casos: *1)* los autores presentan primero su forma geométrica sólo para validar el teorema y posteriormente presentan su forma algebraica para aplicarla en la resolución de problemas; *2)* los autores presentan primero una o varias demostraciones, para posteriormente presentar su forma algebraica y aplicarla en la resolución de problemas; *3)* los autores presentan sólo la forma algebraica del teorema para posteriormente aplicarla en la resolución de problemas; y finalmente, *4)* los autores presentan un poco de historia acerca del teorema, después presentan una o varias demostraciones para validar el teorema, después presentan la forma algebraica del teorema y la aplican en la resolución de problemas.

En el cuadro 2.3 se presenta la descripción de la forma en que se aborda el teorema de Pitágoras y su converso en algunos libros de texto.

Cuadro 2.3. Ubicación del teorema de Pitágoras y su converso en algunos libros de texto

Libro de texto	Forma de abordar el teorema de Pitágoras				Aborda el converso del teorema de Pitágoras
	Verificación del teorema a partir de su forma geométrica	Presentación de al menos una demostración del teorema	Presentación del enunciado a partir de su forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$	Presentación de la aplicación del teorema de Pitágoras en su forma algebraica	
1).- Algebra Intermedia (Allen, 2008, pp. 339-345)	No	No	Sí	Sí, aunque utiliza *a* y *b* para denotar los catetos también utiliza *d* para denotar la hipotenusa.	No
2).- Elementos de Geometría (Álvarez, 2012, pp. 194-196, 285)	No	Sí, presenta la demostración proporcionada por Euclides.	Sí, es deducida a partir de las métricas del triángulo rectángulo.	Sí, se aplica en la obtención de las relaciones métricas en un triángulo cualquiera.	No
3).- Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones (Burril, 2004, 399-408)	Sí, pero como un ejercicio de modelación para que el alumno lo realice en un geoplano. Se plantea su modelación con un geoplano como ejercicio.	Sí	Sí, después de enunciar el teorema presenta una especie de traducción en términos de las literales *a*, *b* y *c* que representan las medidas de las longitudes de un triángulo rectángulo.	Sí, se aplica en la resolución de problemas, para mostrar la fórmula de la distancia	Sí, enuncia el teorema y lo ejemplifica con una tripla pitagórica. La demostración se deja como ejercicio.

(Continúa)

Cuadro 2.3. (Continuación)

Libro de texto	Forma de abordar el teorema de Pitágoras				Aborda el converso del teorema de Pitágoras
	Verificación del teorema a partir de su forma geométrica	Presentación de al menos una demostración del teorema	Presentación del enunciado del teorema a partir de su forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$	Presentación de la aplicación del teorema de Pitágoras en su forma algebraica	
4).- Pre-Algebra (Charles, 2009, pp. 592-599).	Sí, como una actividad *online* para que el alumno visualice la relación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.	No, menciona que se comprobará el teorema en una futura clase de matemáticas, y que en el libro sólo se usará para hallar longitud de un cateto o la longitud de una hipotenusa.	Sí, inicia con el cálculo de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo, para posteriormente comparar estos resultados y obtener la relación algebraica. Presenta el enunciado del teorema en términos de *a*, *b* y *c*, catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente.	Sí, en la resolución de algunos problemas.	Sí, enuncia el teorema y proporciona un ejemplo de su uso, propone un ejercicio para el alumno.
5).- Geometría (Clemens, 2005, pp. 199, 226-231)	Sí construye los cuadrados sobre cada lado del triángulo rectángulo y compara las áreas.	Sí, se presenta una prueba del teorema. Descompone el cuadrado de la hipotenusa en 4 triángulos rectángulos congruentes y un cuadrado.	No	Sí, pero asigna a los catetos el nombre del segmento que lo forma.	Sí, se presenta el enunciado del teorema y un ejemplo.

(Continúa)

Cuadro 2.3 (Continuación)

Libro de texto	Forma de abordar el teorema de Pitágoras				Aborda el converso del teorema de Pitágoras
	Verificación del teorema a partir de su forma geométrica	Presentación de al menos una demostración del teorema	Presentación del enunciado del teorema a partir de su forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$	Presentación de la aplicación del teorema de Pitágoras en su forma algebraica	
6).- Complemento Matemático 3 Cuaderno de trabajo (Casarrubias, 2015, pp. 59-64)	Sí, para esquematizar geométricamente la relación algebraica que se presenta después de enunciar el teorema. Comienza nombrando los lados del triángulo rectángulo como catetos e hipotenusa.	Sólo indica las instrucciones que debe seguir el alumno para analizar las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo para verificar el teorema.	Sí	Sí, en el cálculo de la longitud de los lados que se desconocen en un triángulo rectángulo, en el cálculo de alturas y áreas de algunos triángulos, así como para encontrar la apotema y el área de polígonos regulares, entre otros problemas.	No

(Continúa)

Cuadro 2.3. (Continuación)

Libro de texto	Forma de abordar el teorema de Pitágoras				Aborda el converso del teorema de Pitágoras
	Verificación del teorema a partir de su forma geométrica	Presentación de al menos una demostración del teorema	Presentación del enunciado del teorema a partir de su forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$	Presentación de la aplicación del teorema de Pitágoras en su forma algebraica	
7).- Geometría y trigonometría (Gutiérrez, 2008, pp. 148-163)	Sí, presenta los cuadrados construidos sobre cada lado del triángulo rectángulo.	-Presenta la verificación del teorema para un triángulo particular y luego lo hace en general (incluso se deja de ejercicio al alumno) a partir de la descomposición de uno de los cuadrados en partes. - Presenta una demostración deductiva del teorema basada en la altura trazada a la hipotenusa y la semejanza de triángulos. -Presenta dos demostraciones algebraicas del teorema.	Sí, la presenta después de definir a los catetos y la hipotenusa, y nombrarlos *a*, *b* y *c*, respectivamente.	Cálculo de longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo, y la determinación de distancias desconocidas.	Sí, enuncia el teorema. Lo introduce a partir de la mención de que todo terno de números que cumple la relación expresada por el teorema, $a^2 + b^2 = c^2$, da lugar a triángulos rectángulos.

(Continúa)

Cuadro 2.3. (Continuación)

Libro de texto	Forma de abordar el teorema de Pitágoras				Aborda el converso del teorema de Pitágoras
	Verificación del teorema a partir de su forma geométrica	Presentación de al menos una demostración del teorema	Presentación del enunciado del teorema a partir de su forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$	Presentación de la aplicación del teorema de Pitágoras en su forma algebraica	
8).- Matemática: Razonamiento y Aplicaciones (Miller, 1999, pp. 526-529)	Sí, pero a modo de ilustración del teorema con una especie de patrón de tablero de ajedrez.	Sólo se propone una actividad para que los alumnos verifiquen el teorema, para lo cual se les proporciona una representación geométrica de una demostración del teorema y una serie de enunciados que deben ser completados con la información que se obtenga del análisis de la representación dada.	Sí, presenta el enunciado del teorema en términos de la relación algebraica.	Sí, se aplica en la determinación de la longitud de un lado de un triángulo rectángulo conociéndose los otros dos lados. Además, como ejemplo presenta uno de los problemas del papiro matemático del Cairo.	Sí. Inicialmente se menciona la forma lógica del teorema de Pitágoras, después afirma que al invertir el antecedente y el consecuente del teorema se obtiene su recíproco que es un enunciado también verdadero. Posteriormente enuncia el recíproco del teorema de Pitágoras y presenta una aplicación.

(Continúa)

Cuadro 2.3. (Concluye)

Libro de texto	Forma de abordar el teorema de Pitágoras				Aborda el converso del teorema de Pitágoras
	Verificación del teorema a partir de su forma geométrica	Presentación de al menos una demostración del teorema	Presentación del enunciado del teorema a partir de su forma algebraica $a^2 + b^2 = c^2$	Presentación de la aplicación del teorema de Pitágoras en su forma algebraica	
9).- Geometría plana con coordenadas (Ritch, 1990, pp. 102-104, 196 y 202)	No	Sí, presenta una demostración en el capítulo de demostración de los teoremas fundamentales.	Sí, enuncia el teorema y proporciona la forma algebraica.	Sí. En el cálculo de los lados de un triángulo rectángulo, las razones aplicadas al triángulo rectángulo, al triángulo isósceles, al rombo, al trapecio y a las circunferencias.	Sí, aunque no lo nombra de esa manera y lo presenta como una forma de averiguar si un triángulo es rectángulo o no dependiendo si la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ se cumple para los tres lados de un triángulo. En caso de no cumplirse la igualdad presenta un criterio (análisis del tipo de la desigualdad que se presenta) para determinar si el triángulo es acutángulo u obtusángulo.
10).- Álgebra (Smith, 2001, pp. 509-518)	Sí, como diagrama para mostrar la relación entre los catetos y la hipotenusa.	No	Sí, al enunciar el teorema.	Sí, en el cálculo de longitudes, para obtener la fórmula de distancia, y para plantear y resolver problemas.	No

Como resultado del análisis realizado se encontró que las formas que siguieron los autores de los libros de textos para abordar el teorema de Pitágoras fueron:

- Utilizar la forma geométrica del teorema de Pitágoras, construcción de cuadrados de la misma longitud de cada lado en un triángulo rectángulo para comparar la suma de áreas de los cuadrados construidos en los catetos con el área del cuadrado de construido en la hipotenusa, para justificar la presentación de la forma algebraica, y posteriormente sólo utilizan la forma algebraica para la resolución de problemas.
- Presentar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras para justificar la veracidad del teorema y posteriormente se presenta la forma algebraica del teorema de Pitágoras para resolver problemas de aplicación.
- Presentar directamente la forma algebraica del teorema de Pitágoras y la aplican en la resolución de problemas.

Mientras que para el converso del teorema de Pitágoras se encontró que no todos los libros de texto lo abordan y aquellos que sí lo abordan sólo hacen mención de su enunciado y ofrecen al menos un ejemplo de su uso.

Algo que resalta en varios de los libros de textos es la utilización de las literales a, b y c para expresar la forma algebraica del teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, cuyo uso se mantiene a lo largo del desarrollo de los ejemplos de aplicación. Es válido cuestionarse si esta costumbre incide de alguna manera en la comprensión por parte de los estudiantes de los resultados presentados en estos libros.

Adicionalmente, vale la pena señalar que en otros materiales educativos, así como en publicaciones de resultados de investigaciones educativas, se aborda el teorema de Pitágoras, pero en muy pocas se trata su converso. En algunas de estas investigaciones educativas se uso determinado *software* dinámico como herramienta de enseñanza para facilitar a los alumnos el cálculo numérico lo cual posibilito la exploración de casos particulares del teorema de Pitágoras en su forma geométrica (véanse, por ejemplo: Zubieta *et al.*, 2000; Vargas y Gamboa, 2013; Odetti, 2015; y Walczyc, 2006) para llegar a deducir su expresión algebraica; otros autores van más allá de esto y presentan propuestas de trabajo que requieren que los alumnos exploren diferentes demostraciones del teorema de Pitágoras en sus formas algebraicas en internet, además sugieren hacer uso de algún *applet* a partir del cual el alumno debe comprender cómo se realiza la demostración gráfica y posteriormente lograr explicarla oralmente, también se sugiere que los alumnos reconstruyan las demostraciones presentadas en el *applet* o que escriban en lenguaje matemático la demostración que se presenta para que se apropien de la representación gráfica del teorema (para un ejemplo véase Podestá, 2011, pp. 16-19). Otros autores hacen uso de la presentación de las demostraciones del teorema de Pitágoras como herramientas de aprendizaje (véanse por ejemplo: Meavilla, 2015; y González, 2008).

Intentando develar si las costumbre arraigadas en la presentación del teorema de Pitágoras, su converso, y sus aplicaciones trasciende los materiales educativos mencionados en este apartado se procedió a analizar lo que ocurre con los materiales que consultan los estudiantes en internet. En el siguiente apartado se reportan los resultados obtenidos.

El teorema de Pitágoras en algunos videos

Con base en que actualmente la tendencia de estudiantes de bachillerato es recurrir a los videos de internet para comprender algún tema de matemáticas o de otras asignaturas antes de consultar los libros de texto, en el mes de septiembre de 2018 se pidió a 51 estudiantes de tercer o quinto semestre de bachillerato que seleccionaran en *YouTube* el video en el que mejor se explicaba el teorema de Pitágoras, su converso, y la aplicación de estos teoremas para recomendarlo a sus compañeros que cursaban el primer año de bachillerato.

Los resultados obtenidos se presentan en el cuadro 2.4. De un total de 31videos, se incluyen en este cuadro algunos comentarios escritos por los alumnos consultados acerca de los videos recomendados. En el cuadro se incluyen sólo los 5 videos más recomendados. Sin embargo, los demás videos siguen la misma tendencia en cuanto a la presentación del contenido.

De acuerdo con los comentarios de los alumnos, y una vez revisados los videos que más recomendaron, se concluye que los alumnos prefieren los siguientes tipos de videos.

- Videos que inicien con un poco de historia del teorema de Pitágoras y que presenten la forma geométrica o una demostración geométrica (como la descomposición de un cuadrado en triángulos) de este resultado sin llegar a una demostración formal.
- Videos que muestren el teorema de Pitágoras como una expresión algebraica que se aplica inmediatamente en la resolución de problemas que sólo implican el uso de la ecuación

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

  así como el despeje de uno de sus términos.

- Videos que presenten de forma lúdica el teorema de Pitágoras, y si es en animación, mucho mejor.

Además, a los alumnos no les agradan los videos que contienen puras demostraciones del teorema de Pitágoras. Y la mayoría de los videos que los alumnos seleccionaron sólo cubrían el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, pero no el converso de este teorema. Es probable que lo anterior se debió a que los alumnos no percibieron diferencia alguna entre el teorema de Pitágoras y su converso.

También se concluye que los antecedentes históricos del teorema de Pitágoras son tratados como datos históricos para motivar al alumno a introducirse en el estudio del teorema de Pitágoras, sin embargo, estos antecedentes históricos no se conciben para ser considerados como una forma de enseñanza del teorema de Pitágoras.

Con todo lo anterior surge la duda de si la forma en que se les presenta el teorema de Pitágoras incide en la comprensión de este resultado en los alumnos, y en su percepción de la diferencia entre el teorema de Pitágoras y su converso. De ser así la pregunta obligada sería ¿Cómo se podría contribuir a una mejor comprensión del teorema de Pitágoras y su converso en el aula de clases?

Con el presente trabajo no se busca que los alumnos dejen de recitar la “cancioncilla pitagórica” —término usado por Singh (2003, p. 24)—: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados [o de los catetos]. Más bien se busca que los alumnos logren dotarlo de su significado geométrico. En el siguiente capítulo se describe la metodología para este trabajo de tesis.

Cuadro 2.4. Videos más recomendados por 51 estudiantes que cursan el tercer semestre o el quinto semestre de bachillerato

Título del video	Algunos comentarios realizados por los alumnos
TEOREMA DE PITÁGORAS Super fácil (Carreón, 2016)	- Me parece que es el mejor que he visto porque te explica desde los conceptos básicos de cómo identificar catetos e hipotenusa y qué son las potencias. Después pone ejemplos diferentes de cómo aplicar el teorema, ¡y todos son facilísimos! - Creo que es muy bueno ya que usa los términos en letras y te enseña a usarlos bien, los explica de manera clara y para nada confusa, integra el teorema de una forma teórica y te describe los conceptos básicos para entenderlo (teoría sobre el teorema y de la potencia) además que te enseña en qué momento usar las variantes.
Teorema de Pitágoras (Andalón E, 2010)	- Te explica primero lo que Pitágoras descubrió y te da a entender el uso del triángulo rectángulo para su función y solución de este. Después te dice los lados cómo se llaman para que sepas y no los pierdas. Luego te da un ejemplo y te dice que no es bueno que te aprendas por letra porque después te cambian las letras y te pierdes y ya no sabes quién es cual (Y este es un claro ejemplo en nuestra clase cuando muchos e incluso me ha pasado a mi dónde me pierdo por esto mismo). Después te sigue dando más ejemplos y aquí hay uno donde tienes que despejar para saber el valor de este lado. He incluso aquí después te da otro ejemplo en donde tenemos un triángulo, pero al revés que me parece que también es algo donde al principio lo vemos y nos confundimos a simple vista sin saber que es el mismo procedimiento y solución. Este video me pareció muy interesante y fácil de entender ya que no solo te da ejemplos con triángulos, sino que también te da ejemplos en la vida real, como el del árbol y su sombra, una persona y un papalote y te da un consejo que primero tenemos que identificar la figura, obtener el triángulo rectángulo y después poderlo solucionar - Es muy bueno ya que él sólo se basa en los números y te enseña lo básico de los cuadrados formando las áreas y de dónde sale el teorema. Además de que te enseña problemas y su aplicación.

(Continúa)

Cuadro 2.4. (Concluye)

Título del video	Algunos comentarios realizados por los alumnos
Teorema de Pitágoras Explicación y Ejemplos (Susi Profe, 2017)	- Me parece el mejor video porque tiene una buena explicación respecto a en qué consiste el teorema de Pitágoras diciendo que "la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa", con un diagrama que lo demuestra y la fórmula, con la que después sustituye por valores y muestra cómo encontrar uno de los catetos y la hipotenusa. También explica cómo se identifica la hipotenusa y los catetos. Es breve y se explica de una forma simple y entendible, por eso me parece el mejor video - Elegí este video porque me parece buena la forma en que explica, la cual va desde lo básico como, por ejemplo; el obtener el área de un cuadrado, hasta mostrar el teorema aplicado en problemas, ya sea que pidan la hipotenusa o uno de los catetos.
Explicación del TEOREMA DE PITÁGORAS (Andalón E, 2018)	- Lo elegimos porque da una explicación precisa de la fórmula, de dónde surge y con distintas variables, para lo cual a un triángulo rectángulo le dibuja a cada uno de sus lados los cuadrados correspondientes, con lo cual demuestra que el cuadrado correspondiente a la hipotenusa tiene la misma área que la suma de las áreas de los cuadrados de los dos catetos. Además de que demuestra cómo utilizar la calculadora para la verificación de los resultados, a su vez muestra ejemplos que pueden suceder en la vida real demostrando su aplicación del teorema de Pitágoras.
¿Qué es el Teorema de Pitágoras? | Videos Educativos para Niños (Aula365 – Los creadores, 2017)	- Lo he escogido porque llamó mi atención después de ver varios videos que me parecieron aburridos y un tanto repetitivos, me gustó porque tiene dibujitos y creo que yo me dejo llevar un tanto por lo visual, entonces al visualizar la explicación entiendo más. A pesar de que podría parecer un poco infantil o simple, creo que el apoyo visual y no solo teórico a la hora de aprender es algo importante hasta cierto punto. Da una definición de cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo, quién fue Pitágoras y su descubrimiento. Al final nos da un ejemplo de cómo se puede aplicar en la vida cotidiana, es un ejemplo sencillo sin embargo creo que la explicación es clara. 😊 - Para mí ese es el mejor video porque explican el Teorema de Pitágoras de una manera interactiva ya que en vez de dar explicaciones en el pizarrón, lo hacen por medio de dibujos animados, dan una pequeña introducción sobre quién fue Pitágoras y muestran un ejemplo de una situación en la que puede ocuparse el Teorema de Pitágoras.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

En este capítulo se describen las principales etapas de la investigación llevada a cabo para esta tesis: tres etapas del estudio piloto, y el estudio final. El capítulo se divide en tres apartados. En el primer apartado se abordan las primeras dos etapas del estudio piloto. En el segundo apartado se describen resultados de la tercera y última etapa del estudio piloto; análisis de estos resultados sirvieron para rediseñar las actividades que se utilizaron en el estudio final. En el tercer apartado se incluye información sobre el estudio final. En los cuadros 3.1 y 3.2 se presentan, de manera resumida, la estructura de esta investigación, las etapas de la investigación, cuántos estudiantes participaron en cada etapa, durante cuántas sesiones de trabajo y de cuánto tiempo cada una, las actividades con las que se trabajó, los objetivos, el tipo de trabajo realizado, el material utilizado y los análisis llevados a cabo durante cada una de las etapas de la investigación.

En el siguiente apartado se presentan la primera y la segunda etapa del estudio piloto.

Cuadro 3.1. Etapas de la investigación, participantes, fechas, duración y número de actividades

Etapas de la investigación	Participantes	Fechas	Duración	Número de actividades
Estudio piloto: Primera etapa	20 estudiantes, de 16 a 17 años	30 de enero de 2017	1 sesión de 60 minutos	3 actividades (Apéndice C)
Estudio piloto: Segunda etapa	18 estudiantes, de 16 a 17 años	15 de febrero al 17 de marzo de 2017	5 sesiones (1.a de 10 min, 2.a, 3.a y 4.a de 50 min, y 5.a de 110 min)	5 actividades (Apéndice D)
Estudio piloto: Tercera etapa	24 estudiantes, de 16 a 17 años	22 de marzo al 21 de abril de 2017	6 sesiones (5 de 50 min, y una de 110 min)	7 actividades (Apéndice E)
Estudio final	20 estudiantes, de 15 a 16 años	8 de febrero al 16 de febrero de 2018	5 sesiones (la 2.a y la 5.a de 50 min, y las otras 3 de 110 min)	8 actividades (Apéndice F)

Cuadro 3.2. Etapas de la investigación, objetivo, tipo de trabajo realizado, material utilizado y elementos de análisis

Etapas de la investigación	Objetivo de la etapa de la investigación	Tipo de trabajo realizado y material utilizado	Elementos de análisis
Estudio piloto: Primera etapa	Observar la disposición de los alumnos para trabajar en la comparación de áreas de cuadrados construidos sobre lados de triángulos	Trabajo individual, en hojas de cuaderno	Errores cometidos por los alumnos
Estudio piloto: Segunda etapa	Recabar información para modificar diseño y orden de las actividades propuestas para la 3.a etapa del estudio piloto	Trabajo individual, en fotocopias con las actividades propuestas y en hojas de cuaderno	Dificultades presentadas por los alumnos durante su trabajo con las actividades planteadas
Estudio piloto: Tercera etapa	Adecuar y restructurar las actividades para el estudio final	Trabajo en equipo de 4 alumnos, en fotocopias con las actividades propuestas y en hojas de cuaderno	Dificultades presentadas por los alumnos durante su trabajo con las actividades planteadas
Estudio final	Recabar evidencia de cómo las actividades utilizadas en el estudio final conducen a los estudiantes a descubrir el teorema de Pitágoras y otros resultados geométricos relacionados	Trabajo individual, en equipo de 4 alumnos, y en grupo, con fotocopias y en hojas de cuaderno	Análisis y clasificación de los resultados obtenidos por los alumnos durante su trabajo con las actividades planteadas

Estudio piloto: primera y segunda etapas

Al ubicar el teorema de Pitágoras y su converso en algunos planes y programas de estudio tanto de nivel bachillerato como de nivel secundaria, se logró detectar que estos resultados matemáticos en general han sido abordados a partir de la presentación de algunas de sus demostraciones por parte del profesor a los alumnos, y en otros casos invitando a los alumnos a que consulten por su cuenta algunas otras demostraciones. Se encontró que muy pocos programas de estudio son los que realmente aportan una estrategia didáctica para abordarlos, aunque dan énfasis a la presentación algebraica de estos resultados matemáticos con el fin de que los alumnos los utilicen en la resolución de problemas de aplicación y en la resolución de triángulos rectángulos. En ninguno de los programas se propone como aprendizaje que los alumnos descubran estos resultados matemáticos. La convicción de que al permitir a los alumnos que descubran por sí mismos estos resultados matemáticos a partir del planteamiento de conjeturas y la validación de éstas puede contribuir a que logren un aprendizaje significativo de estos teoremas. Por lo anterior, el objetivo del estudio piloto fue plantear las actividades a implementarse en el estudio final para lograr el objetivo de esta investigación.

En este primer apartado se informa sobre las primeras dos etapas del estudio piloto y se presenta la tercera etapa del estudio piloto.

Primera etapa del estudio piloto

El objetivo de la primera etapa del estudio piloto fue observar la disposición de los alumnos para trabajar en la comparación de áreas de cuadrados construidos sobre los lados de triángulos. Esta primera etapa del estudio piloto se llevó a cabo el 30 de enero de 2017.

En el apéndice C se presentan las 3 actividades propuestas a los alumnos participantes en la primera etapa del estudio piloto. Para este estudio se contó con la participación de 20 adolescentes de 16 y 17 años de edad que cursaban el cuarto semestre de bachillerato. Este estudio se realizó en una sesión de 60 minutos. Se recalcó a los alumnos que podían utilizar todos los recursos disponibles al momento de la realización de las actividades del estudio.

Se solicitó a los alumnos que dibujaran tres triángulos, cualesquiera, pero con diferente forma entre sí, y sobre los lados de cada triángulo construyeran un cuadrado cuyo lado tuviera la misma longitud que el lado del triángulo sobre el que se construyera. Posteriormente se pidió que calcularan las áreas de cada cuadrado construido, y para cada triángulo compararan la suma de dos de las áreas de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

La mayoría de los alumnos que participó en la primera etapa del estudio piloto utilizaron una regla para medir los lados inclinados de los triángulos, y posteriormente utilizaron la fórmula del área de un cuadrado: *Área del cuadrado* = *lado* × *lado*. Aun cuando los alumnos contaban con una hoja cuadriculada, no se auxiliaron de ella para calcular el área de los cuadrados, incluso la mayoría de los alumnos tuvo dificultad para construir los cuadrados sobre los lados inclinados de los triángulos; en estos casos los alumnos dibujaban algunos cuadriláteros que no eran cuadrados.

Al comparar la suma de las áreas de dos de los cuadrados pequeños con el área del tercer cuadrado lograron conjeturar que sólo en el caso del triángulo rectángulo la igualdad se tenía. Sin embargo, esto no fue suficiente para que dejaran de creer que el teorema de Pitágoras se aplicaba a todo tipo de triángulos; más aún, no fue suficiente para que algunos alumnos dejaran de considerar que el teorema de Pitágoras implicaba que “la suma de las longitudes de los lados de los catetos era igual a la longitud de la hipotenusa”.

En las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 se muestran los resultados obtenidos por uno de los alumnos participantes en la primera etapa del estudio piloto. Como se observa en la figura 3.1, para este alumno no fue suficiente la conjetura a la que llegó al comparar las áreas de los cuadrados que se pueden construir sobre los lados del triángulo rectángulo porque realizó un registro escrito erróneo de la forma algebraica del teorema de Pitágoras.

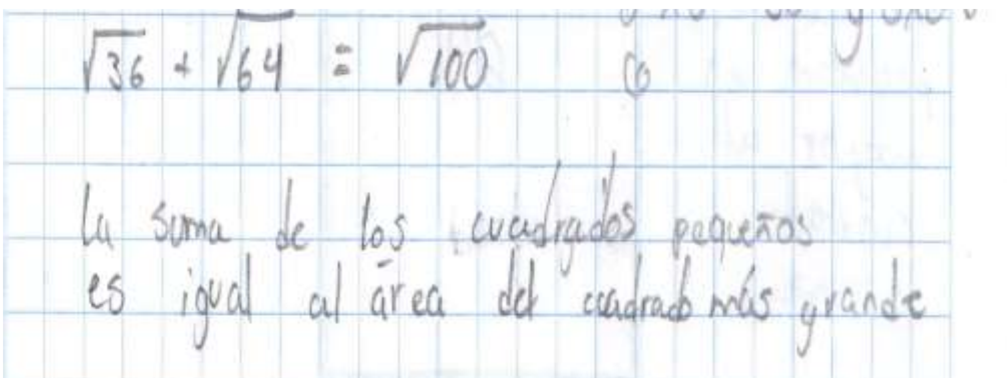


Figura 3.1. Registro escrito de la actividad I de la primera etapa del estudio piloto realizado por un alumno de bachillerato

De acuerdo con las observaciones realizadas en la primera etapa del estudio piloto se concluye que algunos alumnos, aun en su cuarto semestre de matemáticas a nivel bachillerato presentan dificultades para comprender el teorema de Pitágoras en su forma algebraica porque no tienen claro que la relación implica a los cuadrados de los lados del triángulo rectángulo y no sólo las longitudes de los lados del triángulo.

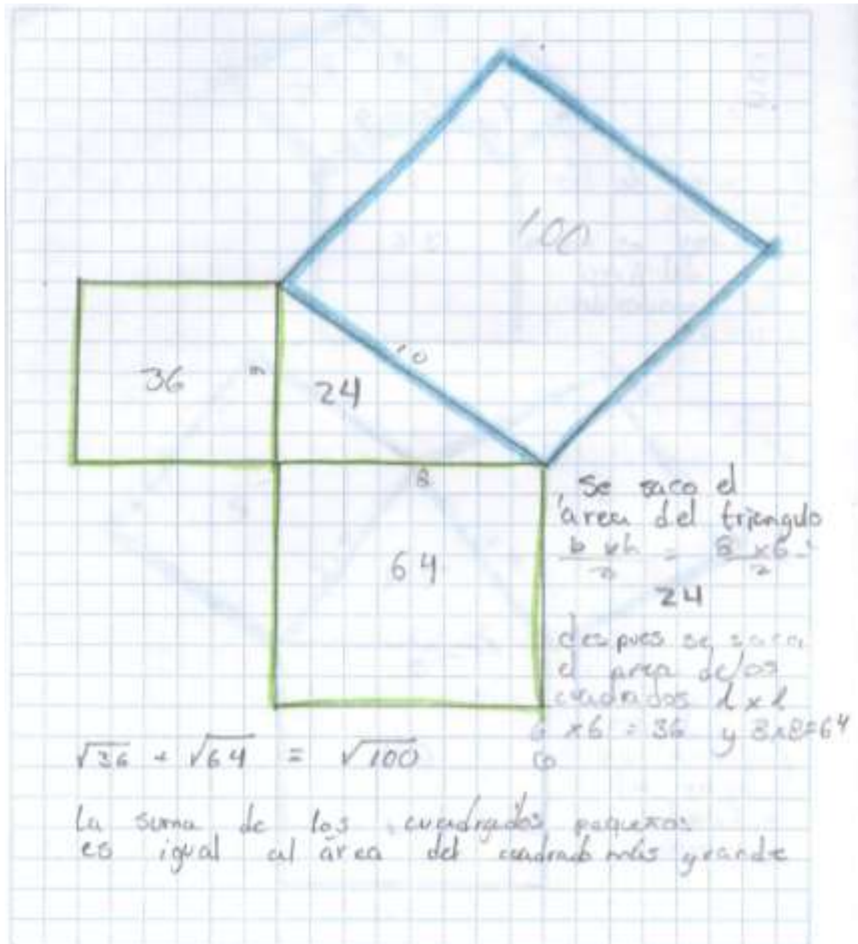


Figura 3.2. Triángulo rectángulo dibujado por un alumno de cuarto semestre de bachillerato participante en la primera etapa del estudio piloto

Es importante señalar que se podría contribuir a que esta situación no se siga propagando, si se logra propiciar un contexto adecuado para que los alumnos adquieran la forma geométrica del teorema de Pitágoras antes que su forma algebraica. Para ello se necesita que los alumnos utilicen herramientas geométricas antes de las herramientas algebraicas y que se les permita descubrir por sí mismos estos resultados matemáticos antes de que se les presenten como una fórmula o se les “den” demostraciones de los mismos.

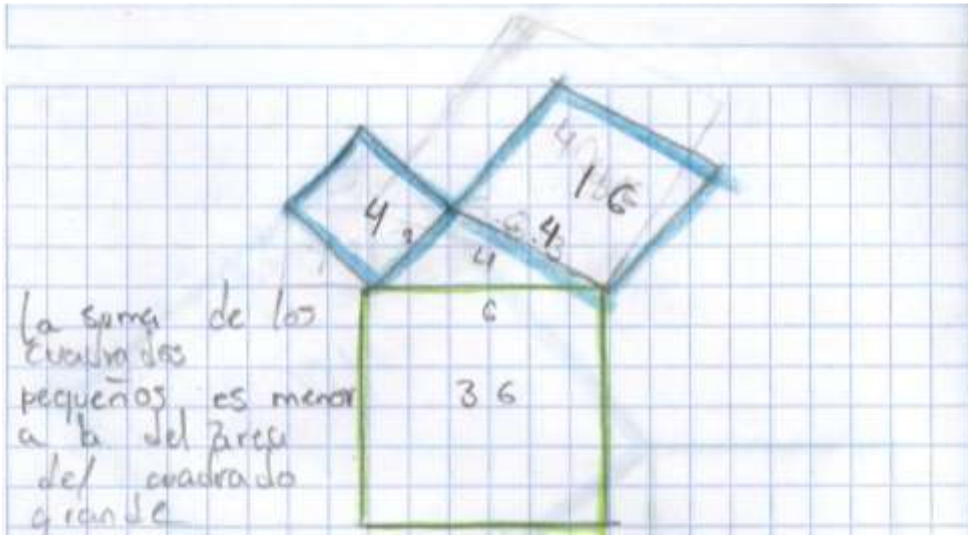


Figura 3.3. Triángulo obtusángulo dibujado por un alumno de cuarto semestre de bachillerato participante en la primera etapa del estudio piloto

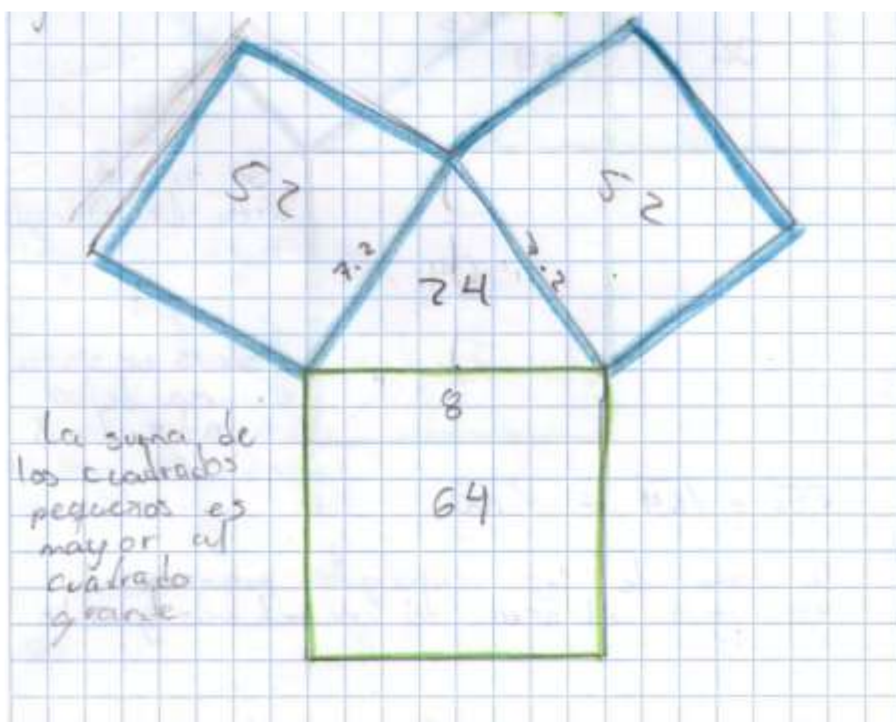


Figura 3.4. Triángulo acutángulo dibujado por un alumno de cuarto semestre de bachillerato participante en la primera etapa del estudio piloto

En la siguiente sección se presenta la segunda etapa del estudio piloto, en el cual se incluyeron las primeras actividades encaminadas para aplicarse en el estudio final, actividades para que los alumnos descubran la forma geométrica del teorema de Pitágoras, su converso, y algunos resultados correspondientes a los triángulos acutángulos y obtusángulos, a partir de la realización y validación de algunas conjeturas que se plantean al comparar las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de cada tipo de los triángulos.

Segunda etapa del estudio piloto

El objetivo de la segunda etapa del estudio piloto fue recabar información para modificar diseño y orden de las actividades propuestas para la tercera etapa del estudio piloto. El trabajo realizado en esta etapa sirvió para detectar la viabilidad de las actividades que se tenían hasta este punto, así como para determinar la necesidad de agregar otras actividades.

Se puso atención en dar claridad a las instrucciones para los alumnos, en el nivel de dificultad de cada actividad y en la pertinencia de la forma en que se presentan, así como la pertinencia de la lógica que sigue la sucesión de las actividades. Además, se observó si era pertinente que los alumnos trabajaran con hojas de papel bond cuadriculadas (hojas de cuaderno) o con un entramado impreso.

En la segunda etapa del estudio piloto participaron 18 alumnos de 16 o l7 años de edad que cursaban el cuarto semestre de la ENCCH. Se llevó a cabo del 15 de febrero de 2017 al 17 de marzo de 2017 durante 5 sesiones de trabajo: 1 sesión de 10 minutos, 3 sesiones de 50 minutos y 1 sesiones de 110 minutos. Las 5 actividades de esta segunda etapa del estudio piloto se pueden consultar en el apéndice D. Cabe mencionar que cada alumno contó con una copia impresa de las actividades I y V de esta etapa del estudio piloto, y para las actividades de la II a la IV se dictaron las instrucciones durante la sesión.

Durante la segunda etapa del estudio piloto se observó que los alumnos tenían dificultades para copiar la figura 1 en el entramado 1, a causa de que el entramado de la figura 1 y el entramado 1 no tenían las mismas dimensiones, por lo que los alumnos consideraban que la copia debía ser a escala. Por lo anterior se decidió hacer coincidir las dimensiones de los dos entramados para la tercera etapa del estudio piloto.

Otra dificultad que los alumnos presentaron en la actividad I de la segunda etapa del estudio piloto fue que no se incluían preguntas que los hicieran reflexionar sobre las unidades de longitud utilizadas, por lo que al cuestionarlos sobre las unidades de medida de área muchos de ellos informaron que habían usado los centímetros. Así que fue evidente la necesidad de incluir algunas preguntas referentes a las unidades de longitud y de superficie para que los alumnos reflexionaran acerca de ellas, y así fuera más sencillo determinar los perímetros y las áreas de algunas figuras geométricas que componían la figura 1.

Como resultado de la segunda etapa del estudio piloto se notó la importancia de marcar la diferencia entre la figura 1 y las figuras geométricas que la componen. Lo anterior se debe tomar en cuenta tanto para la presentación gráfica como escrita de la actividad. Se recomienda quitar los contornos laterales e inferior del castillo, así como agregar algunos cuadriláteros porque el trabajar con ellos les ayudará a los alumnos a la realización de actividades posteriores.

Las observaciones realizadas durante las actividades II, III y IV implementadas en la segunda etapa del estudio piloto son las siguientes.

1).- Los triángulos que los alumnos dibujaron fueron principalmente triángulos rectángulos, equiláteros o isósceles.

2).- Cuando el triángulo dibujado era un triángulo rectángulo, inmediatamente comentaban que satisfacía el teorema de Pitágoras e incluso utilizaban éste para calcular la longitud de la hipotenusa, y luego determinaban el área del cuadrado dibujado sobre ella. Si el triángulo dibujado era equilátero, el trabajo resultó más sencillo porque sólo requerían determinar el área de un cuadrado; inmediatamente se percataban de que los tres cuadrados tenían la misma área y concluían que la suma de las áreas de dos cuadrados era mayor que el área del tercer cuadrado. Los alumnos daban énfasis a que eso ocurría porque los tres cuadrados tenían la misma área.

3).- Si el triángulo dibujado era isósceles, los alumnos mencionaron que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados que tenían la misma longitud iba a ser mayor que el área del cuadrado construido sobre el tercer lado.

4).- Al trabajar tanto con triángulos equiláteros o isósceles, algunos alumnos aplicaron el teorema de Pitágoras para calcular las longitudes de los lados de los triángulos y así poder utilizar esta información para determinar las áreas de los cuadrados.

5).- Una vez realizada la actividad II de esta segunda etapa del estudio piloto, se pidió a los alumnos que dibujaran otros dos triángulos distintos al primero que habían trazado. Con estos nuevos triángulos tenían que seguir el mismo procedimiento que con el primero.

En las actividades III, IV de la segunda etapa del estudio algunos alumnos ya dibujaban triángulos acutángulos y obtusángulos, aunque no los llamaban de esta manera.

Para los triángulos acutángulos los alumnos concluían que la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños era mayor que el área del cuadrado mayor. Mientras que para los triángulos obtusángulos los alumnos concluían que la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños era menor que el área del cuadrado mayor (véanse las figuras 3.5 y 3.6). De esta manera, los alumnos ya habían logrado descubrir resultados sobre las áreas de los cuadrados dibujados sobre los lados de los triángulos acutángulos y obtusángulos, aunque no los llamaran así.

Al realizar las actividades II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto, los alumnos presentaron la misma dificultad que los alumnos participantes en la primera etapa del estudio piloto al construir los cuadrados sobre los lados de los triángulos que dibujaron. La mayoría dibujó sobre los lados del triángulo cuadriláteros que no eran cuadrados. Se observa que al permitir que los alumnos determinen el primer triángulo, tienden a dibujar triángulos rectángulos o isósceles. No usaron triángulos escalenos, y desconocían la clasificación de triángulos según sus ángulos. Les tomó mucho tiempo dibujar tres triángulos diferentes para realizar las actividades II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto. Así que fue conveniente restructurar las actividades II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto de tal manera que se proporcione a los alumnos los dos primeros triángulos y así descubran los resultados correspondientes a triángulos acutángulos y obtusángulos, y a partir de ellos conjeturar sobre el resultado correspondiente al triángulo rectángulo. También se observó la necesidad de incluir otras actividades para que los alumnos lograran enunciar las conjeturas que iban planteando, y relacionaran los resultados descubiertos con el tipo de triángulo que trabajaron.

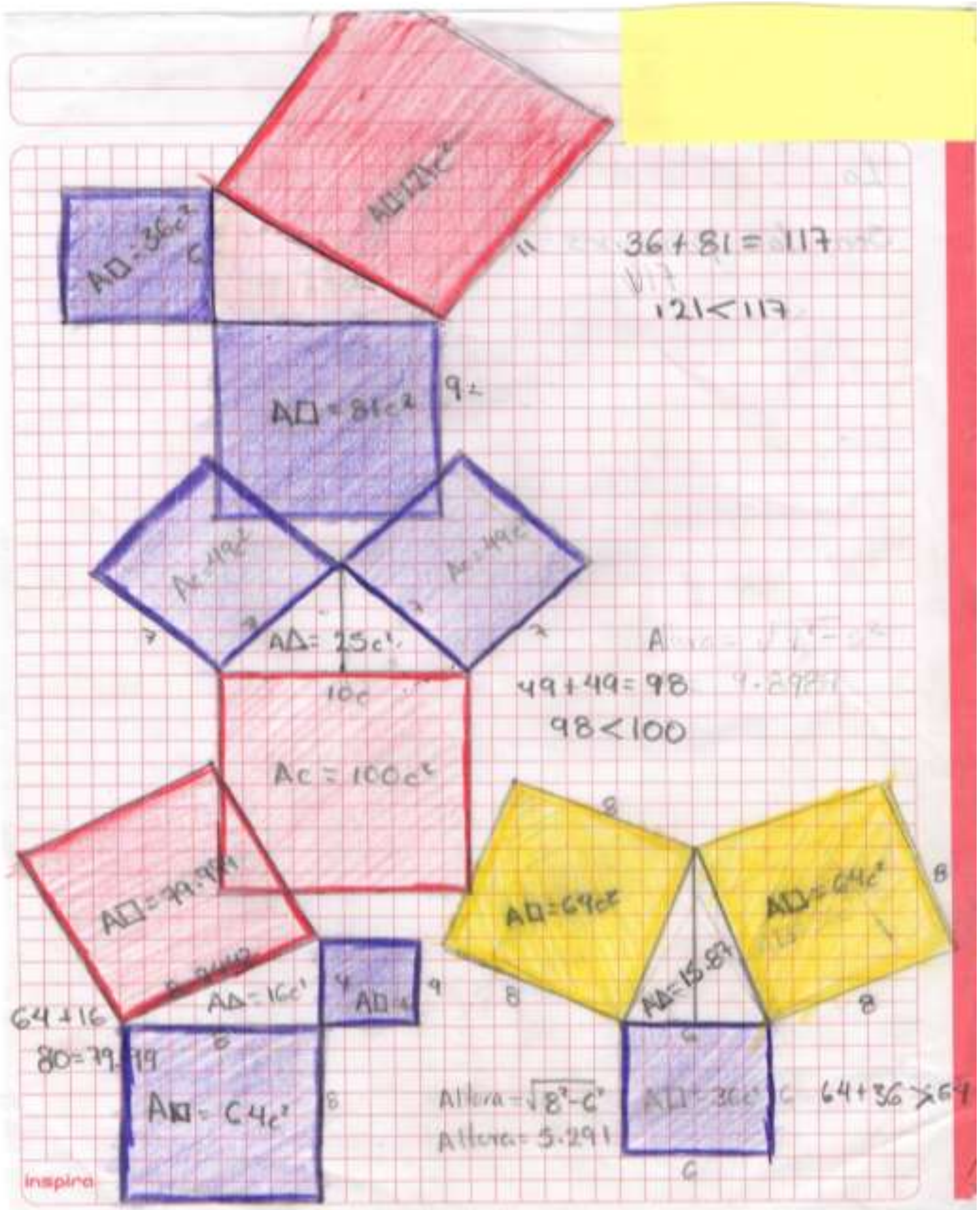


Figura 3.5. Registro de los resultados de las actividades II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto realizado por un alumno de cuarto semestre de bachillerato, obsérvese que el triángulo superior de la izquierda es un triángulo rectángulo y el alumno no logra reconocerlo y realiza un registro escrito erróneo

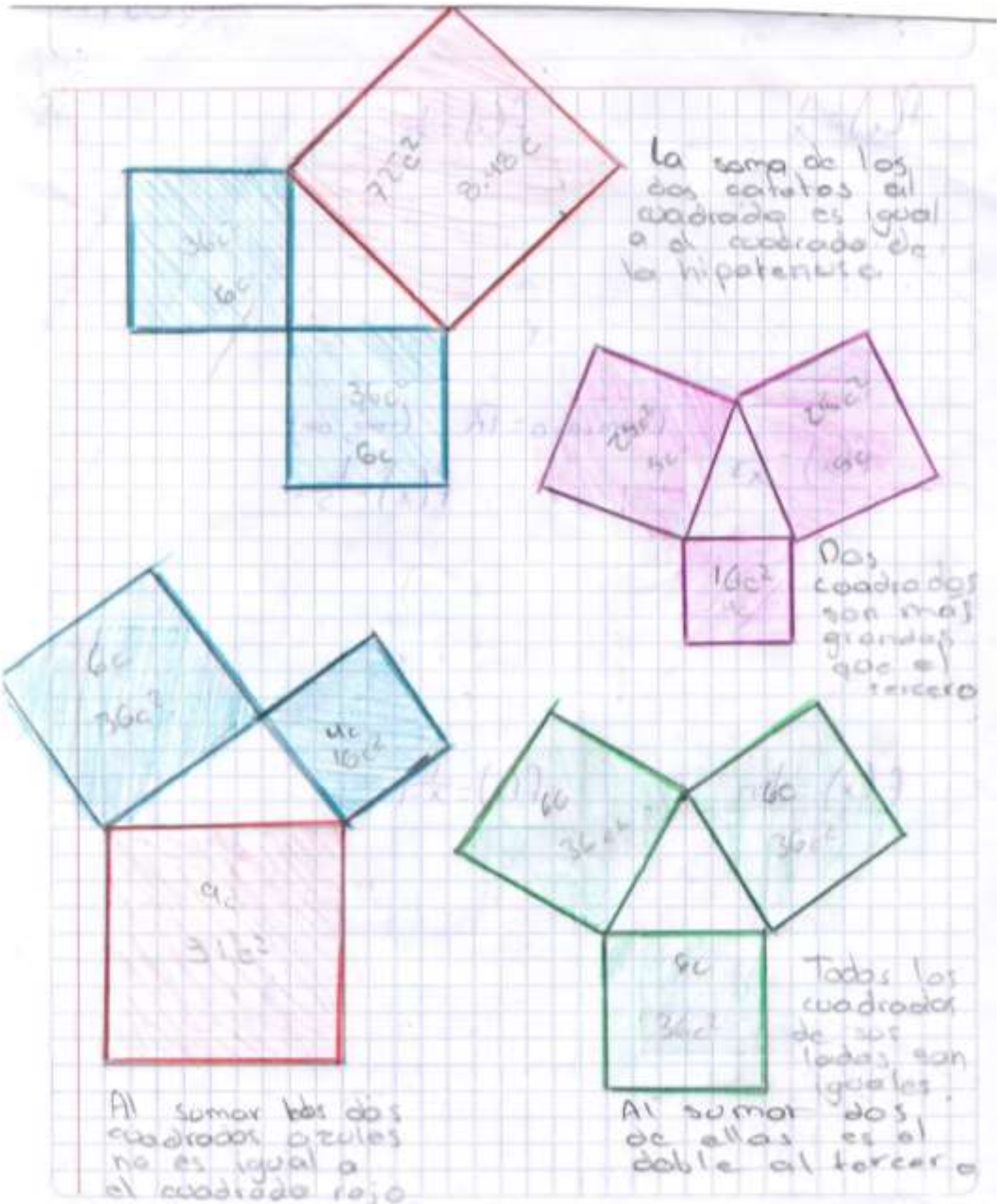


Figura 3.6. Registro de los resultados de las actividades II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto realizado por otro alumno de cuarto semestre de bachillerato

Respecto a la actividad V de la segunda etapa del estudio piloto, los alumnos no tuvieron dificultades para realizarla. Sin embargo, sólo descubrieron el converso del teorema de Pitágoras y no se preocuparon en averiguar los conversos de los resultados para los triángulos acutángulos y obtusángulos. Se consideró pertinente para la tercera etapa del estudio piloto agregar más ternas de cuadrados que se pudiesen construir sobre los lados de un triángulo acutángulo o sobre los lados de un triángulo obtusángulo, así como ternas de cuadrados que no se pudiesen construir sobre los lados de un triángulo. De esta manera los alumnos se verían en la necesidad de cuestionarse en qué condiciones una terna de cuadrados corresponde a los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo. Una actividad similar podría ayudar para que los alumnos reflexionen en qué condiciones con una terna de longitudes se puede formar un triángulo.

Se consideró conveniente agregar una actividad donde se les permitiera a los alumnos aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de aplicación, y también otra actividad donde descubrieran los conversos de los resultados obtenidos para los triángulos obtusángulos y los triángulos acutángulos.

A continuación se presentan las adecuaciones que se hicieron a las actividades I, II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto, y su restructuración para aplicarlas en la tercera etapa del estudio piloto.

Adecuaciones realizadas a la actividad I de la segunda etapa del estudio piloto.

1).- Quitar el contorno de la base inferior de la figura 1.

2).- Eliminar los trazos interiores de la estrella para evitar que los alumnos la visualicen como una figura compuesta por otras figuras, el cálculo de cuyas áreas complica la tarea.

3).- Al plantear las preguntas sobre las áreas es necesario poner énfasis en figuras geométricas específicas.

4).- Proponer una actividad para que los alumnos reflexionen sobre la unidad de medida del perímetro y la unidad de medida del área de figuras geométricas básicas contenidas en la figura 1, tomando en cuenta el entramado que se está utilizando.

5).- Es necesario que el tamaño de la figura 1 y el del entramado 1 sean iguales.

6).- Cuando se proponga a los alumnos que calculen el área del pentágono irregular de la figura 1, debe sugerírseles que exploren diversos caminos para dicho cálculo, haciendo uso del entramado; y se debe estar al pendiente de que los alumnos no intenten aplicar alguna fórmula para calcular el área de un pentágono regular.

7).- Las preguntas *1)*, *3)* y *4)* fueron ambiguas, por lo que se reformularon y se especificó con qué figuras debían trabajar los alumnos.

8).- En el caso de la pregunta *2)*, que era una pregunta muy general, se tuvo que reformular de tal manera que los alumnos tuvieran la oportunidad de reflexionar sobre el perímetro y no sólo sobre el área de las figuras geométricas incluidas en la figura que se les proporcionó porque de esta manera se presenta una oportunidad para que los alumnos recuperen o desarrollen los conocimientos previos que permitirán el trabajo con las áreas de las figuras geométricas.

9).- Finalmente, la pregunta *4)* se eliminó a causa de que se tuvo que replantear la idea del castillo con la que se comenzó el trabajo. En su lugar se pidió a los alumnos que calcularan áreas de figuras tales como el pentágono irregular, el triángulo, los rectángulos y algunos cuadriláteros.

Adecuaciones realizadas a las actividades II, III y IV de la segunda etapa del estudio piloto.

10).- Como el primer triángulo que dibujaba la mayoría de los alumnos en los dos estudios previos al estudio piloto era un triángulo rectángulo, y esto los limitaba para descubrir los resultados correspondientes a los triángulos acutángulos y obtusángulos —lo cual consideraban innecesario porque creían que el teorema de Pitágoras se aplicaba a todos los triángulos —, se decidió proporcionarles en la segunda actividad un triángulo obtusángulo y en la tercera actividad un triángulo acutángulo para que en la cuarta actividad los alumnos obtuvieran el teorema de Pitágoras.

Además, como resultado de la restructuración de las actividades de la segunda etapa del estudio piloto, se modificó la actividad V y se agregaron las actividades VI y VII para implementarse en la tercera etapa del estudio piloto. En la quinta actividad los alumnos deberán relacionar cada resultado descubierto con el tipo de triángulo con el que se trabajó utilizando la clasificación de los triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos. Y en la sexta actividad los alumnos deberán enunciar con sus propias palabras los resultados que descubrieron para cada uno de los triángulos con los que trabajaron en las actividades previas.

Finalmente, la séptima actividad estará integrada por seis problemas de aplicación, véase el apéndice E, incisos del *1)* al *6)*, para que los alumnos apliquen el teorema de Pitágoras. Además, para esta actividad también se retomaron los ejercicios de la actividad V de la segunda etapa del estudio piloto y se agregó un ejercicio donde se proporciona a los alumnos ternas que corresponden a áreas de cuadrados, y se les solicita que determinen cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo y el tipo de triángulo que se forma, véase el apéndice E, incisos del *7)* al *9)*. La última parte de la séptima actividad tiene el objetivo de que los alumnos descubran el converso de los resultados que enunciaran en la sexta actividad, véase el apéndice E, inciso *10)*.

En el siguiente apartado se presenta la tercera etapa del estudio piloto y los resultados obtenidos de éste.

Tercera etapa del estudio piloto

El objetivo de la tercera etapa del estudio piloto fue probar la viabilidad de las actividades que se tenían hasta este punto, así como determinar cómo adecuar y restructurar las actividades que ya se tenían o agregar otras para el estudio final.

A continuación se presenta una descripción de los participantes, los objetivos de cada una de las actividades elaboradas y los resultados de esta etapa del estudio piloto, así como las adecuaciones y restructuración de las 7 actividades de la tercera etapa del estudio piloto para el estudio final.

Participantes de la tercera etapa del estudio piloto

El grupo participante en la tercera etapa del estudio piloto estuvo integrado por 24 adolescentes de 16 o 17 años de edad, que cursaban la asignatura Matemáticas IV de la

ENCCH del turno vespertino del plantel Oriente. Se eligió este grupo por la disponibilidad con la que se contaba para trabajar con ellos. Además, el objetivo del trabajo con ellos fue probar la pertinencia de los instrumentos elaborados para el estudio final; por lo que no afectaba que ellos ya hubieran estudiado el teorema de Pitágoras en su curso de Matemáticas II. La tercera etapa del estudio piloto se llevó a cabo del 22 de marzo de 2017 al 21 de abril de 2017 durante 6 sesiones de trabajo: 5 sesiones de 50 minutos y 1 sesiones de 110 minutos.

Objetivos de las actividades implementadas en la tercera etapa del estudio piloto

Para la tercera etapa del estudio piloto se implementaron 7 actividades, véase el apéndice E. A continuación se presenta el objetivo de cada actividad de la tercera etapa del estudio piloto.

- El objetivo de la primera actividad de la tercera etapa del estudio piloto fue que los alumnos adquirieran los elementos básicos de geometría necesarios para realizar la segunda, tercera y cuarta actividades del estudio piloto. En esta actividad se solicitó a los alumnos que copiaran la figura 1 en el entramado 1 y que calcularan el perímetro y el área de todas las figuras geométricas que aparecen en esta figura 1.
- El objetivo de la segunda, tercera y cuarta actividades de la tercera etapa del estudio piloto fue que los alumnos descubrieran los resultados correspondientes a la primera parte de las proposiciones 12 y 13 del libro II, y la proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides.

- El objetivo de la quinta actividad de la tercera etapa del estudio piloto fue que los alumnos relacionaran los resultados obtenidos en las tres actividades previas con los tipos de triángulos con los que trabajaron.
- El objetivo de la sexta actividad de la tercera etapa del estudio piloto fue que los alumnos enunciaran los resultados que descubrieron en las actividades previas para los triángulos obtusángulos, acutángulos y rectángulos.
- La séptima actividad de la tercera etapa del estudio piloto tuvo tres objetivos: Que los alumnos *1)* aplicarán el teorema de Pitágoras en la resolución de 10 problemas; *2)* descubrieran el converso del teorema de Pitágoras y, finalmente, *3)* descubrieran el converso de la primera parte tanto de la proposición 12 como de la proposición 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides.

Para lograr el objetivo de la segunda, la tercera y la cuarta actividades, en la segunda se solicitó a los alumnos que, dado un triángulo obtusángulo construyeran sobre cada uno de los lados de este un cuadrado con la misma longitud del lado correspondiente y compararan la suma de las áreas de dos de los cuadrados construidos con el área del cuadrado restante. Para la tercera actividad se solicitó a los alumnos que, dado un triángulo acutángulo construyeran sobre cada uno de los lados de éste un cuadrado con la misma longitud del lado correspondiente y compararan la suma de las áreas de dos de los cuadrados construidos con el área del cuadrado restante. En estas actividades también se les solicitó a los alumnos que enunciaran la relación que satisfacen dichas áreas. En la cuarta actividad se les solicitó que conjeturaran sobre el tipo de triángulo para el cual la suma de las áreas de dos de los cuadrados construidos sobre sus lados era igual al área del cuadrado restante.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la tercera etapa del estudio piloto, a partir de los cuales se adecuaron algunas de las actividades para el estudio final.

Resultados de la tercera etapa estudio piloto

Los resultados que a continuación se presentan fueron importantes porque permitieron corroborar la pertinencia de las actividades o, en algunos casos, descubrir la necesidad de su adecuación o su restructuración.

Los resultados obtenidos en cada una de las 7 actividades son:

Actividad I de la tercera etapa del estudio piloto

Las observaciones realizadas son las siguientes.

1).- Al no tener el entramado de la figura 1 y el entramado 1 las mismas dimensiones, y por lo tanto no presentan la misma longitud de separación entre las filas y las columnas de puntos, se contribuyó a dificultar la realización de esta actividad.

2).- Al calcular el área del pentágono irregular de la figura 1, el profesor tuvo que sugerir a los alumnos que explorasen diversos caminos para dicho cálculo, haciendo uso del entramado; debió estar al pendiente de que los alumnos no intentaran aplicar la fórmula para el área de un polígono regular.

