UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Resolución de problemas en geometría en la educación secundaria en México, 1993–2016

Tesis que para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta

Beatriz Adriana Zuñiga Cruz

Director de tesis:

Dr. Rodrigo Cambray Núñez

Ciudad de México, México

Enero de 2017

AGRADECIMIENTOS

Son demasiadas las personas a las que me encantaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo, compañía en las diferentes etapas de mi vida, entre ellas, los grandes momentos de diversión que me han hecho pasar a su lado. Algunas personas especiales están aquí conmigo (mis padres y hermanos) y otras más se encuentran en mi corazón. Sin importar donde se encuentren o si no tuviera la fortuna de volver a ver, quiero darles las gracias por formar parte de mi vida y por el apoyo brindado durante varios años, así mismo, por las bendiciones y palabras de aliento que me impulsaban a seguir adelante.

Quiero agradecer profundamente a todos los lectores de esta tesis y al Dr. Rodrigo Cambray Núñez por haber dedicado su tiempo en la revisión de este documento. También por sus recomendaciones durante el desarrollo de esta tesis. Especialmente quiero agradecer por compartir conmigo su experiencia y conocimiento.

RESUMEN

Esta tesis se centró en el enfoque de resolución de problemas en geometría planteado en los programas de estudio de matemáticas de 2011 de la educación secundaria en México. Desde 1993 se ha propuesto trabajar bajo este enfoque en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria en México.

Se hizo una revisión y un análisis de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, así como de materiales de apoyo de la Secretaría de Educación Pública (SEP) para identificar la relación de éstos con el enfoque de resolución de problemas en geometría.

Se presentan resultados de los análisis de los contenidos de geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, relacionando con éstos temas de geometría tratados en los materiales de apoyo de la SEP que están disponibles para los docentes y que se analizaron en la investigación de esta tesis.

Con base en la descripción de lo que es un "problema" y de lo que es un "ejercicio de aplicación"; en la definición de lo que es un "problema de geometría", y en una clasificación de problemas de geometría de acuerdo con características específicas, se realizó una selección de problemas y de ejercicios de aplicación de geometría propuestos en los materiales de apoyo de la SEP. Se resolvieron algunos de los problemas para identificar los conocimientos geométricos que el alumno debe poner en acción cuando él los resuelva.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El problema de investigación

Este trabajo de investigación se centró en el enfoque de resolución de problemas en geometría planteado en los programas de estudio de matemáticas de 2011 de la educación secundaria en México. Durante la revisión y el análisis de los documentos oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP), se identificó inicialmente que los contenidos de geometría de la educación básica han sido escasos. En la educación secundaria se da mayor énfasis a las áreas de aritmética y álgebra, destinando a ellas la mayor parte del tiempo. Ahora bien, los contenidos que implican la resolución y el planteamiento de problemas de geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2011 son todavía insuficientes: la enseñanza de la geometría en la educación secundaria se ha enfocado al uso de fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes, así como medidas de ángulos y la aplicación de algunos teoremas (por ejemplo, el teorema de Pitágoras y el teoremas de Tales).

El planteamiento central en estos programas se basa en la resolución de problemas como una forma de aprendizaje de las matemáticas, mediante la cual los alumnos deben utilizar diversas estrategias y conocimientos previos, así como analizar y compartir ideas, argumentando y validando sus resultados.

Así, con el enfoque que se sugiere en los programas de estudio de 2011 se esperaría que hubiera cambios en la forma de enseñar las matemáticas y, de esta manera, se fortalecerá en el aprendizaje de los alumnos de educación secundaria. En este sentido, el reto para el profesor consiste precisamente en diseñar problemas que favorezcan en los alumnos la comprensión de los contenidos a través de la resolución y el planteamiento de problemas, lograr vencer las dificultades en su aprendizaje de las matemáticas, además de contribuir en el desarrollo de habilidades para la exploración, la visualización y la construcción, así como para la justificación de resultados.

El aprendizaje de la geometría, mediante el enfoque de resolución de problemas, es sustancial para el desarrollo de las competencias matemáticas propuestas en los planes y programas de estudio de 2011. Ello permitiría al alumno razonar sobre un contenido o problema matemático y no simplemente aceptar determinadas reglas sólo porque intuitivamente las creemos o porque el profesor las diga. Por tanto, se espera que el alumno argumente y valide sus procedimientos y resultados.

Propósitos

Los propósitos de investigación para esta tesis fueron los siguientes:

- Comparar los contenidos de geometría de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 de la educación secundaria en México, así como en los materiales de apoyo de la SEP.
- Analizar qué es un problema de geometría en la educación secundaria en México bajo el enfoque de resolución de problemas que se plantea en los programas de estudio de matemáticas de 2011.
- Identificar la correspondencia de los contenidos de geometría de los materiales de apoyo de la SEP con el programa de estudios de matemáticas de 2011.

- Analizar tipos de problemas de geometría propuestos en los materiales de apoyo de la SEP e identificar su relación con el enfoque de resolución de problemas que se plantea en los programas de estudio de matemáticas de 2011.

Preguntas de investigación

Para el logro de los propósitos, se plantearon las siguientes preguntas que sirvieron de guía en el desarrollo de esta investigación.

- ¿Cuál es el enfoque de resolución de problemas de geometría que se plantea en los programas de estudio de matemáticas de 2011 para la educación secundaria?
- ¿Cómo se organizan los contenidos de geometría en los documentos oficiales de la SEP bajo el enfoque de resolución de problemas planteado en los mismos?
- ¿Qué tipos de problemas y ejercicios de geometría se plantean en los materiales de apoyo de la SEP?

Descripción de los capítulos

Esta tesis se presenta organizada en cinco capítulos. El primero es esta “Introducción”; el segundo “El enfoque de la resolución de problemas en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011”; el tercero “La geometría en la educación secundaria en México”; el cuarto, “Análisis de problemas de geometría y ejercicios de aplicación de los materiales de apoyo de la SEP”, y el quinto, “Conclusiones generales”.

El capítulo I contiene una descripción del problema de esta investigación, y los propósitos y las preguntas que sirvieron de guía para el desarrollo de la misma, así como un resumen de cada parte en que está dividida la tesis.

En el capítulo II se presentan resultados de la revisión de documentos oficiales para la educación secundaria en México y otras publicaciones relacionadas con la resolución de problemas en matemáticas. De manera general, se analizaron los programas de estudios de matemáticas de 2006 y de 2011, y los materiales de apoyo de la SEP, para identificar cuál es el enfoque didáctico que se sugiere en estos documentos: el *Libro para el Maestro* (Alarcón *et al.* 2001), el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) y el material *Geometría dinámica* del proyecto *Enseñanza de las matemáticas con tecnología*, Emat (Zubieta *et al.* 2000); también se revisó el libro *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008) publicado por el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE). En este mismo capítulo se incluyen resultados de la revisión de la terminología sobre la resolución de problemas y la solución de problemas; a partir de ello se determinó qué es un problema de matemáticas y qué es resolución de problemas. También se incluye una descripción sobre la diferencia entre "problema" y "ejercicio de aplicación" en el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo se agrega una sección en la cual se define qué es un problema de geometría y se muestra una clasificación de problemas de geometría de acuerdo con características específicas. Finalmente, se describen algunas habilidades geométricas que se refuerzan mediante la resolución de problemas.

El capítulo III se dividió en seis apartados específicos para la resolución de problemas de geometría. En el primer apartado, "El enfoque de resolución de problemas en geometría en documentos oficiales y materiales de apoyo de la SEP", se incluye un análisis del programa de matemáticas de 2011 y de los materiales de apoyo de la SEP. Este análisis permitió identificar apartados en los que se hace referencia a la resolución de problemas, y así determinar si los documentos están basados en un enfoque de resolución de problemas.

En el segundo apartado, “La geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011”, se presentan los resultados del análisis de los contenidos de geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 y un cuadro comparativo en el que se describen los contenidos de geometría en los programas. También se incluyen resultados de la revisión de algunos reactivos de geometría del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (*Programme for International Student Assessment*, PISA por sus siglas en inglés) de 2012 para identificar qué contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011 se trabajaron en esa prueba y qué problemas de geometría se proponen para estos contenidos. También se incluye la revisión de dos hojas de trabajo del material *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (Mochón, Rojano y Ursini 2000) del proyecto Emat, para identificar cómo se trabajan estos únicos temas de geometría en este material. En este mismo apartado se incluye un apéndice en el que se expone una discusión sobre los términos *círculo* y *circunferencia*, así como *trazo y construcción*. Los otros cuatro apartados son: “Temas de geometría en el *Libro para el maestro*”; el cuarto, “Temas de geometría en el *Fichero de actividades didácticas*”; el quinto, “Temas de geometría en el material del proyecto Emat (*Geometría dinámica*)”, y el sexto, *“La enseñanza de la Geometría”* (García y López 2008). En los apartados tercero, cuarto y quinto del capítulo III se presenta un análisis de los temas de geometría en cada uno de los materiales de apoyo de la SEP revisados para esta tesis y su correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011. Finalmente, en el sexto apartado se presenta un análisis de los contenidos que hacen referencia a la resolución de problemas de geometría del libro *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008).

El capítulo IV se dividió en tres apartados específicos para la resolución de problemas de geometría: el primer apartado es “Problemas de geometría y ejercicios de aplicación en el *Libro para el maestro"*; el segundo, "Fichas de trabajo del *Fichero de actividades didácticas*", y el tercero, "Hojas de trabajo del proyecto Emat (*Geometría dinámica*)". En estos apartados se muestra la clasificación de los problemas de geometría de acuerdo con algunas características descritas en el capítulo II de esta tesis. También se incluye el análisis de algunos problemas de geometría y ejercicios de aplicación de los materiales de apoyo de la SEP.

En el capítulo V se presentan las conclusiones del análisis de los documentos oficiales de la SEP y de los materiales de apoyo. Finalmente se incluye un epílogo sobre una "propuesta curricular" dada a conocer por la SEP en junio de 2016 (SEP 2016), y la lista de referencias utilizadas en esta tesis.

En este capítulo se describió el problema de investigación de esta tesis, los propósitos y las preguntas que guiaron esta investigación, así como una breve descripción de los capítulos que forman esta tesis. El capítulo II contiene los resultados y el análisis de documentos oficiales para la educación secundaria en México, de materiales de apoyo de la SEP y de otras publicaciones relacionadas con el enfoque de resolución de problemas que se plantea en los programas de estudio de matemáticas de 2011. Además, se incluye la revisión del libro *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008) publicado por el INEE. También se encuentra una sección en la que se definen los términos "resolución de problemas", "solución de problemas", "problema matemático" y "problema de geometría". Este mismo capítulo II contiene un apartado en el que se describe la diferencia entre un "problema de matemáticas" y "un ejercicio de aplicación". Asimismo, se incluye una clasificación de problemas de geometría y la descripción de algunas habilidades geométricas que se fortalecen mediante la resolución de este tipo de problemas.

CAPÍTULO II

EL ENFOQUE DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS DE 2006 Y DE 2011

En este capítulo se presentan resultados de la revisión de documentos oficiales para la educación secundaria en México y de otras publicaciones relacionadas con la resolución de problemas. Se incluyen resultados del análisis de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, así como de materiales de apoyo publicados por la SEP y del documento *La enseñanza de la geometría* publicado por el INEE. También se muestra la terminología sobre la resolución de problemas y la solución de problemas, así como la diferencia entre un "problema de matemáticas" y un "ejercicio de aplicación". Asimismo se define qué es un "problema de geometría" y se presenta una clasificación de problemas de geometría. Finalmente, se incluye una sección en la que se describen algunas habilidades geométricas que se refuerzan mediante la resolución de problemas.

Programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 para la educación secundaria en México

En los programas de matemáticas de 2006 para la educación secundaria (SEP 2006a, p. 11) se planteaba como eje central la resolución de problemas, pero no se destacaba qué tipo de problemas, simplemente se enunciaba que debían ser de interés para los alumnos y que éstos debían emplear los conocimiento adquiridos, como el uso de algoritmos, fórmulas, definiciones que les permitieran resolver un problema. Además, se contemplaba una organización generalizada en contenidos y su distribución respondía a tres propósitos fundamentales del estudio de las matemáticas en educación básica (SEP 2006b, p. 34):

- Lograr que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos.
- Justificar la validez de los procedimientos y resultados.
- Utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos.

El enfoque de enseñanza y aprendizaje de 2006 para la educación secundaria se centraba en el desarrollo de competencias:

> Una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado.(SEP 2006b, p. 11)

Se precisaron cinco competencias que contribuirían al logro de los propósitos deseables en el perfil de egreso de los alumnos de educación secundaria, desarrollándose en cada asignatura:

1.- Competencias para el aprendizaje permanente.

2.- Competencias para el manejo de la información.

3.- Competencias para el manejo de situaciones.

4.- Competencias para la convivencia.

5.- Competencias para la vida en sociedad.

Asimismo, en los programas de estudio (SEP 2006a, pp. 18 - 19) se establecieron cuatro competencias matemáticas que tienen características claras y pueden distinguirse entre sí:

- Planteamiento y resolución de problemas.
- Argumentación.
- Comunicación.
- Manejo de técnicas.

La primera competencia implicaba la identificación, el planteamiento y la resolución de problemas, y la utilización de distintos procedimientos para obtener un mismo resultado. La segunda competencia se refería a la formulación de argumentos que sustenten determinado procedimiento o solución. La tercera competencia comprendía la posibilidad de expresar y representar información matemática implicada en determinada situación o en algún fenómeno, y la interpretación de la misma. La cuarta competencia se refería al uso eficiente de procedimientos y formas de representar cálculos, incluyendo el apoyo de tecnologías.

Ahora bien, los programas de estudio de matemáticas de 2011 (SEP 2011a, p. 13) para la educación secundaria responden a tres propósitos fundamentales:

- Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
- Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.
- Muestren disposición para el estudio de la matemática y para el trabajo autónomo y colaborativo.

Por otra parte, en relación al enfoque didáctico (SEP 2011a, pp.19-23) se sugiere:

> […] utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver un problema y a formular argumentos que validen los resultados […]. Con el enfoque didáctico que se sugiere se logra que los alumnos construyan conocimientos y habilidades con sentido y significado […]. Estos aprendizajes no se dan de manera espontánea, independientemente de cómo se estudia y se aprende la matemática. (SEP 2011a, pp.19-23)

Dada la relevancia de los aprendizajes matemáticos de los alumnos, en el plan de estudios de 2011 para la educación básica se proponen doce principios pedagógicos para la implementación de los programas, la transformación de la práctica docente, el logro de los aprendizajes y la mejora de la calidad educativa.

Cabe considerar que la definición de competencia en el plan de estudios de 2006 (SEP 2006b, p. 11) para la educación básica con respecto a la expuesta en el plan de estudios de 2011 (SEP 2011b, p. 33) no ha sufrido modificación alguna: en el quinto principio, de los doce principios aludidos, se plantea “[p]oner énfasis en el desarrollo de competencias, el logro de los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados”, se define competencia como “la capacidad de responder a diferentes situaciones, e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)” (SEP 2011b, p. 33). En esencia, las definiciones de “competencia” se centran en la capacidad que tiene el alumno para aplicar sus habilidades y conocimientos al enfrentarse a diversas situaciones. Pero además, implica una valoración de las consecuencias de sus acciones para dar respuesta a la situación.

Así, de acuerdo con el plan de estudios de 2011 para la educación básica:

> las competencias, los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados proveerán a los estudiantes de las herramientas necesarias para la aplicación eficiente de todas las formas de conocimientos adquiridos, con la intención de que respondan a las demandas actuales y en diferentes contextos. (SEP 2011b, p. 33)

Las competencias matemáticas que deben desarrollarse son (SEP 2011a, p. 23):

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

La primera competencia implica la identificación, el planteamiento y la resolución de diferentes problemas o situaciones, y la utilización de varios procedimientos. La segunda competencia comprende la posibilidad de expresar, representar e interpretar información matemática implicada en una situación o en un fenómeno. La tercera competencia se refiere a la explicación y la justificación de determinado procedimiento o solución, centrado en el razonamiento deductivo y la demostración formal. La cuarta competencia se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representar cálculos con apoyo de la calculadora.

Estas competencias no están nada alejadas de las que se habían propuesto en los programas de estudio de 2006 (SEP 2006a), en las que se enunciaba el planteamiento y la resolución de problemas como propósito y competencia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria; posteriormente se retomaron en los planes y programas de estudio de 2011, orientados al desarrollo de competencias y al aprendizaje de los estudiantes.

Así, una de las prioridades en la asignatura de matemáticas de acuerdo con los planes y programas de estudio para la educación básica de 2006 y de 2011, ha sido el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas a través del planteamiento y la resolución de problemas.

En este apartado se trató el enfoque de resolución de problemas en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 para la educación secundaria en México. De manera general, en el siguiente apartado se muestran los resultados del análisis de los materiales de apoyo que la SEP elabora para los profesores de matemáticas de educación secundaria en México. Este análisis permitió identificar el enfoque didáctico que se sugiere en ellos.

La resolución de problemas en materiales de apoyo de la SEP

Desde la década de 1940 George Polya orientó su trabajo a la resolución de problemas como medio para que los estudiantes crearan sus conocimientos matemáticos:

> El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi sin ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al alumno. El maestro debe ayudarle, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo. (Polya 1965, p. 25)

En cuanto a materiales de apoyo que la SEP ha producido para los profesores de matemáticas de educación secundaria, como son el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001, pp. 12-31), el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000, pp. 6-7) y el material *Geometría dinámica* del proyecto Emat (Zubieta *et al.* 2000), se plantea en ellos el enfoque de resolución de problemas, pero con propósitos diferentes.

Libro para el maestro. En el *Libro para el maestro* se hace mención de la resolución y el planteamiento de problemas, pero no es el alumno quien debe plantear problemas; el alumno resolverá problemas de matemáticas, pero será el profesor quien los plantee:

> Se pretende que el profesor seleccione y plantee problemas de acuerdo con los propósitos y deje que los estudiantes los resuelvan sin indicarles caminos preestablecidos; ante un problema, los estudiantes deberán aprender a expresar sus ideas, a explicar a sus compañeros cómo lograron resolverlo, a discutir defendiendo

> sus estrategias de resolución, así como a reconocer sus errores. (Alarcón *et al*. 2001, p. 17)

Es de esperarse que en el *Libro para el maestro* se diga que el profesor sea quien se encargue de plantear los problemas y el alumno los resuelva, por tratarse de un material de apoyo. Sin embargo, se esperaría que también se enfocara al planteamiento de problemas por parte de los alumnos y no sólo del profesor.

Fichero de actividades didácticas. Ahora bien, en el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000, p. 6) se propone la enseñanza de las matemáticas a través de actividades para la consolidación y el reforzamiento de los contenidos abordados. En este sentido, el trabajo del profesor implica:

> analizar situaciones relacionadas con los contenidos, organizar secuencias didácticas que favorezcan la evolución de los procedimientos de los alumnos, plantear, socializar diferentes estrategias de solución y evaluar diferentes aspectos del proceso de estudio. (Espinoza, García y García 2000, p. 6)

Así, las actividades propuestas favorecen la práctica docente. En el enfoque didáctico del *Fichero* se contempla el planteamiento y la resolución de problemas por parte de los alumnos; sin embargo, se aclara que el profesor debe actuar en un principio como observador para analizar las estrategias que emplean los alumnos para resolver el problema que se les plantee, e identificar los conocimientos previos que permitan al alumno proponer o dar solución al problema, así como los errores cometidos (Espinoza, García y García

2000, p. 7). Posteriormente, el profesor hará sugerencias y planteará preguntas para guiar a los alumnos hacia una comprensión más profunda del problema; además, los invitará a exponer sus conjeturas y sus estrategias de resolución.

Con las actividades del *Fichero* (Espinoza, García y García 2000) se invita al profesor a guiar al alumno con preguntas que le permitan resolver determinado problema. Es claro que el enfoque didáctico y las actividades propuestas en el fichero se plantean en el ámbito de la resolución de problemas.

Geometría dinámica. En los proyectos de innovación y desarrollo educativo *Enseñanza de la Física con Tecnología* (Efit*)* y *Enseñanza de la Matemática con Tecnología* (Emat) se diseñaron hojas de trabajo para la enseñanza de la física y de las matemáticas con tecnología en la educación secundaria. Los materiales diseñados para el proyecto Emat son: *Geometría dinámica (*Zubieta *et al*. 2000*), Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (Mochón, Rojano y Ursini 2000), *De los números al álgebra en secundaria mediante el uso de la calculadora* (Cedillo, Rojano y Ursini 2002), *Modelación. Matemáticas del cambio* (Mochón, Rojano y Ursini 2000) y el uso del *software* Sim Calc MathWorlds para la simulación.

Estos materiales incluyen:

> el uso de *software de geometría dinámica* para temas de geometría euclidiana; la *Hoja electrónica de cálculo* para la enseñanza del álgebra, la resolución de problemas aritmético-algebraicos, temas de probabilidad y de tratamiento de la información; *calculadora gráfica* para la introducción a la sintaxis algebraica y a la resolución de problemas; *software* para simulación y representación de fenómenos

de movimiento, para la enseñanza de la matemática del cambio; y *software* de modelación. (Rojano 2006, p. 17)

En *Geometría dinámica* se hace referencia a la resolución de problemas como un beneficio que brinda el proyecto Emat, donde se "[…] elimina la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas […]" (Zubieta *et al.* 2000, p. 11); en este sentido se asegura que al hacer uso de este material el alumno podrá resolver problemas, descubrir y construir conceptos, y técnicas de resolución.

Es conveniente puntualizar que a pesar de que en los documentos oficiales de la SEP y de apoyo a los profesores se hace hincapié en la resolución y el planteamiento de problemas, en realidad el trabajo sobre planteamiento de problemas es escaso. En los programas de estudio de 2006 se consideraba un solo punto de "conocimientos y habilidades" en que el alumno debía resolver y plantear problemas (en ese orden), y treinta puntos en los que sólo resolvía problemas; en cambio, en el programa de 2011 se enuncian dos "contenidos" para el planteamiento y la resolución de problemas (en ese orden), y treinta y dos en los que el alumno únicamente resuelve problemas. Es decir, en los programas de estudio de 2006 se contemplaba en el bloque 4 de primer grado: "Plantear y resolver problemas que impliquen la utilización de números con signo" (SEP 2006a, p. 51); en los programas de estudio de 2011, específicamente en el primer y el cuarto bloques de primer grado, se contemplan dos contenidos relacionados con la resolución y el planteamiento de problemas: el primero se refiere a la resolución y el planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones (SEP 2011a, p. 31), y el segundo contenido se refiere al planteamiento y la resolución de problemas que impliquen la utilización de números enteros, fraccionarios o decimales positivos y negativos (SEP 2011a, p. 34).

Ahora bien, en los programas de estudio de matemáticas de 2006 explícitamente se citaban estos materiales de apoyo, por ejemplo, en el bloque 1 de primer grado se recomendaba utilizar la hoja de trabajo 17 de *Geometría dinámica* como una actividad complementaria para trabajar el tema de simetría axial (SEP 2006a, p. 30). También se sugería utilizar la *Hoja electrónica de cálculo* para trabajar temas de álgebra, probabilidad y estadística. Por ejemplo, en el bloque 3 de segundo grado se propone la hoja de cálculo "Analizando gráficas de rectas", para analizar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante (SEP 2006a, p. 90). En cuanto al *Libro para el maestro* y el *Fichero de actividades didácticas*, éstos se recomendaban en la bibliografía del programa de estudios de matemáticas de 2006.

Por otra parte, también conviene precisar que a pesar de que en los programas de estudio de matemáticas de 2011 ya no se citan estos materiales de apoyo, los profesores de educación secundaria seguimos haciendo uso de ellos, pues no existen otros materiales y lo poco que se recomienda son publicaciones en inglés o bien se siguieren páginas electrónicas de otros países e incluso tesis de maestría del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Debe aclararse que aunque los materiales de apoyo de la SEP ya no se publican, éstos aún se pueden consultar en las ligas electrónicas que se dan en la lista de referencias al final de esta tesis.

Así, bajo este contexto se decidió analizar los materiales antes citados y relacionarlos con el programa de estudios de matemáticas de 2011.

En la siguiente sección se presentan los resultados de la revisión de la terminología sobre "resolución de problemas", "solución de problemas" y "problema matemático" en la educación secundaria. Además, se incluye una descripción sobre la diferencia entre un "problema de matemáticas" y un "ejercicio de aplicación".

¿Qué es un problema?

Hasta este punto se ha mencionado la resolución y el planteamiento de problemas, así como su relación con las actividades de la vida diaria del ser humano, y particularmente en relación con el desarrollo de habilidades matemáticas de los alumnos de educación básica. Siguiendo el enfoque didáctico actual para este nivel educativo, que gira en torno a la resolución de problemas es conveniente comprender qué es un problema matemático en la educación secundaria y, por lo que se propone en esta tesis, qué es un problema geométrico.

En el *Diccionario de la lengua española* se define problema como "[Un] conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin" (RAE 2014).

Por otra parte, en el *Libro para el maestro* se dice que un problema es: "Una situación que presenta un reto, un desafío, ante el cual el alumno que intenta responderlo no dispone de un recurso expedito y, por tanto, debe buscar, ensayar, establecer relaciones, analizar sus efectos, elaborar conjeturas, probarlas y validarlas" (Alarcón *et al.* 2001, p. 16).

Parra define un problema matemático como "[…] una situación que debe ser modelada para encontrar la respuesta a una pregunta que se deriva de la misma situación […]" (1996, p. 14).

Santos afirma que Schoenfeld usa el término de problema para referirse a "[…] una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla. Además, la dificultad debe ser un impasse intelectual y no solamente en un nivel operacional o de cálculo […]” (2007, pp. 48-49). En este sentido, no todos los problemas que se les planteen a los alumnos son realmente problemas, esto va más allá de ejercicios rutinarios en los que aplican un algoritmo o una fórmula y que pueden ser resueltos en un corto tiempo. En los problemas no será suficiente con aplicar un algoritmo o una fórmula, sino que el alumno debe reflexionar, investigar, pensar y definir una estrategia; de manera que necesitará tiempo para resolver el problema, y no habrá una respuesta automática. Ésta es una de las características que permiten distinguir entre un “problema” y un “ejercicio de aplicación” (véase el cuadro 2.1).

Cuadro 2.1. Diferencias entre un problema matemático y un ejercicio de aplicación (Juidías y Rodríguez 2007, p. 261)

Problema matemático	Ejercicio de aplicación
- El individuo se ve expuesto ante una dificultad para la que no tiene una solución inmediata. - El individuo se implica en su resolución. - Requiere utilizar de modo estratégico los procedimientos previamente conocidos. Las técnicas automatizadas pueden ser necesarias, pero no son suficientes para llegar a la solución. - Exige al individuo una actividad cognitiva de alto nivel. - La determinación de la información relevante es una pieza clave para la resolución del problema.	- Puede resolverse mediante la aplicación directa de un procedimiento previamente adquirido. - La aplicación rutinaria del algoritmo no exige ningún interés especial en el individuo que lo resuelve. - Requiere la mera aplicación de técnicas automatizadas, suficientes para llegar a la solución. - La actividad cognitiva que pone en acción al individuo es de bajo nivel. - El individuo no precisa discernir la información relevante de la irrelevante porque toda la información que aparece en el enunciado es necesaria para la solución.

De lo anterior, Juidías y Rodríguez afirman que los ejercicios están vinculados a las prácticas tradicionalistas que consistían en abordar la teoría, posteriormente se mostraban algunos ejemplos de los contenidos abordados en clase y que servirían para que el alumno pudiera resolver los ejercicios y, finalmente, los problemas. Este tipo de prácticas educativas desvalorizan las matemáticas y a su vez desinteresan a los alumnos.

Por otra parte, en la resolución de problemas, el profesor "[…] debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo que hacer […]" (Polya 1965, p. 35), es decir, se puede mejorar la estrategia que permitió resolver el problema e inclusive resolver otro problema utilizando un nuevo método.

En términos generales, un problema es una tarea o situación en la cual aparecen los siguientes componentes (Santos 2007, p. 51):

- La existencia de un interés para encontrar la solución.
- La no existencia de una solución inmediata.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución.
- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esa tarea.

Una vez analizada la palabra "problema", conviene diferenciar los términos "solución" y "resolución", además de precisar en qué consiste la resolución de problemas, ya que se contempla como una competencia y propósito para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para la educación básica en el plan y programas de estudio vigentes (SEP 2011a, p. 13 - 23).

El término "solución" se define en el *Diccionario de la legua española* como la "acción y efecto de resolver una duda o dificultad". Ahora bien, el término "solución de un problema" implica resolver o dar por terminado el problema; por ejemplo, en una ecuación de primer o segundo grado, la solución son los valores de la incógnita que hacen que la igualdad planteada se cumpla.

"Resolución" es la "acción y efecto de resolver o resolverse"; resolver significa "hallar la solución de un problema" (RAE, 2014). Entonces, bajo esta perspectiva "la resolución de problemas" está vinculada a procesos que permiten determinar una solución.

Dicho de otro modo, la solución de problemas es el resultado y la resolución es el proceso que permite dar solución al problema.

Polya (1965, p. 27) afirma que "[…] resolver problemas es cuestión de habilidad práctica como […] el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica […], y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos […]". Sin embargo, en el ámbito educativo "[…] la resolución de problemas tiene que ver con […] que los alumnos utilicen sus conocimientos previos, con la posibilidad de que éstos evolucionen poco a poco ante la necesidad de resolver problemas cada vez más complejos […]" (SEP 2006a, p. 19).

En la siguiente sección se define qué es un "problema de geometría", con base en ello se presenta una clasificación de problemas de geometría los cuales tienen características claras y pueden distinguirse entre sí. En esta misma sección se incluye una descripción de algunas habilidades geométricas que se fortalecen al resolver problemas de geometría.

¿Qué es un problema de geometría?

Un problema de geometría es "[…] una proposición en la que se pide la construcción de una figura de manera que satisfaga determinadas condiciones, o bien el cálculo de una magnitud desconocida. En ambos casos, cuando se ha obtenido lo que se pedía, se dice que se ha *resuelto* el problema […]" (Thompson 1996, p. 30).

En este sentido, en el libro *Geometría* de Thompson (1996) se definen algunas palabras tales como teorema, axioma, problema, construcción y línea. Sin embargo, para evitar confusiones entre problema y teorema, el autor hace la siguiente aclaración:

> Un problema se distingue de un teorema en que es algo que se propone para resolver, en vez de ser algún enunciado que hay que demostrar. Lo que a veces se desea es la construcción de alguna figura geométrica que satisfaga determinadas condiciones, como por ejemplo: *Construir un triángulo, dados los tres lados.* Otras veces se tratará de la deducción de una fórmula, o del cálculo de algún número como ocurre en álgebra y en aritmética. (Thompson 1996, p. 32)

De lo anterior, se distinguen 2 tipos de problemas de geometría: problemas de construcción y problemas de cálculo.

Los problemas de construcción "[…] son aquellos que sintetizan mejor los conocimientos geométricos, la necesidad de justificar y, al mismo tiempo, requieren el uso de la vista y la mano […]" (Boule 2005, p. 140). Así, al construir figuras geométricas se hace uso de postulados y una vez que se ha resuelto el problema, "[…] se indica que ése es el resultado pedido, y se demuestra que es correcto igual que si se estuviera demostrando un teorema […]" (Thompson 1996, p. 32). En los problemas de cálculo se exige "[…] la deducción de una fórmula, o el cálculo de un resultado numérico, la deducción o el cálculo constituye la demostración, no siendo precisa otra prueba formal separada […]" (Thompson 1996, p. 32).

Para esta investigación, los problemas de geometría que se plantean en los materiales de apoyo se clasificaron de acuerdo con sus características similares; los que implican obtener un resultado numérico a partir del cálculo de áreas, perímetros o volúmenes se consideraron como problemas de cálculo, y aquellos que implican hacer demostraciones a partir de "[…] equivalencias de áreas o volúmenes, superposiciones […] y descomposiciones de figuras […]" (Alsina, Burgués y Fortuny 1997, p. 51) se consideraron como problemas de deducción de fórmulas.

En cuanto a los problemas de construcción se incluyeron aquellos en los que se hace uso de líneas rectas y círculos o arcos de círculos, para la elaboración de alguna figura a partir de determinadas condiciones.

De este modo, se espera que los problemas de geometría favorezcan el desarrollo de habilidades de visualización, comunicación, dibujo y construcción, lógicas o de razonamiento y aplicación o transferencia (Bressan, Bogisic y Crego 2000).

A continuación se describen siete habilidades relacionados con la visualización (Bressan, Bogisic y Crego 2000, pp. 20-25):

- Coordinación visomotora: Es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. Por ejemplo, al unir puntos en un orden dado o anticipando un dibujo o al completar un trazo sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por el mismo lugar.
- Percepción figura-fondo: Es la habilidad de distinguir figuras determinadas (el foco) en un dibujo (el fondo). Por ejemplo, al descubrir figuras dentro de una figura compuesta o entre figuras sobrepuestas, al identificar intersecciones entre figuras, al completar figuras o al identificar semejanzas y diferencias entre figuras.
- Constancia perceptual o constancia de forma, tamaño y posición: Es la habilidad para reconocer que un objeto posee determinadas propiedades como el tamaño, la textura, la forma y la posición de la figura. Por ejemplo, identificar figuras en distintas posiciones.

- Percepción de la posición en el espacio: Es la habilidad que permite comprender que los objetos permanecen invariables con cambios de posición como traslaciones, rotaciones o simetrías. Por ejemplo, al invertir, desplazar o rotar figuras e identificar figuras congruentes en distintas posiciones.
- Percepción de relaciones espaciales entre objetos: Es la habilidad que permite reconocer dos o más figuras u objetos simultáneamente. Por ejemplo, al encontrar el camino más corto entre dos puntos, copiar una figura dada en papel punteado o al identificar qué cuerpo geométrico corresponde a su representación plana.
- Discriminación visual: Es la habilidad para distinguir similitudes y diferencias entre objetos o figuras. Por ejemplo, distinguir errores en la construcción de una figura determinada, reconocer un cuerpo geométrico mediante las vistas del mismo.
- Memoria visual: Es la habilidad para recordar con exactitud un objeto que no pertenece a la vista y relacionar sus características con otros objetos.

Las habilidades de comunicación son aquellas que permiten al alumno leer, escuchar, localizar e interpretar información geométrica presentada en diversas formas, así como denominar, definir y comunicar información geométrica en forma clara y ordenada, utilizando el lenguaje natural y el simbólico apropiados.

En cuanto a las habilidades de dibujo y construcción, los alumnos deben desarrollar habilidades relacionadas con la representación de figuras y cuerpos, la reproducción de modelos dados y la construcción de figuras o cuerpos geométricos.

Las habilidades lógicas o de razonamiento son necesarias para desarrollar un argumento lógico. Las formas de pensamiento consideradas en el razonamiento lógico son la inducción y la deducción. Algunos ejemplos de habilidades lógicas o de razonamiento que deben desarrollarse en geometría son: abstraer conceptos y relaciones, formular contraejemplos, justificar o realizar demostraciones.

Las habilidades de aplicación y de transferencia son aquellas que nos permiten utilizar la geometría para explicar fenómenos, hechos o conceptos y resolver problemas.

De manera general, en este capítulo II se trató el enfoque de resolución de problemas en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 para la educación secundaria en México, así como en los materiales de apoyo de la SEP. Asimismo, se definieron los términos “resolución de problemas”, “solución de problemas”, “problema de matemáticas” y “problema de geometría”. Además, se incluyó una descripción de la diferencia entre “problema de matemáticas” y “ejercicio de aplicación”, y una clasificación de problemas de geometría y algunas habilidades geométricas que se fortalecen mediante la resolución de estos problemas. En el capítulo III se presentan los resultados del análisis de los contenidos de geometría de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, así como de los temas de geometría en cada uno de los materiales de apoyo de la SEP y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011, y los contenidos de geometría del libro *La enseñanza de la geometría* publicado por el INEE. Además, contiene resultados del análisis de algunos reactivos de geometría de PISA 2012, y del análisis de dos hojas de trabajo del material *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* del proyecto Emat. Finalmente, en este mismo capítulo III se incluye un apéndice en el que se expone una discusión sobre los términos *círculo* y *circunferencia*, así como *trazo* y *construcción*.

CAPÍTULO III

LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN MÉXICO

En este capítulo se aborda el enfoque de resolución de problemas en geometría en la educación secundaria en México. Se dividió en seis apartados específicos: el primer apartado es “El enfoque de resolución de problemas en geometría en documentos oficiales y materiales de apoyo de la SEP”; el segundo, “La geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011”; el tercero, “Temas de geometría en el *Libro para el maestro*”; el cuarto, “Temas de geometría en el *Fichero de actividades didácticas*”; el quinto, “Temas de geometría en el material del proyecto Emat (*Geometría dinámica*)”, y el sexto, *“La enseñanza de la Geometría”* (INEE).

El enfoque de resolución de problemas en geometría en documentos oficiales y materiales de apoyo de la SEP

En los programas de estudio de matemáticas de 2011 para la educación básica en México se contemplan tres propósitos de estudio en general y ocho específicamente para la educación secundaria. De los propósitos para la educación secundaria, dos implican la resolución de problemas en geometría (SEP 2011a, p. 14):

- Utilicen el teorema de Pitágoras, los criterios de congruencia y semejanza, las razones trigonometrías y el teorema de Tales, al resolver problemas.

- Justifiquen y usen las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos, y expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad.

De manera general (no sólo en geometría), en los propósitos se espera que los alumnos planteen problemas de matemáticas y los resuelvan empleando diversas técnicas.

El enfoque del programa de estudios de matemáticas de 2011 no ha cambiado con respecto al programa de 2006. Lo que se plantea en el programa vigente para el estudio de las matemáticas es "[…] utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen resultados […]" (SEP 2011a, p. 19).

Ahora bien, en el programa de estudios de matemáticas de 2011 se plantean cuatro competencias matemáticas; una de éstas implica resolver problemas de manera autónoma, donde "[…] los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes problemas […] Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficientes […]" (SEP 2011a, p. 23).

Así, los aprendizajes matemáticos que se esperan de los alumnos al concluir los cuatro periodos escolares son (SEP 2011a, p. 17):

- [Resolución de] problemas que [impliquen] construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa, y usar las relaciones entre sus puntos y rectas notables.
- [Utilización de] la regla y el compás para realizar diversos trazos, como alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etcétera.

- [Resolución de] problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.
- [Cálculo de] cualquiera de las variantes que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.
- [Determinación de] la medida de diversos elementos del círculo, como circunferencia, superficie, ángulo inscrito y central, arcos de la circunferencia, sectores y coronas circulares.
- [Aplicación del] teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.

Con este enfoque de resolución de problemas, se logrará que los alumnos desarrollen habilidades al resolver diferentes tipos de problemas; así mismo, se favorece el desarrollo de competencias matemáticas, el logro de los Estándares Curriculares y los aprendizajes esperados, ya que "[…] proveerán a los estudiantes de las herramientas necesarias para la aplicación eficiente de todas las formas de conocimientos adquiridos, con la intención de que respondan a las demandas actuales y en diferentes contextos […]" (SEP 2011b, p. 33).

Por otra parte, en el enfoque didáctico del *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001, p. 17) se pretende que el profesor seleccione y plantee problemas de acuerdo con los propósitos y deje que los estudiantes los resuelvan sin indicarles caminos preestablecidos. Los propósitos que se persiguen para el estudio de la geometría son (Alarcón *et al.* 2001, p. 193-194):

- [Proporcionar a los alumnos] una serie de conocimientos que les serán útiles para resolver problemas de la vida cotidiana y acceder al estudio de otras materias y disciplinas.
- [Exploren e investiguen] propiedades de las figuras y objetos; que tengan numerosas oportunidades de utilizarlas para resolver problemas; y que se planteen situaciones muy variadas de sus aplicaciones directas.

Por ello, es importante que la resolución de problemas de geometría desarrolle en el estudiante la capacidad de formular conjeturas, comunicar información y validar resultados.

Debe señalarse que el tratamiento de los problemas de geometría en el *Libro para el maestro* "[…] no intenta suplir la experiencia pedagógica del profesor, ni tampoco limitar su imaginación y curiosidad por explorar las situaciones que considere favorables para el aprendizaje de la geometría […]" (Alarcón *et al.* 2001, p. 195).

En cuanto al diseño del *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) se retomaron algunos problemas del *Libro para el maestro* y algunas sugerencias de materiales consultados. (La primera edición del *Libro para el maestro* fue publicada en el año de 1994 y la segunda edición revisada en el año de 2001.)

El enfoque didáctico que se sugiere en el *Fichero* consiste en

> analizar situaciones relacionadas con los contenidos, organizar secuencias que favorezcan la evolución de los procedimientos de los alumnos, plantear y resolver problemas, socializar diferentes estrategias de solución y evaluar diferentes aspectos del proceso de estudio […]. (Espinoza, García y García 2000, p. 6)

Para ello, con las fichas de trabajo se pretende dar ejemplos claros sobre las posibles formas de abordar los temas del programa de estudios de matemáticas. Es por ello que las fichas permiten adaptarse a las necesidades, formas de trabajo y condiciones en las que se labora, así como a las estrategias de aprendizaje de los alumnos, de tal manera que cada uno de los problemas propuestos "[…] ha sido seleccionado para que los alumnos lo resuelvan con sus propios medios […] Es necesario que mientras los alumnos intentan resolver los problemas, el profesor observe atentamente el trabajo que desarrollan, y que analice las conjeturas, las estrategias, los conocimientos que ponen en juego y el tipo de errores que cometen […]" (Espinoza, García y García 2000, p.7).

