GOBIERNO DEL ESTADO DE YUCATÁN
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 31-A MÉRIDA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN PRIMARIA
PARA EL MEDIO INDÍGENA

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES EN EL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

NOE DE JESUS ORTIZ VAZQUEZ

Mérida, Yucatán, México

2017

GOBIERNO DEL ESTADO DE YUCATÁN
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 31-A MÉRIDA YUCATÁN

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN PRIMARIA
PARA EL MEDIO INDÍGENA

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES EN EL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

NOE DE JESUS ORTIZ VAZQUEZ

PROPUESTA PEDAGÓGICA
PRESENTADA EN OPCIÓN AL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA
PARA EL MEDIO INDÍGENA.

Mérida, Yucatán, México
2017

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN SUPERIOR
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 31-A MÉRIDA, YUCATÁN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

DICTAMEN

Mérida, Yuc., 3 de mayo de 2017.

NOE DE JESUS ORTIZ VAZQUEZ
SEDE MÉRIDA.

En mi calidad de **Presidenta de la Comisión de Titulación** de esta Unidad 31-A y como resultado del análisis realizado a su trabajo titulado:

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES
EN EL CUARTO GRADO DE PRIMARIA

OPCIÓN: Propuesta Pedagógica, de la Licenciatura en Educación Primaria para el Medio Indígena, y a propuesta del **Lic. Mario Azael Rodríguez Rodríguez,** Director del Trabajo, manifiesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se **DICTAMINA** favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentar su Examen Profesional.

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
GOBIERNO DEL ESTADO
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN,
INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN SUPERIOR
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
UNIDAD 31-A
MÉRIDA

ATENTAMENTE

DRA. AZURENA MARÍA DEL SOCORRO MOLINA MOLAS
Directora de la Unidad 31-A Mérida

AMSMM/ARCP/irbc.

ÍNDICE

Página

Página

INTRODUCIÓN

Este documento es una propuesta pedagógica acerca del proceso enseñanza aprendizaje de la suma y resta de fracciones tanto homogéneas como heterogéneas. Se aplicó a alumnos del cuarto grado de educación primaria de la escuela Armando E. Gorocica Puerto. En la propuesta se analiza como principal dificultad del aprendizaje las operaciones mencionadas, el cálculo del mínimo común múltiplo de los denominadores de los quebrados, por parte de los alumnos y es así que se analizan y propone para su cálculo diferentes procedimientos como son: el intuitivo, por inspección y de divisiones sucesivas.

En el primer capítulo se describe la problemática del grupo para la realización de las operaciones de la suma y resta de las fracciones con diferente denominador. Se detectó la problemática mediante una evaluación diagnóstica; se realiza la delimitación de la aplicación de la propuesta tanto geográfica como conceptual; se plantean los objetivos generales y particulares de la propuesta, y como último apartado de este capítulo se da una justificación de la importancia tanto del tema como de la propia propuesta pedagógica.

En segundo capítulo describen los diferentes marcos contextuales en donde se desarrolla la propuesta pedagógica: comunitaria, escolar y de aula; se analiza los elementos que intervienen en las operaciones de la suma y resta de fracciones, como son los conceptos de: múltiplo de un número, múltiplo común de varios números, máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

En el tercer capítulo se plantean los elementos aritméticos que intervienen en la suma de fracciones y los marcos teóricos y pedagógicos que sustentan la propuesta, como es el estudio epistemológico genético de Piaget y sus implicaciones para la enseñanza; a través de la resolución de problemas y el aprendizaje cooperativo.

En el cuarto capítulo se presentan las estrategias didácticas que se aplicaron para lograr cumplir los fines propuestos. Son en total ocho estrategias que se inician con un repaso del concepto de fracción, y continúa con la suma de fracciones con igual denominador. Para poder desarrollar la operación de suma y resta de fracciones de diferente denominador se le presenta al alumno una serie de problemas y ejercicios para el cálculo de mínimo común múltiplo de manera práctica y sencilla como es de inspección. Ya desarrollada la anterior situación didáctica se procede finalmente al cálculo de la suma y resta de fracciones de diferente denominador.

Por último se señala las conclusiones de las evaluaciones de la propuesta en general y las reflexiones pedagógicas a las que se llegaron. Entre estas reflexiones está el aspecto positivo de la propuesta, que es el posibilitar al alumno en integrar conocimientos como es el mínimo común múltiplo, máximo común divisor, fracción y otros que lo llevan a encontrar la forma de entender la operación de la suma de fracciones. Se dice que es positivo porque de esta manera el alumno puede percibir que las matemáticas son una construcción que interactúan conceptos, operaciones y procesos y no son solo elementos aislados.

CAPÍTULO 1
PLANTEAMIENTO Y DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

1.1 Dificultades de aprendizaje para la suma y resta de fracciones

A lo largo de mi trabajo docente he podido constatar algunos problemas de aprendizaje que presentan los alumnos de distintas comunidades rurales en donde he prestado servicios en educación básica. Basados en el aprovechamiento y la falta de comprensión de algunos temas del área de matemáticas, la operación de suma de fracciones con distinto denominador es donde mayor dificultad han manifestado mis alumnos del cuarto grado. Desde luego que existen otros temas que los niños aún no comprenden, pero este último es el que encontré de mayor relevancia.

Se tomó la decisión de abordar este tema con el interés de propiciar que los alumnos lograran entender que las fracciones también se puede sumar y restar. Puede considerarse que los niños sí lograron sumar las fracciones pero se les hace difícil entender lo que están haciendo, por lo tanto, para algunos niños se hace más difícil y complicado el proceso de adquisición de este esquema. Cuando empezaron a realizar las sumas de fracciones con el mismo denominador se les hizo fácil ya que se dieron cuenta que el entero se dividió o fraccionó en partes de igual tamaño, es decir que las partes que se iban a sumar eran homogéneas, pero al pasar al estudio de las fracciones con diferente denominador, se presenta el problema de la comprensión de la suma, ya que para ellos no es posible realizarla por la diferencia de los denominadores.

Existen experiencias cotidianas de cada uno de los niños, en las que el concepto de fracción sí es de mucha utilidad, como por ejemplo, en la compra de tortillas, frijol, arroz, etc., en donde se puede comprar fracciones de estos productos, como puede ser medio, o tres cuartos de kilo. Sin embargo, el concepto de suma o resta de fracciones no es de uso cotidiano para el niño, dado que es poco común que compre medio kilo más tres cuartos de kilo simultáneamente y que tenga que conocer la cantidad total. El concepto de suma y resta de fracciones es más un aprendizaje áulico que cotidiano. No por esto deja de tener una importancia capital dado que es el preámbulo de operaciones complejas del Álgebra.

1.2 Delimitación

Se propone en este trabajo una estrategia didáctica para la enseñanza de la suma de las fracciones en el cuarto grado de educación primaria general de la escuela primaria Armando E. Gorocica Puerto, de la comunidad de Tixkokob municipio de Yucatán.

La propuesta está dirigida a alumnos del medio indígena. Los estudiantes son hijos de personas que tienen la lengua maya como su lengua natal, aunque hay que aclarar que la mayoría de ellos mismos no la hablan. La lengua natal de ellos el español. Lo que sí se puede decir, es que los alumnos se desenvuelven en una cultura con raíces mayas llena de tradiciones que se describen más adelante.

El tema de la propuesta se encuentra en el programa del cuarto grado (SEP, 2011), en el área de matemáticas bajo el siguiente planteamiento: “Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales”.

1.3 Justificación

Implementar alternativas de solución de situaciones problemáticas es un aspecto fundamental como docente. Desarrollar y aplicar una alternativa pedagógica en el campo de las matemáticas es un reto cotidiano para el maestro, dado que este campo de conocimiento es complicado para el alumno por su carácter abstracto.

La operación para la suma y resta de fracciones con diferente denominador tiene cierta complejidad en sí porque implica ciertos conocimientos previos en las matemáticas, como son el concepto de fracción, de múltiplo común de dos o más números, de máximo común divisor, así como las operaciones básicas de suma, resta multiplicación y división, lo que conlleva a que se le dificulta a los estudiantes. Por otra parte esta operación tiene relevancia tanto para futuros conocimientos. Así, detenerse a plantear una propuesta pedagógica en este tema es de importancia, tanto en lo personal como para cualquier otro maestro interesado en el tema.

Se selecciona este tema en el área de matemáticas ya que se consideró que entre otras cosas el libro de texto no trae suficiente información para la comprensión de suma de fracciones heterogéneas. Respecto a este tema el Programa de Estudios de Primaria 2011 señala: “Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos” (SEP, 2011: 11). Como se puede ver, el señalar el tema no es suficiente para saber abordarlo pedagógicamente. Además de que el tema de la suma y resta de fracciones tiene una naturaleza compleja cuando se presenta con denominadores distintos por lo que los alumnos necesariamente tienen que dedicarle tiempo y esfuerzo extra para entender el procedimiento que puede utilizar y así lograr un conocimiento con mayor profundidad.

1.4 Objetivo General

Los alumnos del cuarto grado aprenden a realizar las operaciones de sumas y restas de fracciones con diferente denominador.

1.5 Objetivos Particulares

a) Afirmar el concepto de fracción de los niños
b) Reafirmar el concepto de Mínimo Común Múltiplo y Máximo común divisor
c) Operar la suma y resta de quebrados con igual denominador.
d) Resuelven problemas matemáticos en donde aplique el concepto de suma y resta de fracciones.

CAPÍTULO 2

LOS CONTEXTOS DE LA PROPUESTA

2.1 Contexto social comunitario

En este capítulo se describen los diferentes elementos contextuales, sociales, culturales y lingüísticos que inciden en mi docencia, así como los planes vigentes en la educación básica primaria de la Secretaría de Educación Pública. Es de vital importancia tomar en cuenta todo lo que rodea al niño para así poder entender el proceso de aprendizaje por el cual pasa y poder plantear estrategias educativas que contribuyan a un mejor aprendizaje. La importancia del análisis contextual radica en que es en la propia localidad en donde se lleva a cabo el proceso de socialización del alumno; donde adquiere formas de vida, costumbres, y la construcción de conocimientos. La interacción con los padres, familiares y compañeros que viven dentro de su comunidad contribuye a que el niño construya ideas, formas de pensar, y explicaciones acerca de su entorno natural social y cultural.

Tixkokob es un municipio ubicado a 40 minutos hacia el oriente de la ciudad de Mérida, que cuenta con un aproximado de 15, 000 habitantes, y tiene poco desarrollo económico. El pequeño comercio es su principal actividad con tiendas de abarrotes, ventas de hamacas, que urden por los propios habitantes en sus casas, además de venta de licores y cerveza. La principal fuente de trabajo la realizan desplazándose a la ciudad de Mérida como empleados de fábricas y las mujeres como trabajadoras domésticas. Esta situación conlleva a que muchos padres no puedan apoyar el trabajo escolar de sus hijos.

Las actividades extra escolares de los niños en esta comunidad son variadas como ir a acompañar a sus padres a puestos de ventas en el mercado o tiendas, trabajar como empacadores de mercancías (cerillitos) en pequeños supermercados, jugar fútbol a la calle con amigos con el peligro de ser atropellados. Los otros niños por lo general se quedan en sus casas para ver televisión. Como se observa, la mayor parte de los niños no conviven o son supervisados por sus padres. Una de las pocas actividades en donde los niños se relacionan directamente con las matemáticas es cuando son enviados a las pequeñas tiendas cercanas a sus casas para la compra de abarrotes como son pan y refrescos. Aquí el niño aprende a pagar y saber cuánto es su cambio monetario. En ocasiones los niños se enfrentan a situaciones de compras de productos que implican fracciones como 3\4 de frijol o bien 1\2 de azúcar etc. Sin embargo, la enseñanza de la suma de fracciones no es un elemento cotidiano para el niño, sino que queda en manos de la escuela.