3).- Algunos alumnos conjeturaron que la longitud entre cada par de puntos contiguos del entramado siempre era igual a la unidad de longitud definida por ellos. Por lo anterior consideraban que la longitud de las diagonales de los cuadrados que se generaban con cuatro puntos contiguos del entramado, véase la figura 3.7, era igual a la longitud de dos puntos contiguos de una fila o una columna. Fue necesario que el profesor propiciara la reflexión grupal de esa conjetura realizada por algunos alumnos. Finalmente, los alumnos consideraron un cuadrado del entramado y copiaron con un pedazo de papel su longitud y la comparó con un lado del cuadrado, esto fue suficiente para que los alumnos corroboraran que la conjetura era falsa. Así es como los alumnos determinaron que la longitud de la diagonal de un cuadrado es mayor que la longitud de cualquiera de sus lados.

4).- En general la actividad es pertinente para que los alumnos desarrollen los conocimientos básicos de geometría plana que requerirán para la realización de las siguientes actividades.

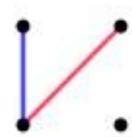


Figura 3.7. Algunos alumnos participantes en la tercera etapa del estudio piloto consideraban que el segmento azul y el segmento rojo tenían la misma longitud

Actividades II, III y IV de la tercera etapa del estudio piloto

Las observaciones realizadas son las siguientes.

1).- El texto de las actividades son comprensibles para los alumnos, y al realizarlas los alumnos lograron realizar conjeturas y las verificaron.

2).- Inmediatamente después de leer el texto de las actividades II y III de la tercera etapa del estudio piloto los alumnos mencionaron que los triángulos con los que trabajarían satisfacían el teorema de Pitágoras, incluso se referían a sus lados como catetos e hipotenusa.

3).- Los alumnos tuvieron dificultades para construir los cuadrados solicitados en las tres actividades porque no habían trabajado con cuadrados rotados, la mayoría de los alumnos dibujaron cuadriláteros que no eran cuadrados.

4).- Para calcular el área de los cuadrados los alumnos midieron las longitudes de los cuadrados considerando que la distancia entre dos puntos del entramado media 1 cm, sin embargo, esto no era cierto porque el entramado utilizado sufrió una pequeña deformación al ser adecuado a la hoja de impresión por lo que la distancia horizontal entre dos puntos del entramado no era la misma que la distancia vertical entre dos puntos del entramado.

5).- Al finalizar la actividad II y III de la tercera etapa del estudio piloto los alumnos ya comprendían que los dos triángulos con los que trabajaron eran distintos y que el primero se llamaba obtusángulo porque tenía un ángulo obtuso y los otros dos ángulos eran agudos, mientras que el segundo triángulo era un triángulo acutángulo porque tenía todos sus ángulos agudos, pero no era isósceles a pesar de que ellos así lo percibían.

6).- Como resultado de la actividad II de la tercera etapa del estudio piloto los alumnos concluyeron que en un triángulo obtusángulo la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños no cubría el área del cuadrado restante porque faltaba área.

7).- Como resultado de la actividad III de la tercera etapa del estudio piloto los alumnos concluyeron que en un triángulo acutángulo la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños cubría el área del cuadrado restante, y sobraba área.

8).- Resultó inconveniente incluir hasta la tercera actividad al triángulo acutángulo porque los alumnos hasta este momento se vieron obligados a cuestionarse sobre la creencia que tenían de que todos los triángulos tienen un lado llamado hipotenusa (el lado más largo del triángulo) y dos lados llamados catetos. Sin embargo, resultó beneficioso para los alumnos que el triángulo de la actividad III pareciera a simple vista isósceles porque los alumnos se vieron obligados a verificar esa conjetura y corroboraron que era falsa. A partir de lo anterior los alumnos ya no se fiaban de lo que percibían visualmente y comenzaron a verificar las conjeturas que iban haciendo.

9).- En la IV actividad inmediatamente los alumnos conjeturaron que el triángulo con el que se logra la igualdad de la suma de las áreas de los cuadrados pequeños con el área del tercer cuadrado era el triángulo rectángulo. Y lograron verificar su conjetura.

Actividades V y VI de la tercera etapa del estudio piloto

Con estas actividades se condujo a los alumnos a reflexionar sobre el tipo de clasificación que estaban utilizando para los triángulos; la mayoría mencionó que utilizaron la clasificación de acuerdo con los lados de un triángulo. De lo anterior surgió la pregunta de una alumna sobre si ésta era la única forma de clasificar a los triángulos, a lo que un compañero mencionó que también estaba la clasificación de acuerdo con sus ángulos, pero no se acordaba cómo era. Algunos alumnos ingresaron a internet a través de su celular y mediante *Google* localizaron la clasificación. En la segunda sesión de trabajo se retomó esta clasificación.

Los alumnos mencionaron que estas dos actividades eran repetitivas; sin embargo, motivaron a los alumnos a comenzar a escribir, algo a lo que no estaban acostumbrados y a lo que se rehusaban por no considerarlo importante para la asignatura de matemáticas. Para estas actividades se requirió mucho tiempo a causa de que los alumnos no estaban familiarizados con el dibujo de los cuadrados rotados lo cual dificultó la determinación de sus áreas. Se requirió guiar a los equipos con preguntas para hacer surgir nuevas formas de determinación de las áreas de los cuadrados. Los alumnos mencionaron que la determinación de las áreas de los cuadrados sin utilizar el teorema de Pitágoras era muy complicada.

Actividad VII de la tercera etapa del estudio piloto

Se resolvieron primero dos problemas (véase el apéndice E) tomados del libro del profesor de matemáticas de secundaria (Alarcón, 2001, pp. 228 y 229), los cuales pueden ser resueltos con trigonometría o aplicando el teorema de Pitágoras.

Los alumnos mencionaron que les resultaron sencillos y entretenidos; los abordaron únicamente utilizando el teorema de Pitágoras como una fórmula. A partir de esta experiencia se cambió el orden de los problemas de modo que los alumnos recuperaran en la resolución de los primeros problemas el uso de áreas de los cuadrados dibujados sobre los lados de los triángulos rectángulos. Para continuar con esta idea de trabajo y crearles la necesidad de utilizarlos, se propusieron los problemas 3, 4, 5 y 6 en esta tercera etapa del estudio piloto (véanse las figuras correspondientes a cada problema en el apéndice E).

Problema 3

El triángulo *ABC* es un triángulo rectángulo isósceles, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa $\overline{CB}$ es de 4.5 cm^2. ¿Cuánto mide cada uno de los catetos del triángulo?

Problema 4

¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide 10 cm?

Problema 5

El lado del cuadrado que aparece en la figura 3 tiene 4 unidades de longitud. ¿Cuánto mide el radio *R* de la circunferencia circunscrita?

Problema 6

En un cono recto de altura *h* y longitud de la generatriz *g*. ¿Cuál es la expresión del radio *r* de la base, en función de *h* y *g*?

Estos problemas permitieron trabajar el teorema de Pitágoras a partir de las áreas de cuadrados, con lo que este teorema se aplicó de manera más significativa y no únicamente como una simple fórmula.

En el problema 6 de la actividad VII de la tercera etapa del estudio piloto los alumnos tuvieron más dificultades para resolverlo porque estaban más familiarizados para trabajar con problemas con datos numéricos. La mayoría de los alumnos midieron las longitudes de las dimensiones del cono para tener los datos que consideraban necesarios para resolver el problema. Fue difícil hacer comprender a los alumnos que la respuesta correcta del problema no era un valor numérico determinado como en los primeros cinco problemas.

Se concluyó que esta serie de problemas permitía a los alumnos aplicar los resultados descubiertos sobre los triángulos rectángulos, y se observó que para que los alumnos tuvieran menos dificultades en la comprensión de los textos de los problemas era necesario hacer coincidir las dimensiones de las figuras con las dimensiones mencionadas en el texto de los problemas.

En los incisos del *7)* al *10*) de la actividad VII de la tercera etapa del estudio piloto, los alumnos obtuvieron con mucha facilidad las respuestas correctas cuando las ternas contenían las longitudes de los lados de un triángulo. Elevaron al cuadrado todos los números y ubicaron un par de estos cuadrados que al sumarlos les diera el tercer cuadrado. Comentaron que esto era lo que ya habían estado trabajando anteriormente, que estos ejercicios eran una repetición de lo realizado en las actividades anteriores y que la relación que utilizaron era el teorema de Pitágoras.

Cuando las ternas contenían las áreas de cuadrados, el procedimiento a seguir no era muy claro para los alumnos. Algunos obtuvieron el cuadrado de los datos numéricos y sumaron dos de ellos para comparar con el tercero, otros daban por hecho que todos correspondían a las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo con las longitudes iguales a los lados correspondientes con los que se construyen los cuadrados.

Se consideró necesario diseñar una actividad donde se contemple que no toda terna de longitudes o de áreas de cuadrados puede generar un triángulo.

A continuación se presenta la justificación de la modificación de algunas actividades de la tercera etapa del estudio piloto para aplicarse en el estudio final.

Adecuación y restructuración de las actividades de la tercera etapa del estudio piloto como resultado de su implementación

Adecuaciones y restructuraciones realizadas a algunas actividades de la tercera etapa del estudio piloto para aplicarse en el estudio final.

1).- Por las dificultades que tuvieron los alumnos al realizar la actividad I de la tercera etapa del estudio piloto, a causa de la diferencia entre el entramado de la figura 1 y el entramado 1, se optó por hacer coincidir las dimensiones de ambos entramados, así como la separación entre los puntos que componen las filas y las columnas de los entramados.

2).- Se decidió para el estudio final proporcionar a los alumnos las actividades II y III de la tercera etapa del estudio piloto teniendo presente que los alumnos deben reflexionar sobre el tipo de triángulo que se trabajarán en cada caso. Lo anterior porque los alumnos participantes en el estudio piloto consideraron que todos los triángulos tienen catetos e hipotenusa, y satisfacen el teorema de Pitágoras.

3).- La séptima actividad de esta tercera etapa del estudio piloto se dividió en dos actividades porque era muy extensa y esto provocaba confusión y cansancio en los alumnos. Así, la actividad VII para el estudio final incluye seis problemas cuidadosamente seleccionados con el fin de que los alumnos ubiquen el triángulo rectángulo que se requiere para resolver cada problema, mientras que la actividad VIII para el estudio final constará de cuatro incisos, con los primeros tres incisos los alumnos descubrirán el converso del teorema de Pitágoras y lo enunciaran, y con el último inciso los alumnos descubrirán el converso de la primera parte tanto de la proposición 12 como de la proposición 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides. Este último inciso constará de 10 ternas de áreas de cuadrados de las cuales los alumnos deben seleccionar aquellas que corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, cuya longitud sea igual a la del lado correspondiente del triángulo. De estas 10 ternas que se proporcionaran a los alumnos en el estudio final algunas fueron retomadas de la segunda etapa del estudio piloto y otras fueron adecuadas para que su manipulación no fuera un obstáculo para los alumnos; 2 de las ternas que se trabajaran en el estudio final no corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, 2 corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo acutángulo, 3 a los de un triángulo obtusángulo y, finalmente, 3 corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo

En el siguiente apartado se presenta el contexto del estudio final en donde se aplicaron las actividades modificadas con base en los resultados obtenidos de la tercera etapa del estudio piloto.

Estudio final

En este apartado se presenta el contexto del estudio final, sus participantes, su objetivo y su propósito, así como los objetivos y propósitos de las actividades a aplicar durante el estudio, la descripción de la forma de trabajo en cada sesión y la planeación del desarrollo de cada actividad (trabajo individual, por equipo y grupal).

Participantes del estudio final

El estudio final se realizó con un grupo regular de la asignatura de Matemáticas II de la ENCCH del turno vespertino del plantel Oriente. Este grupo estuvo integrado por 20 alumnos, con edades de 15 o 16 años. Se eligió este grupo por las facilidades ofrecidas por el profesor titular para trabajar con ellos al momento en que concluían la unidad II, Funciones cuadráticas y aplicaciones (ENCCH, 2015, pp. 37 y 38), por lo que el grupo sólo contaba con los elementos de geometría adquiridos en la secundaria. Cabe mencionar que la ventaja de realizar el estudio final al concluir la unidad II es que el programa de estudios actualizado de matemáticas II de la ENCCH contempla como Unidad 3 el estudio de Elementos básicos de geometría plana (ENCCH, 2016, pp. 39 – 42), y a la Unidad 4 Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras (ENCCH, 2016, pp. 43 – 45). En esta última unidad se presenta como antepenúltimo aprendizaje el teorema de Pitágoras y su recíproco como se puede consultar en el cuadro B.8.

En las estrategias sugeridas para el logro de los aprendizajes se indica que el profesor fomente tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo y la participación del grupo, en un escenario de resolución de problemas. El profesor propondrá usar el *software* de geometría dinámica para que el alumno visualice, descubra o conjeture propiedades y características de figuras geométricas. Resaltará la diferencia entre mostrar y demostrar; así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos. (ENCCH, 2016, p. 43)

Objetivo del estudio final

- Recabar evidencia de cómo las actividades utilizadas en el estudio final conducen a los estudiantes a descubrir el teorema de Pitágoras y otros resultados geométricos relacionados.

Propósito del estudio final

- Lograr que los alumnos de bachillerato descubran el teorema de Pitágoras y su converso (Proposiciones 47 y 48 del libro I de los *Elementos* de Euclides), así como algunas de sus generalizaciones, es decir algunos resultados para los triángulos obtusángulos y acutángulos (proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides) a partir del planteamiento de conjeturas sobre las relaciones entre las áreas de cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos obtusángulos y acutángulos. Mediante el cálculo de áreas usando un entramado cuadrado (gráfica de un geoplano), pondrán a prueba sus conjeturas. Y de forma natural surgirá en los alumnos la respuesta a la pregunta: ¿Existe algún tipo de triángulo para el cual la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre dos de sus lados es igual al área del cuadrado construido sobre el tercer lado?

Para el logro del propósito anterior se diseñaron 8 actividades, su estructura, objetivos y propósitos se abordarán enseguida.

Estructura de las actividades del estudio final

A continuación se presentan los objetivos y propósitos de cada una de las 8 actividades diseñadas para el estudio final (véase el apéndice F).

Objetivo de cada actividad del estudio final

- El objetivo de la primera actividad del estudio final fue que los alumnos adquirieran los elementos básicos de geometría necesarios para realizar la segunda, la tercera y la cuarta actividades del estudio piloto.
- El objetivo de la segunda y la tercera actividades del estudio final fue que los alumnos descubrieran los resultados correspondientes a la primera parte de las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 2015, pp. 99-102).
- El objetivo de la cuarta actividad de este estudio final fue que los alumnos descubrieran la proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 2015, pp. 74-76), es decir, el teorema de Pitágoras.
- El objetivo de la quinta actividad del estudio final fue que los alumnos relacionaran los resultados obtenidos en las tres actividades previas con los tipos de triángulos con los que trabajaron.
- El objetivo de la sexta actividad del estudio final fue que los alumnos enunciaran los resultados que descubrieron en las actividades previas para los triángulos obtusángulos, acutángulos y rectángulos.
- La actividad VII del estudio final tuvo por objetivo que los alumnos aplicaran el teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas.
- Finalmente, la actividad VIII del estudio final se divide en dos partes, la primera parte se encuentra integrada por los incisos 1, 2 y 3, cuyo objetivo fue que los alumnos descubrieran la proposición 48 del libro I de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 2015, pp. 77-78), es decir, el converso del teorema de Pitágoras; el objetivo de la segunda parte, inciso 4, fue que los alumnos descubrieran el converso de la primera parte de las

proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 2015, pp. 99-102), es decir los teoremas conversos de los resultados obtenidos para los triángulos acutángulos y obtusángulos.

Propósito de cada actividad del estudio final

En esta parte se incluye la descripción de los propósitos de cada una de las 8 actividades diseñadas para el estudio final. Algunas fueron rediseñadas de acuerdo con los resultados obtenidos en la tercera etapa del estudio piloto.

Actividad I del estudio final

- En la actividad I del estudio final los alumnos calcularán el perímetro y el área de diversas formas geométricas que aparecen en la figura 1, a partir de su elección de unidades de medida para trabajar en el entramado 1.
- Los alumnos explorarán sus propios procedimientos para calcular los perímetros y áreas. Posiblemente uno de sus procedimientos consista en descomponer las formas geométricas dadas en cuadrados o triángulos de modo que sea más fácil hacer los cálculos; se espera que este procedimiento surja como una necesidad en el alumno.

Actividad II del estudio final

- En esta actividad II del estudio final los alumnos descubrirán la primera parte de la proposición 12 del libro II de los *Elementos* de Euclides. Los alumnos construirán cuadrados sobre los lados de un triángulo obtusángulo (figura 2 del apéndice F), y elaborarán conjeturas sobre la comparación de las áreas de los dos cuadrados más pequeños, juntas, con el área del cuadrado más grande. Se espera que los alumnos se auxilien de las formas geométricas exploradas en la actividad I del estudio para determinar las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo obtusángulo que se da. También es posible que los alumnos descompongan el triángulo obtusángulo en 2 triángulos rectángulos para facilitar el cálculo de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados.

- Los alumnos observarán la desigualdad entre las áreas, es decir que con las áreas de dos de los cuadrados no se cubre el área del tercer cuadrado, hace falta área.

Actividad III del estudio final

- En esta actividad III del estudio final los alumnos descubrirán la primera parte de la proposición 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides. Los alumnos construirán cuadrados sobre los lados de un triángulo acutángulo (figura 3 del apéndice F), y elaborarán conjeturas sobre la comparación de las áreas de los dos cuadrados más pequeños, juntas, con el área del cuadrado más grande. Es posible que los alumnos se auxilien de las formas geométricas exploradas en la actividad I del estudio final para determinar las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo acutángulo que se da. También podría ser que los alumnos descompongan el triángulo acutángulo en 2 triángulos rectángulos para facilitar el cálculo de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados.
- Los alumnos observarán la desigualdad entre las áreas, es decir que sí se puede cubrir el área del cuadrado más grande con la suma de las áreas de los dos cuadrados más pequeños, y que sobra área.

Actividad IV del estudio final

- En esta actividad IV del estudio final los alumnos descubrirán la proposición 47 del libro I de los *Elementos* de Euclides, es decir, el teorema de Pitágoras. Para ello, los alumnos deben tomar en cuenta los resultados que obtuvieron en las actividades II y III del estudio final, y responder la pregunta planteada en esta actividad: que en un triángulo rectángulo se cumple que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros dos lados. Enseguida se debe pedir a los alumnos que verifiquen su respuesta mediante un ejemplo usando un entramado.

Actividad V del estudio final

- En esta actividad V del estudio final los alumnos relacionarán los resultados obtenidos en las actividades II, III y IV del estudio final con el tipo de triángulo de acuerdo con la amplitud de los ángulos. Al realizar esta actividad se tiene que enfatizar a los alumnos que deben tomar en cuenta los resultados obtenidos en las actividades II, III y IV del estudio final.

Actividad VI del estudio final

- En esta actividad VI del estudio final los alumnos enunciarán, con sus propias palabras, los resultados que descubrieron para cada uno de los triángulos con los que trabajaron: rectángulo, obtusángulo y acutángulo.

Actividad VII del estudio final

- En esta actividad VII del estudio final los alumnos aplicarán el teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas. En cada uno de estos problemas los alumnos localizarán el triángulo rectángulo que se requiere para resolver el problema; construirán los cuadrados en cada uno de sus lados, y calcularán sus áreas. Finalmente, compararán las áreas obtenidas para resolver el problema. En algunos casos es posible que no se hayan apropiado del procedimiento anterior y recurran a la aplicación del teorema de Pitágoras como una fórmula; en estos casos se espera que dicha aplicación sea más consciente y tenga más sentido para los alumnos, además de que su aplicación sea realizada correctamente.

Actividad VIII del estudio final

- Esta actividad VIII del estudio final está dividida en dos partes: la primera parte corresponde a los ejercicios *1)*, *2)* y *3)*, con los que los alumnos descubrirán el converso del teorema de Pitágoras, que es la proposición 48 del libro I de los *Elementos* de Euclides. En cada inciso del ejercicio *1)* de la actividad VIII del estudio final, los alumnos indicarán qué par de números sumados da el tercero.
- En el ejercicio *2)* de la actividad VIII del estudio final se espera que los alumnos eleven al cuadrado cada uno de los elementos de cada inciso, e indiquen qué pareja de estos cuadrados, sumados, da el cuadrado del tercero.
- En el ejercicio *3)* de la actividad VIII del estudio final los alumnos redactarán, con sus propias palabras, los fundamentos que utilizaron para realizar esta parte de la actividad.

Los alumnos enunciarán el resultado descubierto, es decir, el converso del teorema de Pitágoras.

- Finalmente, la segunda parte corresponde al ejercicio *4)* de la actividad VIII del estudio final. Los alumnos descubrirán el converso de la primera parte tanto de la proposición 12 como de la 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides, es decir los teoremas conversos de los resultados obtenidos para los triángulos acutángulos y obtusángulos.

Cuadro B.8. El teorema de Pitágoras en los programas de estudio de Matemáticas I-IV de la ENCCH

(ENCCH, 2016, pp. 43-44)

Curso	Propósito	Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Matemáticas II				
Unidad	Al finalizar, el alumno: - Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. - Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.	Reconoce y justifica el teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.	- Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación. - Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.	- El profesor hace una demostración del teorema de Pitágoras y solicita a los alumnos que investiguen otras demostraciones, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos. Además, solicita a los alumnos que construyan triángulos que satisfacen la conclusión del teorema de Pitágoras y verifiquen que son rectángulos. - El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas planteados.
4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.				

Descripción de la forma de trabajo en cada sesión del estudio final

En la primera sesión del estudio final el grupo de 20 alumnos se organizó en 5 equipo de cuatro personas, inicialmente trabajaron de forma individual cada una de las actividades y posteriormente por equipo comentaron los resultados que obtuvieron (Véanse las figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13). Cabe mencionar que en todo momento el profesor fungió como guía. Ante una duda, propició la discusión en el equipo donde surgió la duda; cuando esto no fue suficiente para su aclaración, se propició la discusión en el grupo. Si con lo anterior no se logró disipar la duda, el profesor intervino dando algunas sugerencias. En todo momento el profesor debió evitar marcarle una pauta determinada al alumno para que realice sus actividades, y debió fomentar que el alumno explorara y descubriera por sí mismo.

Al final de cada actividad cada equipo expuso los resultados de su trabajo y en plenaria discutieron dichos resultados.

Planeación del desarrollo de cada actividad del estudio final

En general cada una de las actividades del estudio final se desarrolló de acuerdo con el contenido del cuadro 3.3. Puesto que el trabajo de los alumnos fue lo más importante, el papel del profesor se debió ceñir a ser mediador del aprendizaje, fungiendo como guía y asesor.

Cuadro 3.3. Planeación que se sigue en cada una de las 8 actividades del estudio final

ACTIVIDAD		
Trabajo individual	Trabajo por equipo	Trabajo grupal
- Realización de la actividad (primera parte de la actividad de desarrollo). - Investigación de las dudas que le surjan al participante (éste puede consultar libros de texto, notas de clase, internet, etcétera).	- Discutir y contribuir a aclarar dudas surgidas en alguno de los participantes del equipo. - Comparar y discutir los resultados obtenidos en el trabajo individual (segunda parte de la actividad de desarrollo). - Presentación en plenaria de los resultados a los que llegó el equipo.	- Recordar los resultados a los que se llegó en la sesión anterior (a partir de la sesión 2, es la primera parte de la actividad de inicio). - Presentación de la actividad (segunda parte de la actividad de inicio). - Discutir y aclarar las dudas surgidas en alguno de los equipos de trabajo. - Discusión en plenaria de los resultados obtenidos por cada equipo (actividad de cierre).

Figura 3.8. Grupo participante en el estudio final, organizado en 5 equipos de cuatro alumnos

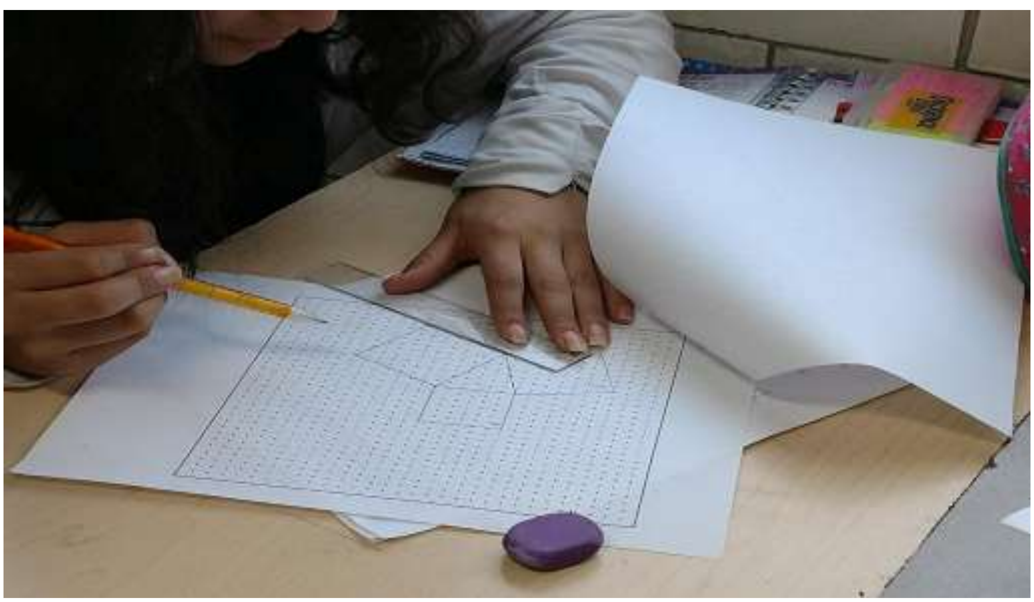


Figura 3.9. Trabajo individual de una alumna participante en el estudio final

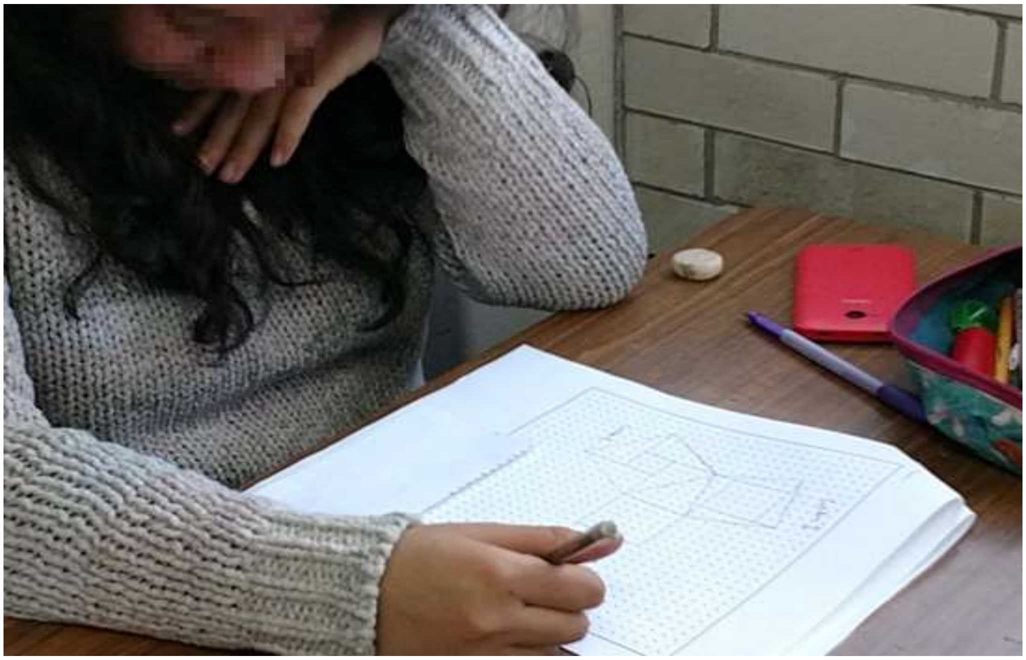


Figura 3.10. Trabajo individual de otra alumna participante en el estudio final

Figura 3.11. Trabajo individual de dos alumnas participantes en el estudio final

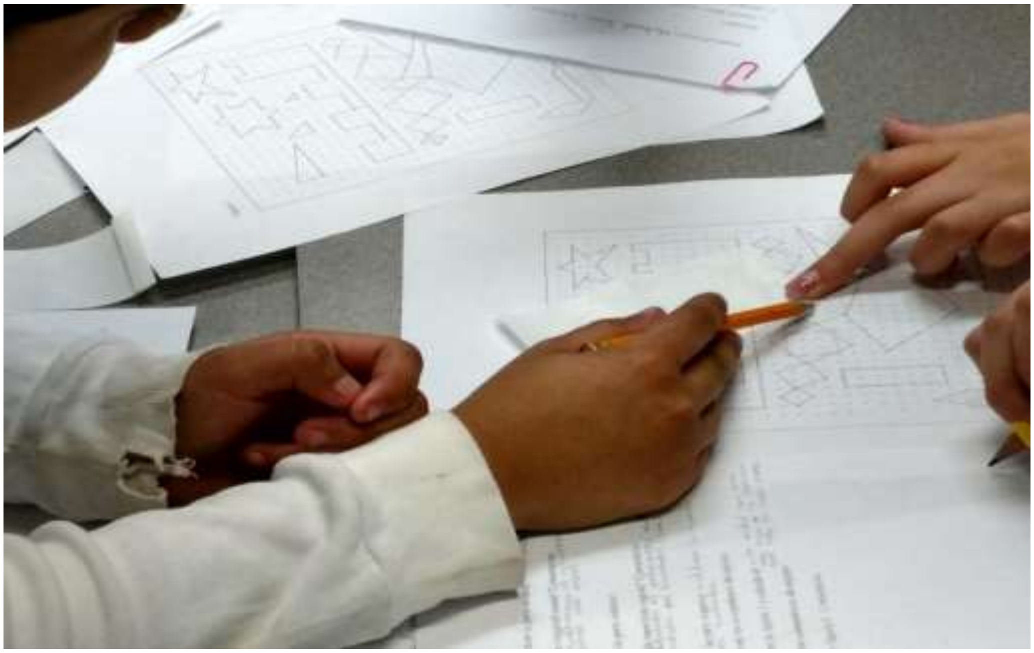


Figura 3.12. Trabajo de uno de los equipos participantes en el estudio final

Figura 3.13. Trabajo de otro de los equipos participantes en el estudio final

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL ESTUDIO FINAL

En el capítulo III se explicó por qué fue necesario modificar las actividades que realizaron los alumnos participantes en la tercera etapa del estudio piloto. Las actividades modificadas se aplicaron con un grupo de experimentación. Este grupo estaba conformado por 20 alumnos, con edades de 15 o l6 años, quienes cursaban el segundo semestre de bachillerato en el Plantel Oriente de la ENCCH en el turno vespertino. Este estudio final se llevó acabo del 8 de febrero al 16 de febrero de 2018, en 5 sesiones de trabajo.

En el cuadro 4.1 se presenta la duración de cada sesión, la distribución de las actividades por sesión, y el número de alumnos asistentes en cada sesión.

Cuadro 4.1. Distribución de las actividades por sesión, duración en minutos, y número de alumnos asistentes

Número de sesión	Duración en minutos	Actividades realizadas	Número de alumnos asistentes
1	110	I y II	19
2	50	II	18
3	110	III y IV	17
4	110	V, VI y VII	19
5	50	VIII	18

En este capítulo IV se describen los principales resultados de la investigación. El capítulo se divide en los siguientes apartados. En el primer apartado se presentan los resultados obtenidos en cada sesión, su análisis y algunos hallazgos obtenidos a partir de la observación del desarrollo de las actividades implementadas en el estudio final. En el segundo apartado se informa sobre los 6 resultados principales que descubrieron los estudiantes participantes en este estudio. En el tercer apartado se presenta un resumen del comentario realizado por el profesor titular del grupo participante en este estudio. Finalmente, en el cuarto apartado se presentan las temáticas o los aprendizajes que se consideran fueron abordados durante el estudio final.

Análisis de resultados de las cinco sesiones de trabajo del estudio final

En el presente apartado se presentan los resultados obtenidos en cada una de las 5 sesiones de trabajo, su análisis y algunos hallazgos obtenidos a partir de las observaciones realizadas durante el desarrollo de cada una de las actividades del estudio final. En el apéndice G se presentan los resultados recabados en las hojas de trabajo de las actividades de algunos alumnos participantes en este estudio.

Sesión 1 del estudio final

La primera sesión tuvo una duración de 110 minutos y a ella asistieron 19 de los 20 alumnos del grupo. En esta sesión se aplicaron las primeras 2 de las 8 actividades, con las cuales se logró que los alumnos adquirieran los elementos matemáticos básicos necesarios para descubrir el teorema de Pitágoras.

La primera actividad del estudio final consto de 6 incisos cuyo objetivo fue que los alumnos se familiarizaran con el trabajo en el entramado, definieran sus unidades de áreas y superficie, y calcularan el área de figuras conocidas para las que sí existe fórmula y para las que no existe fórmula.

La segunda actividad del estudio final consto de 5 incisos cuyo objetivo fue que los alumnos descubrieran el primer resultado correspondiente a la relación de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados del triángulo acutángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo. Durante esta primera sesión los alumnos realizaron los incisos 1 y 2 de la actividad II del estudio final, aplicando los procedimientos explorados en los incisos 5 y 6 de la actividad I de este estudio.

Actividad I del estudio final

La actividad I del estudio final consta de 6 incisos. Con el inciso 1 de esta actividad I los alumnos se familiarizaron con el trabajo en el entramado, con el inciso 2 definieron su unidad de longitud y la validaron al calcular el perímetro de un rectángulo, en el inciso 3 los alumnos definieron su unidad de superficie y la validaron al calcular el área de un rectángulo, en el inciso 4 los alumnos calcularon el área de una figura conocida para la cual sí existe fórmula: el triángulo rectángulo, en los incisos 5 y 6 los alumnos debieron explorar nuevas formas de calcular el área de figuras conocidas para las que no existe una fórmula: cuadrilátero y polígono irregular.

Inciso 1 de la actividad I del estudio final

En este primer inciso de la actividad I del estudio final se solicitó a los alumnos que copiaran la figura 1 en el entramado 1 (véase el apéndice F). Necesitaron de 50 minutos para terminar el copiado. Desde el inicio se indicó a los alumnos que para el copiado de la imagen 1 podían utilizar todo tipo de material o instrumentos que tuvieran disponibles. Los alumnos utilizaron credenciales, tarjetas del metrobús, lápices, plumas, colores, tarjetas de cartulina blancas o rayadas de tamaño 7.62 × 12.7 cm, hojas de papel, reglas y escuadras graduadas como herramientas.

La principal dificultad que tuvieron los alumnos fue no lograr ubicar la distribución correcta de las figuras geométricas en el entramado 1. Frecuentemente, al finalizar la actividad se percataban de que les sobraban puntos en alguno de los extremos del entramado, por lo que borraban y comenzaban de nuevo el copiado de la figura 1. A continuación, en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se presenta el resultado del copiado de la figura 1 (véase el apéndice F) hecho por dos alumnos y una alumna que se enfrentaron a la dificultad mencionada.

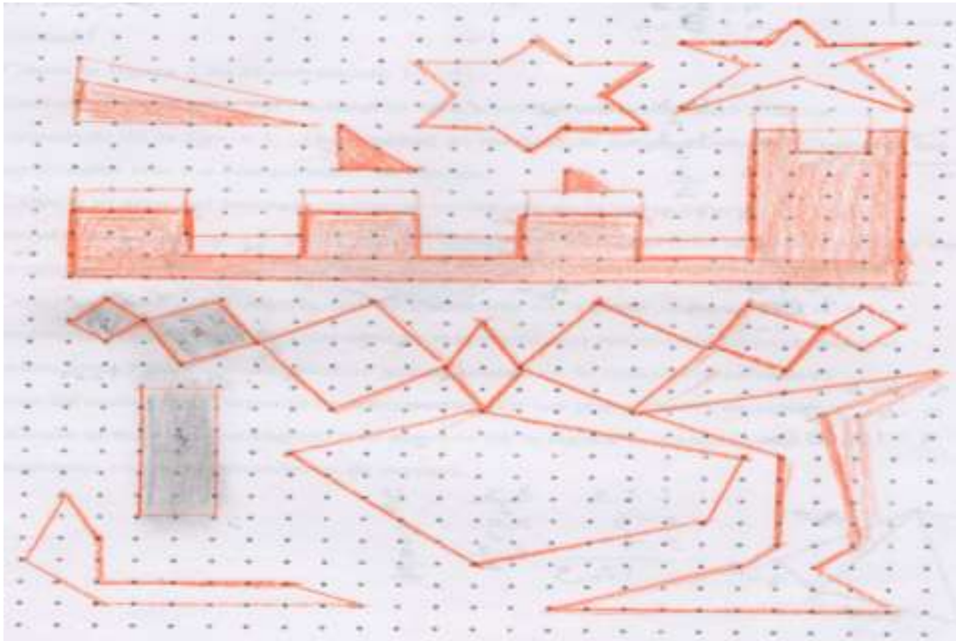


Figura 4.1. Copia de la figura 1 hecha por un alumno participante en el estudio final

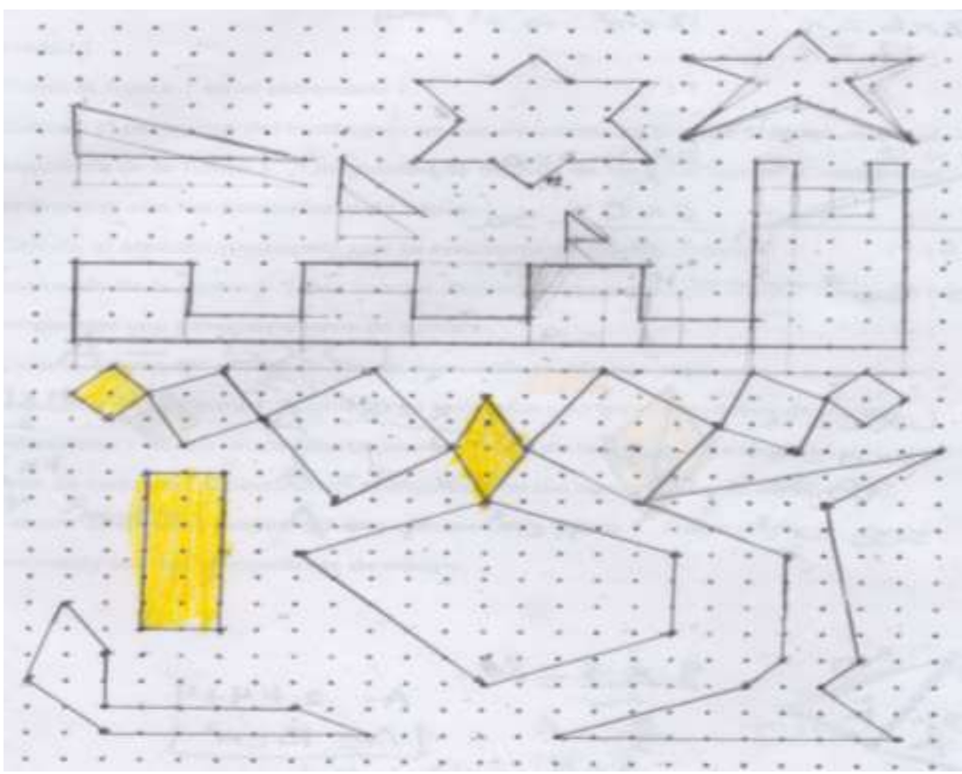


Figura 4.2. Otra copia de la figura 1 hecha por un alumno participante en el estudio final

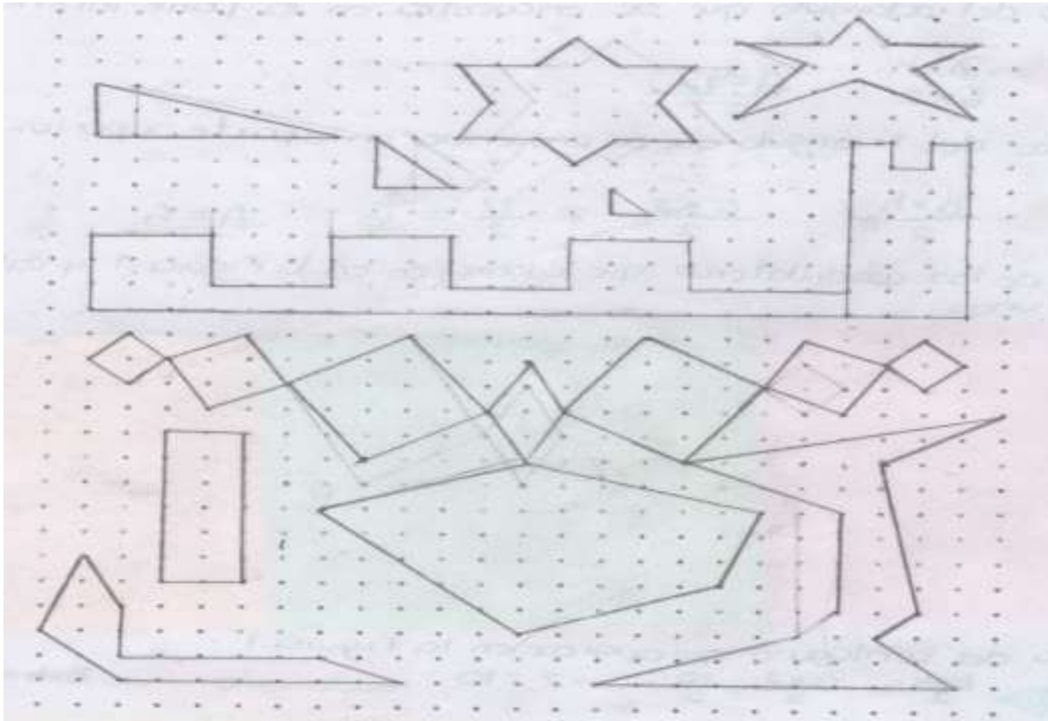


Figura 4.3. Copia de la figura 1 hecha por una alumna participante en el estudio final

Para facilitar la ubicación de las figuras geométricas en el entramado 1, algunos alumnos recurrieron a la señalización de algunos puntos que conformaban el entramado. En la figura 4.4 se presenta la copia de un alumno quien, para señalar los puntos de la primera columna, utilizó números y para señalar los puntos de la primera fila, utilizó letras.

Los alumnos lograron copiar con éxito la figura 1, poco a poco fueron desarrollando una estrategia para que el copiado fuera más eficiente. Su estrategia consistió en visualizar triángulos para ubicar los lados de la mayoría de los elementos que componen la figura 1.

Los alumnos se mostraron molestos porque consideraron que esta actividad era muy sencilla y rutinaria. Inicialmente tuvieron problemas para ubicar los elementos de la figura 1 en el entramado 1.

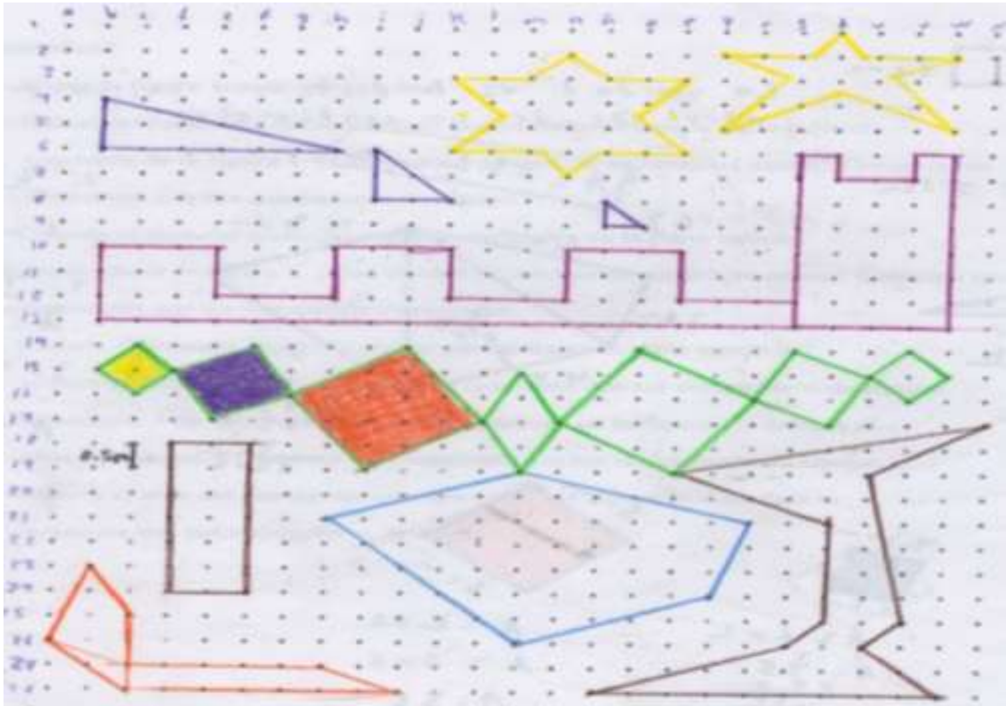


Figura 4.4. Copia de la figura 1 de un alumno participante en el estudio final que utilizó números y letras para señalar algunos puntos del entramado

Una vez que los alumnos se familiarizaron con el trabajo en el entramado, estuvieron listos para definir sus unidades de medida de longitud y superficie, lo cual se presenta en el siguiente inciso.

Inciso 2 de la actividad I del estudio final

En este segundo inciso de la actividad I del estudio final, se pidió a los alumnos que calcularan el perímetro del rectángulo contenido en la figura 1, y que indicaran la unidad de medida de longitud utilizada.

Para ubicar el rectángulo indicado, 80% de los alumnos utilizaron la copia que habían hecho. Las unidades de medida utilizadas fueron las siguientes.

a).- 1 unidad de longitud: la longitud en línea recta que hay entre dos puntos contiguos (véase la figura 4.5).

Figura 4.5. Disposición de 2 puntos contiguos de la trama, la longitud de cuya separación en línea recta se toma como unidad de longitud

Con esta unidad, el perímetro del rectángulo es de 16 unidades.

b).- 1 cm: la longitud en línea recta que hay entre dos puntos contiguos (véase la figura 4.6).

Figura 4.6. Disposición de 2 puntos de la trama, la longitud de cuya separación en línea recta se toma como unidad de longitud igual a 1 cm

En este caso, el perímetro fue de 16 cm. Cabe mencionar que los equipos que propusieron esta unidad de medida no contaban con una regla graduada; así que propusieron su unidad de medida al tanteo.

c).- 1 unidad de longitud: un punto sobre el entramado.

Con esta "unidad" el equipo obtuvo que el perímetro del rectángulo era de 16 puntos.

Cabe mencionar que es incorrecta esta propuesta de unidad de longitud; se decidió dejar que el equipo continuara con su trabajo para que por sí mismos se dieran cuenta del error.

Al finalizar este inciso 2 de la actividad I de este estudio la mayoría de los alumnos tuvo establecida una unidad de medida de longitud, adecuada, la cual permitió abordar con éxito las actividades posteriores. Los alumnos que plantearon una unidad de longitud errónea no fueron conscientes de esto. Para que los alumnos validaran sus unidades de longitud y definieran sus unidades de superficie, se les propuso calcular el área de una figura conocida en el siguiente inciso.

Inciso 3 de la actividad I del estudio final

En el tercer inciso de la actividad I del estudio final, los alumnos debían calcular el área del rectángulo contenido en la figura 1 e indicar la unidad de medida de superficie utilizada.

Algunos alumnos que utilizaron como unidad de medida de longitud la del inciso *a)* obtuvieron como área del rectángulo 12 unidades cuadradas. La unidad de superficie que utilizaron fue el área encerrada entre cuatro puntos de la trama dispuestos como se muestra en la figura 4.7.

De manera similar, algunos alumnos que utilizaron como unidad de medida de longitud la del inciso *b)* obtuvieron que el área del rectángulo era de 12 cm^2. La unidad de superficie utilizada fue el área encerrada entre cuatro puntos de la trama dispuestos como se muestra en la figura 4.8.

Figura 4.7. Disposición de 4 puntos de la trama, cuya área encerrada representa 1 unidad cuadrada

Figura 4.8. Disposición de 4 puntos de la trama, cuya área encerrada representa la unidad de superficie 1 cm^2

El resto de los alumnos calculó el área del rectángulo con la fórmula $A = b \times h$, siendo b la longitud de la base y h la de la altura del rectángulo. En este caso el área obtenida fue de 12 unidades cuadrada o 12 cm^2, dependiendo de la unidad de longitud que los alumnos hubieran utilizado.

Al aplicar la fórmula

$$\textit{Área del rectángulo} = \textit{base} \times \textit{altura} \text{ o } A = b \times h$$

para calcular el área indicada, los alumnos que utilizaban como unidad de medida de longitud la del inciso *c)* se percataron de que algo estaba mal porque obtenían que

$$A = 7 \times 3 = 21 \text{ “puntos cuadrados”}.$$

Al analizar su procedimiento, los alumnos que se basaron en el inciso *c)* se dieron cuenta de que estaban contando dos veces algunos puntos (vértices del rectángulo). Ante esta situación, un alumno comentó que al contar los puntos que se encontraban en los lados del rectángulo no se estaba calculando la longitud del lado del rectángulo, pues faltaba determinar la longitud que existía entre cada par de puntos. Otro alumno sugirió al equipo utilizar como unidad de medida de longitud 1 cm porque correspondía aproximadamente a la distancia entre dos puntos contiguos (véase la figura 4.6). Con esta nueva propuesta de unidad de medida de longitud y con la fórmula para calcular el área de un rectángulo, los alumnos obtuvieron que

$$A = 6 \times 2 = 12 \text{ cm}^2.$$

En el inciso 3 de la actividad I del estudio final fue importante que la figura con la que trabajaran fuera el rectángulo, pues al resultar sencilla la forma de calcular su área los alumnos lograron poner a prueba la unidad de longitud propuesta. Los alumnos que habían definido incorrectamente la unidad de longitud tuvieron tiempo para analizar su pertinencia y redefinirla.

Al concluir el inciso 3 de la actividad I del estudio final los alumnos contaban con una unidad de superficie adecuada. Los alumnos que redefinieron su unidad de longitud se mostraron sorprendidos de haber cometido ese error y su interés en la actividad aumentó.

La mayoría de los alumnos consideró que esta actividad era muy sencilla y no representaba un reto; por lo mismo, estaban molestos. Era el momento de que los alumnos determinaran la superficie de figuras conocidas; dicho trabajo se presenta en el siguiente inciso.

Inciso 4 de la actividad I del estudio final

En este cuarto inciso de la actividad I del estudio final, se solicitó a los alumnos que calcularan el área del triángulo localizado en la parte superior izquierda de la figura 1 (véase el apéndice F).

Los alumnos tuvieron problemas para ubicar el triángulo indicado a causa de la frase "la parte superior izquierda de la figura 1". Una vez ubicado el triángulo, los alumnos no tuvieron problemas para calcular su área.

A continuación se presentan los distintos procedimientos que usaron los alumnos para calcular el área del triángulo indicado en este inciso 4 de la actividad I de este estudio.

La mayoría de los alumnos determinó la longitud de la base y la de la altura del triángulo y aplicó la fórmula

$$\textit{Área del triángulo} = \frac{base \times altura}{2}\text{, o bien } A = \frac{b \times h}{2}\ ,$$

siendo b la base y h la altura del triángulo. De esta manera, el área obtenida fue de 6 unidades cuadradas o 6 cm^2, dependiendo de la unidad de longitud utilizada.

Sólo dos alumnos intentaron contar las unidades de superficie que establecieron en el inciso *3)* de la actividad I, pero se encontraron con que en el lado más largo del triángulo no se podían dibujar cuadrados completos. Ante este hecho y percatándose de que era más sencillo calcular la longitud de dos de los lados del triángulo, es decir la base y la altura, optaron por aplicar la fórmula para calcular el área de un triángulo.

Ninguno de los equipos pudo visualizar que se podía completar el rectángulo del cual el triángulo dado era la mitad de su área. En este inciso 4 de la actividad I del estudio final los alumnos utilizaron la fórmula de manera automática para calcular el área de un triángulo porque así podían evadir la problemática de que la superficie del triángulo no estuviera constituida de cuadrados completos del entramado.

Los alumnos siguieron molestos porque consideraron que el ejercicio era muy sencillo; cuando se les pidió que reflexionaran sobre otra forma de calcular la superficie del triángulo, se resistieron.

En el siguiente inciso se presenta el trabajo realizado por los alumnos que provocó que surgiera de forma natural la exploración de nuevos procedimientos para determinar la superficie de las figuras geométricas con las que trabajaron.

Inciso 5 de la actividad I del estudio final

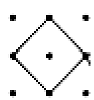
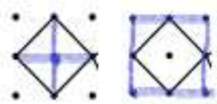
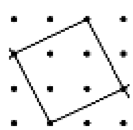
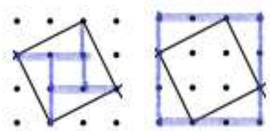
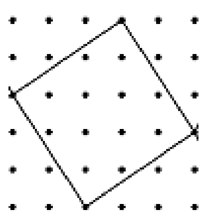
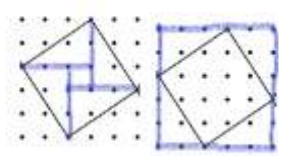
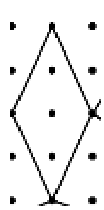
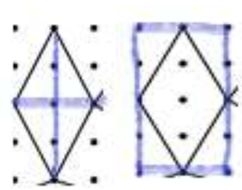
En este quinto inciso de la actividad I del estudio final, se pidió a los alumnos que seleccionaran 3 cuadriláteros contenidos en la figura 1 (véase el apéndice F) y que calcularan el área de cada uno.

Ningún alumno tuvo problemas con el término cuadrilátero. Mencionaron que se trataba de una figura cerrada de cuatro lados. La mayoría de los alumnos inmediatamente concluyó que bastaba con seleccionar sólo 2 cuadriláteros porque el tercer cuadrilátero sería el rectángulo con el que se trabajó en el inciso 2 de la actividad I del estudio final.

En el cuadro 4.2 se presentan los cuadriláteros que seleccionó la mayoría de los alumnos, los principales procesos que siguieron para determinar su área, y el valor de ésta.

Con este trabajo los alumnos se hicieron conscientes de que la forma de copiar una figura en el entramado podía ser utilizada para determinar la superficie de una figura geométrica. Algunos alumnos lograron recuperar la estrategia que utilizaron para ubicar los lados de las figuras 1 del inciso 1 para visualizar que la superficie de algunas de las figuras se podía descomponer en triángulos, rectángulos y cuadrados.

Cuadro 4.2. Cuadriláteros seleccionados por los alumnos de bachillerato participantes en el estudio final, procedimientos que siguieron para determinar su área, y el valor de ésta

Imagen del cuadrilátero	Procedimiento de los alumnos para calcular el área	Área obtenida por los alumnos (dependiendo de la unidad de longitud empleada)
		2 cm^2 o 2 unidades cuadradas
		5 cm^2 o 5 unidades cuadradas
		13 cm^2 o 13 unidades cuadradas
		4 cm^2 o 4 unidades cuadradas

Inicialmente los alumnos tuvieron dificultad para calcular el área de los cuadriláteros que se encontraban rotados (o inclinados) porque no habían trabajado con este tipo de prototipos. A los alumnos les era más sencillo calcular el área de los cuadriláteros cuando formaban con él un rectángulo que lo contuviera y le restaban los cuatro triángulos rectángulos externos al cuadrilátero rotado, o inclinado (véase la segunda columna del cuadro 4.2). Tuvieron muchas dificultades para imaginar que podían dibujar figuras auxiliares como triángulos y cuadrados en el cuadrado original.

Al no tener una fórmula para calcular el área de los cuadriláteros rotados (o inclinados), los alumnos se interesaron más en el inciso 5, no ofrecieron resistencia, ya que de forma natural surgió la necesidad de explorar nuevas formas de calcular el área de los cuadriláteros rotados (o inclinados).

Los alumnos comenzaban a considerar que existen figuras geométricas para las cuales no se tiene una fórmula para calcular su área, lo cual reafirmaron al realizar las actividades del inciso 6 de la actividad I del estudio final.

Inciso 6 de la actividad I del estudio final

En este sexto inciso de la actividad I del estudio final, los alumnos debían calcular el área del pentágono contenido en la figura 1. Inicialmente, intentaron recordar la fórmula para calcular el área de un pentágono regular para aplicarla en este ejercicio.

Cuando se cuestionó a los alumnos si la fórmula de área que recordaron era válida para cualquier tipo de polígono, algunos alumnos mencionaron que sólo era válida para polígonos regulares. Enseguida consultaron en internet y se enteraron de que no existía fórmula para el área de un polígono irregular. En este momento los alumnos desistieron de aplicar la fórmula de área para polígonos regulares a su polígono irregular, y comenzaron a considerar formas alternativas para calcular el área del polígono irregular dado.

Pocos alumnos obtuvieron una aproximación del área del polígono irregular contando el número de unidades cuadradas contenidas en el polígono dado (véase la figura 4.9).

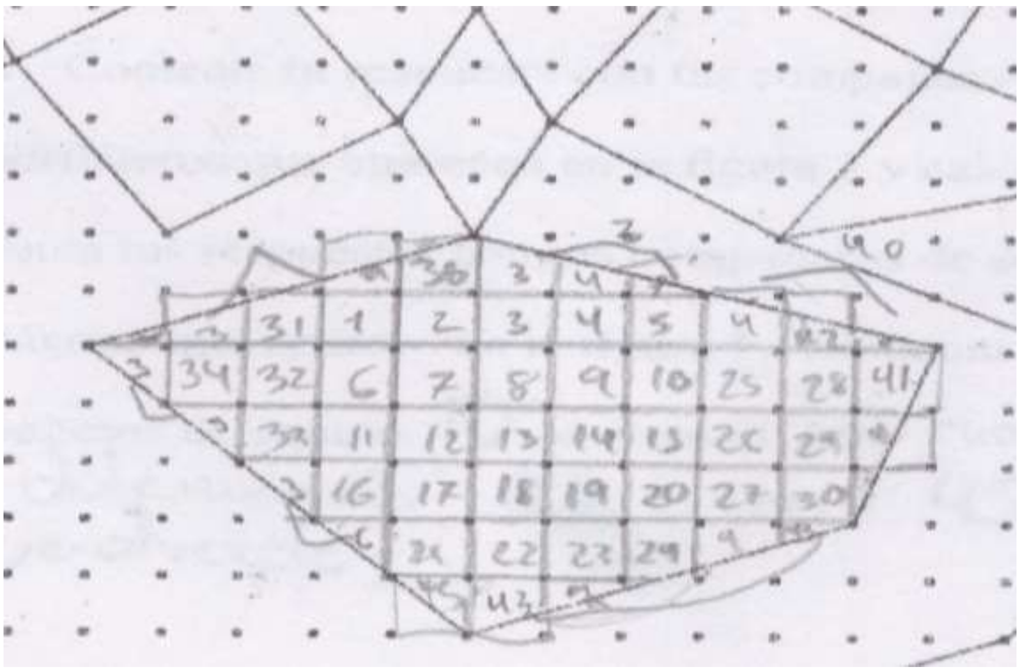


Figura 4.9. Descomposición del polígono irregular en cuadrados unitarios para la aproximación de su área

Otros alumnos dividieron el pentágono irregular en figuras geométricas para las cuales sabían calcular sus áreas (véase la figura 4.10).