Por otra parte, en el material *Geometría dinámica* del proyecto Emat se sugiere el enfoque de la resolución de problemas de geometría con el apoyo de la tecnología, de tal manera que uno de los beneficios que brinda el material es "[…] eliminar la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas […]" (Zubieta *et al.* 2000, p. 11).

Las hojas de trabajo que se diseñaron para *Geometría dinámica* permiten que los alumnos reflexionen y encuentren por sí mismos una solución al problema planteado; por lo tanto, el profesor *no* resuelve los problemas, sino que observa el trabajo de los alumnos, interviene cuando sea necesario y los guía para resolver el problema.

Ahora bien, en el material de apoyo *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008) que propone el INEE a los profesores de la educación primaria y la educación secundaria, se sugiere la enseñanza de la geometría a través de la resolución de problemas que impliquen el uso de relaciones y conceptos geométricos.

En este sentido, se propone que el profesor utilice material concreto para "[…] realizar actividades que favorezcan el desarrollo de habilidades geométricas y la adquisición de conocimiento geométrico […]" (García y López 2008, p. 81). El profesor se encargará del diseño de actividades basadas en el enfoque de resolución de problemas y el alumno será quien las resuelva.

De manera sintetizada en el cuadro 3.1 se describen los aspectos anteriores. Así, se tiene que el enfoque didáctico para el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria está basado en la resolución de problemas propuesto desde el Plan y programas de estudio de 1993 (SEP 1993) hasta el plan de estudios vigente.

Ahora bien, los materiales de apoyo que la SEP pone a disposición de los profesores, como el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) y el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000), responden al enfoque de resolución de problemas propuesto en el Plan y programa de estudios de educación secundaria de 2011.

En el siguiente apartado se presentan los resultados del análisis de los contenidos de geometría de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, así como el análisis de dos reactivos de geometría de la prueba PISA de 2012. También se incluye la revisión de dos hojas de trabajo de geometría del material *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (Mochón, Rojano y Ursini 2000) del proyecto Emat, para identificar cómo se trabajan temas de geometría en este material.

Cuadro 3.1. El enfoque de resolución de problemas en los programas de estudio de 2011 y en materiales de apoyo de la SEP

<table>
<tr><td colspan="8">Enfoque de resolución de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Programa de estudios de matemáticas de 2011</td><td colspan="2">Libro para el maestro</td><td colspan="2">Fichero de actividades didácticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enfoque didáctico</td><td colspan="2">Resolución de problemas</td><td colspan="2">Resolución de problemas</td><td colspan="2">Resolución de problemas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Propósitos</td><td>Para la educación básica</td><td colspan="2">- Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, y elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
- Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.</td><td rowspan="2">Propósitos para el estudio de la geometría</td><td rowspan="2">- [Proporcionar a los alumnos] una serie de conocimientos que les serán útiles para resolver problemas de la vida cotidiana y acceder al estudio de otras materias y disciplinas.
- [Exploren e investiguen] propiedades de las figuras y objetos; que tengan numerosas oportunidades de utilizarlas para resolver problemas; y que se planteen situaciones muy variadas de sus aplicaciones directas.
- [El profesor] desarrolle en el estudiante la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas.</td><td rowspan="2">Propósitos</td><td rowspan="2">- Dar ejemplos claros sobre las formas de abordar los temas del programa de matemáticas.
- Que los alumnos resuelvan problemas por sus propios medios.
- Favorecer la evolución de los procedimientos de los alumnos, plantear problemas, socializar diferentes estrategias de solución y evaluar diferentes aspectos del proceso de estudio.</td></tr>
<tr><td>Para la educación secundaria</td><td>Resolución de problemas</td><td>- Utilicen el teorema de Pitágoras, los criterios de congruencia y semejanza, las razones trigonometrías y el teorema de Tales.
- Justifiquen y usen las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos, y expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Competencias matemáticas</td><td colspan="2">Resolución de problemas:
Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes problemas utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficientes.</td></tr>
</table>

[Continúa]

Cuadro 3.1 [Concluye]

<table>
<tr><td colspan="4">Enfoque de resolución de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Programa de estudios de matemáticas de 2011</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Estándares curriculares
Resolución de problema</td><td>- Que impliquen la construcción de círculos y polígonos regulares.
- Utiliza la regla y el compás para realizar diversos trazos.
- Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.
- Determina la medida de diversos elementos del círculo.
- Que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.
- Que impliquen aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometría dinámica (Zubieta et al. 2000)</td><td colspan="2">La enseñanza de la geometría (García y López 2008)</td></tr>
<tr><td>Enfoque didáctico</td><td>Resolución de problemas de geometría</td><td>Enfoque didáctico</td><td>Resolución de problemas de geometría</td></tr>
<tr><td>Beneficios</td><td>-Provee un espacio problemático común al maestro y al estudiante para construir significados.
-Elimina la carga de los algoritmos rutinarios para concentrarse en la conceptualización y la resolución de problemas.</td><td>Propósito</td><td>Bajo el enfoque de resolución de problemas, el alumno: visualice, explore y analice, clasifique, elabore conjeturas y trate de validarlas, todo ello, con el apoyo de la tecnología.</td></tr>
<tr><td>Objetivo principal</td><td>El empleo de la tecnología en el aula no se reduce a practicar algoritmos, sino que ayuda al alumno a descubrir y construir conceptos y técnicas mediante el ejercicio de la reflexión. Así, la matemática pasa a ser mucho más que una simple mecanización de procedimientos.</td><td>Ejemplos de problemas de geometría</td><td>- Armar un rompecabezas
- Hacer el croquis del camino de la casa a la escuela
- Calcular el número de diagonales de un polígono cualquiera
- Calcular la altura de un poste (sin medirlo)
- Hallar el número de vértices de un poliedro a partir de su desarrollo plano
- Imaginar el resultado de girar un cuerpo geométrico
- Imaginar el cuerpo geométrico que se forma con cierto desarrollo plano.</td></tr>
</table>

La geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011

Los aprendizajes de matemáticas en los programas de estudio de 2011 de la educación secundaria se organizan en ejes, temas y contenidos. Los ejes son: *1)* Sentido numérico y pensamiento algebraico, *2)* Forma, espacio y medida, y *3)* Manejo de la información. De cada eje temático se desprenden varios temas y cada uno de éstos se desglosa en contenidos. Cada eje temático se subdivide en temas. Los temas del eje *2)* son Figuras y cuerpos, y Medida.

Es en el eje *2)* Forma, espacio y medida, donde se integran tres aspectos fundamentales para el estudio de la geometría y la medición (SEP 2011a, p. 25):

- La exploración de características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.
- La generación de condiciones para un trabajo con características deductivas.
- La justificación de las fórmulas que se utilizan para el cálculo geométrico.

En el cuadro 3.2 se describen los contenidos que se desarrollan de los tres aspectos anteriores.

Ahora bien, cada eje temático comprende Estándares Curriculares (SEP 2011a, p. 17). Para el eje temático *2)* se tienen los siguientes.

El alumno:

- Resuelve problemas que implican construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa, y usa las relaciones entre sus puntos y rectas notables.

- Utiliza la regla y el compás para realizar diversos trazos, como las alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etcétera.
- Resuelve problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza en diversos polígonos.
- Calcula cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetro, área y volumen.
- Determina la medida de diversos elementos del círculo, como circunferencia, superficie, ángulo inscrito y central, arcos de la circunferencia, sectores y coronas circulares.
- Aplica el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la resolución de problemas.

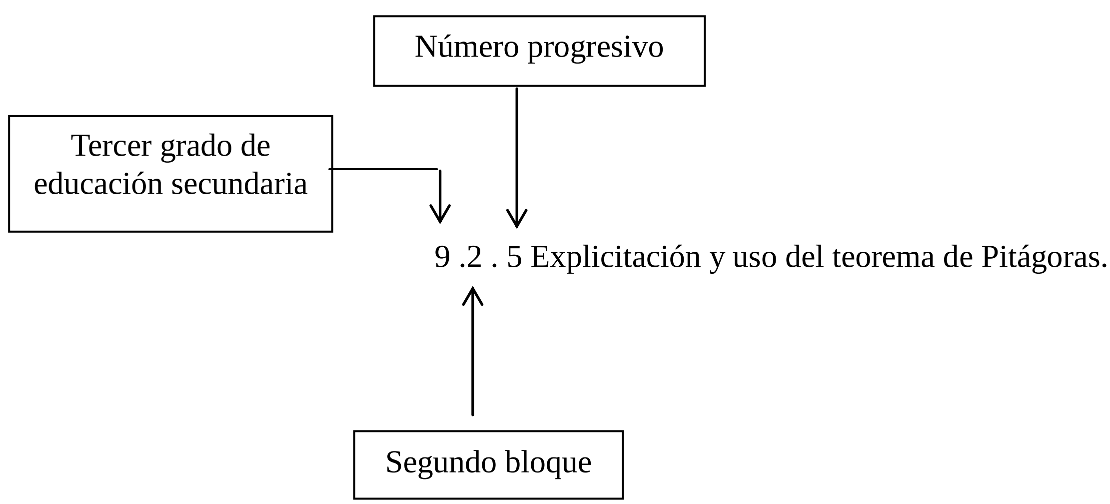


Figura 3.1. Características de la ubicación de los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011

En los cinco bloques que comprenden el programa de estudios de matemáticas de 2011, los contenidos se han organizado con la siguiente notación en esta tesis. En el contenido señalado como 7.3.5 (véase el cuadro 3.2), por ejemplo, el 7 corresponde a primer grado (8 corresponde a segundo grado y 9 a tercer grado); 3 se refiere al tercer bloque y 5 corresponde a la numeración progresiva de los contenidos. En el esquema de la figura 3.1 se muestra un ejemplo.

Cuadro 3.2. Temas de geometría para la educación secundaria en México según los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 (López 2016, pp. 68 - 78; modificado)

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Medida Subtema: Estimar, medir, calcular			Tema: Medida	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
1	3.4 Resolver problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de triángulos, romboides y trapecios. Realizar conversiones de medidas de superficie.	I	7.3.5 Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.	I
2	4.6 Resolver problemas que impliquen calcular el área y el perímetro del círculo.	I	7.5.1 Uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas.	I
3	5.3 Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas y establecer relaciones entre los elementos que se utilizan para calcular el área de cada una de estas figuras.	I	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.	II

[Continúa]

Cuadro 3.2 [Continuación]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Medida Subtema: Estimar, medir, calcular			Tema: Medida	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
4	1.4 Resolver problemas que impliquen reconocer, estimar y medir ángulos utilizando el grado como unidad de medida.	II		
5	2.5 Estimar y calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Calcular datos desconocidos, dados relacionados con las fórmulas del cálculo del volumen. Establecer relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides. Realizar conversiones de medidas de volumen y de capacidad y analizar la relación entre ellas.	II	8.2.5 Estimación y cálculo del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos o de cualquier término implicado en las fórmulas. Análisis de las relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides.	II
			8.3.5 Relación entre el decímetro cúbico y el litro. Deducción de otras equivalencias entre unidades de volumen y capacidad para líquidos y otros materiales. Equivalencia entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y algunas unidades socialmente conocidas, como barril, quilates, quintanas, etcétera.	II
6	1.5 Calcular la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	III	8.5.4 Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.	II
7	4.2 Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas.	III	9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	III
			9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	III

[Continúa]

Cuadro 3.2 [Continuación]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Medida Subtema: Estimar, medir, calcular			Tema: Medida	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
8	4.3 Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas.	III	9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	III
			9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	III
9	5.4 Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos con las fórmulas del cálculo de volumen.	III	9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	III
Tema: Medida Subtema: Justificación de fórmulas			Tema: Medida	
10	2.6 Justificar las fórmulas de perímetro y área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares.	I	7.2.6 Justificación de las fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares, con apoyo de la construcción y transformación de figuras.	I
11	4.5 Determinar el número Pi como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Justificar la fórmula para el cálculo de la longitud de la circunferencia y el área del círculo.	I	7.4.3 Justificación de la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo (gráfica y algebraicamente). Explicitación del número π (pi) como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.	I
12	2.4 Justificar las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.	II	8.2.4 Justificación de las fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.	II

[Continúa]

Cuadro 3.2 [Continuación]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Formas geométricas Subtema: Rectas y ángulos			Tema: Figuras y cuerpos	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
13	5.3 Construir las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos.	III	9.5.3 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	III
14	2.4 Utilizar la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo para resolver diversos problemas geométricos.	I	7.2.5 Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.	I
15	1.5 Determinar mediante construcciones las posiciones relativas de dos rectas en el plano y elaborar definiciones de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. Establecer relaciones entre los ángulos que se forman al cortarse dos rectas en el plano, reconocer ángulos opuestos por el vértice y adyacentes.	II		
16	1.6 Establecer las relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificar las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.	II	8.1.3 Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.	II
17	4.3 Explorar las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.	II	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.	I

[Continúa]

Cuadro 3.2 [Continuación]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Formas geométricas Subtema: Cuerpos geométricos			Tema: Figuras y cuerpos	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
18	1.3 Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente de una circunferencia.	III		
19	1.4 Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	III	8.4.3 Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo y análisis de sus relaciones.	II
20	2.3 Describir las características de cubos, prismas y pirámides. Construir desarrollos de planos de cubos, prismas y pirámides rectos. Anticipar diferentes vistas de un cuerpo geométrico.	II		
21	5.2 Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.	III	9.4.2 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	III
			9.5.2 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	III
Tema: Formas geométricas Subtema: Justificación de fórmulas			Tema: Figuras y cuerpos	
22	3.4 Establecer una fórmula que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.	II	8.3.3 Formulación de una regla que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.	II

[Continúa]

Cuadro 3.2 [Continuación]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Formas geométricas Subtema: Cuerpos geométricos			Tema: Figuras y cuerpos	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
Tema: Formas geométricas Subtema: Figuras planas			Tema: Figuras y cuerpos	
23	2.5 Construcción de polígonos regulares a partir de distintas informaciones.	I	7.3.4 Construcción de polígonos regulares a partir de diferentes informaciones (medida de un lado, del ángulo interno, ángulo central). Análisis de la relación entre los elementos de la circunferencia y el polígono inscrito en ella.	I
24	3.3 Construcción de triángulos y cuadriláteros. Analizar las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.	I	7.1.6 Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría.	I
			8.1.4 Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.	II
25	4.4 Construir círculos a partir de diferentes datos o que cumplan condiciones dadas.	I	7.4.2 Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas.	I
26	3.5 Conocer las características de los polígonos que permiten cubrir el plano y realizar recubrimientos en el plano.	II	8.3.4 Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permitan cubrir el plano.	II
27	4.2 Determinar criterios de congruencia de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	II	9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	III
28	1.2 Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros.	III	9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	III

[Continúa]

Cuadro 3.2 [Continuación]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Formas geométricas Subtema: Cuerpos geométricos			Tema: Figuras y cuerpos	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
Tema: Formas geométricas Subtema: Semejanza			Tema: Figuras y cuerpos	
29	2.3 Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados.	III	9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	III
30	2.4 Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.	III	Véase 4.2 de segundo grado y 1.2 de tercer grado de los programas 2006.	
31	3.3 Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos.	III	9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	III
Tema: Transformaciones Subtema: Movimientos en el plano				
32	1.5 Construcción de figuras geométricas respecto a un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.	I	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.	II

[Continúa]

Cuadro 3.2. [Concluye]

Programas de estudio de matemáticas 2006			Programas de estudio de matemáticas 2011	
Tema: Formas geométricas Subtema: Semejanza			Tema: Figuras y cuerpos	
No.	Conocimientos y habilidades	Grado	Contenidos	Grado
33	5.2 Determinar las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Construir y reconocer diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	II	9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	III
			9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	III
34	3.4 Determinar los resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que 1 o -1. Determinar las propiedades que permanezcan invariantes al aplicar una homotecia a una figura. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de las razones.	III	9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	III
35			9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor de un ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	III

En el cuadro 3.2 se muestra la correspondencia de los temas de geometría para la educación secundaria del programa de estudios de matemáticas de 2006 con el programa de estudios de matemáticas de 2011. Se identificó que en el programa de estudios de matemáticas de 2011 ya no se trabajan dos contenidos de geometría importantes para la construcción de un conocimiento matemático y para la resolución de problemas (SEP 2006a):

2.3 Describir las características de cubos, prismas y pirámides. Construir desarrollos de planos de cubos, prismas y pirámides rectos. Anticipar diferentes vistas de un cuerpo geométrico.

1.3 Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente de una circunferencia.

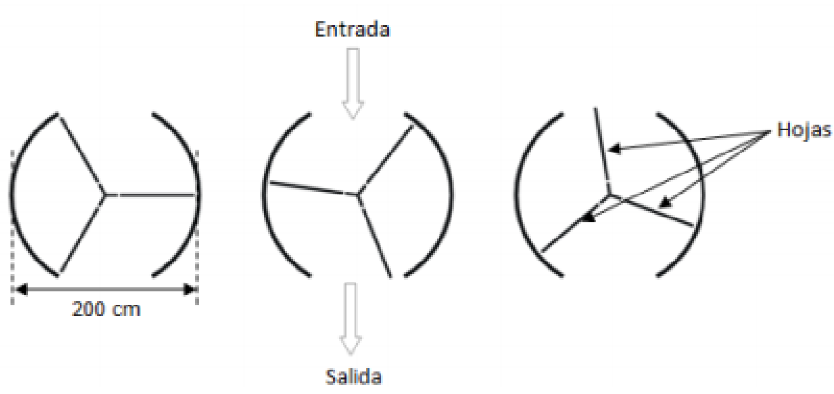
El contenido 2.3 corresponde al bloque 2 de segundo grado y el contenido 1.3 pertenece al bloque 2 de tercer grado del programa de estudios de matemáticas de 2006, los cuales ya no forman parte del programa de estudios de matemáticas de 2011.

Los contenidos 1.4 y 1.5 de segundo grado no se enuncian textualmente en el programa de estudios de matemáticas de 2011. Sin embargo, no quiere decir que no se trabajen en las escuelas de educación secundaria. El contenido 1.4 se trabaja cuando se determina la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central en un círculo. El alumno debe medir los ángulos, usando grados sexagesimales, e identificar que en un círculo el ángulo inscrito mide la mitad de un ángulo central cuando ambos abarcan el mismo arco de la circunferencia. Otros dos casos en que se utiliza el grado sexagesimal como unidad de medida son: *1)* para calcular la suma de los ángulos internos de cualquier polígono, y *2)* para analizar y explicitar las características de los polígonos que permiten cubrir un plano (véase el punto 26 del cuadro 2). Esta medida también se utiliza para calcular la medida de arcos de un círculo, el área de sectores circulares y de la corona. En cuanto al contenido 1.5, que se refiere a comprender cuándo dos rectas son perpendiculares, cómo se traza una recta perpendicular y cómo es la relación de los ángulos que se forman al intersecarse dos rectas, se podría abordar mediante otros contenidos como el trazo de la mediatriz de un segmento, la construcción de un círculo a partir de diferentes datos, el trazo de las alturas de un triángulo, y las relaciones entre los ángulos que forman dos líneas rectas paralelas y una tercera línea recta que las corta.

Una vez descrito lo anterior, se analizaron reactivos de geometría del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (*Programme for International Student Assessment*, PISA por sus siglas en inglés) de 2012 (PISA 2012) para identificar si los contenidos 2.3 y 1.3 se abordaron en dicha prueba.

PUERTA GIRATORIA

Una puerta giratoria consta de tres hojas que giran dentro de un espacio circular. El diámetro interior de dicho espacio es de 2 metros (200 centímetros). Las tres hojas de la puerta dividen el espacio en tres sectores iguales. El siguiente plano muestra las hojas de la puerta en tres posiciones diferentes vistas desde arriba.



Pregunta 1

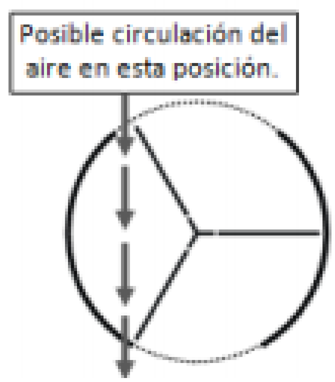
¿Cuánto mide (en grados) el ángulo formado por dos hojas de la puerta?

Medida del grado:……………………………………°

[*sic*; debiera decir "ángulo" en lugar de "grado"]

En la prueba se identificaron pocos problemas que abordaron los contenidos mencionados hasta este momento. Aunque en la prueba no se pidieron construcciones geométricas ni construcciones de desarrollos planos, como se menciona en 2.3 y 1.3, esto no quiere decir que el alumno no resuelva problemas y analice las construcciones. A continuación se muestran algunos casos. El problema de la "PUERTA GIRATORIA" se retomó de PISA 2012 (p. 33), aunque el documento fue publicado en mayo de 2013.

Pregunta 2



Las dos aberturas de la puerta (la sección punteada en el dibujo) son del mismo tamaño. Si estas aberturas son demasiado anchas las hojas giratorias no pueden proporcionar un espacio cerrado y el aire podría entonces circular libremente entre la entrada y la salida, originando pérdidas o ganancias de calor no deseadas. Esto se muestra en el dibujo de al lado.

¿Cuál es la longitud máxima del arco en centímetros (cm) que puede tener la abertura de la puerta para que el aire no circule nunca libremente entre la entrada y la salida?

Longitud máxima del arco:……………………….cm

Pregunta 3

La puerta da 4 vueltas completas en un minuto. Hay espacio para dos personas en cada uno de los tres sectores. ¿Cuál es el número máximo de personas que pueden entrar en el edificio por la puerta en 30 minutos?

A) 60

B) 180

C) 120

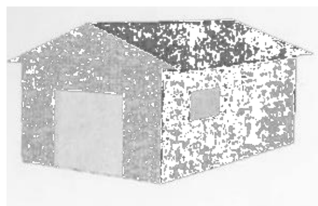
D) 720

Ahora bien, el problema consta de tres preguntas en las que el alumno utiliza el grado sexagesimal como unidad de media sin hacer uso de instrumentos de medición, es decir, tendrá que estimar y reconocer que $360°$ forman un círculo, el cual está dividido en tres sectores iguales ($360°/3 = 120°$).

En la prueba PISA 2012 se aborda un problema relacionado con el contenido 2.3. En este problema el alumno tiene que identificar las vistas de un cuerpo geométrico y determinar cuál de ellas corresponde a la pregunta que se le plantea. El problema está integrado por dos preguntas, la primera implica la interpretación de las representaciones en perspectivas y la segunda implica calcular la superficie del techo de una cochera.

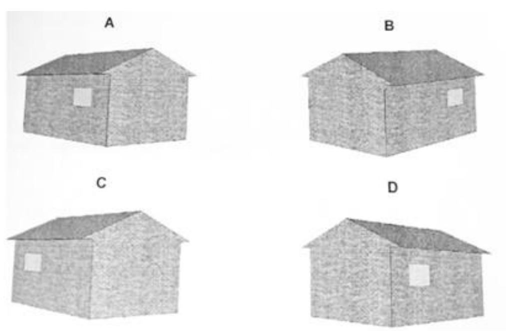
COCHERA

Un fabricante de cocheras tiene una gama “básica” que incluye modelos con sólo una ventana y una puerta. Jorge elige el siguiente modelo de la gama “básica”. La posición de la ventana y la puerta se muestran aquí.



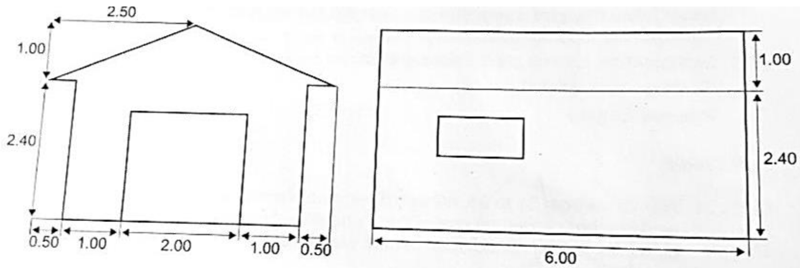
Pregunta 1

Las siguientes ilustraciones muestran diferentes modelos “básicos” vistos desde la parte posterior. Sólo una de estas ilustraciones coincide con el modelo anterior, elegido por Jorge. ¿Qué modelo eligió Jorge? Encierra en un círculo A, B, C o D.



Pregunta 2

A continuación se muestran las dimensiones de dos planos, en metros, de la cochera elegida por Jorge.



El techo está hecho de dos secciones rectangulares idénticas.

Calcula el área total del techo. Muestra tu trabajo.

Se identificó que algunos contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011 se han modificado con respecto al programa de estudios de matemáticas de 2006. En el cuadro 3.3 se muestra uno de los contenidos de geometría que ha sido modificado.

Cuadro 3.3. Diferencias de un contenido de geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011

Contenido de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006	Contenido de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011
1.4 Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco.	8.4.3 Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo y análisis de sus relaciones.

En el programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria de 2006, el contenido 1.4 pertenecía a tercer grado. Sin embargo, en el programa de estudios de matemáticas de 2011 este contenido se trabaja en segundo grado. No es éste el único caso en que contenidos del programa de matemáticas de 2006 han sido trasladados a otro grado escolar en el programa de estudios de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.4).

En lo concerniente a los contenidos 1.4 y 8.4.3, se identificó que en el 1.4 se hacía mención de un ángulo inscrito y un ángulo central *de una circunferencia* y en el 8.4.3 se hace referencia a los ángulos inscritos y centrales *en un círculo* (véase el apéndice 3.1 al final de este capítulo).

Cuadro 3.4. Contenidos de geometría que han sido trasladados a otros grados escolares de la educación secundaria

Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006	Grado escolar	Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011	Grado escolar
5.3	I	8.1.5	II
1.5	I	8.5.3	II
4.3	II	7.1.7	I
4.2	II	9.1.3	III
5.2	II	9.2.2	III
1.4	III	8.4.3	II
1.5	III	8.5.4	II

En cuanto a los ángulos inscritos en un círculo, en el contenido 2.5 y 7.3.4 para el primer grado de la educación secundaria en México, se hacía referencia a la construcción de polígonos regulares inscritos en un círculo. En 2.5 se abordaban las construcciones de polígonos regulares a partir de determinadas informaciones. Sin embargo, no se mencionaba a partir de qué informaciones, a diferencia del contenido 7.3.4 en el que se especifica que se deben construir polígonos regulares a partir de uno de sus lados, de un ángulo interno o de uno central. En este mismo contenido se analiza la relación entre los elementos de la circunferencia y del polígono inscrito en ella (véase el apéndice 3.1 al final de este capítulo).

Ahora bien, en el programa de estudios de matemáticas de 2006 (SEP 2006a, pp. 37- 38) se sugería construir polígonos regulares como el triángulo, el cuadrado, el hexágono y el octágono, asimismo, se proponía utilizar el compás, la regla y el transportador para construir polígonos regulares a partir de la medida de sus ángulos, es decir, si se desea construir un hexágono regular, se dividen los 360° sexagesimales de un círculo entre el número de lados del polígono regular, de esta manera, el círculo queda dividido en seis sectores iguales cada uno de 60° sexagesimales. Para construir el hexágono regular basta con utilizar el transportador y medir los seis sectores del círculo. También se sugería plantear problemas como el siguiente:

> Construyan un cuadrado inscrito en [un círculo] considerando su diámetro. ¿Cómo construyen un octágono a partir del cuadrado inscrito?

Por otra parte, en el programa de estudios de matemáticas de 2011 no se menciona qué polígonos regulares se deben construir. Sin embargo, se esperaría que las construcciones se realizaran con regla y compás, ya que se favorece el desarrollo de habilidades geométricas. También permite que el alumno haga uso de sus conocimientos geométricos para resolver problemas de construcción. A diferencia de la regla y el compás, el uso del transportador, la regla y las escuadras graduadas es la manera más fácil de llevar a cabo este tipo de construcciones; por ejemplo, para trazar una línea recta paralela a una recta dada, basta con usar las escuadras, o bien, si se desea construir un pentágono regular inscrito en un círculo, una manera sencilla de construirlo consiste en auxiliarse del transportador.

Ahora bien, en el contenido 2.6 para primer grado se justificaban las fórmulas de perímetros y de áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Sin embargo, el contenido 7.2.6 se limita sólo a justificar las fórmulas de perímetros y de áreas de polígonos regulares mediante la construcción y trasformación de las figuras.

En el material *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (Mochón, Rojano y Ursini 2000) del proyecto Emat, se proponen dos hojas de trabajo en las que se aborda el tema del perímetro y el área del rectángulo y de polígonos regulares. En este material se plantean 61 hojas de trabajo para las áreas de aritmética, álgebra, geometría y tratamiento de la información y probabilidad, de las cuales sólo dos corresponden a geometría. Este material también se recomienda en el programa de 2006 (SEP 2006a, pp.44, 46, 52, 53, 67, 72, 90, 95, 102, 120, 123 y 133).

En la hoja de trabajo que se refiere al perímetro y al área del rectángulo se plantea el siguiente problema (Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 75):

Imagina que te encargan el diseño de una cuadra para caballos y sólo te ponen dos condiciones: que ocupe un área rectangular de 500 m^2 y que el perímetro sea de exactamente 100 m. ¿Se podrá construir un rectángulo con estas características? ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

Para resolver este problema se pide al alumno que pruebe si con 20 m y con 100 m, se puede construir un rectángulo que cumpla con las condiciones. Una vez que el alumno ha comprobado que con estas dos longitudes no se puede construir el rectángulo, se le pide que utilice una hoja de cálculo para identificar las longitudes que se aproximan a las longitudes del rectángulo de área 500 m^2 y perímetro de 100 m (véase la figura 3.2).

Escoge otra longitud para uno de los lados del rectángulo y sigue el procedimiento anterior. ¿El perímetro es de 100 metros? ________________

Para que este procedimiento sea efectivo conviene automatizarlo, empleando para ello una hoja de cálculo como la siguiente.

	A	B	C
1	LONGITUD DE UN LADO (SUPUESTA)	SEGUNDO LADO PARA SATISFACER EL ÁREA	PERÍMETRO RESULTANTE
2	1	500	1002
3	2	250	504
4	3	166.66666666	339.33333333
5	4	125	258

Extiende los valores hasta que llegues al perímetro más cercano a 100 y copia aquí las dos respuestas más cercanas:

Figura 3.2. Cálculo del perímetro y del área de distintos rectángulos

(Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 75)

A partir de esta información, el alumno podrá identificar que la longitud de los lados del rectángulo debe estar entre 20 m y 30 m.

Una vez que el alumno ha trabajado con la variación de las longitudes de los lados del rectángulo, se le pide que identifique cuáles serían las longitudes de un rectángulo que tiene por área 1000 m^2 y perímetro de 100 m. También se le pregunta sobre cuál es el mínimo perímetro para un área de 1000 m^2.

Para finalizar con las actividades de esta hoja de trabajo se concluye diciendo que, para que el problema de las longitudes del rectángulo de área 1000 m^2 tenga solución, el área debe ser menor que o igual al perímetro al cuadrado entre 16, $A \leq \frac{p^2}{16} = \left(\frac{p}{4}\right)^2$ (Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 76).

Es probable que con estas actividades el alumno comprenda que para construir un rectángulo con área y perímetro determinados, el área debe ser menor que (o igual) a el cociente del perímetro entre cuatro al cuadrado, $\left(\frac{p}{4}\right)^2$. Sin embargo, en las conclusiones de esta hoja de trabajo no se aclara cómo se obtuvo $A \leq \frac{p^2}{16}$.

Por otra parte, en la hoja de trabajo en la que se aborda el tema del perímetro y el área de polígonos regulares, se muestra al alumno un dibujo en el que se señala el apotema, un ángulo inscrito y un ángulo central de un hexágono regular (véase la figura 3.3). También se les indica que tracen las apotemas del hexágono regular y midan la longitud de sus apotemas y sus lados, así mismo, midan con el transportador el ángulo central y uno de los ángulos internos del hexágono.

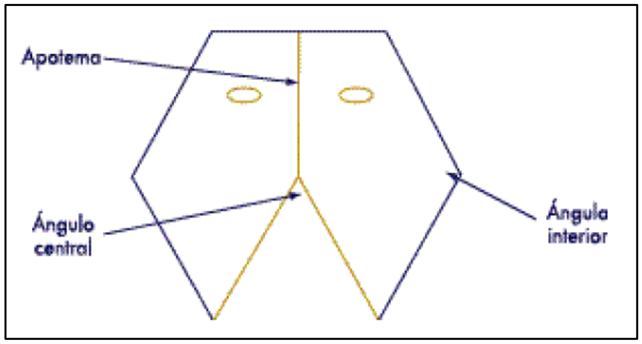


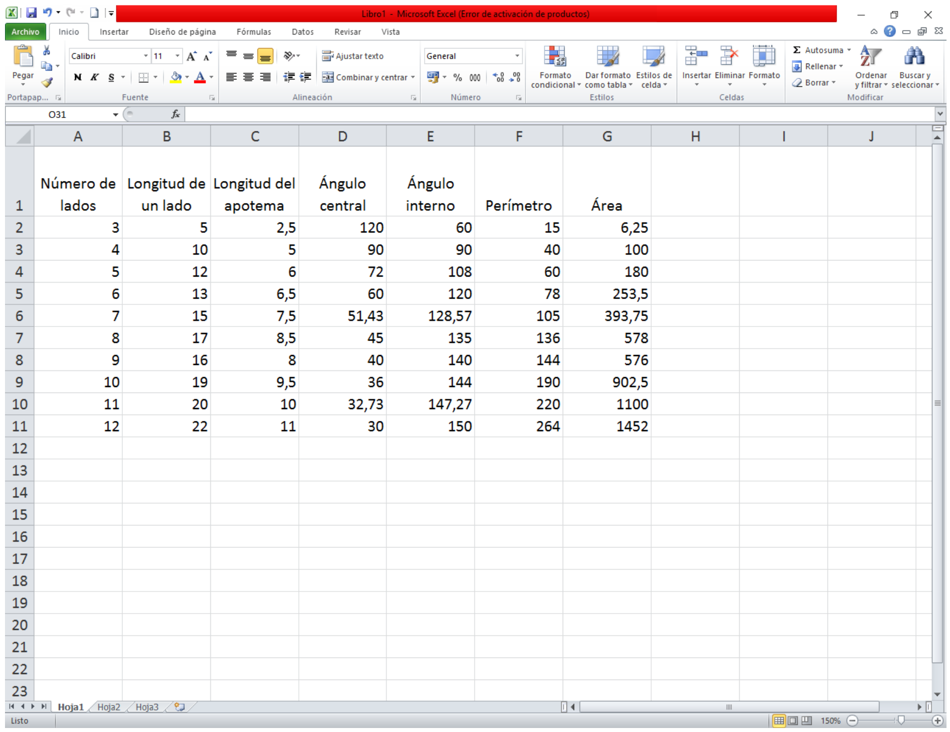
Figura 3.3. Ángulo central, ángulo interior y apotema de un hexágono regular

(Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 118)

En esta actividad se utiliza una hoja de cálculo organizada en tres secciones. Las primeras dos secciones se refieren al cálculo de perímetros y de áreas de un polígono regular y en la tercera sección se trabaja con el cálculo del perímetro y del área del círculo.

En la primera sección se solicita al alumno que observe en un cuadro los datos de las columnas “Número de lados” y “Longitud de un lado” y, a partir de la información que se le proporciona, el alumno discuta con sus compañeros por qué la longitud del apotema de un cuadrado mide la mitad de la longitud de sus lados. También se le pide al alumno que verifique que los valores proporcionados en la hoja de cálculo sean correctos.

En la figura 3.4 se muestra un ejemplo de los valores que se pueden proporcionar en la hoja de cálculo.



Número de lados	Longitud de un lado	Longitud del apotema	Ángulo central	Ángulo interno	Perímetro	Área
3	5	2,5	120	60	15	6,25
4	10	5	90	90	40	100
5	12	6	72	108	60	180
6	13	6,5	60	120	78	253,5
7	15	7,5	51,43	128,57	105	393,75
8	17	8,5	45	135	136	578
9	16	8	40	140	144	576
10	19	9,5	36	144	190	902,5
11	20	10	32,73	147,27	220	1100
12	22	11	30	150	264	1452

Figura 3.4. Medidas de elementos de distintos polígonos regulares

En esta misma sección se le pide a los alumnos que "[…] [observen] las fórmulas que se usaron en la hoja para calcular el perímetro y el área […]" (Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 119) del hexágono regular y que las describan con sus palabras.

Ahora bien, con esta hoja de cálculo se esperaría que el alumno, mediante la relación de elementos geométricos de una figura, identificara que la longitud del apotema mide la mitad de la longitud del lado del polígono regular correspondiente. También se esperaría que el alumno fuera quien encontrara las fórmulas para calcular el perímetro y el área de polígonos regulares (lo mismo que la fórmula para calcular la medida del ángulo central de cualquier polígono regular) y no quien las describiera (véase la figura 3.5).

Cambia el número de lados con los valores que indica la siguiente tabla y llénala de acuerdo con los valores proporcionados en tu hoja:

NÚMERO DE LADOS	ÁNGULO CENTRAL	ÁNGULO INTERIOR
3		
4		
5		
6		
8		
10		

Para el último valor de "Número de lados" (10), cambia en la hoja la longitud del lado y observa qué efecto tiene esto en el valor de estos dos ángulos.

¿Qué ocurrió? ____________________

¿Por qué? ____________________

____

¿Cuánto suman el ángulo central y el interior? ____________________

¿Es cierta la siguiente fórmula? ____________________

$$\frac{360}{\text{número de lados}} = \text{ángulo central}$$

Figura 3.5. Fórmula de la amplitud del ángulo central de un polígono regular (Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 119)

En la segunda sección se trabaja con polígonos regulares inscritos en el círculo. En esta sección se le solicita al alumno que a partir de un polígono regular inscrito en un círculo de 10 cm de radio, varíe el número de sus lados con los datos que se le indican y, llene un cuadro con los valores que se proporcionan en la hoja de cálculo (véase la figura 3.6).

NÚMERO DE LADOS	PERÍMETRO	ÁREA
5		
10		
100		
1000		
10000		
100000		

Figura 3.6. Cálculo del perímetro y del área de distintos polígonos regulares (Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 120)

En la tercera sección se trabaja con las fórmulas del perímetro de la circunferencia y el área del círculo. En esta hoja, el alumno debe identificar por qué el área de los polígonos de la sección anterior (véase la figura 3.6) se acerca al área de un círculo también de 10 cm de radio. También se pide a los alumnos que describan las fórmulas que se usaron para calcular el perímetro de la circunferencia y el área del círculo (véase la figura 3.7).

Pasa ahora a la tercera sección de la hoja: "Cálculo del Perímetro y Área de un Círculo". Con el mismo radio de 10, obtén de la hoja los siguientes dos valores:

Perímetro ▸ ____________________ Área ▸ ____________________

Compara estos valores con los de la tabla anterior y discute con tus compañeros y tu profesor por qué se acercan tanto los valores.

Observa las fórmulas que se usaron en la hoja para calcular el perímetro y el área (celdas F16 y G16). Descríbelas con tus propias palabras.

Perímetro = ▸ ____________________

____

Área = ▸ ____________________

____

Figura 3.7. Cálculo del perímetro y del área del círculo

(Mochón, Rojano y Ursini 2000, p. 120)

Ahora bien, una vez que se ha trabajado en el programa de estudios de matemáticas de 2011 con las construcciones de los polígonos regulares, las fórmulas para el cálculo de perímetros y de áreas de polígonos regulares, así como la fórmula que permite calcular la suma de los ángulos internos de cualquier polígono, se introducen los contenidos relacionados con el número pi (π), es decir, los contenidos 7.4.2, 7.4.3, 7.5.1 y 8.4.3.

Por otra parte, en el contenido 3.4 de primer grado del programa de estudios de matemáticas de 2006 se resolvían problemas que implicaban calcular el perímetro y el área de triángulos, romboides y trapecios, así como las conversiones de medidas de superficie. Sin embargo, el contenido 7.3.5 del programa de estudios de matemáticas de 2011 se limita a que se resuelvan problemas que implican calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.

En cuanto a los trazos y las construcciones geométricas, en el contenido 3.3 para primer grado se *construían* triángulos y cuadriláteros. También se analizaban las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones. Sin embargo, en 7.1.6 se hace mención del *trazo* de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría, y en 8.1.4 se señala la *construcción* de triángulos con base en datos y se analizan las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones (véase el apéndice 3.1 al final de este capítulo).

En relación a los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, en el programa de estudios de matemáticas de 2006 estos criterios se trabajaban separadamente: en el contenido 4.2 para segundo grado se determinaban los criterios de congruencia de triángulos a partir de construcciones, y en el bloque 1 para tercer grado se aplicaban los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de los cuadriláteros. En este sentido, en el programa de estudios de matemáticas de 2006 (SEP 2006a, p. 108) se sugería plantear problemas como el siguiente:

> Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera, ¿qué condiciones debe cumplir para obtener triángulos congruentes al trazar las diagonales?

Ahora bien, en el bloque 2 para segundo grado se trabajaba con la construcción de figuras semejantes. Además, se debían comparar las medidas de los ángulos y de los lados de las figuras construidas. En el bloque 2 de tercer grado se determinaban y aplicaban los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. También se empleaban en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles, como la altura de un árbol o de un edificio.

En cambio, en el programa de estudios de matemáticas de 2011, se trabajan al mismo tiempo los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos en tercer grado.

En 9.1.2 se pide construir figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y que se analicen sus propiedades. En 9.1.3 se explicitan los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones, y en el bloque III de tercer grado se aplican los criterios en la resolución de problemas. Una vez que se ha trabajado con los criterios de semejanza de triángulos, se introduce el teorema de Tales.

En el programa de estudios de matemáticas de 2006 se *determinaba* el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. También se *aplicaba* el teorema en la resolución de problemas geométricos. Sin embargo, en el programa de estudios de matemáticas de 2011 *se resuelven problemas* geométricos mediante el teorema de Tales.