Los niños logran cierta convivencia con los padres los sábados y domingos ya que son los momentos en que éstos no trabajan. Los padres tienen la oportunidad de llevar a sus hijos a la ciudad de Mérida a lugares como el zoológico, algún parque, al centro de la ciudad, etc. Algunos niños en la época de vacaciones salen de paseo al mar del puerto de Progreso o de las costas de los pueblos más cercanos a ellos como Telchac, San Crisanto, Chabihau o Santa Clara.

Propiamente la comunidad de Tixkokob no cuenta con lugares recreativos para los niños como puede ser parques para juegos infantiles o canchas de juegos exclusivos para niños. Cuenta con una biblioteca pública en el palacio, pero no es visitada frecuente por ellos posiblemente por falta de interés de ellos mimos.

Entre los eventos importantes que vive el niño en su comunidad están las fiestas patronales de tipo religioso y festivo que se dan en el mes de mayo en la villa, donde es abarrotada por visitantes tanto de la ciudad de Mérida y otros lugares; aquí el niño tiene la oportunidad de conocer ciertas tradiciones como son los gremios en donde los participantes realizan una caminata por la calles de la ciudad portando velas y un tipo de música producida por grupos musicales denominado charanga Esta caminata terminan en la iglesia que se ubica en el centro de la villa. Aquí los niños acompañan a sus padres y tienen un fomento cultural y religioso. Otra actividad cultural importante es el festejo del hanal pixan [comida de muertos] que es una fiesta religiosa para los familiares difuntos, en donde la actividad principal es levantar un altar dentro de la casa donde y exponer algunas fotos y prendas de los familiares difuntos. También se exponen en los altares frutas de la época como mandarinas y jícamas. Durante esos días se guisa un tamal, enterrándolo, elaborado con carne de pollo o de cerdo. En esta celebración de tipo religioso los niños aprenden a venerar a los antepasados y a su vez conocen el rito de la fiesta y la convivencia familiar.

Otro evento importante para los niños son las elecciones políticas de puestos populares como son de los presidentes de la comunidad y de la república donde se realizan manifestaciones de apoyo a los candidatos y la propia elección por parte de los ciudadanos. Aquí los niños adquieren una socialización con aprendizajes culturales significativos.

Debemos tener en cuenta que en la educación de los alumnos los padres de familia juegan un factor muy importante ya que el hogar es la primera escuela del niño en la cual adquiere conocimientos pero también responsabilidades como estudiar, realizar la tarea, ayudar con la limpieza de la casa, etc. Menciono esto porque es de importancia contar con el apoyo de los padres de familia hacia los maestros en la educación escolar de los alumnos.

He investigado que muchos niños de mi grupo escolar conviven la mayor parte de tiempo con sus abuelos por la necesidad económica de los padres de trabajar, y no poder atender a sus hijos. Esta situación impacta en la educación del niño y por tanto en su desarrollo escolar, ya que como se mencionó anteriormente el alumno por naturaleza necesita de la figura paterna para poder sentir hasta cierto grado un poco de presión y así sentirse obligado a cumplir con su labor como estudiante,.

2.2 Contexto escolar

La presente propuesta pedagógica se desarrolló en la escuela primaria federal “Armando E. Gorocica Puerto” ubicado en la villa de Tixkokob, Yucatán, con clave del centro de trabajo 31DPRO148I zona 52 sector2, turno vespertino. La escuela se encuentra a tres cuadras del centro de la comunidad. La escuela cuenta con diez maestros, y con maestras de los programas del USAER, y de lengua maya. Además de un maestro de educación física y una psicóloga y dos intendentes. Físicamente cuenta con doce aulas, sendas instalaciones para la dirección del turno de la mañana y de la tarde; una plaza cívica, cancha de basquetbol y una sala de cómputo. Se apunta que carece de biblioteca.

La dinámica de la escuela es la de la entrada a las una de la tarde con salida a las 18 horas. Cada viernes de fin de mes se reúne el Consejo Técnico donde se discute la problemática escolar y los avances y dificultades de los alumnos para realizar propuestas de solución.

2.3 Contexto de aula

Mi aula escolar, como ya se dijo, corresponde al cuarto grado y cuento con 25 alumnos que utilizan silla de “paleta”. Un día normal de trabajo dentro del aula es pasar lista de asistencia a la una y diez, se les pregunta sobre las tareas encargadas el día anterior, y se traza una estrategia de enseñanza aprendizaje. Como situación “normal” los alumnos se distraen en clase en algunos momentos al estar trabajando durante casi todo el tiempo dentro del salón, dado que solo durante media hora los alumnos salen del salón para el recreo. Es común que los viernes los padres de familias se acercan a mí a preguntarme por el aprovechamiento escolar se sus hijos. Pudiera decir que esta comunicación con los padres se da en un clima de respeto y cordialidad. En algunas ocasiones les pido su apoyo para mejorar los aprendizajes de sus hijos con trabajos escolares en sus hogares.

Respecto a la aplicación de la propuesta pedagógica de la suma y resta de fracciones de quebrados puedo decir que no se cuenta con el apoyo de los padres porque ellos mismos desconocen los procedimientos sobre esta operación muy bien. La anterior afirmación está basada en que al solicitarles su ayuda a los padres en una junta me responden que la desconocen, o sea, no la saben hacer. Por parte de los compañeros de trabajo, esto es, de los docentes de la escuela me han preguntado sobre el desarrollo de mi propuesta. Es de entender el interés de ellos por la propuesta porque el tema de la suma de fracciones es no solo de importancia para el aprendizaje de los niños, sino también de práctica docente por su dificultad de realizarlo.

CAPÍTULO 3

LOS PROCESOS DE LA SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

3.1 Divisibilidad

Ante de desarrollar el concepto de suma y resta de fracciones se revisan y analizan algunos conceptos y operaciones que están involucradas en su operación como son: criterios de divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Este tema de divisibilidad tiene otras aplicaciones dentro de la propia matemática principalmente en cursos álgebra en donde se requiere también encontrar mínimos comunes de fracciones algebraicas. Así que es de suma importancia empezar a dominar este tema por parte de los niños desde la primaria.

Definición de divisibilidad:

Si se tienen dos números naturales, diferentes de cero, se dicen que el primero divide al segundo en forma exacta sí y solo si el cociente de segundo entre el primero es exacto, o sea resta cero

Una propiedad de la división es la transitividad entre los números naturales, que nos dice que, dados tres números y:

a) el primero divide al segundo
b) el segundo divide a un tercero
c) entonces el primero divide al tercero

Ejemplo 3 divide a 6 y 6 divide a 24 entonces 3 divide a 24.

Por otra parte, se observa que la operación de división no cumple la propiedad Conmutativa, esto es, no es el mismo resultado dividir 8 entre 4 que 4 entre 8.

La ley de la transitividad de los números naturales, como el no cumplimiento de la ley de conmutatividad son conocimientos que el alumno debe de tener en consideración tanto para aplicarlas, en el primer caso, como para no cometer errores en el segundo. Este tipo de observaciones va creando una cultura matemática entre los estudiantes

Es importante que los niños conozcan desde temprana edad ciertos principios de divisibilidad, porque les permitirá desarrollar operaciones de diferente índole, entre ellas, el cálculo de máximo común divisor, de mínimo común múltiplo y en general de muchas operaciones incluyendo la división. Es por esa razón que presentamos los principales criterios de divisibilidad, que se utilizarán en la propuesta.

Criterios de divisibilidad importantes:

Divisibilidad	Criterio	Ejemplos
Por 2	Si termina el número en cifra par	24, 46, 124
Por 3	Si la suma de las cifras del número es divisible por 3	1086 1 +8+6 = 15 que es divisible por 3
Por 5	Si el número termina en 0 ó en 5	35, 65, 130

Como se puede observar estos criterios son útiles para el niño porque si por ejemplo, se le pide al niño que divida el número 450 entre 5, él sabrá anticipadamente que la división es exacta, o sea no tiene residuo; en este caso es 90.

3.2 Números primos y números compuestos:

Las propiedades de la divisibilidad permiten afirmar:

El número X es, o se define como un número Primo, si es igual o mayor que a 2 y sus únicos factores o divisores son 1y el mismo número X; X es un número

Compuesto si admite otros divisores, además de 1 y de X. Por ejemplo el número 13 es un número primo porque no admite divisores l, que no sea el mismo 13 y el 1. En cambio el número 12 es un número compuesto porque aparte del mismo 12 y el 1, lo dividen en forma exacta el 3, 4 y el 6.

La lista de los primeros números primos son: 2, 3,5, 7, 11, 13, etc. Se observa que el número dos es un número Primo a pesar de ser un número par.

3.3 Divisores comunes de dos conjuntos de números:

Notación: D_X es el conjunto de divisores de x.

D_{60}= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

D24 = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

D60 y D24 tienen como divisores comunes a:

{1, 2, 3, 4, 6, **12**y el número 12es el **máximo de ellos.**

3.4 Definición

Se llama **máximo común divisor de X, Y,** y se escribe m.c.d. (**X,Y**) al mayor de todos los divisores comunes de X e Y. Por ejemplo m.c.d. (12, 15) = 3 dado que no existe ningún divisor mayor a 3 , común de 12 y 15.

Si el máximo común divisor de dos números es uno, entonces **X** e **Y** son **primos entre sí o primos relativos.** Por ejemplo el 12 y 17 son primos entre sí. Se observa que el 12 no es un número primo, porque acepta divisores diferentes del uno y del 12, como es el 3 y el 4. Otro ejemplo es el (3, 8) = 1, el único número que divide al tres y al ocho es el uno.

Existen varias maneras de calcular el máximo común de dos números. Aquí analizamos algunas de ellas.

3.5 Cálculo del Máximo Común Divisor de manera visual

Notación: D_X es el conjunto de divisores del conjunto de números X, por ejemplo:

D60 (1,2,3,5,6,10,12,15,20,30,60)

D24 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12,24)

D60 y D24 tiene como divisores comunes a 1, 2, 3, 4, 6,12; de aquí se ve que el número 12 es máximo común divisor de estos dos conjuntos.

A continuación se presenta un teorema muy conocido de la Aritmética que da el fundamento del cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números.

3.6 Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural mayor que el número uno se puede descomponer como producto de factores primos. Esta descomposición es única, salvo por el orden de los factores, ejemplos:

182= 2 x 7x13 se observa que 2, 7,13 son primos

72 = 2x2x2x3x3, 2 y 3 son primos

3.7 Múltiplo de un número

Múltiplo de un número: Si X divide al número Y entonces Y es múltiplo de X. Ejemplo 5 divide a 35, entonces 35 es un múltiplo de 5.

Los múltiplos de un número X tienen la forma: n **X**, para n = 0, 1, 2, 3, 4...

Por ejemplo, los múltiplos de 4 son de la forma: 4n, si n= 1, 4(1) = 4, si n=2, 4(2) es 8, y así sucesivamente.

Notación: M_x es el conjunto de múltiplos de X

$M_x = \{0, x, 2x, 3x, 4x,...\}$

Se observa que M_x no tiene un último elemento. Por ejemplo:

$M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48,...\}$ esta es una propiedad que los niños deben reflexionar para llevarlos al concepto del infinito.

3.8 Definición de Mínimo Común Múltiplo de dos o más números.

Dados **X, Y,** números naturales distintos de cero, se llama **mínimo común múltiplo**, representado por m.c.m. (**X, Y**), al **menor** de todos **los múltiplos comunes** de ellos, diferente de cero.