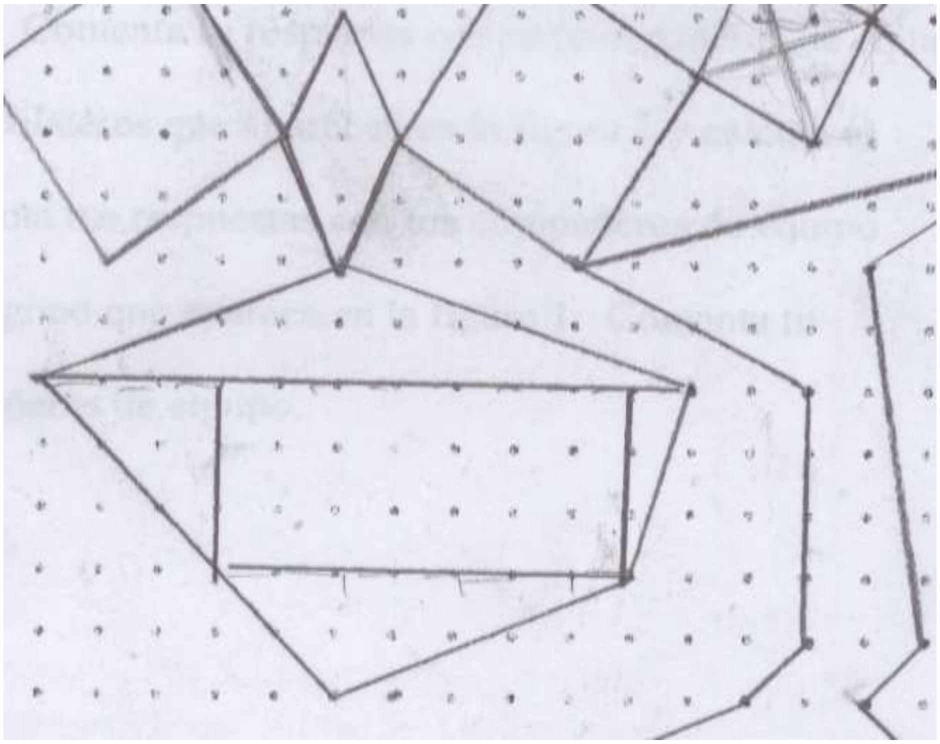


Figura 4.10. Pentágono irregular descompuesto en 4 triángulos y 1 rectángulo

La mayoría de los alumnos optó por dividir el pentágono irregular en 3 triángulos, y construyó una regla graduada con hojas de papel o tarjetas de cartulina blancas o rayadas de tamaño 7.62 × 12.7 cm (que los alumnos usan para hacer fichas bibliográficas), usando como unidad de medida 1cm = la longitud en línea recta entre dos puntos contiguos. Posteriormente aplicaron la fórmula para el área de un triángulo, como se muestra en la figura 4.11.

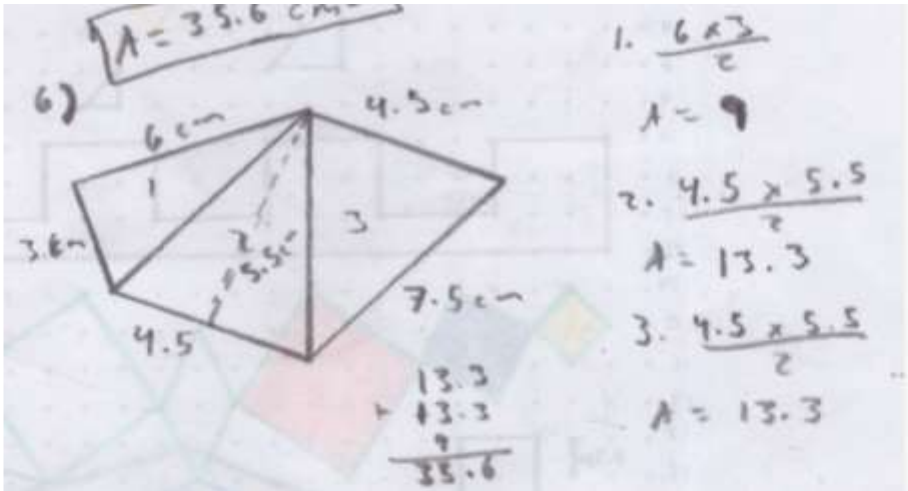


Figura 4.11. Triangulación de un pentágono irregular

El resto de los alumnos dibujó un rectángulo a manera de que contuviera al polígono irregular, y 4 de sus vértices se localizaran sobre los lados del rectángulo; con el área del rectángulo que no correspondía al polígono regular construyeron figuras geométricas para las cuales sabían calcular sus áreas (véase la figura 4.12).

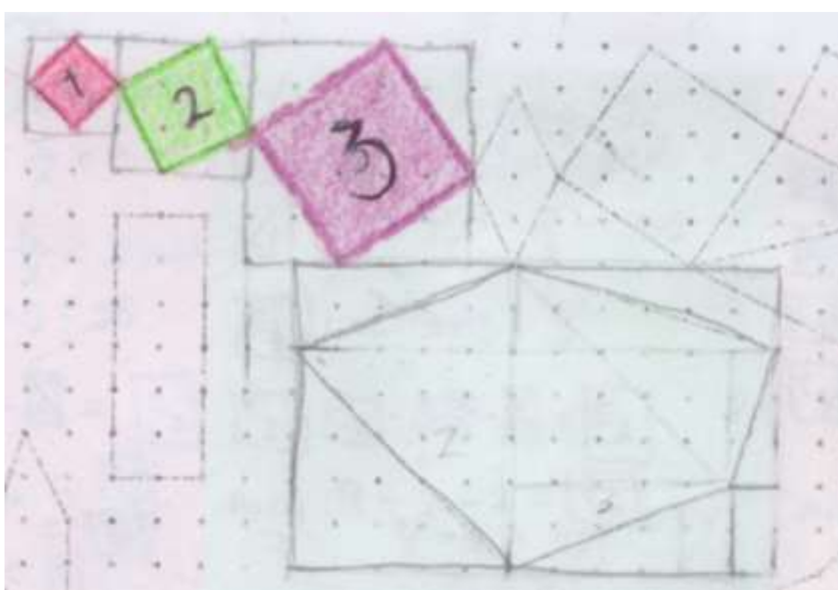


Figura 4.12. Rectángulo que contiene al pentágono irregular

Los alumnos se inclinaron por triangular el polígono irregular para determinar su área porque para calcular el área de los triángulos sí contaban con una fórmula. La renuencia de explorar otras formas de calcular el área del polígono residía en que se les dificultaba dibujar figuras geométricas auxiliares, al interior o al exterior del polígono, para las que sí conocieran su fórmula de área (véanse las figuras 4.10 y 4.12).

Este inciso causó mucha molestia en los alumnos porque no podían aplicar la fórmula del área de un polígono regular, lo cual les generó un *conflicto cognitivo*. Este ejercicio permitió a los alumnos explorar nuevos procedimientos para calcular el área de figuras rotadas o para las que no existe fórmula de área.

Hasta aquí los alumnos ya se encontraban familiarizados con el uso del entramado y ya contaban con las herramientas necesarias para descubrir algunos resultados correspondientes a los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos (actividades II, III y IV del estudio final).

Actividad II del estudio final

Con esta actividad II del estudio final los alumnos descubrieron la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo obtusángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo. Esta actividad consto de 5 incisos con los cuales los alumnos elaboraron conjeturas acerca de la relación de las áreas de los cuadrados que se construyan, y las verificaron.

Inciso 1 de la actividad II del estudio final

En el inciso1 de la actividad II del estudio final se proporcionó a los alumnos un entramado con un triángulo obtusángulo dibujado (véase la figura 2 en el apéndice F) y se les solicitó que construyeran un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo, de modo que el lado de cada cuadrado fuese el mismo que el lado correspondiente del triángulo.

Al inicio de esta actividad varios alumnos mencionaron que este triángulo era un triángulo rectángulo, por lo que conjeturaron que satisfacía el teorema de Pitágoras. Se decidió continuar con la actividad para permitir a los alumnos que verificaran la conjetura realizada.

Posteriormente, al construir los cuadrados sobre cada uno de los lados del triángulo, los alumnos presentaron dificultad porque los tres cuadrados que tenían que dibujar debían estar rotados (o inclinados).

En este inciso los alumnos tuvieron dificultades porque dibujaban cuadriláteros que no eran cuadrados. De los alumnos que realizaron la actividad, 15 construyeron cuadriláteros, en su mayoría rectángulos y polígonos no regulares, pero no cuadrados. Posiblemente fue a causa de que no tomaban en cuenta las características de los cuadrados.

Fue necesario cuestionarlos sobre las características que tienen los cuadrados y si sus dibujos las satisfacían. Los alumnos mencionaron lo siguiente.

1).- Los cuadrados deben tener dos pares de lados paralelos e iguales.

2).- Los cuadrados tienen todos sus lados de igual longitud.

3).- Los cuadrados tienen todos sus lados de la misma medida, pero en su interior se forman ángulos de 90°.

4).- Los cuadrados tienen todos sus lados de la misma medida, pero al interceptarse dos de sus lados se forman ángulos de 90°.

Posteriormente los alumnos se dieron cuenta de que lo que habían dibujado no eran cuadrados, y fue entonces que surgieron las siguientes preguntas por parte de un par de alumnos: ¿Las esquinas de los cuadrados se pueden poner donde sea? ¿En cualquier parte del entramado? Cuando se les cuestionó a qué se referían, ellos agregaron: "Sí, podemos dibujarla en la parte blanca del entramado" (lo anterior hacía referencia al espacio entre puntos del entramado). Fue entonces que otro de los alumnos que sí había dibujado cuadrados mencionó que al dibujar bien los cuadrados sus esquinas caen exactamente en cuatro puntos del entramado.

Después de esto los alumnos corrigieron su actividad y dibujaron los cuadrados que se les había solicitado en este inciso 1 de la actividad II del estudio final (véase la figura 4.13). Las dificultades presentadas por los alumnos al desarrollar la actividad II del estudio final fueron a causa de que los tres cuadrados construidos sobre el triángulo obtusángulo debían estar rotados (o inclinados), por lo que les costó trabajo visualizar que aun cuando los lados del triángulo se encontraban inclinados se podían construir cuadrados sobre ellos.

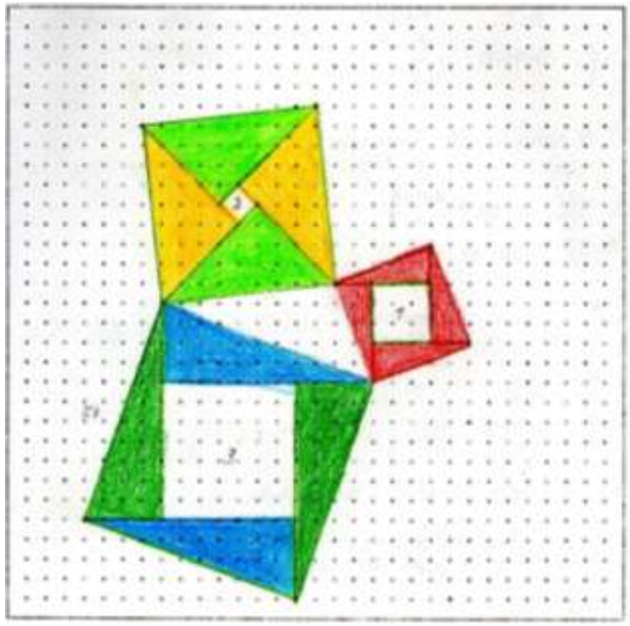


Figura 4.13. Construcción de los cuadrados sobre los lados del triángulo obtusángulo, realizado por un alumno participante en el estudio final

Una vez que los alumnos habían construido los cuadrados correctamente, procedieron a calcular el área de cada uno de éstos. Los resultados de este trabajo se presentan a continuación.

Inciso 2 de la actividad II del estudio final

En el inciso 2 de la actividad II del estudio final, se pidió a los alumnos que calcularan el área de cada uno de los cuadrados construidos en el inciso 1 de esta actividad II del estudio final. Los procedimientos que siguieron son:

1).- Medir los lados con regla graduada o con un instrumento de medición fabricado por ellos, y aplicar la fórmula para el área de un cuadrado.

2).- Dividir el cuadrado construido en cuatro triángulos y un cuadrado, y después calcular las áreas de estas figuras utilizando las fórmulas para el área de un cuadrado y de un triángulo:

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{b \times h}{2} \text{ y Área de un cuadrado} = l \times l.$$

3).- Circunscribir un cuadrado, calcular su área y restarle el área de los cuatro triángulos rectángulos sobrantes.

Los alumnos prefirieron aplicar las fórmulas del área del cuadrado y del triángulo para calcular el área de los cuadrados construidos en el inciso 1 antes que explorar la utilización de figuras geométricas auxiliares dentro o fuera de los cuadrados, pues estaban más familiarizados con la aplicación de las fórmulas de área.

De los alumnos que realizaron la actividad, 12 obtuvieron las áreas correctas de los tres cuadrados: 137, 82 y 29 unidades cuadradas. Los demás realizaron aproximaciones de las áreas utilizando un procedimiento correcto pero las medidas de las longitudes no fueron precisas.

Los resultados anteriores no fueron obstáculo para que los alumnos realizaran el trabajo de los incisos que seguían, como se reporta a continuación.

Sesión 2 del estudio final

La segunda sesión tuvo una duración de 50 minutos y a ella asistieron 18 de los 20 alumnos del grupo. En esta sesión se continuó con el desarrollo de la actividad II, se realizaron los incisos 3, 4 y 5. Hasta este punto los alumnos ya habían determinado las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados del triángulo obtusángulo. A continuación se reportan los resultados obtenidos.

Continuación de la actividad II del estudio final

Los alumnos compararon las áreas de los cuadrados construidos en el inciso 2 de la actividad II y comenzaron a plantear conjeturas sobre la relación entre estas áreas. En los incisos 3, 4 y 5 se presentan los resultados del trabajo realizado por los alumnos.

Inciso 3 de la actividad II del estudio final

En el inciso 3 de la actividad II del estudio final, se solicitó a los alumnos que determinaran cuál de los cuadrados construidos en el inciso 1 era el más grande. Los alumnos enumeraron los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo de este ejercicio, e indicaron que el número del cuadrado más grande correspondía al cuadrado construido sobre el lado más grande. Sólo 12 alumnos lograron obtener el área de este cuadrado correctamente, es decir 137 unidades cuadradas. Los demás alumnos obtuvieron aproximaciones de las áreas de los cuadrados, pero esto no evitó que los alumnos lograran continuar con la realización del trabajo de los siguientes incisos. Además, un equipo de 4 alumnos mencionó que era el que correspondía al cuadrado que se encontraba en la hipotenusa. El profesor les preguntó por qué llamaban así a ese lado, a lo que los alumnos respondieron que al lado mayor de un triángulo se le llama hipotenusa y a los menores catetos. Entonces un alumno de otro equipo les hizo las siguientes preguntas: ¿cuál de los tres lados de un triángulo isósceles será la hipotenusa? ¿y en un triángulo equilátero? Los alumnos consultaron en internet y concluyeron que se llamaba cateto a los lados del triángulo que formaban un ángulo recto e hipotenusa al lado más largo por lo que esos nombres solo se usan si el triángulo es rectángulo. Posteriormente un par de equipos comentaron que el triángulo era un triángulo escaleno porque las áreas de los cuadrados son distintas.

Inciso 4 de la actividad II del estudio final

En el inciso 4 de la actividad II del estudio final, se solicitó a los alumnos que determinaran si se podía completar (o cubrir) el área del cuadrado más grande con las áreas de los otros 2 cuadros.

Hasta este momento la mayoría de los alumnos consideraba que al sumar las áreas de dos cuadrados se obtendría el área del tercer cuadrado, incluso mencionaron que se satisfacía el teorema de Pitágoras.

Después de realizar la suma de las áreas de dos de los cuadrados y compararla con el área del tercer cuadrado, todos los alumnos llegaron a la conclusión de que no se cubría el área del cuadrado grande con la suma de las áreas de los cuadrados pequeños porque faltaba área.

Como resultado del trabajo realizado en este inciso dos equipos, es decir 8 alumnos, mencionaron que no se cubría el área del cuadrado grande porque el triángulo no era rectángulo, por lo que no se satisfacía el teorema de Pitágoras. Con lo anterior los alumnos invalidaron la conjetura que varios de sus compañeros realizaron al inicio de la actividad.

Inciso 5 de la actividad II del estudio final

En el inciso 5 de la actividad II del estudio final, se pidió a los alumnos que mencionaran con qué tipo de triángulo habían trabajado durante el desarrollo de la actividad II. En este ejercicio la mayoría de los alumnos mencionó que habían trabajado con un triángulo escaleno.

Cuando se les preguntó a los alumnos a qué clasificación de triángulos correspondían los triángulos escalenos, mencionaron que a la clasificación de triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados. Se les preguntó si conocían otra clasificación de triángulos, a lo que los alumnos contestaron que no. En ese momento se decidió cuestionar a los alumnos sobre el tipo de ángulos que tenía el triángulo con el que estaban trabajando, lo que generó una discusión en el grupo porque varios alumnos consideraban que el ángulo obtuso del triángulo era un ángulo recto. Fue necesario orientar la discusión del grupo hacia las características del ángulo obtuso y del ángulo recto, así los alumnos al investigar en internet concluyeron que para que el ángulo fuera un ángulo recto los lados del triángulo que lo generan debían ser perpendiculares; además, el ángulo obtuso era mayor que un ángulo recto y el ángulo agudo era menor que un ángulo recto. Fue entonces que los alumnos observaron que los lados que genera el ángulo en cuestión en su triángulo no eran perpendiculares y era mayor a 90°. Fue así como surgió la pregunta en uno de los equipos, ¿Todos los triángulos escalenos tienen un ángulo obtuso? La pregunta sorprendió a un par de alumnos quienes rápidamente consultaron en internet y localizaron la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos. Gracias a que los alumnos compartieron la pregunta y la clasificación que encontraron, con el grupo, la mayoría de los alumnos logró concluir que el triángulo de este ejercicio además de ser escaleno también era un triángulo obtusángulo porque tenía un ángulo obtuso y dos ángulos agudos.

El equipo que aún consideraba que el ángulo obtuso era un ángulo recto tuvo que construir el ángulo recto contenido en el ángulo obtuso, con lo que concluyeron que el ángulo en cuestión era obtuso porque era mayor a un recto. Gracias a este trabajo los alumnos lograron observar que los lados que genera el ángulo en cuestión en su triángulo no eran perpendiculares y el ángulo era mayor a 90°. Por lo anterior estos alumnos concluyeron que el triángulo de este ejercicio además de ser escaleno también era un triángulo obtusángulo porque tenía un ángulo obtuso (y dos ángulos agudos).

Fue así como surgió la pregunta en uno de los equipos, ¿Todos los triángulos escalenos tienen un ángulo obtuso? Se decidió invitar a los alumnos a continuar con las actividades para que tuvieran la oportunidad de descubrir la respuesta a la pregunta planteada.

Con esta actividad II del estudio final se logró que los alumnos descubrieran la relación que guardan las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo obtusángulo, de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado. Los alumnos concluyeron que en este tipo de triángulos la suma de las áreas de dos de los cuadrados pequeños no era suficiente para cubrir el área del tercer cuadrado (faltaba área). Los alumnos se sorprendieron al percatarse de que este triángulo no satisfacía el teorema de Pitágoras. Lo anterior motivó a los alumnos a realizar con entusiasmo las siguientes actividades.

Sesión 3 del estudio final

La tercera sesión tuvo una duración de 110 minutos y a ella asistieron 17 de los 20 alumnos del grupo. En esta sesión se desarrollaron las actividades III y IV del estudio final. Con estas actividades los alumnos conjeturaron y validaron los resultados correspondientes a los triángulos acutángulos y los triángulos rectángulos a partir de la comparación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos de modo que cada lado de los cuadrados debía ser de la misma longitud que la del lado sobre el que se construya.

A continuación se presentan los resultados de este trabajo realizado por los alumnos.

Actividad III del estudio final

El objetivo de esta actividad III del estudio final fue que los alumnos descubrieran la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados de un triángulo acutángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo. Esta actividad estuvo compuesta por 5 incisos donde los alumnos debían elaborar conjeturas acerca de la relación de las áreas de los cuadrados que se deben construir, y verificarlas. Además, los alumnos tenían que relacionar el resultado descubierto con el tipo de triángulo con el que trabajaron. A continuación se presentan los resultados obtenidos en esta actividad.

Inciso 1 de la actividad III del estudio final

En el inciso 1 se proporcionó a los alumnos un entramado con un triángulo acutángulo dibujado (véase la figura 3 en el apéndice F) y se les solicitó que construyeran un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo de modo que el lado de cada cuadrado fuese el mismo que el lado correspondiente del triángulo.

En este inciso los alumnos nuevamente tuvieron dificultades porque dibujaban cuadriláteros que no eran cuadrados. De los alumnos que realizaron la actividad, 15 construyeron cuadriláteros, en su mayoría rectángulos y polígonos no regulares, pero no cuadrados. Fue necesario solicitarles que tomaran en cuenta los procedimientos que realizaron en la actividad II para construir los cuadrados.

Después de esto los alumnos corrigieron su actividad y dibujaron los cuadrados que se les había solicitado en este inciso 1 de la actividad III (véase la figura 4.14). Las dificultades presentadas por los alumnos al desarrollar la actividad III se debieron a que dos de los cuadrados construidos sobre el triángulo acutángulo debían estar rotados (o inclinados), por lo que todavía les costó trabajo asimilar que aun cuando los lados del triángulo se encontraban inclinados se podían construir cuadrados sobre ellos.

Una vez que los alumnos habían construido los cuadrados correctamente, procedieron a calcular el área de cada uno de éstos. Los resultados de este trabajo se presentan a continuación.

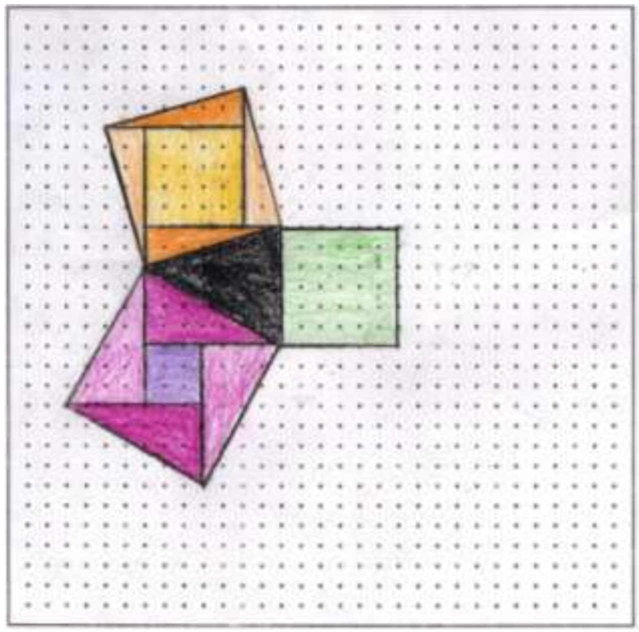


Figura 4.14. Construcción de los cuadrados sobre los lados del triángulo acutángulo, realizado por un alumno participante en el estudio final

Inciso 2 de la actividad III del estudio final

En el inciso 2 de la actividad III del estudio final, se pidió a los alumnos que calcularan el área de cada uno de los cuadrados construidos en el inciso 1 de la actividad III de este estudio.

Antes de realizar el cálculo de las áreas los alumnos expresaron verbalmente que ahora sí sería igual la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (cuadrados pequeños) con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (cuadrado grande) porque el triángulo con el que estaban trabajando satisfacía el teorema de Pitágoras. Los comentarios vertidos por los alumnos hicieron pensar al profesor que los alumnos no tenían asociado con la forma del triángulo al teorema de Pitágoras. Por lo anterior el profesor invitó a los alumnos a realizar la actividad para que verificaran su conjetura.

Los alumnos siguieron procedimientos parecidos a los que usaron en la actividad II, para calcular el área de los cuadrados:

1).- Medir los lados con regla graduada o con un instrumento de medición fabricado por ellos, y aplicar la fórmula para el área de un cuadrado.

2).- Dividir el cuadrado construido en cuatro triángulos y un cuadrado, y después calcular las áreas de estas figuras utilizando las fórmulas para el área de un cuadrado y de un triángulo:

Área de un triángulo = $\frac{b \times h}{2}$ y Área de un cuadrado = $l \times l$.

3).- Circunscribir un cuadrado, calcular su área y restarle el área de los cuatro triángulos rectángulos sobrantes.

Los alumnos nuevamente preferían aplicar las fórmulas de área del cuadrado y del triángulo para calcular el área de los cuadrados construidos en el inciso 1 antes que explorar la utilización de figuras geométricas auxiliares dentro o fuera de los cuadrados. Además, algunos alumnos consideraban que el triángulo con el que estaban trabajando era isósceles, por lo que mencionaron que bastaba con calcular el área de uno de los cuadrados que construyeron en los lados de igual longitud. Los comentarios vertidos por algunos alumnos hicieron pensar al profesor que los alumnos no habían sido entrenados en la verificación de las características de los triángulos y sólo asignaban nombres a los triángulos de acuerdo con las características que perciben mediante el sentido de la vista. Por lo anterior el profesor solicitó a los alumnos que verificaran si el triángulo con el que estaban trabajando era un triángulo isósceles. Después de un rato, un par de equipos externaron los siguientes argumentos:

1).- No es isósceles porque al medir la longitud de los dos lados no da el mismo resultado.

2).- No es isósceles porque si se dibuja el rectángulo que contenga las esquinas del triángulo en su perímetro se tienen dos triángulos rectángulos, y uno tiene la hipotenusa más larga (véase la figura 4.15).

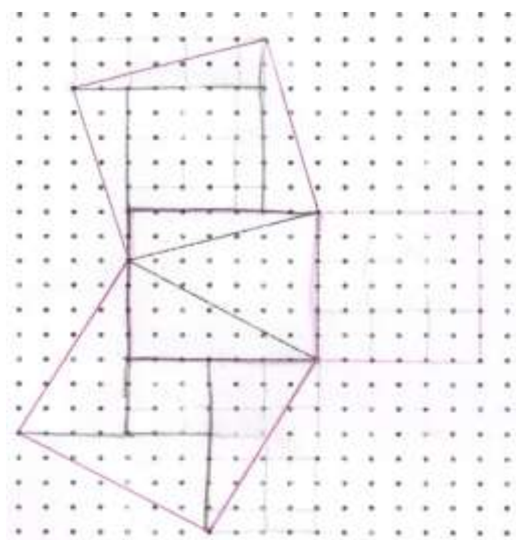


Figura 4.15. Dibujo del rectángulo que contiene al triángulo realizado para mostrar que este no es isósceles

Hasta estos momentos los alumnos habían concluido que el triángulo con el que estaban trabajando no era isósceles, sino que era un triángulo escaleno, por lo que el área de los tres cuadrados que habían construido eran distintas.

De esta manera, sólo 12 alumnos lograron obtener las áreas de los tres cuadrados: $\frac{65}{4} \approx 16.25$, $\frac{53}{4} \approx 13.25$ y 9 unidades cuadradas respectivamente. Los demás alumnos obtuvieron aproximaciones a dichas áreas, las cuales variaban de acuerdo con el procedimiento que siguieron para determinar las longitudes de los lados de las figuras geométricas utilizadas y las unidades utilizadas.

Los resultados anteriores no fueron obstáculo para que los alumnos realizaran los incisos que seguían, como se reporta a continuación.

Inciso 3 de la actividad III del estudio final

En el inciso 3 de la actividad III del estudio final, se solicitó a los alumnos que determinaran cuál de los cuadrados construidos en el inciso 1 de este estudio era el más grande. Desde la lectura del texto de este inciso los alumnos ya habían conjeturado que este triángulo satisfacía el teorema de Pitágoras por lo que no le encontraban mucho sentido a la realización de la actividad. Por lo anterior, se solicitó a los alumnos que verificaran su afirmación. Así, los alumnos enumeraron los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo de este inciso, y mencionaron que el cuadrado más grande correspondía al cuadrado construido sobre el lado más grande, es decir el cuadrado con área igual a $\frac{65}{4} \approx 16.25$ unidades cuadradas.

Después de que los alumnos determinaron cuál era el cuadrado más grande, 8 alumnos conjeturaron que, a diferencia del triángulo de la actividad II de este estudio, para este triángulo sí se cubría el área del cuadrado mayor con la suma de las áreas de los cuadrados pequeños porque este triángulo sí satisfacía el teorema de Pitágoras. Se decidió continuar con el desarrollo del siguiente inciso para dar oportunidad a los alumnos para que verificaran la conjetura realizada.

Inciso 4 de la actividad III del estudio final

En el inciso 4 de la actividad III del estudio final, se solicitó a los alumnos que determinaran si se podía completar (o cubrir) el área del cuadrado más grande con las áreas de los otros 2 cuadros.

Todos los alumnos llegaron a la conclusión de que sí se podía cubrir el área del cuadrado grande con la suma de las áreas de los cuadrados pequeños, y además sobraba área.

Dos equipos, es decir 8 alumnos, mencionaron que al cubrirse el área del cuadrado grande con la suma de las áreas de los cuadrados pequeños y sobrar área entonces no se cumplía el teorema de Pitágoras. Así concluyeron que eso ocurría porque el triángulo con el que trabajaron no era un triángulo rectángulo. Con lo anterior los alumnos invalidaron la conjetura que varios de sus compañeros plantearon al inicio de la actividad.

Con el siguiente inciso los alumnos reflexionaron nuevamente sobre las características del triángulo con el que estaban trabajando y de esta manera lograron relacionar el resultado descubierto con el triángulo acutángulo.

Inciso 5 de la actividad III del estudio final

En el inciso 5 de la actividad III del estudio final, se pidió a los alumnos que mencionaran con qué tipo de triángulo habían trabajado durante el desarrollo de la actividad III de este estudio. En este ejercicio la mayoría de los alumnos anotó que había trabajado con un triángulo escaleno y mencionó que no era un triángulo isósceles, aunque dos de los lados se veían de igual longitud.

Cuando se les preguntó a los alumnos a qué clasificación de triángulos correspondían los triángulos escalenos, mencionaron que a la clasificación de triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados. Se les preguntó si conocían otra clasificación de triángulos, a lo que los alumnos contestaron que sí, la clasificación de acuerdo con la medida de sus ángulos. En ese momento se decidió cuestionar a los alumnos sobre el tipo de ángulos que tenía el triángulo con el que estaban trabajando, lo que generó una discusión en el grupo porque varios alumnos consideraban que los ángulos agudos del triángulo era ángulos rectos. Fue necesario orientar la discusión del grupo hacia las características de los ángulos agudos y de los ángulos rectos. Enseguida los alumnos corroboraron que los ángulos del triángulo en cuestión no eran ángulos rectos porque al analizar los lados del triángulo que generaban cada uno de los lados lograron visualizar que los lados no eran perpendiculares, además de que estos ángulos eran menores a 90°. Así, los alumnos concluyeron que los ángulos del triángulo con el que estaban trabajando eran agudos, por lo que el triángulo además de ser escaleno era también acutángulo.

Nuevamente en uno de los equipos surgió una pregunta, ¿Todos los triángulos escalenos tienen sus tres ángulos agudos? Se decidió invitar a los alumnos a reflexionar en plenaria sobre las características de los triángulos con los que trabajaron las actividades II y III de este estudio. De lo anterior los alumnos concluyeron que ambos triángulos eran escalenos, pero uno era obtusángulo y otro acutángulo, por lo que los triángulos escalenos podían tener un ángulo obtuso (y dos ángulos agudos) o sus tres ángulos agudos.

En esta actividad III del estudio final se logró que los alumnos descubrieran la relación que guardan las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo acutángulo, de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado. Los alumnos concluyeron que en este tipo de triángulos la suma de las áreas de dos de los cuadrados pequeños era suficiente para cubrir el área del tercer cuadrado, y sobraba área. Los alumnos se sorprendieron al percatarse de que en este triángulo tampoco se satisfacía el teorema de Pitágoras.

Al inicio de las actividades II y III del estudio final los alumnos creían que estaban trabajando con triángulos rectángulos, por lo que pensaban que se satisfacía el teorema de Pitágoras. Posiblemente esto sea a causa de que los alumnos han trabajado durante su educación matemática de forma reiterada únicamente con las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos rectángulos. Por lo anterior, los alumnos se resistían a considerar que el teorema de Pitágoras no se satisfacía en los triángulos obtusángulos y acutángulos. Su opinión cambió cuando compararon las áreas de los cuadrados construidos en el inciso 2 tanto de la actividad II y III de este estudio, con lo cual descubrieron dos resultados nuevos sobre estos triángulos. Entonces algunos alumnos comenzaron a conjeturar que la igualdad entre el área de los cuadrados pequeños y el área del tercer cuadrado sólo se daba si el triángulo era rectángulo. Esta conjetura fue verificada en la siguiente actividad.

Actividad IV del estudio final

La finalidad de la actividad IV del estudio final fue que a partir de los resultados descubiertos en las actividades II y III del estudio final, los alumnos conjeturaran sobre la relación que guarda la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados pequeños de un triángulo rectángulo y el área del tercer cuadrado y verifiquen las conjeturas que planteen.

Se pidió a los alumnos que contestaran la pregunta: ¿Hay algún triángulo en el que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados? Y que posteriormente verificaran su respuesta mediante un ejemplo, o los que consideraran necesarios, usando el entramado 2 (véase el apéndice F).

En el cuadro 4.3 se presentan las respuestas de los alumnos, los esquemas que usaron y la verificación de sus respuestas.

Todos los alumnos validaron su conjetura utilizando un triángulo rectángulo (véase la figura 4.16). Sólo cuatro alumnos iniciaron esta actividad construyendo los cuadrados y a partir de ellos formaron el triángulo rectángulo; es decir, estos alumnos partieron del converso del teorema de Pitágoras.

Como se puede observar en el cuadro 4.3, la mayoría de los alumnos reconoció inmediatamente que en los triángulos rectángulos se aplica el teorema de Pitágoras. Los alumnos incluso utilizaron este teorema para obtener la longitud del lado del cuadrado construido sobre la hipotenusa y luego compararon la suma de las áreas de los cuadrados pequeños con el área del tercer cuadrado.

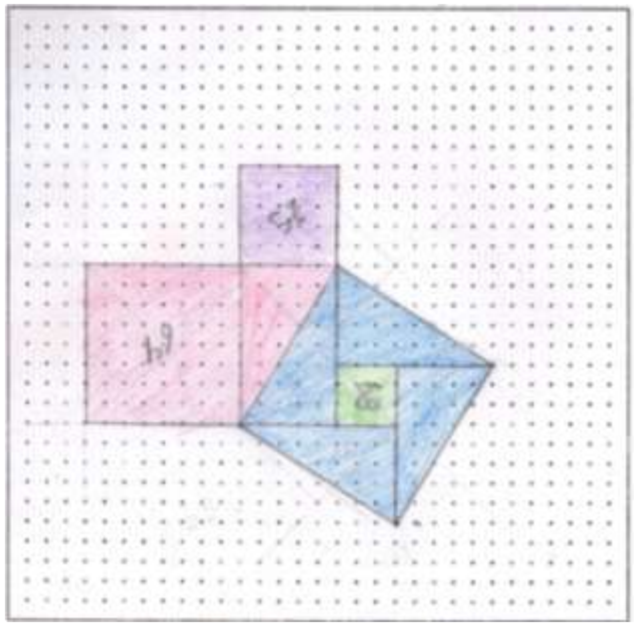
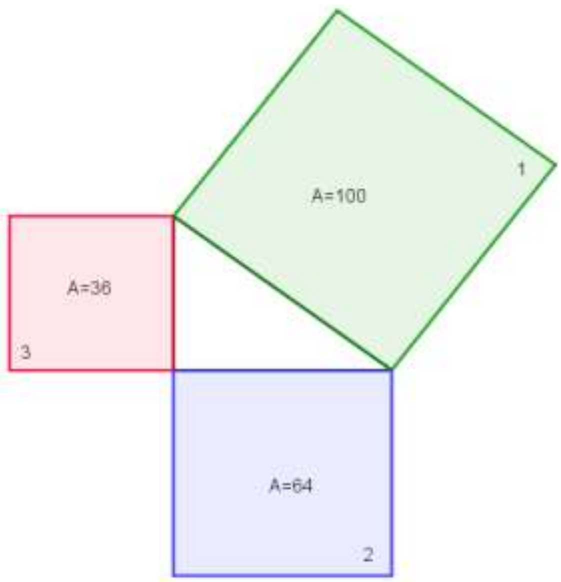
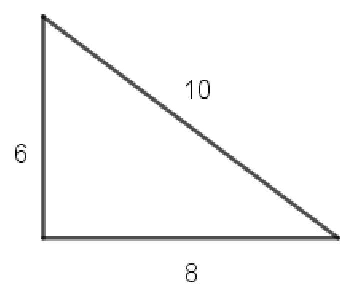


Figura 4.16. Construcción de los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo, realizado por un alumno participante en el estudio final

En esta actividad los alumnos ya estaban habituados a la forma de trabajo en equipo; habían encontrado sentido a las actividades porque, además de descubrir nuevos resultados matemáticos, éstas les ofrecían la oportunidad de recordar conceptos que ya habían estudiado en la secundaria. Su molestia y resistencia habían desaparecido, comenzaron a expresar su gusto por las actividades porque las catalogaron como divertidas, entretenidas e interesantes.

Al finalizar esta actividad los alumnos ya eran conscientes de que el teorema de Pitágoras sólo se cumple si el triángulo es rectángulo y de que si el triángulo es acutángulo u obtusángulo entonces al comparar la suma de las áreas de los cuadrados pequeños con respecto al área del tercer cuadrado se tiene una desigualdad. También los alumnos se hicieron conscientes de que los términos “catetos” e “hipotenusa” sólo se utilizan para nombrar los lados de los triángulos rectángulos. Además, los alumnos conocieron la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos, gracias a que reflexionaron sobre los tipos de ángulos que tienen los triángulos. En las siguientes actividades V y VI del estudio final se presentan los enunciados redactados por los alumnos de los resultados descubiertos para los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos.

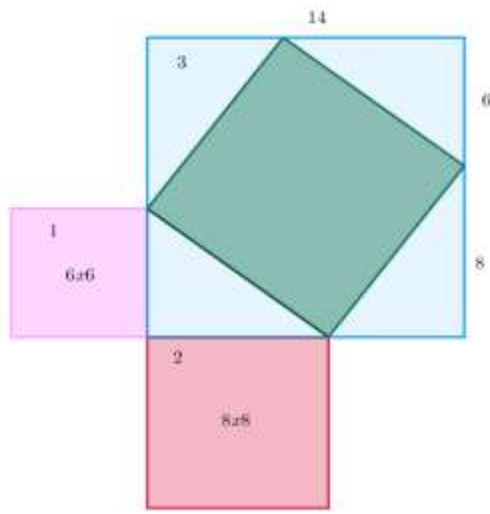
Cuadro 4.3. Respuestas sobre la existencia de un triángulo cuya área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados

Respuesta	Esquema	Argumento de verificación
1).- Sí, ya que al construir un triángulo rectángulo cumple con el teorema de Pitágoras al sumar el [área del cuadrado] número 2 y [el área del cuadrado número] 3: 64 + 36 =100 es igual al [área del cuadrado] número 1.	 Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 6, 8 y 10.	Obtiene el valor del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sumando las áreas de los cuadrados de los catetos.
2).- Sí, ya que es un triángulo rectángulo y éste cumple el teorema de Pitágoras si se suman a^2 y b^2 es igual a c^2.		Obtiene primero las ternas de áreas que satisfacen el teorema de Pitágoras, y luego hace un esquema. Registro escrito 36 + 64 = 100

(Continúa)

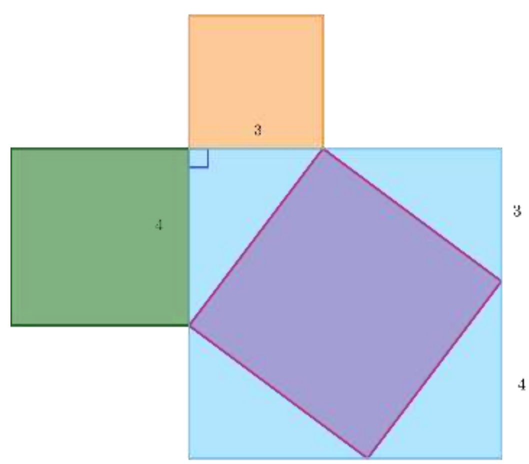
Cuadro 4.3. (Continuación)

<table>
<tr><th>Respuesta</th><th>Esquema</th><th>Argumento de verificación</th></tr>
<tr>
<td>3).- Los cuadrados pequeños sí cubren al cuadrado mayor porque el triángulo empleado es un triángulo rectángulo, por lo cual cumple el teorema de Pitágoras.</td>
<td>



Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 6, 8 y 10.</td>
<td>Para calcular el área del cuadrado construido en la hipotenusa calcula el área del cuadrado de longitud 14, le resta 4 veces el área del triángulo de longitudes 8 y 6.

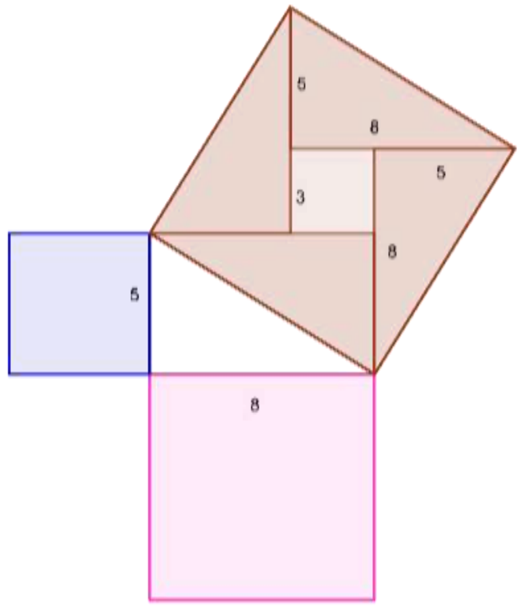
Registro escrito
$14 \times 14 - 4 \times \left(\frac{8 \times 6}{2}\right)$
$= 100$</td>
</tr>
<tr>
<td>4).- Sí, el triángulo rectángulo.
Si $c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$</td>
<td>



Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 3, 4 y 5.</td>
<td>Para calcular el área del cuadrado construido en la hipotenusa calcula el área del cuadrado de longitud 7, le resta 4 veces el área del triángulo de longitudes 3 y 4.
Registro escrito
$7 \times 7 - 4 \times \left(\frac{3 \times 4}{2}\right)$
$= 25$</td>
</tr>
</table>

(Continúa)

Cuadro 4.3. (Continuación)

Respuesta	Esquema	Argumento de verificación
5).- Sí, el triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras es $a^2 + b^2 = c^2$, entonces sí cumple y el área es exacta.	 Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 5, 8 y $\sqrt{89}$.	Para calcular el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo los alumnos sumaron las áreas de dos rectángulos de longitudes de lados 8 y 5, y de un cuadrado de longitud de lados 3. El área obtenida fue de 89 unidades cuadradas. Registro escrito $\begin{array}{r} 80 \\ +\ 9 \\ \hline 89 \end{array}$ Comprobación $a^2 + b^2 = c^2$ 25 + 64 = 89

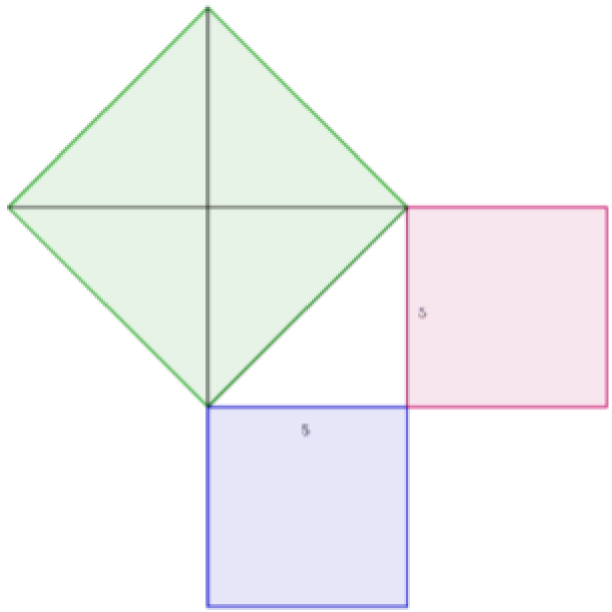
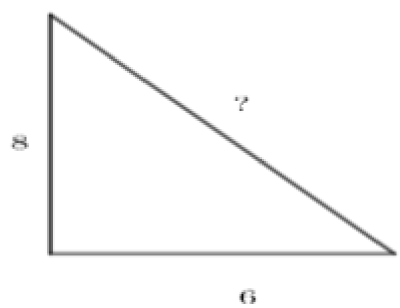
(Continúa)

Cuadro 4.3. (Continuación)

Respuesta	Esquema	Argumento de verificación
6).- Sí, es un triángulo rectángulo, pues el área de los cuadrados de dos de sus lados es igual al área del tercero.	Esquema similar al de la respuesta 5. Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 4, 8 y $\sqrt{80}$. Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 4, 7 y $\sqrt{65}$.	Denota a los catetos de su triángulo rectángulo con las letras *a* y *b*, y a la hipotenusa con la letra *c*. Para obtener el área del cuadrado formado por el lado *c* divide dicho cuadrilátero en figuras más pequeñas y menos complejas resultando 4 triángulos rectángulos iguales y un cuadrado más pequeño.
7).- Sí es un triángulo rectángulo porque la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Teorema de Pitágoras.	Esquema similar al de la respuesta 5. Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 5, 8 y $\sqrt{89}$	Compara la suma de las áreas de los catetos con el área del cuadrado construido en la hipotenusa (la cual determinó de la misma forma que en la respuesta 5).

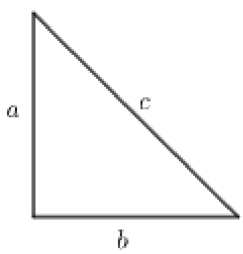
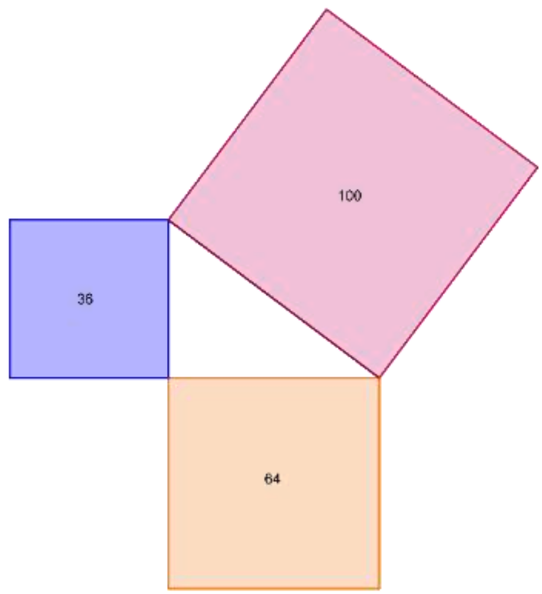
(Continúa)

Cuadro 4.3. (Continuación)

Respuesta	Esquema	Argumento de verificación
8).- No hace ninguna anotación de su respuesta.	 Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 5, 5 y $\sqrt{50}$.	50 es igual a la suma de los dos cuadrados.
9).- No hace ninguna anotación de su respuesta.	 Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 8, 6 y 10.	Aplica el teorema de Pitágoras para calcular el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ $x = \sqrt{64 + 36}$ $x = \sqrt{100}$ $x = 10$

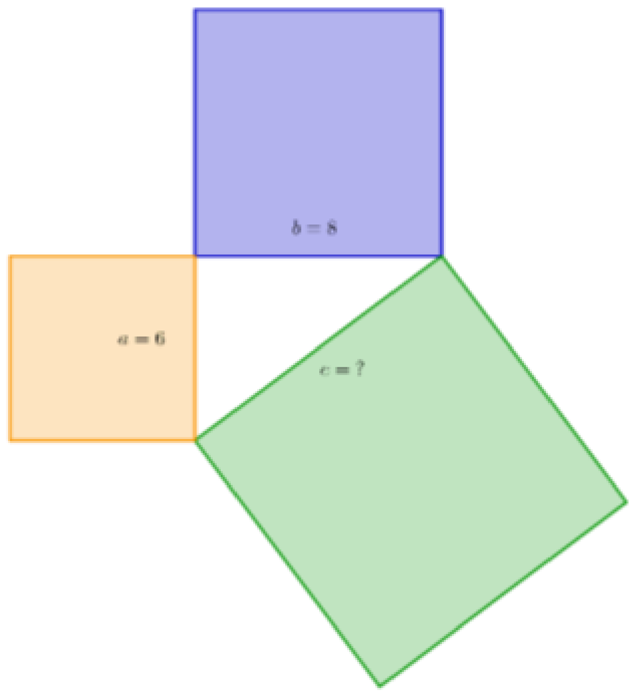
(Continúa)

Cuadro 4.3. (Continuación)

Respuesta	Esquema	Argumento de verificación
10).- Sí, es el triángulo rectángulo ya que el cateto *c* elevado al cuadrado es la suma del cuadrado de los catetos *a* y *b*.  Por ejemplo, en el triángulo del entramado si se suman las áreas de los cuadrados más pequeños, se obtiene el área del cuadrado más grande.	 Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 8, 6 y 10.	$a^2 + b^2 = c^2$ 36 + 64 = c^2 Realiza el siguiente registro escrito 36 64 100

(Continúa)

Cuadro 4.3. (Concluye)

Respuesta	Esquema	Argumento de verificación
11).- El triángulo utilizado fue un triángulo rectángulo. Si al sumar el área del cuadrado *a* (36 cm^2) y el cuadrado *b* (64 cm^2) el resultado es igual al área del cuadrado *c* (100 cm^2). Para saber la medida de cada lado de los cuadrados se utilizó la diferencia de un punto a otro, que es de 1 cm.	 $c^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c^2 = \sqrt{36 + 64}$ $c^2 = \sqrt{100}$ $c = 10$ Longitudes de los lados del triángulo rectángulo utilizado: 8, 6 y 10.	36 + 64 = 100 $a^2 + b^2 = c^2$

Sesión 4 del estudio final

La cuarta sesión tuvo una duración de 110 minutos y a ella asistieron 17 de los 20 alumnos del grupo. En esta sesión se desarrollaron las actividades V, VI y VII del estudio final. En la actividad V los alumnos llenaron un cuadro para relacionar los resultados descubiertos con las características de los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos. En la actividad VI los alumnos redactaron los enunciados de los resultados descubiertos, y en la actividad VII aplicaron el teorema de Pitágoras para la resolución de 6 problemas. A continuación se reportan los resultados obtenidos por los alumnos en estas actividades.

Actividad V del estudio final

El objetivo de esta actividad fue que los alumnos relacionaran el tipo de triángulo con la propiedad que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo.

Se solicitó a los alumnos que completaran el cuadro sobre clasificación de triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos (véase el apéndice F) y con base en los resultados obtenidos en las actividades I, II y III de este estudio final. Posteriormente se les pidió que compararan su cuadro lleno con el de sus compañeros. Un ejemplo de los resultados obtenidos por los alumnos se presenta en la figura 4.17.

Tipo de triángulo	Característica(s)	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo
Acutángulo	Todos sus ángulos son agudos (menores de 90°)	No cumple con el teorema de pitágoras. Sobra área. La suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es mayor que el más grande
Triángulo rectángulo	Tiene un ángulo recto (de 90°)	Cumple con el teorema de pitágoras. La suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es idéntica al del grande
obtusángulo	Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°)	No cumple con el teorema de pitágoras. Falta área. La suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es menor que el del más grande

Figura 4.17. Resultados de un alumno al relacionar el tipo de triángulo con la relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo

En el cuadro 4.4 se muestran los términos usados por los alumnos para nombrar al triángulo obtusángulo y las principales relaciones que mencionaron que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de este triángulo. Los alumnos observaron que la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños no cubre el área del tercer cuadrado porque falta área. Se tienen indicios de que la mayoría de los alumnos comenzó a considerar que el triángulo obtusángulo no satisface el teorema de Pitágoras.

Cuadro 4.4. Relaciones entre áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo obtusángulo

Términos usados para nombrar al triángulo obtusángulo	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo obtusángulo
Triángulo obtusángulo Obtusángulo Escaleno u obtusángulo Triángulo obtuso Escaleno obtusángulo	La suma de las áreas de los cuadrados pequeños (menores) es menor que el área del cuadrado mayor (más grande).
	La suma de las áreas de dos cuadrados construidos en sus lados es menor que el área del tercero.
	La suma de las áreas de sus cuadrados es menor que el área del cuadrado más grande.
	La suma del cuadrado de sus catetos es mayor que el cuadrado de la hipotenusa.
	Al hacer la suma de las 2 áreas de los cuadrados menores no se satisface el área del mayor ya que falta área.
	Falta área. La suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es menor que la del grande.
	La suma de los cuadrados pequeños no es suficiente para el cuadrado mayor.
	La suma de los cuadrados menores no cubre por completo el cuadrado mayor.
	La suma de los cuadrados de los catetos es menor que el cuadrado de la hipotenusa.
	Dos áreas son más pequeñas que una del cuadrado.

En el cuadro 4.5 se muestran los términos usados para nombrar al triángulo acutángulo y las principales relaciones mencionadas por los alumnos, las cuales satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de este triángulo. Los alumnos lograron observar que la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños sí cubren el área del tercer cuadrado, y además sobra área.

Cuadro 4.5. Relaciones entre áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo acutángulo

Términos usados para nombrar al triángulo acutángulo	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo acutángulo
Triángulo acutángulo Acutángulo Escaleno acutángulo Triángulo agudo Escaleno	La suma de las áreas de los cuadrados pequeños (menores) excede (es mayor) a la del cuadrado mayor (más grande).
	La suma de dos de las áreas de sus cuadrados es mayor que la tercera.
	La suma del área de 2 de sus lados es mayor que el área del cuadrado más grande.
	Al sumar el área de 2 cuadrados sobran unidades para llegar al área del tercer lado.
	Al sumar el área de los dos cuadrados menores sobra a la del cuadrado mayor, así que no se satisface [el teorema de Pitágoras].
	No cumple con el teorema de Pitágoras. Sobra área. La suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es mayor que el más grande.
	La suma de los cuadrados de los catetos es mayor que el cuadrado de la hipotenusa.
	La suma de los cuadrados menores da mucho más que el cuadrado mayor.
	La suma de sus cuadrados pequeños rebasa al del lado mayor.

En el cuadro 4.6 se muestran los términos usados por los alumnos para nombrar al triángulo rectángulo y las principales relaciones que mencionaron que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de este triángulo. Se tienen indicios de que los alumnos comenzaron a considerar que el teorema de Pitágoras sólo se aplica a los triángulos rectángulos.

Cuadro 4.6. Relaciones entre áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo

Términos usados para nombrar al triángulo rectángulo	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo
Triángulo rectángulo Rectángulo Escaleno o rectángulo Triángulo recto	La suma de las áreas de dos de sus cuadrados es igual al tercero.
	La suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual a la del cuadrado mayor.
	La suma del área de dos de sus cuadrados es igual al área del cuadrado más grande.
	La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
	La suma de las áreas de los cuadrados pequeños cubre el área del cuadrado mayor.
	La suma del área de los cuadrados menores satisface la del cuadrado mayor.
	Cumple el teorema de Pitágoras.
	La suma de sus cuadrados menores da como resultado el cuadrado mayor.
	La suma de las áreas chicas completa el área total del cuadrado grande.

De los resultados que los alumnos mencionaron con mucha frecuencia, y que incluso manejaron, fue que si el triángulo era escaleno entonces no se daba la igualdad entre la suma de las áreas de los cuadrados pequeños y el tercer cuadrado construidos sobre los lados de un triángulo, pero les era difícil concluir si la desigualdad era mayor o menor (esto es, el sentido de la desigualdad) con solo observar la medida de los lados del triángulo. En varias ocasiones los alumnos expresaron la relación que observaron entre el triángulo con el que estaban trabajando y las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo.

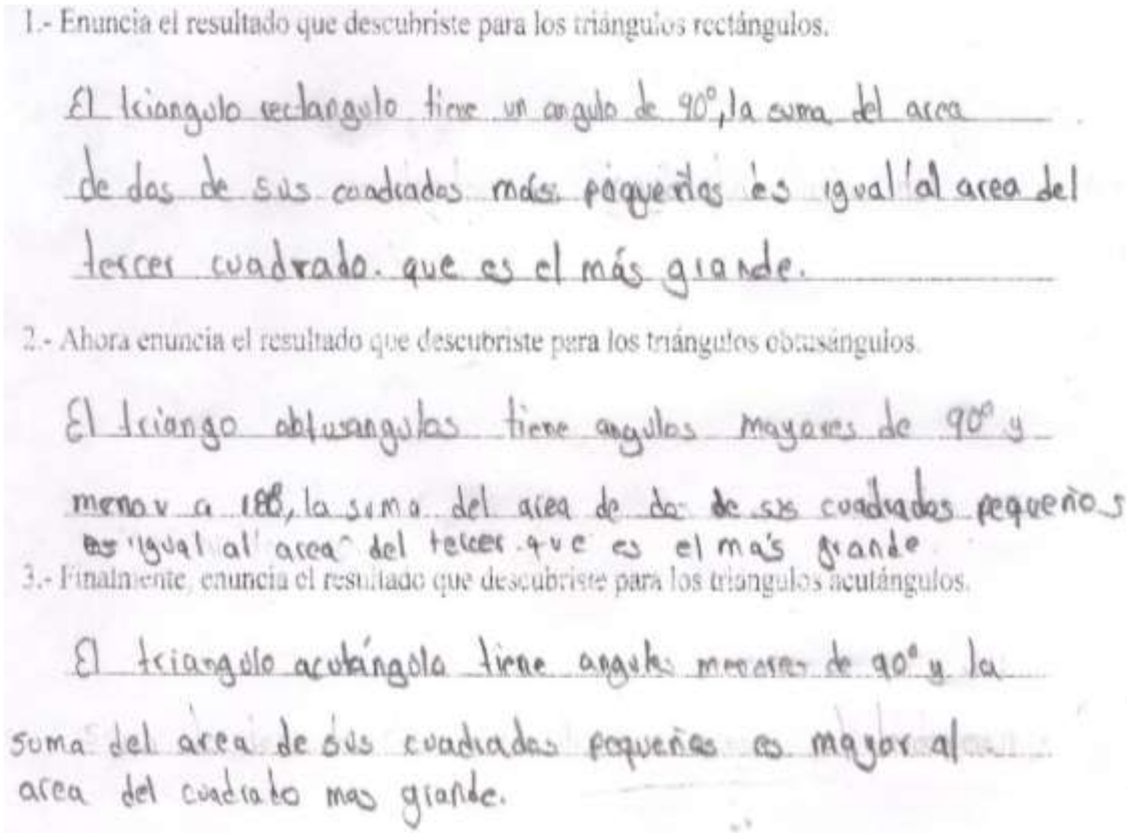
Algunos comentarios vertidos por los alumnos son: Los triángulos con los que trabajamos son escalenos y no son triángulos rectángulos porque “la suma de las áreas de los dos pequeños es mayor que el área del tercer cuadrado”, “la suma de áreas de los dos cuadrados pequeños es menor que el área del tercer cuadrado”, “no se cubre el tercer cuadrado porque falta área” o “se cubre el tercer cuadrado y además sobra área”. A causa de los comentarios anteriores en un par de equipos surgió la pregunta ¿Cómo podemos saber cuándo la suma de áreas de los dos cuadrados pequeños va a ser mayor o menor que el área del tercer cuadrado construidos en un triángulo escaleno? Esta pregunta confirmaba que los alumnos han trabajado sólo con la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus lados y que les cuesta trabajo asimilar la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos. Lo anterior motivó que se planteara nuevamente en plenaria la pregunta: ¿existe otro tipo de clasificación de los triángulos a parte de la clasificación de los triángulos de acuerdo con la longitud de sus lados?