En el cuadro 3.5 se muestra la distribución de los contenidos relacionados con los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011.

El contenido 9.3.4 se limita a la aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas. Mientras que en el contenido 3.4 de tercer grado del programa de estudios de matemáticas de 2006 se determinaba la figura homotética directa o inversa a otra figura, así como sus propiedades. También se comprobaba que la composición de homotecias con el mismo centro es igual a otra homotecia con el mismo centro cuya razón de homotecia es el producto de las razones.

Cuadro 3.5. Criterios de congruencia y de semejanza de triángulos en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011

<table>
<tr><th>Grado escolar</th><th colspan="2">Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006</th><th>Grado escolar</th><th colspan="2">Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011</th></tr>
<tr><td>II</td><td rowspan="2">Criterios de congruencia de triángulos</td><td>Determinar los criterios a partir de construcciones</td><td rowspan="5">III</td><td rowspan="4">Criterios de congruencia y de semejanza de triángulos</td><td rowspan="2">Construcción de figuras congruentes o semejantes y análisis de sus propiedades</td></tr>
<tr><td rowspan="4">III</td><td>Aplicar los criterios en la justificación de propiedades de los cuadriláteros</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Criterios de semejanza de triángulos</td><td>Construir figuras semejantes y comparar las medidas de los ángulos y de los lados</td><td>Explicitación de los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos a partir de construcciones</td></tr>
<tr><td>Determinar y aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles</td><td>Aplicación de los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos en la resolución de problemas</td></tr>
<tr><td>Teorema de Tales</td><td>Determinar el teorema de Tales mediante construcciones con segmentos. Aplicar el teorema de Tales en diversos problemas geométricos</td><td>Teorema de Tales</td><td>Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales</td></tr>
</table>

En el programa de estudios de matemáticas de 2011 se incluye el contenido 9.4.3, en el cual se analizan las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor de un ángulo que se forma con la abscisa [*sic*; la amplitud del ángulo que la recta forma con el eje positivo de las abscisas] y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente [*sic*;

no se indica cuál es el triángulo rectángulo al que se hace referencia]. Aunque el contenido de plano cartesiano está en otro eje temático, también se puede estudiar como un contenido de geometría.

Una vez que se ha trabajado con el contenido 9.4.3, se analizan las relaciones entre los ángulos y los cocientes de las longitudes de lados de un triángulo rectángulo.

Por otra parte, los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2006 han sido fragmentados en más contenidos (véase el cuadro 3.6) para conformar el programa de estudios de matemáticas de 2011.

Cuadro 3.6. Contenidos de geometría en el programa de estudios de 2006 que fueron fragmentados para la elaboración del de 2011

Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006	Grado escolar	Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011	Grado escolar
3.3	I	7.16	I
		8.14	II
2.5	II	8.2.5	II
		8.3.5	II
4.2	III	9.2.4	III
		9.2.5	III
4.3	III	9.4.4	III
		9.4.5	III

[Continúa]

Cuadro 3.6. [Concluye]

<table>
<tr><th>Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006</th><th>Grado escolar</th><th>Contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011</th><th>Grado escolar</th></tr>
<tr><td rowspan="2">5.2</td><td rowspan="2">II</td><td>9.2.2</td><td>III</td></tr>
<tr><td>9.2.3</td><td>III</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5.2</td><td rowspan="2">III</td><td>9.4.2</td><td>III</td></tr>
<tr><td>9.5.2</td><td>III</td></tr>
</table>

El contenido 3.3 se refería a la construcción de triángulos y cuadriláteros, así como al análisis de condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones. Este contenido se fragmentó en dos contenidos: el primero es el 7.1.6, que se refiere al trazo (*i.e.*, a la construcción) de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría y el segundo es el 8.1.4, el cual hace referencia a la construcción de triángulos con base en determinados datos; así mismo, se analizan las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.

El contenido 2.5, que se refería a la estimación y al cálculo del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos, así como al cálculo de medidas relacionadas con fórmulas del cálculo de volúmenes, además de establecer relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides, y realizar conversiones de medidas de volumen y de capacidad, así como analizar la relación entre ellas, se fragmentó en dos contenidos: el primer contenido incluye la estimación y el cálculo del volumen de cubos, prismas y pirámides rectos o [la estimación y el cálculo] de cualquier término [*i.e.*, elemento] implicado en las fórmulas, así como el análisis de las relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides; el segundo contenido se refiere a la relación entre el decímetro cúbico y el litro, la deducción de otras equivalencias entre unidades de volumen y capacidad para líquidos y otros materiales, así como la equivalencia entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y otras unidades de medida tales como barril, quilates, quintanas, etcétera.

En el contenido 4.2 se hacía mención de la aplicación del teorema de Pitágoras en la resolución de problemas. Éste se organizó en dos contenidos: en el primer contenido se analizan las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo, y en el segundo contenido se explicita y se hace uso del teorema de Pitágoras.

El contenido 4.3, "Reconocer y determinar las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes, como cocientes entre las medidas de los lados. Calcular medidas de lados y de ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de razones trigonométricas. Resolver problemas sencillos, en diversos ámbitos, utilizando las razones trigonométricas", se fragmentó en dos contenidos: en el primer contenido se analizan las relaciones entre los ángulos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo, y en el segundo contenido se explicita y se hace uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

El contenido 5.2 se refería a la determinación de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras, así como a construir y reconocer diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. Este contenido se ubicaba en el bloque 5 para segundo grado y fue fragmentado en dos contenidos: el primero es el "análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras”, y el segundo se refiere a la “construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras”.

El contenido 5.2, “Anticipar las características de los cuerpos que se generan al girar o trasladar figuras. Construir desarrollos planos de conos y cilindros rectos. Anticipar y reconocer las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o un cono recto. Determinar la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto”, se dividió en dos contenidos: el primer contenido se refiere al análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo, así como a la construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos; el segundo contenido es “Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto”.

Retomando lo que corresponde a la reubicación de contenidos (véase el cuadro 3.4), cinco de estos seis se reubicaron en otros bloques.

- El contenido 3.3 estaba en el bloque 3 para primer grado, y ahora se ubica en el bloque I para primer grado y en el bloque I para segundo grado.
- El contenido 2.5 estaba en el bloque 2 para segundo grado, y ahora se ubica en el bloque II y III para segundo grado.
- El contenido 4.2 estaba en el bloque 4 para tercer grado, y ahora se ubica en el bloque II para tercer grado.

- El contenido 5.2 estaba en el bloque 5 para segundo grado, y ahora se ubica en el bloque II para tercer grado.
- El contenido 5.2 estaba en el bloque 5 para tercer grado, y ahora se ubica en el bloque IV y V para tercer grado.
- El contenido 5.3 “Resolver problemas que impliquen el cálculo de áreas en diversas figuras planas y establecer relaciones entre los elementos que se utilizan para calcular el área de cada una de estas figuras” estaba en el bloque 5 para primer grado, y ahora se encuentra en el bloque I para segundo grado.
- El contenido 1.5 “Construcción de figuras geométricas respecto a un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos” estaba en el bloque 1 para primer grado, y ahora se encuentra en el bloque V para segundo grado.
- El contenido 4.3 “Explorar las propiedades de las alturas medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo” estaba en el bloque 4 para segundo grado, y ahora se encuentra en el bloque I para primer grado.
- El contenido 4.2 “Determinar criterios de congruencia de triángulos a partir de construcciones con información determinada” estaba en el bloque 4 para segundo grado, y ahora se encuentra en el bloque I para tercer grado.
- El contenido 1.4 “Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco” estaba en el bloque 1 para tercer grado, y ahora se encuentra en el bloque IV para segundo grado.
- El contenido 1.5 “Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos con las fórmulas del cálculo de volumen” estaba en el bloque 1 para tercer grado, y ahora se encuentra en el bloque V para segundo grado.

En el contenido 4.2 de tercer grado del programa de estudios de matemáticas de 2006 se aplicaba el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas. Sin embargo, en el contenido 9.2.4 se analizan las relaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo y el área del cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto; en el 9.2.5 se explicita el teorema de Pitágoras y se hace uso del mismo.

Ahora bien, en los contenidos 7.3.5, 8.2.4, 8.3.3, 8.3.5, 8.5.4, 9.2.4, 9.4.5 y 9.5.4 no se hace mención de la resolución de problemas. Sin embargo, los aprendizajes matemáticos que se esperan de los alumnos para estos contenidos son que resuelvan problemas.

Con el enfoque de resolución de problemas se esperaría que la mayoría de los contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011 se refirieran a la resolución y al planteamiento de problemas. Sin embargo, la realidad es que el trabajo sobre resolución de problemas es escaso y aún más el trabajo sobre planteamiento de problemas.

En el siguiente apartado se muestra el análisis de los temas de geometría en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011.

Temas de geometría en el *Libro para el maestro*

El *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) se encuentra organizado por capítulos vinculados a cinco áreas temáticas de la educación básica: Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y tratamiento de la información, y Nociones de probabilidad.

En el área de geometría se presenta una reseña histórica de su desarrollo dividiéndolo en cuatro periodos: geometría espontánea, geometría empírica, geometría deductiva y geometría axiomática. Esta reseña está basada en el capítulo “El Manantial” del libro *Estudio de las geometrías* de Howard Eves (1969).

Enseguida se incluyó un apartado llamado “El estudio de la geometría en la escuela secundaria”, en el que se expone su importancia en el nivel básico, los propósitos principales, así como algunas sugerencias para su aprendizaje.

En la figura 3.8 se presenta un resumen de la organización de los contenidos de geometría en el *Libro para el maestro*, que se describen en las páginas 195 a 270. Están distribuidos en cinco contenidos generales, que a su vez se desglosan en contenidos particulares. En cada contenido particular se proponen problemas de geometría.

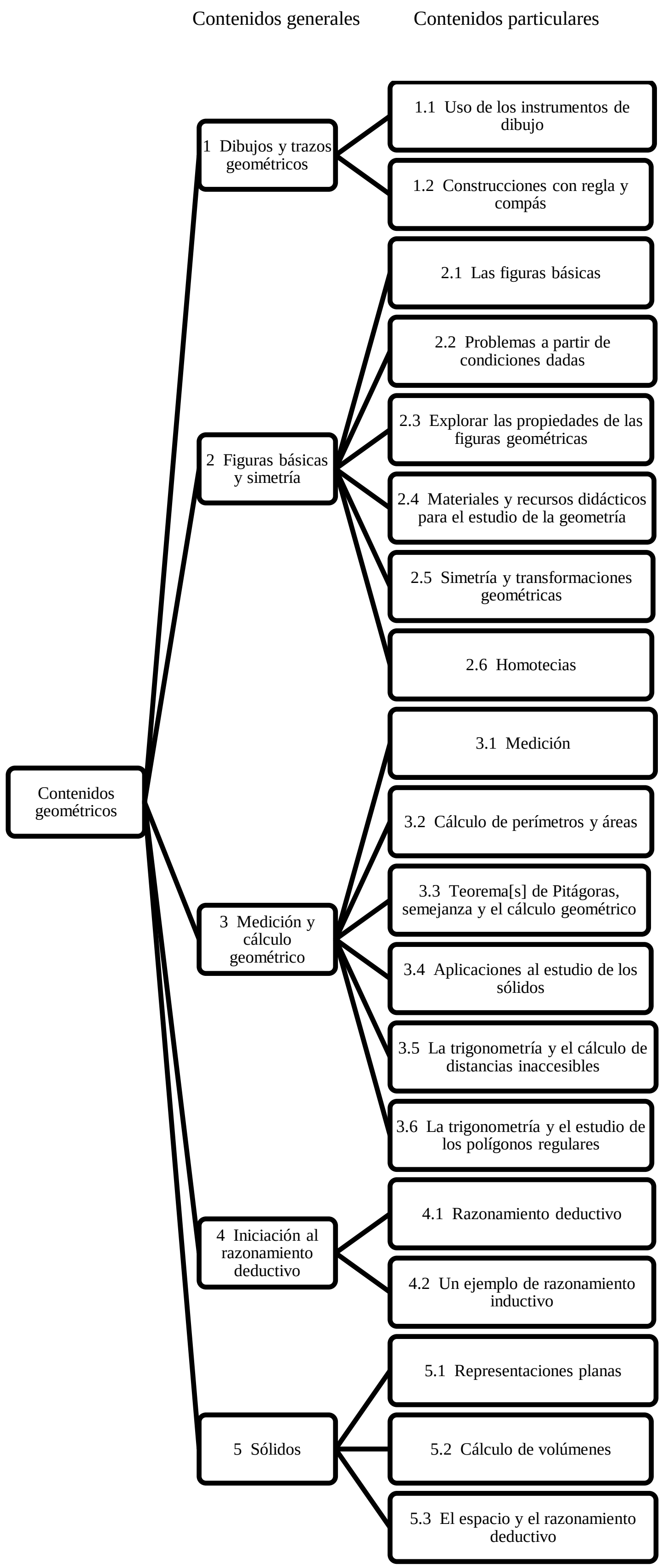


Figura 3.8. Organización de los contenidos de geometría en el *Libro para el maestro*

En las figuras 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 y 3.13 se resume tanto la organización de los contenidos de geometría en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001), así como su relación con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011. Algunos de estos contenidos en el *Libro para el maestro* se sugieren como ejemplos para el desarrollo de determinadas actividades; se identificó que en este material educativo se trabaja con 92% de los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011.

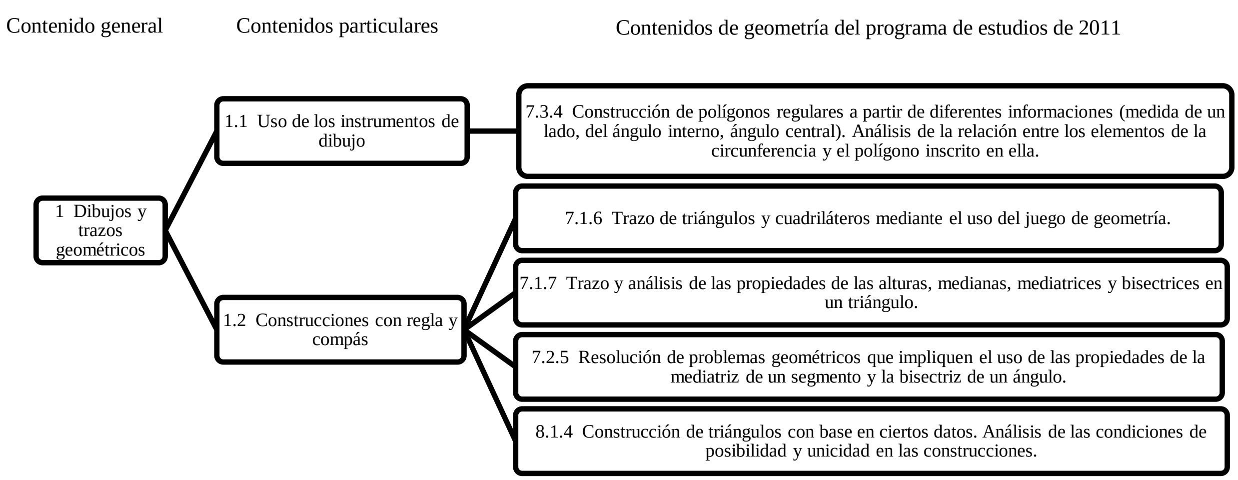


Figura 3.9. Contenido general 1 del *Libro para el maestro* y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011

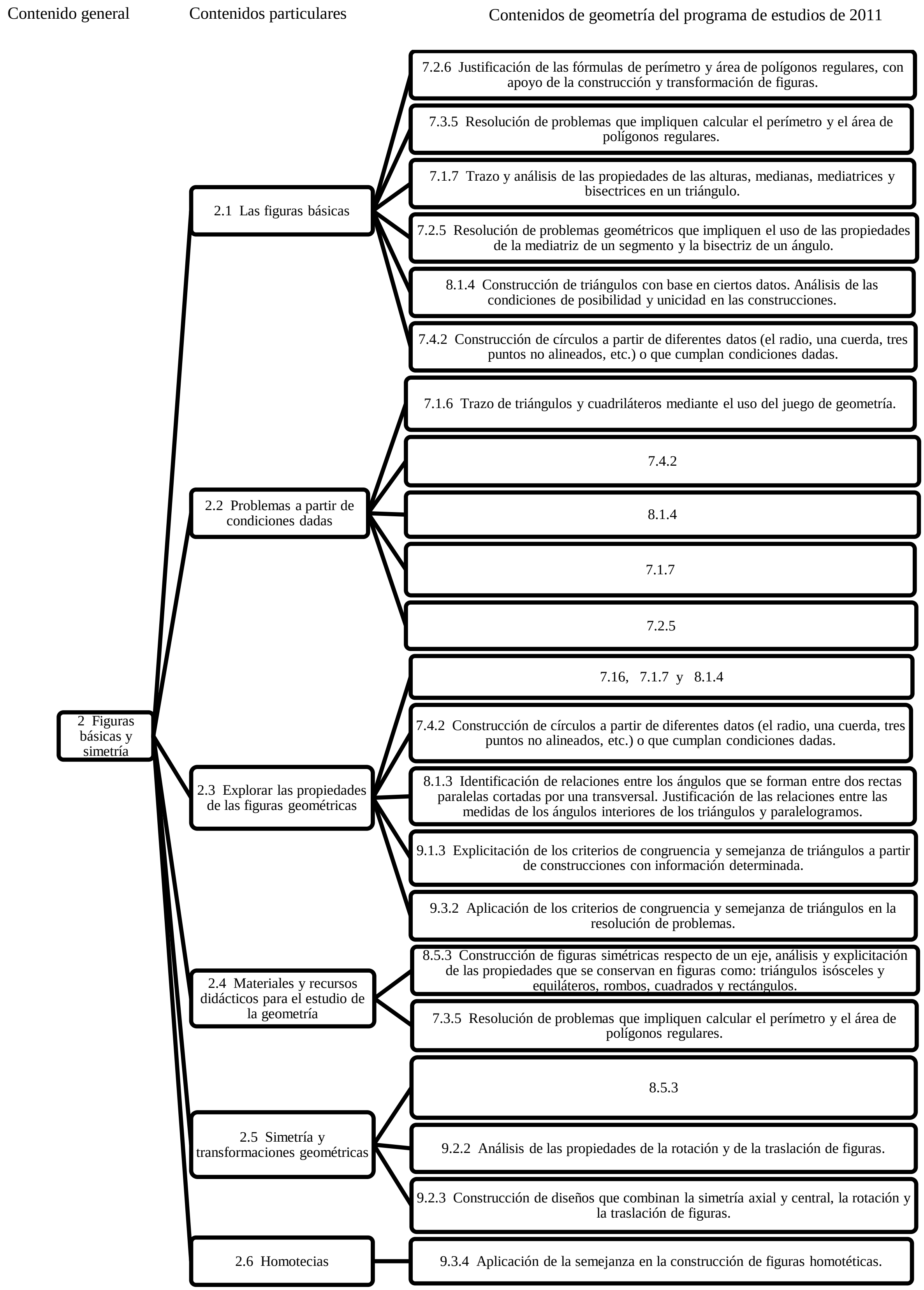


Figura 3.10. Contenido general 2 del *Libro para el maestro* y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011

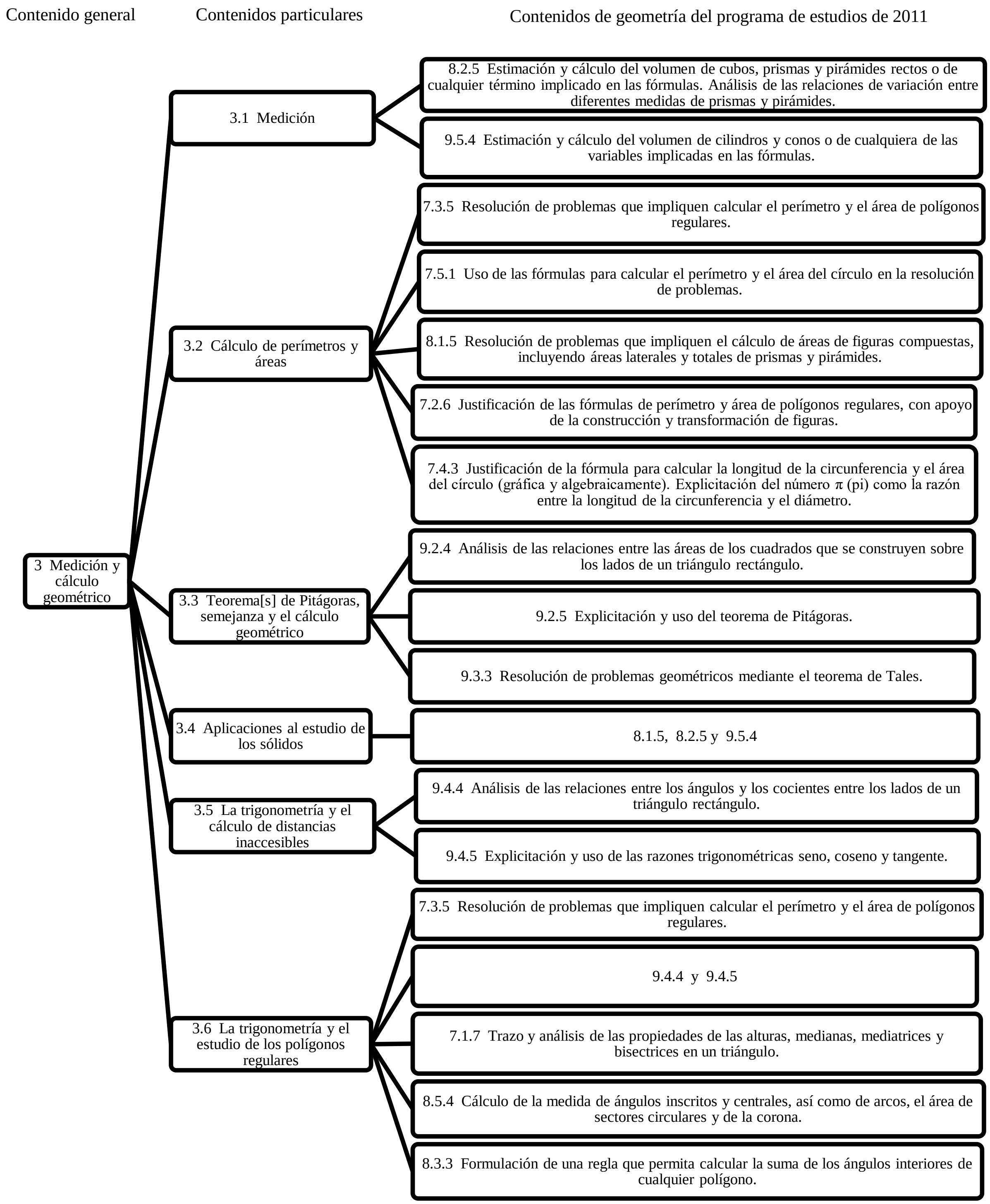


Figura 3.11. Contenido general 3 del *Libro para el maestro* y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011

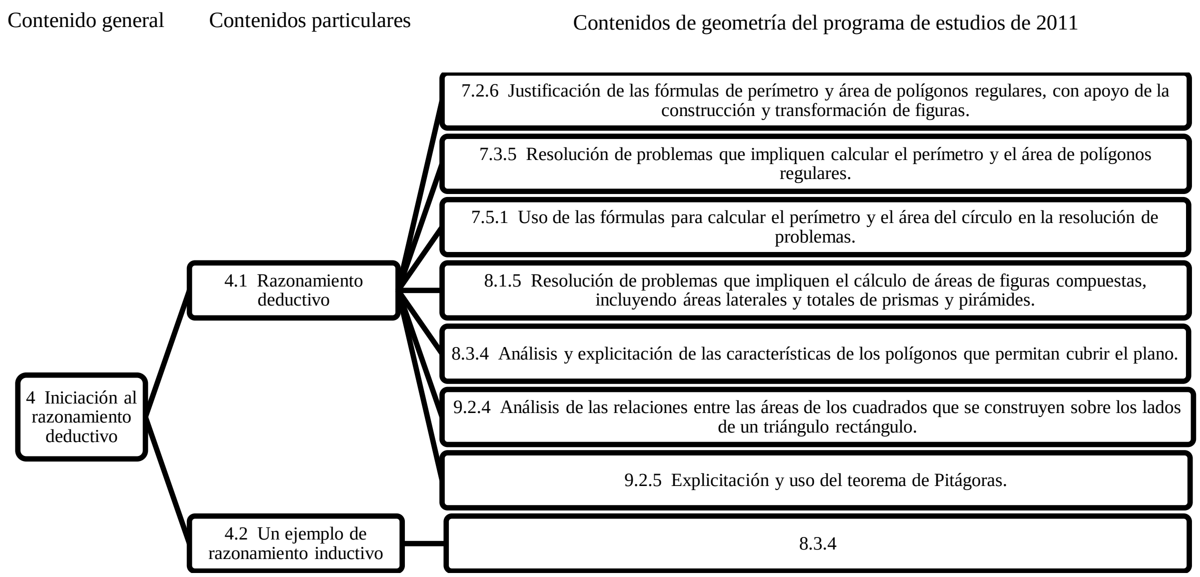


Figura 3.12. Contenido general 4 del *Libro para el maestro* y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011

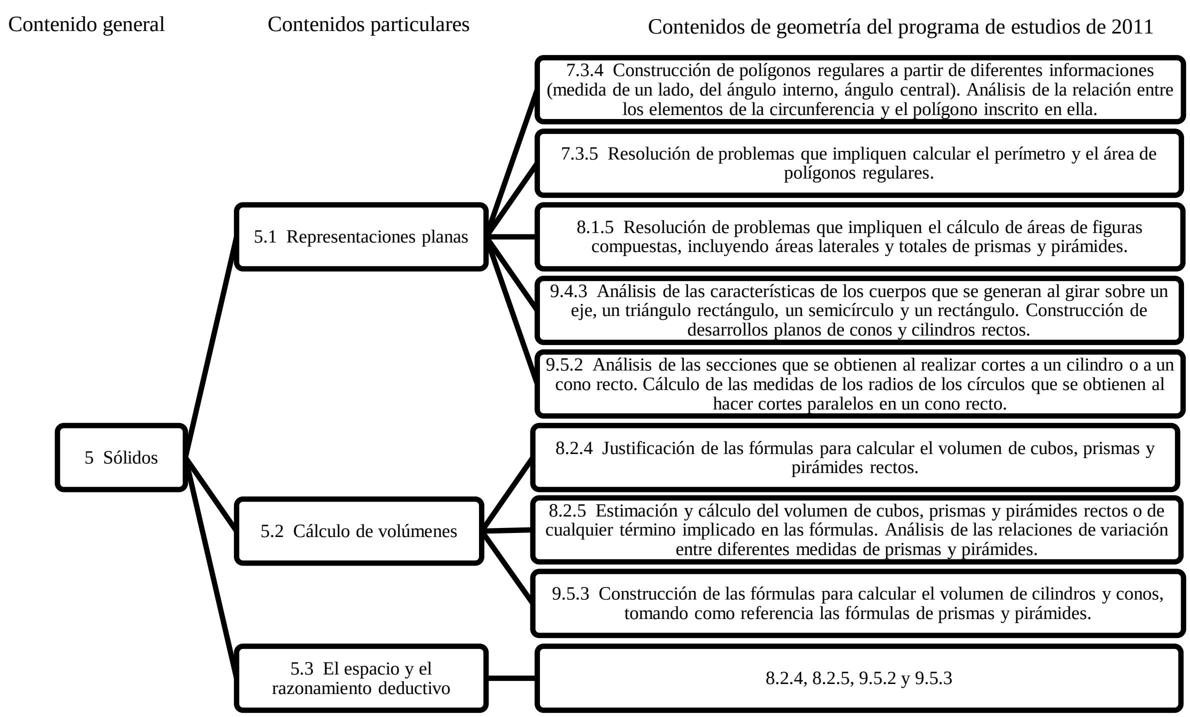


Figura 3.13. Contenido general 5 del *Libro para el maestro* y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011

Es claro que el área de geometría en el *Libro para el maestro* constituye un apartado muy completo, ya que se trabaja con 37 de los 40 contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011. Además, algunos de los ejemplos que se proponen también pueden ser aprovechados por el profesor para el desarrollo de actividades.

Los contenidos 8.3.5, 9.1.3 y 9.4.2, no se abordan en este material de apoyo, es decir, no se sugieren actividades que impliquen la deducción de otras equivalencias entre unidades de volumen y capacidad. Tampoco contiene actividades en las que se expliquen los criterios de congruencia y los criterios de semejanza de triángulos.

En cuanto al contenido que se refiere al análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje un triángulo rectángulo, un semicírculo o un rectángulo, así como a la construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos, se trabaja parcialmente, pues solamente se muestran algunos ejemplos de desarrollos planos.

En el contenido "Representaciones planas" del *Libro para el maestro* se muestran algunos ejemplos de construcciones de desarrollos planos de determinados polígonos regulares, de cuerpos y de superficies prismáticas (Alarcón *et al.* 2001, pp. 261 y 266); y aunque no se sugieren como actividades, el profesor puede hacer uso de ellos.

Aunque el *Libro para el maestro*, en sus ediciones de 1994 y de 2001, se basa en los temas del Plan y programas de estudio de educación secundaria de 1993 (SEP 1993), estos temas coinciden con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011.

En el siguiente apartado se presenta el análisis de los temas de geometría en el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011.

Temas de geometría en el *Fichero de actividades didácticas*

El *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) se encuentra organizado por grados escolares; se sugieren actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de cada grado. Consta de 18 fichas para cada grado. Cada ficha inicia con un tema y un recuadro en el que se especifican los propósitos, los contenidos y el material que se necesitará para la actividad, y al finalizar se sugieren variantes. En cada ficha se proponen dos o tres actividades, describiéndose las indicaciones que el profesor debe dar inicialmente a los alumnos, así como soluciones que los alumnos posiblemente planteen.

De las 54 fichas de actividades, 21 comprenden contenidos de geometría: 7 para primer grado, 6 para segundo grado y 8 para tercer grado. En el cuadro 3.7 se resume la organización de las fichas de actividades de geometría.

Cuadro 3.7. Contenidos de geometría en el *Fichero de actividades didácticas* y su correspondencia con el programa de matemáticas de 2011

Grad	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	1.2 Dibujos y trazos geométricos	1.2.1 Utilización de la regla graduada, compás y escuadras en la reproducción y trazo de diseños, patrones y figuras geométricas. 1.2.2 Familiarización con el vocabulario y los trazos geométricos. 1.2.3 Cálculo de áreas.	7.1.6 Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría. 7.5.1 Uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas. 8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides. 9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

[Continúa]

Cuadro 3.7 [Continuación]

Grado	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	1.5 Figuras básicas y ángulos	1.5.1 Actividades y problemas que lleven a utilizar las definiciones y a trazar figuras básicas. 1.5.2 Uso de escuadras para verificar perpendicularidad y paralelismo.	7.1.6 Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría.
	1.7 Representación gráfica	1.7.1 Iniciación al plano cartesiano: coordenadas de un punto en el primer cuadrante.	
	1.9 Simetría axial	1.9.1 Determinación y trazo de los ejes de simetría de una figura.	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.
	1.12 Cálculo de perímetros y áreas	1.12.1 Revisión y enriquecimiento de las nociones de perímetro, área y sus propiedades. En particular, determinación del área en figuras regulares dibujadas sobre papel cuadriculado.	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.
	1.5 Figuras básicas y ángulos	1.5.1 Actividades y problemas que lleven a utilizar las definiciones y a trazar figuras básicas. 1.5.2 Uso de escuadras para verificar perpendicularidad y paralelismo.	7.1.6 Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría.

[Continúa]

Cuadro 3.7 [Continuación]

Grado	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	1.7 Representación gráfica	1.7.1 Iniciación al plano cartesiano: coordenadas de un punto en el primer cuadrante.	
	1.9 Simetría axial	1.9.1 Determinación y trazo de los ejes de simetría de una figura.	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.
	1.12 Cálculo de perímetros y áreas	1.12.1 Revisión y enriquecimiento de las nociones de perímetro, área y sus propiedades. En particular, determinación del área en figuras regulares dibujadas sobre papel cuadriculado.	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.
	1.15 Sólidos	1.15.1 Desarrollo, armado y representación plana de cubos. 1.15.2 Construcción de modelos geométricos.	
	1.17 Longitud de la circunferencia y área del círculo	1.17.1 Área del círculo. 1.17.2 Ejercicios y problemas sobre el cálculo de áreas	7.4.2 Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas. 7.5.1 Uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas.

[Continúa]

Cuadro 3.7 [Continuación]

Grado	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
II	2.1 Trazos geométricos y figuras básicas	2.1.1 Exploración de las propiedades de la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos A y B.	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo. 7.2.5 Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
	2.5 Reflexión respecto a una recta. Reflexión respecto a un punto	2.5.1 Simetría axial: construcción del simétrico de un punto respecto a una recta. 2.5.2 Simetría central: reflexión de un punto y de una figura respecto a un punto. 2.5.3 Determinación, si existe, del centro de simetría de una figura.	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. 9.2. 2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. 9.2. 3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
	2.9 Descomposición de figuras y equivalencias de áreas	2.9.1 Demostración del teorema de Pitágoras por descomposición y equivalencia de áreas.	9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.
	2.10 Sólidos	2.10.1 Actividades para explorar y observar las secciones que se forman al cortar un cubo o un paralelepípedo recto por un plano.	

[Continúa]

Cuadro 3.7 [Continuación]

Grado	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
II	2.15 Ángulos entre paralelas	2.15.1 Recubrimiento del plano con polígonos regulares e irregulares.	8.3.4 Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permitan cubrir el plano. 8.1.3 Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.
	2.16 Primeras exploraciones en el círculo	2.16.1 Determinación del círculo por su centro y su radio. 2.16.2 Posiciones relativas de un círculo y una recta: cuerdas, tangente exterior al círculo.	7.4.2 Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas. 8.5.4 Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como, el área de sectores circulares y de la corona.
	3.5 Triángulos y cuadriláteros	3.5.1 Aplicación del estudio de las propiedades de los triángulos.	8.1.4 Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.
	3.6 Raíz cuadrada y métodos de aproximación	3.6.1 Cálculo de la raíz cuadrada por diversos métodos.	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.

[Continúa]

Cuadro 3.7 [Continuación]

Grado	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
III	3.8 El círculo	3.8.1 Ángulo inscrito en una circunferencia. 3.8.2 Ejemplos para ilustrar el lugar geométrico.	8.4.3 Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo y análisis de sus relaciones. 8.5.4 Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona.
	3.12 Dibujo a escala y homotecias	3.12.1 Estudio informal de las homotecias. 3.12.2 Imagen bajo una homotecia de un triángulo, un cuadrilátero o un polígono.	9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. 9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. 9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.
	3.13 Semejanza y teorema de Pitágoras	3.13.1 Aplicaciones de los teoremas de semejanza y de Pitágoras en la solución de problemas de cálculo geométrico.	7.3.5 Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares. 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.
	3.15 Sólidos	3.15.1 Cilindros y conos en revolución.	9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras. 9.4.3 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos. 9.5.4 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

[Continúa]

Cuadro 3.7 [Concluye]

Grado	Tema	Actividades	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
III	3.16 Trigonometría: razones trigonométricas de un	3.16.1 Primeros ejemplos para motivar el estudio de la trigonometría. 3.16.2 Tangente de un ángulo agudo.	9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras. 9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. 9.4.4 Análisis de las relaciones entre los ángulos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.
	3.17 Problemas de trigonometría	3.17.1 Resolución de triángulos rectángulos y sus aplicaciones. 3.17.2 Estudio de los polígonos regulares.	9.4.3 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta el valor de un ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. 9.4.5 Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

En las actividades que se plantean en el tema 1.5 del *Fichero de actividades didácticas* se construyen cuadrados y rectángulos, apoyándose del doblado de papel. El alumno podrá explorar algunas propiedades del cuadrado y del rectángulo, los conceptos de bisectriz y diagonal, así como la noción de perpendicularidad y paralelismo. A pesar de que en el programa de estudios de matemáticas de 2011 no se menciona la palabra perpendicular, en los contenidos 7.1.7 y 7.2.5 se trabaja con el trazo y análisis de las propiedades de las mediatrices.

Ahora bien, el tema 1.7 corresponde al contenido “Iniciación al plano cartesiano: Coordenadas de un punto en el primer cuadrante”. El contenido se ubica en el bloque IV del eje temático “Manejo de la información” de segundo grado del programa de estudios de matemáticas de 2011. Aunque el contenido de plano cartesiano está en otro eje temático, las actividades que se plantean para el tema “Representación gráfica” están vinculadas a contenidos de geometría, donde el alumno podrá explorar algunas propiedades de las figuras geométricas apoyándose del geoplano y, de esta manera, podrá apropiarse gradualmente del vocabulario básico de la geometría.

El tema 1.12 se ubica en bloque I del eje temático “Forma, espacio y medida” de segundo grado del programa de estudios de matemáticas de 2011. También se ubicaba en el bloque 1 del eje temático “Manejo de la información” de primer grado del programa de estudios de matemáticas de 2006. En este tema se trabaja con el “arreglo rectangular” para resolver problemas de cálculo de perímetros y de áreas del rectángulo y del cuadrado.

En cuanto al tema 1.15, no existe una correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011, ya que en el contenido 9.4.3 sólo se trabaja con la construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos, pero no de cubos. Sin embargo, en el programa de estudios de matemáticas de 2006 se ubicaba el contenido 5.2 que hacía referencia a la construcción de desarrollos planos de cubos, prismas y pirámides.

El tema 2.9, “Descomposición de áreas: Demostración del teorema de Pitágoras”, y el tema 2.10, “Sólidos”, se ubican en tercer grado en el programa de estudios de matemáticas de 2011. Sin embargo, en el *Fichero de actividades didácticas* estos temas se abordan en segundo grado.

En la ficha correspondiente al tema 2.10 se pretende que el alumno “desarrolle su imaginación espacial por medio de la observación de las secciones que se forman al cortar [un cubo o un paralelepípedo] por un plano” (Espinoza, García y García 2000, p. 66). En el programa de estudios de matemáticas de 2011, en el contenido 9.5.2 se analizan las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Sin embargo, no se menciona el análisis de las secciones que se forman al cortar un paralelepípedo.

Por otra parte, el tema 3.6.1 del *Fichero de actividades didácticas* se ubica en el bloque V del eje temático "Sentido numérico y pensamiento algebraico" de primer grado del programa de estudios de matemáticas de 2011. A pesar de que el cálculo de la raíz cuadrada por diversos métodos es un contenido que se trabaja en aritmética, también se puede estudiar como un contenido de geometría, por ejemplo cuando se utiliza el método babilónico para el cálculo de raíces cuadradas.

En cuanto al tema 3.8.1, se hace referencia a los ángulos inscritos en una *circunferencia* (véase el apéndice 3.1 al final de este capítulo). Este tema se ubica en segundo grado del programa de estudios de matemáticas de 2011 y en el *Fichero de actividades didácticas* se encuentra en tercer grado.

En el tema 3.13 se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular los perímetros de polígonos convexos y cóncavos formados en un geoplano. En este tema se pretende utilizar las fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes, así como los teoremas de semejanza, de Pitágoras y la trigonometría para resolver problemas de cálculo geométrico (Espinoza, García y García 2000, p. 110). Sin embargo, sólo se calculan los perímetros de polígonos convexos y cóncavos aplicando el teorema de Pitágoras.

Ahora bien, al relacionar las fichas de actividades de geometría con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 se identificó que los contenidos 7.2.6, 7.4.3, 8.2.4, 8.2.5, 8.3.3, 8.3.5, 9.1.3, 9.3.2 y 9.5.3 no se trabajan en el *Fichero de actividades didácticas*.

En el siguiente apartado se presenta el análisis de los temas de geometría en el material *Geometría dinámica* del proyecto Emat (Zubieta *et al.* 2000) y su correspondencia con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011.

Temas de geometría en el material del proyecto Emat

(*Geometría dinámica*)

El material *Geometría dinámica* del proyecto Emat (Zubieta *et al.* 2000) se encuentra organizado por grados escolares; se sugieren hojas de trabajo para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con tecnología. Consta de 62 hojas de trabajo de geometría dinámica, de las cuales 22 corresponden al primer grado, 20 al segundo grado y 20 al tercer grado.

Cada hoja de trabajo inicia con el tema y el contenido que se trabajará en el laboratorio Emat y un recuadro en el que se especifican los propósitos; después de esto se incluyen las actividades. En el cuadro 3.8 se resume la organización de las hojas de trabajo y su correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (la redacción de los títulos de las hojas de trabajo del material *Geometría dinámica* se ha modificado ligeramente para darles mayor precisión en este cuadro).