Procedimiento para calcular el m.c.m. (**X, Y**):

Se descomponen **X** e **Y** en sus factores primos. El m.c.m. se forma con el producto de factores comunes y no comunes, de X y Y, que estén elevados al mayor exponente.

Ejemplo: $600= 2^3 \times 3 \times 5^{2,}$ $36 = 2^2 \times 3^2$,

m.c.m. $(600, 36) = 2^3 \times 3^2 \times 5^{2=} 1800$

El Teorema Fundamental de la Aritmética es el fundamento del cálculo del mínimo común múltiplo en su forma tradicional. Tiene la ventaja de ser una única explicación y como desventaja es que su procedimiento puede ser muy largo.

Veamos: si por ejemplo, deseamos encontrar el mínimo común múltiplo de 18, 24 y 15 procederíamos a encontrar los factores comunes de cada uno de los números

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2\times3^2 \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2^3\times3 \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 3\times5$$

El m.c.m. de 18, 24   15 es**: m.c.m. =** $(2^3)(3^2)(5) = 8$□ 9□ $5 = 360$

3.9 Mínimo Común Múltiplo por inspección

Cuando se trata de hallar el m.c.m. de números pequeños éste puede hallarse muy fácilmente por simple inspección, de este modo:

Como el m.c.m. de varios números tiene que ser múltiplo de varios del mayor de ellos, se mira a ver si el mayor de los números dados contiene exactamente a los demás. Si es así, el mayor es el m.c.m. Si no los contiene, se busca cuál es el menor múltiplo del número mayor que los contiene exactamente y éste será el m.c.m. buscado.

E j e m p l o :

Hallar el m.c.m. de 8 y 4

Solución: Como el mayor 8 contiene exactamente a 4, 8 es el m.c.m. de 8 y 4

E j e m p l o

Hallar el m.c.m. de 8, 6 y 4

Solución:8 contiene exactamente a 4, pero no a 6. De los múltiplos de 8, 8×2=16 no contiene exactamente a 6, 8×3=24, contiene exactamente a 6 y 4. Por lo tanto 24 es el m.c.m. de 8, 6 y 4

E j e m p l o

Hallar el m.c.m. de 10, 12 y 15

Solución: 15 no contiene a los demás, 15×2=30 no contiene a 12 pero si contiene al 10; 15×3=45 tampoco al 12; 15×4=60 contiene cinco veces a 12 y seis veces a 10. Así 60 es el m.c.m. de 10, 12 y 15; como se pudo observar este método por inspección es más rápido que el tradicional, pero si requiere práctica.

3.10 Cálculo del Mínimo Común Múltiplo por producto de números primos:

Si a los números que queremos encontrar su m.c.m son todos números primos entonces su m.c.m. es el producto de ellos.

E j e m p l o

m.c.m. de7,13,17. Todos son números primos, su m.c.m. es por lo tanto:

7x 13 x 17 = 1547

3.11 Cálculo del Mínimo Común Múltiplo de dos números utilizando el máximo común divisor de ellos

Cedillo et al (2006) desarrollan una propuesta didáctica utilizando este método, y aquí se recoge esta idea.

Se explica este procedimiento a través de un ejemplo.

Si se tiene dos números por ejemplo 60 y 45

Se encuentra su máximo común divisor, en este caso el número 15,

Se divide cualesquiera de estos dos números entre 15, digamos que el 60, que da como resultado el número 4

Se multiplica este número 4 por 45 que es el otro número del que se quiere encontrar su mínimo común múltiplo. Y se obtiene su mínimo común múltiplo de los números 60 y 45 que es 180.

El mismo resultado se hubiera obtenido si hubiéramos comenzado dividendo 45 entre 15 y posteriormente su resultado: el tres, se multiplica por 60. Llegamos al mismo valor de 180 que es el m.c.m. de los números 45 y 60.

3.12 Reconsideraciones sobre el concepto de fracción

La comprensión del concepto de fracción es un propósito planteado desde el tercer grado de escolaridad.Muchos autores, uno de ellos como Linares y Sánchez. (2000) mencionan a diferentes autores que identifican interpretaciones diversas de los números racionales, en nuestro caso fracciones. Se define un número racional como el cociente entre dos números enteros (positivos o negativos), por ejemplo: 2/3, 5/6, -4/7 9/-6, 5/1 etc. Retomando el tema de las diferentes interpretaciones de las fracciones, abajo se mencionan algunas:

a) División entre dos números, por ejemplo: 6/8 se puede interpretar como, el número seis divido entre 8.
b) Una proporción,3/4,por ejemplo, se puede decir que del total de los alumnos, tres de cuatro son mujeres.
c) Como un número racional: cociente de dos números enteros, esto es, la división de números naturales, positivos o negativos.
d) Una probabilidad, $p = ½$ la probabilidad de que al tirar una moneda regular es un medio, o sea, es una de dos posibilidades.
e) La relación Parte todo

Esta situación se presenta cuando un “todo”, continuo o discreto, se divide en partes equivalentes, como cantidad de superficie o cantidad de objetos. La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios «todos»).

El todo recibe el nombre de unidad. Esta relación parte-todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes o trozos iguales. La fracción aquí es siempre «fracción de un objeto. Sobre esta interpretación se basan generalmente las secuencias de enseñanza cuando se introducen las fracciones (normalmente en su representación continua).

Por otra parte, nos encontramos con otros tipos de problemas al momento del proceso de enseñanza aprendizaje, dada la variedad de contextos en donde se puede aplicar este concepto. Por ejemplo, podemos hablar de contextos continuos. Medio litro de aceite, o contextos discretos, por ejemplo, las dos terceras partes de los estudiante de un salón o grupo, etc.

Podemos ver de la definición de número racional que todo número entero se puede interpretar como racional con solo expresarlo como dividido entre uno, así por ejemplo: 7 =7/1, esto último cumple con la definición de número racional. Existen otra clasificación de números llamados Irracionales, pero no son utilizados en esta propuesta. Los números irracionales no se pueden expresar como cociente de dos enteros (racionales) y son difíciles de identificar pero son infinitos. Ejemplos de estos números irracionales son la raíz cuadrada de 2, el número Pi , y la raíz cuadrada de todos los números primos

3.13 Análisis del contenido de la suma y resta de fracciones homogéneas

Comenzamos por repasar los conceptos de fracciones Homogénea, Heterogénea y Equivalentes, dado que es importante la claridad de ellos para los alumnos, para poder diferenciar y comprender el tipo de operación, procedimiento o problema por resolver como es el caso de esta propuesta de suma y resta de fracciones. Por ejemplo, si el alumno no sabe diferenciar entre una fracción homogénea y otra heterogénea, no pudiera diferenciar los procedimientos de suma o resta entre los de una clase y la otra. O bien si no sabe encontrar bien el mínimo común múltiplo de dos números, no pudieran realizar la suma de fracciones heterogéneas.

13.3.1 Fracciones homogéneas

Son aquellas que tienen el mismo denominador; en caso contrario, cuando los denominadores son diferentes se llaman fracciones heterogéneas.

Ejemplo:

3/7, 4/7 11/7   son fracciones homogéneas (tienen el mismo denominador: 7)

4/5, 5 /7 son fracciones heterogéneas (tienen diferente denominadores: 5 y 7)

13.3.2 Fracciones equivalentes

Son aquellas que representan el mismo número, aunque los numeradores y denominadores son diferentes: por ejemplo 3/5 = .6 es equivalente a 15/25 = 6. Esto es así porque la proporción entre numerador a denominador es la misma.

Se puede observar que, cuando a una fracción se le multiplica el numerador y denominador por una misma cantidad se obtiene una fracción equivalente a ella. Por ejemplo, a la fracción 3/5 se le multiplica su numerador y denominador por 2, quedando: (2x3) / (2x5) = 6/10. Así 3/5 es equivalente a 6/10 dado que ambos son iguales a .6

13.3.3 Transformación de fracciones heterogéneas a fracciones homogéneas manteniendo su proporcionalidad.

Se dará este proceso mediante un ejemplo: si se tienen las siguientes dos fracciones:

> 3/5 y 4 /3 que son heterogéneas y se quieren transformar en homogéneas manteniendo su proporcionalidad.

Es necesario para este procedimiento encontrar el mínimo común múltiplo de ellas o un múltiplo de él. Así pudiéramos utilizar el m.c.m: que es el 15 ó bien el 30 que es un múltiplo del m.c.m. Escogemos el m.c.m.: 15.

Se transforma 3/5 a la fracción 9/15 (se multiplicó el numerador y denominador por 3) que como se vio en el inciso de arriba son fracciones equivalentes. Como se comprueba: 3/5 = 9/15 = . 6

En forma similar se transforma la fracción 4/3 a la fracción 20/15; ambos son iguales a 1.33333… ; se multiplicó el numerador y denominador por 5. Se observa que ambos quebrados tienen el mismo denominador 15 y además es su m.c.m.;

así que la relación de la pareja de quebrados 3/5 y 4/3

Es equivalente a tener 9/15 y 20 /15.

El anterior ejemplo se puede generalizar matemáticamente pero no está fuera del alcance de los objetivos de esta propuesta.

Este proceso de poder transformar conjuntos de fracciones heterogéneos a fracciones homogéneos es de capital importancia en el proceso de la suma y resta de fracciones y por lo tanto de esta propuesta pedagógica como se ve en el siguiente inciso. Básicamente el objetivo de esta propuesta pedagógica se pudiera interpretar en este sentido: como traspasar fracciones heterogéneas a fracciones homogéneas equivalentes. Esto es así, dado que la suma de fracciones homogéneas es en cierta forma sencilla. Como se verá más adelante, existen varios métodos para realizar la transformación mencionada.

13.3.4 Suma de fracciones homogéneas.

La suma o resta de fracciones da como resultado una fracción. Para obtener el valor numérico de esta suma o resta de fracciones, se analizan dos casos: primer caso es si las fracciones a sumar o restar son homogéneas y segundo caso si son heterogéneas

Se presenta un ejemplo del procedimiento aritmético de la suma de fracciones son homogéneas:

Supongamos se quiera realizar la siguiente suma de fracciones 1/5 + 2/5.

Observamos que son fracciones homogéneas.

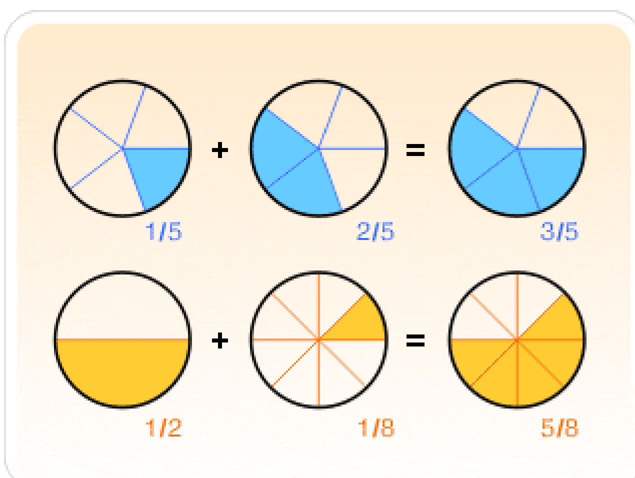
Para realizar su suma se forma una fracción de la siguiente manera: como denominador se mantiene el denominador común: el 5; y como numerador se realiza la suma o resta aritmética de las fracciones.

= (1+2)/5

= 3/5

Desde un punto de enseñanza aprendizaje operacional no es complicado para el maestro ni para los alumnos, pero desde un punto de vista conceptual si lo es para el alumno, aunque no en extremo. La interpretación conceptual se puede entender como una suma de elementos que tiene las mismas unidades, en este caso “quintos” (1/5). No se omite mencionar que esta suma o resta de fracciones se puede dar también en un número ya sea entero o decimal.