Al finalizar la actividad V del estudio final los alumnos lograron identificar la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos; además, comenzaron a considerarla como la más adecuada para nombrar a los triángulos con los que trabajaron en las tres actividades anteriores porque así ya podían distinguir cuándo un triángulo escaleno satisfacía que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños era menor o mayor que el área del cuadrado más grande. Así, los alumnos identificaron el tipo de triángulo de acuerdo con su tipo de ángulos interiores. Lo anterior ayudó mucho a que los alumnos percibieran que no todos los triángulos son triángulos rectángulos. De esta manera fue más sencillo que los alumnos relacionaran el tipo de triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos con los resultados descubiertos en las actividades previas. Muestra de lo anterior se presenta en la redacción de los enunciados, realizada por los alumnos, en la siguiente actividad.

Actividad VI del estudio final

En esta actividad los alumnos redactaron los enunciados de los resultados para los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos obtenidos en las actividades II, III y IV de este estudio final.

En la figura 4.18. se presenta un ejemplo de los resultados obtenidos por uno de los alumnos en la actividad VI del estudio final.


1.- Enuncia el resultado que descubriste para los triángulos rectángulos.

El triangulo rectangulo tiene un angulo de 90°, la suma del area de dos de sus cuadrados más pequeños es igual al area del tercer cuadrado. que es el más grande.

2.- Ahora enuncia el resultado que descubriste para los triángulos obtusángulos.

El triango obtusangulos tiene angulos mayores de 90° y menor a 180, la suma del area de dos de sus cuadrados pequeños es igual al area del tercer que es el más grande

3.- Finalmente, enuncia el resultado que descubriste para los triángulos acutángulos.

El triangulo acutangulo tiene angulos menores de 90° y la suma del area de sus cuadrados pequeñas es mayor al area del cuadrato mas grande.

Figura 4.18. Redacción de los enunciados de los resultados para los triángulos rectángulos, obtusángulos y acutángulos, realizado por un alumno participante en el estudio final

Inciso 1 de la actividad VI del estudio final

En el inciso 1 (véase el apéndice F) se pidió a los alumnos que enunciaran el resultado que descubrieron para los triángulos rectángulos. En el cuadro 4.7 se presenta un resumen de los enunciados escritos por los alumnos.

Como se puede observar en el cuadro 4.7, existen indicios de que los alumnos relacionaron al triángulo rectángulo con su ángulo recto, además de reconocer que sólo en este tipo de triángulos la suma de áreas de los cuadrados pequeños es igual al área del tercer cuadrado construido.

Cuadro 4.7. Enunciados acerca de triángulos rectángulos

Enunciados
1).- En el triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados pequeños, construidos a partir de él, es igual al área del cuadrado mayor. Al igual, tiene un ángulo de 90°.
2).- El triángulo rectángulo tiene un ángulo recto (de 90°), la suma del área de dos de sus cuadrados más pequeños es igual al área del tercer cuadrado que es el más grande.
3).- Si es un triángulo rectángulo la suma de las dos áreas de los cuadrados chicos podrán completar el cuadrado más grande.
4).- En un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre el lado mayor es igual a la suma de las áreas construidas sobre los lados menores.
5).- El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
6).- Los triángulos rectángulos con el teorema de Pitágoras para sacar el valor de la hipotenusa son $a^2 + b^2 = c^2$ y con los triángulos rectángulos al hacer un cuadrado en cada lado, y si hacemos la suma de las áreas de los cuadrados menores es el resultado del área del cuadrado mayor.
7).- El triángulo rectángulo o escaleno tiene un ángulo recto (90°) y dos ángulos agudos (+0° [y] -90°).
8).- Si es un triángulo rectángulo, la suma del área de los cuadrados más pequeños es igual al área del cuadrado más grande.

Inciso 2 de la actividad VI del estudio final

En el inciso 2 (véase el apéndice F) se solicitó a los alumnos que enunciaran el resultado que descubrieron para los triángulos obtusángulos. En el cuadro 4.8 se presenta un resumen de los enunciados de los alumnos.

Como se puede observar en el cuadro 4.8, existen indicios de que los alumnos relacionaron al triángulo obtusángulo con su ángulo obtuso, además de reconocer que sólo en este tipo de triángulos la suma de áreas de los cuadrados pequeños es menor al área del área del tercer cuadrado construido. También hay indicios de que descartan la posibilidad de que los triángulos obtusángulos satisfagan el teorema de Pitágoras.

Cuadro 4.8. Enunciados acerca de triángulos obtusángulos

Enunciados
1).- En el triángulo obtusángulo, la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es menor al área del cuadrado mayor. Se obtiene ángulo mayor de 90° y menor de 180°.
2).- En un triángulo obtusángulo el área del cuadrado construido sobre el lado mayor es mayor a la suma de las áreas construidas sobre los lados menores.
3).- Los triángulos obtusángulos tienen un ángulo mayor de 90° y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre 2 de sus lados es menor al área del cuadrado más grande.
4).- La suma del área de los cuadrados pequeños es menor que el área del cuadrado mayor.
5).- La suma de los cuadrados de los catetos es menor que el cuadrado de la hipotenusa.
6).- El triángulo obtusángulo cuenta con un ángulo obtuso (+90°) y dos agudos (+0° [y] -90°).
7).- El teorema de Pitágoras con los triángulos obtusángulos no se cumple ya que al hacer los cuadrados en cada lado y al sumar el área de los cuadrados menores da menos que el área del cuadrado mayor.
8).- En éste las áreas serán diferentes, pero dos van a ser muy grandes y una chica, además le faltan centímetros para cubrir el más grande.

Inciso 3 de la actividad VI del estudio final

En el inciso 3 se pidió a los alumnos que enunciaran el resultado que descubrieron para los triángulos acutángulos. En el cuadro 4.9 se presenta un resumen de los enunciados de los alumnos.

Cuadro 4.9. Enunciados acerca de triángulos acutángulos

Enunciados
1).- En el triángulo acutángulo, la suma de las áreas de los cuadrados pequeños excede al área del cuadrado mayor. Se obtienen ángulos menores de 90°.
2).- En un triángulo acutángulo el área de los cuadrados construidos sobre el lado mayor es menor a la suma de las áreas construidas sobre los lados menores.
3).- Si el triángulo es acutángulo, la suma de las áreas de los cuadrados más pequeños es mayor al área del cuadrado más grande.
4).- El triángulo acutángulo tiene ángulos menores de 90° y la suma del área de sus cuadrados pequeños es mayor al cuadrado más grande.
5).- Los triángulos acutángulos tienen todos sus ángulos menores de 90° y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre 2 de sus lados es mayor al área del cuadrado más grande.
6).- Un triángulo acutángulo cuenta con las características de que todos sus ángulos son agudos (+0° [y] -90°).
7).- Con los triángulos acutángulos tampoco se cumple el teorema de Pitágoras ya que si hacemos un cuadrado en cada lado y se suma el área de dos cuadrados da más que el área del cuadrado restante.
8).- La suma de los cuadrados de los catetos es mayor que el cuadrado de la hipotenusa.

Como se puede observar en el cuadro 4.9, existen indicios de que los alumnos relacionaron al triángulo acutángulo con sus ángulos agudos, además de reconocer que sólo en este tipo de triángulos la suma de áreas de los cuadrados pequeños es mayor que el área del tercer cuadrado construido. También hay indicios de que descartaron la posibilidad de que los triángulos acutángulos satisfagan el teorema de Pitágoras.

Uno de los resultados que no se esperaba fue que los alumnos mencionaran que la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos era uno de los resultados importantes que descubrieron para los triángulos. Esto posiblemente sea gracias a que para los alumnos resultó novedosa y más eficiente esta clasificación para relacionar el resultado descubierto sobre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo y las características del triángulo. Esta nueva clasificación (para los alumnos), descubierta para los triángulos, permitió a los alumnos diferenciar para qué triángulos escalenos se aplica el resultado descubierto para triángulos acutángulos y para qué triángulos escalenos se aplica el resultado descubierto para triángulos obtusángulos.

Con esta actividad VI del estudio final los alumnos, además de descubrir el teorema de Pitágoras, concluyeron que éste sólo se aplica a triángulos rectángulos, y que para los triángulos acutángulos y obtusángulos se da una desigualdad entre la suma de las áreas de dos cuadrados y el área del tercer cuadrado.

En la siguiente actividad los alumnos aplicaron el teorema de Pitágoras en la solución de algunos problemas.

Actividad VII del estudio final

De los 19 alumnos que asistieron a la sesión 4, 18 realizaron la actividad VII de este estudio final. En esta actividad se solicitó a los alumnos que resolvieran seis problemas (véase el apéndice F). A continuación se detallan los resultados obtenidos para cada problema.

Problema 1 de la actividad VII del estudio final

En este primer problema, los alumnos debían responder a la pregunta: ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$ si las coordenadas de los puntos son $A(1, 2)$ y $B(5, 4)$?

La respuesta es que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es igual a $2\sqrt{5}$ unidades. Quince (15) alumnos obtuvieron la solución correcta del problema; 2 no obtuvieron la solución correcta, pero siguieron un procedimiento adecuado, y 1 no terminó su trabajo.

En la figura 4.19 se presenta un ejemplo de los resultados obtenidos por uno de los alumnos.

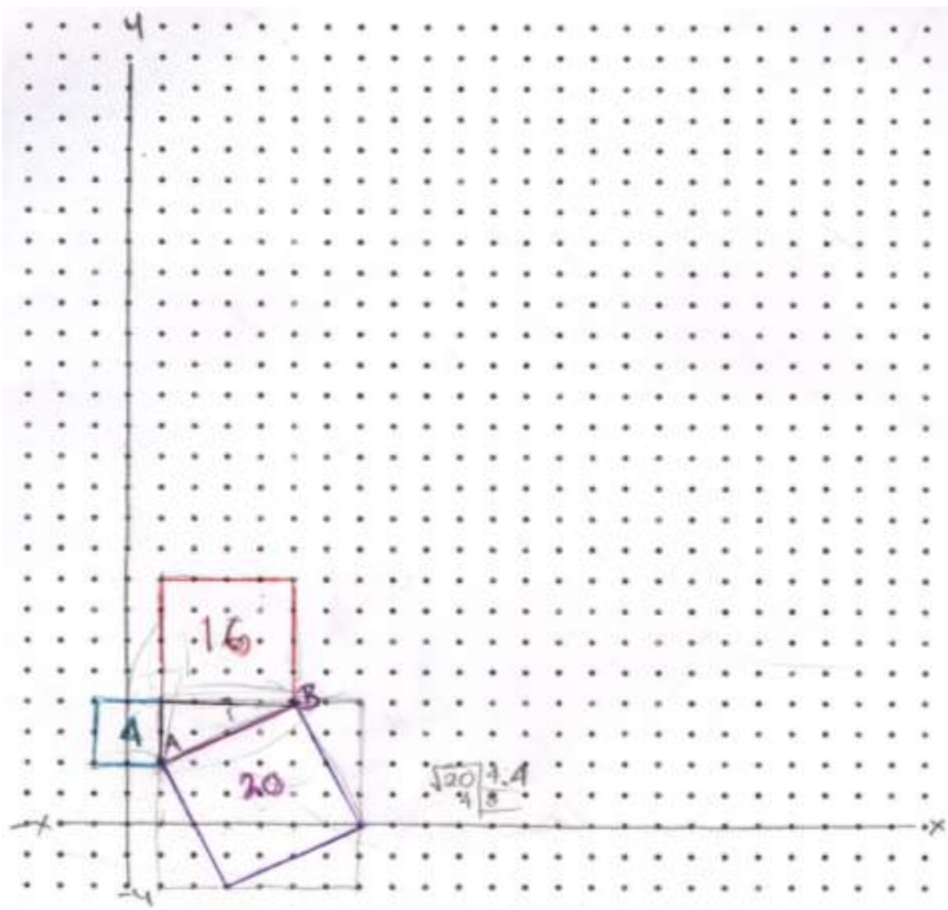


Figura 4.19. Resultado obtenido por un alumno para el problema 1 del estudio final

A continuación se describen las estrategias que siguieron los 15 alumnos que resolvieron correctamente este problema 1.

1).- Realizaron cada una de las etapas del procedimiento descrito en el cuadro 4.10. Estos alumnos concluyeron que la longitud del segmento $\overline{AB}$ era igual a $\sqrt{20}$ (utilizada por 5 alumnos).

Cuadro 4.10. Etapas del procedimiento de resolución del problema 1 del estudio final

Etapa
1).- Construyeron el primer cuadrante del plano cartesiano, la unidad de medida utilizada es el centímetro.
2).- Localizaron en el cuadrante del plano cartesiano los puntos *A* y *B*, y los unieron con un segmento rectilíneo.
3).- Dibujaron un triángulo rectángulo cuya hipotenusa fuese el segmento$\overline{AB}$, y determinaron las longitudes los lados pequeños utilizando los ejes del plano cartesiano.
4).- Construyeron cuadrados en cada uno de los lados pequeños del triángulo rectángulo, con la misma longitud del lado en que se construyó.
5).- Determinaron el área de los cuadrados pequeños utilizando sus longitudes, calculadas a través de la escala de medida de los ejes del cuadrante.
6).- Calcularon el área del cuadrado construido sobre el segmento $\overline{AB}$ sumando las áreas de los cuadrados construidos en los catetos.
7).- Obtuvieron la longitud del segmento $\overline{AB}$ calculando la raíz cuadrada del área del cuadrado construido sobre este segmento.

2).- Realizaron las primeras tres etapas del procedimiento descrito en el cuadro 4.10, y después obtuvieron el cuadrado de las longitudes de los catetos para aplicar el resultado que descubrieron en la actividad IV, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre dos lados de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre el lado mayor. De esta manera se concluyó que la longitud del segmento $\overline{AB}$ era igual a $\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ (utilizada por 2 alumnos).

3).- Realizaron las primeras tres etapas del procedimiento descrito en el cuadro 4.10, asignaron la literal x o c al segmento $\overline{AB}$ y después aplicaron la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ (utilizada por 4 alumnos). En la figura 4.20 se muestran dos registros de estos alumnos.

Primer registro	Segundo registro
$a^2 + b^2 = c^2$ $(2)^2 + (4)^2 = x^2$ $4 + 16 = x^2$ $\pm\sqrt{20} = x$	$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$ $c = \sqrt{4+16}$ $c = \sqrt{20}$

Figura 4.20. Dos registros del cálculo de la longitud del segmento $\overline{AB}$ cuando las coordenadas de los puntos son $A(1, 2)$ y $B(5, 4)$

4).- Realizaron las primeras dos etapas del procedimiento y utilizaron una regla graduada para medir la longitud el segmento $\overline{AB}$. Estos alumnos concluyeron que la longitud del segmento $\overline{AB}$ era igual a 4.5 centímetros (utilizada por 4 alumnos).

- De los 2 alumnos que no llegaron al resultado correcto del problema, uno fue porque utilizó como unidad de medida los mm para hacer la división de los ejes del primer cuadrante del plano cartesiano y midió en cm la longitud del segmento $\overline{AB}$, y el otro alumno prolongó uno de los catetos hasta uno de los ejes del primer cuadrante y, a pesar de que el procedimiento que siguió es correcto, este error lo llevó a deducir que $(2)^2 + (5)^2 = c^2$, y concluyó que la longitud del segmento $\overline{AB}$ es igual a $\sqrt{29}$.

El único alumno que no terminó el ejercicio sólo ubicó los puntos *A* y *B* en el primer cuadrante de un plano cartesiano.

En los esquemas realizados por los alumnos se muestran indicios de que dotaron de sentido geométrico al teorema de Pitágoras. Esto evitó que varios alumnos cometieran errores de tipo aritmético y algebraico al resolver el problema.

Problema 2 de la actividad VII del estudio final

En el segundo problema, se proporcionaron a los alumnos las siguientes instrucciones para encontrar un tesoro.

A partir del árbol, camina:

35 pasos hacia el este;

30 pasos hacia el norte;

15 pasos hacia el oeste;

60 pasos hacia el este; y

finalmente, 20 pasos hacia el norte.

Y se les solicitó contestar la siguiente pregunta: ¿A cuántos pasos del árbol, en línea recta, está el tesoro?

La solución de este problema es que el tesoro se encuentra a $10\sqrt{89}$ pasos del árbol, en línea recta. Este problema fue resuelto por 18 alumnos; 2 obtuvieron la solución correcta, 14 no obtuvieron la solución correcta, pero siguieron un procedimiento adecuado, y 2 alumnos no terminaron el ejercicio. Los alumnos siguieron un procedimiento similar al descrito en el cuadro 4.11 para dibujar el segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro.

Cuadro 4.11. Etapas del procedimiento para ubicar el segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro

Etapa
1).- Dibujaron el árbol y lo tomaron como punto de referencia.
2).- Siguieron la primera instrucción: Caminar 35 pasos hacia el este.
3).- Siguieron la segunda instrucción: Partiendo de la posición de la etapa 2, caminar 30 pasos hacia el norte.
4).- Siguieron la tercera instrucción: Partiendo de la posición de la etapa 3, caminar 15 pasos hacia el oeste.
5).- Siguieron la cuarta instrucción: Partiendo de la posición de la etapa 4, caminar 60 pasos hacia el este.
6).- Siguieron la quinta instrucción: Partiendo de la posición de la etapa 5, caminar 20 pasos hacia el norte para obtener la ubicación del tesoro.
7).- Una vez ubicado el tesoro, los alumnos unen al árbol con el tesoro a través de un segmento rectilíneo.

Para realizar esta actividad la mayoría de los alumnos requirió dibujar los cuatro puntos cardinales. Después de dibujar el segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro, los alumnos eligieron seguir uno de los siguientes dos caminos para resolver el problema.

a).- Visualizar y construir el triángulo rectángulo con hipotenusa igual al segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro; posteriormente, construir los cuadrados sobre cada uno de los catetos del triángulo, y finalmente sumar las áreas de dichos cuadrados y obtener la raíz cuadrada de ese valor numérico, el cual corresponde a la longitud de la hipotenusa del triángulo (segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro).

b).- Visualizar que se puede construir un triángulo rectángulo con hipotenusa igual al segmento rectilíneo; construir o no el triángulo rectángulo y determinar la longitud de sus lados. Finalmente se aplicó el resultado calculado para los triángulos rectángulos en la actividad (véase el cuadro 4.5), por lo que no fue necesario construir los cuadrados sobre los lados del triángulo.

La mayoría de los alumnos logró visualizar que con el segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro se podía construir un triángulo rectángulo.

Los siguientes son algunos de los errores cometidos por los alumnos que no obtuvieron la respuesta correcta del problema 2 del estudio final.

1).- Realizar de forma incorrecta una o más etapas del procedimiento para ubicar el segmento rectilíneo que une al árbol con el tesoro.

2).- Prolongar los lados del triángulo hasta los ejes del plano cartesiano (que incidió en el resultado de las áreas de los cuadrados construidos).

3).- Contar el número de pasos sobre la horizontal al árbol, y no sobre la visual.

La dificultad presentada por la mayoría de los alumnos fue seguir correctamente las instrucciones dadas para localizar el tesoro, además de visualizar el triángulo rectángulo que implícitamente se encontraba inmerso en el problema. A pesar de que algunos alumnos ubicaron mal el triángulo rectángulo implicado en el problema, en los esquemas que realizaron se tienen indicios de que aplicaron correctamente el teorema de Pitágoras gracias a que lo han dotado de un sentido geométrico. En la figura 4.21 se presentan los resultados obtenidos por uno de estos alumnos.

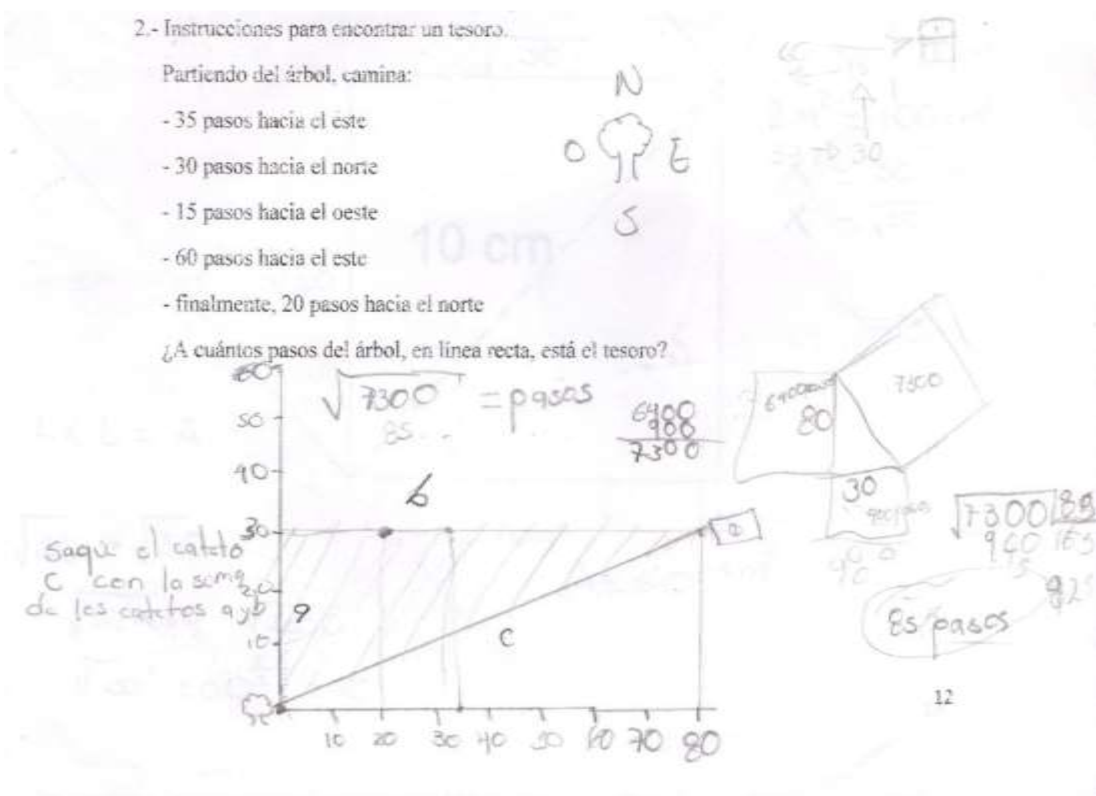


Figura 4.21. Resultado de un alumno que ubicó de forma errónea el triángulo rectángulo implicado en el problema 2 del estudio final, pero que aplicó correctamente el teorema de Pitágoras

Problema 3 de la actividad VII del estudio final

En el tercer problema, se proporcionó a los alumnos la figura 4 (véase el apéndice F) y se mencionó que el triángulo *ABC* es rectángulo isósceles. Y que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es de 4.5 cm^2. Posteriormente se les pidió que contestaran la siguiente pregunta: ¿Cuánto mide cada uno de los catetos del triángulo?

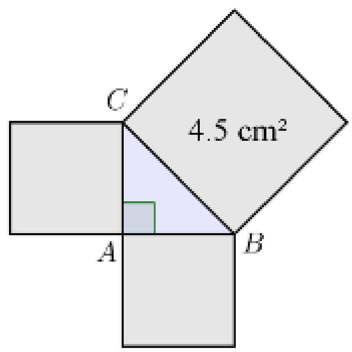


Figura 4

La solución de este problema es que cada uno de los catetos del triángulo *ABC* mide $\sqrt{\frac{4.5}{2}} = \frac{3}{2}$ cm. Este problema fue resuelto por 18 alumnos, de los cuales 10 obtuvieron la solución correcta, 7 no obtuvieron la solución correcta, pero siguieron un procedimiento adecuado, y 1 no terminó su trabajo.

Los 10 alumnos que obtuvieron la solución correcta del problema siguieron un procedimiento similar al descrito en el cuadro 4.12. Estos 10 alumnos obtuvieron como medida de los catetos $\sqrt{2.25} = 1.5$ (véase la figura 4.22); sólo 3 de ellos reconocieron que la unidad de medida era el cm; los demás escribieron como unidad de medida cm^2, o no anotaron unidad alguna.

Cuadro 4.12. Etapas del procedimiento de resolución del problema 3

del estudio final

Etapa
1).- Reconocieron que es un triángulo rectángulo, por lo que la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos es 4.5 cm^2.
2).- Dedujeron que los cuadrados construidos en los catetos tienen la misma longitud de sus lados y área porque es un triángulo rectángulo isósceles.
3).- Determinaron el área de cada uno de los cuadrados construidos en los catetos tomando la mitad del área del cuadrado construida en la hipotenusa.
4).- Obtuvieron la longitud de cada cateto calculando la raíz cuadrada del área de uno de los cuadrados construido en los catetos.

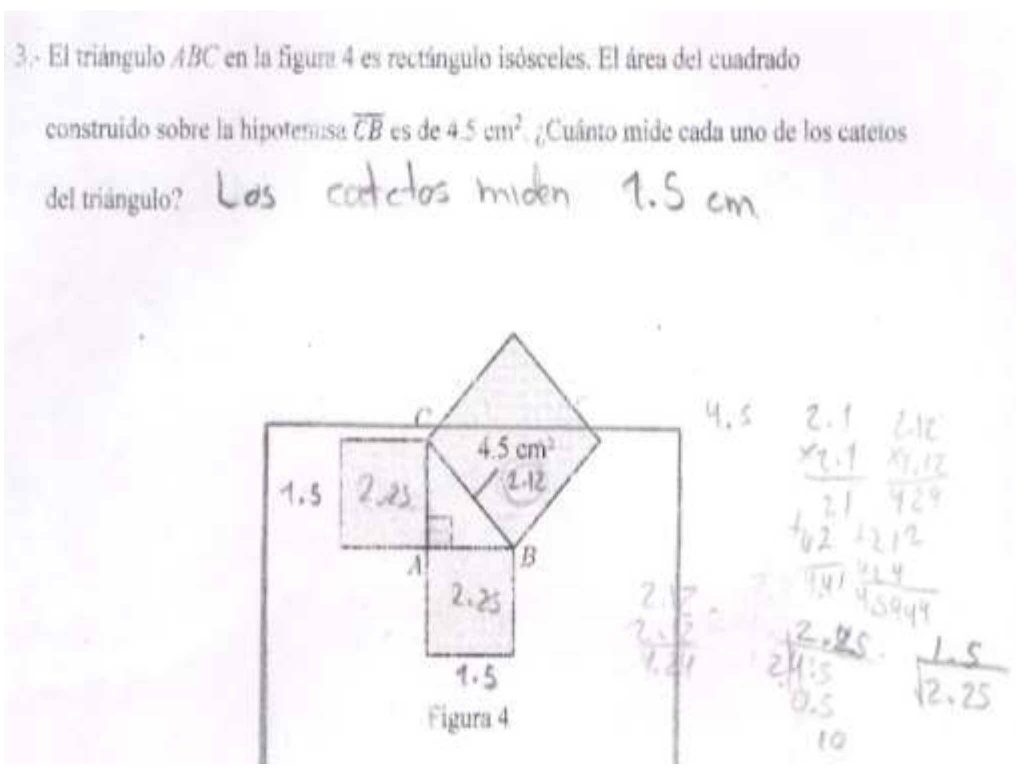


Figura 4.22. Resultado obtenido por un alumno para el problema 3 del estudio final

Algunos de los errores que cometieron los 7 alumnos que no obtuvieron la solución correcta del problema fueron los siguientes.

1).- Consideraron que 4.5 cm^2 correspondían a la longitud del lado del cuadrado construido en la hipotenusa del triángulo rectángulo. La longitud que asignaron a los catetos fue $\sqrt{\frac{(4.5)^2}{2}} \approx$ 3.18 (error cometido por 3 alumnos).

2).- En la etapa 4 del procedimiento descrito en el cuadro 4.12, en lugar de calcular la raíz cuadrada del área de uno de los cuadrados construidos en los catetos, los alumnos tomaron la mitad del área y la consideraron como la longitud del cateto del triángulo rectángulo. Asumieron que la longitud de los catetos era igual a $\frac{2.25}{2} = 1.125$ (error cometido por 2 alumnos).

3).- Después de realizar la etapa 3 del procedimiento descrito en el cuadro 4.12, los alumnos asumieron que el resultado obtenido correspondía a las longitudes de los catetos, es decir que la longitud de los catetos era igual a $\frac{4.5}{2} = 2.25$ (error cometido por 2 alumnos).

4).- El alumno que no terminó el problema realizó la operación $\frac{2.25}{2} = 1.125$.

La mayoría de los alumnos reconoció que al tratarse de un triángulo rectángulo se podía aplicar el teorema de Pitágoras. Además, el haber dotado de sentido geométrico a este resultado matemático incidió en que los alumnos obtuvieran la respuesta de este problema sin recurrir a la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$.

Problema 4 de la actividad VII del estudio final

En este cuarto problema se proporcionó a los alumnos la imagen de un cuadrado cuya diagonal medía 10 centímetros (figura 5; véase el apéndice F) y se les solicitó que determinaran cuál era el área de este cuadrado.

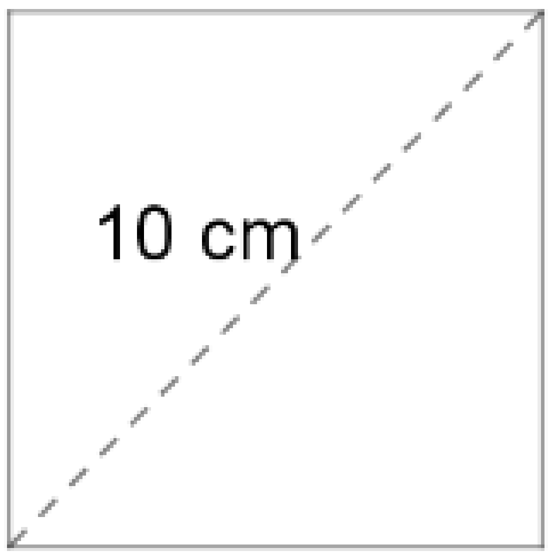


Figura 5

La solución de este problema es que el cuadrado cuya diagonal mide 10 centímetros tiene una superficie de $50\ \text{cm}^2$. Este problema fue resuelto por 18 alumnos, de los cuales 12 obtuvieron la solución correcta (véase la figura 4.23), 4 no obtuvieron la solución correcta pero siguieron un procedimiento adecuado, y 2 no terminaron su trabajo. Los alumnos siguieron un procedimiento similar al descrito en el cuadro 4.13.

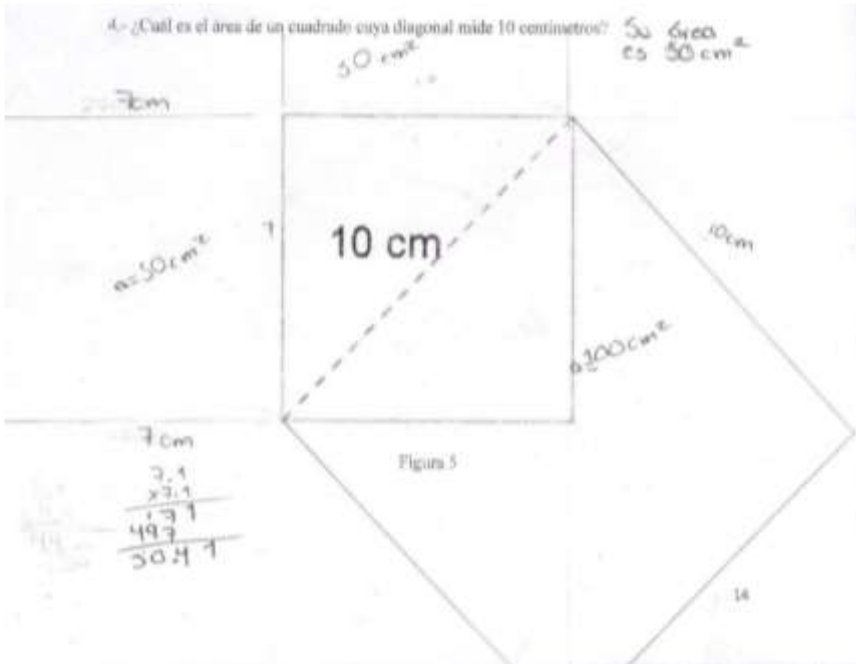


Figura 4.23. Resultado obtenido por un alumno para el problema 4 del estudio final

Cuadro 4.13. Etapas del procedimiento de resolución del problema 4 del estudio final

Etapa
1).- Visualizaron uno de los triángulos rectángulos que tiene como hipotenusa la diagonal de longitud 10 cm del cuadrado.
2).- Construyeron cuadrados en cada uno de los lados del triángulo rectángulo con la misma longitud de estos.
3).- Reconocieron que se trata de un triángulo rectángulo isósceles; concluyeron que la medida de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados más pequeños debe ser la mitad del área del cuadrado construido sobre la diagonal de longitud 10 cm.
4).- Obtuvieron el área del cuadrado construido en la diagonal elevando al cuadrado la longitud de ésta.
5).- Dividieron entre 2 el valor del área del cuadrado construido sobre la diagonal de longitud 10 cm para obtener el área de los cuadrados construidos en los catetos.
6).- Dedujeron que la longitud de los lados más pequeños del triángulo se obtiene calculando la raíz cuadrada del valor de su área.
7).- Obtuvieron el área del cuadrado que contiene la diagonal de longitud 10 cm elevando al cuadrado la longitud de uno de sus lados.

De los 12 alumnos que obtuvieron la respuesta correcta, 4 llevaron a cabo todo el procedimiento descrito en el cuadro 4.13; 3 omitieron las etapas 6 y 7 del proceso porque se percataron de que los cuadrados construidos en los catetos de uno de los triángulos rectángulos isósceles eran de igual medida que el cuadrado que tiene la diagonal de 10 cm, por lo que su área era la misma, de 50 cm^2; y 3 omitieron la etapa 2 porque visualizaron los cuadrados y no necesitaron construirlos, además de las etapas 6 y 7 por las mismas razones que los alumnos anteriores. Dos alumnos utilizaron una regla graduada para medir la longitud del cuadrado porque se percataron de que la diagonal medía exactamente 10 cm.

Los errores cometidos por los alumnos que no obtuvieron la solución correcta del problema son los siguientes.

1).- Considerar que el área del cuadrado solicitado era igual al área del cuadrado construido sobre la diagonal.

2).- Considerar que el dato 10 cm correspondía al área del cuadrado construido sobre la diagonal dada.

3).- Aplicaron la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ y realizaron erróneamente el despeje de x en la expresión algebraica $(100)^2 = 2x^2$, obteniendo como resultado $x = 50$.

De los errores mencionados se deduce que ocurrieron en mayor medida a causa de la interpretación errónea de los datos del problema, además que el uso de la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ aumenta la posibilidad de cometer un error aritmético o algebraico.

Muy pocos alumnos dieron la solución del problema con la unidad de área, la mayoría sólo registró el resultado numérico a pesar de que se les exhortó a que registraran también la unidad de área utilizada.

Hay indicios de que el sentido geométrico con el que dotaron al teorema de Pitágoras ayudó a los alumnos a resolver de forma correcta el problema sin tener que utilizar la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$.

Problema 5 de la actividad VII del estudio final

En el quinto problema de la actividad VII del estudio final, se proporcionó a los alumnos la figura 6 (véase el apéndice F) y se mencionó que el lado del cuadrado tiene 4 unidades de longitud. Se les pidió que contestaran la siguiente pregunta: ¿Cuánto mide el radio *R* de la circunferencia circunscrita?

La solución de este problema es que el radio *R* de la circunferencia circunscrita (véase la figura 6) es igual a $2\sqrt{2}$ u. Este problema fue resuelto por 18 alumnos, de los cuales 12 obtuvieron la solución correcta; 4 no obtuvieron la solución correcta pero siguieron un procedimiento adecuado, y 2 no terminaron su trabajo.

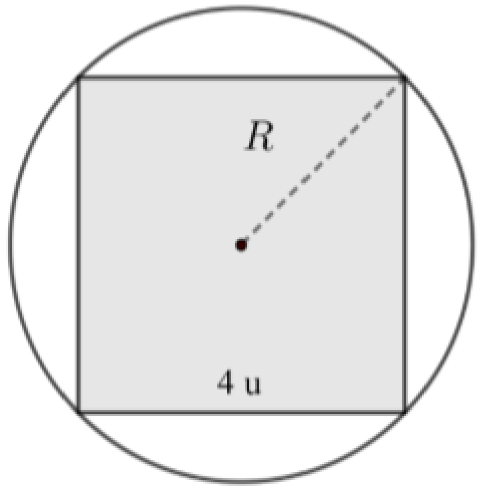


Figura 6

Los alumnos siguieron un procedimiento similar al descrito en el cuadro 4.14.

Cuadro 4.14. Etapas del procedimiento de resolución del problema 5 del estudio final

Etapa
1).- Ubicaron uno de los triángulos rectángulos de catetos 4 u e hipotenusa 2*R* en el cuadrado inscrito, y lo dibujaron.
2).- Dedujeron que el triángulo rectángulo dibujado es isósceles porque sus catetos tienen la misma longitud.
3).- Construyeron cuadrados en cada uno de los lados del triángulo rectángulo isósceles con la misma longitud de éstos.
4).- Calcularon el área de los cuadrados construidos en los lados más pequeños del triángulo rectángulo.
5).- Aplicaron el teorema de Pitágoras para calcular el área del cuadrado construido sobre el lado más grande del triángulo rectángulo, el de longitud 2*R*.
6).- Calcularon la raíz cuadrada del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa para calcular su longitud.
7).- Obtuvieron el valor de *R* tomando la mitad de la longitud de la hipotenusa.

De los 12 alumnos que obtuvieron la respuesta correcta (véase las figuras 4.24 y 4.25), 5 alumnos llevaron a cabo todo el procedimiento descrito en el cuadro 4.14; 3 alumnos no construyeron los cuadrados y utilizaron el resultado obtenido para el triángulo rectángulo; 2 alumnos utilizaron la figura 6 y con ayuda de una regla graduada midieron la longitud del radio *R* de la circunferencia, por lo que el resultado que dieron fue 5.6 cm. Finalmente, 2 alumnas trabajaron con el triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa de longitud *R* y catetos de 2 u.

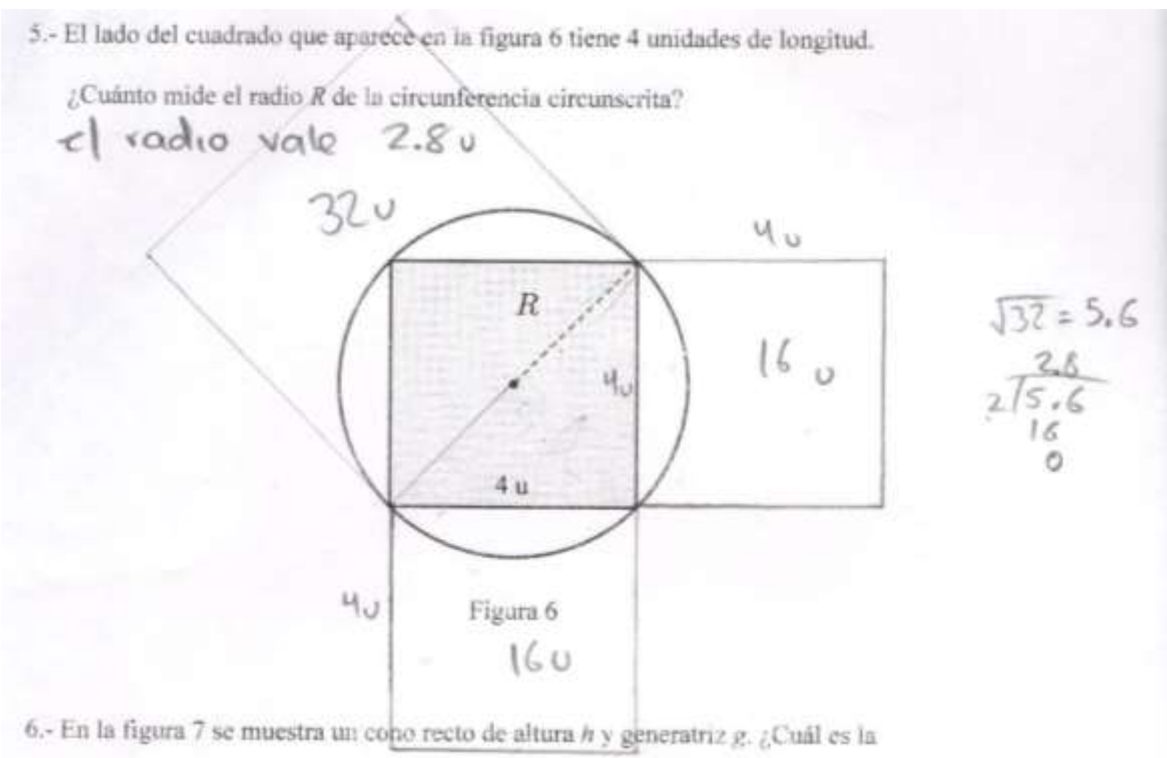


Figura 4.24. Resultado de un alumno para el problema 5 del estudio final

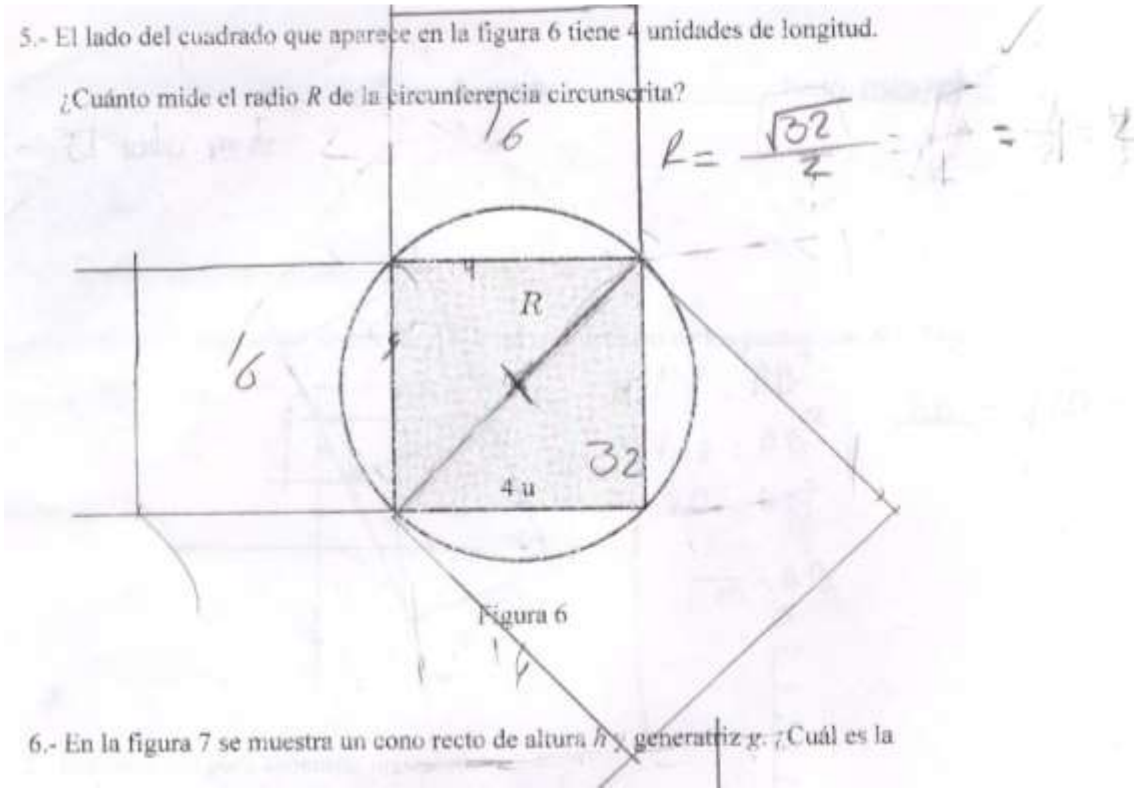


Figura 4.25 Resultado obtenido por otro alumno para el problema 5 del estudio final

Los errores cometidos por los alumnos que no obtuvieron la solución correcta del problema fueron los siguientes.

1).- Considerar que el valor de *R* es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

2).- Considerar que el valor de *R* es igual a la longitud de la diagonal del cuadrado cuyos lados miden 4 u.

3).- Considerar que el dato de 4 u correspondía a las áreas de los cuadrados construidos en los catetos del triángulo.

4).- Despejar de forma errónea el valor de c en la expresión $2(4^2) = c^2$, obteniendo que $c = 16$ u.

- La mayoría de los alumnos no se acostumbra a registrar en sus resultados la unidad de medición utilizada. Los que registraron en sus resultados unidades de área utilizaron cm^2 o u^2.

Los alumnos tuvieron dificultades para identificar el triángulo rectángulo con el que trabajaron; pero una vez que lo identificaron, lograron resolver de forma correcta el problema sin tener que utilizar la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, gracias al sentido geométrico con el que dotaron al teorema de Pitágoras (véanse las figuras 4.24 y 4.25).

Problema 6 de la actividad VII del estudio final

En el sexto problema de la actividad VII del estudio final, se proporcionó a los alumnos la figura 7 (véase el apéndice F) y se mencionó que se trataba de un cono recto de altura h y generatriz g. Posteriormente se les pidió que contestaran la siguiente pregunta: ¿Cuál es la expresión del radio *r* de la base, en función de h y g?

La solución de este problema es que para el cono circular recto la expresión del radio *r* de la base, en función de h y g, es $r = \sqrt{g^2 - h^2}$. Este problema fue resuelto por 18 alumnos, de los cuales 7 obtuvieron la solución correcta, 9 no obtuvieron la solución correcta pero siguieron un procedimiento adecuado, y 2 no terminaron su trabajo.

Este problema fue el que se les dificultó más a los alumnos porque no estaban acostumbrados a trabajar con variables: no entendían a qué se refería “dar una expresión del radio *r* de la base en función de *h* y *g*". Pensaron que tenían que calcular el valor numérico de las literales *r*, *h* y *g*. Incluso asumieron que al igual que en los primeros cinco problemas, el valor de cada literal podía obtenerse midiendo las longitudes con una regla graduada.

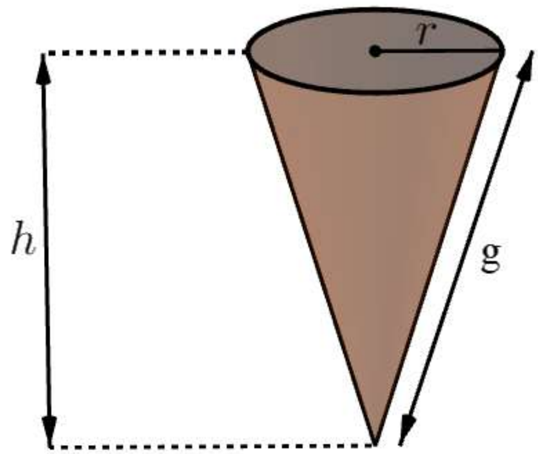


Figura 7

Una vez que algunos alumnos investigaron en internet cómo se genera un cono recto, comprendieron que las literales *r*, *h* y *g* no requerían tener un valor numérico determinado. Otros alumnos investigaron en internet la fórmula del volumen del cono recto, y trataron de mostrar que ésa era la correcta.

Después de insistirles en que trataran de visualizar alguna figura geométrica conocida que les permitiera aplicar algún resultado o procedimiento conocido, los alumnos mencionaron que podían visualizar un triángulo rectángulo, y una vez que lo dibujaron comenzaron a construir cuadrados en los lados del triángulo (véase la figura 4.26). En el cuadro 4.15 se describe cada una de las etapas del procedimiento de la mayoría de los alumnos que lograron obtener la solución correcta del problema, y en la figura 4.27 se muestra una imagen de la construcción de los cuadrados sobre los lados del triángulo de dimensiones r, h y g.

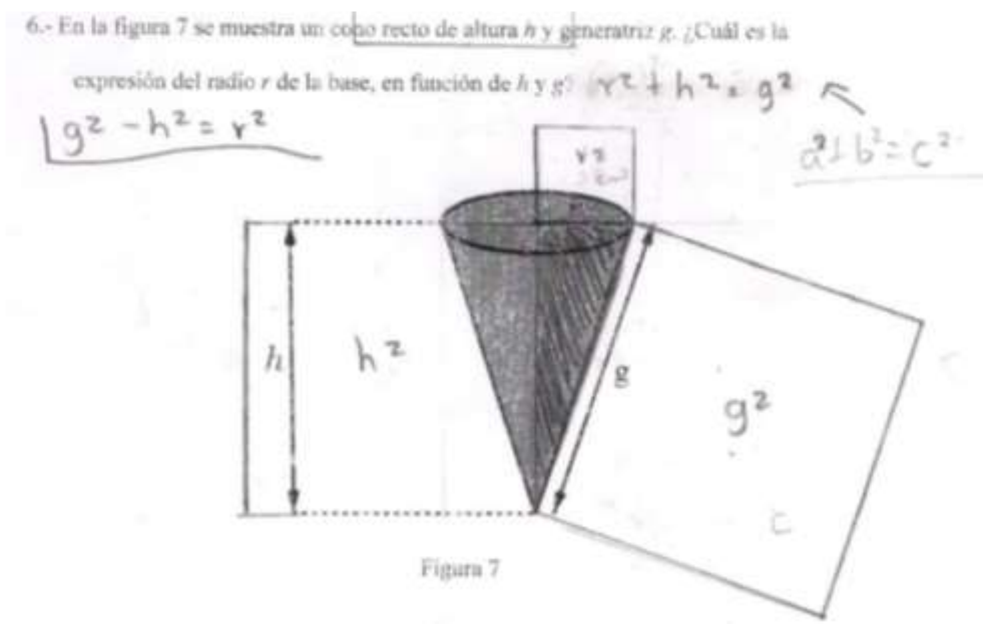


Figura 4.26. Resultado obtenido por un alumno para el problema 6 del estudio final

Cuadro 4.15. Etapas del procedimiento de resolución del problema 6 del estudio final

Etapa
1).- Visualizaron el triángulo rectángulo que se forma con el radio r, la altura h y la generatriz g del cono recto de la figura 7, y lo dibujaron.
2).- Construyeron cuadrados en cada uno de los lados del triángulo rectángulo con la misma longitud de los lados.
3).- Determinaron el área de cada uno de los cuadrados construidos utilizando las literales asignadas a cada lado.
4).- Aplicaron el teorema de Pitágoras para deducir una expresión algebraica que relacione a las tres áreas de los cuadrados construidos sobre cada lado del triángulo rectángulo ($r^2 + h^2 = g^2$, $g^{\,2} - h^2 = r^2$ o $r = \sqrt{g^{\,2} - h^2}$).

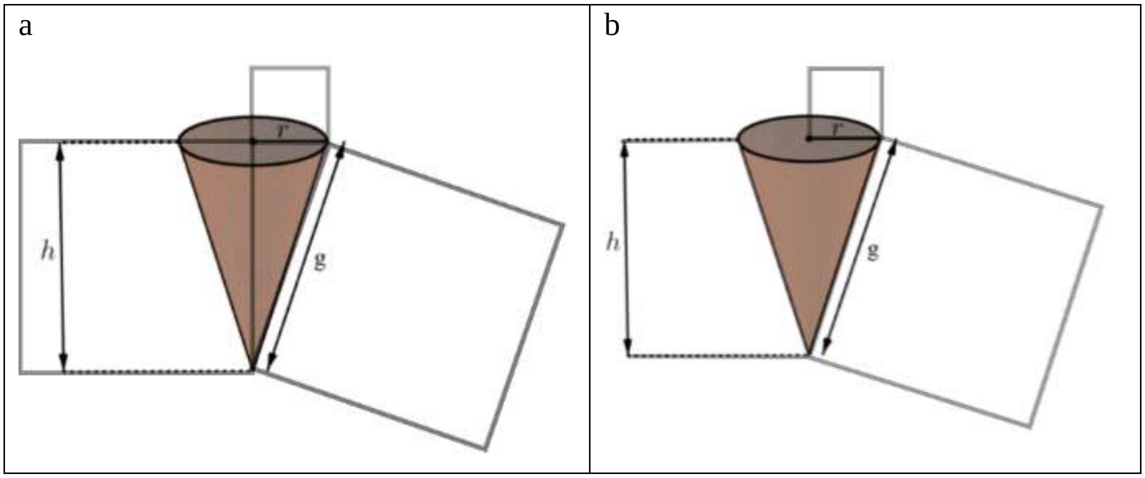


Figura 4.27. Construcción de cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo de dimensiones *r*, *h* y *g*

Para los alumnos representó un gran reto que el triángulo rectángulo se encontrara rotado porque eso impedía distinguir la ubicación correcta de los catetos y la hipotenusa. Esta situación provocó que los alumnos construyeran erróneamente los cuadrados sobre los lados del triángulo. En la figura 4.28 se presentan las distintas construcciones que realizaron algunos alumnos.

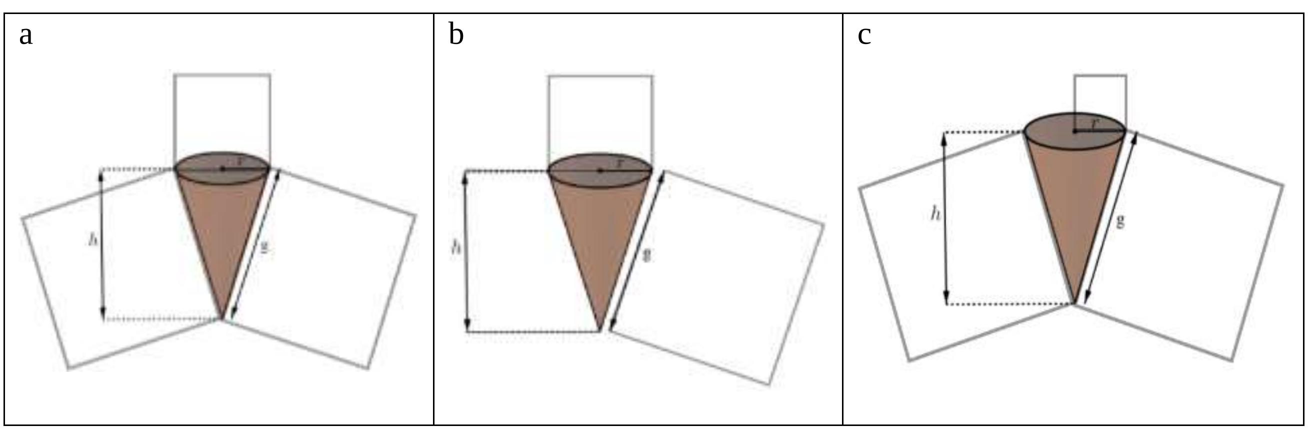


Figura 4.28. Construcción de los cuadrados sobre los lados de los triángulos visualizados por algunos alumnos

Estas visualizaciones del triángulo incidieron en que los alumnos dedujeran una relación errónea entre las áreas de los cuadrados construidos o en su caso no concibieran una relación entre las áreas de los cuadrados. Los esquemas de la figura 4.28 son indicios de que los alumnos consideraron el triángulo acutángulo isósceles formado por la generatriz y el diámetro del cono, por lo que construyeron los cuadrados en cada uno de sus lados. A causa de estos esquemas, los alumnos evitaron aplicar el teorema de Pitágoras. Lo anterior es indicio de que los alumnos se habían apropiado del resultado obtenido para los triángulos acutángulos descubierto en la actividad II de este estudio final.

De la resolución de los seis problemas de esta actividad VII del estudio final se corrobora que los alumnos no sólo dotaron de sentido geométrico al teorema de Pitágoras, sino que también dotaron de sentido geométrico a los resultados descubierto en las actividades III y IV del estudio final para triángulos acutángulos y obtusángulos. También se obtuvieron indicios de que al aplicar la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ aumentaba la posibilidad de que los alumnos cometieran errores de tipo aritmético o algebraico.

Una vez que los alumnos descubrieron los resultados directos que satisfacen la relación entre las áreas de dos de los cuadrados y el tercer cuadrado construidos sobre los lados de un triángulo ya sea acutángulo, obtusángulo o rectángulo, estaban en condiciones de descubrir los conversos de estos resultados, como se presenta en la actividad VIII del estudio final que se trabajó en la siguiente sesión.

Sesión 5 del estudio final

La quinta, y última, sesión tuvo una duración de 50 minutos y a ella asistieron 19 de los 20 alumnos del grupo. En esta sesión se aplicó la actividad VIII del estudio final, cuyo objetivo fue que los alumnos descubrieran el converso del teorema de Pitágoras y los conversos de la primera parte de las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides.

Actividad VIII del estudio final

Para que los alumnos descubrieran el converso del teorema de Pitágoras esta actividad contó con 4 incisos, con el primer inciso los alumnos relacionaron las condiciones en las que el área de tres cuadrados correspondían a los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, en el segundo inciso los alumnos identificaron las condiciones que deben satisfacer tres longitudes para que con ellas se forme un triángulo rectángulo, y con el tercer inciso los alumnos enunciaron los argumentos que utilizaron para resolver los incisos 1 y 2. Finalmente con el inciso 4 los alumnos distinguieron las condiciones en las que una terna de áreas de cuadrados corresponde a las áreas de cuadrados construidos sobre un triángulo acutángulo, obtusángulo y rectángulo, y en qué condiciones no se forma un triángulo.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los incisos de esta actividad.