Cuadro 3.8. Hojas de trabajo del material *Geometría dinámica* y su correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	Dibujo y trazos geométricos	1.- Punto y segmento rectilíneo	
		2.- Rayo (semirrecta) y línea recta	
		3.- Las cinco herramientas de dibujo	

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	Dibujo y trazos geométricos	4.- Construcción de un cuadrado	7.1.6 Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría.
		5.- Construcción de un rectángulo	
		6.- Construcción de un rombo	
		7.- Trazo de la mediatriz de un segmento rectilíneo	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
	Figuras básicas y ángulos	8.- Construcción de triángulos	8.1.4 Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.
		9.- Clasificación de ángulos	
		10.- Ángulos formados por la intersección de dos líneas rectas	
		11.- Suma de los ángulos internos de un triángulo	8.3.3 Formulación de una regla que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.
		12.- Trazo de la bisectriz de un ángulo	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	Figuras básicas y ángulos	13.- Construcción de un paralelogramo	8.1.3 Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.
	Simetría axial	14.- Concepto de simetría	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.
		15.- Concepto de traslación	9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
		16.- Concepto de rotación	
		17.- Propiedades de la simetría axial	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	Cálculo de perímetros y áreas	18.- Cálculo de perímetros, áreas y ángulos	7.1.6 Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría. 7.2.6 Justificación de las fórmulas de perímetro y área polígonos regulares, con apoyo de la construcción y transformación de figuras. 8.3.3 Formulación de una regla que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.
		19.- Construcción de un paralelogramo a partir de un rectángulo	8.1.3 Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.
		20.- Construcción de un paralelogramo a partir de un triángulo	
		21.- Idea de variación (rectángulos)	

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
I	Cálculo de perímetros y áreas	22.- Relación entre la longitud de una circunferencia y el área de su círculo	7.4.3 Justificación de la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo (gráfica y algebraicamente). Explicitación del número π (pi) como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.
II	Construcciones y trazos geométricos y figuras básicas	23.- Construcción de un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado a partir de un punto dado	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
		24.- Una propiedad de los triángulos isósceles	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo. 8.1.4 Construcción de triángulos con base en ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones.
		25.- Trazo de una línea recta paralela a una recta dada	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
II	Construcciones y trazos geométricos y figuras básicas	26.- División de un segmento rectilíneo en partes iguales	7.4.2 Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas.
		27.- Determinación del punto simétrico a un punto dado	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo. 8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.
		28.- Bisectrices, alturas, medianas y mediatrices de un triángulo	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
	Simetría axial y simetría central	29.- Trazo de los ejes de simetría de una figura dada	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
II	Simetría axial y simetría central	30.- La bisectriz de un ángulo como eje de simetría	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
		31.- Uso de la simetría central	8.5.3 Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.
		32.- Composición de reflexiones	9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
		33.- Reflexiones sucesivas	
	Descomposición de figuras y equivalencia de áreas	34.- Descomposición de un rectángulo en áreas iguales	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.
		35.- Construcción de un paralelogramo a partir de un triángulo	8.1.3 Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
II	Ángulos entre líneas rectas paralelas y una línea recta que incide sobre ellas	36.- Resolución de problemas de áreas de figuras	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.
		37.- Posiciones relativas de líneas rectas en un plano	
		38.- Ángulos entre líneas rectas paralelas y una línea recta que incide sobre ellas	8.1.3 Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Justificación de las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.
		39.- Recubrimiento de un plano con polígonos regulares	8.3.4 Análisis y explicitación de las características de los polígonos que permitan cubrir el plano.
		40.- Recubrimiento de un plano con combinaciones de polígonos regulares	
	Primeras exploraciones del círculo	41.-Trazo de una línea recta perpendicular a una recta dada	7.2.5 Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
		42.- Trazo de un diámetro de un círculo	

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
III	Triángulos y cuadriláteros	43.- Área de un triángulo y sus alturas	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
		44.- Las diagonales de un paralelogramo	9.1.2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. 9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada. 9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. 9.2.3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.
		45.- El centro de un paralelogramo	
		46.- Figuras directamente congruentes y figuras inversamente congruentes	
		47.- Verificación de congruencia de figuras	
		48.- Construcción de un papalote	
		49.- Problemas de variación a través de figuras geométricas	8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.

[Continúa]

Cuadro 3.8 [Continuación]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
III	El círculo	50.- Radio de un círculo	
		51.- Cuerdas de un círculo	
		52.- Líneas tangentes a un círculo	
		53.- Ángulos inscritos en un círculo	8.4.3 Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo y análisis de sus relaciones.
		54.- Suma de los ángulos de un triángulo inscrito en un círculo	
		55.- Trazo de una circunferencia por tres puntos dados no colineales	7.4.2 Construcción de círculos a partir de diferentes datos (el radio, una cuerda, tres puntos no alineados, etc.) o que cumplan condiciones dadas.
		56.- Trazo del incírculo de un triángulo	7.1.7 Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.
	Semejanza y el teorema de Pitágoras	57.- Idea de semejanza de triángulos	9.1.3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
		58.- Traslación, rotación y reflexión	9.2.2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.
		59.- Teorema de Tales	9.3.3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

[Continúa]

Cuadro 3.8. [Concluye]

Grado	Tema	Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
III	Semejanza y el teorema de Pitágoras	60.- Recíproco del teorema de Tales	
		61.- La homotecia como aplicación del teorema de Tales	9.3.4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.
		Hojas de trabajo	Correspondencia con los contenidos del programa de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.2)
		62.- Teorema de Pitágoras	9.2.4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. 9.2.5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

A partir del cuadro 3.8 se identificó que en las hojas de trabajo de geometría del material *Geometría dinámica* (Zubieta *et al.* 2000) no se proponen actividades sobre los contenidos 7.3.4, 7.3.5, 7.5.1, 8.2.4, 8.2.5, 8.3.3, 8.3.5, 8.5.4, 9.1.2, 9.3.2, 9.4.3, 9.4.4, 9.4.5, 9.5.2, 9.5.3 y 9.5.4 del programa de matemáticas de 2011.

En las hojas de trabajo 1, 2 y 3 se pretende que el alumno explore las herramientas del material *Geometría dinámica*.

La hoja de trabajo 9 se refiere a la clasificación de ángulos. Sin embargo, en el programa de estudios de matemáticas de 2011 no existe un contenido que se refiera explícitamente a la clasificación de ángulos, pero sí se trabajan los ángulos inscritos y centrales en un círculo, y los ángulos que se forman con dos líneas rectas paralelas y una tercera línea recta que las corta.

Las hojas de trabajo 20 y 35 se refieren al tema "Construcción de un paralelogramo a partir de un triángulo", pero tienen propósitos diferentes. En la hoja 20 el alumno debe construir un paralelogramo utilizando dos triángulos congruentes, donde uno de los lados de cada triángulo corresponda a una de las diagonales del paralelogramo (véase la figura 3.14).

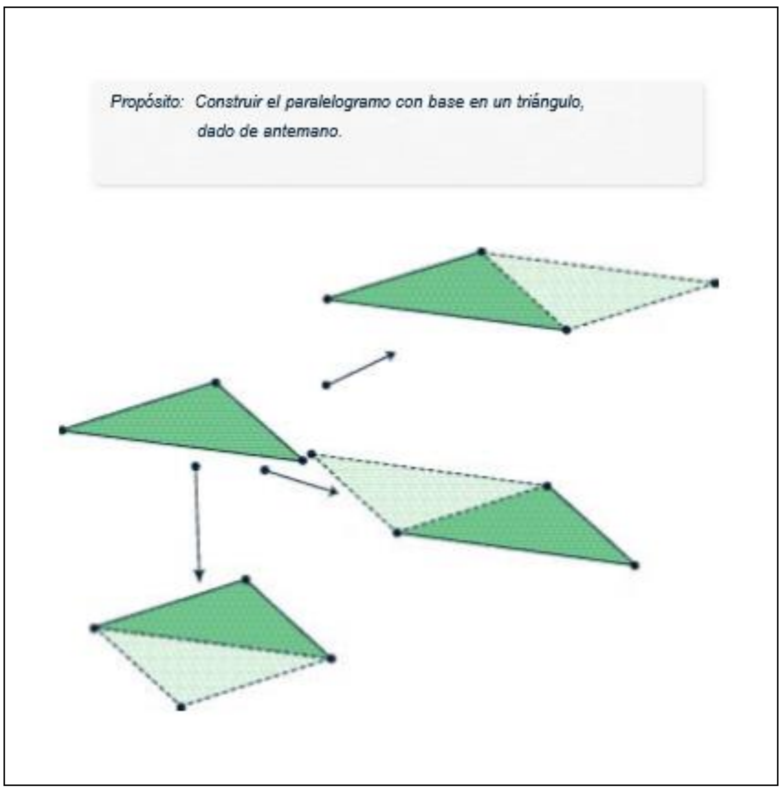
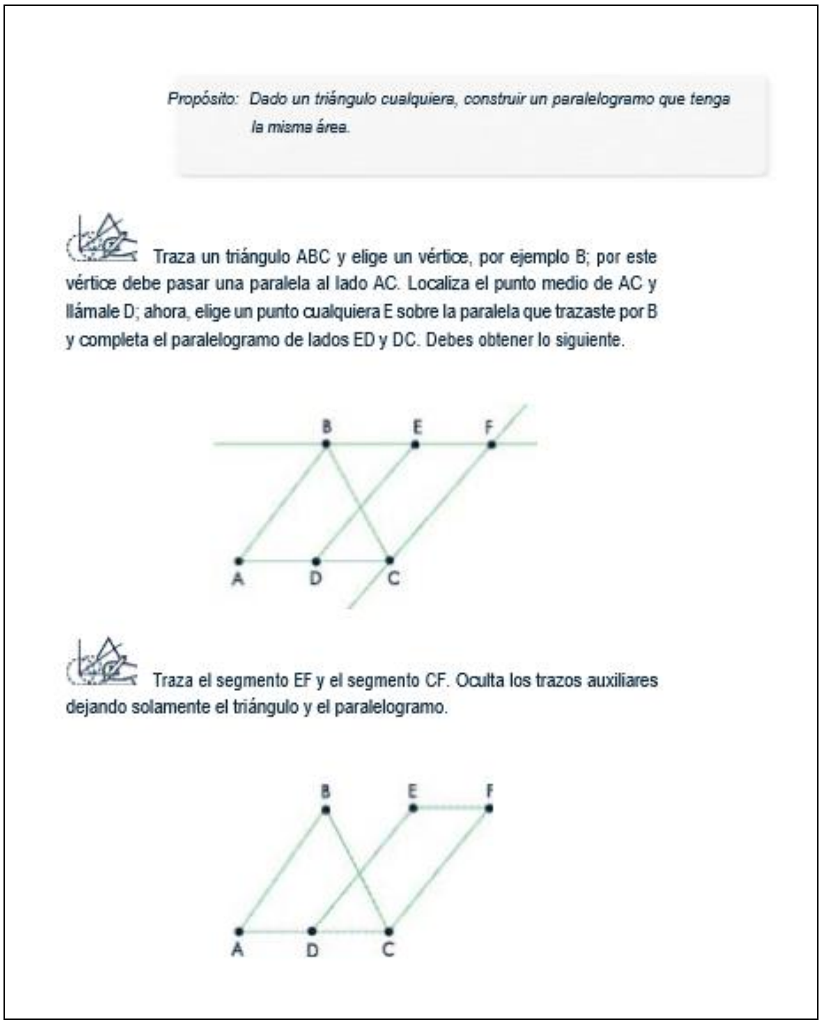


Figura 3.14. Hoja de trabajo 20, "Construcción de un paralelogramo a partir de un triángulo" (Zubieta *et al.* 2000, p. 64)

En la hoja 35, mediante la construcción de un triángulo y un paralelogramo el alumno debe identificar que las áreas de estas dos figuras son iguales cuando una de ellas tiene la mitad de la base de la otra, y ambas se construyen sobre las mismas paralelas (véase la figura 3.15).



Propósito: *Dado un triángulo cualquiera, construir un paralelogramo que tenga la misma área.*

Traza un triángulo ABC y elige un vértice, por ejemplo B; por este vértice debe pasar una paralela al lado AC. Localiza el punto medio de AC y llámale D; ahora, elige un punto cualquiera E sobre la paralela que trazaste por B y completa el paralelogramo de lados ED y DC. Debes obtener lo siguiente.

Traza el segmento EF y el segmento CF. Oculta los trazos auxiliares dejando solamente el triángulo y el paralelogramo.

Figura 3.15.Hoja de trabajo 35, “Construcción de un paralelogramo a partir de un rectángulo” (Zubieta *et al.* 2000, p. 98)

En cuanto a los contenidos 42, 50, 51 y 52, que se refieren al trazo del diámetro y al descubrimiento de las propiedades del radio, las cuerdas y las líneas tangentes de un círculo (Zubieta *et al.* 2000), no existe un contenido en el programa de estudios de matemáticas de 2011 que se refiera explícitamente a lo que se trata en estas hojas de trabajo.

Por otra parte, en las hojas de trabajo del material *Geometría dinámica* se encuentra el contenido "Recíproco del teorema de Tales". En el programa de estudios de matemáticas de 2011 solamente se trabaja con la resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

En el siguiente apartado se encuentran los resultados del análisis de los contenidos que hacen referencia a la resolución del problemas de geometría del libro *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008) publicado por el INEE.

“La enseñanza de la Geometría” (INEE)

El INEE ha publicado cuatro libros para apoyar la práctica educativa de los maestros de educación primaria y de educación secundaria. Dos libros son para el área de español, donde se abordan el desarrollo de las habilidades de escritura, y dos para el área de matemáticas: *Los decimales: más que una escritura* (García y Ávila 2008) *y La enseñanza de la geometría* (García y López 2008). El INEE es una institución que evalúa la calidad, el desempeño y los resultados del Sistema Educativo Nacional en la educación básica. Por el papel que tiene asignado en el ámbito educativo, no debe pasar desapercibido para los maestros de educación secundaria este material educativo sobre geometría (aunque no sea producido por la SEP y sea posterior a los programas de estudio de matemáticas de 2006). A continuación de manera breve se describen algunos rasgos de este libro.

En el libro *La enseñanza de la geometría* se propone el enfoque de resolución de problemas (García y López 2008, pp. 15 y 77); específicamente, problemas de geometría que impliquen el uso de relaciones y conceptos geométricos (García y López 2008, p. 77). Se define un problema como algo relativo: “[…] lo que para unos alumnos puede resultar un problema, para otros ya no lo es si cuentan con un camino para su resolución […]” (García y López 2008, p. 77). En este sentido, no se define qué es un problema, tampoco qué es un problema de geometría, a pesar de que en el libro se plantea centrarse en la resolución de problemas de geometría. Se proponen algunos ejemplos como “problemas de geometría” (García y López 2008, p. 77):

- Armar un rompecabezas.
- Hacer el croquis del camino de la casa a la escuela.
- Calcular el número de diagonales de un polígono cualquiera.

- Calcular la altura de un poste (sin medirlo).

- Hallar el número de vértices de un poliedro a partir de su desarrollo plano.

- Imaginar el resultado de girar un cuerpo geométrico.

- Imaginar el cuerpo geométrico que se forma con cierto desarrollo plano.

Luego se propone una actividad en la que el alumno resolverá un “problema de geometría”. La actividad consiste en presentar a los alumnos figuras geométricas en las que se encuentran trazadas una de sus diagonales y otras en las que no (véase la figura 3.16). Se espera que los alumnos visualicen las figuras, exploren y analicen las propiedades de las diagonales, clasifiquen y elaboren conjeturas (García y López 2008, p. 78).

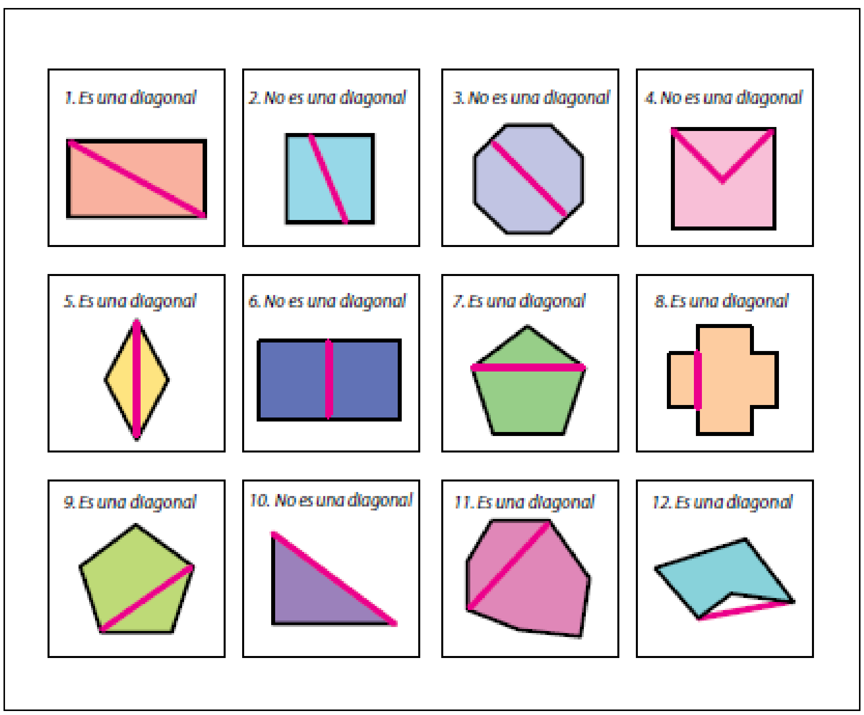


Figura 3.16. ¿Qué es una diagonal? (García y López 2008, p. 78)

Se aclara que los alumnos no exploran para formalizar el concepto de diagonal y sus características, más bien, analizan una de las características de las diagonales a partir de lo que observan en las figuras. También se da a entender que en cada figura se puede trazar solamente una diagonal.

Después se propone un "problema" en el que se deberá anotar si el segmento que se indica en cada una de las figuras es o no una sus diagonales. Así, los alumnos "[…] empezarán a elaborar conjeturas de lo que es una diagonal, algunas serán falsas o sólo se cumplirán en ciertos casos […]" (García y López 2008, p. 79). Sin embargo, en este punto se debe tener presente que una definición no se conjetura.

También se menciona la resolución de problemas y el uso de material concreto para el aprendizaje de la geometría (contenidos geométricos y desarrollo de habilidades geométricas). En este sentido, se sugiere al profesor el uso de diversos materiales para la realización de actividades que favorezcan el desarrollo de habilidades geométricas y la adquisición de conocimiento geométrico (García y López 2008, pp. 81-93). Se propone trabajar con algunos materiales como el tangram, el geoplano, el doblado de papel, el uso de espejos, los cubos de madera y el uso de software de geometría (García y López 2008, pp. 81-93).

Según García y López (2008, p. 90), "[…] el alumno construye conocimiento cuando interactúa de manera activa con el objeto de estudio, de ahí la importancia de que los ejercicios con el material concreto realmente promuevan la actividad mental de los estudiantes […]".

Es conveniente puntualizar que en este libro hay una carencia de problemas de geometría y que el uso de cualquier material concreto no garantiza que el alumno resuelva y plantee problemas de geometría. En el enfoque didáctico de los planes y programas de estudio de matemáticas de 2011 (SEP 2011a, pp. 19-23) se sugiere precisamente que "resuelve y plantee". No obstante, el uso de material concreto brinda la oportunidad de conceptualizar, explicar y justificar procedimientos de resolución así como la solución misma de un problema. Además, se fortalecen las habilidades de visualización, de dibujo, de comunicación, de razonamiento lógico y de transferencia.

En este capítulo III se abordó el enfoque de resolución de problemas en geometría en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, y en los materiales de apoyo de la SEP. En cuanto a los materiales de apoyo, se analizaron los contenidos de geometría y se estableció la correspondencia de éstos con los contenidos del programa de estudios de matemáticas de 2011 para identificar qué contenidos del programa se trabajan en estos materiales. De igual manera, se encuentran los resultados de la revisión del libro *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008) publicado por el INEE. Además, se muestran los resultados del análisis de dos reactivos de geometría de la prueba PISA 2012, así como los resultados de la revisión de dos hojas electrónicas de cálculo del proyecto Emat (Mochón, Rojano y Ursini 2000).

El siguiente capítulo contiene una selección de problemas de geometría y ejercicios de aplicación propuestos en los materiales de apoyo de la SEP. Dichos problemas y ejercicios fueron clasificados de acuerdo con las características descritas en el capítulo II de esta tesis. En este capítulo IV también se incluyen los resultados del análisis de algunos problemas de geometría.

Apéndice 3.1 Circunferencia o círculo, trazar o construir

Vale la pena hacer notar que en el proceso de investigación para esta tesis saltó a la vista algo que no se buscaba. En el programa de estudios de matemáticas de 2006 se utilizaba el término *circunferencia* ("1.4 Determinar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central de una circunferencia, si ambos abarcan el mismo arco") y en el de 2011 se utiliza el término *círculo* ("8.4.3 Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo y análisis de sus relaciones") para referirse a la misma relación. Lo mismo ocurre en materiales de apoyo de la SEP; por ejemplo, en el *Fichero de actividades didácticas* aparece lo siguiente: "3.8.1 Ángulo inscrito en una circunferencia". También las palabras *trazo* y *construcción* son tomadas indistintamente: en el programa de matemáticas de 2011, por ejemplo, se tiene: "7.1.6 Trazo de triángulos […]" y 8.1.4 Construcción de triángulos […]".

Se recurrió a los *Elementos* de Euclides para identificar el uso de los términos *círculo*, *circunferencia*, *trazo* y *construcción*, encontrándose que ambas parejas de términos en realidad no deben tomarse indistintamente: *círculo* es distinto de *circunferencia*, y *trazo* es distinto de *construcción*. En los libros I y III de los *Elementos* de Euclides (2000) se utiliza la palabra *periphéreia* (circunferencia), que se refiere en realidad a un arco de circunferencia, por lo que en la definición que da Euclides sobre círculo tendría que entenderse como "una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí" (Euclides 2000, p. 11). También se aclara que la traducción es una versión arábigo-latina de la definición y no de la versión euclidiana (Euclides 2000, p. 114, n. 84).

En la proposición 20 del libro III de los *Elementos* de Euclides se enuncia la relación de los ángulos inscritos y centrales en un círculo; en las proposiciones 26 y 27 se hace mención de los ángulos inscritos y centrales en dos círculos iguales:

> En un *círculo*, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la *circunferencia* cuando los ángulos tienen como base la misma [parte de la] circunferencia. (Euclides 2000, pp. 138-139)
>
> En *círculos* iguales, los arcos sobre los que están ángulos iguales, ya sea en los centros o en las *circunferencias,* son iguales. (Euclid 1908, p. 56)
>
> En *círculos* iguales, los ángulos que están sobre arcos iguales son iguales, ya sea que estén en los centros o en las *circunferencias*. (Euclid 1908, p. 58)

Entonces, es en un círculo donde se identifican relaciones entre ángulos inscritos y ángulos centrales. Por otra parte, Euclides (2000) afirma que un polígono se inscribe en un *círculo* (Proposiciones 2 y 6 del libro IV de los *Elementos* de Euclides); por lo que en contenidos como el 7.3.4, que dice "[…] Análisis de la relación entre los elementos de la circunferencia y el polígono inscrito en ella", debiera decir "[…] Análisis de la relación entre los elementos de la *circunferencia* y el polígono inscrito en el *círculo*".

En los *Elementos* de Euclides (2000) se encontró que se *construyen* triángulos (Proposiciones 1 y 22 del libro I, y 10 del libro IV) y cuadrados (Proposición 14 del libro II), y se *trazan* líneas rectas (Proposiciones 11 y 12 del libro I, y las proposiciones 16-19 y 32 del libro III). Así el contenido 7.1.6 del programa de estudios de matemáticas de 2011, "*Trazo* de triángulos y cuadriláteros […]", debiera decir "*Construcción* de triángulos y cuadriláteros […]", aunque como ya se señaló, en el mismo programa se anotó en el contenido 8.1.4 "*Construcción* de triángulos […]".

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LOS MATERIALES DE APOYO DE LA SEP

Este capítulo se dividió en tres apartados específicos para la resolución de problemas de geometría: el primer apartado es "Problemas de geometría y ejercicios de aplicación en el *Libro para el maestro"*; el segundo, "Fichas de trabajo del *Fichero de actividades didácticas*", y el tercero, "Hojas de trabajo del proyecto Emat (*Geometría dinámica*)".
A continuación se muestran resultados de la clasificación y de los análisis de algunos problemas de geometría y ejercicios de aplicación del *Libro para el maestro*.

Problemas de geometría y ejercicios de aplicación en el *Libro para el maestro*

El *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) contiene 122 problemas de geometría y ejercicios de aplicación. Para esta investigación, se organizaron en dos categorías: problemas y ejercicios. Se identificaron 85 problemas (70%) y 37 ejercicios (30%). Esta organización se basó en las definiciones de problema de matemáticas y ejercicio de aplicación, así como en sus diferencias, lo cual se describe en el capítulo II. En las siguientes dos subsecciones primero se tratan los ejercicios y después los problemas.

Ejercicios en el Libro para el maestro

Las 37 actividades consideradas como ejercicios no presentan dificultad alguna para su resolución; permiten al alumno explorar algunas de las propiedades de las figuras planas y, en otros casos, calcular perímetros y áreas de figuras geométricas, así como estimar amplitudes de ángulos. A continuación se muestran algunos ejemplos.

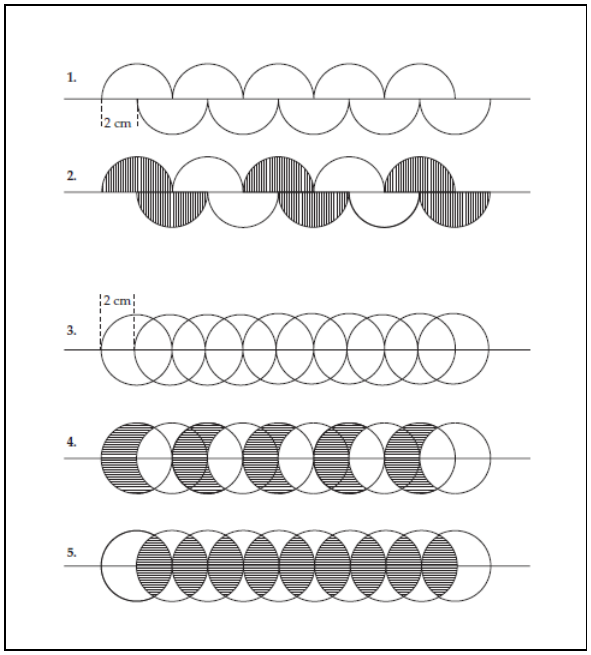


Figura 4.1. Actividades correspondientes al contenido 1 "Dibujos y trazos geométricos" (Alarcón *et al.* 2001, p. 198)

En las actividades correspondientes al contenido 1, "Dibujos y trazos geométricos", se tiene como propósito que los alumnos conozcan y utilicen la regla graduada, el compás, las escuadras y el transportador para reproducir figuras (véase la figura 4.1) y para verificar trazos y construcciones. Así, se utilizan las escuadras para identificar si dos líneas rectas son perpendiculares o paralelas, o bien se utilizan las escuadras y el transportador para construir figuras geométricas a partir de determinadas condiciones (véase la figura 4.2).

1. Trazar el círculo con centro en un punto O y radio igual 3.5 cm.

2. Construir el triángulo ABC sabiendo que AB = 5 cm, BC = 6 cm y CA = 7 cm.

3. Dibujar el cuadrado ABCD cuyos lados AB, BC, CD y DA miden 6.8 cm.

4. Trazar el rectángulo PQRS de lados PQ = 4.5 cm y QR = 6.3 cm.

5. Dibujar el triángulo MNP de lados MN = 7.5 cm, NP = 7.5 cm y PM = 5 cm.

6. Trazar el triángulo XYZ tal que XY = 6 cm, XZ = 7.5 cm y ángulo ZXY = 35º.

Figura 4.2. Actividades correspondientes al contenido 2 “Figuras básicas y simetrías” (Alarcón *et al.* 2001, p. 208)

Por otra parte, en el contenido 3, “Medición y cálculo geométrico”, se proponen actividades en las que los alumnos deben medir ángulos y calcular el perímetro y el área de determinadas figuras geométricas.

En la figura 4.3 se muestra una actividad en la que los alumnos deben utilizar el transportador para medir la amplitud de algunos ángulos.

En otra actividad se propone que los alumnos, sin hacer uso del transportador, identifiquen qué amplitud, en grados sexagesimales, corresponde a cada uno de los ángulos que se les indica (véase la figura 4.4).

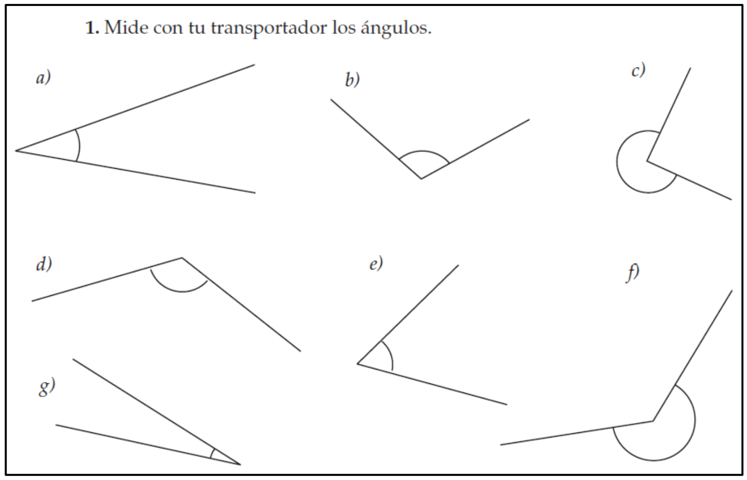


Figura 4.3. Actividad correspondiente al contenido 3.1 “Medición”

(Alarcón *et al.* 2001, p. 220)

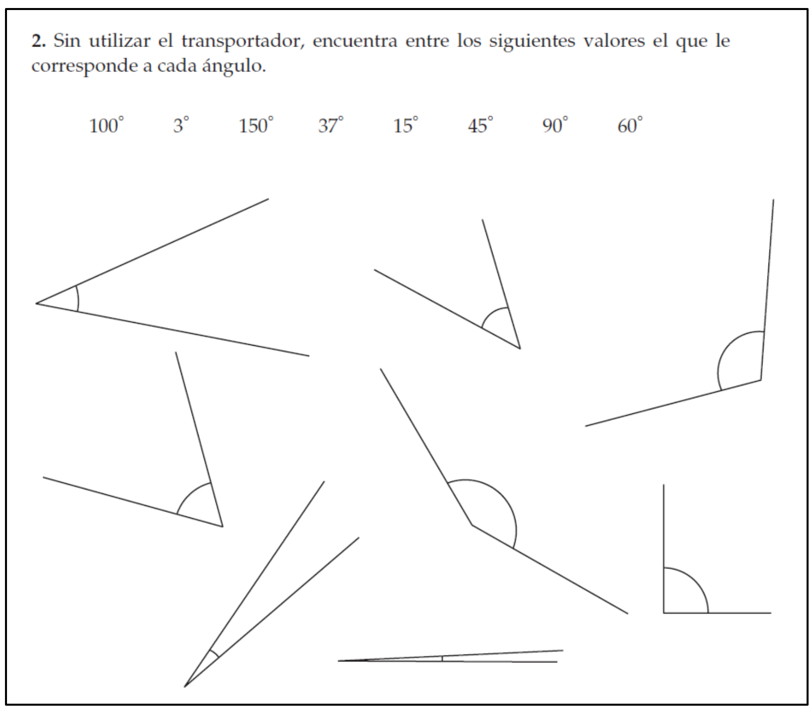


Figura 4.4. Actividad correspondiente al contenido 3.1 “Medición”

(Alarcón *et al.* 2001, p. 222)

Las actividades que se muestran en las figuras 4.3 y 4.4 no presentan dificultad alguna para su resolución, más bien, son actividades que permiten al alumno familiarizarse con los distintos tipos de ángulos (agudo, recto, obtuso, etcétera), además de conocer y utilizar el transportador para medir ángulos o en la construcción de figuras geométricas (Alarcón *et al.* 2001).

En la figura 4.5 se muestra una actividad en la que los alumnos deben calcular el perímetro y el área de algunas figuras que se puedan formar al unir cuatro triángulos congruentes, con la condición de que al juntarse dos triángulos tengan un lado en común. Ahora bien, como se sabe cuánto miden los lados del triángulo, será sencillo calcular el perímetro y el área de las figuras que se formen al unir los cuatro triángulos congruentes.

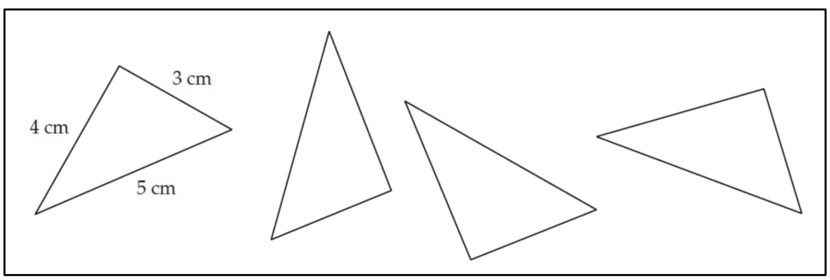


Figura 4.5. Actividad correspondiente al contenido 3.2 "Cálculo de perímetros y áreas" (Alarcón *et al.* 2001, p. 222)

Problemas en el Libro para el maestro

En cuanto a los 85 problemas que se identificaron en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001), éstos se organizaron en tres categorías: problemas de construcción (15), problemas de cálculo (60) y problemas de deducción de fórmulas (10).

Problemas de construcción

En cuanto a los 15 problemas de construcción que se proponen en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001), se identificaron dos tipos de construcciones: 10 relacionados con el trazo de líneas rectas y las construcciones de figuras geométricas bidimensionales, y 5 relacionados con la representación plana de cuerpos geométricos. A continuación se muestran algunos ejemplos.

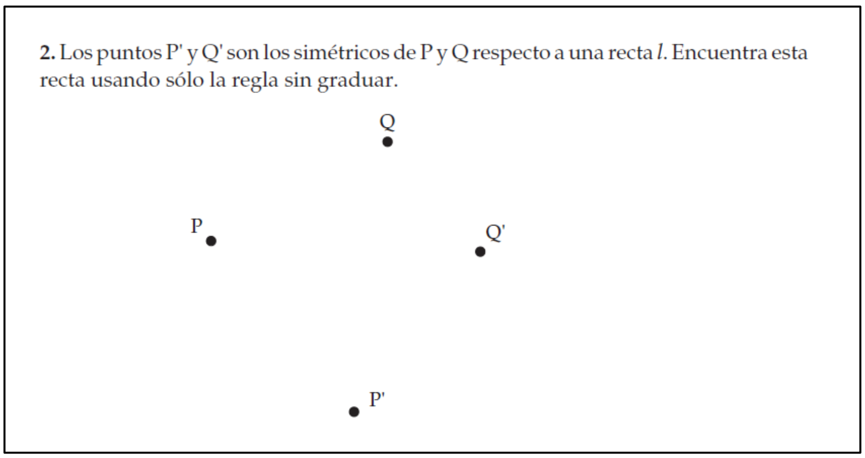


Figura 4.6. Problema correspondiente al contenido 2.5 “Simetría y transformaciones geométricas” (Alarcón *et al.* 2001, p. 214)

Problemas de construcción en dos dimensiones

En la figura 4.6 se muestra un problema de construcción relacionado con el trazo de líneas rectas y las construcciones de figuras geométricas bidimensionales. En este problema el alumno tiene que trazar el eje de simetría de los puntos P y P',Q y Q', usando solamente una regla sin graduar.

Este problema de construcción implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En el proceso de construcción, el alumno tiene que usar sus conocimientos geométricos para trazar líneas rectas perpendiculares haciendo uso de la regla sin graduar.

En el proceso de visualización, el alumno debe identificar que los puntos P' y Q' son los simétricos de los puntos P y Q, por lo que se encuentran a la misma distancia de su eje de simetría, es decir, de la recta *l*.

Para resolver este problema sin hacer uso del compás, el alumno debe identificar que al unir los puntos P y P', Q y Q', y encontrar el punto medio de los segmentos PP' y QQ', se puede trazar la recta *l*.

Para encontrar los puntos medios de $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$, el alumno debe identificar nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares. En este sentido, el alumno debe reconocer que al unir los puntos P' y Q', y los puntos P y Q, se forma el trapecio $PQQ'P'$ (véase la figura 4.7), y al trazar sus diagonales, éstas se cortan en un punto, N, el cual se encuentra sobre la recta *l*.

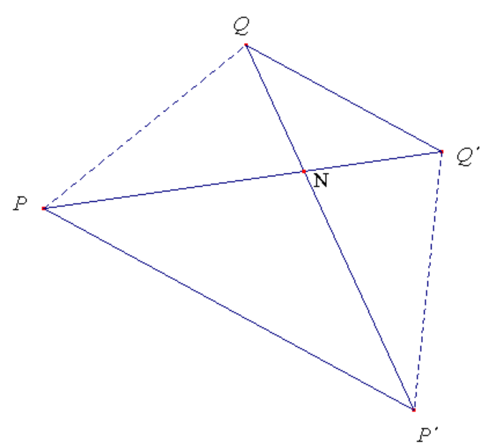


Figura 4.7. Trazos auxiliares para construir el trapecio $PQQ'P'$

Para identificar otro punto sobre la recta l, el alumno debe prolongar $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$del trapecio $PQQ'P'$, de tal manera que las prolongaciones se intersequen en un punto M. Una vez que se han encontrado los puntos M y N, el alumno debe trazar la recta que pasa por ellos, la cual es el eje de simetría de los puntos P y P', Q y Q' (véase la figura 4.8).

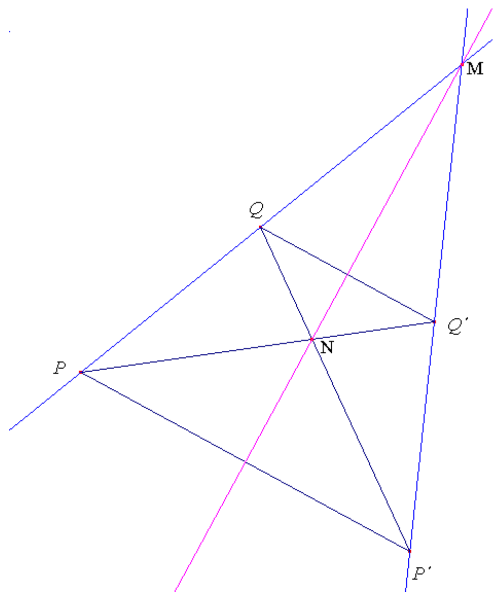


Figura 4.8. Resolución de un problema de simetría

En el razonamiento se distinguen tres tipos de procesos discursivos desarrollados por Duval (1998, p. 45): el proceso configural, el proceso discursivo natural y el proceso discursivo teórico. El primero se desarrolla cuando el alumno identifica nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares y reconoce aquellos que son relevantes en la resolución del problema. Este primer razonamiento no es suficiente para que el alumno resuelva el problema. El segundo razonamiento se lleva a cabo cuando el alumno argumenta de manera informal que al trazar las diagonales del trapecio $PQQ'P'$ y prolongar $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ se puede trazar el eje de simetría de las parejas de puntos P y P', y Q y Q'. En este tipo de razonamiento el alumno liga proposiciones a partir de la visualización del trapecio $PQQ'P'$ y los elementos geométricos que lo conforman.

Una vez que el alumno ha avanzado en su aprendizaje de la geometría, se esperaría que sus argumentos fueran más formales, es decir, que utilizara teoremas, axiomas o definiciones para resolver el problema (proceso discursivo teórico).

Problemas de representación plana de cuerpos geométricos

En el contenido 5, "Sólidos", se ubica el contenido particular "Representaciones planas", en el cual se sugiere que el alumno manipule objetos físicos y construya modelos geométricos. Los problemas de construcción que se sugieren permiten que los alumnos desarrollen sus habilidades para representar bidimensionalmente cuerpos geométricos.

Estos problemas de construcción consisten en que los alumnos dibujen algunas representaciones planas de cuerpos geométricos. También se les pide que dibujen e interpreten las vistas de un cuerpo geométrico. En la figura 4.9 se muestran algunos ejemplos de este tipo de construcción.

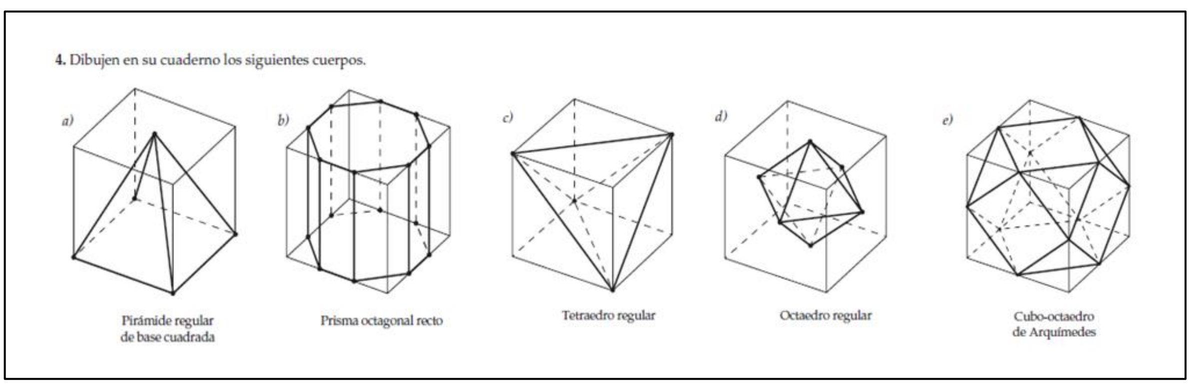


Figura 4.9. Problema correspondiente al contenido 5.1 "Representaciones planas" (Alarcón *et al.* 2001, p. 261)

Problemas de cálculo

En cuanto a los problemas de cálculo, se identificaron los siguientes tipos: problemas de cálculo de áreas, de cálculo de perímetros de determinadas figuras, cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos, problemas que se resuelven mediante el teorema de Pitágoras, problemas que se resuelven mediante el teorema de Tales, y problemas de razones trigonométricas. A continuación se muestran algunos ejemplos.