De una manera gráfica la suma de quebrados homogéneos es en cierto modo entendible y claro. Véase ejemplo de abajo



En caso de ser fracciones heterogéneas (véase la segunda figura de arriba):

1/2 + 1/8 = 4/8 + 1/8 = (4+1)/8 = 5/8.

Se observa que el número 8 de denominador de la suma de fracciones es el m.c.m. de los números de las fracciones por sumar: 2 y 8. Este segundo caso se amplía en el apartado de abajo.

13.3.5 Suma de fracciones heterogénea

En el caso de las fracciones heterogéneas el procedimiento de la suma es diferente porque los sumandos tienen diferentes magnitudes sus denominadores. Por ejemplo 1/6 + 1/9. Como se ve aquí, no se pueden sumar directamente los sextos con los novenos. Diríamos que tienen diferentes unidades. Se podrán juntar pero no decir cuánto es su suma directamente. Para poder decir cuánto es su suma, se tendrá que transformar las fracciones heterogéneas a homogéneas equivalente tal como se explicó en el apartado 3.3.3, y proceder a realizar la suma o resta de fracciones homogéneas.

Una de las posibles formas de sumar dos fracciones heterogéneas es la siguiente manera:

1. Se halla el mínimo común múltiplo de los dos denominadores de la fracciones.
2. Se calculan los numeradores con la fórmula: numerador por denominador común y dividido por denominador.
3. Se suman los numeradores (dado que las fracciones modificadas tienen el mismo denominador).

Ejemplo: 1/6 + 4/9 =

a) Se calcula el m.c.m (6, 9) y se obtiene que es 18

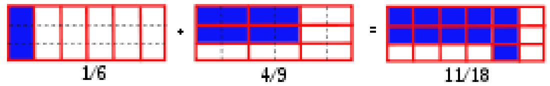
b) Se calcula los numeradores (1x 18)/6 = 3 y (4x18)/9 = 8

c) La suma se reduce a las siguientes fracciones: 3/18 + 8/18

Se suman los numeradores:

1. Se suma las siguientes cantidades 3/18+8/18= (3 + 8) / 18

Gráficamente la suma:



Suma de fracciones de distinto denominador

Se observa que en este método se transformó cada una de las fracciones a sumar en una equivalente que tiene como denominador el m.c.m. entre las dos fracciones, convirtiéndolas en fracciones homogéneas y posteriormente se suman los numeradores y se deja como denominador el m.c.m.

Otra presentación para sumar 1/6 con 4/9

Se trabaja con 18 pesos (como estrategia didáctica para facilitar el aprendizaje) 1/6 de esa cantidad es 3. Se va separando en seis montones, cada uno tiene 3 pesos; luego divides en 9 montones; cada uno dos pesos pero para 4/9 hay que tomar 4 montones, en total, 8 pesos. Sumando 3 del primero y 8 del segundo sale 11, que respecto al inicio representan 11/18. Por tanto:

$$1/6 + 4/9 = 3/18 + 8/18 = 11/18$$

Otro método de suma de fracciones:

Calcula el m.c.m., que en este caso es 18. Se ponen las fracciones con tal m.c.m. como denominador. Acto seguido, se divide el m.c.m. en el denominador inicial y el resultado se multiplica en el numerador inicial, y ya tenemos el numerador de la fracción cuyo denominador es el m.c.m.

Suma de fracciones heterogéneas: Forma 2

Ejemplo: 1/6 + 4/9, se resolvería de la siguiente forma:

$$(1x9 + 6x4) / 6x9 \quad = 33/54 = 11/18$$

La fracción resultante es 33/54 y los 11/18 es una reducción, o sea una simplificación ya que si observamos el numerador y el denominador son divisibles por tres de la primera fracción resultante.

Si nos fijamos bien el método solamente es multiplicar el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda, posteriormente se suma la multiplicación del denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda fracción y todo eso dividido por la multiplicación de los dos denominadores.

Aquí no calculamos el mínimo común múltiplo.

3.14 Suma de fracciones heterogéneas cuando son solo dos factores

Un procedimiento también usual de sumar o restar fracciones cuando se tratan solo de dos de ellas es el siguiente:

$$1/2 + 3/4$$

Se multiplica los numeradores en forma cruzada y se suman (o restan, según sea el signo de la operación a realizar)

(1 x 4) + (3 x 2) que será el numerador de la suma de las fracciones

Se multiplican los denominadores cuyo resultado será el denominador de la suma de las fracciones

$$2 \times 4$$

El resultado y la fracción queda como 10/8

Suma de fracciones heterogéneas

Operación para encontrar la diferencia, o proceso de quitar una fracción de otra para encontrar la cantidad restante; representada por el símbolo.

Para restar fracciones, primero se cambian todos los denominadores de las fracciones a su mínimo común denominador (m.c.d). Después se restan las fracciones simplemente restando los numeradores, manteniendo igual el denominado.

Por ejemplo, 1/2 - 1/8 = 4/8 - 1/8 = (4-1)/8 = 3/8.

CAPÍTULO 4

REFERENCIA TEÓRICAS

4.1. Las matemáticas como construcción social

En este capítulo señalamos los elementos teóricos de la propuesta pedagógica desarrollada que tiene un corte constructivista con estrategias basadas en la resolución de problemas. Este enfoque difiere del sistema tradicional en el sentido que_ anteriormente el maestro presentaba problemas de entrada con la finalidad de explicar un concepto y posteriormente los alumnos realizaban resolución de problemas en forma similar a los que había realizado el maestro. Bajo el de enfoque de resolución de problemas actual, el maestro plantea inicialmente el problema para que sea el propio alumno(os) quien lo resuelva y vaya construyendo algún concepto; La resolución del problema podrá hacerse en forma individual o en forma colaborativa. Previo a presentar el problema el maestro ya debió de considerar los conocimientos previos que tiene el alumno para que sea capaz de poder resolverlo. De otro modo, si el maestro no tiene la anterior consideración pudiera llevar a la frustración al alumno al no poder resolver el problema.

En el escrito de Vilanova et.al. (1995) se menciona que gran cuerpo de literatura emergente en los últimos años, considera al aprendizaje de las matemáticas como una actividad inherentemente social (tanto como cognitiva), y como una actividad esencialmente constructiva, en lugar de receptiva. Desde esta perspectiva cultural, la comunidad a la que uno pertenece modela el desarrollo del punto de vista de sus miembros. Es decir, el aprendizaje es culturalmente modelado y definido: las personas desarrollan su comprensión sobre cualquier actividad a partir de su participación en lo que se ha dado en llamar la “comunidad de práctica”, dentro de la cual esa actividad es realizada.

El concepto de Comunidad de práctica la introdujo Wenger y Juárez (2006: 237) en una reseña que realiza de él la describe en estos términos:

> Wenger sintetiza las características esenciales de una comunidad de práctica y las diferencias con el resto de los grupos en internet, autodefinidos como comunidades. Afirma que: No todo aquello llamado comunidad es una comunidad de práctica... Son cruciales tres características: a) El dominio: puesto que una comunidad de práctica se enfoca sobre un dominio de interés compartido. b) La comunidad: en la consecución de los intereses de su dominio, los miembros se comprometen en actividades y discusiones conjuntas, se ayudan uno al otro y comparten información. Así es como forman una comunidad alrededor de su dominio y construyen relaciones. c) La práctica: una comunidad de práctica no es meramente una comunidad de interés [...] Los miembros de una comunidad de práctica desarrollan un repertorio compartido de recursos: experiencias, historias, herramientas, formas de manejar problemas recurrentes –en una práctica breve y compartida (2001: 2 y 3). Todos pertenecemos a comunidades de práctica y, a lo largo de nuestras vidas, nos incorporamos a otras más. El concepto de comunidad de práctica puede encontrar aplicaciones en diversos ámbitos de la vida social.

Las lecciones que los alumnos aprenden acerca de la matemática en el aula son principalmente culturales y se extienden más de los conceptos y procedimientos matemáticos que se enseñan: lo que se piensa que la matemática determinará los entornos matemáticos que se crearán y aún más la clase de comprensión matemática que se desarrollará.

Una visión alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. La idea que subyace a esta visión es que "saber matemática" es "hacer matemática". Lo que caracteriza a la matemática es precisamente su hacer, sus procesos creativos y generativos. La idea de la enseñanza de la matemática que surge de esta concepción es que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas. Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo, que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación.

Dentro de esta construcción social el significado y la naturaleza de las matemáticas incluyen conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. Así la idea de esta visión es que "saber matemática" es "hacer matemática":

> lo que caracteriza a la matemática es precisamente su hacer, sus procesos creativos y generativos. La idea de la enseñanza de la matemática que surge de esta concepción es que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas. Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo, que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Silvia Vilanova, et. al (ibiden: 1)

Como señala la autora anterior, es a partir de situaciones matemáticas donde se inicia el proceso de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y por supuesto agrega: con actividades con sentido. Es la intención de esta propuesta seguir estos elementos pedagógicos.

4.2 La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva Constructivista

Silva Laya (2009) nos da una perspectiva constructivista de la enseñanza de las matemáticas en los siguientes términos:

Los fundamentos epistemológicos del constructivismo señalan que los sujetos construyen activamente sus conocimientos y no es algo que se les pueda trasmitir de manera lineal y automática sino que es construcción del propio alumno y la guía del maestro, con actividades significativas, contribuye para ello. Por otra parte, señala que desde la epistemología constructivista el individuo no es producto del medio ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción resultado entre la interacción entre estos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano, en relación con las interacciones que lleva a cabo con los objetos de conocimiento que se le dé para aprehender. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea.

Además Silva (ibídem: 6) destaca la importancia de los conocimientos previos como un factor importante para el nuevo conocimiento y por lo tanto para el aprendizaje. Es decir el sujeto construye los conocimientos a partir de sus experiencias previas, creencias o ideas que en su conjunto conforman, citando a Novack (1982) “estructuras conceptuales”.

Silva (ibídem: 7) toma la idea de Kipatrik (1985) para destacar que otro factor importante respecto al constructivismo es que llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo experiencias y preexistente mundo fuera de la mente. Sin embargo precisa “que el mundo existe independientemente del cognoscente; sólo que para el interés de este ser, sólo existirá el mundo cuando lo conozca. De ahí, la importancia de un sujeto activo que construye conocimientos y con ellos organiza el mundo.

Silva (ibídem: 6) también menciona que: “el conocimiento no puede ser transferido desde la cabeza de un profesor a la cabeza de los estudiantes”. Por el contrario, el constructivismo intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conceptos y cómo sus estructuras conceptuales le llevan a convertirse en las gafas perceptivas que guían sus aprendizajes.