Con estos resultados se muestra cómo los alumnos descubrieron los resultados conversos para de los resultados obtenidos en las actividades II, III y IV del estudio final.

Inciso 1 de la actividad VIII del estudio final

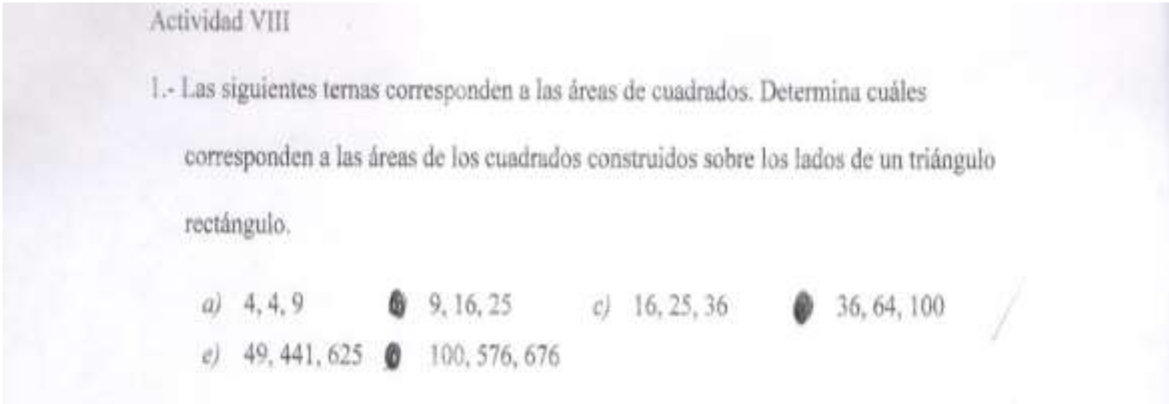
En el inciso 1 (véase el apéndice F) se proporcionaron a los alumnos las siguientes 6 ternas de áreas de cuadrados.

a)	4, 4, 9	*b)*	9, 16, 25	*c)*	16, 25, 36
d)	36, 64, 100	*e)*	49, 441, 625	*f)*	100, 576, 676

Se pidió a los alumnos que seleccionaran aquellas ternas que correspondían a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Las ternas que corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo son *b)*, *d)* y *f)*. Esta actividad fue realizada por 19 alumnos, de los cuales 1 no seleccionó correctamente las tres ternas que correspondían a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, y 18 alumnos sí seleccionaron las ternas correctamente. De estos últimos alumnos, sólo 2 realizaron un registro escrito de sus operaciones.

La mayoría de los alumnos dio por sentado que todas las ternas de áreas correspondían a las áreas de los cuadrados construidos sobre un triángulo, por lo que no requirieron comprobar que esto realmente era verdad. En general, los 18 alumnos realizaron la suma de dos áreas y el resultado lo compararon con el área restante de la terna. Si resultaban iguales entonces seleccionaban la terna de áreas de cuadrados como la terna que contenía las áreas de cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. En la figura 4.29 se presenta la elección de las ternas realizada por un alumno.



Actividad VIII

1.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9 *b)* 9, 16, 25 *c)* 16, 25, 36 *d)* 36, 64, 100
e) 49, 441, 625 *f)* 100, 576, 676

Figura 4.29. Selección de las ternas realizada por un alumno para el inciso 1 de la actividad VIII del estudio final

Con el trabajo realizado en este inciso se pudo constatar que inicialmente los alumnos consideraban que dadas tres áreas, éstas correspondían a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo y al finalizar la actividad se percataron de que no siempre sucede esto, por lo que tenían que verificarlo y no darlo por sentado.

Similarmente los alumnos necesitaron descartar la posibilidad de que dadas cualesquiera tres longitudes con ellas se puede construir un triángulo rectángulo. Este trabajo realizado por los alumnos se presenta en el siguiente inciso.

Inciso 2 de la actividad VIII del estudio final

En el inciso 2 se pidió a los alumnos que seleccionaran tres números de cada uno de los dos incisos siguientes, de manera que correspondieran a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 *b)* 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

Las ternas que corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son: para el inciso *a)* 13, 5 y 12, y para el inciso *b)* 1, 0.6 y 0.8.

Inicialmente los alumnos dieron por sentado que al igual que en el ejercicio 1 los incisos *a)* y *b)* contenían áreas de cuadrados, por lo que aplicaron la misma estrategia que usaron en el inciso 1: sumar dos números del inciso y buscar el resultado entre los números restantes. Hubo necesidad de insistir a los alumnos en que volvieran a leer con detenimiento el enunciado del ejercicio para que identificaran qué representaban los números contenidos en cada inciso.

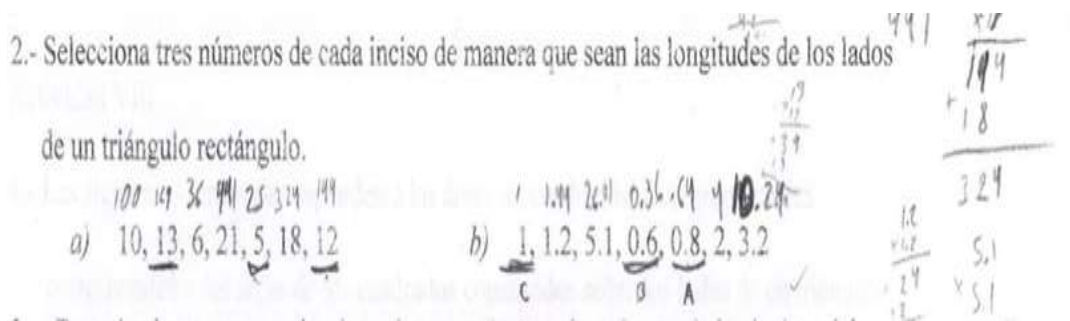
Una vez entendido el texto del inciso, la mayoría de los alumnos comenzó a elevar al cuadrado los números de cada inciso para obtener el área de los cuadrados que tenían lados con las longitudes dadas, y así poder seleccionar la terna de longitudes a las que correspondían. De los 19 alumnos que asistieron a esta sesión, 1 alumno no realizó el trabajo de este inciso; 1 alumno continuó considerando los números dados en cada caso como áreas, por lo que lo resolvió de forma incorrecta, y 17 alumnos determinaron correctamente la terna de números que corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo en cada caso.

Los registros escritos de los 17 alumnos que seleccionaron las ternas de números correctamente, consistieron en lo siguiente.

a).- Anotaron la operación matemática realizada (multiplicación).

b).- Anotaron arriba de cada número el resultado de elevar al cuadrado dicho número.

El primer registro fue utilizado por 10 alumnos (para un ejemplo, véase la figura 4.30) y el segundo por 5; estos últimos utilizaron su calculadora para obtener el cuadrado de los números.


2.- Selecciona tres números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 b) 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

Figura 4.30. Selección de las ternas de números de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, realizada por un alumno participante en el estudio final

En general, los 17 alumnos realizaron la suma de dos áreas y el resultado lo compararon con el área restante de la terna. Si resultaban iguales entonces seleccionaban la terna como la de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Algunos alumnos mencionaron que si la suma de los cuadrados de dos longitudes era mayor el triángulo era acutángulo; y si era menor, el triángulo era obtusángulo. Lo anterior es indicio de que los alumnos estaban manejando los resultados conversos descubiertos para los triángulos acutángulos y obtusángulos.

El resultado deducido en el inciso 2 influyó positivamente en el pensamiento de la mayoría de los alumnos a la hora de realizar el trabajo del inciso 3, pues los alumnos eran conscientes de que tenían que elegir con cuidado las tres longitudes o de lo contrario no se formaría el triángulo rectángulo. Incluso concluyeron que para que fuera posible tener un triángulo rectángulo era necesario que al seleccionar dos longitudes y calcular su cuadrado, la suma de estos dos cuadrados debería ser igual al cuadrado de una tercera longitud.

En el siguiente inciso se muestran los argumentos que los alumnos utilizaron para realizar el trabajo de los incisos 1 y 2.

Inciso 3 de la actividad VIII del estudio final

En este inciso se solicitó a los alumnos que explicaran en qué se basaron para seleccionar los tres números de cada uno de los casos del inciso 2 (véase el apéndice F). Cuando los alumnos consideraban que cada uno de los casos del inciso 2 correspondía a las áreas de cuadrados, los argumentos que dieron son los siguientes.

a).- Que los 2 lados menores sumaran el área del mayor.

b).- Que al sumar 2 diera como resultado el tercero.

c).- Con base en que los lados menores sumados den el lado mayor del triángulo.

d).- Que la suma de las áreas de los cuadrados menores da el área del cuadrado mayor.

Cuando los alumnos comprendieron el enunciado del inciso 2, algunas de sus respuestas fueron las siguientes.

a).- En que dos números menores sumaran un número mayor.

b).- En multiplicar todos los números por sí mismos para obtener las áreas, con los resultados obtenidos sumar para obtener un tercer resultado que debería corresponder a alguna de las áreas obtenidas anteriormente.

c).- En que se tuvo que multiplicar cada dato por sí mismo y luego encontrar 2 áreas que sumadas dieran la tercera.

d).- Sacando el cuadrado de cada número y sumando el cuadrado de ellos y viendo si daba alguno de los otros cuadrados.

e).- Primero los elevé al cuadrado y después tomé dos números para obtener el tercero.

f).- Elevé los números al cuadrado y después sumé un par de números para obtener el tercero.

g).- Sacando el cuadrado de cada uno y vi que sumados daba uno de la lista.

h).- Al sumar el área de los cuadrados pequeños formados en un triángulo rectángulo es igual al área del mayor.

i).- Multiplicando por sí mismo cada uno de los números más pequeños para sacar el cuadrado del más grande.

j).- Conforme los cuadrados son áreas, al sumarlas deben dar el área de un cuadrado mayor exacto (triángulo rectángulo).

k).- Teorema de Pitágoras [$a^2 + b^2 = c^2$] sacando el cuadrado de los números. En la figura 4.31 se presentan los registros realizados por estos alumnos.

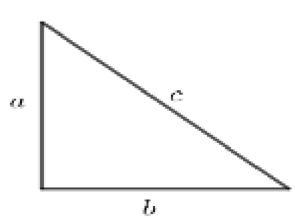
Registro geométrico	Registro algebraico
	$a^2 + b^2 = c^2$

Figura 4.31. Registros realizados por los alumnos que usaron la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$

l).- En el teorema de Pitágoras, sumando el área de los 2 cuadrados de menor medida y daba [como] resultado el área del cuadrado mayor.

m).- En el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, o el área de los cuadrados menores tiene que dar el área del cuadrado mayor (cuadrados formados con los lados del triángulo).

n).- La suma de los catetos a y b elevados al cuadrado da como resultado el cuadrado del cateto c.

o).- Debe haber un lado más largo que otros dos para que el triángulo cierre completamente, además de que al multiplicar [cada uno de] dos números por sí mismo va a dar lo mismo que el número mayor. (Redactado por el alumno; nótese que tiene confusión para determinar en qué condiciones, dadas tres longitudes se puede construir un triángulo, y además tiene dificultad para expresar la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo porque considera la suma de las áreas de los cuadrados menores y lo compara con la longitud del tercer lado).

De lo anterior se concluye que los alumnos presentaron mayor dificultad cuando los datos de los casos correspondían a longitudes y no a áreas de cuadrados. Es probable que esto sea a causa de que en su educación matemática se ha fomentado el uso del resultado *directo* del teorema de Pitágoras.

En el siguiente inciso los alumnos debían aplicar los métodos que desarrollaron en los incisos 1 y 2 para clasificar 10 ternas de números que correspondían a áreas de cuadrados.

Inciso 4 de la actividad VIII de la actividad final

En el inciso 4 (véase el apéndice F) se proporcionaron a los alumnos 10 ternas de números que correspondían a las áreas de cuadrados:

a)	4, 4, 9	*b)*	49, 441, 625	*c)*	9, 4, 49	*d)*	9, 16, 25
e)	16, 25, 36	*f)*	16, 9, 49	*g)*	100, 576, 676	*h)*	121, 144, 169
i)	49, 64, 121	*j)*	36, 64, 100				

Para estas ternas se les pidió a los alumnos lo siguiente:

I).- Determinar cuáles ternas correspondían a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo.

II).- Contestar la pregunta: ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso?, y justificar su respuesta.

Los alumnos que comprendieron que las ternas de números correspondían a áreas de cuadrados, obtuvieron las longitudes de los lados de los cuadrados que originan esas áreas siguiendo alguno de estos procedimientos:

a).- Calcular la raíz cuadrada del valor del área de cada cuadrado. Este cálculo fue realizado aplicando el algoritmo de la raíz cuadrada o utilizando la calculadora.

b).- Buscar un número que multiplicado por sí mismo fuese igual al valor del área del cuadrado.

Una vez obtenidas las longitudes de los lados de los cuadrados que dan origen a las áreas de cada una de las ternas, los alumnos verificaron si con ellas se podía formar un triángulo. Para verificar que se formaba un triángulo con las longitudes de los lados de los cuadrados, las cuales calcularon para las áreas de los cuadrados de cada terna, los alumnos sumaron dos longitudes correspondientes a una terna y la compararon con la longitud restante, si era mayor entonces concluían que sí se podía construir el triángulo.

Al seleccionar las ternas de áreas que corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, algunos alumnos mencionaron que las ternas de áreas de los casos *c)* y *f)* no corresponden a las áreas construidas sobre los lados de un triángulo. Argumentaron que con las áreas de los cuadrados de la terna *c)* se obtienen las longitudes 3, 2 y 7, siendo $3 + 2 < 7$, y con las áreas del caso *f)* se obtienen las longitudes 4, 3 y 7, siendo $4 + 3 = 7$.

Estos alumnos concluyeron que las ternas de áreas que sí corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo eran todas, excepto las ternas *c)* y *f)*, es decir, *a), b), i), d), g), j), e)* y *h)*. Además, para clasificarlas de acuerdo con el tipo de triángulo que se forma usaron dos clasificaciones:

1).- Clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos: triángulo obtusángulo, triángulo rectángulo y triángulo acutángulo.

2).- Una mezcla de la clasificación de triángulos de acuerdo con la medida de ángulos y de acuerdo con la longitud de sus lados: triángulo obtusángulo, triángulo escaleno y triángulo acutángulo.

En el cuadro 4.16 se presenta la clasificación de los triángulos utilizando la clasificación del inciso *1)* y la justificación que la mayoría dio.

Cuadro 4.16. Clasificación de triángulos según sus ángulos

Tipo de triángulo	Justificación	Ternas
Triángulo obtusángulo	La suma de dos áreas es menor que el área restante	*a), b)* e *i)*
Triángulo rectángulo	La suma de dos áreas es igual al área restante	*d), g)* y *j)*
Triángulo acutángulo	La suma de dos áreas es mayor al área restante	*e)* y *h)*

Sólo un alumno recurrió a la clasificación del inciso *2)*. En el cuadro 4.17 se presenta esta clasificación y la justificación que utilizó el alumno.

Cuadro 4.17. Clasificación de triángulos "combinada"

Tipo de triángulo	Justificación	Ternas
Triángulo obtusángulo	La suma de dos áreas es menor que el área restante	*a), b)* e *i)*
Triángulo escaleno	La suma de dos áreas es igual al área restante	*d), g)* y *j)*
Triángulo acutángulo	La suma de dos áreas es mayor al área restante	*e)* y *h)*

De los 18 alumnos que realizaron el ejercicio, 12 seleccionaron correctamente las ternas de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo siguiendo el procedimiento mencionado anteriormente, y 6 no lograron hacerlo.

De los 12 alumnos que seleccionaron correctamente las ternas que contienen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, sólo 6 clasificaron correctamente todas las ternas de áreas dependiendo del tipo de triángulo que se forma; los otros 6 alumnos clasificaron correctamente sólo algunas de las ternas (véase la figura 4.32).

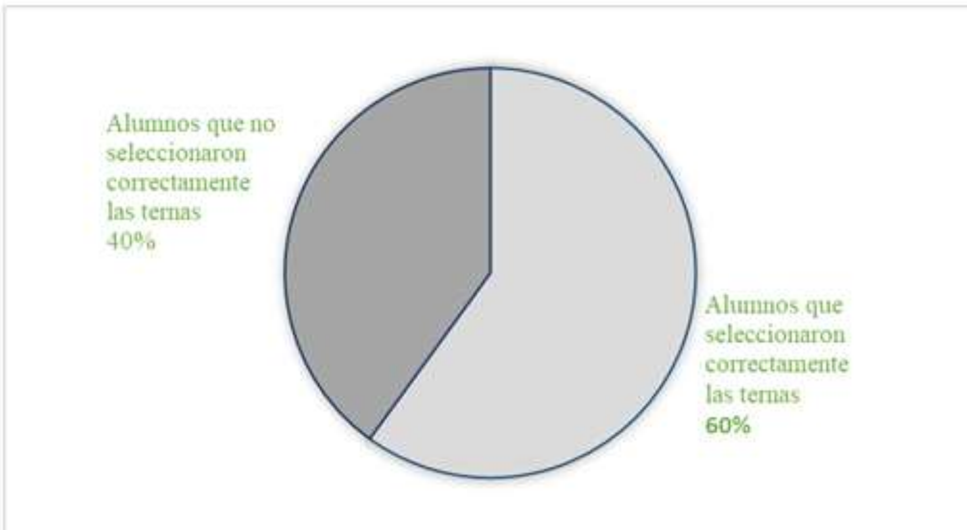


Figura 4.32. Selección de ternas que contienen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo

De los 6 alumnos que no seleccionaron correctamente las ternas que contienen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, 5 alumnos lograron clasificar algunas de las ternas correctamente y 1 alumno no realizó la clasificación (véase la figura 4.33).

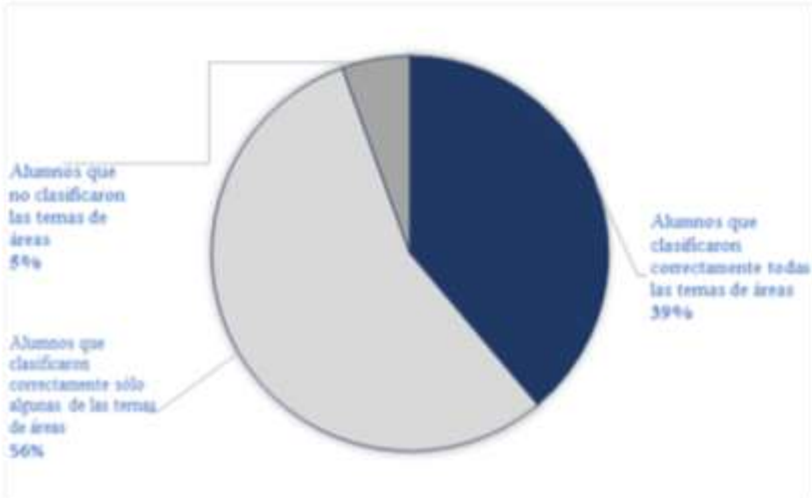


Figura 4.33. Clasificación de ternas de acuerdo con el tipo de triángulo que se forma con las longitudes de los lados de los cuadrados de las áreas dadas

Así, de los 18 alumnos que asistieron a la sesión 5, siete (7) clasificaron correctamente todas las ternas de áreas de acuerdo con el tipo de triángulo que se formaba con las longitudes de los lados de los cuadrados obtenidos a partir de las áreas dadas (triángulo obtusángulo, triángulo rectángulo o triángulo acutángulo); 10 alumnos clasificaron correctamente algunas de las ternas, y 1 alumno no clasificó las ternas.

A continuación se presentan las principales justificaciones de los alumnos para clasificar las ternas.

1).- Si sobra área, el triángulo es acutángulo. Si falta área, el triángulo es obtusángulo. Si el área es exacta, el triángulo [es] rectángulo.

2).- En los triángulos acutángulos, al hacer la suma de los cuadrados menores formados en los lados del mismo es mayor a la del cuadrado mayor. En los triángulos obtusángulos, al hacer la suma de los cuadrados menores formados en los lados del mismo, es menor a la del cuadrado mayor. En los triángulos rectángulos, la suma de los dos cuadrados menores formados del mismo es igual a la del cuadrado mayor.

3).- Obtusángulo: al sumar faltan unidades para completar el área. Rectángulo: al sumar el área de 2 cuadrados da como resultado el área del tercero. Acutángulo: al sumar el área de 2 cuadrados sobrepasa el área del tercero.

4).- Obtusángulo: al sumar el área de los cuadrados formados en los lados más pequeños el resultado es menor al del lado más grande. Acutángulo: al sumar el área de los cuadrados formados en los lados más pequeños el resultado es mayor al del lado más grande. Triángulo rectángulo: cumple con el teorema de Pitágoras.

5).- Acutángulo: La suma de los lados menores da mayor al cuadrado mayor. Obtusángulo: La suma de los lados menores da menor al cuadrado mayor. Rectángulo: La suma de los lados menores es igual al cuadrado mayor.

6).- Triángulos obtusos (la suma del área [de dos] de los □ [cuadrados] es menor al área del mayor). Triángulos rectángulos (la suma del área de los menores es igual al área del mayor). Triángulos acutángulos (la suma del área de los menores es mayor al área del mayor).

7).- Triángulo obtusángulo porque le falta área para llenar el más grande. Triángulo rectángulo porque el área de los chicos al sumarla completa el grande.

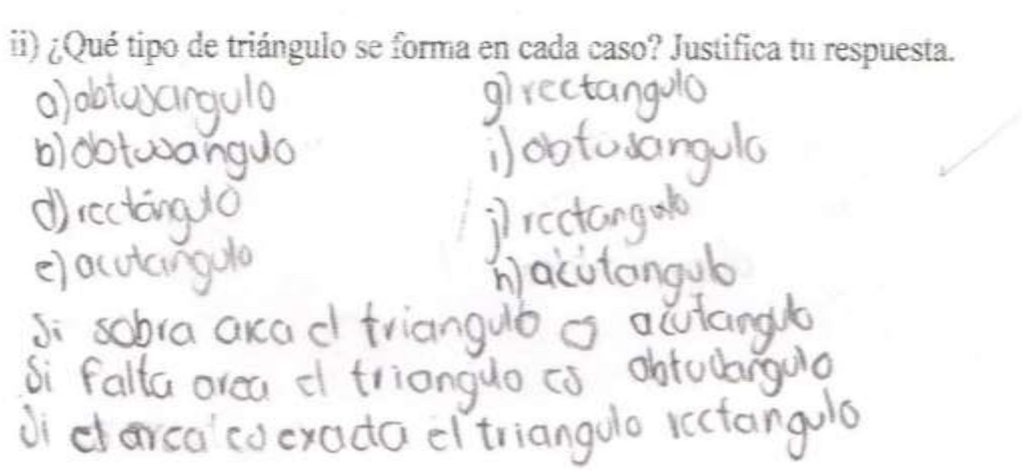
8).- Tomé en cuenta las reglas de formación para cada triángulo:

Escaleno: sus lados a^2 y b^2 es igual a c^2.

Obtusángulo: La suma de a^2 y b^2 no cubre a c^2.

Acutángulo: La suma de a^2 y b^2 excede a c^2.

Como se puede apreciar en las justificaciones dadas por los alumnos, intuitivamente estaban utilizando los conversos de los resultados descubiertos en las actividades II, III y IV del estudio final (véase la figura 4.34). Pero esto poco ayudó a que los alumnos realizaran correctamente la clasificación de las ternas porque se confundían en alguna parte del proceso.


ii) ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso? Justifica tu respuesta.

a) obtusangulo
b) obtusangulo
d) rectángulo
e) acutangulo
g) rectangulo
i) obtusangulo
j) rectangulo
h) acutangulo

Si sobra area el triangulo es acutangulo
Si falta area el triangulo es obtusangulo
Si el area es exacta el triangulo rectangulo

Figura 4.34. Argumentos utilizados por un alumno para clasificar las ternas del inciso 4 de la actividad VIII del estudio final

Algunas situaciones que se dieron con los alumnos que clasificaron correctamente algunas de las ternas son las siguientes.

1).- Tuvieron problemas con las ternas *h), i)* y *j),* principalmente porque olvidaban clasificar algunas de ellas o las clasificaban incorrectamente.

2).- Sólo clasificaron los incisos *d), g)* y *j),* que son los que corresponden a los triángulos rectángulos.

3).- Agregaban a las ternas que correspondían a los triángulos rectángulos la terna del inciso *h).*

4).- Confundieron el resultado descubierto para triángulos acutángulos y obtusángulos.

En el siguiente apartado se incluyen seis proposiciones matemáticas sobre los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos que están implicadas en lo que los estudiantes descubrieron con las 8 actividades diseñadas para trabajar con la comparación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los distintos tipos de triángulos.

Seis proposiciones matemáticas sobre los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos

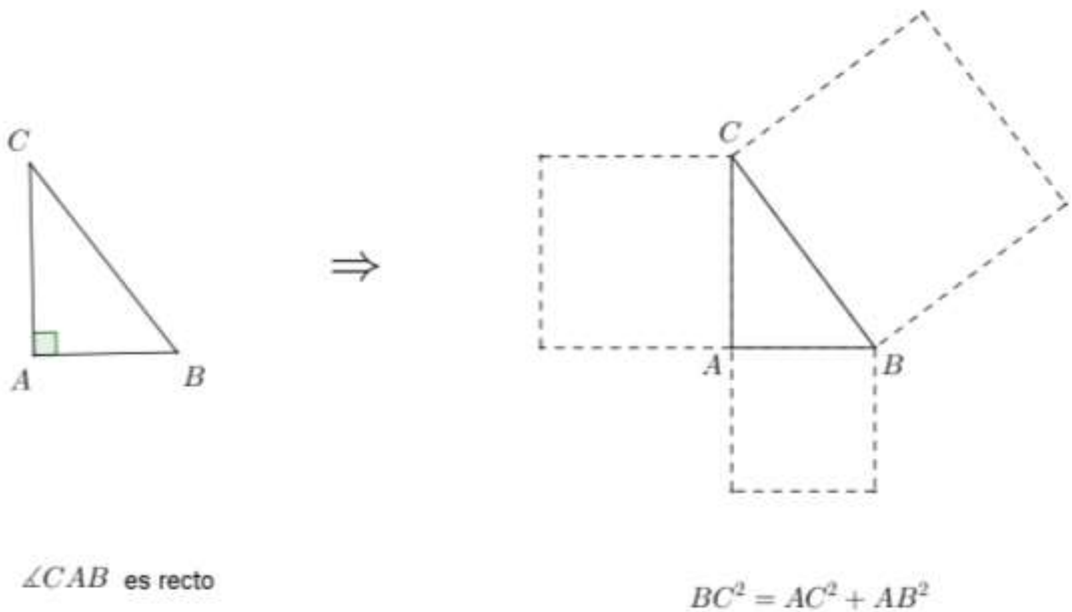
En este segundo apartado se presentan seis proposiciones matemáticas sobre los triángulos acutángulos, obtusángulos y rectángulos implicadas en lo que los estudiantes descubrieron con las 8 actividades diseñadas para trabajar con la comparación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los distintos tipos de triángulos.

Aquí están redactadas de manera formal con la intención de clarificar la trascendencia de los resultados y no como los estudiantes inicialmente las enuncian. Mediante las actividades aplicadas en el estudio final los alumnos que participaron lograron descubrir estos resultados. Algunos de ellos, dichos en sus propias palabras son: “Si el triángulo es obtusángulo, la suma de las áreas de los dos cuadrados más pequeños es menor que el área del cuadrado grande” y “Si el triángulo es acutángulo, la suma de las áreas de dos cuadrados es mayor que el área del tercer cuadrado" que son parte de las proposiciones 12 y 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 2015). Es importante señalar que estos aprendizajes constituyen un rico contexto para el estudio de la *ley de cosenos* en trigonometría.

Proposición 1

Si un triángulo es rectángulo entonces el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo recto.

En la figura 4.35 se presentan las representaciones geométrica y algebraica de esta proposición.



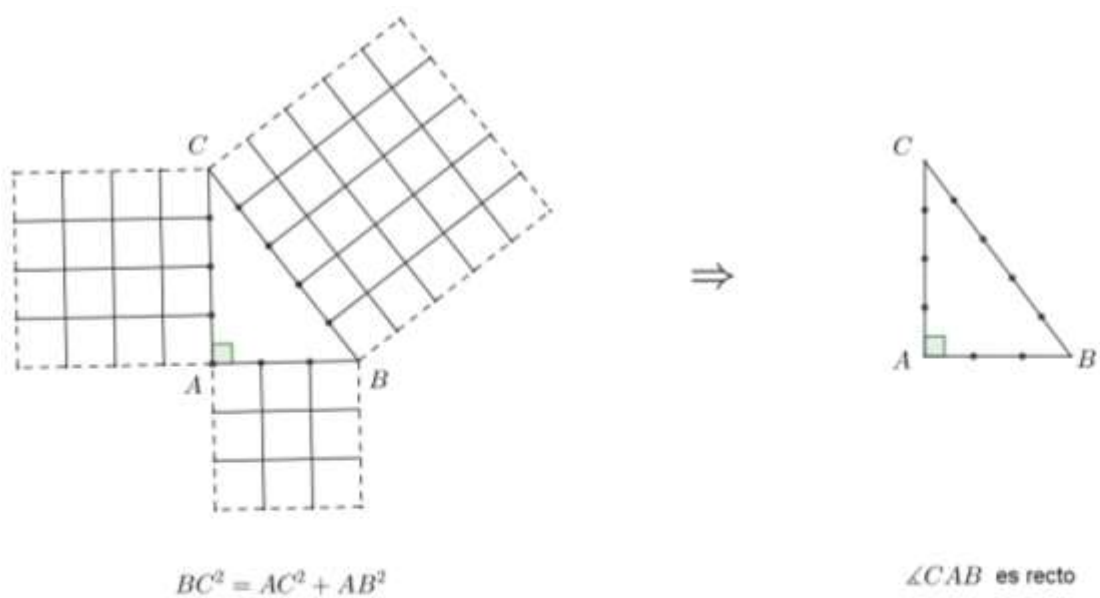
$$\measuredangle CAB \text{ es recto} \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$$

Figura 4.35. Representaciones geométrica y algebraica de la proposición 1

Proposición 2

Si en un triángulo el cuadrado sobre uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes entonces el ángulo comprendido por estos dos lados es recto.

En la figura 4.36 se presentan las representaciones geométrica y algebraica de esta proposición.



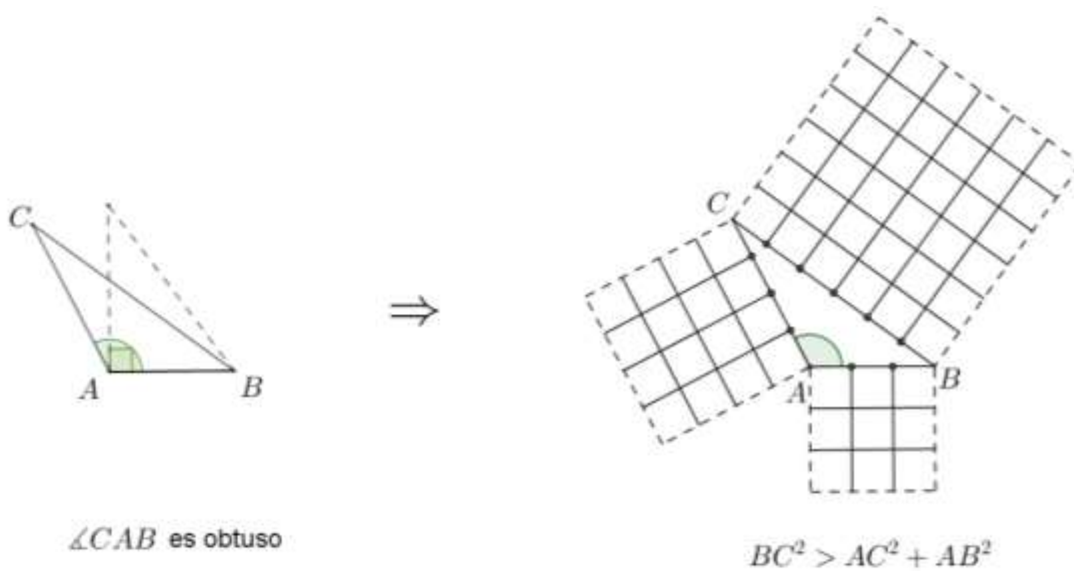
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \implies \measuredangle CAB \text{ es recto}$$

Figura 4.36. Representaciones geométrica y algebraica de la proposición 2

Proposición 3

Si un triángulo es obtusángulo entonces el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que la suma de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo obtuso.

En la figura 4.37 se presentan las representaciones geométrica y algebraica de esta proposición.



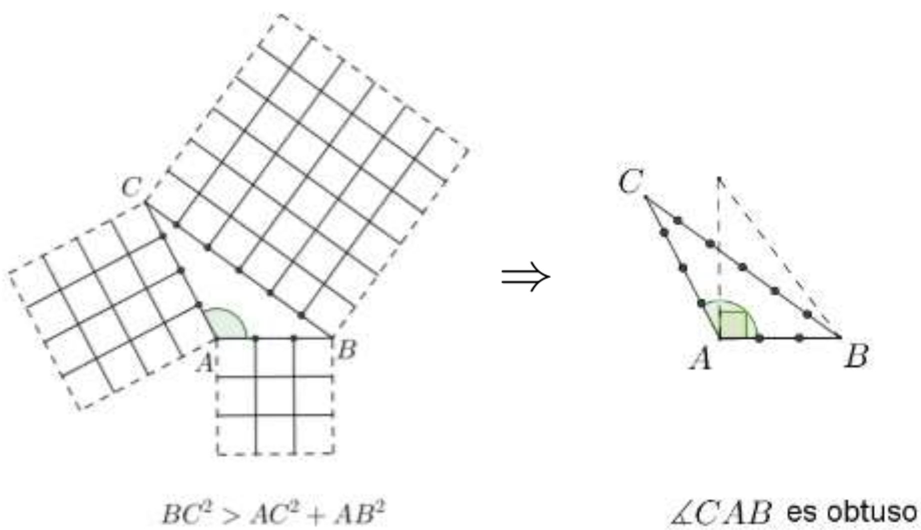
$\measuredangle CAB$ es obtuso $\Rightarrow BC^2 > AC^2 + AB^2$

Figura 4.37. Representaciones geométrica y algebraica de la proposición 3

Proposición 4

Si en un triángulo el cuadrado sobre uno de sus lados es mayor que la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes entonces el ángulo comprendido por estos dos lados es obtuso.

En la figura 4.38 se presentan las representaciones geométrica y algebraica de esta proposición.



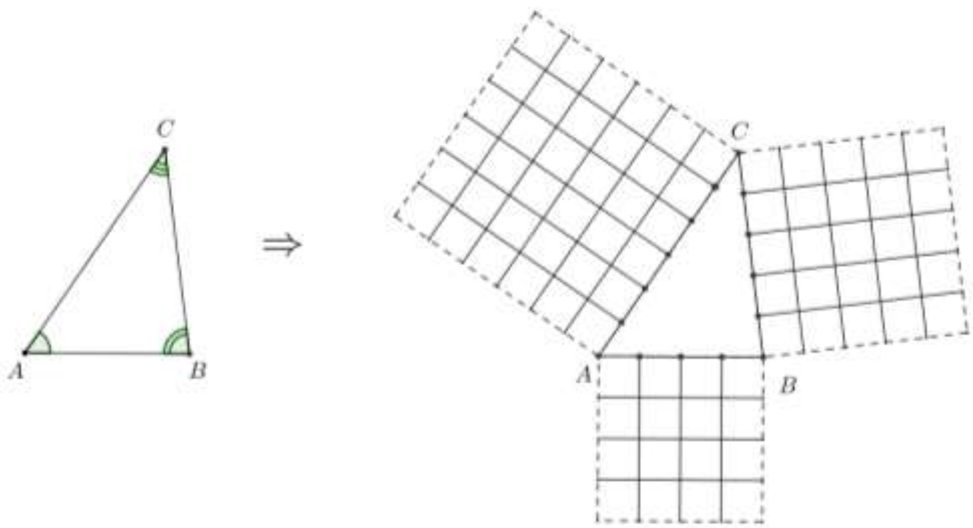
$$BC^2 > AC^2 + AB^2 \implies \measuredangle CAB \text{ es obtuso}$$

Figura 4.38. Representaciones geométrica y algebraica de la proposición 4

Proposición 5

Si un triángulo es acutángulo entonces el cuadrado sobre cualquiera de sus lados es menor que la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes.

En la figura 4.39 se presentan las representaciones geométrica y algebraica de esta proposición.



$\measuredangle BAC$ es agudo $\qquad BC^2 < AC^2 - AB^2$

$\measuredangle CBA$ es agudo $\qquad AC^2 < BC^2 + AB^2$

$\measuredangle ACB$ es agudo $\qquad AB^2 < BC^2 + AC^2$

$\measuredangle BAC$ es agudo $\Rightarrow BC^2 < AC^2 + AB^2$

$\measuredangle CBA$ es agudo $\Rightarrow AC^2 < BC^2 + AB^2$

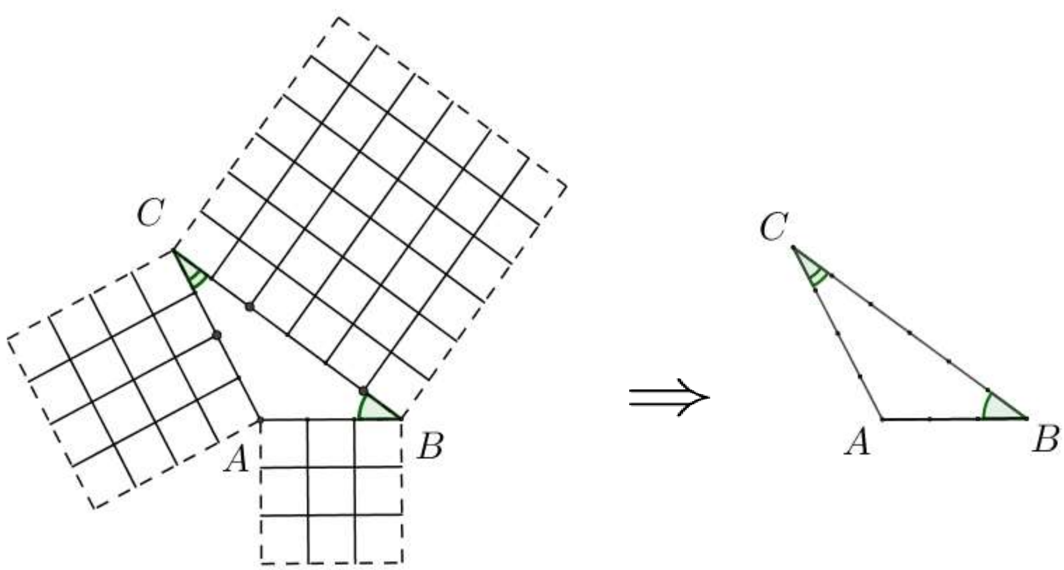
$\measuredangle ACB$ es agudo $\Rightarrow AB^2 < BC^2 + AC^2$

Figura 4.39. Representaciones geométrica y algebraica de la proposición 5

Proposición 6

Si en un triángulo el cuadrado sobre uno de sus lados es menor que la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes entonces el ángulo comprendido por estos dos lados es agudo.

En la figura 4.40 se presentan las representaciones geométrica y algebraica de esta proposición.



$$AC^2 < BC^2 + AB^2 \qquad \measuredangle CBA \text{ es agudo}$$
$$AB^2 < BC^2 + AC^2 \qquad \measuredangle ACB \text{ es agudo}$$

$$AC^2 < BC^2 + AB^2 \implies \measuredangle CBA \text{ es agudo}$$
$$AB^2 < BC^2 + AC^2 \implies \measuredangle ACB \text{ es agudo}$$

Figura 4.40. Representaciones geométrica y algebraica de la proposición 6

En el siguiente apartado se retoma el comentario del profesor titular del grupo participante en este estudio final acerca del trabajo realizado con sus alumnos.

Resumen del comentario realizado por el profesor titular del grupo participante en el estudio final

Seis meses después de concluido el estudio final se contactó al profesor titular del grupo participante en el estudio para solicitarle que realizara un comentario sobre el trabajo realizado en el estudio final con su grupo, a lo cual él accedió. En este comentario el profesor mencionó que tanto las 8 actividades como la forma de trabajo con los alumnos le parecieron novedosas porque se permitió que los alumnos fueran adquiriendo las herramientas necesarias para abordar el trabajo en el aula; además, observó que ellos mismos fueron construyendo su propio aprendizaje al permitirles que descubrieran los resultados y al no presentarles de manera anticipada las demostraciones de los teoremas. Le resultó muy interesante cómo partiendo de los conocimientos previos de los alumnos se potencializó la adquisición de nuevos aprendizajes. También consideró que este tipo de actividades son enriquecedoras porque no sólo se enfocan en una temática, sino que engloban diversas temáticas, lo que le permitió al alumno activar sus conocimientos previos y descubrir nuevos resultados que en el programa de estudios se encuentran en distintas unidades (ENCCH, 2016, pp. 39-42).

Respecto a la resolución de problemas el profesor mencionó que con la intervención los alumnos lograron analizar las condiciones que se establecieron en los enunciados de algunos problemas, y expresaron las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una expresión aritmética o algebraica. También se fomentó que los alumnos relacionaran un problema nuevo con otro que ya sabían resolver. Además, los alumnos lograron interpretar en el contexto del problema lo que significaba la solución que ellos obtuvieron.

Respecto al trabajo en equipos mencionó que éste contribuyó a que los alumnos desarrollaran actitudes de respeto, paciencia, tolerancia y solidaridad con sus compañeros, de responsabilidad con su propio aprendizaje, y de reflexión y crítica frente al material que se estudiaba en cada sesión.

También el profesor aclaró que en las primeras sesiones de la intervención consideraba poco prácticas las actividades planteadas a los alumnos porque eran sencillas y muy extensas, por lo que pensaba que requerirían mucho tiempo de trabajo en el aula, incluso consideró que dedicar tanto tiempo a las 8 actividades podría incidir en que no logrará cubrir su programa operativo. En ese momento no veía beneficio alguno que lo motivara a utilizar el material en sus cursos regulares.

Posteriormente, al ir avanzando en el estudio final, se dio cuenta de que además de lograr los objetivos planteados en las actividades los alumnos estaban desarrollando otros aprendizajes que a él le ayudarían a avanzar en las unidades faltantes para cubrir su programa operativo de matemáticas II y que sus alumnos estaban aprendiendo otra forma de trabajar en clase.

Actualmente el profesor piensa que de tener acceso a las 8 actividades del estudio final las aplicaría en sus cursos regulares porque observó un gran avance en sus alumnos, ya que gracias a la intervención logró acelerar el trabajo de sus alumnos en el aula de clases, lo que le permitió cubrir completamente su programa operativo de la asignatura que impartía. Finalmente mencionó que muchos de los temas abordados en el estudio final fueron retomados en las clases posteriores al trabajo con sus alumnos porque ellos las recordaban con facilidad.

En el siguiente apartado se presentan las temáticas o los aprendizajes abordados en el estudio final, de acuerdo con el comentario realizado por el profesor titular del grupo.

Temáticas o aprendizajes abordados en el estudio final

Gracias a los comentarios realizados por el profesor se consideró viable la identificación de las temáticas o los aprendizajes que se considera que fueron abordados en el estudio final. A continuación se presentan las temáticas o los aprendizajes de las asignaturas de matemáticas II (véanse los cuadros 4.18 y 4.19), matemáticas III (véase el cuadro 4.20) y matemáticas IV del programa de estudios de matemáticas de la ENCCH (ENCCH, 2016), que a consideración del profesor titular del grupo que participó en el estudio final fueron abordadas durante el trabajo realizado con su grupo.

En el cuadro 4.18 se ubican las temáticas o los aprendizajes de la unidad 3 de la asignatura de matemáticas II abordadas en las actividades realizadas en el estudio final, mientras que en el cuadro 4.19 se ubican las temáticas o los aprendizajes de la unidad 4 de la asignatura de matemáticas II.

Cuadro 4.18. Ubicación de las temáticas o los aprendizajes de la unidad 3 de la asignatura de matemáticas II abordadas en las actividades realizadas en el estudio final (ENCCH, 2016, pp. 39–42)

Unidad 3. Elementos básicos de geometría plana Temática o Aprendizaje
Bosquejo histórico de la Geometría
Elementos básicos de Geometría Plana: punto, línea recta, segmento, semirrecta, ángulo, punto de intersección, etcétera.
Segmentos y ángulos.
Clasificación de ángulos por su medida (agudo, recto, obtuso, llano).
Clasificación por su relación con otros ángulos (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice).
Clasificación de los triángulos por sus lados (equilátero, isósceles, escaleno) y ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo).
Desigualdad del triángulo Aprendizaje - Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.
Propiedades del triángulo: - Suma de los ángulos interiores es igual a 180°. - Suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.
Problemas de aplicación Aprendizaje - Aplica las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.
Propiedad del triángulo isósceles - Los ángulos adyacentes a la base son iguales. - La altura y la mediana de la base coinciden. - La bisectriz del ángulo formado por los lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes.
Polígonos regulares e irregulares
Perímetro y área Aprendizaje - Calcula el perímetro y él área de un polígono regular. - Calcula el área de un polígono irregular por triangulación.
Problemas de aplicación Aprendizaje - Utiliza los conocimientos adquiridos, en la resolución de problemas.

Cuadro 4.19. Ubicación de las temáticas o los aprendizajes de la unidad 4 de la asignatura de matemáticas II abordadas en las actividades realizadas en el estudio final (ENCCH, 2016, pp. 43–45)

Unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras Temática o Aprendizaje
Congruencia Aprendizaje - Comprende el concepto de congruencia.
Figuras congruentes
Congruencia de triángulos Aprendizaje - Reconoce cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.
Criterios de congruencia de triángulos a) LAL b) LLL c) ALA
Teorema del triángulo isósceles y su recíproco
Semejanza Aprendizaje - Comprende el concepto de semejanza.
Figuras semejantes Aprendizaje - Reconoce cuándo dos figuras son semejantes.
Semejanza de triángulos Aprendizaje - Reconoce cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.
Criterios de semejanza de triángulos *a)* LLL *b)* LAL *c)* AAA [*sic*]
Razón entre perímetros y áreas de triángulos semejantes Aprendizaje - Calcula perímetros y áreas en triángulos semejantes.
Problemas de aplicación Aprendizaje - Aplica los criterios de semejanza en la resolución de problemas.

(Continúa)

Cuadro 4.19. (Concluye)

Unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras Temática o Aprendizaje
Teorema de Pitágoras y su recíproco Justificación Aprendizaje - Reconoce y justifica el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.
Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y Teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

En el cuadro 4.20 se ubican las temáticas o los aprendizajes de la unidad 2 de la asignatura de matemáticas III abordadas en las actividades realizadas en el estudio final.

Cuadro 4.20. Ubicación de las temáticas o los aprendizajes de la unidad 2 de la asignatura de matemáticas III abordadas en las actividades realizadas en el estudio final (ENCCH, 2016, pp. 51-52)

Unidad 2. Elementos básicos de geometría analítica Temática o Aprendizaje
Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares Aprendizaje - Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.
Condiciones necesarias y suficientes para determinar un segmento: - Los puntos extremos Aprendizaje - Localiza un segmento en el plano cartesiano.
Longitud de un segmento.

Finalmente, de la unidad 3, “La recta y su ecuación cartesiana”, de la asignatura de matemáticas IV, se considera que se abordó en las actividades realizadas en el estudio final la temática de “Condiciones de paralelismo y perpendicularidad” (ENCCH, 2016, p. 54).

En el siguiente capítulo se presentan algunas conclusiones y recomendaciones para enriquecer las actividades, y que son producto del análisis de los resultados del estudio final.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El presente capítulo se divide en tres apartados: en el primer apartado se presentan algunas conclusiones particulares respecto a cada una de las actividades que conformaron el estudio final; en el segundo apartado se presentan algunas conclusiones generales, y finalmente en el tercer apartado se realizan algunas recomendaciones para el profesor que desee replicar el estudio final, y algunas adecuaciones que sería deseable realizar a las actividades del estudio final que podrían potenciar los resultados a obtener.

A continuación, se presenta el primer apartado que contiene las conclusiones particulares del estudio final.

Conclusiones particulares del estudio final

A continuación, se presentan algunas conclusiones particulares de las 8 actividades del estudio final.

En la actividad I del estudio final fue importante cuidar que los alumnos realizaran el trabajo con calma porque a través de ella desarrollaron los elementos básicos de geometría plana que requirieron para abordar con éxito las actividades de la II a la VIII del estudio final.

Con la actividad V del estudio final se logró que los alumnos expresaran por escrito los resultados descubiertos durante el estudio final, y comprendieran la importancia que tiene también en el aprendizaje de las matemáticas.

En la resolución de las actividades VII y VIII del estudio final, fue alto el desempeño de los estudiantes gracias a su comprensión de los seis resultados matemáticos que ellos mismos descubrieron. Los primeros tres resultados, en las actividades II, III y IV del estudio final:

- Primer resultado, si un triángulo es acutángulo entonces el cuadrado sobre cualquiera de sus lados es menor que la suma de los cuadrados sobre los dos lados restantes.
- Segundo resultado, si un triángulo es obtusángulo entonces el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo obtuso es mayor que la suma de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo obtuso.
- Tercer resultado, si un triángulo es rectángulo entonces el cuadrado sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que comprenden el ángulo recto.

Y los otros tres resultados los descubrieron durante el desarrollo de las actividades VII y VIII del estudio final:

- Cuarto resultado, dadas cualesquier tres longitudes no siempre se puede formar un triángulo.

- Quinto resultado, para que se forme un triángulo se requiere que al sumar dos de las longitudes siempre la suma sea mayor que la longitud restante.
- Sexto resultado, dadas tres áreas de cuadrados se deben determinar, en primer lugar las longitudes de los lados de estos cuadrados para poder aplicar el quinto resultado.

La inclusión de las ternas de áreas que no correspondían a las de cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, en la actividad VIII del estudio final, generó confusión en los alumnos, así como los problemas 3 y 4 de la actividad VII del estudio final. Algunas posibles explicaciones de esta situación son las siguientes:

1).- En la educación matemática que habían recibido antes del estudio final aprendieron erróneamente que los resultados abordados en clase siempre se cumplen, por lo que no desarrollaron de forma natural la verificación de las condiciones en que un resultado matemático se cumple. La idea errónea de que un resultado matemático se puede aplicar siempre fue reforzada con la realización de ejercicios y problemas donde siempre podían los alumnos aplicar los resultados estudiados.

2).- Los alumnos tienen dificultad para trabajar con los resultados conversos tanto del teorema de Pitágoras como de los resultados relacionados con los triángulos acutángulos y obtusángulos, descubiertos por los alumnos como resultado del estudio final realizado, probablemente porque en la educación matemática que han recibido se ha privilegiado la enseñanza de resultados directos (SEP, 1994; SEP, 2006; SEP, 2011a; SEP, 2011b) y no se plantea la oportunidad de que reflexionen sobre casos conversos que resultan verdaderos.

La mayoría de los alumnos desconocían la existencia de la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos, por lo que no sólo descubrieron los resultados correspondientes a los triángulos mencionados antes sino también aprendieron una nueva clasificación de los triángulos.

El diseño de las ocho actividades del estudio final incidió en la organización del trabajo de los alumnos, y aunque para ellos en un inicio las actividades les parecieron sencillas y fáciles al punto de causarles molestia, al final se percatan que están aprendiendo de manera diferente a la tradicional porque se les permitió que ellos fueran descubriendo los resultados de cada actividad, además de que el contenido temático de las actividades no se enfoca en un solo aprendizaje.

Al finalizar la intervención los alumnos fueron conscientes de que descubrieron resultados que no conocían, además de que recordaron varios conocimientos que adquirieron en sus estudios previos de matemáticas. Por lo que consideraron que por primera vez aprendieron mucho de una forma sencilla y agradable. Además, los alumnos asimilaron que no es necesario que las actividades realizadas en clase sean difíciles para aprender, además de que apoyarse en sus compañeros de equipo es más saludable para el aprendizaje. Tanto el profesor titular como sus alumnos vivenciaron otra forma de enseñar y aprender distinta a la tradicional, y se percataron de la ventaja que esta forma de trabajo ofrece tanto en el aprendizaje de los alumnos como en el trabajo realizado por el profesor en el aula de clases.

En el siguiente apartado se presentan algunas conclusiones generales del estudio final.

Conclusiones generales

- Puesto que algunos alumnos en el nivel bachillerato aun presentan dificultades para comprender el teorema de Pitágoras en su forma algebraica porque no tienen claro que la relación implica a los cuadrados de los lados del triángulo rectángulo y no sólo las longitudes de los lados del triángulo. Se podría contribuir a que esta situación no se siga propagando, si se logra propiciar un contexto adecuado para que los alumnos adquieran la forma geométrica del teorema de Pitágoras antes que su forma algebraica. Para ello se necesita que los alumnos utilicen herramientas geométricas antes de las herramientas algebraicas y que se les permita descubrir por sí mismos estos resultados matemáticos antes de que se les presenten como una fórmula o se les “den” demostraciones de los mismos.
- Con las 8 actividades diseñadas para el estudio final los alumnos dotaron de significado geométrico al teorema de Pitágoras, además descubrieron y dotaron de significado geométrico a los resultados correspondientes a los triángulos acutángulos y obtusángulos. Descubrieron el converso del teorema de Pitágoras al aplicarlo en la resolución de la actividad VIII, indicio de esto es el comentario que varios alumnos hicieron: “estamos usando el teorema de Pitágoras sólo que al revés”. Finalmente trabajaron de forma intuitiva los conversos de los resultados descubiertos sobre los triángulos acutángulos y obtusángulos.
- Otros aprendizajes que también descubrieron los alumnos son: las condiciones bajo las cuales dadas tres longitudes se puede construir un triángulo, la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos, características de un cuadrado, cómo

calcular el área de un pentágono irregular, el teorema de Pitágoras sólo se cumple para los triángulos rectángulos, sólo los triángulos rectángulos tienen catetos e hipotenusa, etcétera.

- Al dotar de sentido geométrico al teorema de Pitágoras, disminuyeron los errores aritméticos o algebraicos que cometieron los alumnos participantes en el estudio piloto de este trabajo. Esto ocurrió gracias a que la mayoría de los alumnos del estudio final no aplicó la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$. Usualmente se enseña a los estudiantes el uso de esta fórmula sin permitirles que entiendan su significado geométrico.
- Permitir que los alumnos trabajen únicamente con la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus lados durante su educación matemática puede ser un impedimento para que ellos consideren la necesidad de conocer la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos.
- Acostumbrar a los alumnos a trabajar únicamente con triángulos rectángulos les genera la idea errónea de que todos los triángulos son triángulos rectángulos, y que todos los ángulos son rectos. Por consiguiente, nombrar siempre a los lados de un triángulo rectángulo catetos e hipotenusa plantea la idea en los alumnos que así pueden llamar siempre a los lados de cualquier triángulo.
- Permitir que los alumnos descubran por sí mismos los teoremas contribuyó a que cambiaran de postura frente al trabajo en el aula, además de que se fomentó la comprensión y la apropiación de las temáticas abordadas en el estudio final.
- Los alumnos descubrieron que los triángulos escalenos satisfacen la proposición 12 o 13 del libro II de los *Elementos* de Euclides.

- Conocer y manejar la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos permitió a los alumnos distinguir cuándo un triángulo escaleno satisface la proposición 12, y cuándo satisfacen la proposición 13, del libro II de los *Elementos* de Euclides.
- Los alumnos aprendieron la clasificación de los triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos.
- Los alumnos descubrieron que los triángulos escalenos pueden ser triángulos obtusángulos (con un ángulo obtuso y dos ángulos agudos) o triángulos acutángulos (con tres ángulos agudos).
- Los alumnos concluyeron que un ángulo recto es generado por dos lados perpendiculares de un triángulo rectángulo.
- Los alumnos descubrieron que sólo los triángulos rectángulos tienen catetos e hipotenusa.
- Los alumnos descubrieron que sólo los triángulos rectángulos satisfacen el teorema de Pitágoras.
- Los alumnos descubrieron que los ángulos agudos son menores a un ángulo recto, y los ángulos obtusos son mayores a un ángulo recto.
- Se invirtió tiempo en la elaboración de las actividades que se aplicaron en la clase porque debieron ser cuidadosamente diseñadas, sin embargo, al trabajarlas con los alumnos el trabajo del profesor se vio modificado porque los alumnos se volvieron autónomos y el rol del profesor fue de mediador del aprendizaje.
- Retomar los conocimientos previos de los alumnos contribuye significativamente en el desarrollo de nuevos aprendizajes.

- Trabajando en equipo y con actividades sencillas se puede contribuir a que los alumnos se motiven a aprender matemáticas.
- Permitir a los alumnos consultar internet para aclarar conceptos matemáticos contribuyó a que los alumnos contaran con las herramientas necesarias para validar o refutar las conjeturas realizadas.
- Las actividades cuidadosamente diseñadas para que los alumnos aprendan a partir del descubrimiento de los teoremas hizo posible que se lograra cubrir una amplia lista de temáticas de las asignaturas de matemáticas del nivel bachillerato.
- El profesor debe acostumbrarse a ceder al alumno la responsabilidad de su aprendizaje, y debe comprender que bien guiado el alumno es capaz de descubrir por sí mismo los teoremas, lo que incidirá en que éste obtenga aprendizajes significativos.
- Las 8 actividades permitieron a los alumnos avanzar a su propio ritmo de tal manera que ellos mismos fueron descubriendo los resultados matemáticos abordados.
- La sencillez de las 8 actividades influyó en la motivación y en el aprendizaje de los alumnos.

En el siguiente apartado se presenta una serie de recomendaciones surgidas de la realización de la intervención y del análisis de los resultados.

Recomendaciones

Al profesor, se recomienda que este enfatice a los alumnos:

1).- La forma lógica de la implicación que se presenta en cada uno de los enunciados de los resultados descubiertos por los alumnos.

2).- La importancia de corroborar que con los datos con los que trabaja en la actividad VIII se puede construir un triángulo, de no hacerlo se corre el riesgo de que el alumno asuma que con toda terna de números se puede construir un triángulo y, además satisface el converso del teorema de Pitágoras.

3).- Que tomen en cuenta los resultados obtenidos en las actividades II, III y IV al momento de realizar la actividad V porque de no hacerlo es posible esperar que los alumnos llenen la última columna del cuadro con la comparación de áreas de los cuadrados como las siguientes: todas las áreas son iguales o la suma del área del cuadrado mayor y una pequeña es mayor que el área del cuadrado restante.

4).- La importancia de registrar de forma escrita las conjeturas que realizan, los procedimientos que llevan a cabo para verificarlas y las conclusiones a las que llegan como forma de explicitar sus razonamientos.