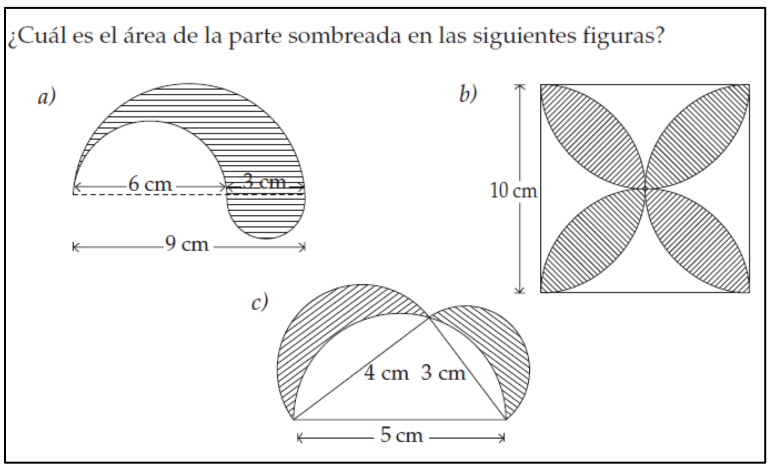


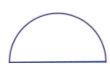
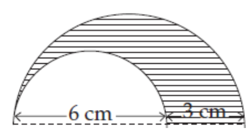
Figura 4.10. Problema correspondiente al contenido 3.2 “Calculo de perímetros y áreas” (Alarcón *et al.* 2001, p. 227)

Problemas de cálculo de áreas

En la figura 4.10 se muestra un problema en el que el alumno debe calcular el área de la parte sombreada de figuras compuestas. Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe identificar que cada figura está compuesta por círculos. Para resolver este problema, el alumno debe reconocer algunos elementos geométricos, tales como los tres semicírculos que forman la figura: uno de 9 cm de diámetro, otro de 6 cm y el tercero de 3 cm de diámetro. También debe hacer uso de sus conocimientos sobre cómo calcular el área de un círculo. El alumno debe identificar que el diámetro y el radio de un círculo no son lo mismo, además de que el diámetro es dos veces la longitud del radio del círculo, pues en ocasiones se llega a confundir y utiliza la longitud del diámetro en la fórmula para calcular el área del círculo.

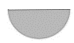
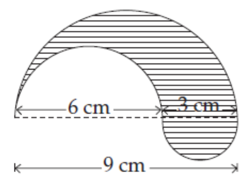
Ahora bien, en el inciso *a)* el alumno debe identificar que al restarle el área del semicírculo de 6 cm de diámetro a la del semicírculo de 9 cm de diámetro, podrá calcular el área de la región sombreada del semicírculo de diámetro mayor.

Cuadro 4.1. Cálculo de áreas de semicírculos

Área del semicírculo de 9 cm de diámetro	Área del semicírculo de 6 cm de diámetro	Área de la región sombreada del semicírculo de 9 cm de diámetro
 $A = \pi\ (4.5\ \text{cm})^2$ $A = \pi\ (20.25\ \text{cm}^2)$ $A = 63.6174\ \text{cm}^2$	 $A = \pi\ (3\ \text{cm})^2$ $A = \pi\ (9\ \text{cm}^2)$ $A = 28.2744\ \text{cm}^2$	 $A = 63.6174\ \text{cm}^2 - 28.2744\ \text{cm}^2$ $A = 35.343\ \text{cm}^2$

Una vez que el alumno ha calculado el área de la región sombreada del semicírculo de 9 cm de diámetro, debe calcular el área del semicírculo de 3 cm de diámetro y sumarla al área del semicírculo de diámetro mayor.

Cuadro 4.2. Cálculo del área de una región sombreada en una figura compuesta

Área del semicírculo de 3 cm de diámetro	Área de la región sombreada de la figura compuesta
	
$A = \pi\ (1.5\ \mathrm{cm})^2$ $A = \pi\ (2.25\ \mathrm{cm}^2)$ $A = 7.0686\ \mathrm{cm}^2$	$A = 35.343\ \mathrm{cm}^2 - 7.0686\ \mathrm{cm}^2$ $A = 28.2744\ \mathrm{cm}^2$

Para resolver el inciso *b)*, el alumno debe identificar nuevos elementos geométricos mediante trazos auxiliares (véase la figura 4.11), es decir, mediante el trazo de las diagonales del cuadrado $ABCD$, así como rectas perpendiculares del punto E a los lados del cuadrado $ABCD$.

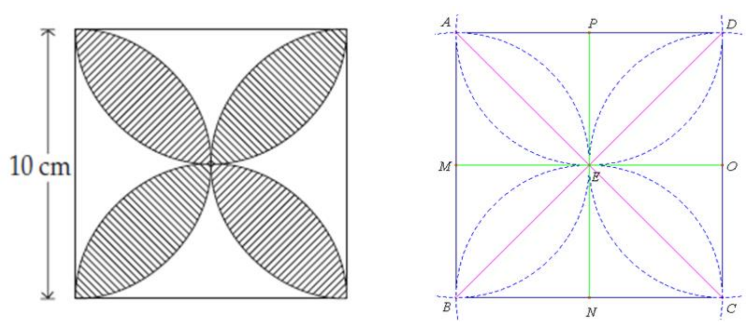


Figura 4.11. Trazo de las 2 diagonales del cuadrado $ABCD$ y de 2 rectas perpendiculares del punto E a los lados del mismo cuadrado

Para calcular el área de la región sombreada, el alumno debe identificar los triángulos rectángulos AED y BEC o los triángulos AEB y DEC, además de los dos semicírculos, uno con centro en el punto N y otro con centro en el punto P, o bien, con centro en los puntos M y O.

En este sentido, el alumno debe calcular el área de los triángulos rectángulos, así como el área del círculo. A partir de esta información, deberá calcular la diferencia de áreas de las figuras y, de esta manera, obtendrá el área de la mitad de la región sombreada (véase la figura 4.12).

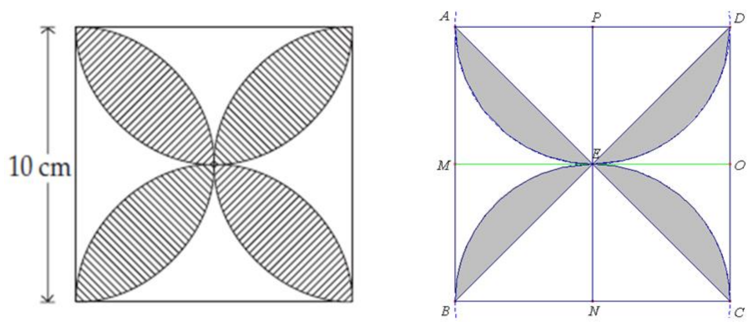
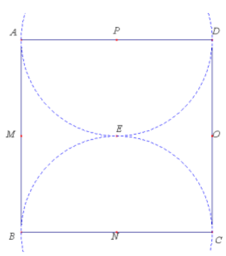
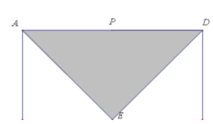
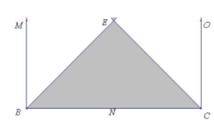


Figura 4.12. Diferencia de áreas

Cuadro 4.3. Cálculo de área del círculo y de los triángulos AED y BEC

Área del círculo	Área del triángulo AED	Área del triángulo BEC	Área de la mitad de la región sombreada
 $A = \pi(5\text{ cm})^2$ $A = \pi\,(25\text{ cm}^2)$ $A = 78.54\text{ cm}^2$	 $A = \frac{(10\text{ cm})(5\text{ cm})}{2}$ $A = 25\text{ cm}^2$	 $A = \frac{(10\text{ cm})(5\text{ cm})}{2}$ $A = 25\text{ cm}^2$	$A = 78.54 - 50\text{ cm}^2$ $A = 28.54\text{ cm}^2$

Ahora bien, para calcular el área de la región sombreada el alumno debe multiplicar $28.54\ \text{cm}^2$ por 2, obtenido como resultado $57.08\ \text{cm}^2$.

Este problema de cálculo de áreas también se puede resolver calculando el área del círculo y la del cuadrado que se forma con los dos triángulos rectángulos (véase la figura 4.13).

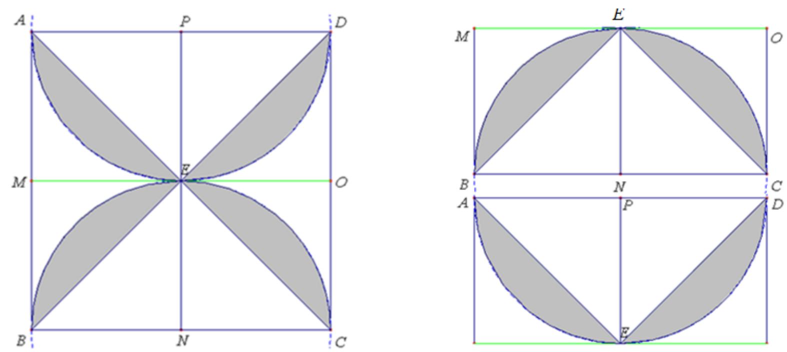


Figura 4.13. Otra forma de resolver un problema de cálculo de área de una parte sombreada del cuadrado $ABCD$

Para resolver el problema, el alumno debe identificar que las diagonales del cuadrado $ABCD$ miden 10 cm, por lo que los lados del cuadrado $AECE$, el cual se forma con los triángulos rectángulos AED y BEC, miden $\sqrt{50\ \text{cm}^2}$.

$$AD = 10\ \text{cm}$$

$$PD = 5\ \text{cm}$$

$$PE = 5\ \text{cm}$$

$$EC = \sqrt{(5\ \text{cm})^2 + (5\ \text{cm})^2}$$

$$EC = \sqrt{50\ \text{cm}^2}$$

Así, el área del cuadrado es de 50cm^2.

Ahora bien, para calcular el área de la región sombreada el alumno debe calcular el área del círculo y restarle el área del cuadrado. Finalmente, el resultado obtenido debe ser multiplicado por 2.

El área del círculo es igual a $78.54\ \text{cm}^2$ y el área del cuadrado $AECE$ es de $50\ \text{cm}^2$. Así, $78.54\ \text{cm}^2 - 50\ \text{cm}^2 = 28.54\ \text{cm}^2$, y el área de la región sombreada es igual a $57.08\ \text{cm}^2$.

En cuanto al inciso *c)*, el alumno debe identificar tres semicírculos de diámetros 3 cm, 4 cm y 5 cm respectivamente (véase la figura 4.14). Además, debe reconocer que un semicírculo es la mitad del círculo correspondiente, por lo que el resultado de calcular el área de un círculo tiene que dividirse entre 2 para calcular el área del semicírculo correspondiente.

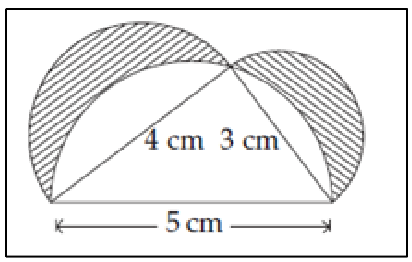


Figura 4.14. Problema correspondiente al contenido 3.2 “Calculo de perímetros y áreas” (Alarcón *et al.* 2001, p. 227)

Para resolver este problema, el alumno debe calcular el área de los tres semicírculos.

Cuadro 4.4. Cálculo de áreas de semicírculos

Área del semicírculo de 3 cm de diámetro	Área del semicírculo de 4 cm de diámetro	Área del semicírculo de 5 cm de diámetro
$A = \pi\,(1.5\text{ cm})^2$ $A = \pi\,(2.25\text{ cm}^2)$ $A = \frac{7.0686\text{ cm}^2}{2}$ $A = 3.5343\text{ cm}^2$	$A = \pi\,(2\text{ cm})^2$ $A = \pi\,(4\text{ cm}^2)$ $A = \frac{12.5664\text{ cm}^2}{2}$ $A = 6.2832\text{ cm}^2$	$A = \pi\,(2.5\text{ cm})^2$ $A = \pi\,(6.25\text{ cm}^2)$ $A = \frac{19.635\text{ cm}^2}{2}$ $A = 9.8175\text{ cm}^2$

Una vez que el alumno ha calculado las áreas de los tres semicírculos, deberá identificar que si calcula el área del triángulo y ésta la resta al área del semicírculo de 5 cm de diámetro, obtendrá el área de la región no sombreada de los semicírculos de diámetros 3 cm y 4 cm (véase la figura 4.15).

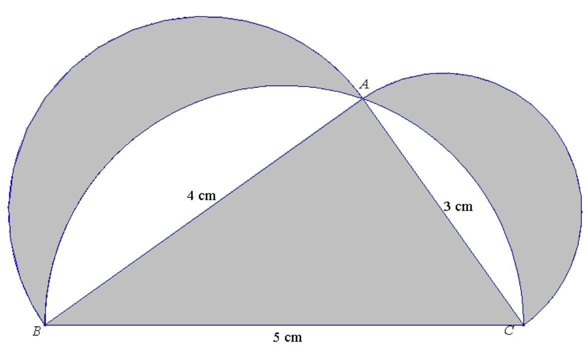


Figura 4.15. Región no sombreada del semicírculo de 5 cm de radio

Cuadro 4.5. Cálculo del área de la región que no está sombreada en la figura 4.15

Área del semicírculo de 5 cm de diámetro	Área del triángulo ABC	Área de la región no sombreada
$A = 9.8175\ \text{cm}^2$	$A = \dfrac{4\ \text{cm}\ \times\ 3\ \text{cm}}{2}$ $A = \dfrac{12\ \text{cm}^2}{2}$ $A = 6\ \text{cm}^2$	$A = 9.8175\ \text{cm}^2 - 6\ \text{cm}^2$ $A = 3.8175\ \text{cm}^2$

Para calcular el área de la región sombreada de la figura 4.16, el alumno debe sumar las áreas de los semicírculos de diámetros 3 cm y 4 cm, y a esta suma restarle el área de la región no sombreada de la figura 4.15.

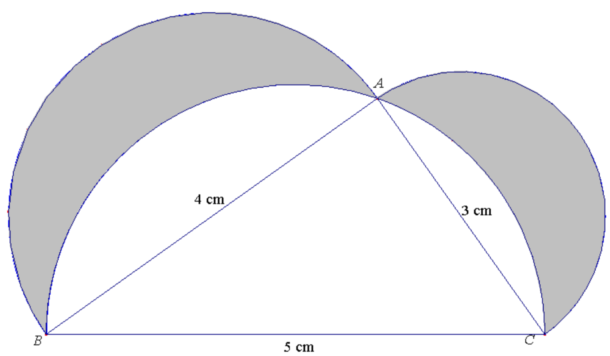


Figura 4.16. Región sombreada de los semicírculos de 4 cm y 3 cm de diámetro

El área del semicírculo de 4 cm de diámetro es igual a $6.2832\ \text{cm}^2$, el área del semicírculo de 3 cm de diámetro es de $3.5343\ \text{cm}^2$, y el área de la región no sombreada de la figura 4.15 es de $3.8175\ \text{cm}^2$. Así, $6.2832\ \text{cm}^2 + 3.5343\ \text{cm}^2 = 9.8175\ \text{cm}^2$, y a esta suma debe restarse 3.8175 cm^2. Finalmente, el área de la región sombreada de la figura 4.16 es de 6 cm^2.

En cuanto al proceso de razonamiento, en cada uno de los incisos del problema el alumno identifica nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares, los cuales le servirán para resolver el problema.

Cuando el alumno de manera informal establece relaciones entre las áreas de los círculos y las figuras geométricas que se muestran en cada inciso, mediante la superposición u operación de las figuras, su razonamiento es de tipo discursivo natural. Este razonamiento fue suficiente para resolver el problema. Sin embargo, cuando el alumno de manera formal hace uso de uso de teoremas, axiomas o definiciones para resolver el problema, el proceso de razonamiento es de tipo discursivo teórico.

Por otra parte, otros problemas de cálculo de áreas que se proponen en el *Libro para el maestro* permiten que el alumno ponga en acción sus conocimientos sobre las características de figuras geométricas, cuerpos geométricos y el teorema de Pitágoras (véase la figura 4.17).

Con la resolución de estos problemas, el alumno "[…] explora las características de las secciones que se forman al cortar un sólido por un plano […]" (Alarcón *et al.* 2001, p. 265).

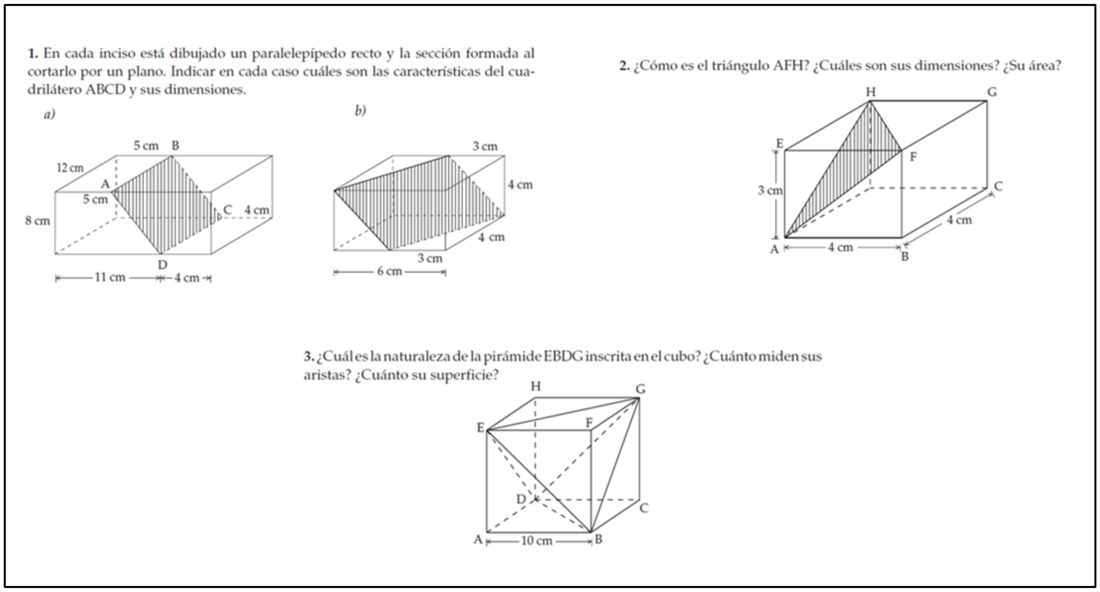


Figura 4.17. Problema correspondiente al contenido 5.1 “Representaciones planas”

(Alarcón *et al.* 2001, p. 261)

Problemas de cálculo de perímetros

En la figura 4.18 se muestra la representación de un problema en el que el alumno debe calcular la longitud de un cordel con el que se sujeta una caja en forma de paralelepípedo.

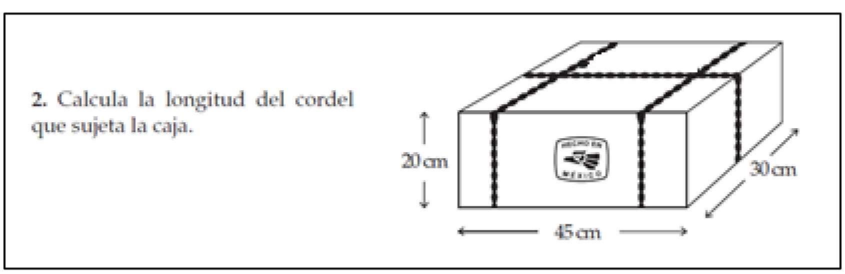


Figura 4.18. Problema correspondiente al contenido 3.2 “Cálculo de perímetros y áreas”

(Alarcón *et al.* 2001, p. 223)

Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe reconocer que las caras de la caja son rectangulares y que son seis.

Para resolver este problema, el alumno debe identificar que la caja tiene tres pares de caras rectangulares de iguales longitudes, es decir, las dimensiones de $ABCD$ y $HEFG$ son 45 cm de largo y 20 cm de altura; las dimensiones de $ABHG$ y $DCEF$ son 30 cm de largo y 20 cm de altura; las dimensiones de $ADFG$ y $BCEH$ son 45 cm de largo y 30 cm de altura (véase la figura 4.19).

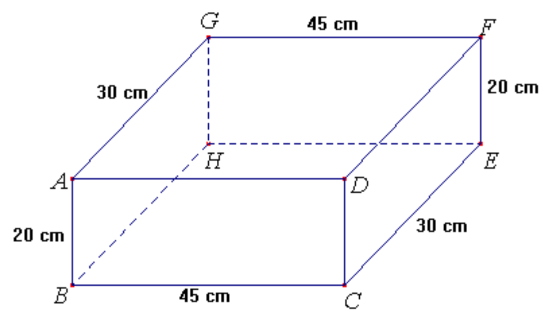


Figura 4.19. Longitudes de las caras de una caja en forma de paralelepípedo

El alumno debe calcular la longitud de cordel que abarca cada una de las caras que forman la caja.

En la cara $ABCD$ de la caja (véase la figura 4.20), el alumno debe identificar que sólo se está considerando su altura, la cual es de 20 cm. En esta cara se encuentran dos partes de cordel de 20 cm cada una, por lo que la longitud de cordel que se encuentra en la cara $ABCD$ es de 40 cm. Ahora bien, el alumno debe reconocer que la cara $GHEF$ tiene la misma longitud de cordel que la cara $ABCD$, por ser dos caras rectangulares de iguales longitudes.

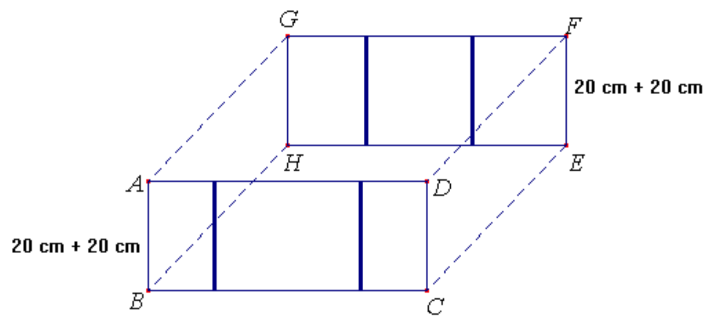


Figura 4.20. Longitud de cordel que rodea las caras $GHEF$ y $ABCD$ de una caja en forma de paralelepípedo

Por otra parte, las caras $ABHG$ y $DCEF$ tienen 20 cm de altura, por lo que la longitud de cordel que se encuentra en las caras es de 40 cm, es decir, 20 cm en cada cara (véase la figura 4.21).

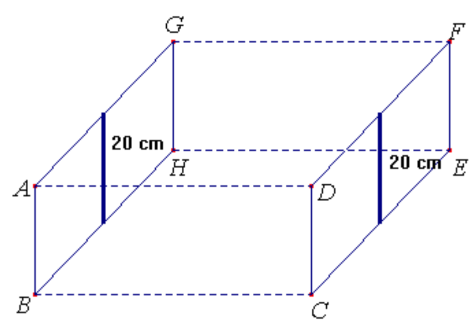


Figura 4.21. Longitud de cordel que rodea las caras $ABHG$ y $DCEF$ de una caja en forma de paralelepípedo

Las caras $ADFG$ y $BCEH$ miden 45 cm de largo y 30 cm de altura; así, la longitud de cordel que las rodea es de 210 cm (véase la figura 4.22).

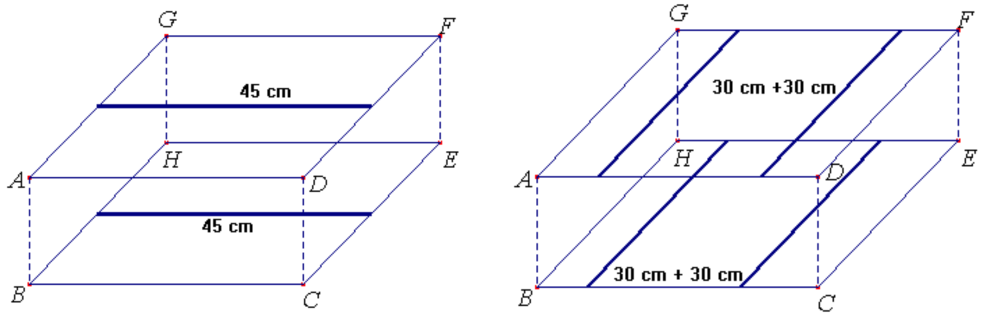


Figura 4.22. Longitud de cordel que rodea las caras $ADFG$ y $BCEH$ de una caja en forma de paralelepípedo

Finalmente, el alumno debe sumar las longitudes de cordel que rodean cada una de las caras de la caja para calcular la longitud de cordel con el que se sujeta la caja.

Cuadro 4.6. Cálculo de la longitud de cordel que rodea la caja

Caras de la caja	Longitudes de cordel	Total
ABCD y *GHEF*	40 cm + 40 cm	80 cm
ABHG y *DCEF*	20 cm + 20 cm	40 cm
ADFG y *BCEH*	45 cm + 45 cm + 30 cm + 30 cm +30 cm + 30 cm	210 cm
	Total	330 cm

En cuanto al proceso de razonamiento, el alumno reconoce que la caja tiene tres pares de caras rectangulares de iguales longitudes. Además, identifica que el cordel rodea aquellas caras que no son perceptibles. Este razonamiento es de tipo configural y no es suficiente para que el alumno resuelva el problema. Sin embargo, cuando el alumno, mediante la visualización y los elementos geométricos que conforman el problema, efectúa operaciones con las longitudes del cordel que abarca cada una de las caras de la caja, el proceso de razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo natural y es suficiente para resolver el problema.

Problemas de cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos

En la figura 4.23 se muestra un problema en el que el alumno debe calcular la capacidad de un cono truncado. Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe hacer uso de sus conocimientos sobre el cálculo del volumen de un cono, así como del teorema de Tales.

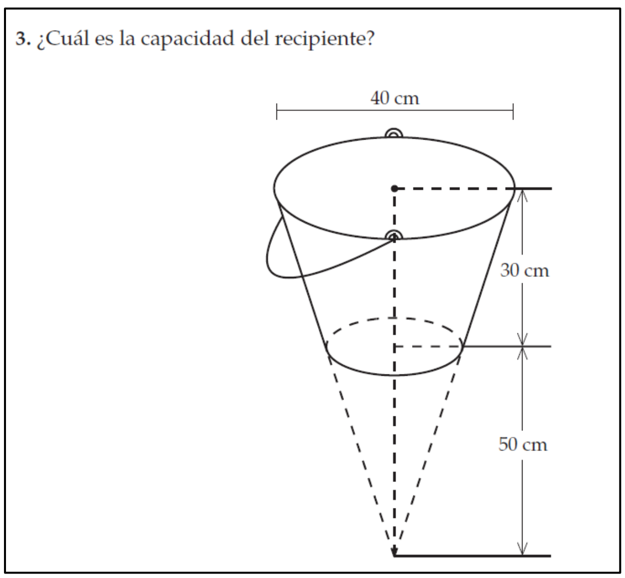


Figura 4.23. Problema correspondiente al contenido 3.4 “Aplicaciones al estudio de los sólidos” (Alarcón *et al.* 2001, p. 232)

En este problema, el alumno debe identificar dos conos: el primero de 80 cm de altura y 40 cm de diámetro, y el segundo de 50 cm de altura. También debe reconocer que el radio del círculo es la mitad de la longitud de su diámetro, por lo que el radio del cono de 40 cm diámetro es de 20 cm.

Para resolver el problema, el alumno debe identificar dos triángulos semejantes, ΔABC y ΔNMC, formados por los radios de los dos conos, así como la generatriz y la altura del cono de mayor longitud (véase la figura 4.24).

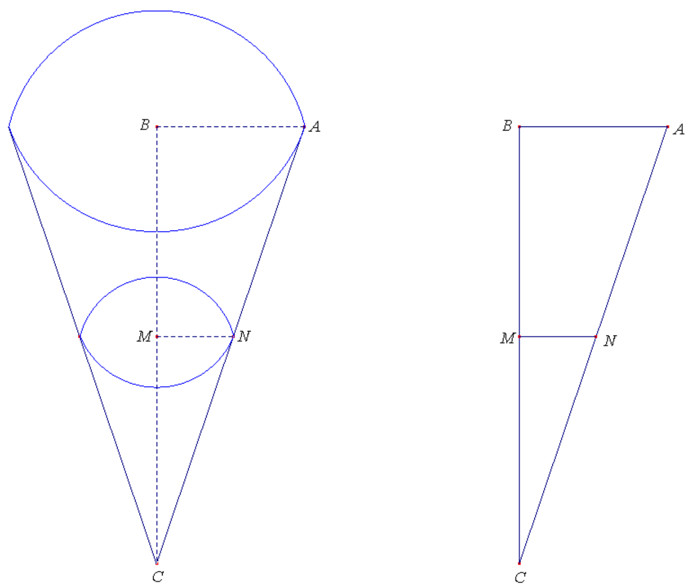


Figura 4.24. Representación de triángulos semejantes formados por los radios de dos conos, la generatriz y la altura del cono de mayor longitud

Una vez que el alumno ha identificado los triángulos semejantes, deberá hacer uso del teorema de Tales y establecer una proporción a partir de la cual se llega a que $MN = 12.5$ cm:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{MC}{MN}$$

$$\frac{80}{20} = \frac{50}{MN}$$

$$4 = \frac{50}{MN}$$

$$MN = \frac{50}{4}$$

$$MN = 12.5$$

Como MN es el radio del cono de 50 cm de altura, el alumno podrá calcular la capacidad de éste y restársela al cono de 80 cm de altura para determinar la capacidad del recipiente del problema.

Cuadro 4.7. Resolución del problema de la capacidad de un cono truncado

Capacidad del cono de 80 cm de altura	Capacidad del cono de 50 cm de altura	Capacidad del recipiente
$V = \frac{\pi(20 \text{ cm})^2(80 \text{ cm})}{3}$ $V = \frac{\pi\ (32000 \text{ cm}^3)}{3}$ $V = 33510.4 \text{ cm}^3$	$V = \frac{\pi(12.5 \text{ cm})^2(50 \text{ cm})}{3}$ $V = \frac{\pi\ (7812.5 \text{ cm}^3)}{3}$ $V = 8181.25 \text{ cm}^3$	$V = 33510.4 \text{ cm}^3 - 8181.25 \text{ cm}^3$ $V = 25329.15 \text{ cm}^3$

En cuanto al proceso de razonamiento, el alumno reconoce elementos geométricos que le ayudarán a resolver el problema, como son los dos triángulos semejantes ABC y NMC. Este razonamiento no es suficiente para resolver el problema, pero sí para identificar aquellos elementos geométricos que son relevantes en el problema.

Cuando el alumno hace uso del teorema de Tales y establece relaciones entre las longitudes de los segmentos, el proceso de razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo teórico.

Problemas que se resuelven mediante el teorema de Pitágoras

En la figura 4.25 se muestra un problema en el que el alumno tiene que calcular la longitud de la diagonal de un paralelepípedo.

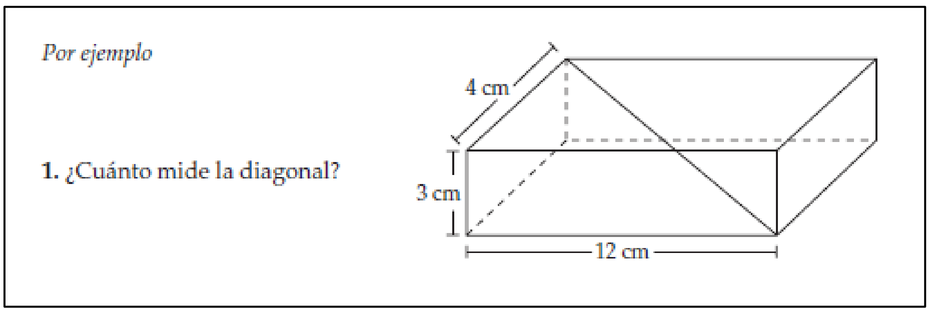


Figura 4.25. Problema correspondiente al contenido 3.2 “Calculo de perímetros y áreas” (Alarcón *et al.* 2001, p. 223)

Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe reconocer algunos elementos geométricos que le permitirán resolver el problema. También debe reconocer que todas las caras del paralelepípedo son rectangulares, ya que podría confundirse y considerar que las caras inferior y superior son romboides (véase la figura 4.26).

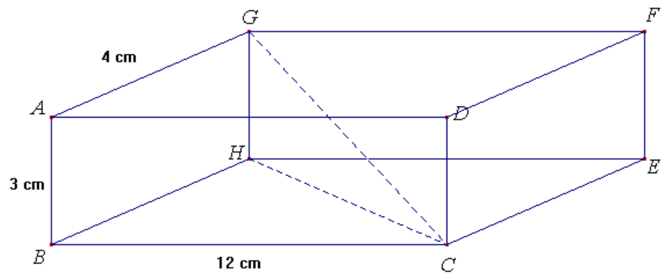


Figura 4.26. Trazo auxiliar para calcular GC

Para resolver este problema, el alumno debe hacer uso del teorema de Pitágoras. También debe identificar en el paralelepípedo dos triángulos rectángulos, ΔGHC y ΔHBC.

Para determinar cuánto mide la diagonal del paralelepípedo, el alumno debe calcular la longitud de HC, y para ello deberá hacer uso del teorema de Pitágoras. Se tiene que $HB = 4$ cm y $BC = 12$ cm. Por lo que

$$HC = \sqrt{(4\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2} = \sqrt{16\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2} = \sqrt{160\text{ cm}^2}.$$

Una vez que el alumno ha calculado la longitud de HC, utilizando nuevamente el teorema de Pitágoras podrá calcular la longitud de la diagonal del paralelepípedo. Se tiene que $HC = \sqrt{160\text{ cm}^2}$ y $HG = 3$ cm. Por lo que

$$\begin{aligned}(GC)^2 &= (3\text{ cm})^2 + \left(\sqrt{160\text{ cm}^2}\right)^2\\ (GC)^2 &= 9\text{ cm}^2 + 160\text{ cm}^2\\ (GC)^2 &= 169\text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\sqrt{(GC)^2} = \sqrt{169\text{ cm}^2}$$

$$GC = 13\text{ cm.}$$

Este problema, en el que el alumno debe determinar la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo mediante el teorema de Pitágoras, también se puede resolver mediante trigonometría; es decir, el alumno debe "[…] determinar uno de los ángulos agudos utilizando la razón tangente si se tienen los dos catetos, o utilizando alguna de las razones seno o coseno si se tiene un cateto y la hipotenusa. También se puede determinar […] mediante razones trigonométricas empleando uno de los lados conocidos si se tiene la amplitud de uno de los ángulos agudos […]" (Reyes 2009, p. 25).

En cuanto al proceso de razonamiento, el alumno identifica nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares, además reconoce los dos triángulos rectángulos GHC y HBC. Este razonamiento es de tipo configural y, aunque no es suficiente para resolver el problema, desempeña un papel importante para que el alumno reconozca elementos geométricos que le ayudarán a resolverlo.

Cuando el alumno, mediante la visualización y los elementos geométricos que conforman el problema, hace uso del teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal del paralelepípedo, el proceso de razonamiento es de tipo discursivo teórico y es suficiente para resolver el problema.

Problemas que se resuelven mediante el teorema de Tales

En la figura 4.27 se muestra la representación de un problema en el que el alumno tiene que calcular la distancia que hay de una isla a la orilla del mar.

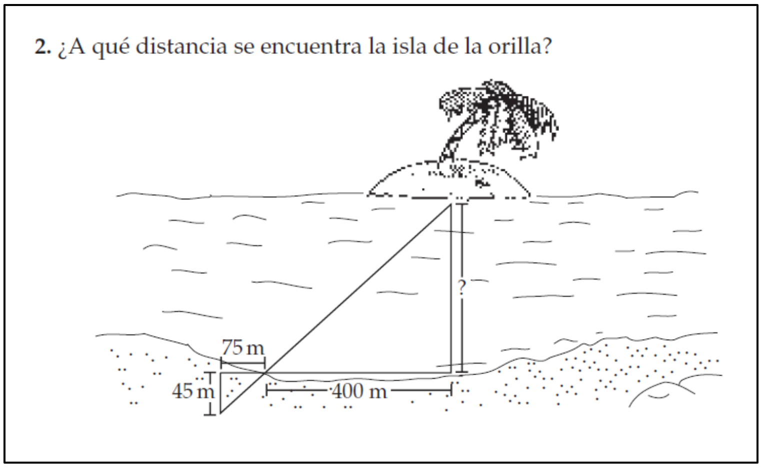


Figura 4.27. Problema correspondiente al contenido 3.3 “Teorema[s] de Pitágoras, semejanza y el cálculo geométrico” (Alarcón *et al.* 2001, p. 230)

Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe reconocer elementos geométricos que le permiten identificar triángulos rectángulos semejantes (véase la figura 4.28).

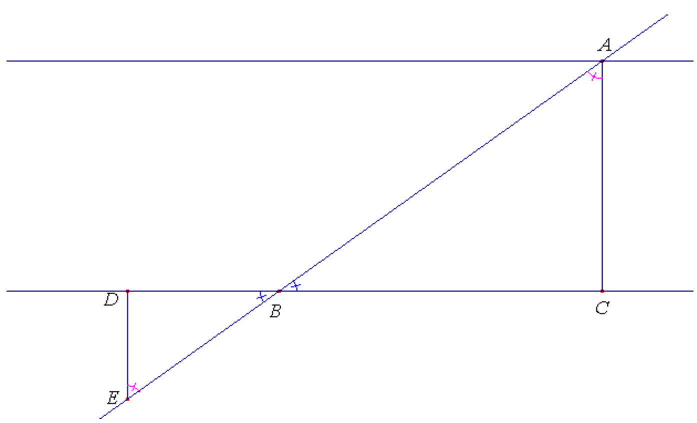


Figura 4.28. Representación de triángulos semejantes para el cálculo de la longitud del segmento AC

$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DBE$ por ser ángulos opuestos por el vértice

$\measuredangle BAC \cong \measuredangle DEB$ por ser ángulos alternos internos

$\therefore \Delta\, ABC \sim \Delta\, BDE$

Una vez que el alumno ha identificado que los triángulos ABC y BDE son semejantes, debe hacer uso del teorema de Tales para calcular la distancia que hay de la isla a la orilla del mar, es decir, AC del triángulo ABC.

$BC = 400$ m

$DB = 75$ m

$DE = 45$ m

Con estos valores, el alumno debe establecer una proporción a partir de la cual se llega a que $AC = 240$ m:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{BC} &= \frac{DE}{DB} \\ \frac{AC}{400} &= \frac{45}{75} \\ \frac{AC}{400} &= 0.6 \\ AC &= 0.6 \times 400 \\ AC &= 240. \end{aligned}$$

En este sentido, la distancia que hay de la isla a la orilla del mar es de 240 m.

En cuanto al razonamiento durante la resolución del problema, éste se desarrolla cuando el alumno identifica y demuestra que los triángulos ABC y BDE son semejantes. Esto le permite hacer uso del teorema de Tales y así calcular la distancia que hay de la isla a la orilla del mar.

Cuando el alumno utiliza teoremas, axiomas o definiciones para resolver un problema como en este caso, el razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo teórico.

Problemas de razones trigonométricas

En la figura 4.29 se muestra la representación de un problema en el que el alumno debe calcular la altura de un edificio y la de una antena. Para ello debe hacer uso de la trigonometría.

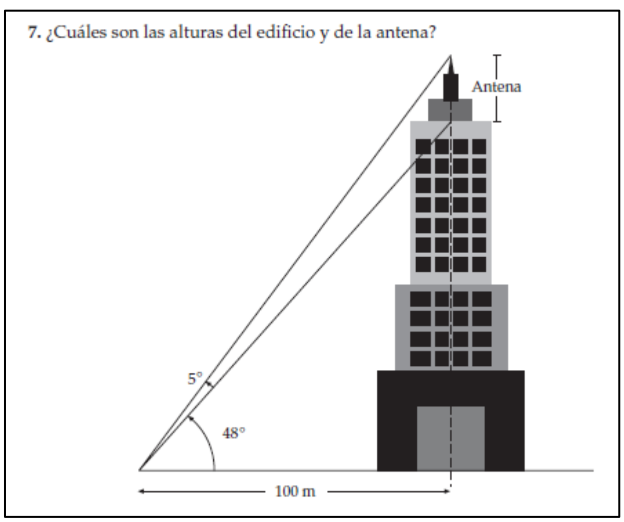


Figura 4.29. Problema correspondiente al contenido 3.5 “La trigonometría y el cálculo de distancias inaccesibles” (Alarcón *et al.* 2001, p. 239)

Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe identificar dos triángulos rectángulos, uno formado por el piso y el edificio, el ΔABC y el otro formado por el piso y el edificio junto con la antena, el ΔABE (véase la figura 4.30). También debe identificar que el ΔABC y el ΔEBC tienen un lado en común de 100 m de longitud.

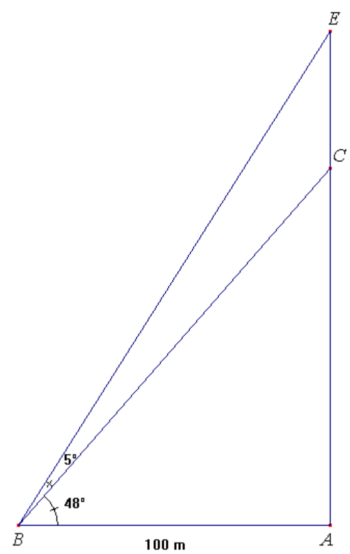


Figura 4.30. Representación de triángulos rectángulos para el cálculo de los segmentos AC y EC

Para calcular la altura del edificio y la antena, el alumno debe hacer uso de las razones trigonométricas. El alumno debe utilizar la razón trigonométrica tangente para calcular la altura del edificio, es decir, AC.

$$\tan 48° = \frac{AC}{100 \text{ m}}$$

$$\tan 48° \,(100 \text{ m}) = AC$$

$$AC = 111.06 \text{ m}$$

Por otra parte, el alumno debe reconocer el triángulo rectángulo EBA y utilizar la razón trigonométrica tangente para calcular la altura AE del edificio y la antena. También debe identificar que el ángulo EBA es de $53°$, es decir, la suma de los ángulos EBC y CBA.

$$\tan 53° = \frac{AE}{100 \text{ m}}$$

$$\tan 53° \,(100 \text{ m}) = AE$$

$$AE = 132.70 \text{ m}$$

El alumno debe reconocer que AE es la altura del edificio y la antena. Luego, para calcular la altura de la antena el alumno debe restar la longitud de AC a AE.

$$AE - AC = EC$$

$$132.70 \text{ m} - 111.06 \text{ m} = EC$$

$$21.64 \text{ m} = EC$$

Así, la altura de la antena es de 21.64 m.