Es bien conocido el aporte de Piaget, sobre el desarrollo cognitivo en niños que mantiene que los niños pasan a través de etapas específicas. Estas etapas se desarrollan en un orden fijo en todos los niños. No obstante, la edad puede variar ligeramente de un niño a otro. De acuerdo a las etapas son las siguientes:

a) Etapa sensoriomotora

Esta etapa tiene lugar entre el nacimiento y los dos años de edad**,** conforme los niños comienzan a entender la información que perciben sus sentidos y su capacidad de interactuar con el mundo. Durante esta etapa, los niños aprenden a manipular objetos, aunque no pueden entender la permanencia de estos objetos si no están dentro del alcance de sus sentidos. Es decir, una vez que un objeto desaparece de la vista del niño o niña, no puede entender que todavía existe ese objeto (o persona), se le dificulta entender que el objeto solamente ha desaparecido de su vista y no supone lo que puede pasar. Es muy comentado el juego que las madres realizan con sus bebés al taparse con una sábana y asomarse de sorpresa causa la risa de los ellos.

b) Etapa preoperacional

Comienza cuando se ha comprendido la permanencia de objeto, y se extiende desde los dos hasta los siete años. Esta etapa es más simbólica que el pensamiento sensoriomotriz, aunque no incluye el pensamiento operacional. Es egocéntrica e intuitiva más que lógica. Durante esta etapa, los niños aprenden cómo interactuar con su ambiente de una manera más compleja mediante el uso de palabras y de imágenes mentales. Esta etapa está marcada por el egocentrismo, o la creencia de que todas las personas ven el mundo de la misma manera que él o ella. También creen que los objetos inanimados tienen las mismas percepciones que ellos, y pueden ver, sentir, escuchar, etc. El pensamiento preoperacional puede dividirse en dos sub-etapas: función simbólica y pensamiento intuitivo. La función simbólica se presenta aproximadamente entre los dos y cuatro años. En esta sub-etapa, el niño pequeño adquiere la habilidad de representar mentalmente un objeto que no está presente. Esto expande el mundo mental del niño hacia nuevas dimensiones; un mayor uso del lenguaje y el surgimiento del juego simulado son ejemplos del incremento del pensamiento simbólico.

c) **Etapa de operaciones concreta**

Esta etapa tiene lugar entre los siete y doce años aproximadamente y está marcada por una disminución gradual del pensamiento egocéntrico y por la capacidad creciente de centrarse en más de un aspecto de un estímulo.

Pueden entender el concepto de agrupar, por ejemplo, pueden entender que a las diferentes casas habitación, ya sean pequeñas o grandes se les agrupa en el nombre de casas.

Sólo pueden aplicar esta nueva comprensión a los objetos concretos (aquellos que han experimentado con sus sentidos). Es decir, los objetos imaginados o los que no han visto, oído, o tocado, continúan siendo algo místico para estos niños**,** y el pensamiento abstracto tiene todavía que desarrollarse.

d) **Etapa de las operaciones formales**

En la etapa final del desarrollo cognitivo (desde los doce años en adelante), los niños comienzan a desarrollar una visión más abstracta del mundo y a utilizar la lógica formal. . También desarrollan una mayor comprensión del mundo y de la idea de causa y efecto.

Esta etapa se caracteriza por la capacidad para formular hipótesis y ponerlas a prueba para encontrar la solución a un problema. Otra característica del individuo en esta etapa es su capacidad para razonar en contra de los hechos. Es decir, si le dan una afirmación y le piden que la utilice como la base de una discusión, es capaz de realizar la tarea.

4.3 La resolución de problemas en la educación matemática

La resolución de problemas ha sido identificada como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas; en este contexto surge la propuesta de relacionar el aprendizaje de las matemáticas con la resolución de problemas. El énfasis en la resolución de problemas como método integral para la enseñanza de la matemática en la concepción de Ernest (1988), referenciado por Vilanova (Ibidem: 2) sintetiza así: "...hay una visión de la matemática (conducida por la resolución de problemas) como un campo de la creación y la invención humana en continua expansión, en el cual los patrones son generados y luego convertidos en conocimiento”.

Se menciona que una caracterización de las matemáticas en términos de las soluciones de la resolución de problemas refleja una dirección que cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos; procedimientos o reglas que el estudiante tiene que memorizar o ejercitar y por otra parte, se relaciona con la práctica del desarrollo de las matemáticas, es decir que el estudiante aprende matemáticas al estar inmerso en un medio similar de la gente que hace matemáticas.

Existe en la literatura diferentes definiciones de lo que es un problema en matemáticas, aquí se utiliza el propuesto “se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación”. (Rizo &Capistrous, 1999: 5).

Labarrere Sarduy (1987) presenta una propuesta de enseñanza de las matemáticas y en especial en la resolución de problemas, en donde uno de los énfasis que señala es la de trabajar en que sea el propio niño quien vaya creando la formulación de los problemas. Él da un ejemplo en ese sentido, le propone a los niños del cuarto grado que a partir de la siguiente información de abajo, formulen un problema:

Plan para tres meses 18 000 t de toronjas

Producción cada mes 7000 t

¿En cuántas toneladas se cumplió el plan?

Este autor señala que un alumno formuló el siguiente problema con la anterior información:

Una granja de cítricos tiene en plan producir 18 000 t de toronjas en tres meses. La producción mensual fue de 7000 tonelada. ¿En cuántas toneladas se cumplió el plan?

Como se podrá ver es una propuesta interesante, que tuviera que comprobarse su bondad en el proceso de enseñanza aprendizaje-

Desde el punto de vista de Vilanova (ibídem: 2) existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemática a partir de la resolución de problemas. Este mismo autor dice que el término de problema matemático escolar ya existía desde hace largo tiempo en la educación, pero el de resolución de problemas, no. Y que recientemente los que enseñan matemáticas han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial. Este enfoque de la resolución de problemas como principio para que el alumno aprenda matemáticas es referenciado por la secretaría de educación desde el nivel de preescolar y por supuesto en el de la primaria.

También señala que el término resolución de problemas tiene diferentes concepciones y nos apunta algunos de ellos:

Resolver problemas como contexto: algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana son incluidos en la enseñanza para mostrar el valor de la matemática.

Para proveer especial motivación a ciertos temas: los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, para favorecer el aprendizaje de un determinado contenido.

Como actividad recreativa: las matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.

Como medio para desarrollar nuevas habilidades: se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a las estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.

Como práctica: la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se haya dominado la técnica.

Resolver problemas para el desarrollo de habilidades: propuesta que invita a la resolución de problemas no rutinarios, para el logro de una habilidad de nivel superior, adquirido luego de haber resuelto problemas rutinarios. En fin, las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas.

Esta última aplicación es la que reúne los requisitos idóneos, se trata pues de hacer matemática en estricto sentido.

La resolución de problemas, de acuerdo a la teoría constructivista, constituye una actividad privilegiada para introducir a los estudiantes en las formas propias del quehacer de las matemáticas. Lograr que los alumnos desarrollen estructuras de pensamiento que le permitan matematizar; es una de las principales metas de la enseñanza matemática actual.

De Guzmán (2007: 19) sostiene que “la resolución de problemas tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas”. Esta idea nos plantea que la propia matemática tiene en muchos casos procedimientos que son más eficaces que otros en la resolución de problemas, pero que el proceso de enseñanza debe llevar que sea el propio alumno que lo descubra. Por ejemplo: se sabe que la multiplicación se puede interpretar como una suma repetida de un sumando. Y esto es correcto. Pero sería muy ineficiente realizar una suma un número muy grande de veces cuando por el proceso de la multiplicación sería más eficiente. Sumar 20 veces 5 es mas tardado que multiplicar 20 por 5, como ejemplo. Insistiendo, esto lo debería de descubrir el alumno por su cuenta y no de ser explicado por el maestro.

La forma tradicional de la enseñanza de las matemáticas es exponiendo el contenido, dando ejemplos sencillos, después haciendo ejercicios sencillos y luego complicados, para que al final, se presente un problema. Por el contrario, actualmente se recomienda plantear situaciones problemáticas desde el principio, para activar el interés y la mente del estudiante. Un ejemplo muy usual en la enseñanza (en forma tradicional) del concepto de fracción es la de representar gráficamente un círculo o un rectángulo y dividirlo en dos partes o más partes iguales y denominar su fracción: medios tercios, etc.

Vale la pena retomar la diferencia que establece entre un problema y un ejercicio. Para este autor un problema es una situación (real o hipotética) que resulta plausible al alumno desde su punto de vista experiencias y que involucra conceptos, objetos u operaciones matemáticos, mientras que un ejercicio se refiere a operaciones con símbolos matemáticos únicamente (sumas, multiplicaciones, resolución de ecuaciones, etcétera). En síntesis, un ejercicio se resuelve a través de procedimientos rutinarios que conducen a la respuesta, el problema exige el desarrollo de una estrategia para resolver la incógnita.

4.4 Aprendizaje cooperativo

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante la solución de problemas es un proceso que requiere la adopción de diferentes formas de interacción dentro de aula, que por un lado, conduzca a los alumnos a comprender los problemas y explorar diferentes formas de solución y por el otro conduzca a los maestros a elegir problemas adecuados al nivel del estudiantes. También pueden en forma cooperativa ellos mismos plantear problemas.

El contexto de la enseñanza de las matemáticas es importante. Un contexto de enseñanza que permite a los estudiantes discutir, establecer acuerdos respecto a los significados matemáticos; expresar puntos de vista y experimentar soluciones, provee a los alumnos una mayor oportunidad de desarrollarse en su conocimiento. Es el aprendizaje cooperativo, cuya base principal es la constante interacción entre los alumnos una estrategia de aprendizaje que cumple con todo lo anterior.

Jones,Wilson y Bhojwani (1997: 151) señalan que:

> El aprendizaje cooperativo permite a los alumnos internalizar procesos organizar y retener ideas: además durante la interacción los conocimientos matemáticos individuales se externan y se vuelven: públicos, con la posibilidad de ser criticados y reformulados, lo que a su vez conduce a nuevos conocimientos y a la creación de nuevos conocimientos y a la creación de entendimientos compartidos sobre vocabularios y representaciones simbólicas.

El aprendizaje se entiende como un proceso y acto social en el que el alumno se aproxima paulatinamente al comportamiento, vocabulario y conocimiento de una determinada área de conocimiento, aprende matemáticas en un contexto social donde se experimenta su utilidad como resultados más significativos, porque sirve de vinculo de comunicación y entendimiento entre los miembros de una sociedad. El aprendizaje es compartido y depende de todos los miembros del grupo con responsabilidad individual. Se evalúa el dominio de cada uno de los estudiantes al que se le proporcionara retro alimentación sobre su grupo y con interacción cara a cara. Mediante la interacción se promueve las habilidades sociales necesarias para la colaboración tales como el liderazgo.

Habilidades comunicativas y habilidades de negociar el liderazgo compartido. Se promueve que el liderazgo se rote en la medida posible ante existencia de las tareas que conduzcan más aprender que hacer algo por el procesamiento en grupo. Al finalizar la tarea cada miembro del grupo analizará su desempeño y del grupo.