Para la mejora de la serie de actividades utilizadas en el estudio final se recomienda que:

1).- Después de cada una de las actividades II, III y IV del estudio final es conveniente integrar actividades donde se solicite a los alumnos que verifiquen los resultados obtenidos con otros triángulos distintos a los que han trabajado en estas actividades con el fin de verificar la validez de sus conjeturas. Con lo anterior se evitará emitir la idea a los alumnos de que pueden validar una conjetura a partir de un solo caso particular.

2).- Integrar actividades similares a las actividades V y VI del estudio final para que los alumnos trabajen los enunciados conversos de los resultados descubiertos en las actividades II, III y IV del estudio final.

REFERENCIAS

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero, 2001 (2.ª ed.), *Libro para el maestro. Educación Secundaria. Matemática*, SEP, México.

Allen, R., 2008, *Álgebra intermedia*, Pearson, México.

Alsina, C., 2010, *La secta de los números*. National Geographic, s/l.

Álvarez, E., 2012, *Elementos de geometría*, Universidad de Medellín, Medellín.

Andalón E., J. A. (productor), 2010, Teorema de Pitágoras (video en internet), 10:51 min. Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: <https://www.youtube.com/watch?v=EwMp3NB_8gU&app=desktop> o <https://www.youtube.com/watch?v=Pm_ncQVCWlA>

Andalón E., J. A. (productor), 2018, Explicación del Teorema de Pitágoras (video en internet), 10:43 min. Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: <https://www.youtube.com/watch?v=cii6gsVFfiQ> o <https://www.youtube.com/watch?v=cii6gsVFfiQ>

Aula365 – Los creadores (productor), 2017, ¿Qué es el Teorema de Pitágoras? Videos Educativos para Niños (video en internet), 4:18 min. Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: < https://youtu.be/fFA2ChUj1HM> o <https://www.youtube.com/watch?v=fFA2ChUj1HM>

Brown, R., 2015, *50 Teorías matemáticas creadoras e imaginativas (Guía breve)*, Blumer, s/l.

Burril, G., J. Cummins, T. Kanold, C. Boyd, C. Malloy y L. Yunker, 2004, *Geometría. Integración, aplicaciones, conexiones*, McGraw Hill, Interamericana, México.

Cambray N., R., 2017, Historia de las matematicas y su vinculacion con el aprendizaje de las matematicas (videoconferencia), Seminario "Reflexiones sobre la didáctica de las matemáticas", Sala Xochicalli, División de Ciencias Sociales y Humanidades (Edificio A, Tercer Piso) de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco; México, Ciudad de México, miércoles, septiembre 27 de 2017. Consultado el 18 de octubre de 2018 en: https://seminariodidacticadelasmatematicas.wordpress.com/tercer-ciclo/sesion-6-historia-de-las-matematicas-y-su-vinculacion-con-el-aprendizaje-de-las-matematicas/

Carreón, D. (productor), 2016, Teorema de Pitágoras super fácil (video en internet), 9:35 min. Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: <https://www.youtube.com/watch?v=2yfkEAt2ew0> o < https://youtu.be/2yfkEAt2ew0 >

Casarrubias, G. A., 2015, *Complemento matemático 3 cuaderno de trabajo*, Casarrubias, México.

CCH (Colegio de Ciencias y Humanidades), 2003, *Programas de Estudio de Matemáticas-Semestre I a IV*, CCH, México. <http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_mateiaiv.pdf>

Cedillo Á., T. E., V. Cruz O., E. Vega R. y R. Cambray N., 2006, *Enseñanza de las matemáticas, Geometría: Áreas y teorema de Pitágoras*, SEP/UPN/ILCE/BID, México.

Charles, R. I., B. McNemar y A. Ramirez, 2009, *Prentice Hall Mathematics Pre-Álgebra*, s/l.

Clemens, S., O´Daffer, P. y Cooney, T., 2005, *Geometría*, Pearson, México.

Collete, J. P., 1985, *Historia de las matemáticas I*, Siglo XXI, México.

ENCCH (Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades), 2016, *Programas de Estudio. Área de Matemáticas. Matemáticas I -IV*, ENCCH, México. http://www.cch.unam.mx/sites/default/files/MATEMATICAS_I_IV.pdf

ENP (Escuela Nacional Preparatoria), 2006, *Programa de Estudios de la asignatura de: Matemáticas V*, UNAM/ENP, México. http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/quinto/1500.pdf

Enzensberger, H., M., 1998, *El diablo de los números*, Ediciones Siruela, España.

Euclides, 2015, *Elementos* (vol. 1: libros I-IV), Gredos, Madrid. (Trad. al castellano y notas: María Luisa Puertas Castaños; int.: Luis Vega)

Frías, L., 2015, Sistema escolar diferente. La escuela de iniciación universitaria cumple 80 años, *Gaceta UNAM, Órgano Informativo de la Universidad Nacional Autónoma de México*, Núm. 4722, p. 4. (Dirección General de Comunicación Social de la UNAM, 14 de septiembre de 2015.) Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: http://www.gaceta.unam.mx/20150914/la-escuela-de-iniciacion-universitaria-cumple-80-anos/

González U., P. M., 2008, El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años, *SIGMA*, núm. 32, pp. 103-130.

Gutiérrez C., S. E., Szklarz Z., E., 2010, *Geometría y trigonometría*, DGETI, SEP, México.

IEMS (Instituto de Educación Media Superior), 2006, *Programas de estudio. Sistema de Bachillerato del Gobierno del Distrito Federal*. Matemáticas, SDS/GDF, México.

Jaén, S., M., 2012, *El teorema de Pitágoras. Un secreto en tres paredes*, National Geographic, Villatuerta, Navarra.

Meavilla S., V., 1989, Dos demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras, *SUMA*, núm. 3, pp. 39-42.

Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, J., 1999, *Matemática: Razonamiento y Aplicación*. (8ª. ed.), Pearson, Addison Wesley, México.

Odetti, V., 2015, Experiencias valiosas con uso de TIC en las escuelas públicas de la Provincia de Buenos Aires, *CIPPEC*, Documento de trabajo núm. 135, pp. 25-27.

Okun, L. B., 2008, The theory of relativity and the Pythagorean theorem, *Physics-Uspekhi*, vol. 51, núm. 6, pp. 1-19.

Podestá, P. (comp.), 2011, *Geometría*, Ministerio de Educación de la Nación, Buenos Aires. (Serie para la enseñanza en el modelo 1 a 1)

Ritch, Barnett, 1994, *Geometría plana con coordenadas*, McGraw Hill, México.

SEM (Sistema Educativo Mexicano), s/a, Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: https://www.mexterior.sep.gob.mx/sisedMEX.html

SEMS (Subsecretaría de Educación Media Superior), s/a, Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: http://sems.gob.mx/es/sems/opciones_de_estudio

SEMS / DGB (Subsecretaría de Educación Media Superior / Dirección General de Bachillerato), 2016, *Documento Base del Bachillerato General,* SEP, México. Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/documentobase/DOC_BASE_16_05_2016.pdf

SEMS/DGB/DCA (Subsecretaría de Educación Media Superior / Dirección General de Bachillerato/ Dirección de Coordinación Académica), 2013, *Matemáticas II, Serie Programas de Estudio*, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 1994, *Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria,* SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2006a, *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006,* SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2006b, *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudio 2006,* SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2011a, *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2011b, *Plan de estudios 2011. Educación Básica,* SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2016, *Propuesta curricular para la educación básica 2016,* SEP, México.

SEP/CB (Secretaría de Educación Pública/Colegio de Bachilleres), 2015, *Programa de Asignatura. Matemáticas III*, SEP, México.

Siglo XXI Editores, 2010, *Enciclopedia de conocimientos fundamentales UNAM-SIGLO XXI*, Tomo 5 Matemáticas, Física y Computación. UNAM; Siglo XXI, México.

Singh, S., 2003, *El enigma de Fermat: La historia de un teorema que intrigó durante más de trescientos años a los mejores cerebros del mundo,* Planeta, Barcelona.

Smith, S., Charles R., Dossey J., Keedy M., y Bittinger M., 2001, *Álgebra*, Pearson, México.

Stewart, I., 2015, *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*, Crítica, México.

Stewart, I., 2016, *Números increíbles*, Crítica, México.

Susi Profe (productor), 2017, Teorema de Pitágoras Explicación y Ejemplos (video en internet), 9:26 min. Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: < ttps://www.youtube.com/watch?v=w6nh99v3r4A> o <https://youtu.be/w6nh99v3r4A >

Tahan, M., 2002*, El hombre que calculaba,* Limusa, México. (1.ª ed., julio de 1972, Verón/editor, Barcelona.)

UNAM / DGENP (Universidad Nacional Autónoma de México / Dirección General de la Escuela Nacional Preparatoria), s/a, Consultado el 26 de septiembre de 2018 en: http://dgenp.unam.mx/planteles/P2/anteced.html

Vargas, V. G., Gamboa, A. R., 2013, La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el modelo de Van Hiele, *UNICIENCIA*, Vol. 27, núm. 1, pp. 95-118.

Walczyc, S., 2006, Looking for Pythagoras. An investigation of the Pythagorean theorem (7-Day Unite Plan), 21 p. http://math.buffalostate.edu/~it/projects/Walczyk.pdf

Zubieta B., A. Martínez, T. Rojano y S. Ursini, 2000, *Geometría dinámica*, SEP-ILCE, México.

Apéndice A. Ubicación del teorema de Pitágoras en algunos planes y programas de estudio de educación secundaria del SENM

A continuación se incluye una revisión de algunos programas de estudio del nivel secundaria por lo importante que resulta conocer los antecedentes de los alumnos referente al teorema de Pitágoras y su converso al momento de ingresar al bachillerato.

Se presenta la revisión de los programas del Sistema de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública (SEP) y de Iniciación Universitaria de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM.

Sistema de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública

Secundaria

La educación secundaria se encuentra inserta en la educación básica de la Secretaría de Educación Pública (SEP), su Plan de estudios se estructura de forma anual, abarca tres grados, y cada programa de estudios se encuentra dividido en bloques temáticos.

El uso del teorema de Pitágoras se localiza en la asignatura de Matemáticas de tercer grado en el bloque II, como se muestra en el cuadro A.1 (SEP, 2011a, p. 13).

Cuadro A.1. El teorema de Pitágoras en el Programa de estudios de la Educación Básica, secundaria, de la SEP (SEP, 2011a, p. 13)

Asignatura	Bloque	Competencias que se favorecen	Aprendizajes esperados	Eje
Matemáticas tercer grado	II	- Aplica el concepto de proporcionalidad en la geometría a través de la semejanza de triángulos. - Conoce y aplica las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos rectángulos.	Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.	MEDIDA - Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. - Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Escuela Nacional Preparatoria

Iniciación Universitaria

El plantel 2 es el único que cuenta con dos planes de estudios: Iniciación Universitaria con tres grados y la Preparatoria que comprende otros tres años.

“La modalidad de Iniciación Universitaria fue fundada en 1935 como escuela pública por el rector Fernando Ocaranza quien estableció los cursos de extensión universitaria, equivalentes a los de secundaria. Así permaneció hasta 1952, cuando quedó integrado al plan de cinco años como Prepa 2. Sin embargo, a partir de 1965 se estableció y forma parte del plan de seis años.” Antonio Meza, director de Prepa 2

En el mapa curricular de la ENP en el tercer año de Iniciación Universitaria se ubica la asignatura de Matemáticas III, la cual contribuye a la formación integral del estudiante. Se busca, además de incrementar su capacidad de raciocinio, reafirmar y enriquecer sus habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento para contribuir a una mejor comprensión y explicación de la realidad circundante, sobre la base de un pensamiento ordenado que mejore su disposición e incremente su aptitud para resolver problemas. El programa de Matemáticas III se encuentra estructurado en nueve unidades, la demostración del teorema de Pitágoras se aborda en la cuarta, cuadro A.2, y algunas aplicaciones en la quinta unidad (ENP, 2006, pp. 10), cuadro A.3.

Cuadro A.2. Demostración del teorema de Pitágoras en el Programa de la ENP de Iniciación Universitaria (ENP, 2006, p. 10)

Asignatura	Propósito	Contenido	Descripción de contenido
Matemáticas III Unidad Cuarta Unidad: Triángulos	Definir y trazar algunas de las circunferencias notables de un triángulo y demostrar algunos teoremas para enriquecer los conocimientos que se aplicarán en cursos posteriores particularmente en Geometría Analítica.	Demostración de algunos teoremas.	Se demostrará el teorema de Pitágoras.

Cuadro A.3. Aplicaciones del teorema de Pitágoras en el Programa de la ENP de Iniciación Universitaria (ENP, 2006, p. 10)

Asignatura	Propósito	Contenido	Descripción de contenido	Estrategia didáctica
Matemáticas III Unidad Novena Unidad: Identidades trigonométricas y aplicaciones	- Establecer algunas identidades trigonométricas para enriquecer los conocimientos matemáticos que habrán de aplicarse en cursos posteriores. - Sintetizar lo expuesto en las unidades anteriores para resolver problemas más abstractos y concretos.	- Conocida una función determinar las restantes. - Funciones de ángulo de 30º, 60º y 45º. - Resolución de triángulos rectángulos.	Se revisará el teorema de Pitágoras calculándose el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo, si se conoce el valor de una de ellas. Se obtendrán, sin tablas de funciones ni calculadora, los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30º, 60º y 45º. Se resolverán triángulos rectángulos.	Los alumnos con la guía del profesor: - Calcularán el valor de cinco funciones trigonométricas de un ángulo a partir de una conocida. - En un triángulo equilátero determinará el valor de las funciones para ángulos de 30º y 60º. - Resolverá triángulos rectángulos. - Plantearán problemas específicos cuya solución sea resolver un triángulo rectángulo.

Apéndice B. Ubicación del teorema de Pitágoras en algunos planes y programas de estudio de educación media superior del SENM

En este apéndice se presenta el resultado de la ubicación del teorema de Pitágoras y su converso en algunos programas de estudio de educación media superior, se identifican las estrategias didácticas sugeridas, en caso de existir, para ser abordados.

Bachillerato General

El Bachillerato General (BG) es un bachillerato centralizado del Gobierno Federal, es de tipo general y de formación propedéutica.

El teorema de Pitágoras se ubica en el bloque III de la asignatura de Matemáticas II (véase el cuadro B.1), donde se indica como actividad de enseñanza presentar y demostrar al alumnado el teorema de Pitágoras, y como actividades de aprendizaje resolver ejercicios o problemas aplicando el teorema de Pitágoras, y sugiriendo como instrumento de evaluación una rúbrica para evaluar la resolución de problemas relativos al teorema de Pitágoras.

Colegio de Bachilleres

El Colegio de Bachilleres (CB) es un bachillerato tecnológico descentralizado del Gobierno Federal. Su plan de estudios se estructura de acuerdo con las áreas de formación básica, específica y laboral en cuatro campos de conocimiento: Lenguaje y Comunicación, Matemáticas, Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales, Humanidades y Desarrollo Humano. El campo Matemáticas se encuentra integrado por seis asignaturas: Matemáticas I a VI, cuyos contenidos se presentan en bloques temáticos.

Bajo este contexto, el teorema de Pitágoras se ubica en el Programa de la asignatura Matemáticas II, que se imparte durante el segundo semestre, en el bloque temático 3, Geometría dinámica en el plano y en el espacio, como se muestra en el cuadro B.2.

La aplicación del teorema de Pitágoras se presenta en el Bloque temático 2: Elementos de trigonometría, como se muestra en el cuadro B.3.

Cuadro B.1. El teorema de Pitágoras en el Programa de estudios del Bachillerato General de la SEP (DGB/DCA, 2013, pp. 20-22)

Materia	Objetos de aprendizaje	Competencias para desarrollar	Actividad de enseñanza
Matemáticas II	Teorema de Pitágoras	-Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para buscar, procesar e interpretar información relacionada con los criterios de semejanza, el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras. -Propone la manera de solucionar un problema teórico o contextualizado y desarrolla un proyecto en equipo en el que aplique el Teorema de Thales y el Teorema de Pitágoras, definiendo un curso de acción con pasos específicos	Presentar y demostrar al alumnado el teorema de Pitágoras
Bloque			
III Resuelve problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras			

Cuadro B.2. El teorema de Pitágoras en el Programa de estudios del CB (SEP/CB, 2015)

Asignatura	Propósito	Contenido	Referentes para la evaluación
Matemáticas II Bloque Temático Geometría dinámica en el plano y en el espacio	El estudiante será capaz de desarrollar sus habilidades de razonamiento lógico matemático espacial, al relacionar las transformaciones de figuras con sus representaciones en dos y tres dimensiones, así como calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos, con la finalidad de interpretar problemas y darles solución.	Perímetros, áreas de figuras geométricas inscritas y circunscritas 1. Generalización del teorema de Pitágoras	- Calcula el perímetro de la circunferencia y el área del círculo. - Calcula perímetros y áreas de figuras compuestas: inscritas y circunscritas. - Comprueba la generalización del teorema de Pitágoras, a través del cálculo de áreas de polígonos regulares.

Cuadro B.3. Aplicación del teorema de Pitágoras en el Programa del CB (SEP/CB, 2015)

Asignaturas	Propósito	Contenidos	Referentes para la evaluación
Matemáticas II Bloque temático Elementos de trigonometría	El estudiante será capaz de aplicar las razones trigonométricas al relacionar la magnitud de los lados y ángulos de los triángulos y las leyes de senos y cosenos, haciendo uso de las TIC, para interpretar y plantear la solución de problemas de su entorno.	Teorema de Pitágoras	Aplica el teorema de Pitágoras en la solución de problemas de la vida cotidiana, utilizando *GeoGebra*.

Instituto de Educación Media Superior del Sistema de Bachillerato del Gobierno del Distrito Federal

El plan de estudios del Instituto de Educación Media Superior (IEMS) del Sistema de Bachillerato del Gobierno del Distrito Federal (SBGDF) se encuentra constituido por 38 asignaturas; seis de ellas corresponden al área de matemáticas. En el programa de matemáticas de dicho sistema, se concibe a las matemáticas como una unidad, por lo que se presentan simplemente como cursos de matemáticas: las distintas ramas se entrelazan para que el estudiante tenga una mejor compresión de ellas.

Se pretende que el alumno en el segundo curso, matemáticas II, una vez que ha cursado Matemáticas I (concebido como curso propedéutico) y ha roto con la idea mecánica de las matemáticas, comience a dar los primeros pasos en el desarrollo de un lenguaje y un método matemáticos. En este contexto, el teorema de Pitágoras se localiza en el curso de Matemáticas II en los contenidos de geometría (IEMS, 2006, pp. 24-25); se encuentra relacionado con números racionales y razones y proporciones.

En el cuadro B.4 se observa el objetivo y las caracterizaciones del teorema de Pitágoras.

Cuadro B.4. El teorema de Pitágoras en el IEMS del SBGDF (IEMS, 2006, pp. 24-25)

Asignatura/Curso	Objetivo	Caracterización	Contenido
Matemáticas II	3. Aplicará el concepto de proporcionalidad y razón al estudio de propiedades de figuras geométricas.	- Aplica el concepto de proporcionalidad en la geometría a través de la semejanza de triángulos.	Geometría 3. Teorema de Pitágoras.

Sistema de Bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México

La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) ofrece bachillerato propedéutico, impartido por la por la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) y la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH). El egresado de este nivel educativo obtiene una formación integral que le permite adquirir por sí mismo nuevos conocimientos y contribuir a modificar el mundo que le rodea, además de adquirir conocimientos y habilidades necesarias para cursar estudios profesionales.

A continuación se presentan los dos sistemas de bachillerato de la UNAM y la ubicación del teorema de Pitágoras en sus respectivos programas de estudios del área de matemáticas.

Escuela Nacional Preparatoria

El plan de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) se encuentra estructurado de forma anual y consta de 3 años, el cuarto, quinto y sexto año.

En el Plan de estudios de 2006 de la ENP el teorema de Pitágoras se ubica en la asignatura de Matemáticas IV (ENP, 2006, pp. 43) la cual se imparte en el cuarto año, como se muestra en el cuadro B.5.

Nótese que la aplicación del teorema de Pitágoras aparece de forma implícita en la segunda unidad, como uno de los casos para resolver un triángulo rectángulo. A saber, cuando se conocen dos catetos y se tiene que determinar la hipotenusa, o cuando se conoce la hipotenusa y uno de los catetos y se debe determinar el otro cateto. No se menciona la manera en que se presentará el teorema de Pitágoras.

En la unidad 4 también se aplica el teorema de Pitágoras (ENP, 2006, pp. 16-17), como se muestra en el cuadro B.6.

Cuadro B.5. El teorema de Pitágoras en el Programa de la ENP (ENP, 2006, p. 43)

Asignatura	Propósito	Contenido	Descripción de contenido	Estrategia didáctica
Matemáticas IV	- Que el alumno enriquezca los conceptos trigonométricos adquiridos anteriormente, manejándolos ahora como funciones, con sus respectivas gráficas. - Que aplique estos conceptos en la resolución de problemas que le sean significativos.	Resolución de triángulos rectángulos.	Se considerarán los tres casos para resolver un triángulo rectángulo.	El alumno en forma individual o por equipos, bajo la asesoría de su profesor y en el aula: Resolverá problemas del tipo "Un topógrafo que está en el fondo de una barranca determina que el ángulo de elevación de uno de los bordes de la barranca es de 150º13'. Si el topógrafo está a 5 m. de la base. ¿Cuál es la profundidad de la barranca?

Cuadro B.6. Aplicaciones del teorema de Pitágoras en el Programa de estudios de la ENP

(ENP, 2006, pp. 16-17)

Asignatura	Propósito	Contenido	Descripción de contenido	Estrategia didáctica
Matemáticas IV	- Que el alumno reafirme los conocimientos básicos de la geometría euclidiana y la trigonometría y que comprenda los conceptos fundamentales de la geometría analítica para acceder con facilidad a las unidades posteriores. - Que el alumno sea capaz de aplicar los conocimientos adquiridos en esta unidad para plantear y resolver problemas aplicados a la geometría euclidiana y a la trigonometría.	Clasificación de los polígonos por sus lados y por sus ángulos.	Se establecerán las condiciones para que un triángulo sea equilátero, isósceles o escaleno: acutángulo, rectángulo y obtusángulo.	Analíticamente demostrará que un triángulo es equilátero, isósceles, escaleno o rectángulo (aplicando el teorema de Pitágoras)

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

El plan de estudios de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades se encuentra constituido por 34 asignaturas, de las cuales seis corresponden al área de matemáticas. De estas seis asignaturas, cuatro son obligatorias (Matemáticas I a IV) y dos son optativas (el alumno puede elegir entre cursar: Cálculo I y II o Estadística I y II o Cibernética y Computación I y II, para el quinto y sexto semestres).

> […] el centro de los programas de matemáticas son los aprendizajes de los alumnos, donde los saberes se construyen, sus conceptos y métodos surgen de un proceso ligado a la resolución de problemas, actividad fundamental para lograr un ser analítico, lógico y crítico, donde se pone de manifiesto la comunicación y el diálogo en un ambiente de aprendizaje.
>
> […]
>
> Los aprendizajes esenciales en los programas de Matemáticas I-IV quedan comprendidos en cuatro ejes del desarrollo temático a lo largo de los cuatro primeros semestres: Álgebra, Geometría euclidiana, Geometría analítica y Funciones. (ENCCH, 2016)

Con los cuatro cursos obligatorios de matemáticas, los alumnos tendrán un panorama general de los principales aspectos del conocimiento y del quehacer matemático que les permitirán acceder a conocimientos más especializados.

Con estos antecedentes, se ubica el teorema de Pitágoras en el curso de Matemáticas II en la unidad 3 del Programa de Estudios del Área de Matemáticas del año 2003, bajo el

Eje temático 2: Geometría euclidiana. La aplicación de este teorema es un contenido de la unidad 4, básicamente consiste en la resolución de problemas de longitudes y áreas.

En el cuadro B.7 se incluyen los propósitos, aprendizajes, estrategias y temáticas bajo los que se inscribe el teorema de Pitágoras (CCH, 2006, pp. 36-37 y 38-39).

En el cuadro B.7 se puede observar que se incluye el teorema de Pitágoras como un aprendizaje hasta la unidad 4 y no en la unidad 3, en la que sí se presenta como temática y se propone como estrategia la presentación de algunas de sus demostraciones.

El 20 de mayo de 2016 se aprobaron los programas de estudios actualizados de las materias de primero a cuarto semestre de la ENCCH. Como resultado, los programas de estudios actualizados de Matemáticas I a IV.

En el cuadro B.8 se muestra la ubicación del teorema de Pitágoras en la asignatura de matemáticas II de la ENCCH (ENCCH, 2016, pp. 43-44).

En el cuadro B.8 se observa que el teorema de Pitágoras ya forma parte del nombre de la unidad y se agrega como aprendizaje. En la columna de Estrategias se sugiere que el profesor realice una demostración y solicite a los alumnos que investiguen otras, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos.

Cuadro B.7. El teorema de Pitágoras en el CCH (CCH, 2006, pp. 36-37 y 38-39)

Curso	Propósito	Aprendizaje	Estrategias	Temática
Matemáticas II: Álgebra y geometría Unidad 3. Congruencia y semejanza	- Ilustrar el papel de la demostración en los resultados de la Geometría e iniciar al alumno en el método deductivo. - Trabajar la congruencia y semejanza de triángulos, así como el teorema de Pitágoras.		Es conveniente presentar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos.	Semejanza y teorema de Pitágoras. - Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.
Unidad 4. Perímetros, áreas y volúmenes	- Aplicar conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos en unidades anteriores en la resolución de problemas sobre figuras y cuerpos que involucren exploraciones geométricas, deducciones y cálculos numéricos. - Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.	El alumno: - Resuelve algunos problemas que involucran algunos de los siguientes elementos: teorema de Pitágoras, semejanza, congruencia, fórmulas sobre perímetros, áreas, superficies laterales y volúmenes.	Es conveniente resolver problemas donde se utilicen las propiedades de rectas paralelas, congruencia, semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras; por ejemplo: cálculos de distancias inaccesibles, trazos de trayectorias de rayos de luz, el problema de Eratóstenes, etcétera.	- Problemas de longitudes y áreas que involucren semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. - Problemas que involucren áreas y volúmenes de prismas, cilindros rectos y conos rectos, donde sea necesario aplicar conocimientos de congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

Cuadro B.8. El teorema de Pitágoras en los programas de estudio de Matemáticas I-IV de la ENCCH (ENCCH, 2016, pp. 43-44)

Curso	Propósito	Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Matemáticas II Unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.	Al finalizar, el alumno: - Aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. - Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.	Reconoce y justifica el teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.	- Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación. - Problemas de longitudes y áreas que involucran semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.	- El profesor hace una demostración del teorema de Pitágoras y solicita a los alumnos que investiguen otras demostraciones, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos. Además, solicita a los alumnos que construyan triángulos que satisfacen la conclusión del teorema de Pitágoras y verifiquen que son rectángulos. - El profesor sugiere algunas estrategias heurísticas para la resolución de problemas planteados.

Apéndice C. Actividades implementadas en la primera etapa del estudio piloto

Actividad I

a).- En una hoja de tu cuaderno dibuja un triángulo.

b).- En cada uno de los lados del triángulo anterior construye un cuadrado, con longitud de sus lados igual a la del lado del triángulo sobre el que se construye.

c).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, y compara la suma de las áreas de dos de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

Actividad II

a).- En una hoja de tu cuaderno dibuja un triángulo, distinto al de la actividad anterior.

b).- En cada uno de los lados del triángulo dibujado en el inciso *a)* construye un cuadrado, cuya longitud de sus lados sea igual a la longitud del lado del triángulo sobre el que se construye.

c).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, y compara la suma de las áreas de dos de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

Actividad III

a).- En una hoja de tu cuaderno dibuja un triángulo, distinto al de las actividad anteriores.

b).- En cada uno de los lados del triángulo dibujado en el inciso *a)* construye un cuadrado, cuya longitud de sus lados sea igual a la longitud del lado del triángulo sobre el que se construye.

c).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, y compara la suma de las áreas de dos de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

Apéndice D. Actividades implementadas en la segunda etapa del estudio piloto

Nombre del alumno: ______________________________________ Grupo: ________

ACTIVIDAD I

Copia en el entramado 1 la figura 1 y contesta las siguientes preguntas:

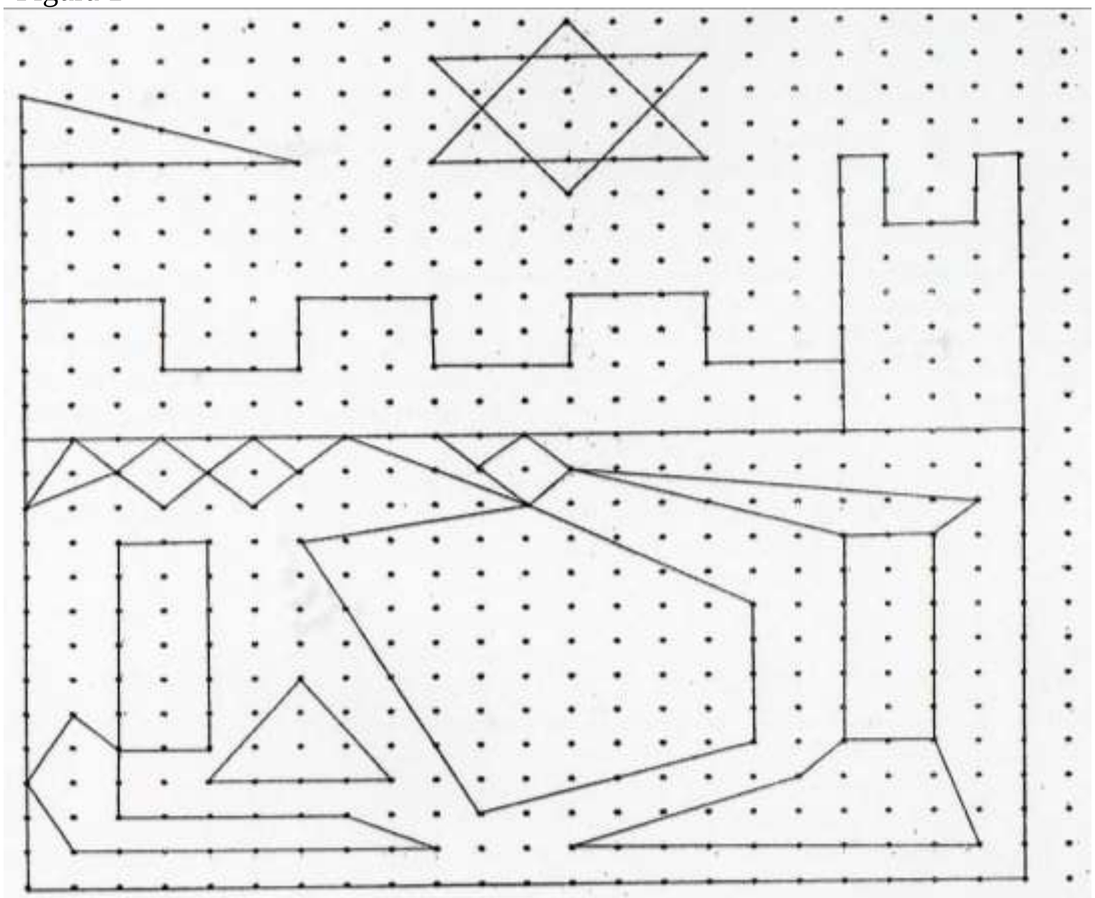
1).- ¿Cómo podrías medir el área de la figura 1?

2).- ¿Qué unidad de medida usarías?

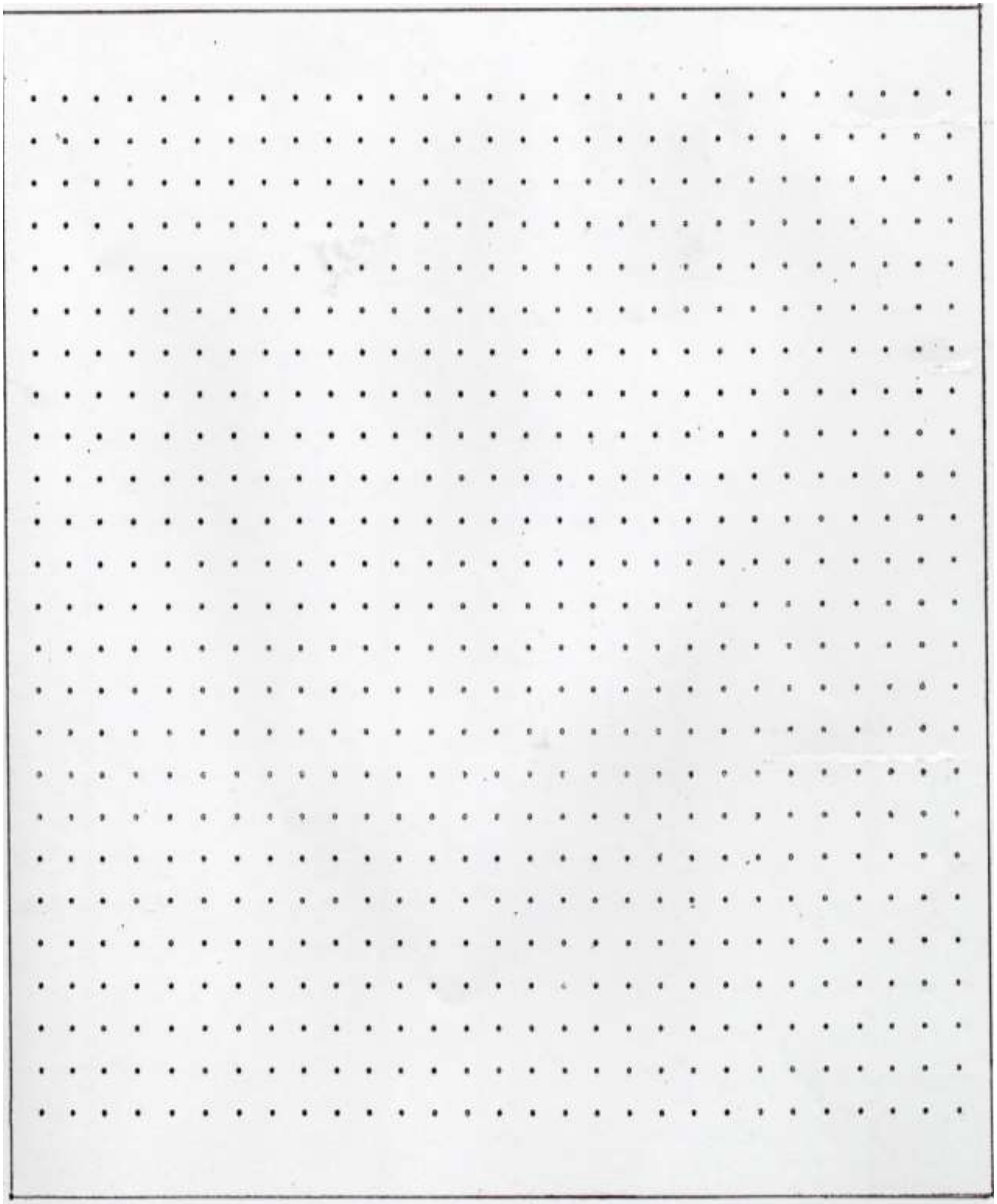
3).- ¿Cuántas figuras geométricas conforman la figura dada?

4).- Calcular el perímetro y el área de los cuadriláteros, el triángulo y el pentágono que aparecen en la figura 1.

Figura 1



Entramado 1



ACTIVIDAD II

a).- En una hoja de tu cuaderno dibuja un triángulo.

b).- En cada uno de los lados del triángulo anterior construye un cuadrado, con longitud de sus lados igual a la del lado del triángulo sobre el que se construye.

c).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, y compara la suma de las áreas de dos de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

ACTIVIDAD III

a).- En una hoja de tu cuaderno dibuja un triángulo, distinto al de la actividad anterior.

b).- En cada uno de los lados del triángulo dibujado en el inciso *a)* construye un cuadrado, cuya longitud de sus lados sea igual a la longitud del lado del triángulo sobre el que se construye.

c).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, y compara la suma de las áreas de dos de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

ACTIVIDAD IV

a).- En una hoja de tu cuaderno dibuja un triángulo, distinto al de las actividad anteriores.

b).- En cada uno de los lados del triángulo dibujado en el inciso *a)* construye un cuadrado, cuya longitud de sus lados sea igual a la longitud del lado del triángulo sobre el que se construye.

c).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, y compara la suma de las áreas de dos de los cuadrados con el área del cuadrado restante.

ACTIVIDAD V

1).- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9 b) 4, 9, 36 c) 9, 16, 25 d) 16, 25, 36

e) 36, 64, 100 f) 49, 441, 625 g) 100, 576, 676

2).- ¿Qué relación satisfacen las ternas de números seleccionados en el ejercicio anterior? Enuncia.

3).- Seleccione 3 números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 b) 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

4).- ¿Con todas las ternas se puede formar un triángulo?

5).- Con las que sí se puede formar un triángulo, ¿qué tipo de triángulo se forma?

6).- ¿Qué relación satisface las ternas de números seleccionados en el ejercicio anterior? Enúncialo.

Apéndice E. Actividades implementadas en la tercera etapa del estudio piloto

Nombre del alumno: ______________________________________ Grupo: __________

Actividad I

1).- Copia la figura 1 en el entramado 1.

2).- Determina cuánto mide el perímetro del rectángulo que se encuentra en la parte inferior izquierda de la figura 1. ¿Qué unidad de medida de longitud usaste? Comenta tus respuestas con tus compañeros de equipo.

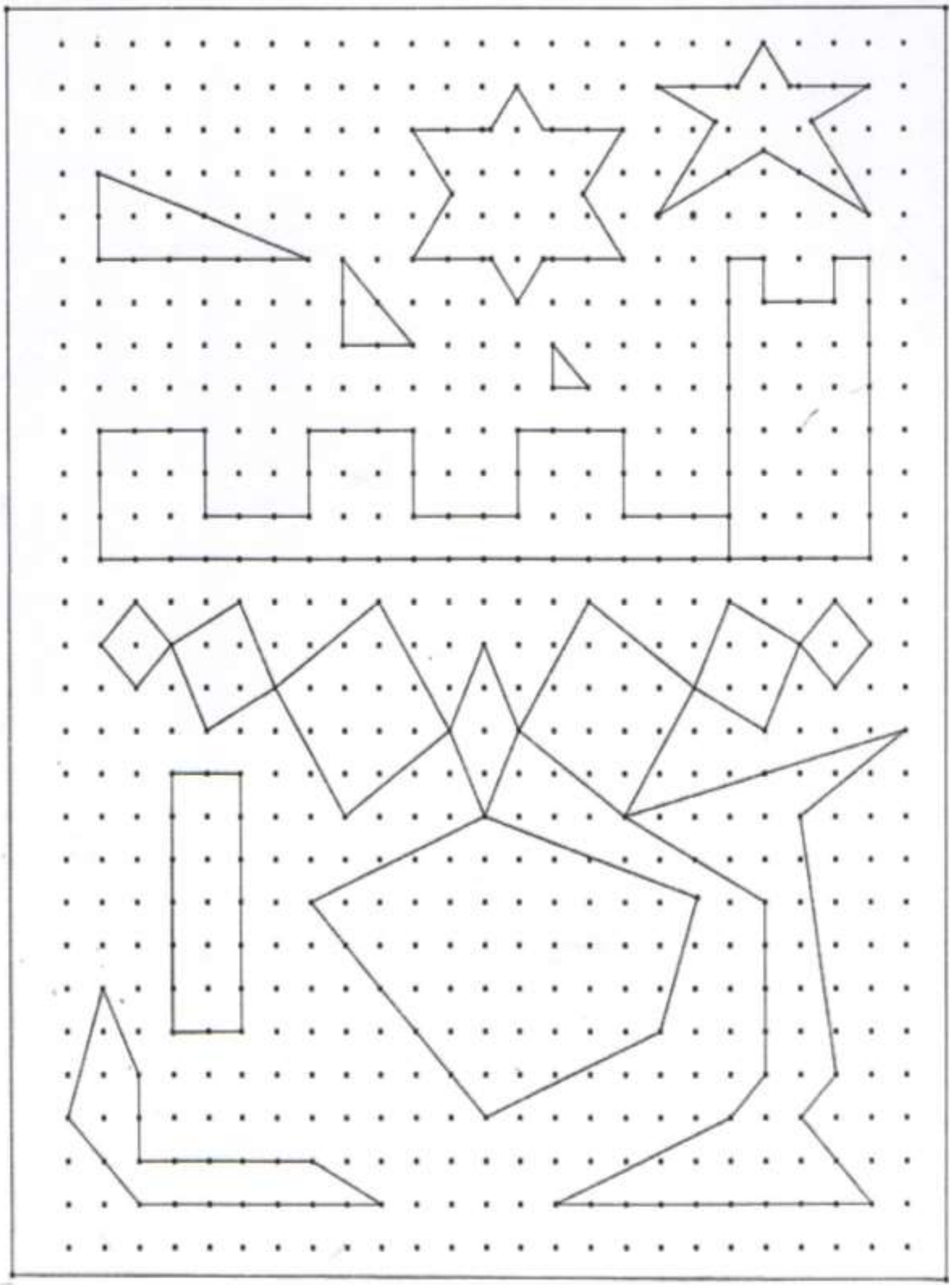
3).- Determina cuánto mide el área del rectángulo que se encuentra en la parte inferior izquierda de la figura 1. ¿Qué unidad de medida de superficie usaste? Comenta tus respuestas con tus compañeros de equipo.

4).- Determina cuánto mide el área del triángulo que se encuentra en la parte superior izquierda de la figura 1. Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo.

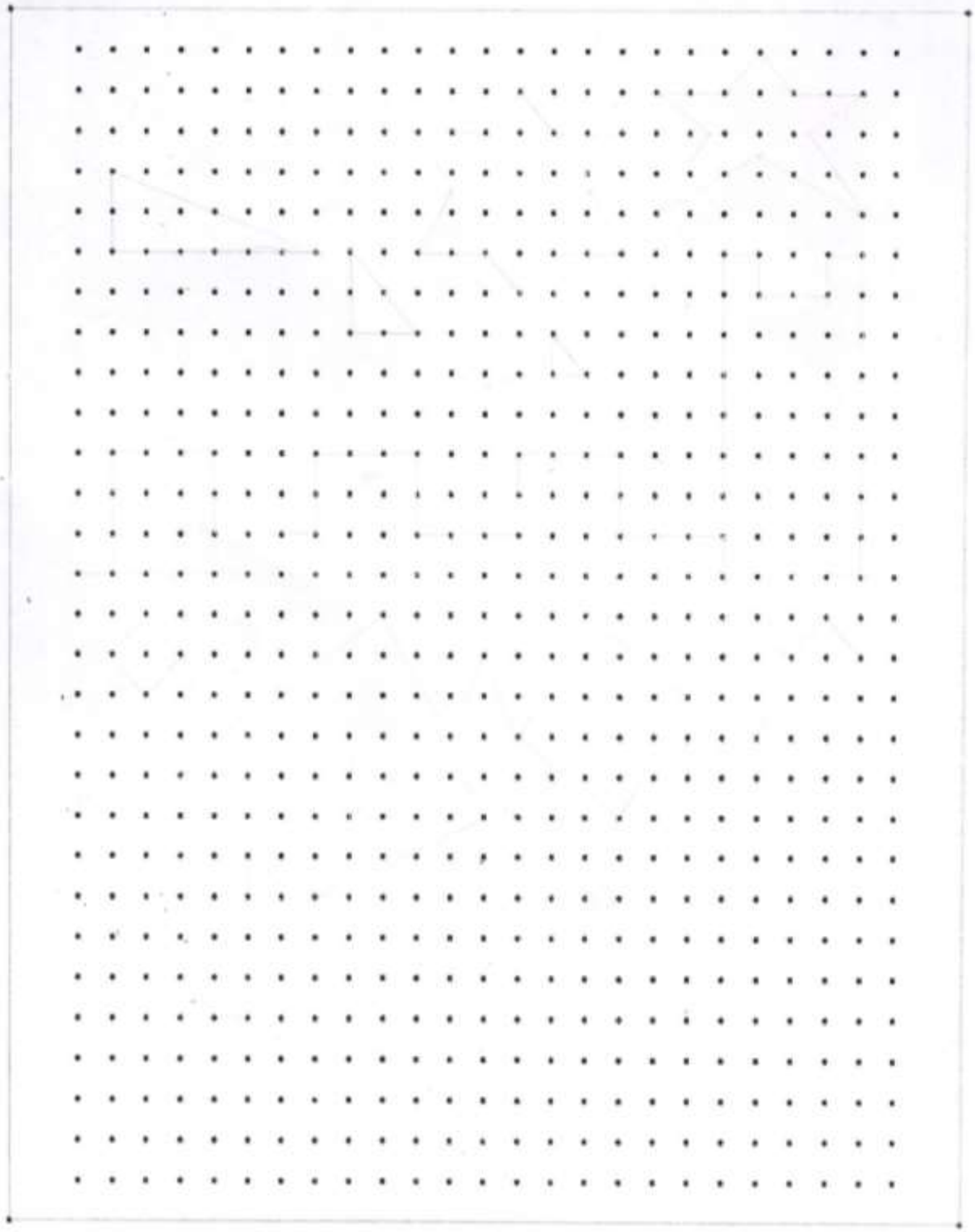
5).- Selecciona 3 de los cuadriláteros que aparecen en la figura 1 y determina cuánto mide el área de cada uno. Comenta tus respuestas con tus compañeros de equipo.

6).- Determina cuánto mide el área del pentágono que aparece en la figura 1. Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo.

Figura 1



Entramado 1



Actividad II

1).- En la figura 2 aparece un triángulo. Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo.

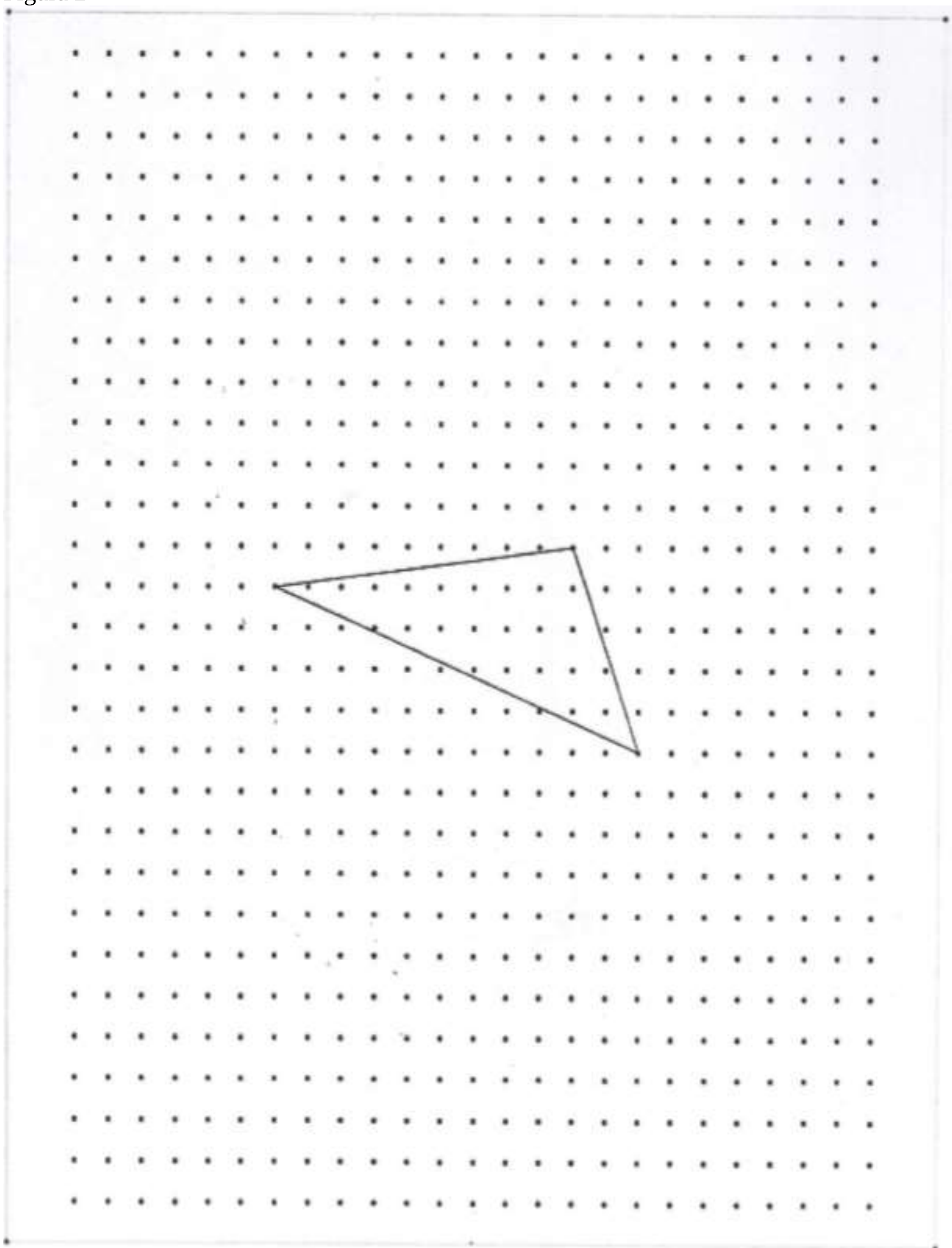
2).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, en el inciso *1)*, sobre los lados del triángulo.

3).- ¿Cuál de los 3 cuadrados es el más grande?

4).- ¿Se puede completar (o cubrir) el área del cuadrado más grande con las áreas de los otros 2 cuadrados? ¿Por qué?

5).- ¿Con qué tipo de triángulo trabajaste en esta actividad?

Figura 2



Actividad III

1).- En la figura 3 aparece un triángulo. Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo.

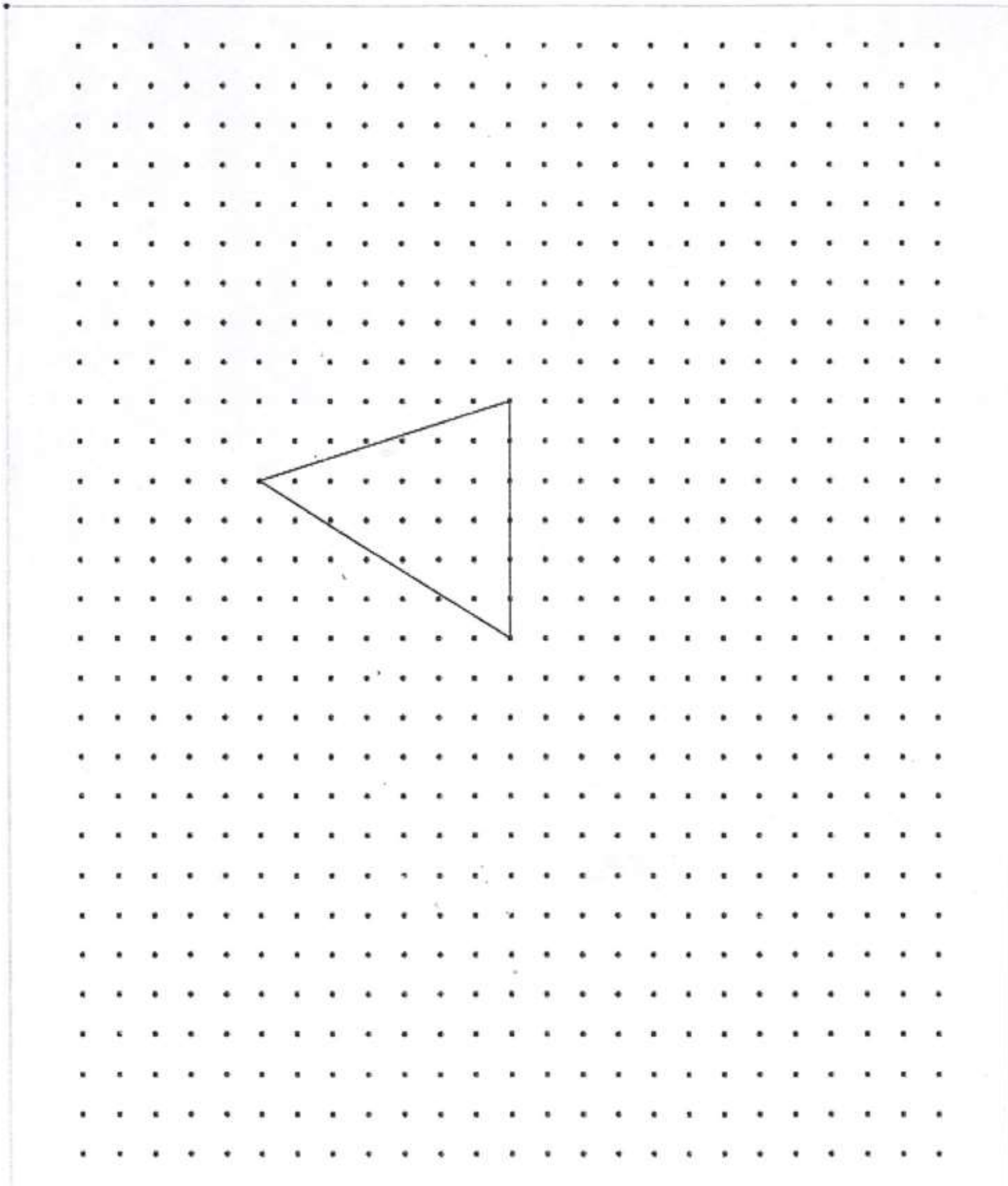
2).- Determina el área de cada uno de los cuadrados construidos, en el inciso 1), sobre los lados del triángulo.

3).- ¿Cuál de los 3 cuadrados es el más grande?

4).- ¿Se puede completar (o cubrir) el área del cuadrado más grande con las áreas de los otros 2 cuadrados? ¿Por qué?

5).- ¿Con qué tipo de triángulo trabajaste en esta actividad?

Figura 3



Actividad IV

Contesta la siguiente pregunta.

¿Hay algún triángulo en el que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados?

Actividad V

Completa el siguiente cuadrado con base en la clasificación de los triángulos, de acuerdo con la amplitud de sus ángulos, y con los resultados que obtuviste en las actividades previas.

Tipo de triángulo	Característica(s)	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo
	Todos sus ángulos son agudos (menores de 90°)	
	Tiene un ángulo recto (de 90°)	
	Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°)	

Una vez completado el cuadro, compáralo con el de tus compañeros de equipo.

Actividad VI

1).- Enuncia el resultado que descubriste para los triángulos rectángulos.

____

2).- Ahora enuncia el resultado que descubriste para los triángulos obtusángulos.

3).- Finalmente, enuncia el resultado que descubriste para los triángulos acutángulos.

Actividad VII

Resuelve los siguientes problemas.

1).- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$ si $A(1, 2)$ y $B(5, 4)$?

2).- Instrucciones para encontrar el tesoro. A partir del árbol, camina:

35 pasos hacia el este;

30 pasos hacia el norte;

15 pasos hacia el oeste;

60 pasos hacia el este; y

finalmente, 20 pasos hacia el norte.

¿A cuántos pasos del árbol, en línea recta, está el tesoro?

3).- El triángulo ABC en la figura 1 es rectángulo isósceles. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa segmento $\overline{CB}$ es de 4.5 cm^2. ¿Cuánto mide cada uno de los catetos del triángulo?

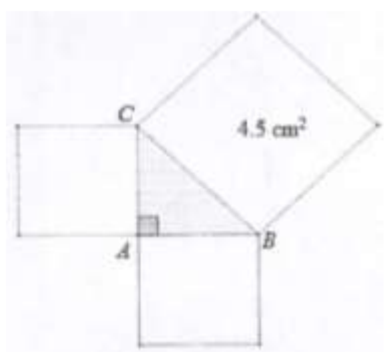


Figura 1

4).- ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide 10 centímetros?

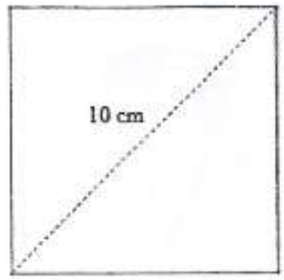


Figura 2

5).- El lado del cuadrado que aparece en la figura 3 tiene 4 unidades de longitud. ¿Cuánto mide el radio *R* de la circunferencia circunscrita?

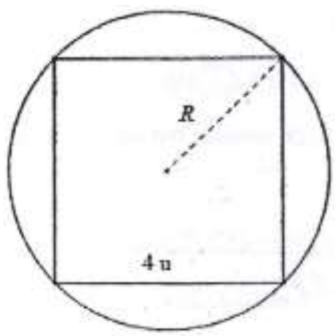


Figura 3

6).- En la figura 4 se muestra un cono recto de altura *h* y generatriz *g*. ¿Cuál es la expresión del radio *r* de la base, en función de *h* y *g*?

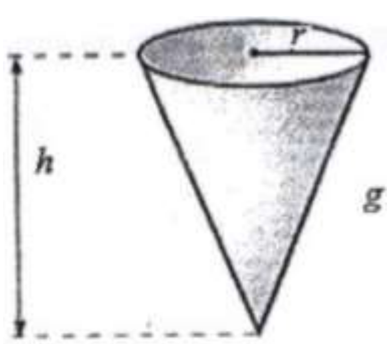


Figura 4

7).- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9 b) 9, 16, 25 c) 16, 25, 36 d) 36, 64, 100

e) 49, 441, 625 f) 100, 576, 676

8).- Selecciona tres números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 b) 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

9).- ¿En qué te basaste para seleccionar los tres números de cada uno de los incisos del ejercicio anterior?

____

____

10).- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados.

a) 4, 4, 9 b) 9, 16, 25 c) 16, 25, 36 d) 36, 64, 100

e) 49, 441, 625 f) 100, 576, 676

i).- Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo.

ii).- ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso? Justifica tu respuesta.

Apéndice F. Actividades implementadas en el estudio final

Nombre del alumno: _______________________________________ Fecha: ___________

Actividad I

1).- Copia la figura 1 en el entramado 1.

2).- Calcula el perímetro del rectángulo que se encuentra en la parte inferior izquierda de la figura 1. ¿Qué unidad de medida de longitud usaste? Comenta tus respuestas con tus compañeros de equipo.