En cuanto al proceso de razonamiento, el alumno identifica los triángulos ABC y EBA y determina elementos geométricos que le ayudarán a resolver el problema. Sin embargo, cuando el alumno hace uso de la trigonométrica para calcular alturas y así resolver el problema, el razonamiento es del tipo discursivo teórico.

Problemas de deducción de fórmulas

En la figura 4.31 se muestra la representación de un problema en el que el alumno debe determinar la fórmula para calcular el área de un paralelogramo.

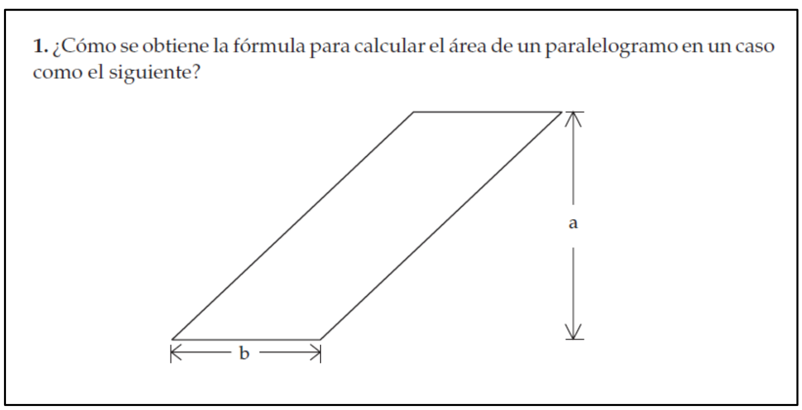


Figura 4.31. Problema correspondiente al contenido 4.1. "Razonamiento deductivo" (Alarcón *et al.* 2001, p. 250)

Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe reconocer algunos elementos geométricos que le permiten resolver el problema. También debe hacer uso de sus conocimientos sobre cómo calcular el área de un triángulo y un paralelogramo.

Para resolver el problema, el alumno debe trazar una de las diagonales del paralelogramo $ABCD$ (así aparecen en el planteamiento original junto con la figura) y establecer relaciones entre cada una de las figuras que se encuentran sobre el paralelogramo $ABCD$ (véase la figura 4.32).

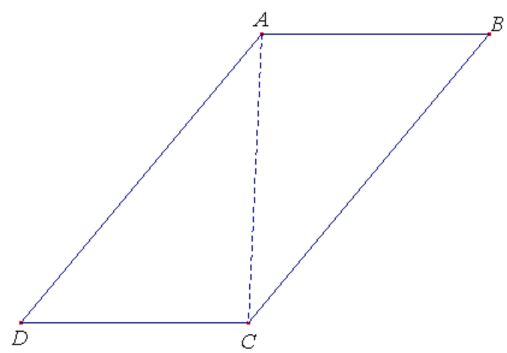


Figura 4.32. Trazo de una diagonal del paralelogramo $ABCD$

El alumno debe distinguir en el paralelogramo $ABCD$ dos triángulos congruentes ABC y ADC, los cuales son el resultado de dividir el paralelogramo $ABCD$ en dos partes iguales, mediante una de sus diagonales. También debe identificar que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y que las longitudes de las alturas del paralelogramo y los triángulos ABC y ADC son iguales por estar entre las mismas rectas paralelas; además, que las áreas de los triángulos ABC y ADC son iguales cuando se construyen sobre las mismas paralelas y que el área del paralelogramo $ABCD$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABC y ADC.

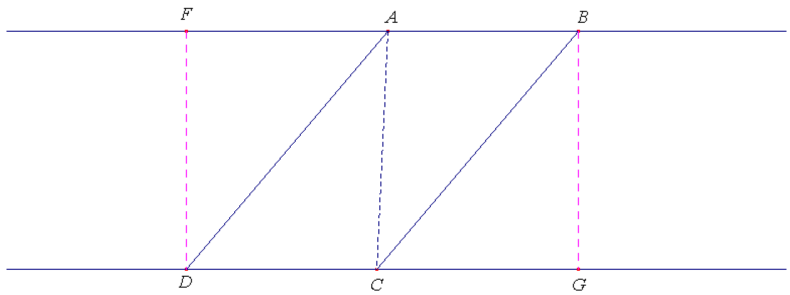
A partir de esta información, el alumno deberá hacer uso de la fórmula para el cálculo del área del triángulo y así obtener la fórmula para calcular el área del paralelogramo (véase el cuadro 4.8).

Cuadro 4.8. Resolución del problema de la fórmula del área de un paralelogramo

Fórmula para calcular el área de un triángulo	Fórmula para calcular el área de un paralelogramo
$A = \frac{b \times h}{2}$	$A = \left(\frac{b \times h}{2}\right) \times 2$ $A = b \times h$

En el razonamiento se distinguen tres tipos de procesos en relación con los desarrollados por Duval (1998, p. 45): el proceso configural, el proceso discursivo natural y el proceso discursivo teórico. El primero se desarrolla cuando el alumno identifica todos los elementos geométricos en el paralelogramo $ABCD$, y reconoce aquellos que son relevantes en el problema. Este primer razonamiento no es suficiente para que el alumno resuelva el problema. El segundo razonamiento tiene lugar cuando el alumno argumenta de manera informal que las áreas de los triángulos ABC y ADC son iguales, estableciendo relaciones entre las figuras, es decir, de manera informal el alumno liga proposiciones a partir de la visualización del paralelogramo $ABCD$ y los elementos geométricos que lo conforman. Este tipo de razonamiento es suficiente para que el alumno resuelva el problema.

Cuando el alumno ha logrado mayores aprendizajes de geometría, se esperaría que sus argumentos fueran más formales, por lo que el uso de teoremas, axiomas o definiciones son importantes para resolver el problema (proceso discursivo teórico).



$\overline{AC}$ es la diagonal del paralelogramo $ABCD$

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ por ser lados del paralelogramo

$\therefore \Delta\, ADC \;\cong\; \Delta\, ABC$

Como $\overline{DC}$ es la misma base del paralelogramo $ABCD$ y del triángulo ADC, y sus alturas están entre rectas paralelas, se tiene que el paralelogramo tiene el doble del área del triángulo, pues la diagonal $\overline{AC}$ lo divide en dos partes iguales.

En las proposiciones 34 y 41 del libro I de los *Elementos* de Euclides se enuncia la relación entre el área de un paralelogramo y un triángulo:

> En las áreas de paralelogramos los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales. (Euclides 2000, p. 62)

> Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo. (Euclides 2000, p. 70)

En la siguiente sección se muestran los resultados de la clasificación y análisis de algunos problemas de geometría y ejercicios de aplicación en el *Fichero de actividades didácticas.*

Fichas de actividades del *Fichero de actividades didácticas*

El *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) consta de 54 fichas de actividades, de las cuales 21 comprenden contenidos de geometría (39%) y 33 fichas corresponden a otros contenidos matemáticos (61%): 28 fichas corresponden a contenidos del eje temático *1)* Sentido numérico y pensamiento algebraico (52%) y 5 de las 33 fichas comprenden contenidos del eje *3)* Manejo de la información (9%).

Para esta investigación, las fichas de actividades de geometría se organizaron en dos categorías: ejercicios y problemas. Se identificaron 7 ejercicios (33%) y 14 problemas (67%). Esta organización se basó en las definiciones de problema de matemáticas y ejercicio de aplicación, así como en sus diferencias, descritas en el capítulo II.

En las siguientes dos subsecciones primero se tratan los ejercicios y después los problemas.

Ejercicios en el Fichero de actividades didácticas

Las actividades de las 7 fichas consideradas como ejercicios no presentan dificultad alguna para su resolución, más bien, son actividades que permiten al alumno explorar algunas de las propiedades de las figuras planas. Para ello, se propone trabajar con algunos materiales como el geoplano, espejos, palillos, plastilina y hojas cuadriculadas (hexaminós). A continuación se muestran algunos casos; se eligieron con base en su utilización por parte de la autora de esta tesis en su desempeño docente.

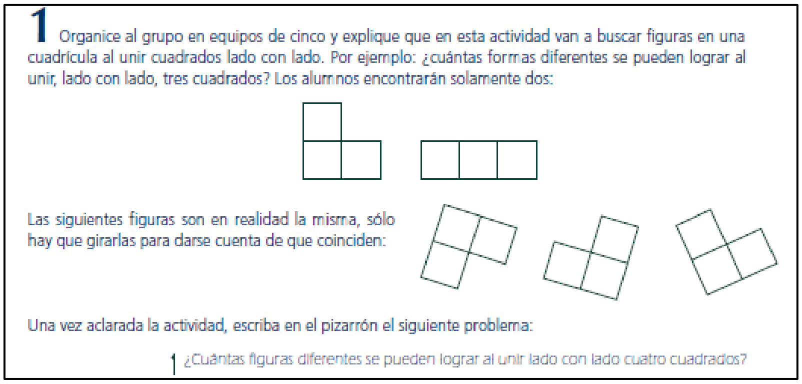


Figura 4.33. Ficha de actividad correspondiente al tema “Sólidos” (Espinoza, García y García 2000, p. 38)

En las actividades de la ficha 1.15 (véase la figura 4.33) se pide formar diferentes figuras planas de 3, 4, 5 y 6 unidades cuadradas para encontrar la representación plana de un cubo. Con ello se pretende que los alumnos desarrollen su imaginación espacial (Espinoza, García y García 2000, p. 38) construyendo sólidos a partir de una representación plana. Una vez que los alumnos han encontrado todas las figuras formadas por 3, 4 y 5 cuadrados, se les solicita que indiquen con cuáles de esas figuras formadas por 5 cuadrados es posible doblar sus aristas para encontrar una caja sin tapa (véase la figura 4.34). Esta misma actividad se emplea para obtener las diferentes representaciones planas con las que se puede formar un cubo.

2 Escriba en el pizarrón el siguiente problema:

¿Cuántas formas diferentes se pueden lograr al unir lado con lado cinco cuadrados?
¿Cuáles de estas formas se pueden doblar para formar una caja sin tapa?

Figura 4.34. Ficha de actividad correspondiente al tema “Sólidos” (Espinoza, García y García 2000, p. 38)

Aunque en las actividades de la ficha se usa la palabra "problema", no quiere decir que éste lo sea. En realidad, es posible desarrollar las actividades que se proponen a través de "[…] la aplicación de técnicas automatizadas […]" (Juidías y Rodríguez 2007, p. 261) para formar las figuras que cumplan con las condiciones solicitadas. Por consiguiente, es posible que se pierda el interés del alumno durante esta búsqueda exhaustiva de todas las posiciones en las que se puede colocar un cuadrado para verificar con cuál de las representaciones planas se puede formar un cubo.

Por otra parte, en las fichas de actividades 1.9 y 2.5 (véase el cuadro 3.7: temas de geometría en el fichero de actividades) se trabaja con los temas de Simetría axial y Simetría central, así como sus propiedades. En éstas se hace uso de los espejos para comprobar si una figura tiene ejes de simetría o si la línea que divide a determinada letra es o no un eje de simetría (véanse las figuras 4.35 y 4.36).

1 Organice a los alumnos en cuatro equipos. A manera de ejemplo, formen en el geoplano un triángulo con un solo eje de simetría y señalen el eje. Enseguida plantee una de las siguientes actividades a cada equipo.

> Formen, en el geoplano:
> a) Triángulos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
> b) Cuadriláteros distintos que tengan sólo un eje de simetría.
> c) Pentágonos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
> d) Hexágonos distintos que tengan sólo un eje de simetría.
>
> Después digan qué características tienen esas figuras.
> Pida que se busque el mayor número posible de figuras con esas características. Ganará el equipo que lo consiga.

Figura 4.35. Ficha de actividad correspondiente al tema "Simetría axial" (Espinoza, García y García 2000, p. 26)

En la figura 4.35 se muestra una de las actividades de la ficha 1.9 para primer grado. En ésta se solicita a los alumnos que en el geoplano formen cuatro figuras geométricas (triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos), las cuales deben cumplir con una condición: tener un solo eje de simetría.

Es posible que el desarrollo de esta actividad represente una dificultad de orden conceptual al determinar qué es un cuadrilátero y qué figuras geométricas lo representan. Quizá, para algunos alumnos los polígonos irregulares de cuatro lados no representan un tipo de cuadrilátero, por lo que es posible que sólo consideren cuadrados, rectángulos, trapecios y rombos.

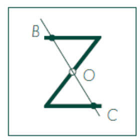
Ahora bien, para verificar que las figuras representadas en el geoplano cumplen con tener un solo eje de simetría, se les solicita a los alumnos que hagan uso de un espejo para comprobar que se cumple la condición y, posteriormente, se les indica que expongan qué características tienen las figuras que formaron. En la misma ficha, se les pide a los alumnos que formen cuadriláteros, hexágonos y octágonos que tengan dos ejes de simetría y expongan sus características.

En la figura 4.36 se muestra otro caso en el que se emplea el espejo como material de apoyo para verificar qué letras mayúsculas del abecedario tienen eje de simetría. También se sugiere el uso del doblado de papel o hacer una copia de la letra para superponerla a la original e identificar el eje de simetría o el centro de simetría de las letras.

1 Organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos. Proporcione a cada equipo varias hojas cuadriculadas y una copia del anexo A. Dibuje en el pizarrón las letras A y Z y señale lo siguiente:

La letra A tiene simetría axial, porque si trazan la línea *m* (que es su eje de simetría) y doblan la letra sobre ese eje, las partes de la izquierda y de la derecha en que el eje divide a la letra A, coinciden una con otra.

Ahora observen la letra Z. Ésta no tiene simetría axial, pero *sí* tiene simetría central, esto es, el punto O tiene la siguiente propiedad: si escogen un punto *B* cualquiera sobre la letra y trazan una línea que pase por ese punto y el punto O, dicha línea tocará un punto C sobre la letra; si fijan el punto O y giran la letra 180° observarán que *B* pasará al lugar del punto C, y viceversa.



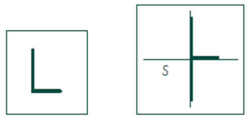
En hojas de papel cuadriculado tracen las letras mayúsculas del abecedario y contesten las siguientes preguntas:
a) ¿Qué letras del abecedario tienen **sólo** simetría axial? Compruébenlo.
b) ¿Qué letras del abecedario tienen **sólo** simetría central? Compruébenlo.
c) ¿Cuáles tienen simetría axial y central? Compruébenlo.

Figura 4.36. Ficha de actividad correspondiente al tema “Reflexión respecto a una recta. Reflexión respecto a un punto” (Espinoza, García y García 2000, p. 56)

En esta misma ficha se propone que el alumno construya una figura simétrica a otra, a partir del eje de simetría o del centro de simetría (véase la figura 4.37).

2 Indique a sus alumnos que van a seguir trabajando en equipos, con las mismas letras del abecedario. A continuación explique en qué consiste la actividad.

a) La letra L no tiene ejes de simetría. Observen cómo se procedió para construir una nueva figura que tiene un eje de simetría.



Se trazó la línea s, de modo que ésta fuera el eje de simetría de la figura.

Elige al menos cinco letras que no tengan eje de simetría y construye figuras de sólo un eje de simetría.

b) A partir de la letra L construye una figura con dos ejes de simetría.

c) La letra A tiene un solo eje de simetría; con esta letra se puede construir otra figura que tenga simetría central y dos ejes de simetría. En la figura construida el centro de simetría es el punto O.

Construyan la figura y comprueben que tiene dos ejes de simetría, y que el punto O es el centro de simetría de la figura.

¿Qué letras del abecedario permiten construir otra figura que tenga dos ejes de simetría y además simetría central? Constrúyanlas y verifiquen que cumplen con las condiciones.

Figura 4.37. Ficha de actividad correspondiente al tema "Reflexión respecto a una recta. Reflexión respecto a un punto" (Espinoza, García y García 2000, p. 57)

En estas dos fichas se pretende que el alumno explore las propiedades de las figuras que son simétricas a otras, respecto a un eje o a un centro de simetría. Sin embargo, no se formalizan los conceptos de simetría axial y simetría central ni sus propiedades, ya que se da a entender que la simetría axial es el reflejo de una imagen en el espejo y no se especifica qué es la correspondencia de posición, tamaño y forma entre dos figuras, tomando como referencia una línea recta que se conoce como eje de simetría.

Problemas en el Fichero de actividades didácticas

En cuanto a los 14 problemas que se identificaron en el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000), éstos se organizaron en tres categorías: problemas de construcción (14%), problemas de cálculo (72%) y problemas de deducción de fórmulas (14%).

En el cuadro 4.9 se muestra la clasificación de los problemas del *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) y su distribución en cada grado escolar. Se identificó que para tercer grado no hay problemas de construcción ni problemas de deducción de fórmulas; solamente en segundo grado se trabaja con fichas de actividades en las que se proponen algunos de los tres tipos de problemas: construcción, cálculo y deducción de fórmulas.

Cuadro 4.9. Clasificación de los problemas del *Fichero de actividades didácticas*

Tipo de problema	Grado escolar	Ficha
Construcción	I	1.5 Figuras básicas y ángulos
	II	2.1 Trazos geométricos y figuras básicas
Cálculo	I	1.2 Dibujos y trazos geométricos 1.12 Cálculo de perímetros y áreas 1.17 Longitud de la circunferencia y área del círculo
	II	2.16 Primeras exploraciones en el círculo
	III	3.6 Raíz cuadrada y métodos de aproximación 3.12 Dibujo, escala y homotecias 3.13 Semejanza y teorema de Pitágoras 3.15 Sólidos

[Continúa]

Cuadro 4.9. [Concluye]

Tipo de problema	Grado escolar	Ficha
Cálculo	III	3.16 Trigonometría: razones trigonométricas de un ángulo agudo (cálculo y primeras aplicaciones) 3.17 Problemas de trigonometría
Deducción de fórmulas	II	2.15 Ángulos entre paralelas 2.9 Descomposición de figuras y equivalencias de áreas

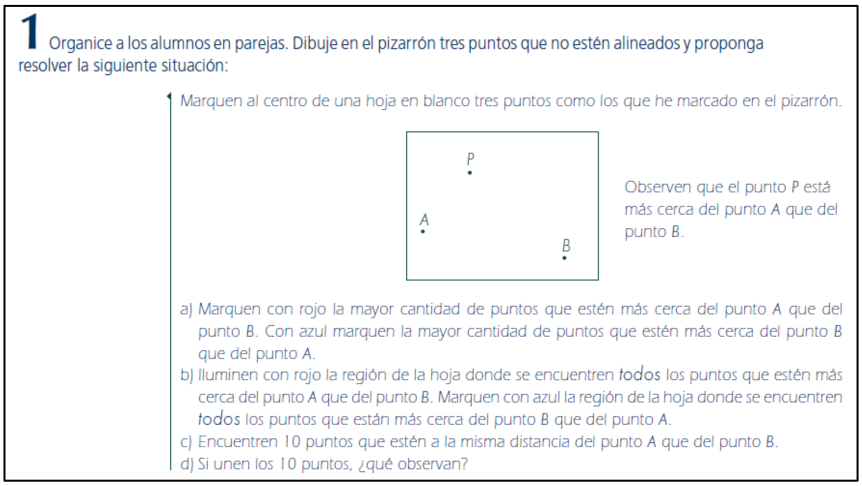
En el cuadro 4.10 se resume la distribución de los problemas por su clasificación y grado escolar. Se identificó que son muy pocos los problemas de deducción de fórmulas y de construcción (28%), así como los problemas destinados para primer y segundo grados. Se observa también que en tercer grado se encuentran la mayoría de los problemas de cálculo (44%).

Cuadro 4.10. Distribución de los problemas por su clasificación y grado escolar

Clasificación / Grado	Construcción	Cálculo	Deducción de fórmulas	Total
I	1	3	0	4
II	1	1	2	4
III	0	6	0	6
Total	2	10	2	14

Problemas de construcción

Se identificaron 2 problemas de construcción; en uno se exploran las propiedades de algunas figuras geométricas y en otro se exploran las propiedades de la mediatriz. A continuación se muestra un ejemplo.



1 Organice a los alumnos en parejas. Dibuje en el pizarrón tres puntos que no estén alineados y proponga resolver la siguiente situación:

Marquen al centro de una hoja en blanco tres puntos como los que he marcado en el pizarrón.

P

A

B

Observen que el punto *P* está más cerca del punto *A* que del punto *B*.

a) Marquen con rojo la mayor cantidad de puntos que estén más cerca del punto *A* que del punto *B*. Con azul marquen la mayor cantidad de puntos que estén más cerca del punto *B* que del punto *A*.
b) Iluminen con rojo la región de la hoja donde se encuentren *todos* los puntos que estén más cerca del punto *A* que del punto *B*. Marquen con azul la región de la hoja donde se encuentren *todos* los puntos que están más cerca del punto *B* que del punto *A*.
c) Encuentren 10 puntos que estén a la misma distancia del punto *A* que del punto *B*.
d) Si unen los 10 puntos, ¿qué observan?

Figura 4.38. Ficha de actividad correspondiente al tema “Trazo geométrico y figuras básicas” (Espinoza, García y García 2000, p. 48)

En la figura 4.38 se muestra un problema en el que el alumno debe “[…] explora[r] las propiedades de la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos […]” (Espinoza, García y García 2000, p. 48). Este problema se divide en cuatro incisos. En el primer inciso se pide al alumno marcar con color rojo la mayor cantidad de puntos que se encuentren más cerca del punto A que de B y con color azul la mayor cantidad de puntos que se encuentren más cerca del punto B que del A; se esperaría que el alumno utilizara sus conocimientos de geometría para encontrar el punto medio de $\overline{AB}$ y trazar una recta perpendicular por éste (véase la figura 4.39). Sin embargo, es posible que el alumno utilice la regla o el compás para medir la distancia del punto A a un punto cualquiera y determinar qué puntos cumplen con las condiciones.

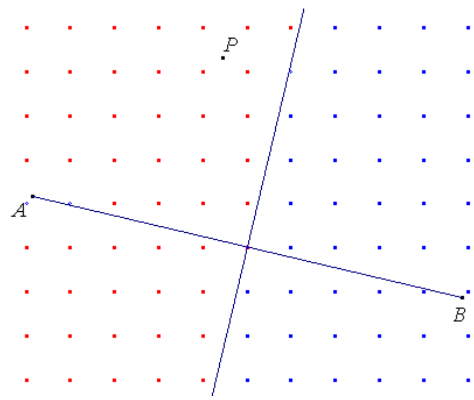


Figura 4.39. Trazo de una recta perpendicular al segmento AB

En el inciso *b)*, el alumno debe marcar con color rojo la región que se encuentre más cerca del punto A que del B y con color azul la región que se encuentra más cerca del punto B que del A (véase la figura 4.40). Para responder el inciso *b)*, el alumno debe saber qué es una región.

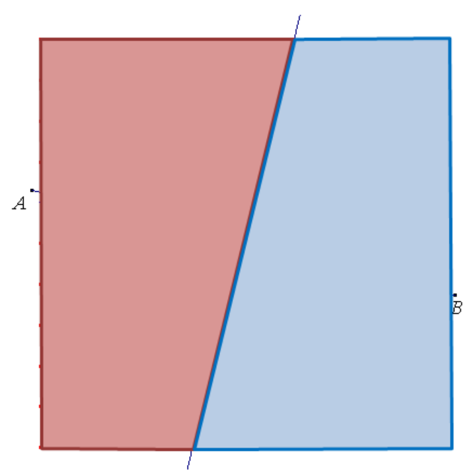


Figura 4.40. Región que se encuentra más cerca del punto A que del B, y viceversa

En el inciso *c)*, el alumno debe identificar 10 puntos que se encuentren a la misma distancia del punto A que del punto B. En los incisos anteriores se puede identificar que los puntos que se encuentran a la misma distancia del punto A que del punto B se ubican sobre la mediatriz de $\overline{AB}$.

Para responder el inciso *d)*, el alumno debe identificar que los 10 puntos del inciso *c)* se encuentran sobre una misma línea recta.

En esta misma ficha se propone un segundo problema. Éste consiste en que el alumno construya un triángulo escaleno ABC y localice los puntos que se encuentran a la misma distancia de A y de B, así como de A y de C, y de B y de C, es decir, implícitamente se pide al alumno que determine las mediatrices del triángulo ABC. También se le pide que localice el punto en el que se intersecan las tres mediatrices del triángulo (circuncentro). Aunque en este problema no se utilizan las palabras mediatriz y circuncentro, se sugiere hacer uso de la terminología propia de la geometría. En este problema, el alumno puede apoyarse del procedimiento que utilizó para resolver el primer problema, por lo que no representa mayor dificultad para su resolución. Sin embargo, es probable que la construcción del triángulo escaleno ABC le represente mayores dificultades.

Además de estos dos problemas, se sugieren otros en los que el alumno debe trazar la mediatriz de determinados segmentos e indicar sus propiedades, o bien, mediante la mediatriz construir un triángulo isósceles rectángulo, un cuadrado, un papalote y un rombo.

Problemas de cálculo

Se identificaron 10 fichas de actividades en las que se resuelven problemas de cálculo de áreas y de perímetros de determinadas figuras, así como problemas que pueden resolverse con el uso de la trigonometría y con la aplicación del teorema de Pitágoras. A continuación se exponen algunos ejemplos.

1 Proponga al grupo resolver el siguiente problema en equipos de cuatro o cinco alumnos:

a) Calculen el perímetro y el área de un pentágono regular que mide 10 cm por lado.

b) Utilizando funciones trigonométricas, calculen el perímetro y el área de un heptágono, un octágono, un eneágono, etcétera, cuyos lados midan 20 cm respectivamente.

Figura 4.41. Ficha de actividad correspondiente al tema “Problemas de trigonometría” (Espinoza, García y García 2000, p. 118)

En la figura 4.41 se muestra un problema de cálculo en el que el alumno tiene que hacer uso de sus conocimientos sobre razones trigonométricas y polígonos. Este problema está integrado por dos incisos. En el primero se pide al alumno calcular el perímetro y el área del pentágono regular conociendo la longitud de uno de sus lados. En el segundo inciso se solicita al alumno hacer uso de razones trigonométricas para calcular el perímetro y el área de determinados polígonos regulares conociendo la longitud de uno de sus lados.

Ahora bien, calcular el perímetro del polígono regular no presenta dificultad alguna para la resolución del problema, basta con sumar las longitudes de los lados del pentágono o multiplicar 10 cm por la cantidad de sus lados. Sin embargo, calcular su área presenta mayores dificultades.

Para calcular el área del pentágono regular, el alumno debe reconocer cuánto mide el ángulo interior del pentágono y, posteriormente, usar la razón trigonométrica tangente para determinar la medida faltante, es decir, el apotema. La figura original del problema fue modificada para su mejor comprensión (véase la figura 4.42).

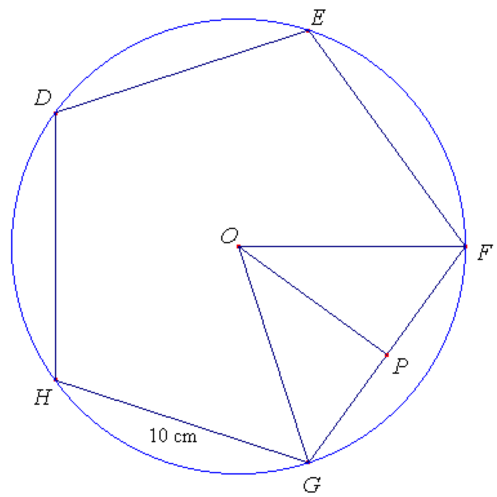


Figura 4.42. Medidas de elementos del polígono regular $DEFG$

Desde el punto de vista cognitivo, este problema implica dos procesos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización, el alumno debe reconocer en el pentágono algunos elementos que sirven para resolver el problema.

$\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \cong \overline{HD}$,

$GH = 10$ cm.

$\therefore \ DE = EF = FG = HD = 10$ cm.

Además, $\overline{OG} \cong \overline{OF}$, por ser radios del mismo círculo.

Entonces, el triángulo FOG es isósceles y su altura está representada por $\overline{OP}$, cuya longitud se debe calcular. El alumno también debe identificar que $\overline{GP} \cong \overline{FP}$ y que cada uno de estos segmentos mide la mitad de $\overline{FG}$.

Se identifican tres triángulos, FOG, FOP y GPO. Es importante que el alumno identifique los dos triángulos rectángulos que se forman en el triángulo isósceles FOG, ya que para calcular el área del pentágono se emplean razones trigonométricas.

Para resolver el problema, el alumno debe calcular el valor de uno de los ángulos del triángulo rectángulo FOP o del triángulo GPO. Para ello, deberá apoyarse en sus conocimientos sobre cómo calcular la suma de los ángulos internos de cualquier polígono (contenido 8.3.3 del programa de estudios de matemáticas de 2011). En la figura 4.43 se muestran dos de las diagonales del pentágono regular, como trazos auxiliares para calcular el valor de los ángulos internos del pentágono.

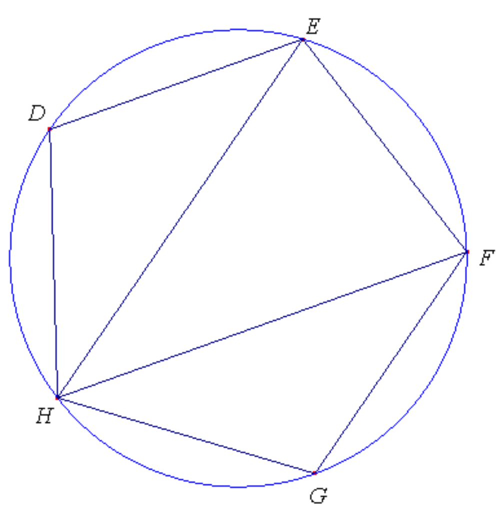


Figura 4.43 Dos diagonales del pentágono regular, $\overline{HE}$ y $\overline{HF}$

Una vez trazadas las diagonales $\overline{HE}$ y $\overline{HF}$ del pentágono, el alumno tiene que identificar tres triángulos, EDH, EHF y FHG, y determinar que la suma de los ángulos internos de éstos es igual a la suma de los ángulos internos del pentágono ($180° \times 3 = 540°$).

Ahora bien, es necesario que el alumno reconozca que $540°$ es la suma de los 5 ángulos internos del pentágono. Así, para calcular el valor de uno de sus ángulos basta con dividir $540°$ entre 5, obteniéndose $108°$. Además, el alumno debe identificar que los triángulos OHG y OGF son congruentes (véase la figura 4.44) y que $\overline{OG}$ es un lado común de ambos triángulos, por lo que el ángulo $PGO = 54°$.

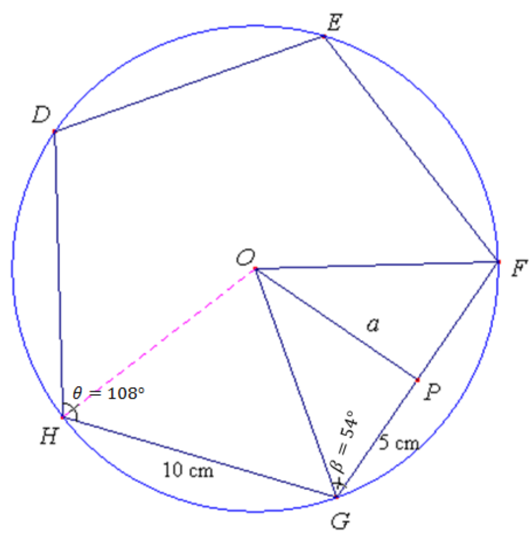


Figura 4.44. Trazos auxiliares para calcular la longitud del apotema (a) del polígono regular $DEFG$

Una vez que se ha determinado la longitud del lado $\overline{GP}$ del triángulo rectángulo (5 cm) y la amplitud de su ángulo PGO (54°), el alumno deberá poner en acción sus conocimientos sobre razones trigonométricas para calcular la longitud del apotema (a).

$$\tan\beta = \frac{OP}{GP}$$

$$\tan 54° = \frac{a}{5\ cm}$$

$$\tan(54°)\ (5\text{ cm}) = a$$

$$a = 6.88\text{ cm}$$

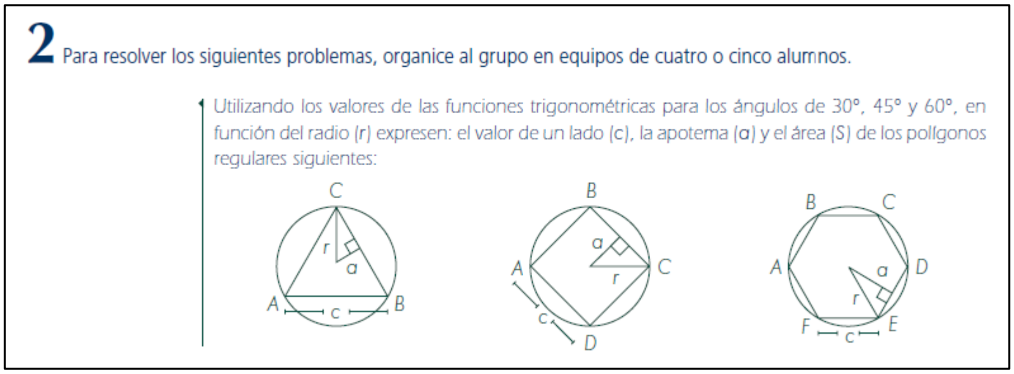
(Se tomó una aproximación con dos valores decimales.)

Con esta información es posible calcular el área del pentágono regular, sustituyendo en la fórmula los valores obtenidos.

En esta misma ficha se propone un segundo problema (Espinoza, García y García 2000, p. 118). En éste el alumno tiene que hacer uso de sus conocimientos sobre lenguaje algebraico para expresar el valor de un lado, el apotema y el área de determinados polígonos regulares en función del radio (véase la figura 4.45). Este problema presenta mayor dificultad para su resolución.

En la figura 4.45 se muestra un problema en el que el alumno tiene que calcular el valor de los ángulos internos de los polígonos regulares y utilizar razones trigonométricas para encontrar las longitudes de las apotemas (a) y los lados de cada uno de los polígonos

(c). Una vez calculados los valores de (a) y (c), es posible determinar el área de los polígonos regulares.


2 Para resolver los siguientes problemas, organice al grupo en equipos de cuatro o cinco alumnos.

1 Utilizando los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60°, en función del radio (r) expresen: el valor de un lado (c), la apotema (a) y el área (S) de los polígonos regulares siguientes:

Figura 4.45. Ficha de actividad correspondiente al tema “Problemas de trigonometría” (Espinoza, García y García 2000, p. 118)

Para resolver este problema, el alumno tiene que reconocer que un polígono regular tiene sus lados iguales y también sus ángulos internos. Asimismo, tiene que hacer uso de sus conocimientos sobre la suma de los ángulos internos de triángulos. Así, el alumno debe reconocer que cada ángulo interno del triángulo inscrito en el círculo es de 60° sexagesimales.

Para expresar el valor del apotema del triángulo ABC, el alumno debe identificar el triángulo rectángulo CFG y su ángulo FCG igual a 30°sexagesimales, es decir, la mitad del ángulo ACB (véase la figura 4.46).

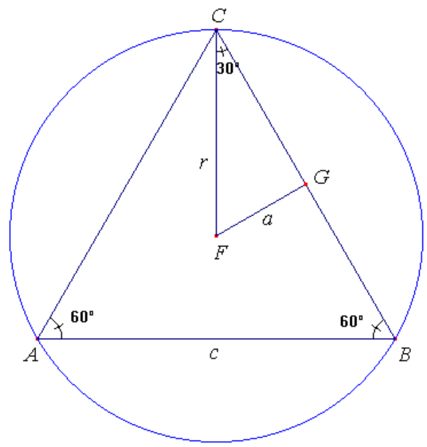


Figura 4.46. Triángulo acutángulo ABC inscrito en un círculo

El alumno debe hacer uso de razones trigonométricas y del lenguaje algebraico para expresar el valor de a.

$$\text{seno } C = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{seno } 30° = \frac{a}{r}$$

$$(r)\text{seno } 30° = a$$

Para expresar el valor de c, el alumno debe apoyarse del triángulo rectángulo CFG, las razones trigonométricas y del lenguaje algebraico. Si utiliza la razón trigonométrica coseno, el alumno debe reconocer que el cateto adyacente al ángulo FCG, $\overline{CG}$, es la mitad de c.

$$\text{coseno C} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno } 30° = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)}{r}$$

$$2r\ co\text{seno } 30° = c$$

Finalmente, para expresar el área del triángulo ABC en función de r, el alumno debe sustituir los valores en la fórmula para calcular el área de un polígono regular.

$$A = \frac{(3)2r\ \text{coseno } 30°(r)\text{seno } 30°}{2}$$

Estos problemas de cálculo son idénticos a los que se proponen en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001, p. 241).

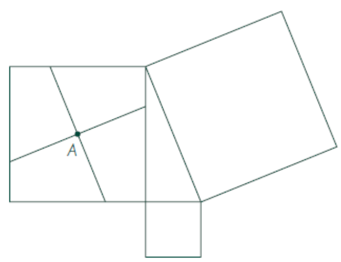
Ahora bien, en los procesos de visualización y de razonamiento implicados en los dos problemas, el alumno puede recurrir a trazos auxiliares en la figura inicial para distinguir elementos que permiten comprender y resolver el problema. También se hace uso de definiciones, teoremas y fórmulas que le permiten establecer relaciones entre los lados y los ángulos internos de determinado polígono regular.

Problemas de deducción de fórmulas

En la ficha 2.9 se aborda el teorema de Pitágoras y algunas de sus demostraciones basadas en la equivalencia de áreas (véase la figura 4.47). Con esta ficha se inicia al alumno en el razonamiento deductivo y en la resolución de problemas que implican calcular el área de las figuras que conforman cada una de las demostraciones que se proponen (Espinoza, García y García 2000, p. 64).

1 Escriba en el pizarrón las siguientes instrucciones. Pida a los alumnos que las lleven a cabo usando un cuarto de cartulina.

- Tracen la siguiente figura siguiendo las instrucciones.



a) Tracen un triángulo rectángulo cualquiera.
b) Construyan sobre cada uno de sus lados un cuadrado.
c) Localicen el centro del cuadrado del cateto mayor (llamen *A* a este punto).
d) Tracen una paralela a la hipotenusa que pase por el punto *A*.
e) Tracen una perpendicular a la hipotenusa que también pase por el punto *A*.

Una vez que tengan la figura completa, recorten los cuadrados de los catetos. Corten el cuadrado del cateto mayor en las cuatro partes que quedaron marcadas. Con estas cuatro piezas y el cuadrado menor traten de cubrir el cuadrado de la hipotenusa.

- ¿Se pudo formar el cuadrado de la hipotenusa?
- ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado de la hipotenusa y las áreas de los cuadrados de los catetos?

Figura 4.47. Ficha de actividad correspondiente al tema "Descomposición de fórmulas y equivalencia de áreas" (Espinoza, García y García 2000, p. 64)

Esta demostración fue descubierta por Henry Perigal, hacia 1830 (González 2008, p. 179). En la figura 4.47 se muestra un problema que consiste en hacer esta demostración.

> El cuadrado sobre el mayor de los catetos del triángulo rectángulo se divide en cuatro partes iguales, mediante dos segmentos perpendiculares que se cortan en el

> centro del cuadrado, siendo, además, uno de ellos paralelo a la hipotenusa. Desplazando paralelamente estas cuatro piezas, junto con el cuadrado sobre el cateto menor, es posible componer, yuxtaponiendo las cinco piezas, el cuadrado sobre la hipotenusa. (González 2008, p. 179)

Este problema de deducción de fórmulas implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En cuanto al proceso de construcción, el alumno tiene que hacer uso de sus conocimientos geométricos para construir un triángulo rectángulo y un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo, así como las figuras que conforman las demostraciones que se proponen.

Por otra parte, el alumno se tendrá que enfrentar a la situación de determinar qué es un cateto y qué es una hipotenusa mediante la figura que se muestra y las indicaciones que se plantean (véase la figura 4.47).

En cuanto al proceso de visualización, el alumno debe identificar que las cuatro figuras que se encuentran construidas sobre el cuadrado que tiene por longitud el cateto mayor del triángulo rectángulo son iguales.

En el problema se le solicita al alumno cortar los dos cuadrados y las cuatro figuras iguales que se encuentran construidas sobre el cuadrado que tiene por longitud el cateto mayor del triángulo rectángulo, y con éstas cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo (véase la figura 4.48).