4.5 Obstáculos didácticos en el aprendizaje de las matemáticas

Se trata de una idea sobre la epistemología de Bachelard (1983) señala que los *obstáculos* son conocimientos aparentes, que impiden tener acceso a nuevos conocimientos y que se presentan como impedimentos. Por ejemplo, el hecho que el niño este acostumbrado a pensar en los números como números naturales positivos puede ser un obstáculo para su conocimiento de los números fraccionarios. Así no sería extraño que un niño señale a 1/3 como el número siguiente a 1/2. Aquí el conocimiento de la consecución de los de los números naturales representan un obstáculo para el niño en su entendimiento de los números fraccionarios. Brousseau (1983) señala que los errores no siempre son el producto de ignorancia o de inexactitud; Un conocimiento previo puede ser un obstáculo en el aprendizaje de un conocimiento nuevo. Se distinguen tres tipos de obstáculos:

a) **Los *ontogenéticos*** *que* se originan en las características del desarrollo del aprendiz. Son limitaciones del sujeto ligado al desarrollo evolutivo, o sea de condiciones genéticas específicas de los estudiantes y de acuerdo a esto no se pueden evitar. Por ejemplo el principio de conservación señalada por Piaget. O bien, otro ejemplo sería el de querer enseñar el concepto de fracción a los niños del preescolar, aquí su falta de madurez para entender este concepto sería un obstáculo ontogénico.

b) **Los *didácticos*** *que provienen de dificultades que se originan en la enseñanza por errores didácticos por parte del docente, metodológicos o conceptuales.* En el caso de la enseñanza de los conceptos de la fracción y de la suma de fracciones no hay duda que este tipo de obstáculo se pudiera presentar. Un ejemplo de esto sería el caso del concepto de fracción. Como se mencionó se puede considerar un obstáculo didáctico, o al menos incompleto, el enseñarlo como una parte-todo: Si le decimos a un niño que un pastel (el todo) se puede dividir en dos partes iguales (las partes) y cada una es un medio. El problema que se suscita aquí es que si en lugar de tener un pastel se tiene un pastel y medio ¿Cómo explicarle cual es la mitad? Como se vé, ya la idea parte todo no funciona de manera directa.

c) **Los *epistemológicos***, se relacionan intrínsecamente con la matemática bajo estudio. Este tipo de obstáculo se puede rastrear históricamente en la dificultad que se tuvo para sortear situaciones similares. Estos obstáculos son parte del proceso de aprendizaje. Por ejemplo, si el niño sabe que el número siguiente al cinco es el seis, esto resulta cierto en el caso de números naturales pero en las fracciones el número siguiente a 1/5 no es 1/6, aquí el problema es que ya no se está trabajando dentro de los números naturales,(0, 1, 2, 3,…) sino dentro de los números racionales o reales, donde siempre será posible encontrar un número entre dos de ellos, por ejemplo, un número entre 1/6 y 1/5 se puede encontrar sumando estos dos números y dividiendo entre dos, que da como resultado 11/60, y esta operación puede continuar infinitamente.

Se mencionan estos obstáculos porque el maestro debe de tenerlos en cuenta al momento de desarrollar estrategias didácticas, y saber que el caso específico de las matemáticas, su carácter abstracto en sí representa un obstáculo epistemológico, y también el conocer la etapa de desarrollo del niño se debe de tener presente para evitar enfrentar obstáculos ontogéneticos, esto es falta de madurez. Y por último los obstáculos didácticos son los que sí están de nuestra parte poder evitarlos, al estudiar detenidamente el concepto u operación por enseñar, realizar un estudio teórico al respecto y trazar la estrategia didáctica apropiada.

4.6 Adaptación al medio

Chamorro, Ma. Carmen (2003: 48) nos proporciona una definición del “aprendizaje por adaptación al medio” dada por Brousseau, (1998) en los términos de “una modificación del conocimiento que el alumno debe producir por sí mismo y que el maestro sólo debe provocar. Esta consideración del aprendizaje nos lleva a los siguientes razonamientos: para hacer funcionar un conocimiento en el alumno, el docente ha de buscar una situación apropiada. Para que sea una situación de aprendizaje es necesario que la respuesta inicial que el alumno dé frente a la pregunta planteada, no sea la que queremos enseñarle; dado que si fuese así, no se trataría de una situación de aprendizaje; sería de aplicación de conocimientos ya aprendidos o de refuerzo. La respuesta inicial, sólo debe permitir al alumno utilizar una estrategia de base con la ayuda de sus conocimientos anteriores; pero, muy pronto, esta estrategia debe mostrarse lo suficientemente ineficaz como para que el alumno se vea obligado a realizar acomodaciones (es decir, modificaciones en su sistema de conocimientos) para responder a la situación propuesta.

El trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio (situación- que plantea el medio, insoslayable, y adaptarse al deseo del docente. La significación del conocimiento es completamente diferente. Una situación de aprendizaje es una situación donde lo que se hace tiene carácter de necesidad, independientemente de la voluntad del maestro. La resolución del problema se vuelve entonces responsabilidad del alumno, que debe hacerse cargo de obtener un resultado.

Así Chamorro, (ibiden: 25) dice:

Desde esta perspectiva, el alumno aprenderá matemáticas, si:

a) Entra en el problema, haciéndolo suyo.
b) Pone en funcionamiento una estrategia de «base» (que puede ser pesada y antieconómica, defectuosa...).
c) Cuando la estrategia de base se hace insuficiente, trata de superar el desequilibrio y *anticipa* y emite hipótesis que le permitan:
d) Elaborar procedimientos, ponerlos en funcionamiento, y según los efectos producidos, adoptarlos o modificarlos...
e) Automatizar aquellos que sean solicitados con más frecuencia.
f) Ejercer un control sobre los resultados.
g) Construir con sentido un conocimiento matemático.

CAPÍTULO 5
PLANEACIÓN Y ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS

En este capítulo se presentan las situaciones didácticas implementadas, así como su desarrollo. Como se podrá observar, un aspecto muy importante de las situaciones es que se desarrolló una serie de elementos matemáticos que les permitió a los alumnos poder calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones, de tal forma que pudieron realizar las sumas y restas de fracciones con diferente denominador con facilidad.

Se entiende por una situación didáctica como la planeación que el maestro realiza para un tema o concepto, es decir la forma como organiza el contenido, las actividades, los recursos, los tiempos etc., todo esto en función del objetivo que se ha planeado.

Se trata también de identificar cómo el niño va construyendo los conocimientos matemáticos.

1. Cálculo del múltiplo común de dos números por la forma “larga”.
2. Concepto de mínimo común múltiplo de dos números
3. Aprendizaje de los criterios de divisibilidad de 2, 3, 5
4. Concepto y cálculo del máximo común divisor de dos números.
5. Recordar al alumno el concepto de fracción.
6. La enseñanza aprendizaje de la suma de fracciones de igual denominador:
7. Suma y resta de fracciones de diferente denominador.
8. Los denominadores sean números primos.
9. Uno de los números del denominador contiene al otro.

10. Se calcula el máximo común divisor de los números de los denominadores. Se divide uno de ellos entre ese .m.c.d. y se multiplica por el otro denominador. Este es mínimo común múltiplo.
11. Utilizando el método tradicional.

La anterior secuencia de objetivos didácticas nos da un panorama hacia donde nos dirigimos, y hacia donde queremos llegar.

Desde un punto de vista didáctico estos objetivos proponen desarrollar actividades en donde estarán fundamentadas pedagógicamente con los principios explicados arriba que son los siguientes:

Enseñanza aprendizaje a través de la resolución de problemas.

Enseñanza constructivista cognitivo de Piaget y social Vygotski, y el aprendizaje significativo planteado por Ausubel, son pilares. El papel del maestro es el de facilitador, mediador, guía de los aprendizajes de los alumnos

Se analizan los posibles obstáculos epistemológicos.

La enseñanza en forma cooperativa, en donde los alumnos trabajan en forma grupal, y los más aventajados ayudan a los menos.

La forma de evaluación es también de suma importancia y debe de hacerse en forma formativa, esto es durante el proceso de enseñanza aprendizaje, y no únicamente de forma sumativa, esto es al final del proceso.

SESIÓN 1

A partir de la evaluación diagnóstica que se realizó se diseñaron estrategias que lleve a la nivelación de conocimientos del tema a los alumnos, empezando por el concepto de múltiplo de un número.

APRENDIZAJE ESPERADO: Cálculo del múltiplo común de dos números por la forma "larga".

ACTIVIDAD: Pedir calcular los múltiplos de dos o más números por series separadas y ver las coincidencias de sus múltiplos y seleccionar el menor de ellos que será el m.c.m. de los números. Al ir terminando lo compararán con el compañero de al lado y se pedirá que expliquen cómo los encontraron, Se dará respuestas en la pizarra para su retroalimentación.

EVALUACIÓN: se revisa los trabajos de algunos alumnos para verificar su correcta solución.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

Se comenzó la actividad pidiendo a los niños que lean y expliquen el siguiente problema de matemáticas:

Se ha organizado en el colegio un campeonato de fútbol y otro de beisbol, de manera que se celebra un partido de fútbol cada 2 días y uno de béisbol, cada 3 días. Si hoylunes se ha celebrado un partido de ambos deportes, ¿dentro de cuántos días volverán a coincidir a jugar un partido de fut y otro de beis?

Como uno se dará cuenta este problema se soluciona encontrando el m.c.m. de 2 y 3.

Se les pidió a los niños que expliquen con sus propias palabras el problema.

Tres niños me dieron sus explicaciones pero no fueron del todo correctas.

Les pedí que hicieran un dibujo de lo que entendieran el problema. Los ayudé pintando dos rayitas en la pizarra en forma paralelas y en cada una de ellas se señaló con la primera letra los días de la semana, comenzando con lunes.

FUT cada2 días

L M M J V S D L M M J V

BEIS cada3 días

L M M J V S D L M M J V

Una vez que se tuvo los dibujos en sus cuadernos, se les pidió que señalen con una “tachita” los días en que van a jugar al mismo tiempo los equipos de fut y de beis.

Pasando un momento se les preguntó ¿Ya saben los días donde va haber partidos de beis y fut el mismo día, o sea van a coincidir? Como tuve la duda de saber si todos los niños entendían la palabra coincidir. Les dije que coincidir es suceder dos cosas al mismo tiempo, a manera de ejemplo.

Dada la anterior explicación, les repetí la pregunta de ¿Cuándo jugarían al mismo tiempo los equipos?

Y fue ya cuando escuché: el domingo.

Para estar seguro si no todos, al menos la mayoría, había encontrado el día de la solución, le pedí al niño que me dio la solución que pasara a la pizarra y que lo señalase y explicara cómo lo encontró. Así lo hizo el niño, y lo explicó mostrando en la pizarra cómo lo hizo.

Buscando que los niños tuvieran un mejor entendimiento, les pregunté qué otro día volverían a coincidir jugar los equipos. Les pedí que lo buscasen en las mismas líneas de tiempo. Después de un momento escuché que un niño me dio el resultado: el sábado.

En busca de los niños comprendiesen el concepto del m.c.m escribí en la pizarra los día sdomingo y sábado. Y pregunté entre estos dos días ¿cuándo van a coincidir a jugar el primer día?; el sábado o domingo y les pregunté cuál de estos días cuando van a jugar en forma más cercana o para eso cada cuándo volverán a jugar de lunes a domingo cuantos días hay y de lunes a sábado cuántos días hay.

Fueron contando y la respuesta fue de seis y doce. Les expliqué que cuando un equipo juega cada dos y cada tres días van a volver a jugar en el sexto día y el doceavo y la fecha más cercana es el seis y esta fecha se le llamará el m.c.m.

Como se ve, lo que se busca es que el niño aprenda el concepto del m.c.m. Posteriormente se les planteó otro problema del m.c.m. pero con otro contexto, escribiéndolo en la pizarra que fue el siguiente: dos choferes o camioneros salen a la misma hora de una estación, uno de ellos tarda cuatro horas en ir y regresar en la estación y el otro tarda dos horas en ir y regresar en la estación. La pregunta es ¿cuántas horas van tardar en coincidir los camioneros en la estación?

Seles pidió otra vez que leyesen él problema que uno se lo explique a otro de cómo entiende el problema y viceversa. Después de un momento se solicitó a alguien que se lo explicase a todos y dos niños dieron sus propias versiones del problema.

Se les preguntó si alguien sabe la respuesta.

Hay que recordar que a un niño le importa la predicción de la solución de un problema.

Para aclarar se escribió en la pizarra dos rayas
2h x ---------------------x
4hrs x--x

Un niño dio la respuesta correcta que fue de cuatro horas y le dije que era correcta y que pasara a explicarla y trató de explicarla. Para buscar reforzar el entendimiento de la solución lo expliqué yo también. Pero ahora les pedí que escribiesen cuándo se volverían a encontrar, visualizando el dibujo como una forma de que ellos pudieran ver la importancia de representar el problema en una gráfica en la resolución de un problema. Tal como se esperaba sí se logró visualizar la respuesta correcta a través del dibujo.