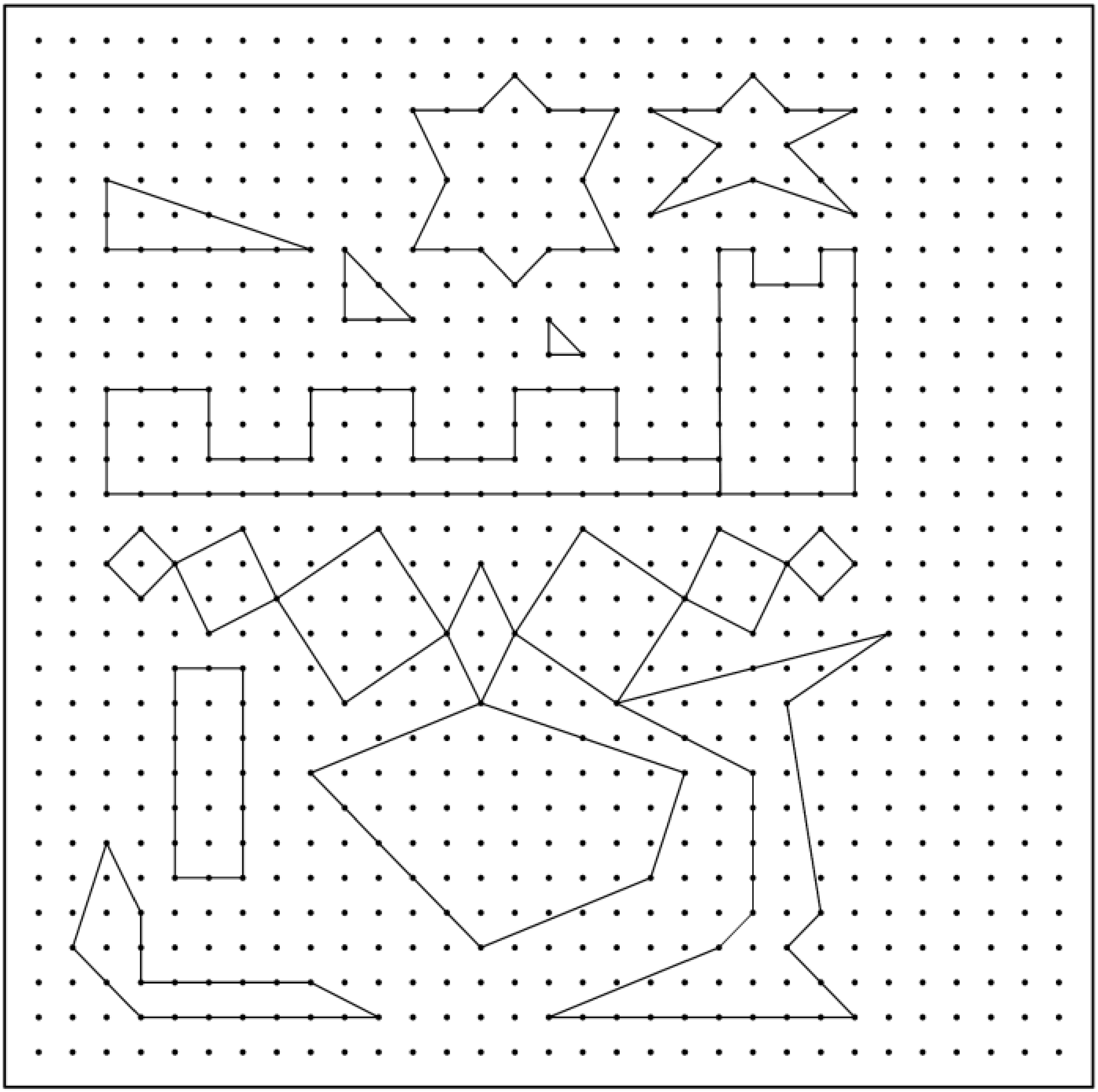
3).- Calcula el área del rectángulo que se encuentra en la parte inferior izquierda de la figura 1. ¿Qué unidad de medida de superficie usaste? Comenta tus respuestas con tus compañeros de equipo.

4).- Calcula el área del triángulo que se encuentra en la parte superior izquierda de la figura 1. Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo.

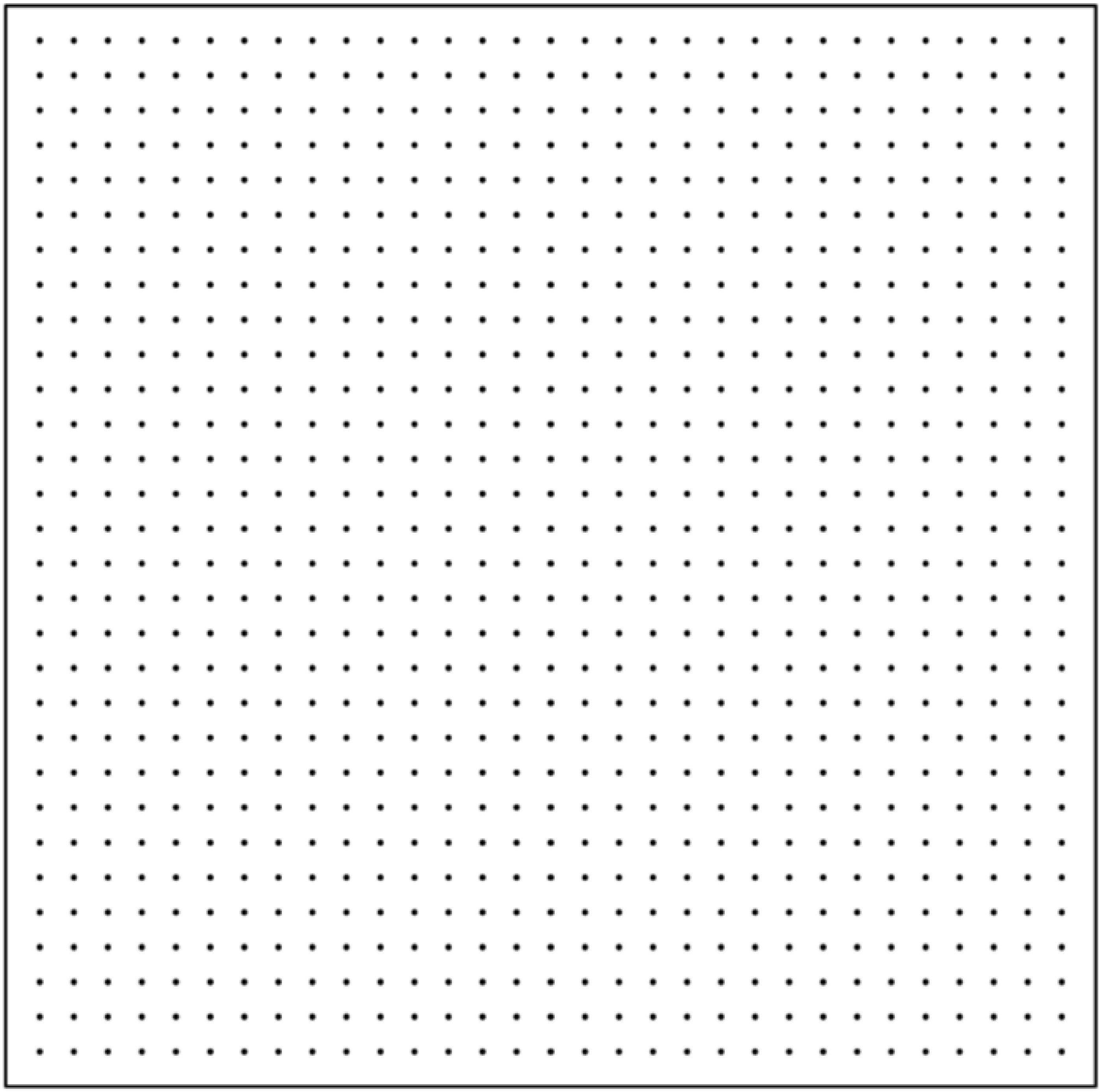
5).- Selecciona 3 de los cuadriláteros que aparecen en la figura 1 y calcula el área de cada uno. Comenta tus respuestas con tus compañeros de equipo.

6).- Calcula el área del pentágono que aparece en la figura 1. Comenta tu respuesta con tus compañeros de equipo.

Figura 1



Entramado 1



Nombre del alumno: ____ Fecha: ___________

Actividad II

1).- En la figura 2 aparece un triángulo. Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo.

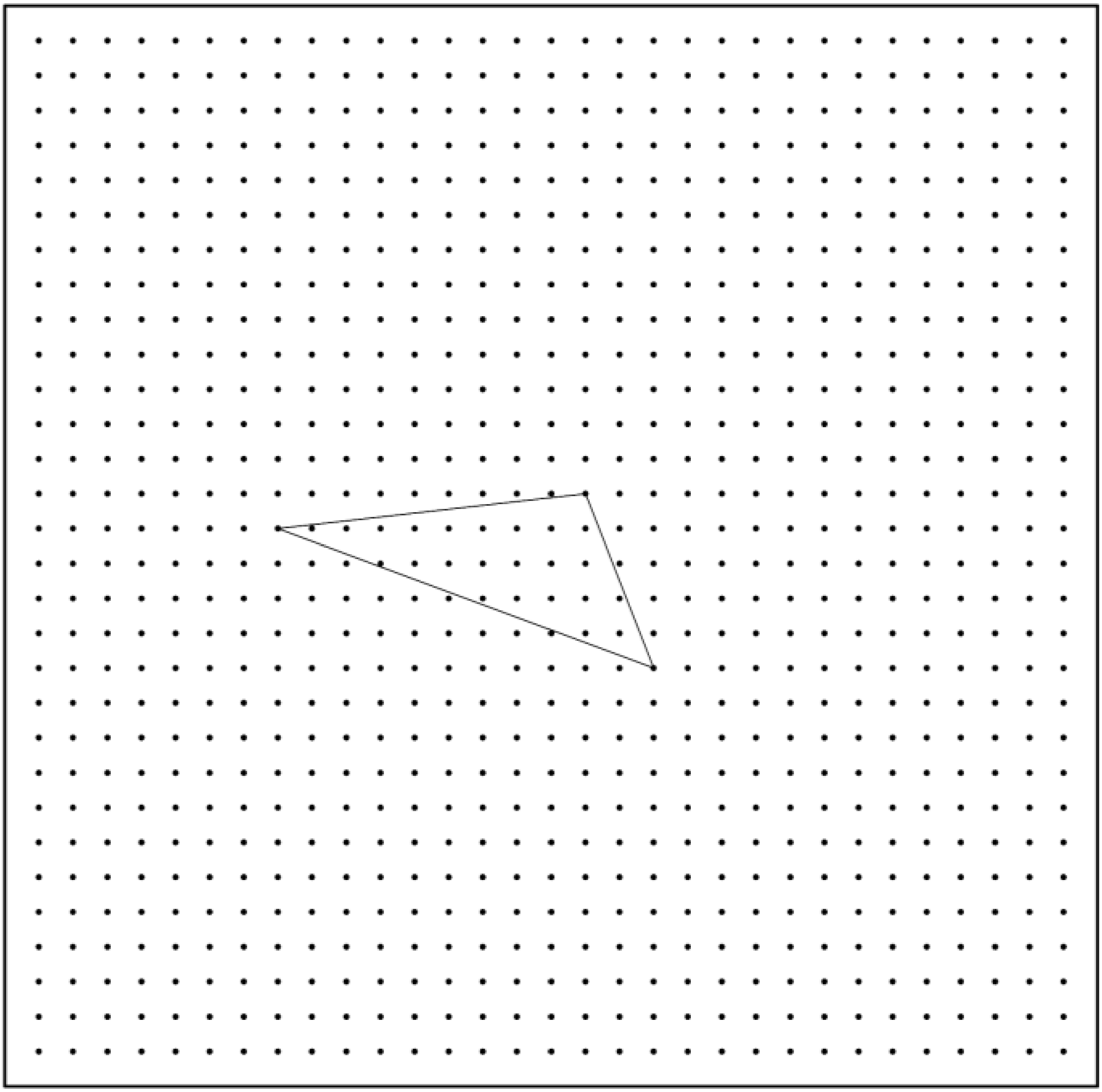
2).- Calcula el área de cada uno de los cuadrados construidos, en el inciso *1),* sobre los lados del triángulo.

3).- ¿Cuál de los 3 cuadrados es el más grande?

4).- ¿Se puede completar (o cubrir) el área del cuadrado más grande con las áreas de los otros 2 cuadrados? ¿Por qué?

5).- ¿Con qué tipo de triángulo trabajaste en esta actividad?

Figura 2



Nombre del alumno: _______________________________________ Fecha: ___________

Actividad III

1).- En la figura 3 aparece un triángulo. Construye un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo de modo que el lado de cada cuadrado sea el mismo que el lado correspondiente del triángulo.

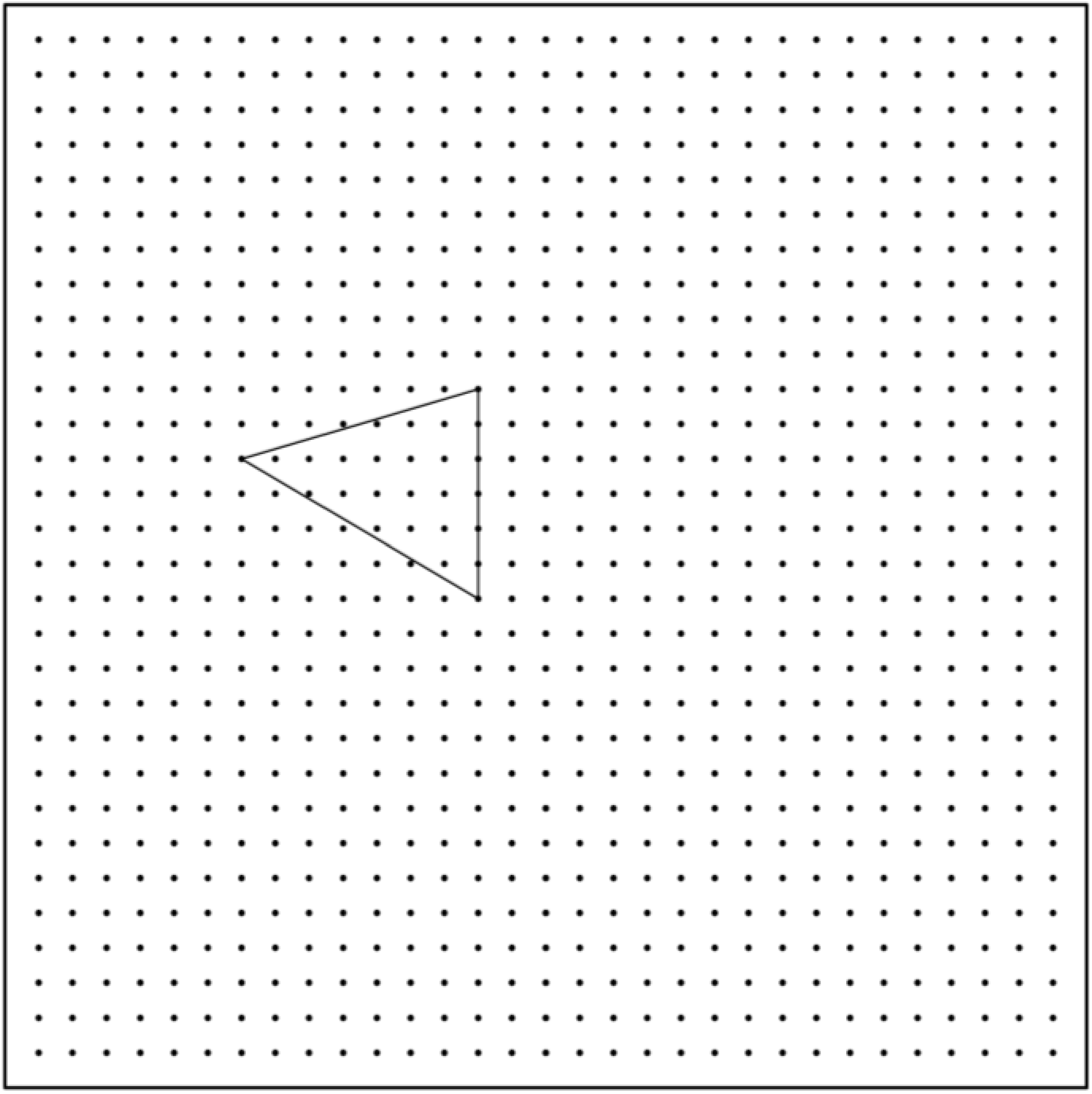
2).- Calcula el área de cada uno de los cuadrados construidos, en el inciso *1),* sobre los lados del triángulo.

3).- ¿Cuál de los 3 cuadrados es el más grande?

4).- ¿Se puede completar (o cubrir) el área del cuadrado más grande con las áreas de los otros 2 cuadrados? ¿Por qué?

5).- ¿Con qué tipo de triángulo trabajaste en esta actividad?

Figura 3



Nombre del alumno: ______________________________________ Fecha: ___________

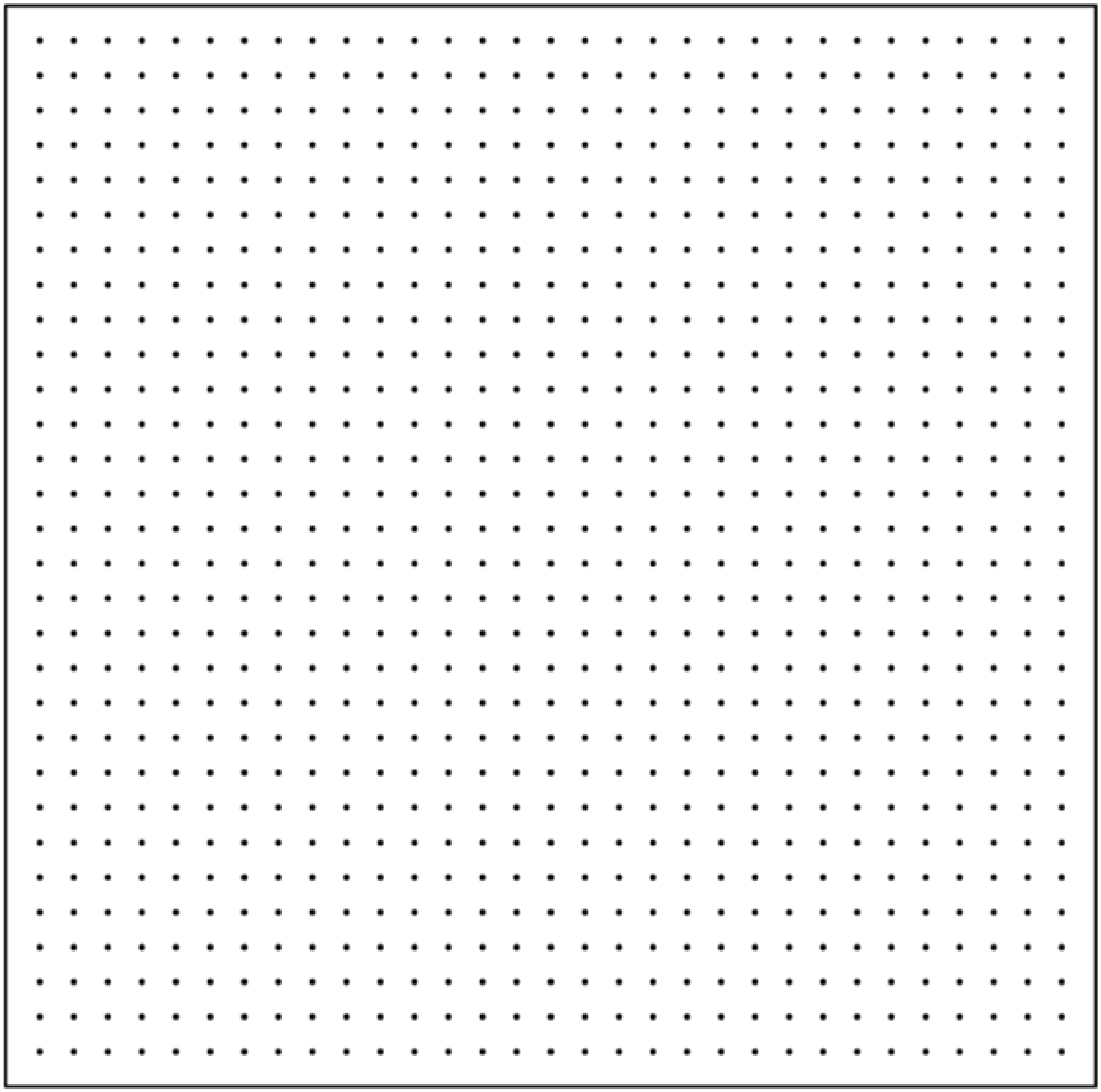
Actividad IV

Contesta la siguiente pregunta.

¿Hay algún triángulo en el que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados?

Verifica tu respuesta mediante un ejemplo, o los que consideres necesarios, usando un entramado.

Entramado 2



Nombre del alumno: ______________________________________ Fecha: ___________

Actividad V

Completa el siguiente cuadro sobre clasificación de triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos, y con los resultados que obtuviste en las actividades previas.

Tipo de triángulo	Característica(s)	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo
	Todos sus ángulos son agudos (menores de 90°)	
	Tiene un ángulo recto (de 90°)	
	Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°)	

Una vez completado el cuadro, compáralo con el de tus compañeros de equipo.

Nombre del alumno: ____ Fecha: ___________

Actividad VI

1).- Enuncia el resultado que descubriste para los triángulos rectángulos.

____

____

____

2).- Ahora enuncia el resultado que descubriste para los triángulos obtusángulos.

____

____

3).- Finalmente, enuncia el resultado que descubriste para los triángulos acutángulos.

____

____

Nombre del alumno: ______________________________________ Fecha: ___________

Actividad VII

Resuelve los siguientes problemas.

1).- ¿Cuál es la longitud del segmento $\overline{AB}$ si las coordenadas de los puntos son $A(1, 2)$ y $B(5, 4)$?

2).- Instrucciones para encontrar el tesoro. A partir del árbol, camina:

35 pasos hacia el este;

30 pasos hacia el norte;

15 pasos hacia el oeste;

60 pasos hacia el este; y

finalmente, 20 pasos hacia el norte.

¿A cuántos pasos del árbol, en línea recta, está el tesoro?

3).- El triángulo ABC en la figura 4 es rectángulo isósceles. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa $\overline{CB}$ es de 4.5 cm^2. ¿Cuánto mide cada uno de los catetos del triángulo?

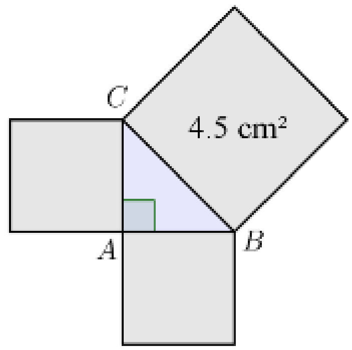


Figura 4

4).- ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal mide 10 centímetros?

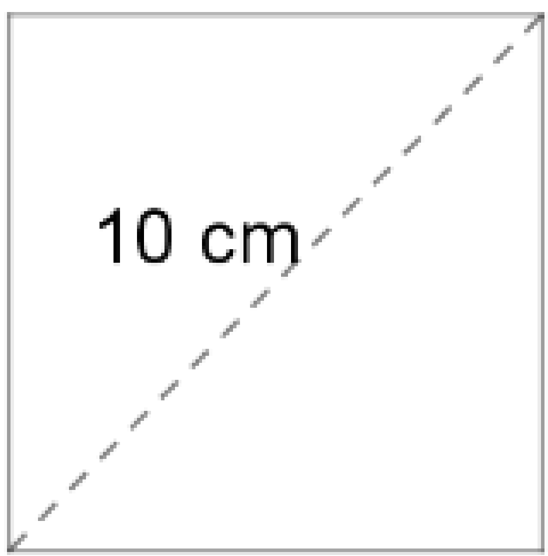


Figura 5

5).- El lado del cuadrado que aparece en la figura 6 tiene 4 unidades de longitud. ¿Cuánto mide el radio *R* de la circunferencia circunscrita?

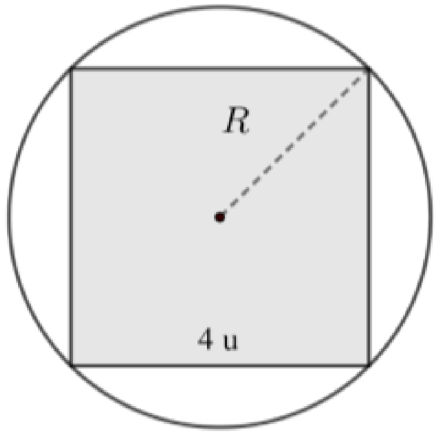


Figura 6

6).- En la figura 7 se muestra un cono recto de altura *h* y generatriz *g*. ¿Cuál es la expresión del radio *r* de la base, en función de *h* y *g*?

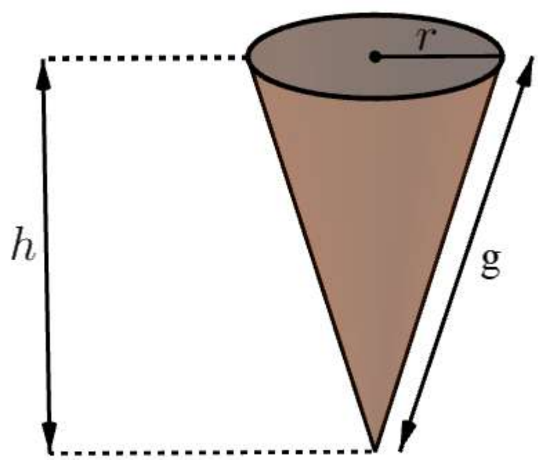


Figura 7

Nombre del alumno: ______________________________________ Fecha: ___________

Actividad VIII

1).- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9 *b)* 9, 16, 25 *c)* 16, 25, 36 *d)* 36, 64, 100
e) 49, 441, 625 *f)* 100, 576, 676

2).- Selecciona tres números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 *b)* 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

3).- ¿En qué te basaste para seleccionar los tres números de cada uno de los incisos del ejercicio 2?

____

____

4).- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados.

a) 4, 4, 9 *b)* 49, 441, 625 *c)* 9, 4, 49 *d)* 9, 16, 25

e) 16, 25, 36 *f)* 16, 9, 49 *g)* 100, 576, 676 *h)* 121, 144, 169

i) 49, 64, 121 *j)* 36, 64, 100

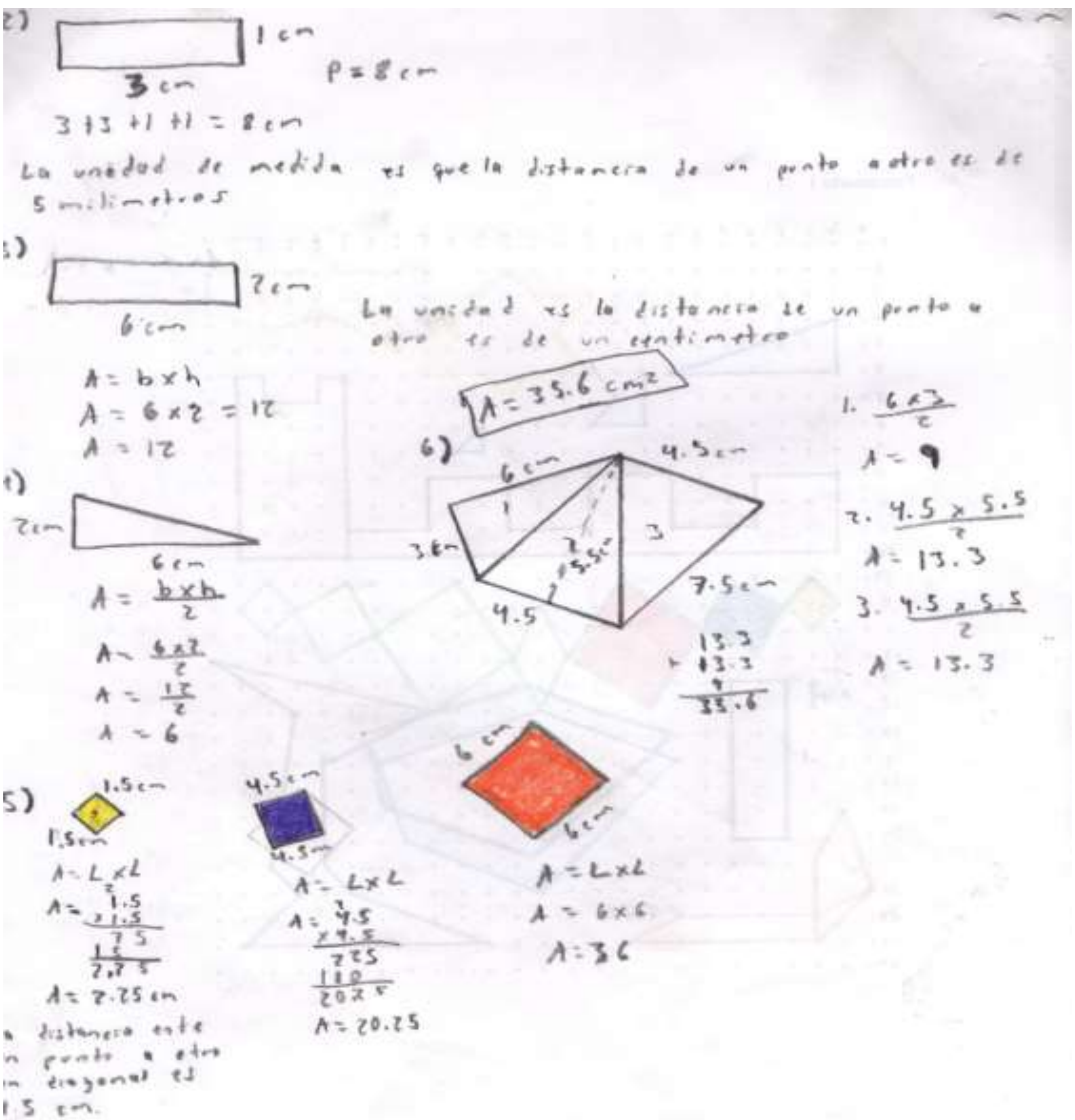
I).- Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo.

II).- ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso? Justifica tu respuesta.

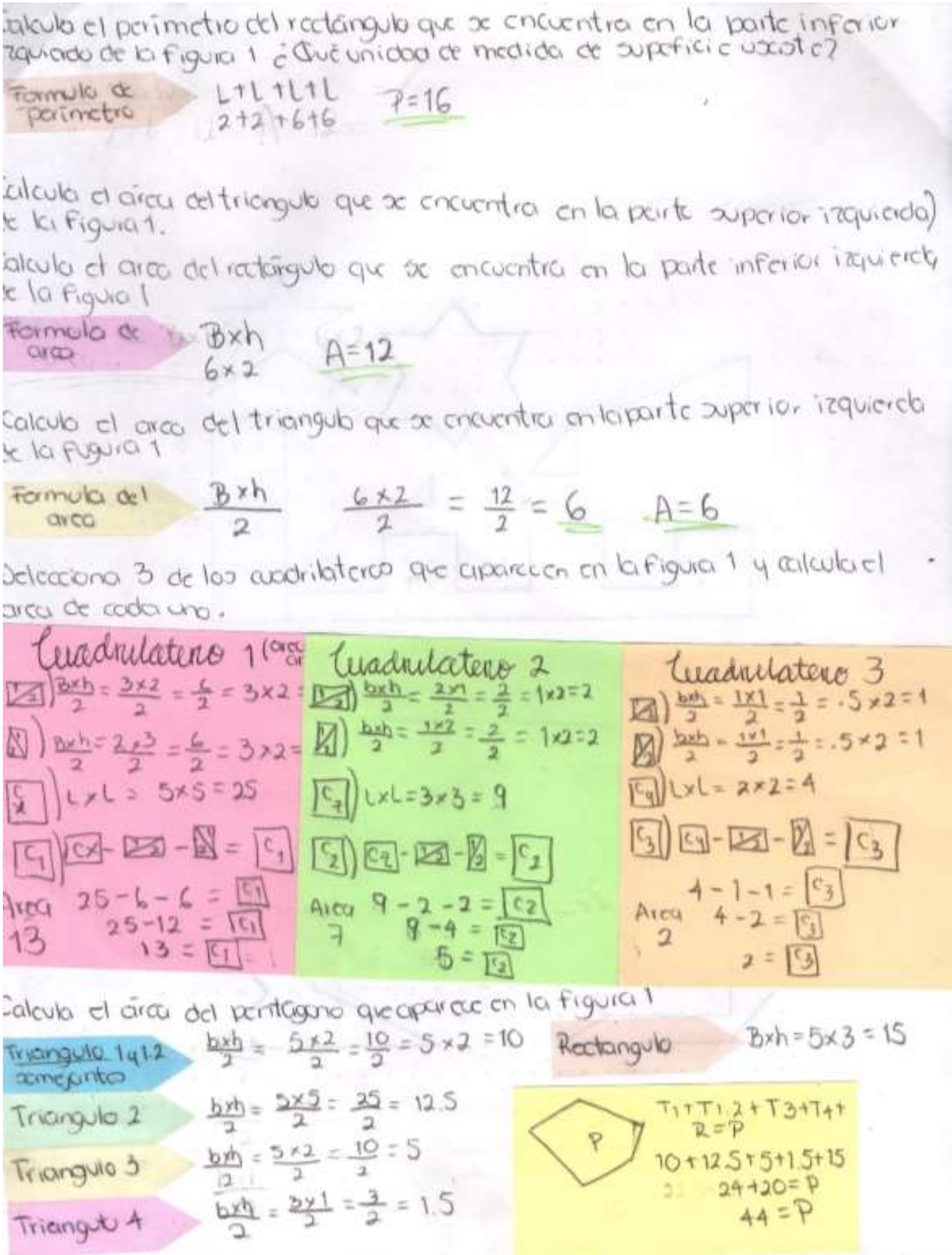
Entramado ______

Apéndice G. Algunos resultados obtenidos por los alumnos participantes en el estudio final

Actividad I (Realizada por el alumno 1)



Actividad I (Realizada por el alumno 2)



Calcula el perímetro del rectángulo que se encuentra en la parte inferior izquierda de la figura 1 ¿Qué unidad de medida de superficie usaste?

Formula de perimetro → L+L+L+L 2+2+6+6 P=16

Calcula el área del triangulo que se encuentra en la parte superior izquierda de la figura 1.

Calcula el area del rectángulo que se encuentra en la parte inferior izquierda de la figura 1

Formula de area → Bxh 6×2 A=12

Calcula el area del triangulo que se encuentra en la parte superior izquierda de la figura 1

Formula del area → $\frac{B\times h}{2}$ $\frac{6\times 2}{2} = \frac{12}{2} = 6$ A=6

Selecciona 3 de los cuadriláteros que aparecen en la figura 1 y calcula el area de cada uno.

Cuadrilatero 1	Cuadrilatero 2	Cuadrilatero 3
$\frac{B\times h}{2} = \frac{3\times 2}{2} = \frac{6}{2} = 3\times 2$	$\frac{b\times h}{2} = \frac{2\times 1}{2} = \frac{2}{2} = 1\times 2 = 2$	$\frac{b\times h}{2} = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2} = .5\times 2 = 1$
$\frac{B\times h}{2} = \frac{2\times 3}{2} = \frac{6}{2} = 3\times 2$	$\frac{b\times h}{2} = \frac{1\times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1\times 2 = 2$	$\frac{b\times h}{2} = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2} = .5\times 2 = 1$
L×L = 5×5 = 25	L×L = 3×3 = 9	L×L = 2×2 = 4
Area 25−6−6 = C1; 25−12 = C1; 13 = C1; 13	Area 9−2−2 = C2; 9−4 = C2; 5 = C2; 7	Area 4−1−1 = C3; 4−2 = C3; 2 = C3; 2

Calcula el área del pentágono que aparece en la figura 1

Triangulo 1 y 1.2 semejantes → $\frac{b\times h}{2} = \frac{5\times 2}{2} = \frac{10}{2} = 5\times 2 = 10$

Rectangulo → B×h = 5×3 = 15

Triangulo 2 → $\frac{b\times h}{2} = \frac{5\times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$

Triangulo 3 → $\frac{b\times h}{2} = \frac{5\times 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Triangulo 4 → $\frac{b\times h}{2} = \frac{3\times 1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

P

T1+T1.2+T3+T4+R=P

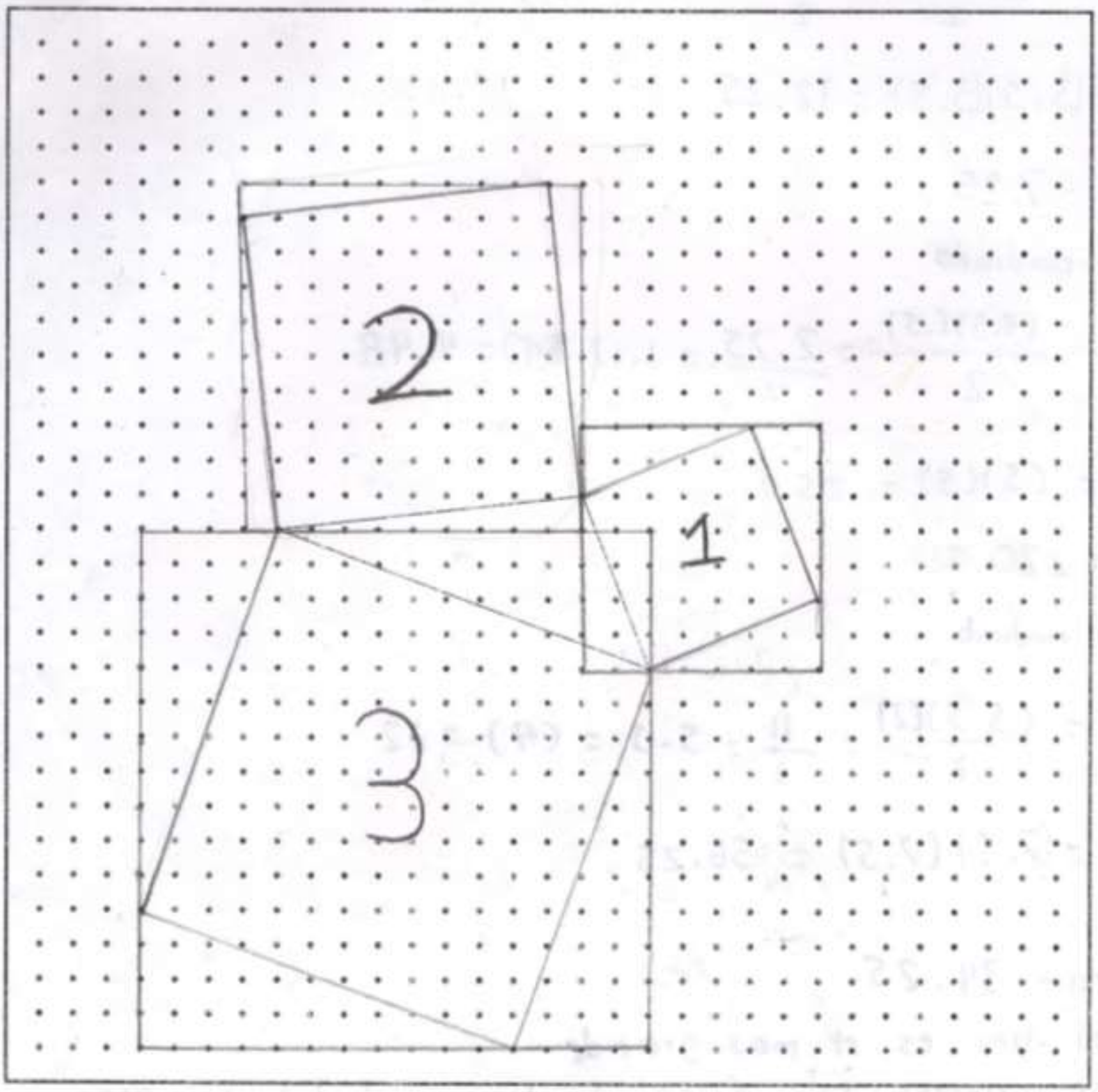
10+12.5+5+1.5+15

24+20=P

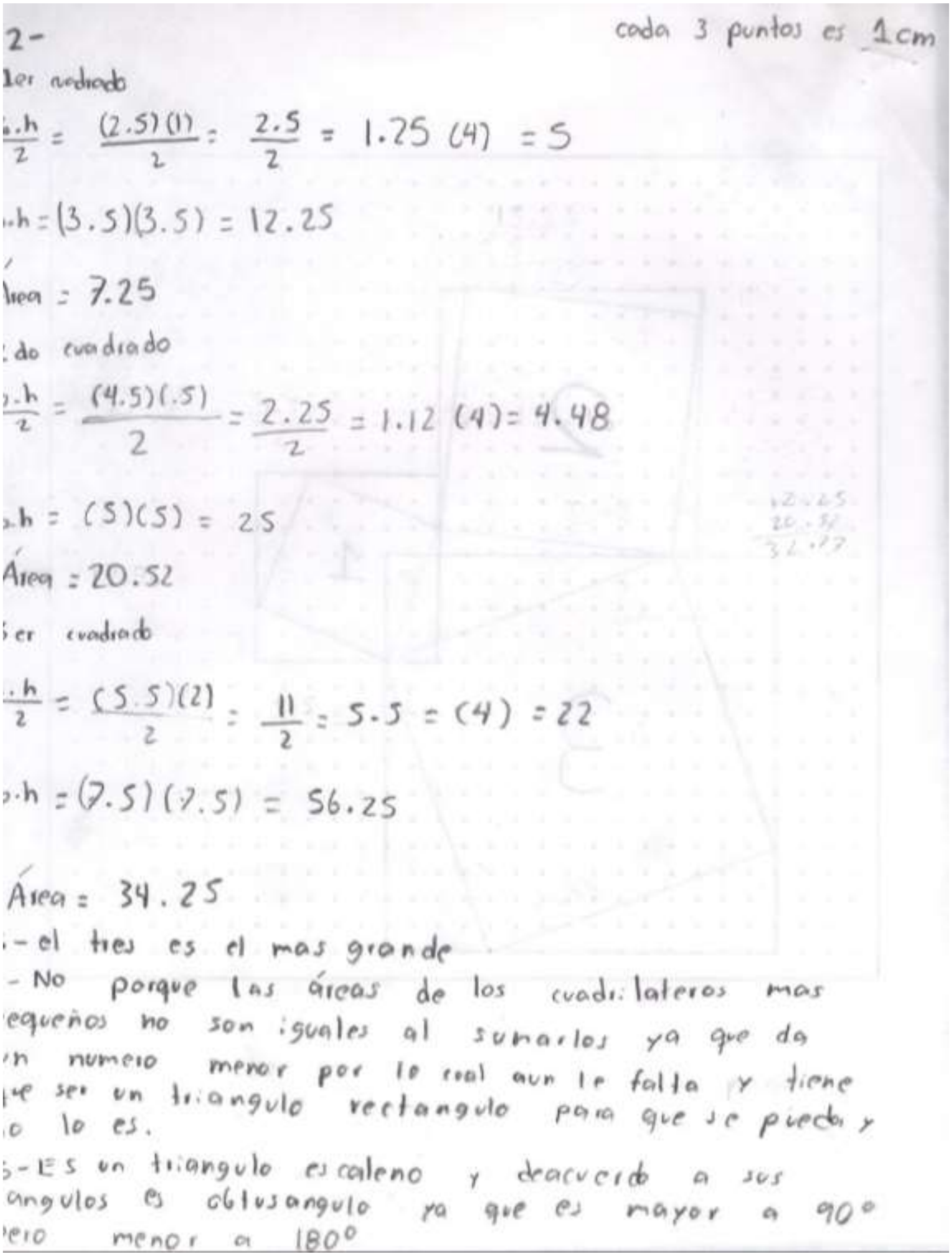
44=P

Actividad II (Realizada por el alumno 1)

Figura 2



Actividad II (Realizada por el alumno 1)



2- cada 3 puntos es 1cm

1er cuadrado

$\frac{b.h}{2} = \frac{(2.5)(1)}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25\ (4) = 5$

$b.h = (3.5)(3.5) = 12.25$

Área : 7.25

2do cuadrado

$\frac{b.h}{2} = \frac{(4.5)(.5)}{2} = \frac{2.25}{2} = 1.12\ (4) = 4.48$

$b.h = (5)(5) = 25$

Área : 20.52

3er cuadrado

$\frac{b.h}{2} = \frac{(5.5)(2)}{2} = \frac{11}{2} = 5.5 = (4) = 22$

$b.h = (7.5)(7.5) = 56.25$

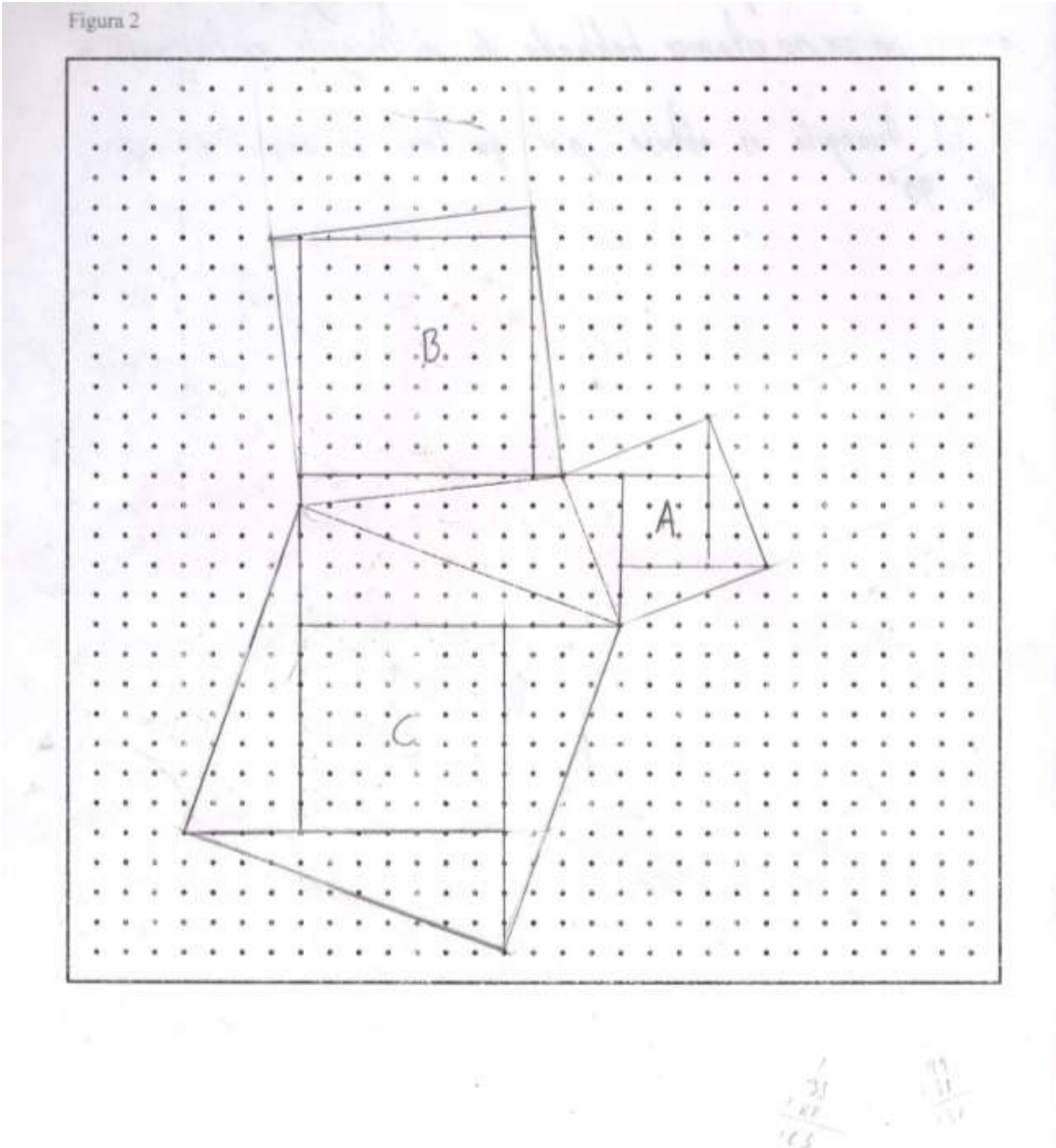
Área : 34.25

3- el tres es el mas grande

- No porque las áreas de los cuadrilateros mas pequeños no son iguales al sumarlos ya que da un numero menor por lo cual aun le falta y tiene que ser un triangulo rectangulo para que se pueda y no lo es.

5- ES un triangulo escaleno y deacuerdo a sus angulos es obtusangulo ya que es mayor a 90° pero menor a 180°

Actividad II (Realizada por el alumno 2)



Actividad II (Realizada por el alumno 2)

2) Para calcular el area de los tres cuadrados (a,b,c) dividi estos en figuras menos complejas resultando 4 triangulos rectangulos iguales y un cuadrilátero dentro de cada uno de ellos. asi solo necesite calcular el área de cada una de las figuras que conforma el cuadrado y luego sumarlos asi obtuve lo siguiente:

Cuadrado A:

$$4\left(\frac{(2(5))}{2}\right) = 20 + 3(3) = 29$$

Área: $29u^2$

Cuadrado B:

$$4\left(\frac{(1(9))}{2}\right) = 18 + 8(8) = 82$$

Área: $82u^2$

Cuadrado C:

$$4\left(\frac{(4(11))}{2}\right) = 88 + 7(7) = 137$$

Área: $137u^2$

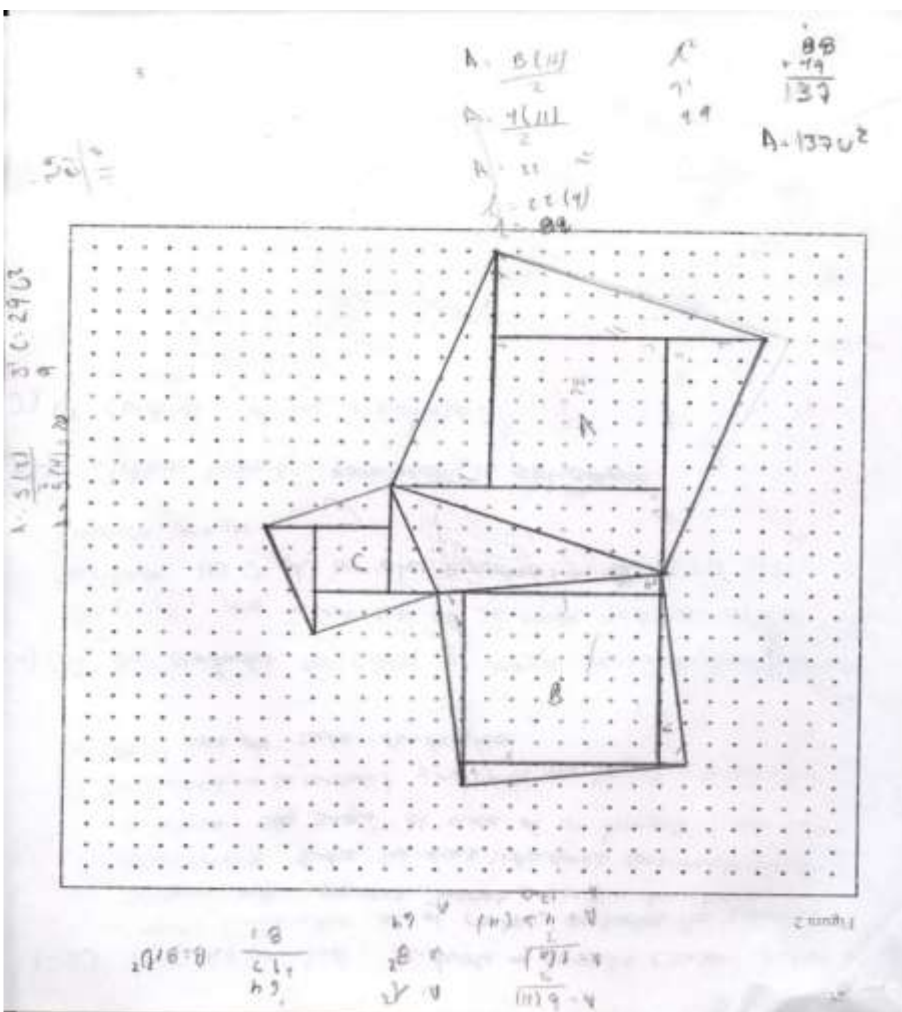
3) El más grande es el número 3 pues consta de un área mucho más elevada

Actividad II (Realizada por el alumno 2)

4) No se puede por que el Teorema de Pitágoras no puede aplicar por que no estamos hablando de un triángulo rectángulo.

5) El triangulo es obtuso por que tiene un ángulo de más de 90°

Actividad II (Realizada por el alumno 3)



Actividad II (Realizada por el alumno 3)

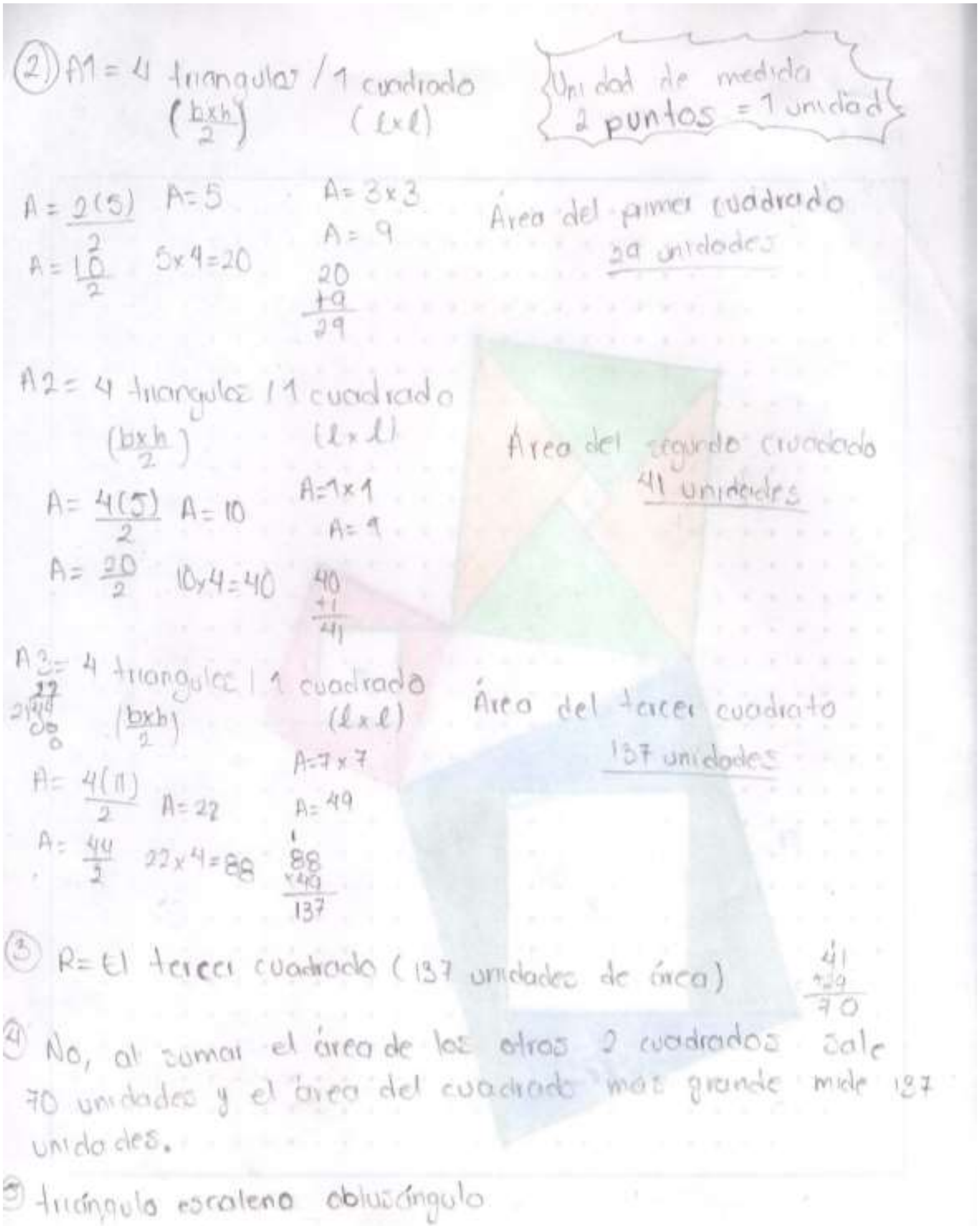
1-2). El cuadrado del lado, se dividió en triángulos escalenos y en un pequeño cuadrilátero en el centro, en todos los cuadrados salieron estas pequeñas formas, ya para las áreas simplemente saqué las áreas individuales, considerando que son equitativos solo saqué el área de un triángulo (cada uno correspondiente a su cuadrado) y multipliqué por los 4, y solo sumé con el área de cada cuadrilátero.

4) los dos cuadrados no cubren al mayor, aunque según pitágoras $a^2+b^2=c^2$, pero en este caso no se cumple, quedó muy corto el resultado 110 u^2 de los otros 2 cuadrados a el 137 u^2 del cuadrado mayor.

5) se utilizaron triángulos escalenos y un obtusángulo

3) El cuadrado de la hipotenusa.