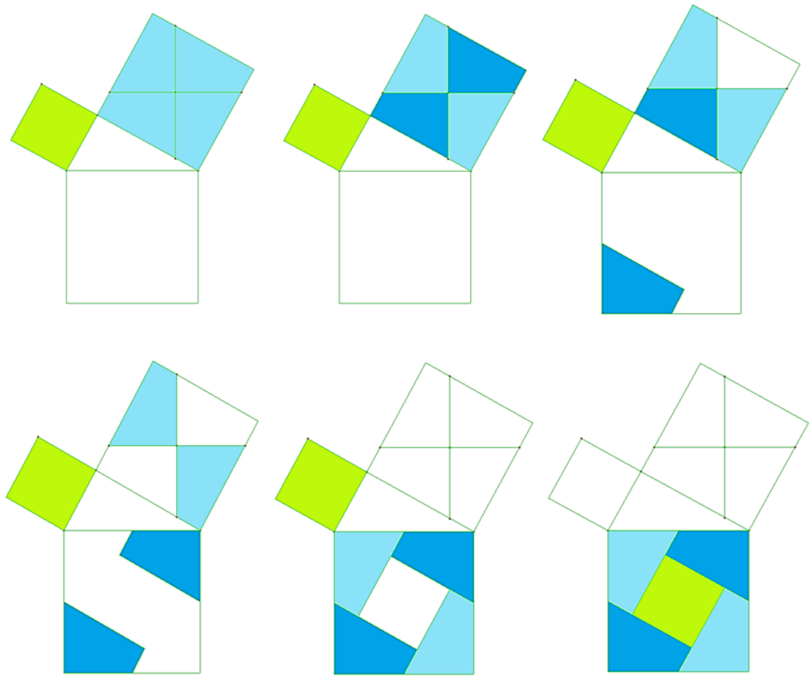
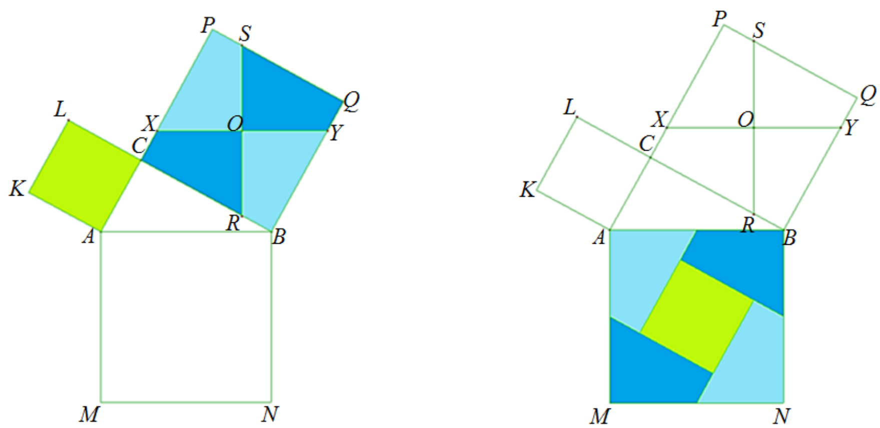


Figura 4.48. Demostración del teorema de Pitágoras planteada por Henry Perigal

En cuanto al proceso de razonamiento, éste se desarrolla cuando el alumno establece relaciones entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



ABC es un triángulo rectángulo.

O es el centro del cuadrado $PQBC$.

$\overline{XY} \parallel \overline{AB},\ \overline{AP} \parallel \overline{BQ}\ \ y\ \overline{SR} \perp \overline{XY}.$

$\overline{AB} \cong \overline{XY} \cong \overline{RS}.$

$\therefore \square PSOX \cong \square XORC \cong \square OYBR \cong \square SQYO.$

La suma de las áreas de los cuadriláteros $PSOX$, $XORC$, $OYBR$ y $SQYO$ es igual al área del cuadrado $PQBC$, por lo que

área $(PSOX)$ + área $(XORC)$ + área $(OYBR)$ + área $(SQYO)$ +

área $(LCAK)$ = área $(ABMN)$.

A partir de esta información, el alumno puede identificar que en un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa.

En esta misma ficha se propone un segundo problema (Espinoza, García y García 2000, p. 118) que consiste en que el alumno tiene que demostrar el teorema de Pitágoras mediante la descomposición y superposición de figuras. Este problema implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En cuanto al proceso de construcción, se esperaría solicitar al alumno que realice la construcción de la figura que ayuda a demostrar el teorema de Pitágoras (véase la figura 4.49); de esta manera, podrá hacer uso de sus conocimientos sobre el trazo de líneas rectas paralelas y perpendiculares, así como de la construcción del cuadrado y del triángulo rectángulo.

2 Organice a los alumnos en parejas; reparta después en fotocopia la siguiente figura o trácela en el pizarrón y pida a los alumnos que la reproduzcan en un cuarto de cartulina. Explique que por los puntos *A*, *G* y *D* se trazan paralelas a la hipotenusa del triángulo *ABC*.

Una vez que hayan terminado, recorten todos los triángulos en que quedaron divididos los cuadrados de los catetos y, a manera de rompecabezas, traten de cubrir el cuadrado de la hipotenusa

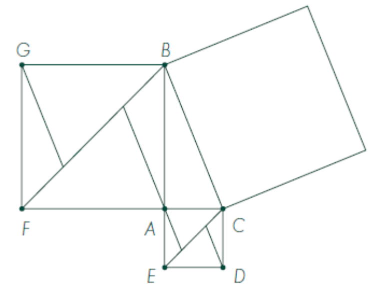


Figura 4.49. Ficha de actividad correspondiente al tema “Descomposición de fórmulas y equivalencia de áreas” (Espinoza, García y García 2000, p. 64)

En cuanto al proceso de visualización, el alumno debe identificar algunos elementos geométricos que le permitirán realizar la construcción. El alumno debe reconocer el triángulo rectángulo ABC y los tres cuadrados, $GBAF$, $BMNC$ y $ACBD$, construidos sobre cada uno de los lados del triángulo. También debe identificar que $\overline{BF}$ es una diagonal del cuadrado $GBAF$ y $\overline{CE}$ es una diagonal del cuadrado $ACBD$; además, que $\overline{AL}$, $\overline{HG}$ y $\overline{DK}$ son paralelas a $\overline{BC}$, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC (véase la figura 4.50).

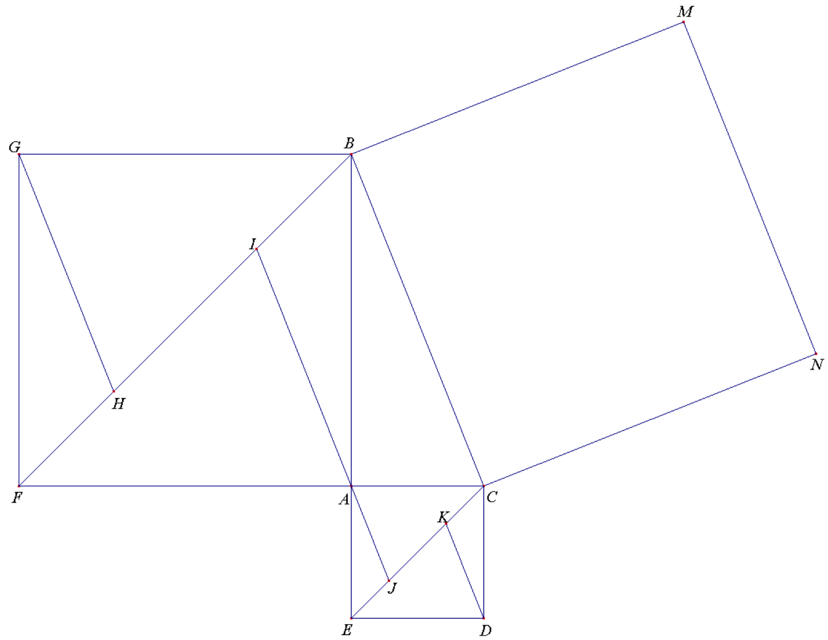


Figura 4.50 Demostración del teorema de Pitágoras mediante equivalencia de áreas (1)

A partir de esta información, el alumno debe identificar cuatro pares de triángulos semejantes: $\Delta BGH \approx \Delta CAJ$, $\Delta BLA \approx \Delta CKD$, $\Delta LAF \approx \Delta KDE$ y $\Delta GHF \approx \Delta AJE$.

Una vez que el alumno ha construido la figura e identificado algunos elementos geométricos, se le solicita cortar los cuatro pares de triángulos semejantes y con ellos cubrir la superficie del cuadrado construido sobre la hipotenusa (véase la figura 4.51).

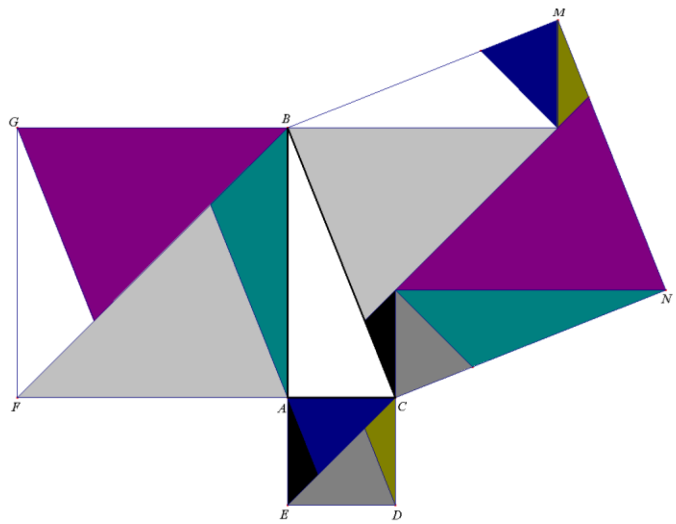


Figura 4.51. Demostración del teorema de Pitágoras mediante equivalencia de áreas (2)

En esta misma ficha se sugiere un tercer problema en el cual el alumno debe demostrar el teorema de Pitágoras mediante equivalencia de áreas. Para ello se le muestran los trazos de la figura 4.52.

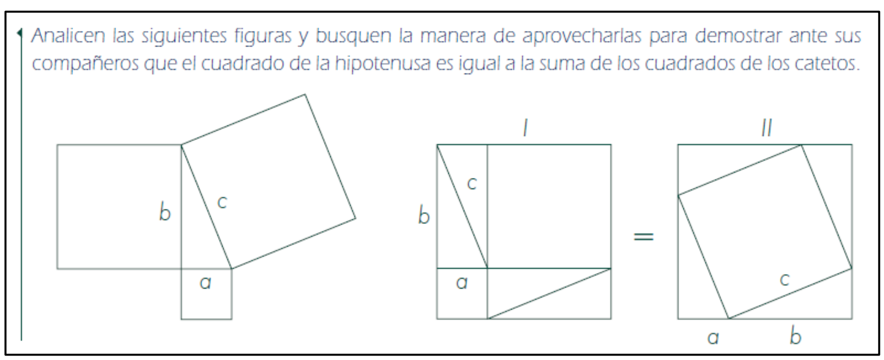


Figura 4.52. Problema 3 de la ficha correspondiente al tema “Descomposición de fórmulas y equivalencia de áreas” (Espinoza, García y García 2000, p. 65)

Este problema implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En cuanto al proceso de visualización, el alumno debe identificar que los cuadrados *I* y *II* son iguales; además, que en el cuadrado I se encuentran construidos dos cuadrados y cuatro triángulos rectángulos congruentes y en el cuadrado II, un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos.

En el cuadrado I, el alumno debe identificar que sus lados tienen por longitud $a + b$ (véase la figura 4.53). Luego, el cuadrado $MNKL$ de lado a tiene por área a^2. En el rectángulo $FGNM$, $MN = a$ y $FM = b$, y su área es ab.

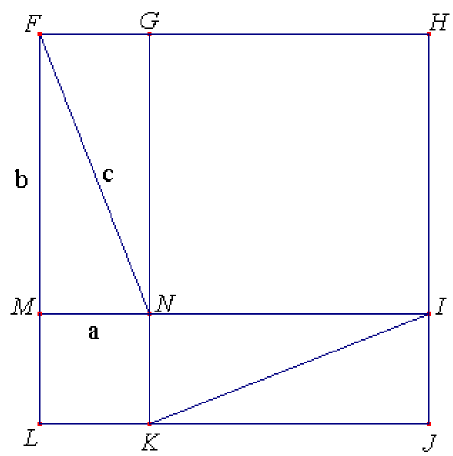


Figura 4.53.Demostración del teorema de Pitágoras mediante la equivalencia de áreas (3)

Ahora bien, el alumno debe identificar que $MN = FG$ y $FM = GN$ por ser lados del rectángulo $FGNM$ y como $MN = a$, entonces $FG = a$. Por lo que $GH = FH = FG$, y como $FG = a$ y $FH = a + b$, $GH = b$. Así, el área del cuadrado $GHIN$ es b^2.

Por otra parte, $HI = b$ y $HJ = a + b$, por lo que $IJ = a$, y como $MI = b$, el área del rectángulo $NIJK$ es ab.

Para calcular el área del cuadrado $FHJL$, la longitud de cuyo lado es $a + b$, el alumno debe sumar las áreas de los rectángulos y cuadrados, haciendo uso de sus conocimientos del lenguaje algebraico.

	Áreas
Cuadrado $MNKL$	a^2
Rectángulo $FGNM$	ab
Cuadrado $GHIN$	b^2
Rectángulo $NIJK$	ab
Total	$a^2 + 2ab + b^2$

El área del cuadrado $FHJL$ es $a^2 + 2ab + b^2$.

En cuanto al cuadrado II, el alumno debe identificar que sus lados tienen por longitud $a + b$ (véase la figura 4.54). También debe reconocer un cuadrado de longitud c y cuatro triángulos rectángulos las longitudes de cuyos lados son a, b y c.

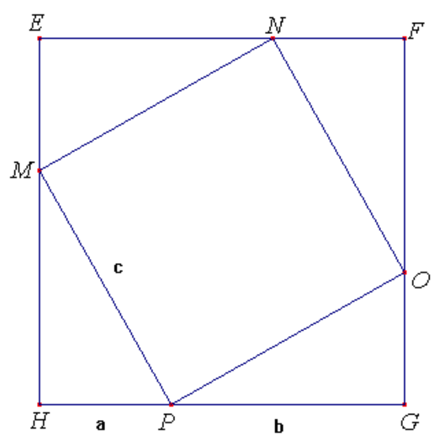


Figura 4.54. Demostración del teorema de Pitágoras mediante la equivalencia de áreas (4)

El alumno debe reconocer que $MP = c$, por lo que el área del cuadrado $MNOP$ es c^2. Por otra parte, debe identificar que $HP = a$ y $PG = b$, por lo que $HG = a + b$; y como $HG = FG = EF = EH$, $EM = a$, $MH = b$, $NF = a$, $EN = b$, $GO = a$ y $OF = b$. Por lo tanto, $\Delta\, MHP \cong \Delta\, NEM \cong \Delta\, OFN \cong \Delta\, PGO.$ Así, el área de los cuatro triángulos rectángulos es $4\left(\frac{ab}{2}\right) = 2ab.$

Para calcular el área del cuadrado $EFGH$ la longitud de cuyos lados es $a + b$, el alumno debe sumar las áreas de los cuatro triángulos rectángulos y del cuadrado $MNOP$.

El área del cuadrado $EFGH$ es $c^2 + 2ab$.

Ahora bien, como los cuadrados $FHJL$ y $EFGH$ son iguales,

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ a^2 + 2ab - 2ab + b^2 &= c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Lo que se busca con los problemas de esta ficha de actividades no es que el alumno enuncie el teorema de Pitágoras, sino de que lo demuestre mediante la construcción de figuras, su descomposición y la equivalencia de áreas.

En cuanto al proceso de razonamiento, el alumno hace uso de sus conocimientos geométricos para construir figuras geométricas y distingue elementos geométricos que le ayudarán a resolver el problema. Este razonamiento es de tipo configural.

Ahora bien, cuando el alumno de manera informal mediante la descomposición de figuras y la equivalencia de áreas establece relaciones entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo y las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, su razonamiento es de tipo discursivo natural. Sin embargo, cuando el alumno demuestra de manera formal el teorema de Pitágoras, su razonamiento es de tipo discursivo teórico.

En la siguiente sección se muestran los resultados de la clasificación y análisis de los problemas de geometría y ejercicios de aplicación del material de *Geometría dinámica* del proyecto Emat.

Hojas de trabajo del proyecto Emat

(*Geometría dinámica*)

El material de *Geometría dinámica* (Zubieta *et al.* 2000) del proyecto Emat consta de 62 hojas de trabajo, las cuales para esta investigación se organizaron en dos categorías: ejercicios y problemas. Se identificaron 45 ejercicios (74%) y 17 problemas (26%). Esta organización se basó en las definiciones de problema de matemáticas y ejercicio de aplicación, así como en sus diferencias, descritas en el capítulo II.

En las siguientes dos subsecciones primero se tratan los ejercicios y después los problemas.

Ejercicios en Geometría dinámica

Las actividades de las 45 hojas de trabajo consideradas como ejercicios se pueden desarrollar a través de "[…] la aplicación directa de un procedimiento previamente adquirido […]" (Judías y Rodríguez 2007, p. 261). A continuación se exponen algunos casos.

En la figura 4.55 se muestra uno de los diversos casos en los que se solicita a los alumnos que escriban lo que entienden por algún concepto geométrico (punto, recta, ángulo, bisectriz, simetría axial, etcétera). Una vez escrita su definición, se les indica que realicen un dibujo. Sin embargo, en la misma hoja de trabajo se les plantea a los alumnos la definición del concepto geométrico (véase la figura 4.56), o incluso los pasos que deben seguir para realizar algún trazo o construcción geométrica (véase la figura 4.57).

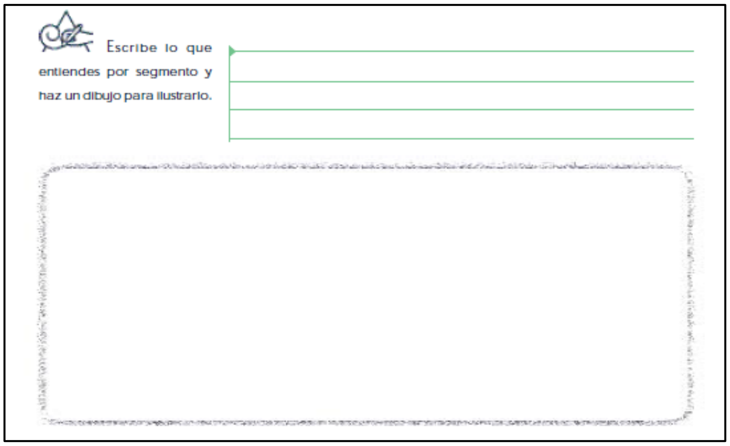


Figura 4.55. Hoja de trabajo 1, "Punto y segmento" (Zubieta *et al.* 2000, p. 26)

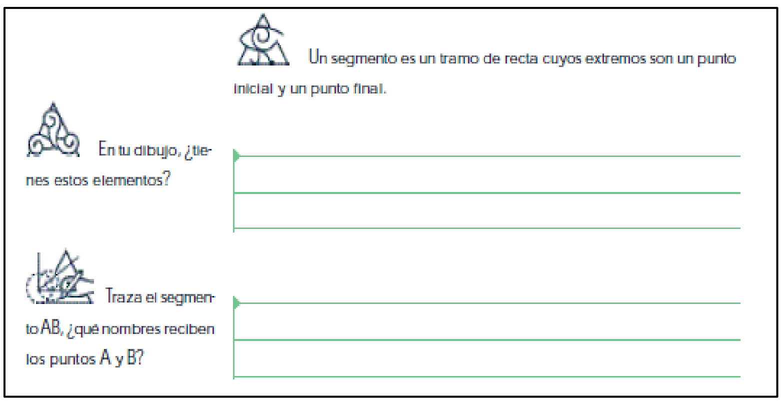


Figura 4.56. Hoja de trabajo 1, "Punto y segmento rectilíneo" (Zubieta *et al.* 2000, p. 26)

En las hojas de trabajo 1-6, 9, 14, 18 y 43 (véase el cuadro 3.8: Temas de geometría del material del proyecto Emat se solicita a los alumnos que definan un concepto geométrico y elaboren un dibujo para ilustrar su definición, y solamente en las hojas 1 y 9 se les indica la definición del concepto geométrico.

En la figura 4.57 se muestra uno de los diversos casos en los que se plantea a los alumnos la solución de la construcción geométrica que más tarde deben reproducir. Una vez elaborada su construcción, se les indica que describan los pasos que siguieron para construir un ángulo igual a un ángulo dado a partir del punto Z.

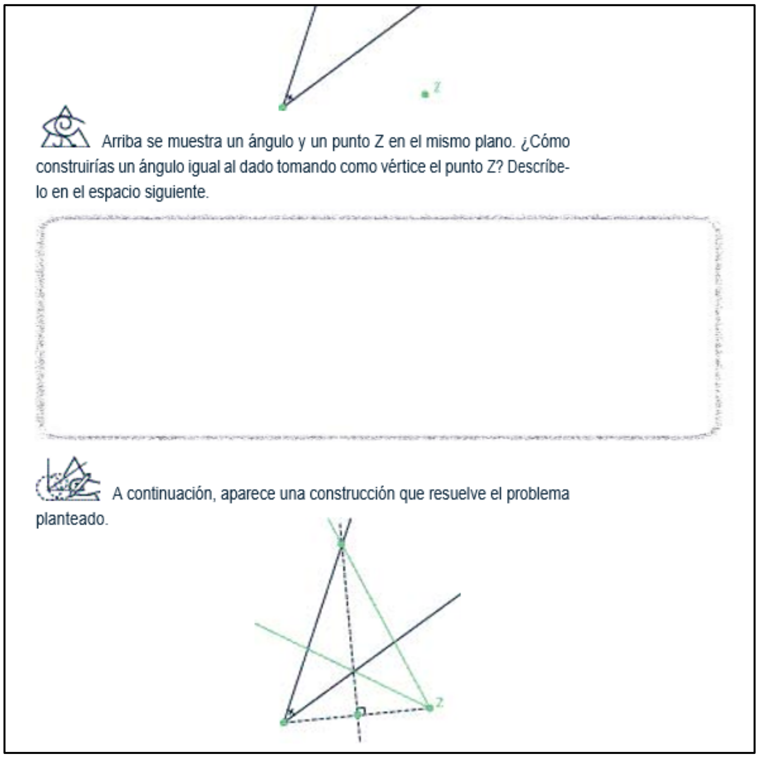
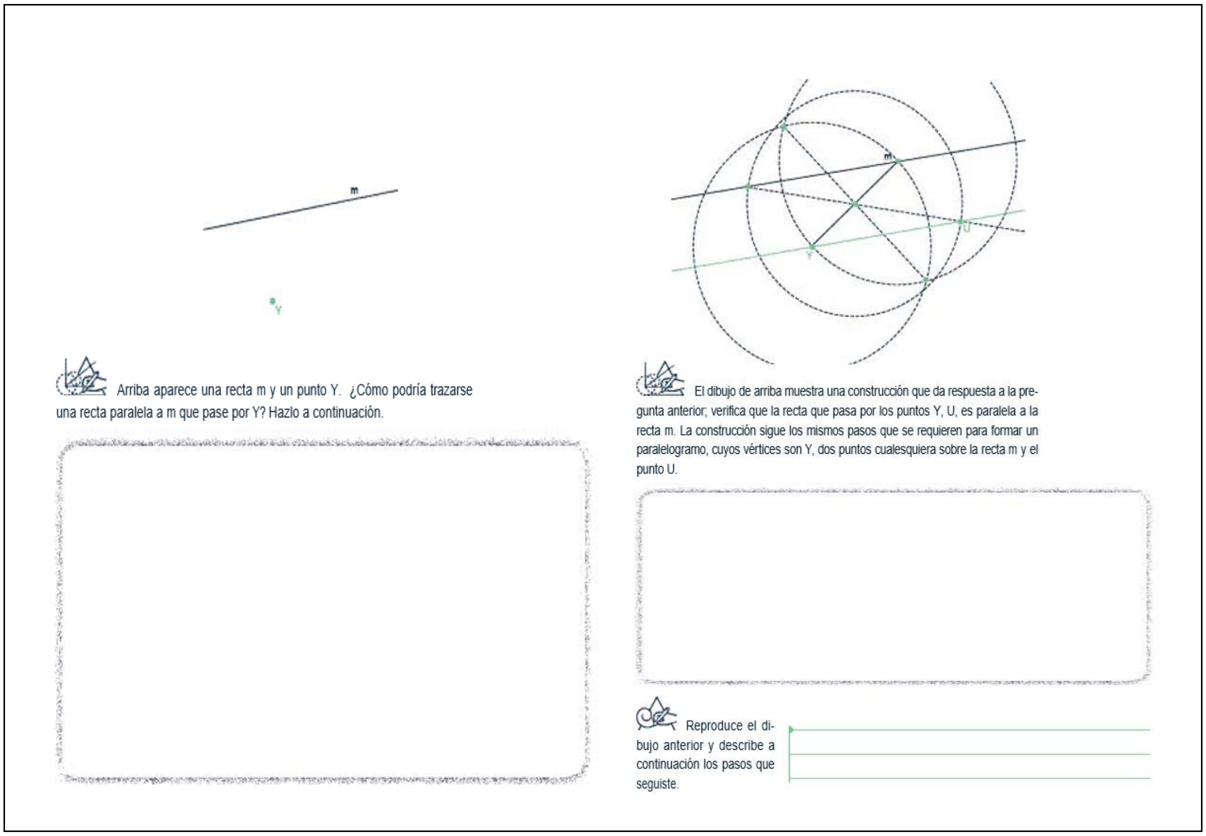


Figura 4.57. Hoja de trabajo 23, "Construcción de un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado a partir de un punto dado" (Zubieta *et al.* 2000, p. 72)

En las hojas de trabajo 12, 25, 26 y 41 (véase el cuadro 3.8: Temas de geometría del material del proyecto Emat) se solicita a los alumnos que tracen la bisectriz de un ángulo, la línea recta paralela a una recta dada, la línea recta perpendicular a una recta dada y dividan un segmento en partes iguales. Sin embargo, se les muestra un dibujo con los trazos que deben elaborar. Una vez efectuados los trazos, se les indica que describan los pasos que siguieron para realizar el ejercicio.

Las actividades de las hojas de trabajo 12, 23, 25, 26 y 41, consideradas como ejercicios, se pueden desarrollar fácilmente sin que el alumno tenga que utilizar sus conocimientos geométricos para efectuar trazos o construcciones, ya que en estas mismas hojas se muestran los pasos que deben seguir (véanse las figuras 4.58, 4.59 y 4.60).



Arriba aparece una recta m y un punto Y. ¿Cómo podría trazarse una recta paralela a m que pase por Y? Hazlo a continuación.

El dibujo de arriba muestra una construcción que da respuesta a la pregunta anterior; verifica que la recta que pasa por los puntos Y, U, es paralela a la recta m. La construcción sigue los mismos pasos que se requieren para formar un paralelogramo, cuyos vértices son Y, dos puntos cualesquiera sobre la recta m y el punto U.

Reproduce el dibujo anterior y describe a continuación los pasos que seguiste.

Figura 4.58. Hoja de trabajo 25, “Trazo de una línea recta paralela a una recta dada” (Zubieta *et al.* 2000, pp. 76 - 77)

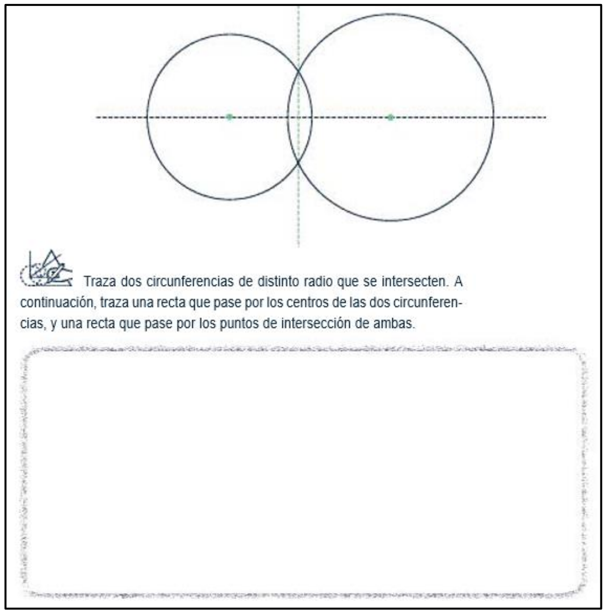


Figura 4.59. Hoja de trabajo 41, “Trazo de una línea recta perpendicular a una recta dada”

(Zubieta *et al.* 2000, p. 112)

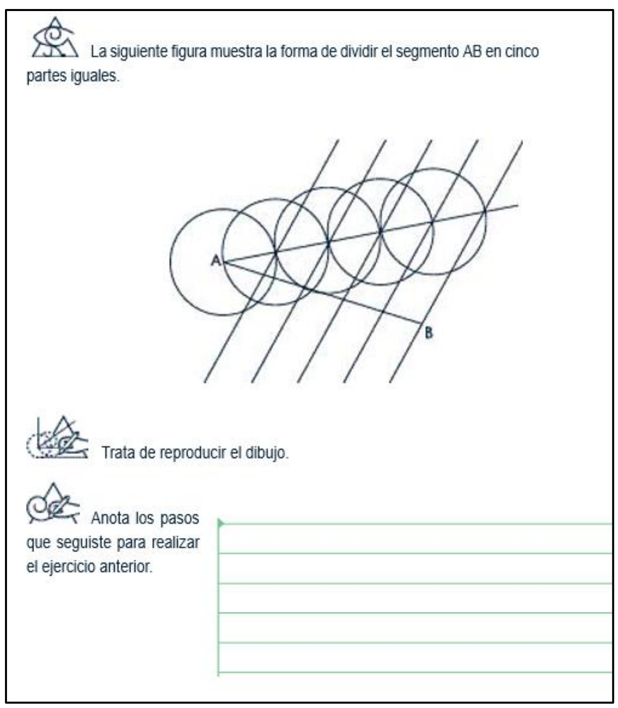


Figura 4.60. Hoja de trabajo 26, “División de un segmento rectilíneo en partes iguales”

(Zubieta *et al.* 2000, p. 78)

En otras hojas de trabajo se les pide a los alumnos que reproduzcan los dibujos o figuras geométricas y anoten los pasos que siguieron para su construcción. Las reproducciones que se solicitan en realidad no presentan dificultad alguna (véase la figura 4.61).

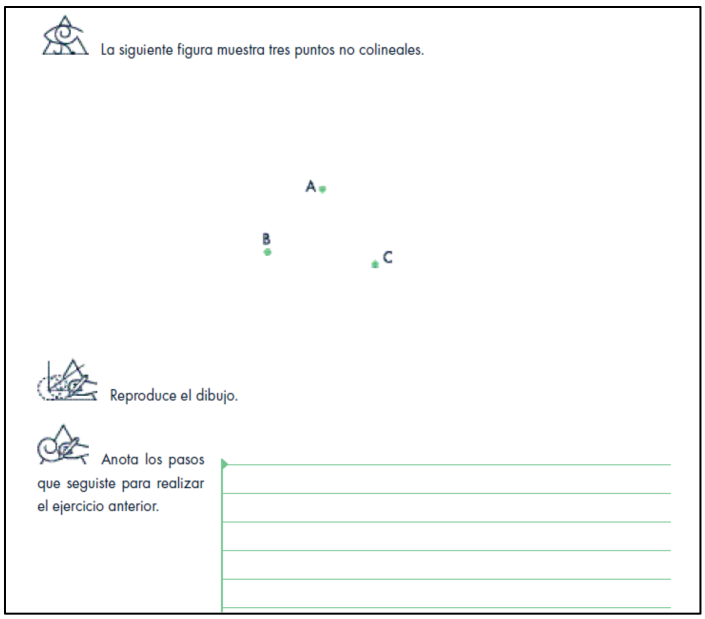


Figura 4.61. Hoja de trabajo 55, “Trazo de una circunferencia por tres puntos dados no colineales” (Zubieta *et al.* 2000, p. 142)

Ahora bien, para que los alumnos puedan reproducir la figura geométrica que se les solicita en algunas de las hojas de trabajo, se hace uso de los comandos SIMETRÍA AXIAL, TRASLACIÓN, ROTACIÓN, REFLEXIÓN y POLÍGONO REGULAR, los cuales en automático efectúan los trazos y construyen la figura. También existe un comando que realiza los cálculos de longitudes y superficies, el cual se emplea en la hoja de trabajo 11. Este tipo de ejercicios en los que los alumnos tienen que reproducir las figuras geométricas no representa dificultad alguna y no implican que tengan que usar sus conocimientos geométricos para construir determinada figura geométrica, calcular longitudes o áreas de superficies.

En la hoja de trabajo 48 se le solicita al alumno que describa qué es un papalote y elabore un dibujo para ilustrar su definición. Una vez escrita su definición, se le pide que construya un papalote conociendo la longitud de uno de sus lados (véase la figura 4.62).

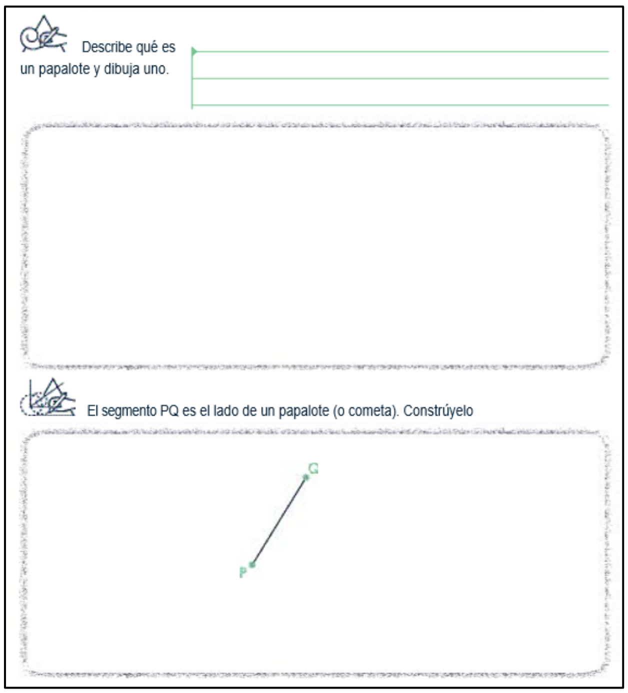


Figura 4.62. Hoja de trabajo 48, “Construcción de un papalote” (Zubieta *et al.* 2000, p. 128)

En la figura 4.62 se muestra un ejercicio en el que el alumno debe construir un papalote a partir de la longitud de uno de sus lados, la cual corresponde al segmento PQ. Las actividades de esta hoja de trabajo no representan dificultad alguna para su resolución, ya que el alumno podría construir un papalote en forma de figuras geométricas como el triángulo isósceles, el cuadrado o el rombo, las cuales ya se habían construido en otras hojas de trabajo.

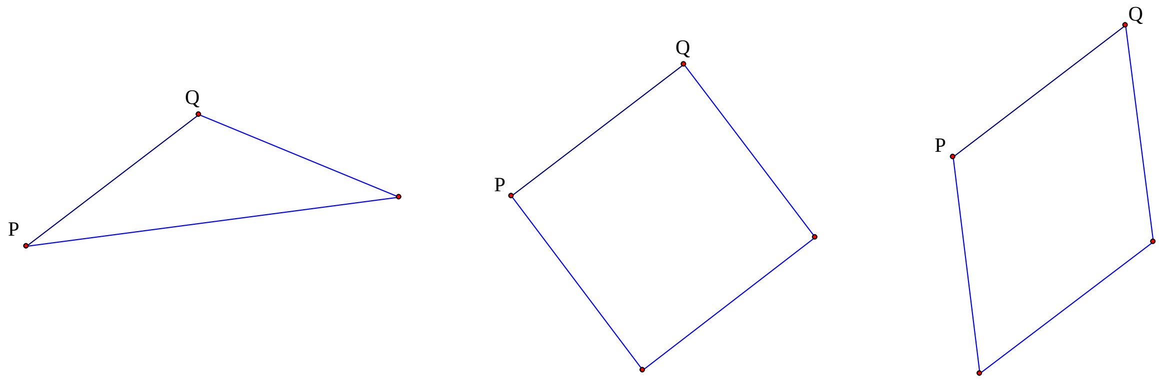


Figura 4.63. Construcciones de un papalote en forma de triángulo, cuadrado y rombo

En la figura 4.63 se muestran las construcciones que el alumno podría elaborar de un papalote siendo uno de sus lados $\overline{PQ}$. Sin embargo, se esperaría que construyera algunas otras figuras geométricas como los polígonos regulares.

Una vez que el alumno ha construido su papalote, se le solicita que describa qué características deben tener las diagonales de un papalote si éste se construye a partir de ellas. También se le pide que escriba una nueva definición de papalote.

Si con esta hoja de trabajo se pretende que el alumno proponga una manera de construir un papalote (Zubieta *et al.* 2000, p. 128), ¿por qué se le pide que lo defina a partir de las características de determinadas figuras geométricas?

Los ejercicios que se proponen en el material de *Geometría dinámica* no favorecen el desarrollo de habilidades geométricas, ya que simplemente se reproduce, se describe y se verifica; con lo cual no es posible fortalecer el pensamiento geométrico de los alumnos. El énfasis de estos ejercicios se pone en que los estudiantes se entrenen en el uso de los comandos del *software*.

Problemas en Geometría dinámica

Las actividades de las 17 hojas de trabajo consideradas como problemas permiten al alumno hacer uso de sus conocimientos geométricos sobre relaciones espaciales, deducciones de fórmulas, cálculos, trazos y construcciones geométricas. Estos problemas se clasificaron en tres categorías (véase el cuadro 4.11): problemas de construcción, problemas de cálculo y problemas de deducción de fórmulas.

Cuadro 4.11. Clasificación de los problemas del material de *Geometría dinámica*

Tipo de problema	Grado escolar	Hoja de trabajo
Construcción	I	4.- Construcción de un cuadrado 5.- Construcción de un rectángulo 6.- Construcción de un rombo 8.- Construcción de triángulos 18.- Cálculo de perímetros, áreas y ángulos
	II	40.- Recubrimiento de un plano con combinaciones de polígonos regulares
	III	43.- Área de un triángulo y sus alturas
Cálculo	II	36.- Resolución de problemas de áreas de figuras 54.- Suma de los ángulos de un triángulo inscrito en una circunferencia

[Continúa]

Cuadro 4.11. [Concluye]

Tipo de problema	Grado escolar	Hoja de trabajo
cálculo	III	49.- Problemas de variación a través de figuras geométricas 59.- Teorema de Tales 60.- Recíproco del teorema de Tales 61.- La homotecia como aplicación del teorema de Tales
Deducción de fórmulas	I	19.- Construcción de un paralelogramo a partir de un rectángulo 20.- Construcción de un paralelogramo a partir de un triángulo 22.- Relación entre la longitud de una circunferencia y el área de su círculo
	II	34.- Descomposición de un rectángulo en áreas iguales

En el cuadro 4.11 se muestra la clasificación de los problemas del material de *Geometría dinámica* y su distribución en cada grado escolar. Se identificó que para tercer grado no hay problemas de construcción ni problemas de deducción de fórmulas. Además, la cantidad de problemas por grado escolar es escasa en comparación con la cantidad de ejercicios.

- Para primer grado se identificaron 8 problemas: 5 de construcción y 3 de deducción de fórmulas.
- Para segundo grado se identificaron 4 problemas: 1 de construcción, 2 de cálculo y 1 de deducción de fórmulas.
- Para tercer grado se identificaron 5 problemas: 1 de construcción y 4 de cálculo.

En el cuadro 4.12 se resume la distribución de los problemas por su clasificación y grado escolar. Se identificó que son muy pocos los problemas de deducción de fórmulas (4), así como los problemas destinados para tercer grado (5). Además, la mayoría de los problemas son de construcción (7) y de éstos 5 se ubican en primer grado (sólo 1 en segundo grado, y 1 en tercer grado).

Cuadro 4.12. Distribución de los problemas por su clasificación y grado escolar en *Geometría dinámica* (Zubieta *et.al.* 2000)

Clasificación / Grado	Construcción	Cálculo	Deducción de fórmulas	Total
I	5	0	3	8
II	1	2	1	4
III	1	4	0	5
Total	7	6	4	17

Problemas de construcción

En los problemas de construcción que se proponen en el material de *Geometría dinámica*, el alumno debe hacer uso de sus conocimientos geométricos para su resolución, lo cual permite el desarrollo de habilidades geométricas. A continuación se exponen algunos ejemplos.

En la hoja de trabajo 6 se muestra un problema en el que se debe construir un rombo que tenga por lado el segmento *LM* (véase la figura 4.64). Este problema de construcción implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En el proceso de construcción, el alumno tiene que usar sus conocimientos geométricos para trazar líneas paralelas y líneas perpendiculares. En el proceso de visualización, el alumno debe identificar que un rombo tiene sus cuatro lados iguales, por lo que es posible que el alumno construya un cuadrado.

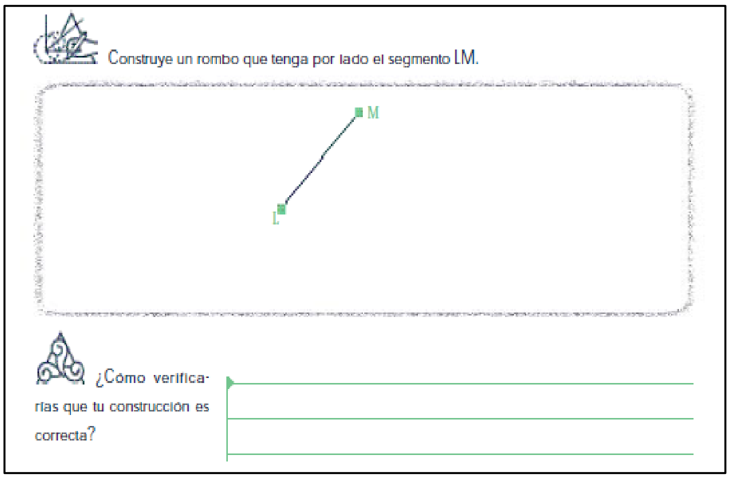


Figura 4.64. Hoja de trabajo 6, “Construcción de un rombo” (Zubieta *et al.* 2000, p. 36)

Para resolver este problema de construcción, el alumno debe identificar nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares. El alumno debe reconocer que los lados del rombo tienen por longitud LM, por lo que deberá trazar un círculo de radio LM. De esta manera, el alumno debe reconocer que cualquier radio del círculo es igual LM (véase la figura 4.65).