SESION 2

APRENDIZAJE ESPERADO: encuentra el m.c.m. de dos conjuntos de números dados.

ACTIVIDAD: Se les da a los niños unos números y se les pide encontrar el m.c.m.

EVALUACIÓN: Se le revisará los ejercicios del cálculo del m.c.m.

DESARROLLO: Encontrar los primeros 7 múltiplos de los números: 3, 4

Se estuvo pendiente recordar que el mismo número se considera un múltiplo de sí mismo.

La respuesta esperada fue:

M(3) = 3, 6, 9, 12, 15,18, 21, 24

M (4) = 4, 8, 12, 16, 20,24, 28

Primero se les pide de forma oral y después de forma escrita.

Posteriormente se escribió en la pizarra los múltiplos de los números 3 y 4 y se le pidió encontrar, subrayándolos, los múltiplos comunes de ellos. Cabe señalar que se les tuvo que dar una breve explicación de lo que significa múltiplos comunes de dos números, diciéndoles que son los números que aparecen o están repetidos en las dos series.

Se observa que en estas dos series los números 3 y 4 tiene dos múltiplos comunes: 12,24

Se esperó un momento y se le preguntó al grupo que digan cuáles habían encontrado.

Efectivamente un alumno me contestó que el 12 y 24.

Escribí los 2 números en la pizarra.

Les pregunté cómo se llaman estos números y no me contestaron pero yo les recordé que se llaman múltiplos comunes de 3 y el 4. Se les explicó que eran los números que se repetía en ambos conjuntos de los múltiplos.

Se les preguntó cuál era el menor de estos números o múltiplos comunes y sí me dijeron que el 12.

Al decirme esto, les dije que a este número los llamaríamos el mínimo común múltiplo de estos números y les señale que lo nombraríamos m.c.m y es el primero que aparece en las dos series. Y se le señaló que se denotaba así m.c.m (3, 4) = 12

Repetí el ejercicio con los números 3 y 6, pero esta vez, se les pidió que ellos escribieran primero los múltiplos de cada uno de ellos y posteriormente que encontraran el primer múltiplo común de las dos series.

M(3) = 3, 6, 9, 12, 15,18, 21, 24

M(6) = 6, 12, 18, 24, 30

Se les pidió que compararan sus resultados con un compañero cercano.

Se esperó un momento y se les preguntó cuál fue el m.c.m.

Y varios niños me dieron las respuesta del 6.

Les contesté que era correcto.

Les pregunté si observaron o se dieron cuenta del resultado.

Dos de los niños me contestaron que era el 6. Les dije que sí.

Les dije que cuando se busca el m.c.m. de dos números, y uno de ellos es un múltiplo del otro, el mayor es m,c,,m de los dos.

Para comprobar si los niños entendieron la explicación se les pidió que calculen el m.c.m de 4 y el 8.

La contestación fue de número 8 después de un momento.

Para continuar se les pidió encontrar el m.c.m de 3 y 5

Se le dio un tiempo para que encontraran los múltiplos de cada uno de ellos y después los múltiplos comunes y el m.c.m.

Se le pidió también que comprobasen sus resultados con algún compañero. Después de un momento se le pidió sus respuestas. Se escucharon sus respuestas y hubo consenso que el resultado es 15. Se le dijo que era correcto el resultado. Y se les dio la observación que este número 15 es el producto de ellos, o sea de 3x 5

Se le dijo que hay unos números que se llaman primos y que eran los siguientes:

2,3, 5, 7, 11, 13, 17…,

y otros números se llaman compuestos, como :

4, 6, 8,10, 12.

Aquí se les dio la siguiente explicación:

Que la primeros números solo se pueden dividir en forma exacta entre el número uno y ellos mismos. Dada esta breve explicación, se le pidió encontrar el m.c.m de 3 y 5 donde ambos números son primos.

Los niños procedieron a encontrar los múltiplos de 3 y de5, y encontraron el mínimo común múltiplo de igual forma como lo hicieron anteriormente, o sea, de la forma “larga” escribiendo la serie de los múltiplos de cada uno y encontrando, como era de esperarse que es el número 15 , el que aparece en ambas hileras de múltiplos.

Ya habiendo realizado este ejercicio se le dijo que cuando los dos número son primos el m.c.m. se encuentra, multiplicando los números dados.

Así se le dio las parejas de números 2 y 5 y 3 y 11 para que lo comprobaran.

La indicación fue que lo encontraran de la forma “larga” y después que lo comprobaran multiplicando los números. Como se podrá entender, la idea es que los niños desarrollen el descubrimiento por inducción. Es evidente que los niños no entienden bien este principio de inducción pero se siembra una semilla.

SESIÓN 3

APRENDIZAJE ESPERADO: Calcula el l máximo común divisor de dos números.

EVALUACIÓN: se revisa respuestas de los ejercicios y problemas resueltos por los alumnos**.**

DESARROLLO

a. Se les plantean a los alumnos problemas donde aparezcan los conceptos y prácticas deseadas, en este caso de divisor y máximo común divisor
b. Se da a los niños el número 6 y se les pide que me digan todos los números que lo dividen en forma exacta. La respuesta esperada es el 1, 2, 3, y el 6
c. Varios niños me dijeron que el dos y el tres.
d. Se les pregunta a todos si están de acuerdo y si falta alguno.
e. Como los niños no contestan, se les preguntó si el número 1 y el 6 dividen al 6
f. Se les pregunta para confirmar la pregunta cuánto es 6 entre 1 y cuánto es 6 entre 6
g. Aquí sí se obtiene una respuesta muy generalizada que es 6 y 1 en forma generalizada.
h. Se les da otro número pero esta vez con el número 8 para que digan sus divisores.
i. Respuesta esperada: 1, 2, 4, 8

Lo que se busca aquí es que el niño se dé cuenta que el número uno y el mismo número siempre van a ser divisores de todo número.

Ahora se les pide encontrar los divisores de 6 y 8 en forma conjunta

Divisores de 6 son 1, 2 3, 6

Divisores de 8 son 1, 2, 4, 8

Se escriben en la pizarra y se le pide que me digan qué número o números son divisores de los dos números al mismo tiempo, o sea de forma simultánea.

Me dicen que el 1 y el 2

Aquí se les dice que como el número dos es mayor de los divisores se le llama máximo común divisor y se escribe m.c.d.

Ahora se les da los números 4 y 8

Una vez que se les dio un tiempo suficiente y ver que hayan concluido. Se le pidió su participación levantando la mano para que dieran sus respuestas, escribiéndolas en la pizarra. Primero pasaron tres y después otros dos. Al concluir se les pidió a los niños que no participaron si las respuestas de la pizarra eran iguales a las de ellos o ellas.

SESIÓN 4

APRENDIZAJE ESPERADO: aplican los criterios de divisibilidad de 2, 3, 5

EVALUACIÓN Se revisan sus resultados y se les da retroalimentación.

DESARROLLO Se les da a los alumnos números para que practiquen los criterios de divisibilidad.

Posteriormente se pasó a hacer reflexionar a los niños de cómo reconocer si un número es un múltiplo de otro, específicamente de 2,3,5. Esto es con la idea de introducirlos a que conozcan los principios de divisibilidad de estos números en específico. Se les explica estos criterios y se les dio ejemplos

Se les explica los criterios de divisibilidad de 2, 3 y 5, que se mencionaron anteriormente, y se dan los números siguientes para practicar este principio: 12, 15, 24,27, y 32. Este ejercicio se planteó para que trabajen en forma colaborativa, en pequeños grupos.

12 |2

6|2

3|3

1|1

Se les hizo la observación que estos divisores eran todos número primos

Y que cada número era igual al producto de cada uno de sus divisores.

Por ejemplo: el número 12 = 2x2 x 3y18 = 2x3x3

Posteriormente se dio unos números en forma oral y se les pidió que respondan si eran divisibles por 2, por 3 o por 5

24, 54, 72, 27, 45,96,124, 35

SESIÓN 5

OBJETIVO: aplica el concepto de fracción.

EVALUACIÓN: se observa y revisa las respuestas de los alumnos.

DESARROLLO: se les da a los niños problemas donde se vea y comprenda el concepto de fracción.

Se empezará con recordarles el concepto de fracción como una parte de un todo.

Se le pide a los niños que saquen una hoja de papel y se les da la instrucción que la divida en dos partes iguales. Se les da el tiempo para que lo realicen.

La mayor parte de los niños realizaron pero todos coincidieron en el dobles de la hoja en forma de vertical hacia abajo. Al dividir la hoja de esta forma se les preguntó ¿cómo se llama a cada una de las partes iguales? Algunos niños respondieron de manera correcta: un medio. Y se les cuestionó si sabían ¿cómo se escribe un medio? y se les recordó la simbología: ½

Se les explicó que este tipo de números se llama fracción y que el número uno de arriba es el numerador y simboliza una mitad de la hoja. La hoja entera vale un entero. Y que esta hoja tiene dos mitades. Si se unen las mitades de la hoja ½ +1/2= 1, o sea las dos mitades de la hoja nos da la hoja completa.

Se les pidió a los niños que busquen otra forma diferente de doblar la hoja que también la divida en dos partes iguales. Se les dio el tiempo que lo pensaran e intentaran de dividir su hoja. Como era de esperarse los niños doblaron sus hojas en forma vertical y se percataron que ahora tenía dos mitades pero de forma diferente. Aquí se les dijo que era correcto sus divisiones de hojas y que a cada una de esas partes iguales se llamaba también "un medio" y que también se escribía como ½.

Para extender este concepto, se les pidió que doblasen la hoja en cuatro partes iguales, y se le dijo que cada una de las partes iguales se les llama "un cuarto "y se simboliza como ¼, así se repitió doblando la hoja otra vez dando como resultado ocho partes iguales, que se simboliza como 1/8 (un octavo).Este proceso no fue nuevo para los niños, sino más que todo un recordatorio para ellos. Sin embargo, cuando se les dijo juntar, agregar o sumar tres cuadritos de las hojas que representan cada una 1/8 se les cuestionó de cómo nombrarlas (las tres juntas): se les recordó que se llama “tres octavos” y se simboliza 3/8. Como reforzamiento se les pidió que señalaran cuantos cuadritos de un octavo representa 5/8, 7/8, 2/8;

Ellos fueron contando los cuadritos de acuerdo al número del denominador.

Se aprovechó el ejercicio para introducir el concepto de suma de fracciones

Para que el niño entienda el concepto de un “todo” se les pidió que dividan la hoja en dos partes. Ya realizado por los niños se les explicó que ahora el todo va a ser esas mitades de hoja y si se divide en dos partes iguales, cada una de las partes sería la mitad: 1/2

SESIÓN 6

APRENDIZAJE ESPERADO: realiza operaciones de suma y resta de fracciones de igual denominador.

EVALUACIÓN: Se analiza resultados de los problemas y se les da la retroalimentación.

DESARROLLO. Se les presentan a los alumnos problemas matemáticos donde se presentan problemas del uso de la suma de quebrados.

Se le da un problema:

Se pinta la 1/3 de una pared y al día siguiente otra 1/3 parte. ¿Cuánto ya se pintó de la pared, en los dos días?

Se les piden que hagan una gráfica, del problema y señalen las partes pintadas, utilizando la notación de quebrados.

Ya posteriormente, se les pide que lo representen en un sentido de suma de fracciones. Al hacerlo varios niños, a partir de sus conocimientos que ya traían dan como resultado el esperado: 1/3 + 1/3 = 2/3

Para practicarlo se les propone realizar las siguientes sumas

3/4 + 2/4; 5/3 – 2/3 y otros ejercicios más.