Actividad II (Realizada por el alumno 4)



② A1 = 4 triangulos / 1 cuadrado
$\left(\frac{b \times h}{2}\right)$ $(\ell \times \ell)$

Unidad de medida
2 puntos = 1 unidad

$A = \frac{2(5)}{2}$ $A = 5$ $A = 3 \times 3$
$A = \frac{10}{2}$ $5 \times 4 = 20$ $A = 9$
$20 + 9 = 29$

Área del primer cuadrado
29 unidades

A2 = 4 triangulos / 1 cuadrado
$\left(\frac{b \times h}{2}\right)$ $(\ell \times \ell)$

$A = \frac{4(5)}{2}$ $A = 10$ $A = 1 \times 1$
$A = \frac{20}{2}$ $10 \times 4 = 40$ $A = 1$
$40 + 1 = 41$

Área del segundo cuadrado
41 unidades

A3 = 4 triangulos / 1 cuadrado
$\left(\frac{b \times h}{2}\right)$ $(\ell \times \ell)$

$A = \frac{4(11)}{2}$ $A = 22$ $A = 7 \times 7$
$A = \frac{44}{2}$ $22 \times 4 = 88$ $A = 49$
$88 + 49 = 137$

Área del tercer cuadrato
137 unidades

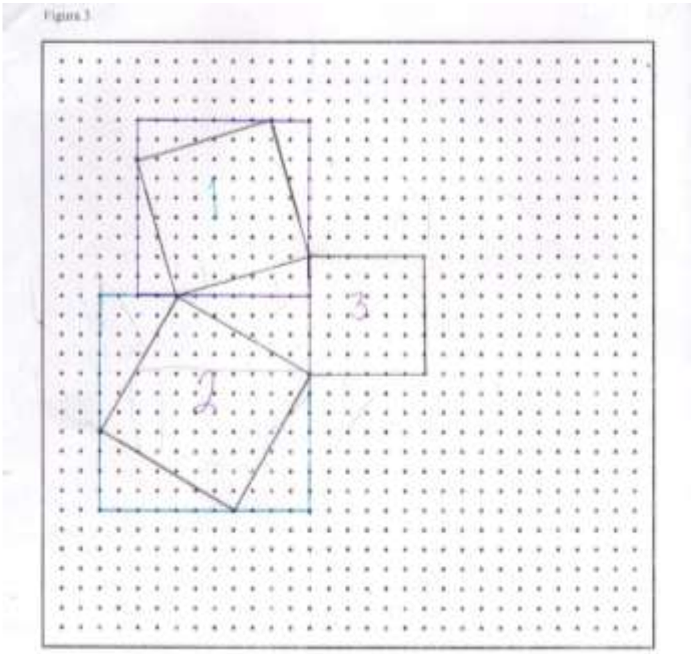
③ R = El tercer cuadrado (137 unidades de área)

$41 + 29 = 70$

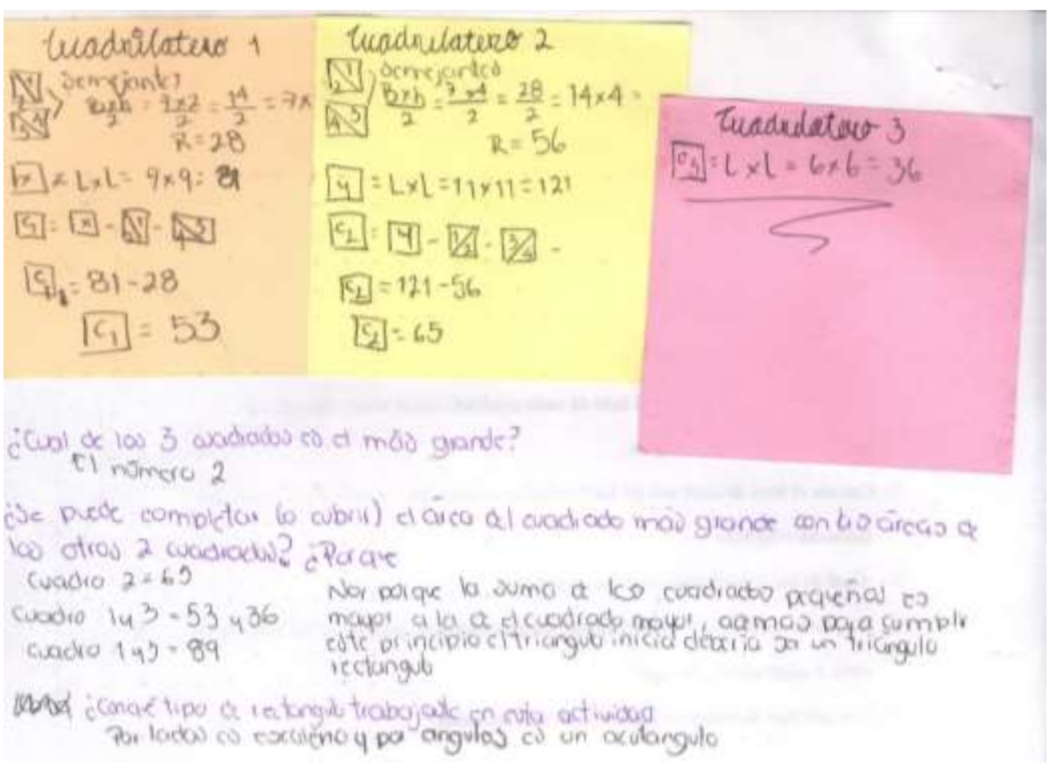
④ No, al sumar el área de los otros 2 cuadrados sale 70 unidades y el área del cuadrado más grande mide 137 unidades.

⑤ triángulo escaleno obtusángulo

Actividad III (Realizada por el alumno 1)

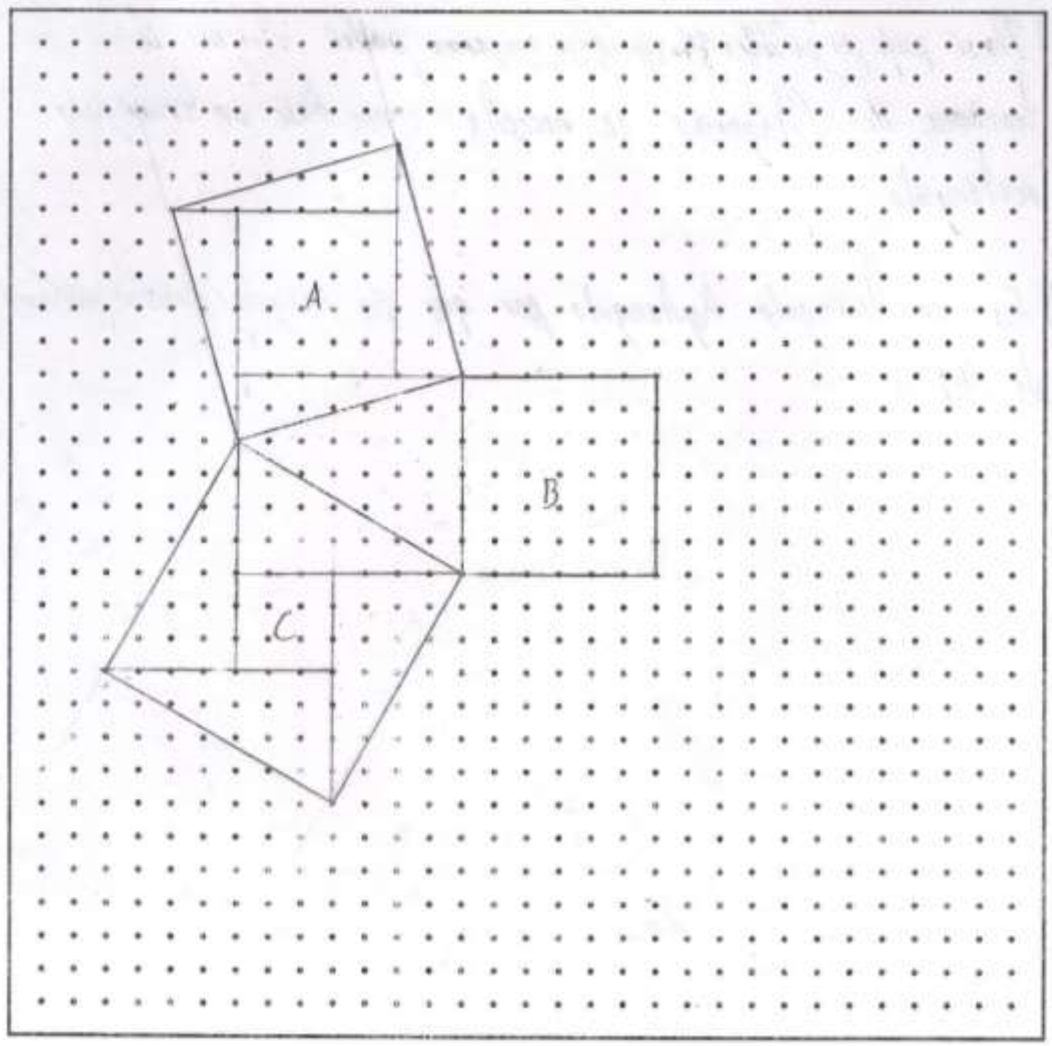


Actividad III (Realizada por el alumno 1)



Actividad III (Realizada por el alumno 2)

Figura 3



Actividad III (Realizada por el alumno 2)

2) Para calcular el área de los cuadrados a y C dividí las figuras en otras de menor complejidad resultando 4 triangulos escalenos iguales y un cuadrado menor en cada cuadrado De esta manera solo calculé el area de cada uno de los triangulos lo multiplico por 4 y sumo el area del cuadrado pequeño que es obtenida mediante el criterio "lado al cuadrado"

Triángulo A:

$$\begin{array}{r} 28 \\ +25 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$4\left(\frac{(7(2)}{2}\right) = 28 + 5(5) : \text{Área}$$

$$4\left(\frac{14}{2}\right) + 25 = \text{Área}$$

$$4(7) + 25 = \text{Área} \qquad \text{Área} = 53\ u^2$$

$$28 + 25 = \text{Área}$$

Triángulo C:

$$4\left(\frac{(7(4)}{2}\right) + 3(3) = \text{Área}$$

$$4\left(\frac{28}{2}\right) + 3(3) = \text{Área}$$

$$4(14) + 3(3) = \text{Área} \qquad \text{Área} = 65\ u^2$$

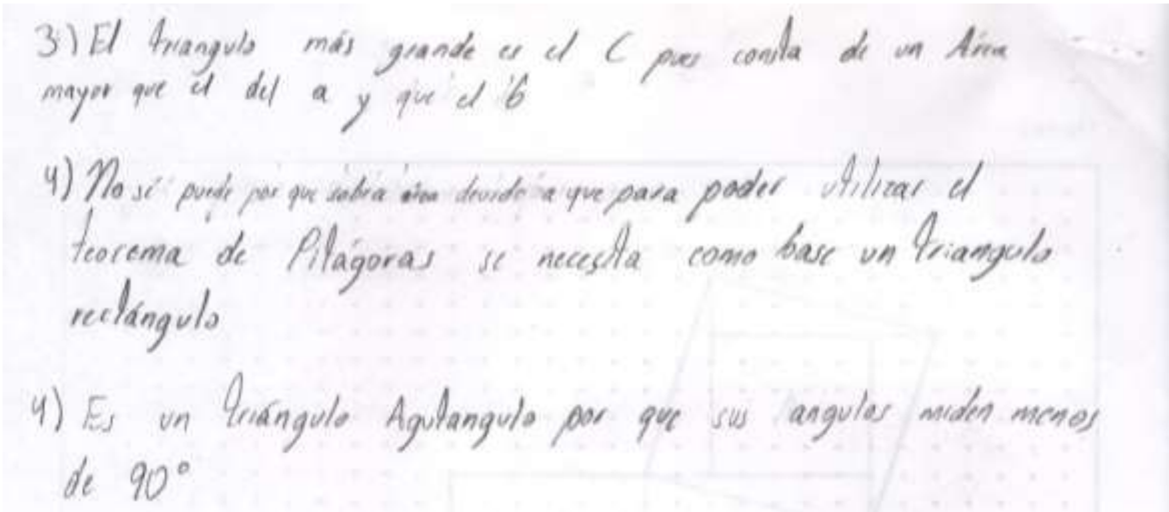
$$56 + 9 = \text{Área}$$

Triángulo B: En este ultimo aplique el criterio "Lado al cuadrado" obteniendo lo siguiente

$$6(6) = \text{Área}$$

$$\text{Área} = 36\ u^2$$

Actividad III (Realizada por el alumno 2)

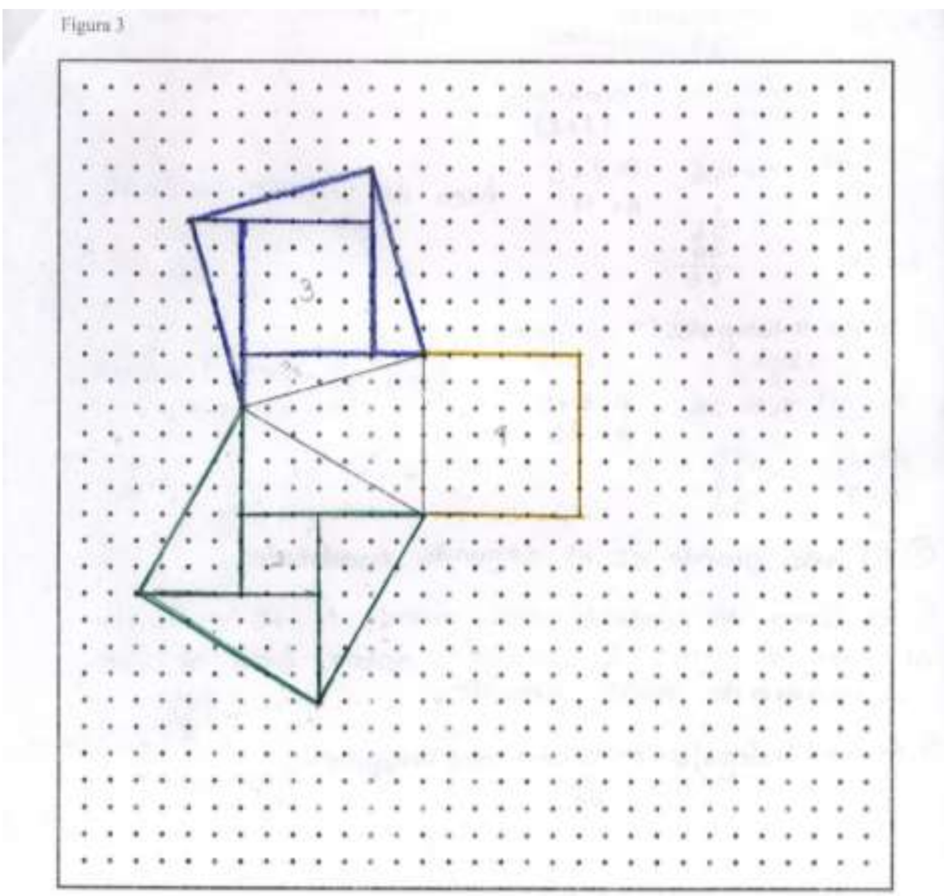


3) El triangulo más grande es el C pues consta de un Área mayor que el del a y que el b

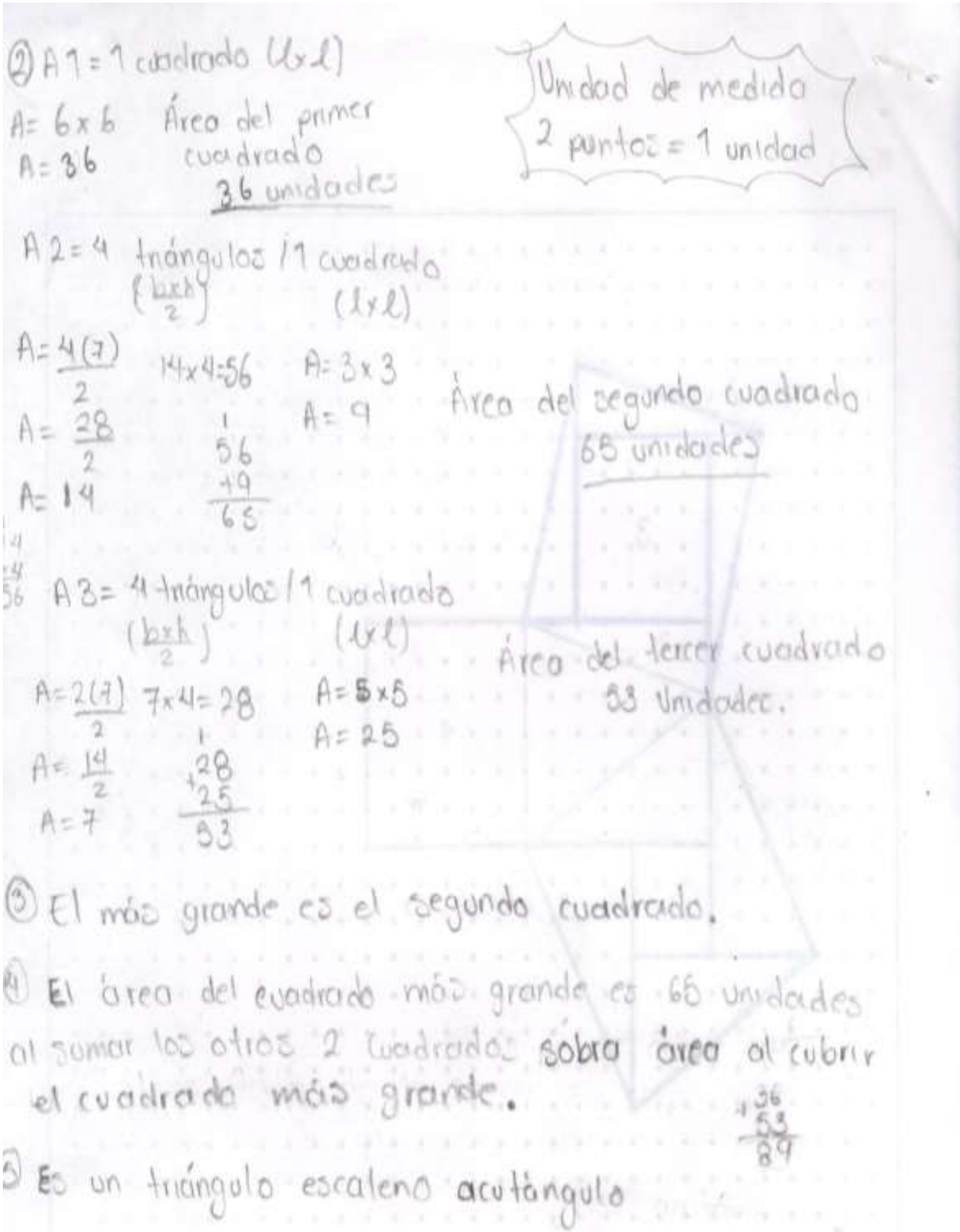
4) No se puede por que sabria área devido a que para poder utilizar el teorema de Pitágoras se necesita como base un triangulo rectángulo

4) Es un triángulo Agudangulo por que sus angulos miden menos de 90°

Actividad III (Realizada por el alumno 3)



Actividad III (Realizada por el alumno 3)



② A1 = 1 cuadrado (l×l)

Unidad de medida
2 puntos = 1 unidad

A = 6 × 6
A = 36

Área del primer cuadrado
36 unidades

A2 = 4 triángulos / 1 cuadrado
$\left(\frac{b \times h}{2}\right)$ $(l \times l)$

$A = \frac{4(7)}{2}$
$A = \frac{28}{2}$
A = 14

14 × 4 = 56
56 + 9 = 65

A = 3 × 3
A = 9

Área del segundo cuadrado
65 unidades

A3 = 4 triángulos / 1 cuadrado
$\left(\frac{b \times h}{2}\right)$ $(l \times l)$

$A = \frac{2(7)}{2}$
$A = \frac{14}{2}$
A = 7

7 × 4 = 28
28 + 25 = 53

A = 5 × 5
A = 25

Área del tercer cuadrado
53 Unidades.

③ El más grande es el segundo cuadrado.

④ El área del cuadrado más grande es 65 unidades al sumar los otros 2 cuadrados sobra área al cubrir el cuadrado más grande.

36 + 53 = 89

⑤ Es un triángulo escaleno acutángulo

Actividad IV (Realizada por el alumno 1)

Actividad IV

Contesta la siguiente pregunta.

¿Hay algún triángulo en el que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados?

Verifica tu respuesta mediante un ejemplo, o los que consideres necesarios, usando un entramado.

Cuadrilatero 1

$\boxed{c_1} = l \times l = 6 \times 6 = 36$

$A = 36$

Cuadrilatero 2

$\boxed{c_2} = l \times l = 8 \times 8 = 64$

$A = 64$

Cuadrilatero 3

$\boxed{1/2}$, $\boxed{3/4}$ semejante

$\frac{B \times h}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = \frac{48}{2} = 24$

$24 \times 4 = 96$

$\boxed{x} = l \times L = 14 \times 14 = 196$

$\boxed{c_3} = \boxed{x} - \boxed{1/2} - \boxed{3/4}$

$\boxed{c_3} = 196 - 96$ $\boxed{c_3} = 100$

Entonces

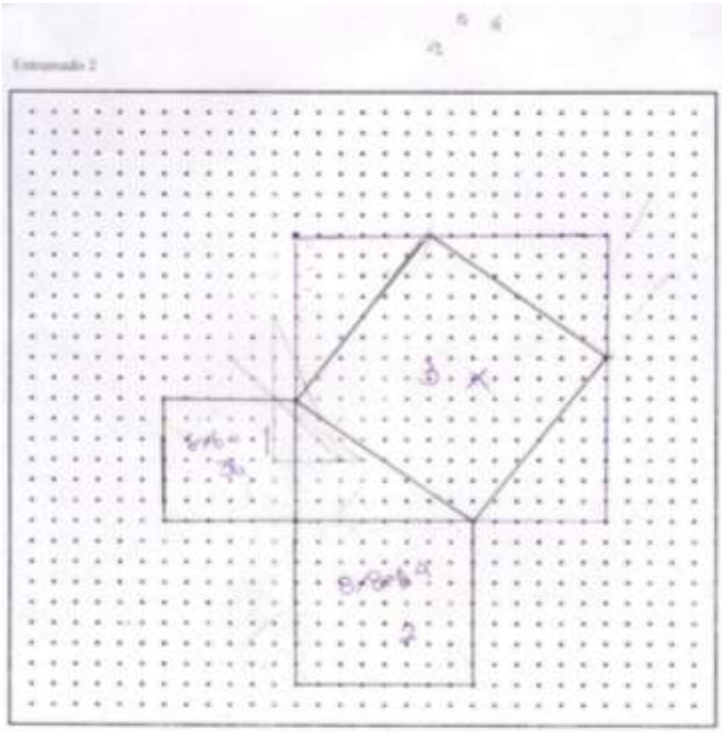
$\boxed{c_1} + \boxed{c_2} = \boxed{c_3}$

$36 + 64 = 100$

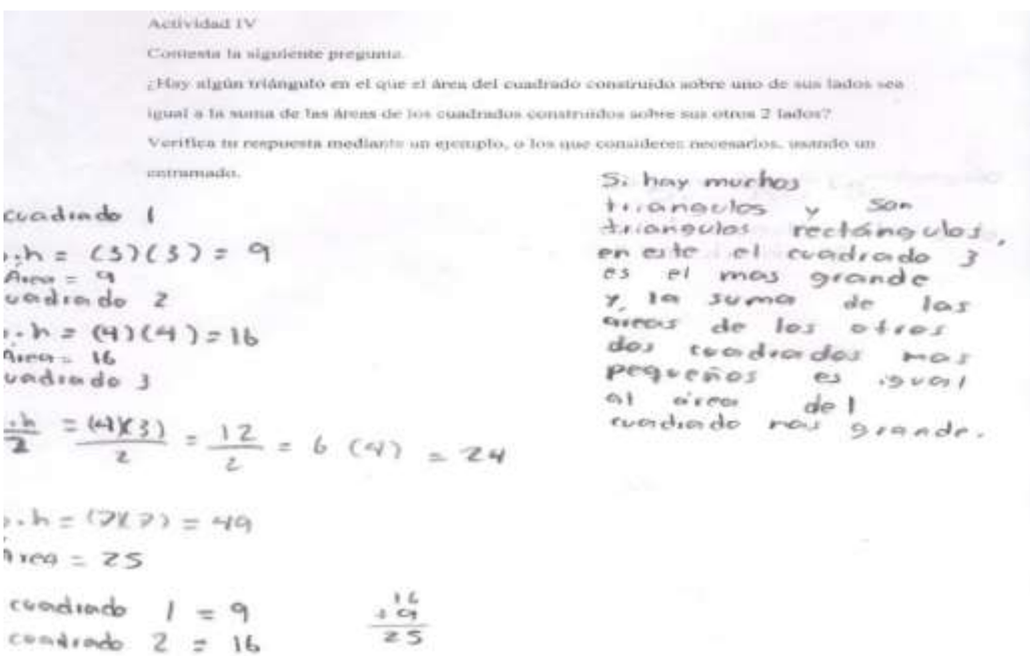
Los cuadrados pequeños si cubren al cuadrado mayor por que el triangulo empleado es un triangulo rectángulo, por lo cual cumple el teorema de Pitagoras

8

Actividad IV (Realizada por el alumno 1)



Actividad IV (Realizada por el alumno 2)



Actividad IV

Contesta la siguiente pregunta.

¿Hay algún triángulo en el que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados?

Verifica tu respuesta mediante un ejemplo, o los que consideres necesarios, usando un entramado.

cuadrado 1

$b \cdot h = (3)(3) = 9$

Área = 9

uadrado 2

$b \cdot h = (4)(4) = 16$

Área = 16

uadrado 3

$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{(4)(3)}{2} = \frac{12}{2} = 6\ (4) = 24$

$b \cdot h = (7)(7) = 49$

Área = 25

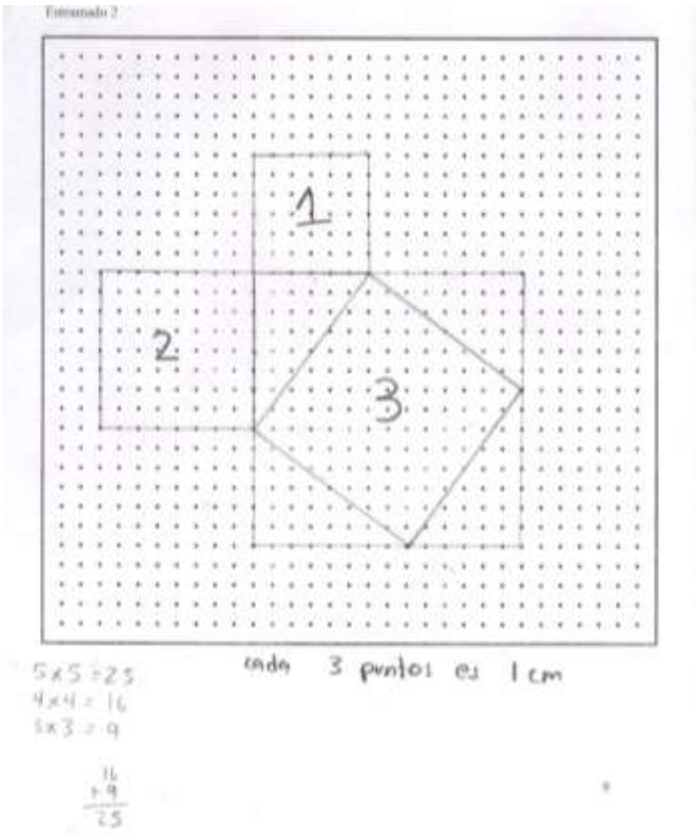
cuadrado 1 = 9

cuadrado 2 = 16

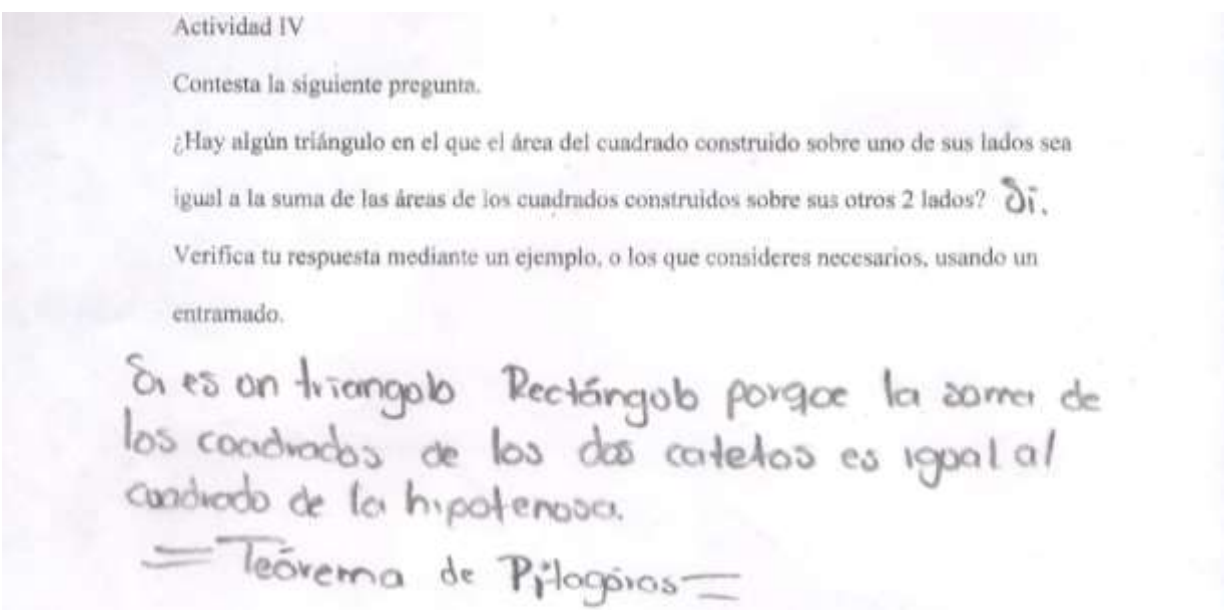
$$\begin{array}{r} 16 \\ +9 \\ \hline 25 \end{array}$$

Si hay muchos triangulos y son triangulos rectángulos, en este el cuadrado 3 es el mas grande y la suma de las areas de los otros dos cuadrados mas pequeños es igual al área del cuadrado mas grande.

Actividad IV (Realizada por el alumno 2)



Actividad IV (Realizada por el alumno 3)


Actividad IV

Contesta la siguiente pregunta.

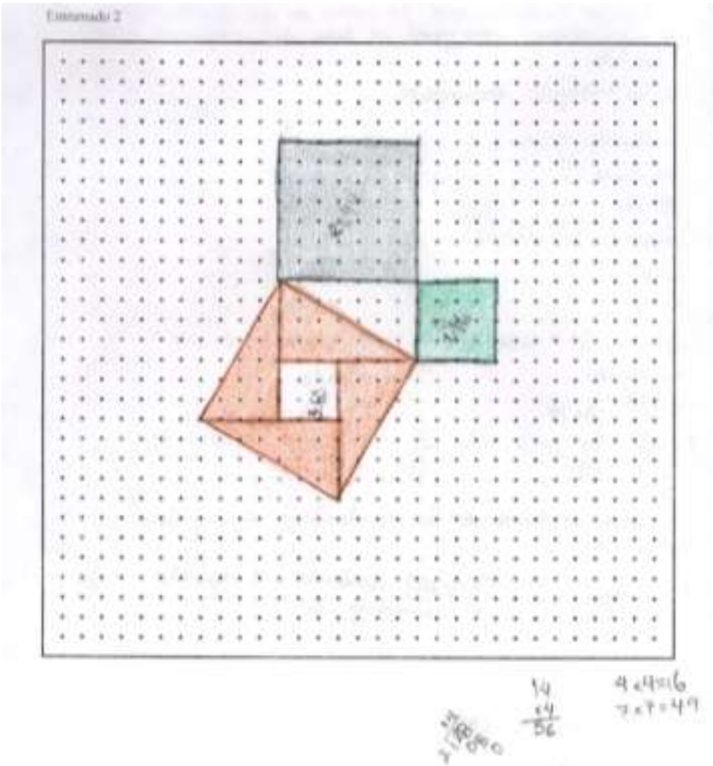
¿Hay algún triángulo en el que el área del cuadrado construido sobre uno de sus lados sea igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus otros 2 lados? Si.

Verifica tu respuesta mediante un ejemplo, o los que consideres necesarios, usando un entramado.

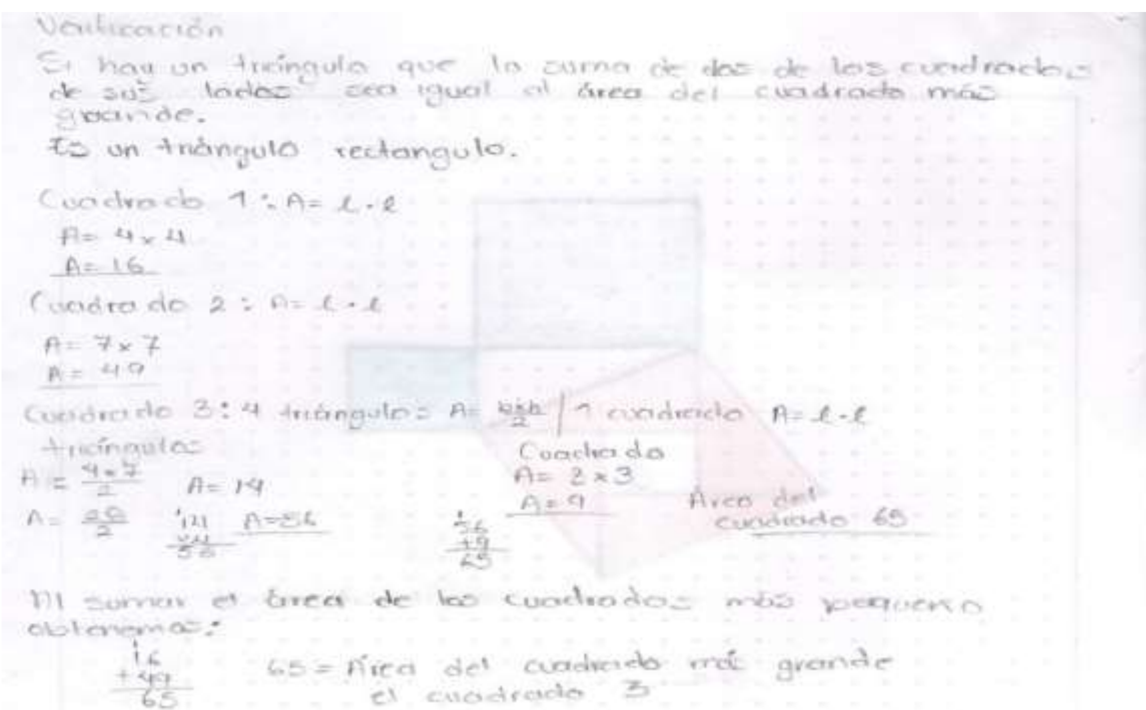
Si es un triangulo Rectángulo porque la suma de los cuadrados de los dos catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

= Teorema de Pitagoras =

Actividad IV (Realizada por el alumno 3)



Actividad IV (Realizada por el alumno 3)



Verificación

Si hay un triángulo que la suma de dos de los cuadrados de sus lados sea igual al área del cuadrado más grande.

Es un triángulo rectangulo.

Cuadrado 1: A= ℓ · ℓ

A= 4 × 4

A= 16

Cuadrado 2: A= ℓ · ℓ

A= 7 × 7

A= 49

Cuadrado 3: 4 triángulos A= $\frac{b \times h}{2}$ | 1 cuadrado A= ℓ · ℓ

triángulos

A = $\frac{4 \times 7}{2}$ A= 14

A= $\frac{28}{2}$ 14 ×4 56 A=56

Cuadrado

A= 3 × 3

A= 9

56 +9 65

Área del cuadrado 65

Al sumar el área de los cuadrados más pequeño obtenemos:

16 +49 65

65 = Área del cuadrado más grande el cuadrado 3

Actividad V (Realizada por el alumno 1)

Actividad V

Completa el siguiente cuadro sobre clasificación de triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos, y con los resultados que obtuviste en las actividades previas.

Tipo de triángulo	Característica(s)	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo
Acutángulo	Todos sus ángulos son agudos (menores de 90°)	al sumar el área de los cuadrados mas pequeños es mayor al área del cuadrado mas grande
rectángulo	Tiene un ángulo recto (de 90°)	la suma del área de los cuadrados mas pequeños es igual al área del cuadrado mas grande.
obtusángulo	Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°)	la suma del área de los cuadrados mas pequeños es menor al área del cuadrado mas grande.

Actividad V (Realizada por el alumno 2)

Actividad V

Completa el siguiente cuadro sobre clasificación de triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos, y con los resultados que obtuviste en las actividades previas.

Tipo de triángulo	Característica(s)	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo
Octutangulo	Todos sus ángulos son agudos (menores de 90°)	La suma de los cuadrados de los catetos es mayor que el cuadrado de la hipotenusa
Triangulo rectangulo	Tiene un ángulo recto (de 90°)	La suma de los cuadrados de los catetos es igual a el cuadrado de la hipotenusa
Obtusangulo	Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°)	La suma de los cuadrados de los catetos es menor que el cuadrado de la hipotenusa

Actividad V (Realizada por el alumno 3)

Actividad V

Completa el siguiente cuadro sobre clasificación de triángulos de acuerdo con la amplitud de sus ángulos, y con los resultados que obtuviste en las actividades previas.

Tipo de triángulo	Característica(s)	Relación que satisfacen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo
acutangulo	Todos sus ángulos son agudos (menores de 90°)	la suma del área de los 2 cuadrados pequeños, es mayor a el área del cuadrado mas grande
rectangulo	Tiene un ángulo recto (de 90°)	la suma del área de los 2 cuadrados pequeños es igual a el área del cuadrado grande
esculeno y obtusangulo	Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°)	la suma del área de los 2 cuadrados pequeños, es menor que el área del cuadrado mayor

Actividad VI (Realizada por el alumno 1)

Actividad VI

1.- Enuncia el resultado que descubriste para los triángulos rectángulos.

El triangulo rectangulo tiene un angulo de 90°, la suma del area de dos de sus cuadrados más pequeños es igual al area del tercer cuadrado. que es el más grande.

2.- Ahora enuncia el resultado que descubriste para los triángulos obtusángulos.

El triango obtusangulos tiene angulos mayores de 90° y menor a 180, la suma del area de dos de sus cuadrados pequeños es igual al area del tercer que es el más grande

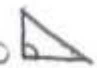
3.- Finalmente, enuncia el resultado que descubriste para los triángulos acutángulos.

El triangulo acutángulo tiene angulos menores de 90° y la suma del area de sus cuadrados pequeños es mayor al area del cuadrado mas grande.

Actividad VI (Realizada por el alumno 2)

Actividad VI

1.- Enuncia el resultado que descubriste para los triángulos rectángulos.

Cumplen con el teorema de Pitágoras, al sumar sus catetos al cuadrado nos da como  resultado la hipotenusa. Tiene un ángulo recto (90°)

2.- Ahora enuncia el resultado que descubriste para los triángulos obtusángulos.

Tiene un ángulo obtuso (mayor de 90° y menor de 180°) al sumar sus catetos al cuadro, el resultado es menor

3.- Finalmente, enuncia el resultado que descubriste para los triángulos acutángulos.

Todos sus angulos son agudos (menores de 90°) al sumar el cuadrado de los catetos, el resultado sobrepasa para llegar a la medida de la hipotenusa.

Actividad VI (Realizada por el alumno 3)

Actividad VI

1.- Enuncia el resultado que descubriste para los triángulos rectángulos.

Los triangulos rectangulos con el teorema de pitágoras para sacar el valor de la hipotenusa es $a^2+b^2=c^2$ y con los triangulos rectangulos al hacer un cuadrado en cada lado, y si hacemos la suma de las áreas de los cuadrados menores es el resultado del área del cuadrado mayor

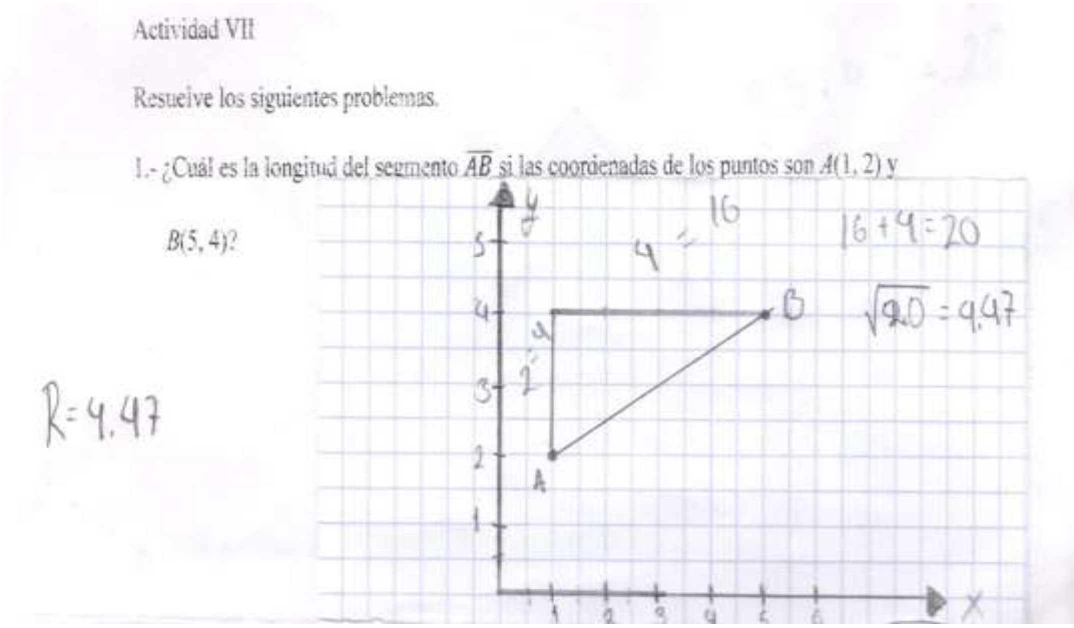
2.- Ahora enuncia el resultado que descubriste para los triángulos obtusángulos.

El teorema de Pitágoras con los triángulos obtusángulos no se cumple ya que al hacer los cuadrados en cada lado y al sumar el area de los cuadrados menores da menos que el área del cuadrado menor

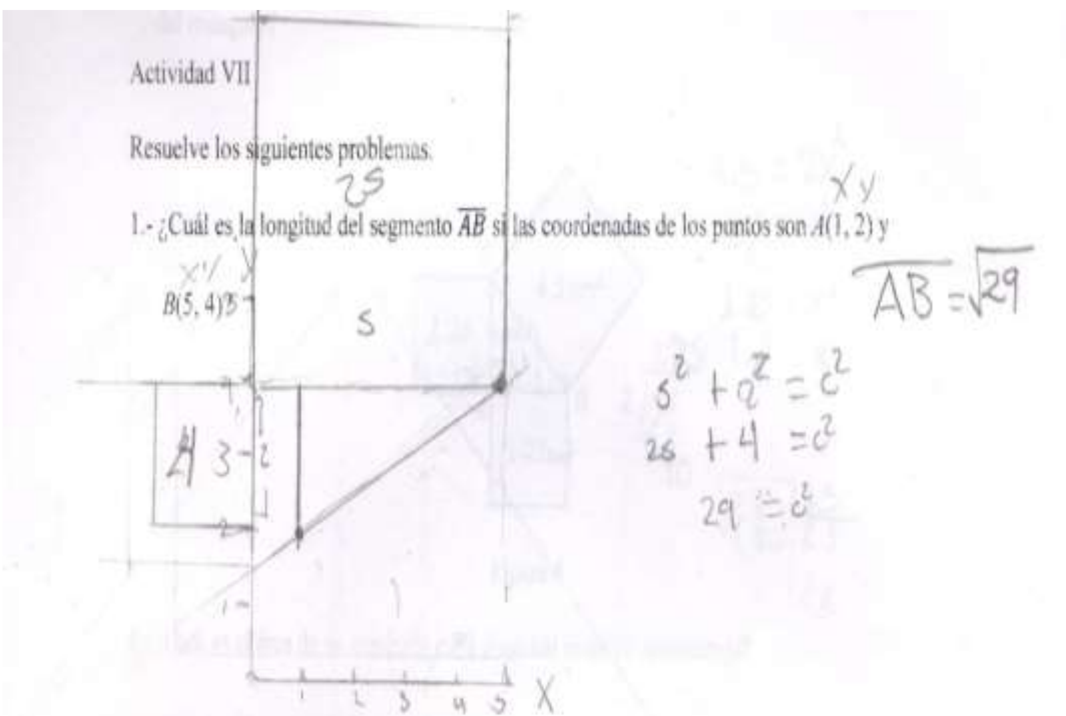
3.- Finalmente, enuncia el resultado que descubriste para los triángulos acutángulos.

Con los triangulos acutángulos tampoco se cumple el teorema de pitágoras ya que si hacemos un cuadrado en cada lado y se suma el área de los cuadrados menores da más que el resultado del cuadrado mayor

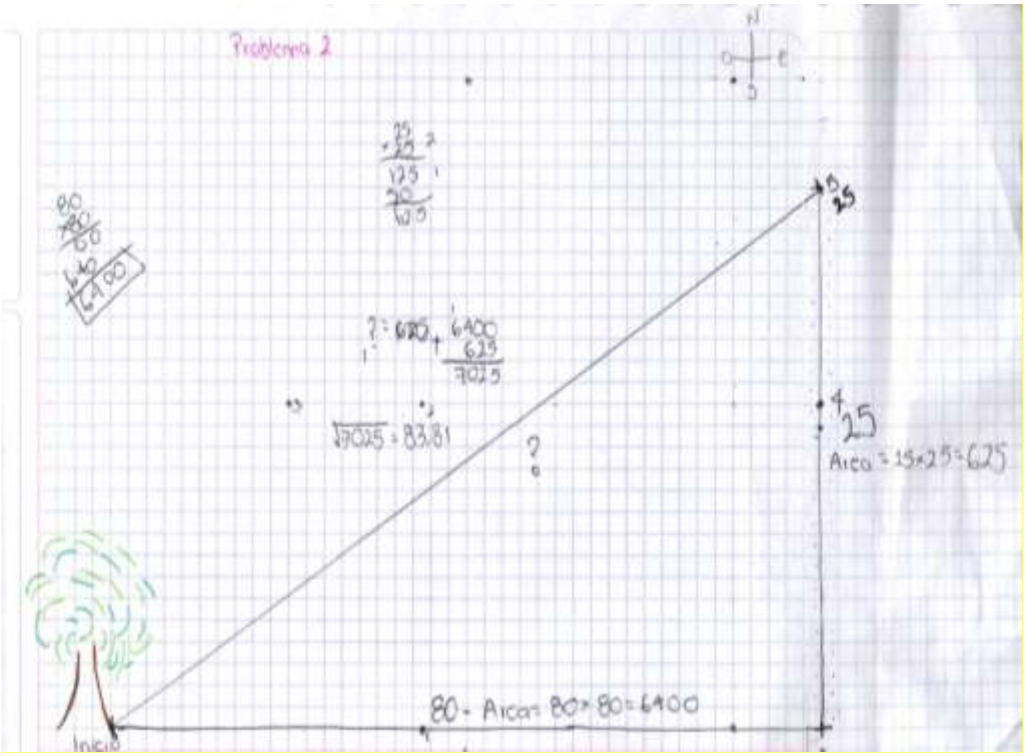
Actividad VII (Problema 1 resuelto por el alumno 1)



Actividad VII (Problema 1 resuelto por el alumno 2)



Actividad VII (Problema 2, resuelto por el alumno 1)



Actividad VII (Problema 3 resuelto por el alumno 1)

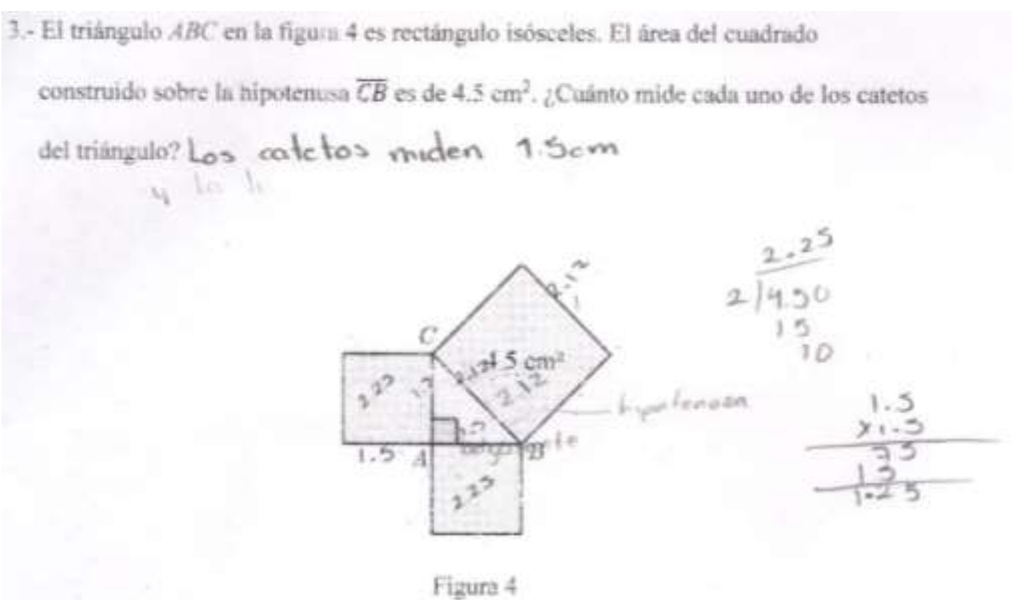
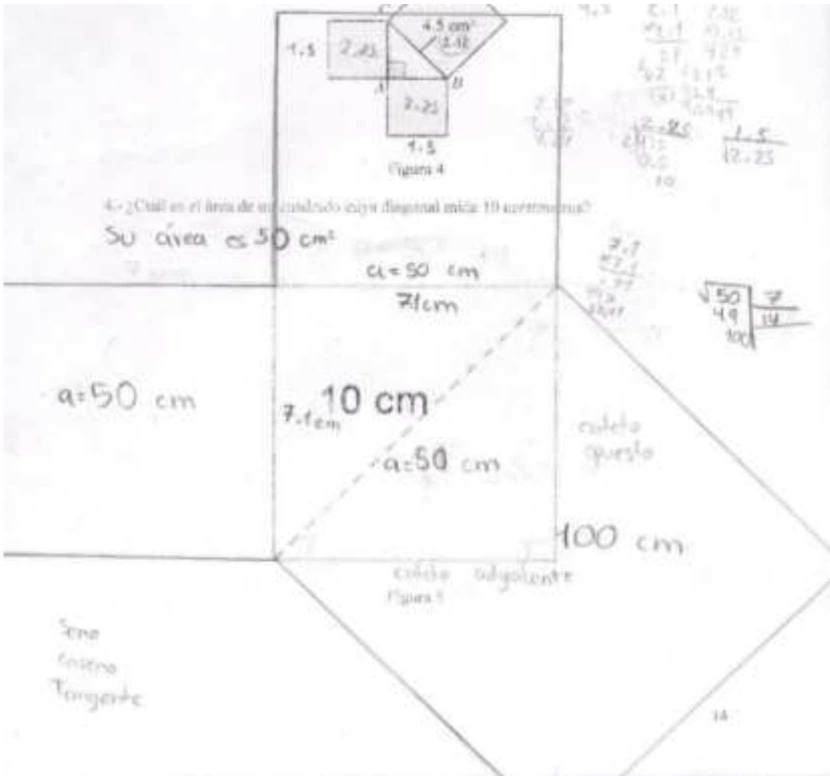
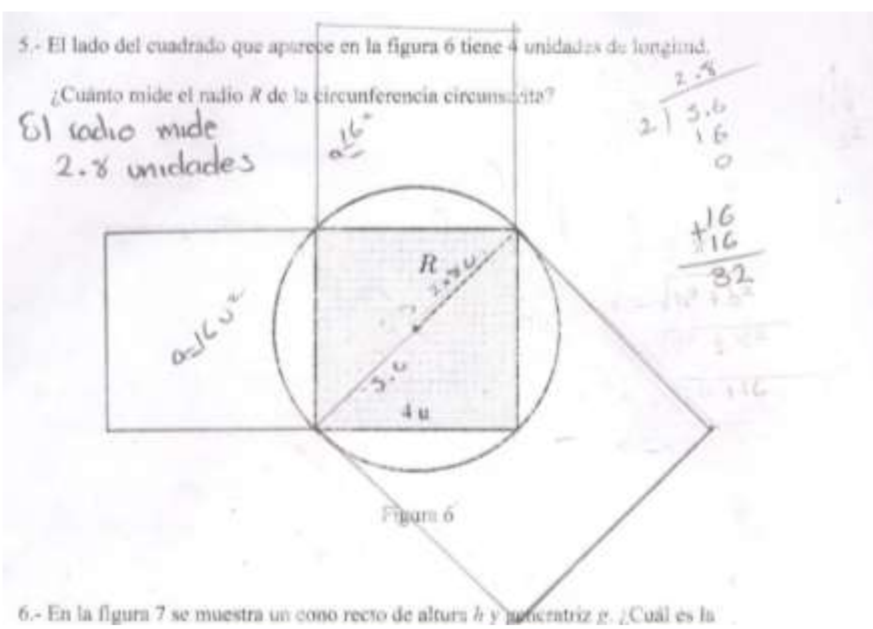

3.- El triángulo *ABC* en la figura 4 es rectángulo isósceles. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa $\overline{CB}$ es de 4.5 cm^2. ¿Cuánto mide cada uno de los catetos del triángulo? Los catetos miden 1.5cm

Figura 4

Actividad VII (Problema 4 resuelto por el alumno 1)



Actividad VII (Problema 5 resuelto por el alumno 1)



Actividad VII (Problema 6 resuelto por el alumno 1)

6.- En la figura 7 se muestra un cono recto de altura h y generatriz g. ¿Cuál es la expresión del radio r de la base, en función de h y g?

$r^2 + h^2 = g^2$

$\boxed{g^2 - h^2 = r^2}$

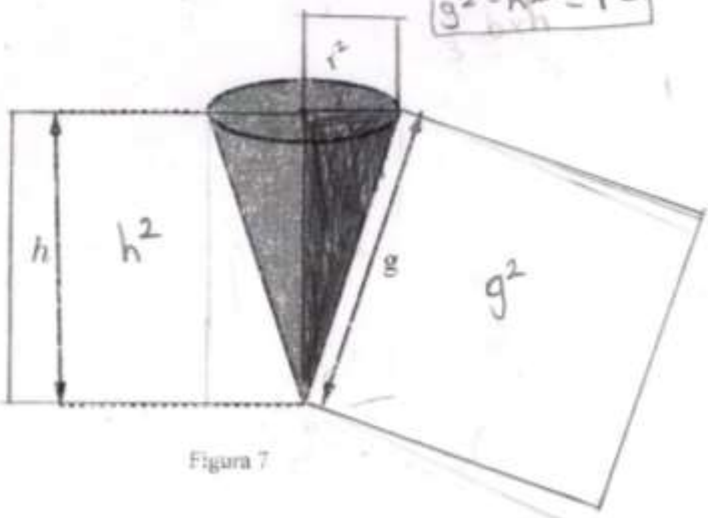


Figura 7

Actividad VII (Problema 6 resuelto por el alumno 2)

6.- En la figura 7 se muestra un cono recto de altura h y generatriz g. ¿Cuál es la expresión del radio r de la base, en función de h y g?

$g^2 + h^2 = r^2$

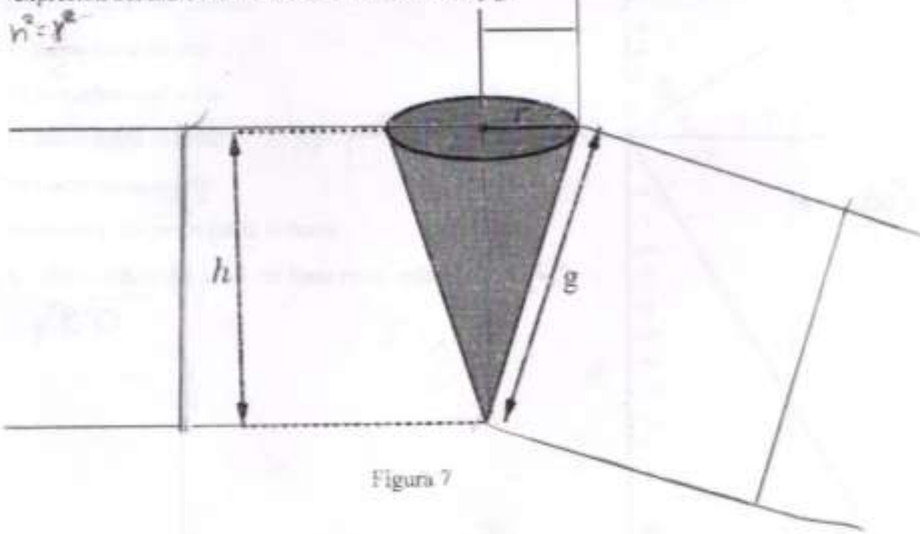


Figura 7

15

Actividad VIII (Realizada por el alumno 1)

Actividad VIII

1.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9   b) 9, 16, 25   c) 16, 25, 36   d) 36, 64, 100

e) 49, 441, 625   f) 100, 576, 676

2.- Selecciona tres números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12   b) 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

3.- ¿En qué te basaste para seleccionar los tres números de cada uno de los incisos del ejercicio 2?

En multiplicar todos los números por si mismos para obtener las areas, con los resultados obtenidos sumar para obtener un tercer resultado que debería corresponder a alguna de las areas obtenidas anteriormente

te
sobra

[illegible]
falta

4.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados.

a) 4, 4, 9   b) 49, 441, 625   c) 9, 4, 49   d) 9, 16, 25

e) 16, 25, 36   f) 16, 9, 49   g) 100, 576, 676   h) 121, 144, 169

10 24 26   13

i) 49, 64, 121   j) 36, 64, 100

i) Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo. a, b, d, e, g, i, j.

ii) ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso? Justifica tu respuesta.

a) obtusángulo   g) rectangulo
b) obtusangulo   i) obtusangulo
d) rectángulo   j) rectangulo
e) acutangulo   h) acútangulo

Si sobra area el triangulo es acútangulo
Si falta area el triangulo es obtusángulo
Si el area es exacto el triangulo rectangulo

15

Actividad VIII (Realizada por el alumno 2)

Actividad VIII

1.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9 b) 9, 16, 25 c) 16, 25, 36 d) 36, 64, 100

e) 49, 441, 625 f) 100, 576, 676

2.- Selecciona tres números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 b) 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

3.- ¿En qué te basaste para seleccionar los tres números de cada uno de los incisos del ejercicio 2?

En que tuve que multiplicar cada dato por si mismo y luego encontrar 2 áreas que sumadas den la tercera

4.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados.

a) 4, 4, 9 b) 49, 441, 625 c) 9, 4, 49 d) 9, 16, 25

e) 16, 25, 36 f) 16, 9, 49 g) 100, 576, 676 h) 121, 144, 169

i) 49, 64, 121 j) 36, 64, 100

i) Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo. A, B, D, E, G, I, J

ii) ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso? Justifica tu respuesta.

A, obtusángulo
B, Obtusángulo
D) Rectángulo
E) Acutángulo
G) Rectángulo
I) Acutángulos
J) Rectángulo

Obtusángulos: falta área
rectángulos: área exacta
Acutángulo: Sobra área

15

Actividad VIII (Realizada por el alumno 3)

Actividad VIII

1.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados. Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

a) 4, 4, 9 b) 9, 16, 25 c) 16, 25, 36 d) 36, 64, 100

e) 49, 441, 625 f) 100, 576, 676

2.- Selecciona tres números de cada inciso de manera que sean las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

a) 10, 13, 6, 21, 5, 18, 12 b) 1, 1.2, 5.1, 0.6, 0.8, 2, 3.2

3.- ¿En qué te basaste para seleccionar los tres números de cada uno de los incisos del ejercicio 2?

En que tuve que multiplicar cada dato por si mismo y luego encontrar 2 áreas que sumadas den la tercera

4.- Las siguientes ternas corresponden a las áreas de cuadrados.

a) 4, 4, 9 b) 49, 441, 625 c) 9, 4, 49 d) 9, 16, 25

e) 16, 25, 36 f) 16, 9, 49 g) 100, 576, 676 h) 121, 144, 169

i) 49, 64, 121 j) 36, 64, 100

i) Determina cuáles corresponden a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo. A, B, D, E, G, I, J

ii) ¿Qué tipo de triángulo se forma en cada caso? Justifica tu respuesta.

A, obtusángulo
B, Obtusángulo
D) Rectángulo
E) Acutángulo
G) Rectángulo
I) Acutángulos
J) Rectángulo

Obtusángulos: falta área
rectángulos: área exacta
Acutángulo: Sobra área

15

Obtusángulo: al sumar el área de los cuadrados formados en los lados mas pequeños el resultado es menor al del lado más grande
Acutángulo: al sumar el área de los cuadrados formados en los lados más pequeños el resultado es mayor al del lado más grande
Triángulo rectángulo: Cumple con el teorema de pitagoras