Aquí se ve que los niños, no tiene problema para realizar este tipo de operación.

SESIÓN 7

APRENDIZAJE ESPERADO: realiza operaciones de suma y resta de fracciones de diferente denominador.

EVALUACION Seles propondrá problemas para practicar la operación y se van a analizar los resultados. Se les da la retroalimentación.

DESARROLLO: se les pide a los alumnos que se agrupen en equipos de tres a cuatro compañeros. Una vez agrupados los estudiantes se les dará problemas y ejercicios de sumas y resta de fracciones para que interpreten esta operación y la realizan de acuerdo a sus conclusiones y apoyo del maestro.

Se les da a los grupos de niños ejercicios de suma de fracciones de diferente denominador. .

Se le pide a los niños que sumen las fracciones 4/6 + 1/ 3

Se da una pausa para que los niños de los equipos descubran que las fracciones o quebrados no tienen el mismo denominador. Una vez que pasa este momento se les pregunta si pueden realizar la operación. Como son equipos de trabajo si se da el caso que ellos se dieron cuenta que los quebrados tienen diferente denominador.

Aquí la intervención del maestro se hace necesaria y se le da una explicación de que es necesario que los denominadores de los quebrados sean iguales.

Se les pide a los alumnos representar a cada uno de los quebrados en rectángulos iguales, pero a uno lo dividen en sextos y otros en tercios. Una vez que planteé esta instrucción, los grupos de alumnos se dieron a realizarlo. Ya hecho ese paso, sin antes comprobar que todos los grupos estuvieran en igualdad de avance.

De los dibujos se les pidió que me dijeran cuál es el resultado. Por la evidencia de los dibujos se dijo que era uno, o sea una unidad. Lo cual es correcto pero no se ha dado la respuesta matemática de 6/6. En la gráfica que está dividida en tercios se puede ver que de forma sencilla, esto es mediante el trazado de una línea, los tercios se pueden transformar en sextos con solo multiplicar la fracción , de tal manera forma que las suma de estos quebrados se pueda ver gráficamente que es igual a 6/6.

Se repitió el ejercicio con los números 2/4 y 3/8 .

Repitiendo la tarea de dibujar los dos rectángulos y dividirlos en octavos se ve evidente que la suma es de 7/8.

Para fortalecer el concepto se repitió el ejercicio ahora con los números 2/5 y 3/10

Se le hizo la observación a los estudiantes que al sumar quebrados es necesario que tengan el mismo denominador, que en este caso es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Para que los alumnos puedan entender esta explicación se les dio otra vez los quebrados

4/6 + 1/3 y se les pidió que calcularan el m.c.m. de 6 y 3.

Por lo planteado anteriormente en las sesiones no les fue difícil decir que era el 6, dado que el 6 contiene al 3. Una vez resuelto esta operación del m.c.m. se transforma los quebrados : como el 4/ 6 está en sextos queda igual .

El 1/3 al realiza la operación de dividir el 6 entre el denominador tres que da como resultado dos y al multiplicarlo por el uno (que es el numerador) el 1/3 se trasforma en 2/6

Al quedar los dos quebrados en sextos: 4/6 + 1/3 = 4/6 + 2/6 = 6/6 = 1

SESIÓN 8

APRENDIZAJE ESPERADO. Suma de quebrados de diferente denominador: conceptual y cálculo

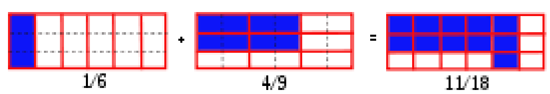
DESARROLLO: se les planteará una práctica de cálculo de suma de quebrados con diferente denominador.

EVALUACIÓN: SE les solicitará algunas respuestas a preguntas concretas de este tema.

3/9 + 2 / 6

Se les pide que encuentren el m.c.m de los denominadores 6, y 9

Los niños respondieron positivamente a este tipo de operación y se les pidió que observaran el dibujo en la pizarra que era el siguiente:



Se les dio para interpretar la anterior figura y con ello la suma de las fracciones.

Que observen qué pasa con cada fracción ahora y lo comenten.

Por último se les presentó el algoritmo de la suma de fracciones con diferente denominador.

1/6 + 4/9 = (3x1 + 2x4) / 18

Y se les explicó que la suma de las fracciones es otra fracción equivalente que tiene como denominador el m.c.m, (18) y como numerador la suma del producto de la división del m.c.m entre el denominador de la primera fracción (6) multiplicada por su numerador (1), más el resultado de la división del m.c.d. entre el denominador de la segunda fracción (9) que de igual se multiplica por su numerador.

Para reforzar este aprendizaje se le pidió encontrar la suma 3/4 + 2/8

Se le recordó que el primer paso es encontrar el m.c.m.

Transformar cada una de las fracciones en fracción equivalente que tengan como denominador el m.c.m.

Y ya después sumar las fracciones, la mayoría lo realizó correctamente y donde encontré que tenía problemas le pedía a otro niño que lo ayudara.

Se les dijo que esto también se puede realizar con la resta de fracciones y se les dio la práctica siguiente:

5/8 - 2/ 16

Se les encargó para practicar las siguientes sumas de fracciones:

3/5 + 4/6

Y por último se le explicó cómo realizar esta operación de una forma más práctica y común.

1/6 + 4/9 = 3(1) + 2(4)/18

Se les da para practicar esta operación con los ejercicios siguiente:

4/3 + 1

CONCLUSIONES

Como se mencionó en el planteamiento del problema la suma y resta de fracciones en los niveles de la educación primaria representa un reto tanto al maestro para su enseñanza como para el alumno en su aprendizaje. El reto parte de la dificultad de comprender conceptos y procedimientos involucrados en estas operaciones mencionadas, como es el concepto de fracción y en su procedimiento consecuente de fracción equivalente, y la forma de encontrar un mínimo común múltiplo de las facciones involucradas.

Una de las dificultades básicas de este proceso se da cuando el alumno se enfrenta a la suma o resta de fracciones heterogéneas, esto es cuando las fracciones tienen diferente denominador. En este caso, el alumno tiene que encontrar, el mínimo común múltiplo, aunque pudiera ser un múltiplo de la fracción entendible como una igualdad, resulta una cuestión que representa una dificultad para el alumno. Detectada esta dificultad dentro el diagnóstico realizado, se procedió a facilitar estrategias didácticas para el cálculo del m.c.m. por métodos sencillos, lo que ayudó y facilitó la suma y resta de fracciones para el alumno al entenderse que lo que se hacía era convertirlas en partes semejantes o de igual valor en su porción representativa. Las estrategias se sustentan bajo la pedagogía de la enseñanza de las matemáticas a través de resolución de problemas. En mi opinión puedo decir que se logró en un buen nivel el aprendizaje del tema de suma y resta de fracciones, a través las estrategias utilizadas. La propuesta fue planteada desde el enfoque constructivista en donde el maestro es una guía para los alumnos de sus aprendizajes y no un expositor o transmisor de conocimientos a los alumnos.

Quizá un tema pendiente sería enfatizar más el concepto de esta suma y resta, porque hay que reconocer que es importante y no solo saber utilizar la parte operativa de la operación. Es decir encontrar una argumentación de los cambios de las fracciones en porciones iguales a partir de las fracciones expresadas en otras porciones diferentes y entender esos cambios en la representación numérica de las fracciones.

La realización de esta propuesta representó para mí un aprendizaje significativo para mi formación como docente al poder reflexionar sobre todos los pormenores necesarios para realizar estrategias fundamentadas pedagógicamente, así como la elaboración escrita de la misma.

Otra de las conclusiones importantes para mí, es el de poder contribuir al aprendizaje de los niños en este tema, en donde a partir de elementos matemáticos abstractos de alguna manera dispersos, como son: concepto de fracción, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, número primo, y otros, se conjugan estos elementos y los alumnos **construyen** un nuevo concepto que es el de la suma y resta de fracciones con diferente denominador. Así, la importancia de que los niños construyan sus conocimientos matemáticos, con la guía del maestro, fortalece sus deseos de seguir aprendiendo matemáticas que de algún modo son vistas desde realidades no tan identificables para los niños.

El tema no lo doy por concluido porque sé que aún hay elementos teóricos y pedagógicos que aún se pueden mejorar tanto para beneficio de mis alumnos como parami docencia.

BIBLIOGRAFÍA

AUSUBEL, D.; Novak, j. &Hanesian, h. (1991) Psicología Educativa. México, Editorial Trillas.

CEDILLO, Ávalo, Tenoch, Cruz Oliva, Valentín. Cambray Nuunez, Rodrigo. (2006) Aritmética. Mínimo común múltiplo. Proyecto: Tecnología y Educación a Distancia en América Latina y el Caribe. UPN. ILCE. BID

CHAMORRO, María del Carmen et al. (2003). Didáctica de las matemáticas. Madrid, Pearson Educación.

KILPATRICK, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research onteaching mathematical problem solving. In E.A. Silver, Teaching and Learning mathematical problemasolving: multiple research perspectives, pp1-16 Hillsdale, NJ: Erlbaum.

LABARRERE Sarduy, Alberto (1987) “Condiciones psicopedagógicos de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos con texto”. Antología Matemáticas educación Indígena, Plan, México, UPN. .

LINARES S, Sánchez Victoria (2000) Las Fracciones diferentes interpretaciones Editorial Síntesis Madrid, España.

NOVAK, Joseph (1982) Teoría y práctica de la educación. Madrid. Edit. Alianza

SÁNCHEZ, J. (2004). Bases Constructivistas para la integración de TICs. *RevistaEnfoques Educacionales*. 6 (1).

SEP. (2011) Programa de Estudios para Primaria 2011. Guía para el maestro de Educación Primaria. Cuarto grado. México.

SILVIA, Vilanova; María, Rocerau; Guillermo, Valdez; María, Oliver; Susana, Vecino; Perla, Medina; Mercedes, Astiz; Estella, Alvarez. (1995). El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina

INTERNET:

BROUSSEAU, Guy. (2011) La théorie des situations didactiques en mathématiques, [En línea] vol. 5, no. 1. Disponible en: http://educationdidactique.revues.org/1005#quotation

CAMPISTROUS, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba. [En línea] *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Disponible en: http://www.clame.org.mx/relime/199903b.pdf

DE GUZMÁN, M (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. {En línea] *Revista Iberoamericana de Educación*, 43. Disponible en: http://rieoei.org/rie43a02.pdf

JUAREZ Pacheco, Manuel (2004) Reseña de Una revisión de las comunidades de práctica y sus recursos informáticos en internet. [En línea] Revista Mexicana de Investigación Educativa, vol. 9, núm. 20, enero-marzo. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/140/14002015.pdf

LUCIANO, Margarita (1999) Aprendizaje del Numero Natural. [En línea] Editora Buho, Santo Domingo. Disponible en: http://www.ilustrados.com/tema/7219/desarrollo-pensam

SILVA Laya, Marisol. (2009) Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de 6to. grado de primaria. [En línea]

Disponible en: http://www.cimeac.com/images/2a_parte_reporte_final_inide.pdf

TRIGLIA, ADRIAN. (2011) Las 4 etapas del desarrollo cognitivo de Jean Piaget, [En línea] Disponible en: https://psicologiaymente.net/desarrollo/etapas-desarrollo-cognitivo-jean-piaget#!adrid

WILSON, Jones y Bhojwani (1997), Aprendizaje cooperativo y estrategias de problemas de soluciones de problemas matemáticos. [En línea] Disponible en: https://books.google.com.mx/books?id=hSz3vSd8RbYC&pg=PA155&lpg=PA155&dq=jones,Wilson+y+Bhojwani&source=bl&ots=t7ijze1Wpn&sig=i6IBrRJA9UqDve