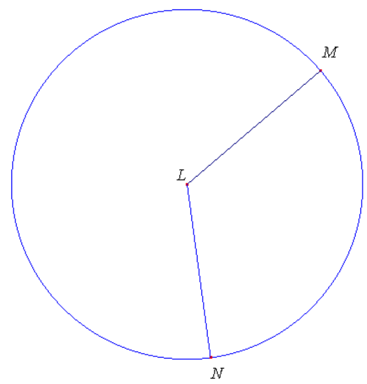


Figura 4.65. Dos radios del círculo con centro en el punto L

En la figura 4.65 se muestran dos lados del rombo, $\overline{LM}$ y $\overline{LN}$, los cuales tienen la misma longitud por ser radios del círculo cuyo centro es L. Así, el alumno debe trazar un círculo de radio $\overline{LM}$ y centro en L para determinar el punto de intersección, O, de las circunferencias, el cual es uno de los vértices del rombo (véase la figura 4.66).

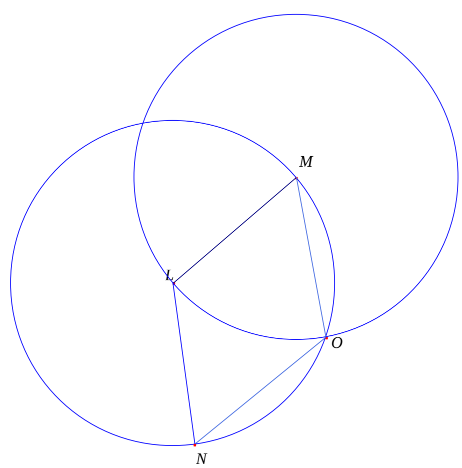


Figura 4.66. Construcción de un rombo dado el segmento LM

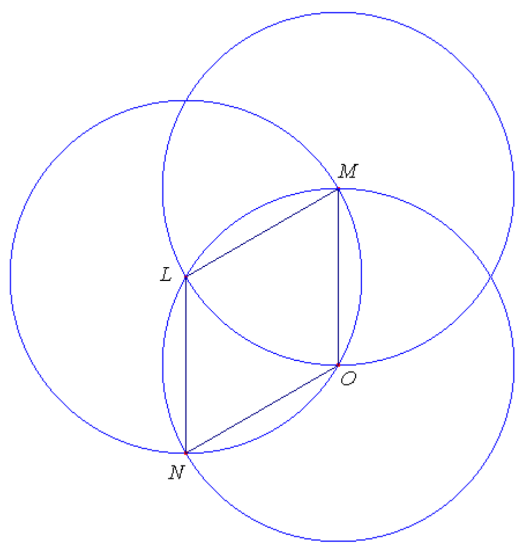
Por otra parte, el alumno también podría construir un rombo con las características de un cuadrado, el cual ya se había construido en otras hojas de trabajo.

En el proceso de razonamiento, el alumno identifica nuevos elementos geométricos que le ayudarán a resolver el problema. Este razonamiento no es suficiente para resolverlo.

Cuando el alumno de manera informal liga proposiciones a partir de la visualización de $\overline{LM}$ y los elementos geométricos que le permitieron resolver el problema, el proceso de razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo natural.

Una vez que el alumno ha desarrollado mayores aprendizajes de geometría, se esperaría que sus argumentos fueran más formales, por lo que el uso de teoremas, axiomas o definiciones son importantes para resolver el problema (proceso discursivo teórico).

Si $\overline{LM}$ es un lado del rombo, entonces $\overline{MO}$, $\overline{ON}$ y $\overline{NL}$ son congruentes.



$\overline{LM}$ es radio del círculo con centro en L y del círculo con centro en M.

$\overline{LM} \cong \overline{LN}$ por ser radios del círculo con centro en L.

$\overline{LM} \cong \overline{MO}$ por ser radios del círculo con centro en M.

$\overline{MO} \cong \overline{ON}$ por ser radios del círculo con centro en O.

$\therefore \overline{LM} \cong \overline{LN} \cong \overline{MO} \cong \overline{ON}$.

En la hoja de trabajo 40 se muestra un problema en el que el alumno debe construir una figura alrededor de un punto Z, de tal manera que los polígonos regulares utilizados para construir la figura no se superpongan (véase la figura 4.67).

Figura 4.67. Hoja de trabajo 40, “Recubrimiento de un plano con combinaciones de polígonos regulares” (Zubieta *et al.* 2000, p. 110)

Este problema de construcción implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En el proceso de construcción, el alumno tiene que usar sus conocimientos geométricos para trazar líneas perpendiculares y construir triángulos equiláteros, los cuales ya se habían utilizado en otras hojas de trabajo.

En el proceso de visualización, el alumno debe identificar que los lados del triángulo equilátero tienen la misma longitud que los lados del cuadrado. También debe considerar las características de estas dos figuras geométricas.

A partir de esta información, el alumno debe construir un triángulo equilátero uno de cuyos vértices sea el punto Z (véase la figura 4.68).

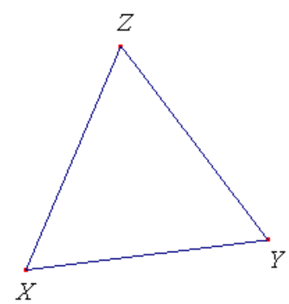


Figura 4.68. Construcción de un triángulo equilátero con vértice en Z

Para construir el cuadrado, el alumno debe identificar que éste tiene la misma longitud que ZX, XY y YZ (véase la figura 4.69).

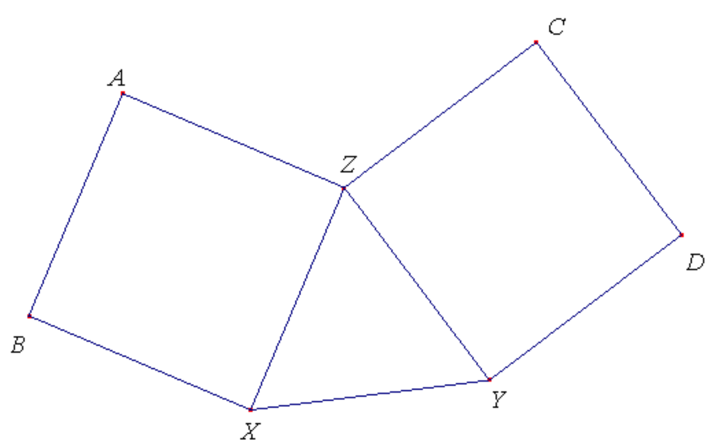


Figura 4.69. Construcción de cuadrados con lado $\overline{ZX} \cong \overline{YZ}$

Ahora bien, el alumno debe reconocer que sobre $\overline{AZ}$ y $\overline{ZC}$ se deben construir triángulos equiláteros la longitud de cuyos lados sea igual a la de los lados del cuadrado (véase la figura 4.70).

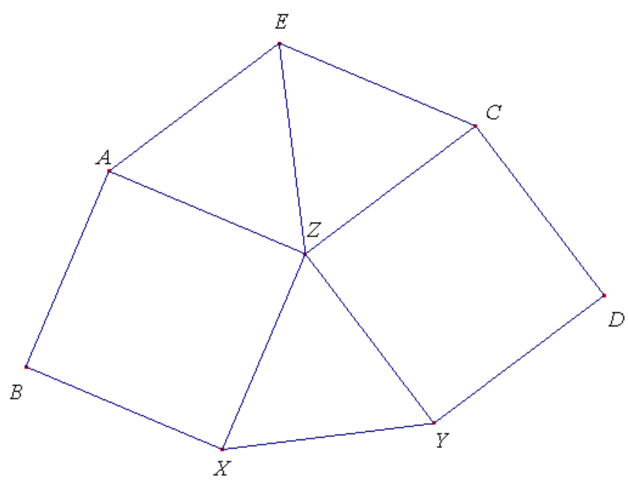


Figura 4.70. Construcción de triángulos equiláteros AZE y ZCE

Una vez que se ha construido la figura 4.70, se le pregunta al alumno sobre otras maneras de construir nuevas figuras utilizando polígonos regulares de tal manera que cubran el espacio alrededor del punto Z y sin que se superpongan.

En esta situación, el alumno debe identificar que para cubrir completamente el espacio alrededor del punto Z, debe considerar los ángulos internos de los polígonos regulares, es decir, el alumno debe reconocer que el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono son los únicos polígonos regulares que sin superponerse cubren completamente una superficie plana. También que en la unión de los vértices de los polígonos regulares, la suma de sus ángulos internos es de $360°$ sexagesimales.

En la figura 4.71 se muestran cinco casos de las construcciones que podrían realizar los alumnos para cubrir el espacio alrededor del punto Z.

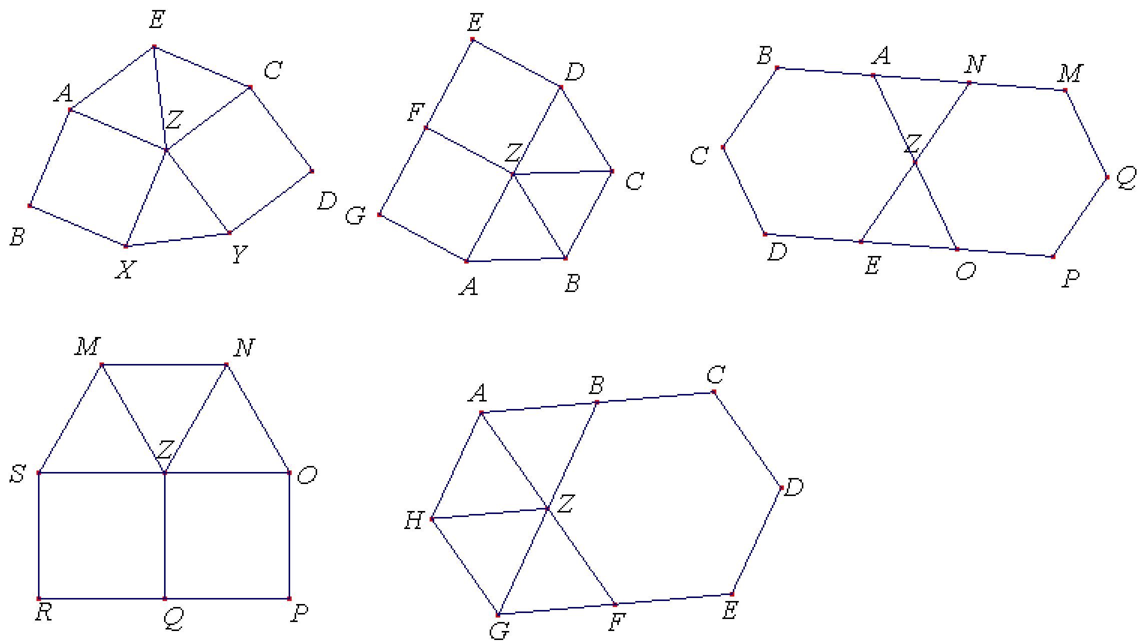


Figura 4.71. Construcciones con polígonos regulares para cubrir el espacio alrededor de un punto Z

En el proceso de razonamiento, el alumno identifica elementos geométricos que le permiten resolver el problema, es decir, que la longitud de los lados del cuadrado y de los triángulos son iguales. Cuando de manera informal el alumno liga proposiciones a partir de la visualización de los polígonos regulares y sus características, el razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo natural. Sin embargo, cuando argumenta de manera formal mediante el uso de teoremas, axiomas o definiciones, los cuales son importantes para resolver el problema, su proceso de razonamiento es de tipo discursivo teórico.

Problemas de cálculo

En la hoja 36 se muestra un problema en el que el alumno debe calcular las longitudes del largo y el ancho de un rectángulo, el cual forma parte de una figura compuesta (véase la figura 4.72).

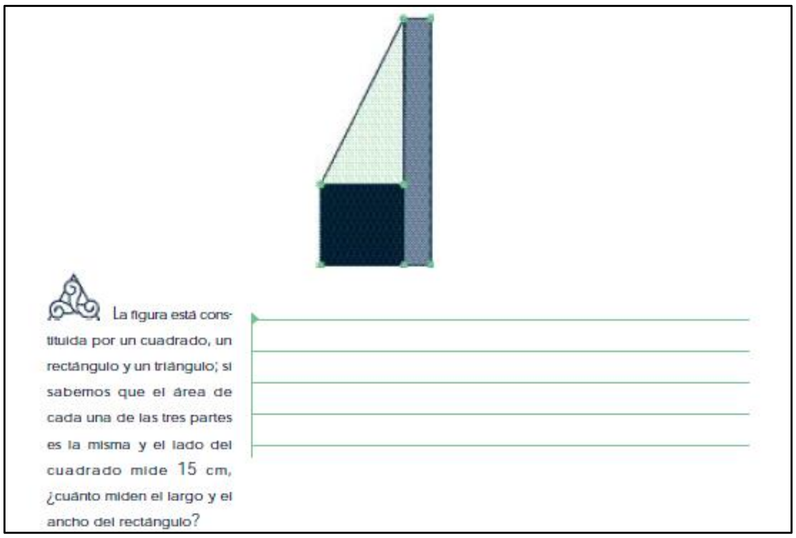


Figura 4.72. Hoja de trabajo 36, “Resolución de problemas de áreas de figuras conocidas” (Zubieta *et al.* 2000, p. 100)

Este problema de cálculo implica dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización el alumno debe identificar que las áreas del cuadrado, el triángulo y el rectángulo son iguales.

Se conoce que, en este problema, los lados del cuadrado miden 15 cm, por lo que su área es igual a 225 cm^2. El área del rectángulo y la del triángulo son ambas iguales a 225 cm^2 también.

A partir de esta información, el alumno debe identificar que la longitud del lado menor del triángulo es igual a la longitud del lado del cuadrado, y que las áreas de estas figuras son iguales, por lo que al sustituir los valores conocidos en la fórmula para calcular el área del triángulo, el alumno podrá calcular su altura.

El área del triángulo es igual a 225 cm^2 y su base es igual a 15 cm, por lo que su altura es igual a 30 cm.

$$A = \frac{b \times a}{2}$$

$$225 = \frac{15 \times a}{2}$$

$$\frac{(225)(2)}{15} = a$$

$$\frac{450}{15} = a$$

$$30 = a$$

Con base en esta información, el alumno debe identificar que la altura del triángulo y el lado del cuadrado corresponden al lado mayor del rectángulo. Luego, la suma de las longitudes de la altura del triángulo (30 cm) y el lado del cuadrado (15 cm) es igual al lado mayor del rectángulo, es decir, 45 cm.

Para calcular el lado menor del rectángulo, el alumno debe sustituir los valores conocidos en la fórmula del área de un rectángulo.

$$A = b \times a$$

$$225 = b \times 45$$

$$\frac{225}{45} = b$$

$$5 = b$$

En el proceso de razonamiento, el alumno debe reconocer aquellos elementos geométricos que son relevantes en el problema, es decir, debe identificar que el área del cuadrado, la del triángulo y la del rectángulo son iguales.

Cuando el alumno de manera informal establece relaciones entre las áreas de las figuras y reconoce que éstas tienen en común las longitudes de uno de sus lados, el proceso de razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo natural, y cuando el alumno argumenta de manera formal que las áreas del cuadrado, del triángulo y del rectángulo son iguales, su razonamiento es de tipo discursivo teórico.

En la hoja 54 se muestra otro problema de cálculo. En este problema el alumno debe identificar que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180° sexagesimales, mediante la visualización del triángulo inscrito en un círculo (véase la figura 4.73).

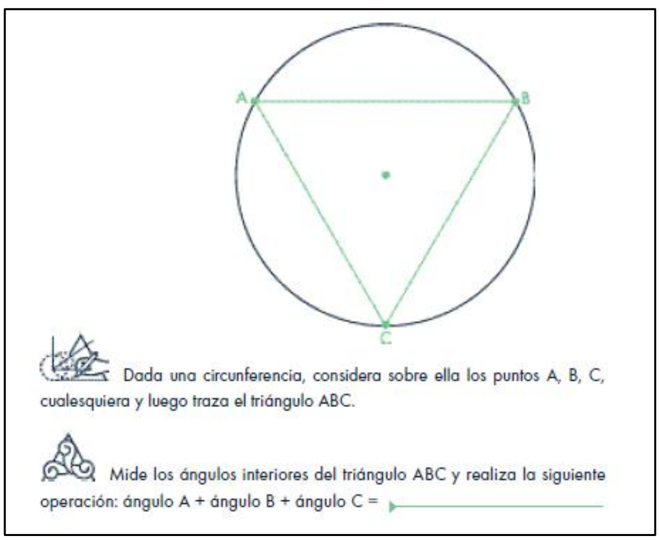


Figura 4.73. Hoja de trabajo 54, "Suma de los ángulos de un triángulo inscrito en un círculo" (Zubieta *et al.* 2000, p. 140)

En la hoja de trabajo 11 se aborda el contenido “Suma de los ángulos internos de un triángulo”, en la cual el alumno debe utilizar el comando CALCULAR para obtener la suma de los ángulos internos de un triángulo inscrito en un círculo. (Aunque en hoja de trabajo 54 no se menciona que el alumno puede hacer uso del comando CALCULAR, se esperaría que lo empleara.)

En este problema de cálculo se ponen en acción dos procesos cognitivos: visualización y razonamiento. En el proceso de visualización el alumno debe reconocer que $360°$ sexagesimales corresponden a un círculo y que éste está formado por los arcos AB, BC y CA. Por otra parte, el alumno debe identificar nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares (véase la figura 4.74).

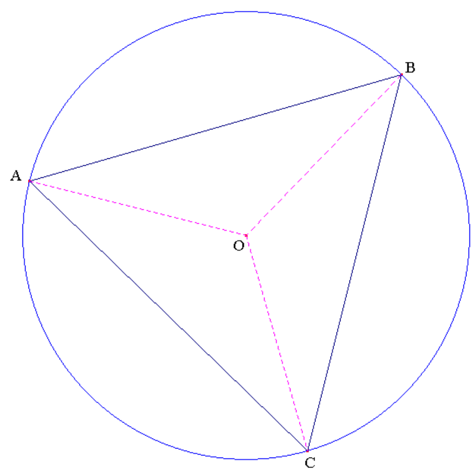


Figura 4.74. Trazos auxiliares para resolver el problema de la hoja 54

$\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$, por ser radios del mismo círculo con centro en O.

Para resolver este problema, el alumno debe hacer uso de sus conocimientos de ángulos inscritos y ángulos centrales de un círculo.

$\measuredangle AOC$, $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ son ángulos centrales del círculo con centro en el punto O.

$\measuredangle ABC$, $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle ACB$ son ángulos inscritos del círculo con centro en el punto O.

El alumno debe saber que la amplitud de un ángulo central es el doble de la amplitud de un ángulo inscrito, cuando ambos abarcan el mismo arco del círculo. Así,

$$\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC$$

$$\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$$

$$\measuredangle BOC = 2\measuredangle BAC$$

Como los tres ángulos centrales abarcan el círculo completo, se tiene que $\measuredangle AOC + \measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 360°$. Luego,

$$2\measuredangle ABC + 2\measuredangle ACB + 2\measuredangle BAC = \measuredangle AOC + \measuredangle AOB + \measuredangle BOC° = 360°$$

$$\frac{2\,(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)}{2} = \frac{360°}{2}$$

$$\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC = 180°$$

Por lo tanto, la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a $180°$ sexagesimales.

En cuanto al proceso de razonamiento, el alumno identificará elementos geométricos mediante trazos auxiliares, los cuales le ayudarán a resolver el problema.

En cuanto al proceso de razonamiento de tipo discursivo natural, el alumno de manera informal utiliza sus conocimientos de ángulos inscritos y centrales de un círculo y liga proposiciones a partir de la visualización y los elementos geométricos que conforman el problema. Luego, cuando el alumno argumenta de manera formal que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo inscrito en un círculo es igual a $180°$ sexagesimales, su razonamiento es del tipo discursivo teórico.

Problemas de deducción de fórmulas

En la hoja de trabajo 34 se muestra un problema en el que se debe descomponer un rectángulo en áreas iguales. También se calculan sus áreas y se establecen relaciones entre ellas. Este problema se consideró como uno de deducción de fórmulas, ya que a partir de la descomposición de un rectángulo el alumno debe identificar que las áreas de figuras congruentes son iguales (véase la figura 4.75).

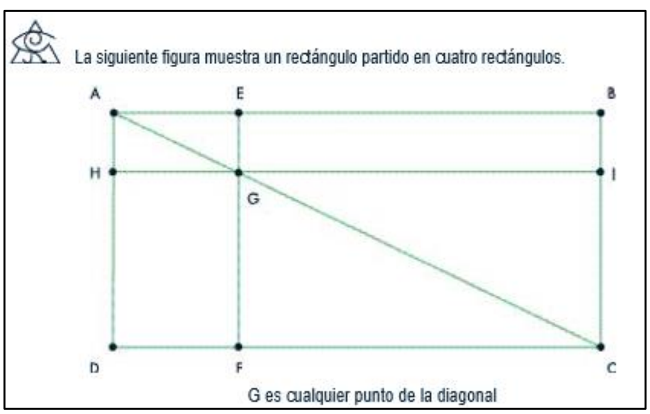


Figura 4.75. Hoja de trabajo 34, "Descomposición de un rectángulo en áreas iguales" (Zubieta *et al.* 2000, p. 96)

Este problema de deducción de fórmulas implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En el proceso de construcción, el alumno tiene que usar sus conocimientos geométricos para construir un rectángulo y trazar una línea recta paralela a una recta dada desde un punto dado que no esté en ella.

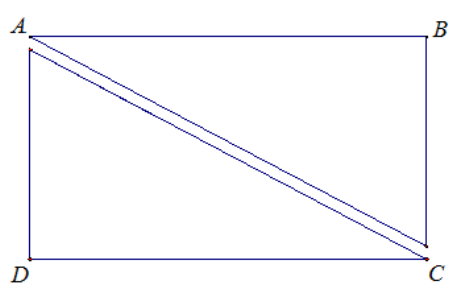
Aunque en la hoja de trabajo 34 no se menciona que el alumno puede hacer uso de los comandos PARALELA o ÁREA, se esperaría que no los empleara.

En el proceso de visualización, el alumno debe identificar que las áreas de los rectángulos $HGFD$ y $EBIG$ son iguales.

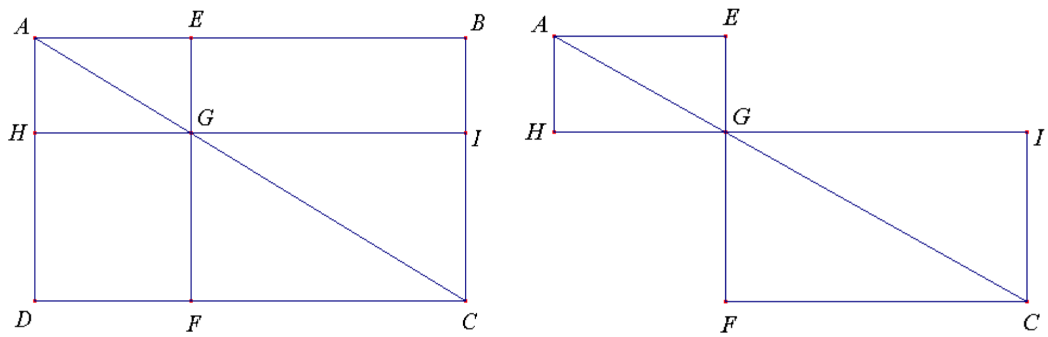
Para resolver este problema sin hacer uso del comando ÁREA, el alumno debe establecer relaciones entre cada una de las figuras que se encuentran sobre el rectángulo $ABCD$. A diferencia de otros problemas, en éste no se debe añadir o transformar nada en la figura inicial (rectángulo $ABCD$), basta con comparar las áreas de las figuras.

El alumno debe identificar en el rectángulo $ABCD$ varios elementos que le permiten resolver el problema.

- Se distinguen dos triángulos congruentes ABC y ADC, los cuales resultan de dividir el rectángulo $ABCD$ en dos partes iguales mediante la diagonal $\overline{AC}$.



- Cada mitad del rectángulo dividido por una de sus diagonales está compuesto por dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Si se eliminan los rectángulos $HGFD$ y $EBIG$, se obtienen dos pares de triángulos congruentes: $\Delta\, AEG \cong \Delta\, AHG$ y $\Delta\, GFC \cong \Delta\, GIC$.



A partir de esta información el alumno debe identificar que los triángulos congruentes ABC y ADC tienen igual área. También debe reconocer que al eliminar los dos rectángulos $HGFD$ y $EBIG$ del rectángulo $ABCD$ quedando dos regiones de igual área, es decir, los dos pares de triángulos congruentes. Por lo tanto, las áreas de los rectángulos también deben tener igual área (véase la figura 4.76).

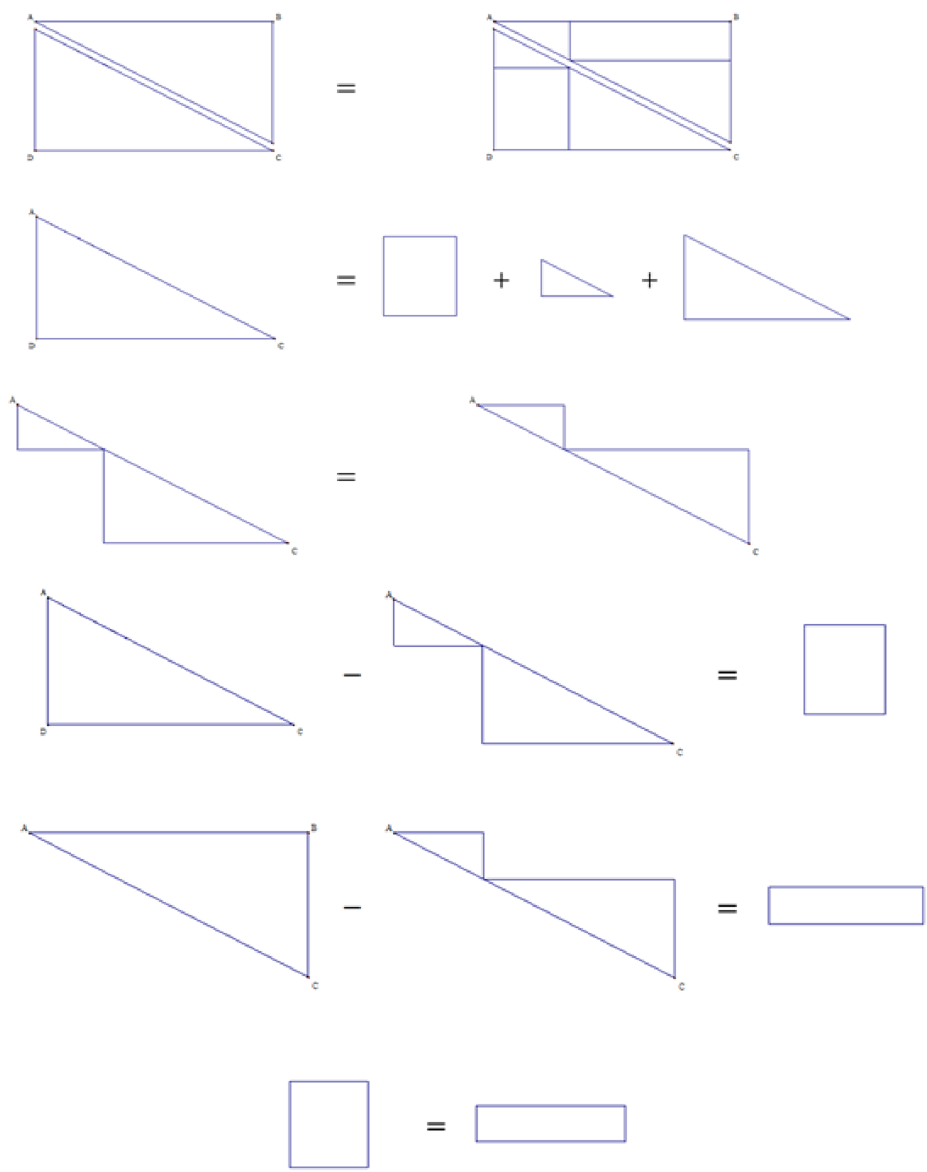
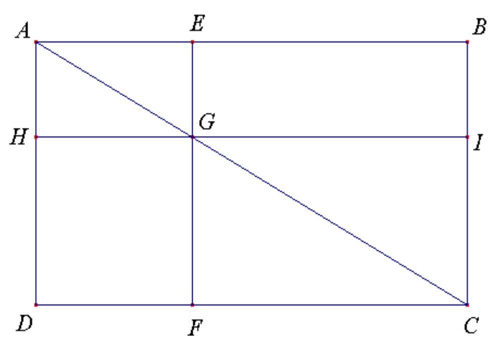


Figura 4.76. Relación entre áreas de paralelogramos

El proceso de razonamiento de tipo configural se desarrolla cuando el alumno identifica todos los elementos geométricos en el rectángulo $ABCD$ y reconoce aquellos que son relevantes en el problema. Este razonamiento no es suficiente para que el alumno resuelva el problema. Por otra parte, el proceso de razonamiento de tipo discursivo natural se lleva a cabo cuando el alumno argumenta de manera informal que las áreas de los rectángulos $HGFD$ y $EBIG$ son iguales, mediante la superposición u operación de las figuras (véase la figura 4.76), es decir, el alumno liga proposiciones a partir de la visualización del rectángulo $ABCD$ y los elementos geométricos que lo conforman. Este razonamiento será suficiente para resolver el problema.

Cuando el alumno ha desarrollado mayores aprendizajes de geometría, se esperaría que sus argumentos fueran más formales, por lo que el uso de teoremas, axiomas o definiciones son importantes para resolver el problema (proceso discursivo teórico).

Si $\overline{AC}$ es la diagonal del rectángulo $ABCD$ entonces las áreas de los rectángulos $HGFD$ y $EBIG$ son iguales.



$\overline{\mathrm{AC}}$ es la diagonal del rectángulo $ABCD$.

$\overline{\mathrm{AD}} \cong \overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AB}} \cong \overline{\mathrm{DC}}$ por ser lados del rectángulo.

$\therefore \Delta\, ADC \cong \Delta\, ABC$.

$\overline{\mathrm{HI}} \parallel \overline{\mathrm{DC}} \parallel \overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{AD}} \parallel \overline{\mathrm{EF}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$.

$\overline{\mathrm{AH}} \cong \overline{\mathrm{EG}} \cong \overline{\mathrm{BI}}$ y $\overline{\mathrm{HD}} \cong \overline{\mathrm{GF}} \cong \overline{\mathrm{IC}}$, por estar entre las mismas rectas paralelas.

$\overline{AE} \cong \overline{HG} \cong \overline{DF}$ y $\overline{EB} \cong \overline{GI} \cong \overline{FC}$, por estar entre las mismas rectas paralelas.

$\overline{AC}$ es la diagonal de los rectángulos $ABCD$, $AEGH$ y $GICF$.

$\therefore \Delta\, AGH \cong \Delta\, GAE$ y $\Delta\, GFC \cong \Delta\, CGI$.

ΔAGH y $\Delta GFC \cong \Delta\, GAE$ y $\Delta\, CGI$.

Como $\Delta\, ADC \cong \Delta\, ABC$, se tiene que $HGFD$ y $EBIG$ son iguales.

En la proposición 43 del libro I de los *Elementos* de Euclides se enuncia la relación entre las áreas de los paralelogramos:

> En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí. (Euclides 2000, p. 71)

Euclides utiliza la palabra complemento para referirse a las figuras que quedan entre los paralelogramos situados en torno a la diagonal y que complementan al paralelogramo.

Este problema de deducción de fórmulas es idéntico al que se propone en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001, p. 251).

Por otra parte, en la figura 4.77 se muestra un problema en el que se construye un paralelogramo a partir de un triángulo. También se calculan sus áreas y se establecen relaciones entre ellas. En este sentido, este problema se consideró como uno de deducción de fórmulas, ya que a partir de las construcciones y el cálculo de las áreas del paralelogramo y el triángulo, el alumno identifica que las áreas de estas dos figuras son iguales cuando una de ellas tiene la mitad de la base de la otra figura y ambas figuras se construyen sobre las mismas paralelas.

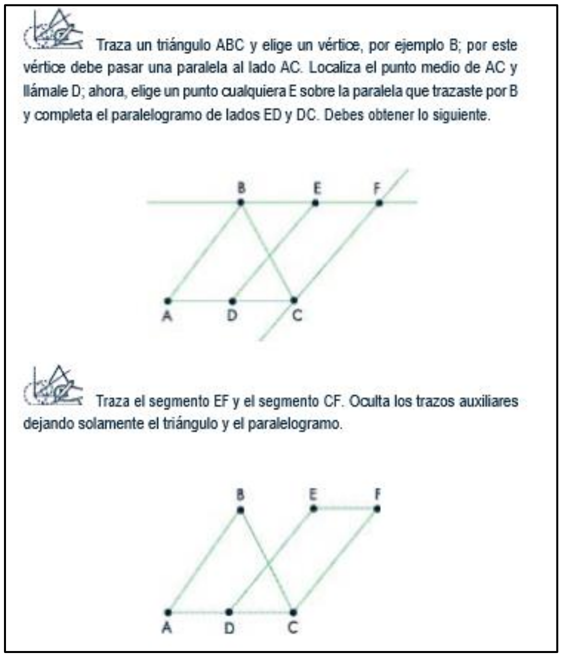


Figura 4.77. Hoja de trabajo 35, “Construcción de un paralelogramo a partir de un triángulo” (Zubieta *et al.* 2000, p. 98)

En la proposición 41 del libro I de los *Elementos* de Euclides se enuncia la relación entre un paralelogramo y un triángulo:

> Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo. (Euclides 2000, p. 70)

Este problema de deducción de fórmulas implica tres procesos cognitivos: construcción, visualización y razonamiento. En el proceso de construcción, el alumno tiene que usar sus conocimientos geométricos para construir un triángulo, trazar una línea recta paralela a una recta dada y determinar el punto medio de un segmento a partir de la información proporcionada.

Se esperaría que el alumno no empelara los comandos PARALELA o ÁREA (cabe señalar que éstos no se mencionan en la hoja de trabajo 35).

En el proceso de visualización, el alumno debe relacionar las áreas de un paralelogramo y un triángulo para determinar que éstas son iguales cuando se construyen sobre las mismas paralelas y cuando el paralelogramo tiene la mitad de la base de un triángulo.

Para calcular las áreas del paralelogramo y el triángulo sin hacer uso del comando ÁREA, el alumno debe identificar nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares (véase la figura 4.78), a pesar de que se le solicita que los oculte.

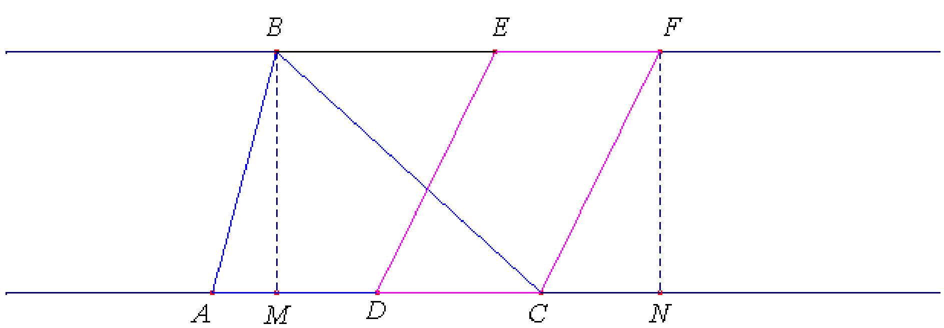


Figura 4.78. Trazos auxiliares para resolver el problema del cálculo de áreas de un paralelogramo y un triángulo que se encientran construidos sobre rectas paralelas

$\overline{AC}$ es un lado y la base del triángulo ABC y $\overline{BM}$ es su altura.

D es el punto medio de $\overline{AC}$.

$\therefore\ \overline{AD} \cong \overline{DC}.$

$\overline{DC}$ es un lado y la base del paralelogramo $DEFG$ y $\overline{FN}$ es su altura.

$\therefore\ \overline{BM} \cong \overline{FN}$ por estar entre las mismas rectas paralelas.

A partir de esta información, el alumno debe identificar que las alturas del paralelogramo y el triángulo miden lo mismo. También debe reconocer que la base del paralelogramo mide la mitad de $\overline{AC}$.

Una vez que se ha identificado la longitud de $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$ del paralelogramo y del triángulo, así como la longitud de sus alturas, el alumno deberá hacer uso de las fórmulas para el cálculo del área del triángulo y el paralelogramo y, a partir de ello, identificar que sus áreas son iguales.

Cuadro 4.13. Resolución del problema de la hoja de trabajo 35

Área del triángulo	Área del paralelogramo
área $(\Delta\, ACB) = \frac{AC\times BM}{2}.$	área $(\square DCFE) = DC \times\ FN.$ Como $DC = \frac{AC}{2}$ y $BM = FN,$ $(\square DCFE) =$ área $\frac{AC\times BM}{2}.$

Este problema de deducción de fórmulas también se puede resolver mediante la descomposición y superposición de las figuras (véase la figura 4.79).

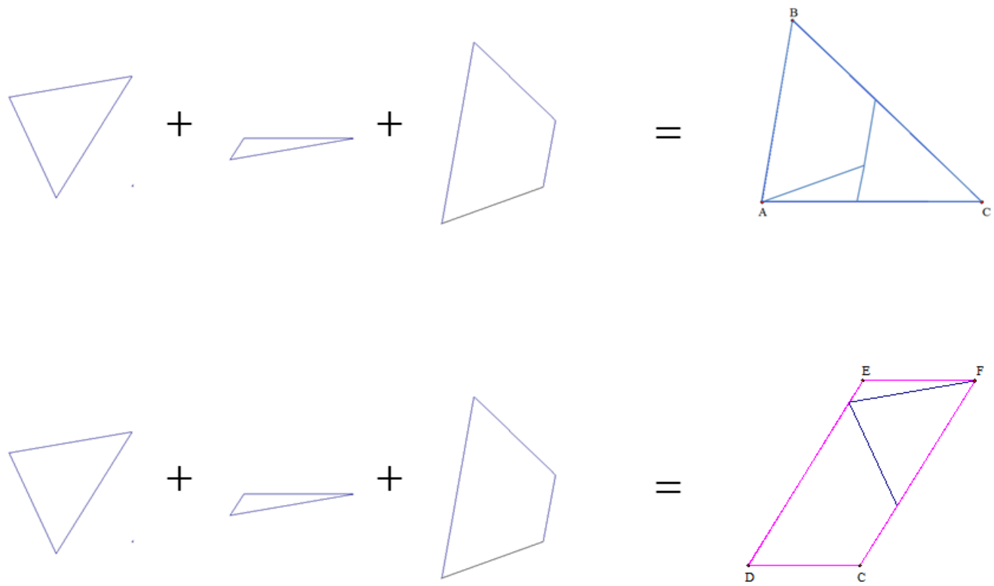


Figura 4.79. Resolución del problema mediante la descomposición y superposición de figuras

En el proceso de razonamiento el alumno identifica nuevos elementos geométricos mediante algunos trazos auxiliares, los cuales le ayudarán a resolver el problema.

El razonamiento del alumno al resolver el problema mediante descomposición y superposición de figuras es de tipo discursivo natural, es decir, de manera informal el alumno efectúa operaciones con las figuras para establecer las relaciones entre las áreas del triángulo y el paralelogramo. Sin embargo, cuando el alumno argumenta de manera formal que las áreas de un paralelogramo y un triángulo son iguales cuando se construyen sobre las mismas paralelas y teniendo el paralelogramo la mitad de la base de un triángulo, el proceso de razonamiento puesto en acción es de tipo discursivo teórico.

En el capítulo IV se presentó una clasificación de problemas de geometría de acuerdo con características descritas en el capítulo II de esta investigación. También contiene una selección de problemas de geometría y ejercicios de aplicación propuestos en los materiales de apoyo de la SEP, así como la resolución de algunos de los problemas para identificar los conocimientos geométricos que el alumno pone en acción al resolver un problema de geometría.

En el siguiente capítulo se muestran las conclusiones obtenidas sobre el análisis de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, así como de materiales de apoyo de apoyo de la SEP. Las conclusiones mostradas en este capítulo están relacionadas con las preguntas que guiaron esta investigación.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los resultados de los análisis llevados a cabo para esta tesis de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011, así como los de los materiales de apoyo de la SEP para la educación secundaria en México, permitieron identificar características relacionadas con las preguntas que guiaron la investigación.

Se revisaron programas de estudio de matemáticas para la educación secundaria, especialmente el de 2006 y el de 2011, para identificar el enfoque didáctico que se plantea. Desde 1993 se ha propuesto de manera general, y no sólo en la educación secundaria, trabajar bajo el enfoque de resolución de problemas como una manera de aprender matemáticas.

Aunque no fue parte de la investigación originalmente planteada, con base en el cuadro comparativo de los contenidos de geometría de los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011 (véase el cuadro 3.2), se identificó que dos contenidos ya no se trabajan en el programa de estudios de matemáticas de 2011:

2.3 Describir las características de cubos, prismas y pirámides. Construir desarrollos de planos de cubos, prismas y pirámides rectos. Anticipar diferentes vistas de un cuerpo geométrico. (SEP 2006a, p. 78)

1.3 Determinar mediante construcciones las posiciones relativas entre rectas y una circunferencia y entre circunferencias. Caracterizar la recta secante y la tangente de una circunferencia. (SEP 2006a, p.108)

Se identificó que seis contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006 se fragmentaron en doce contenidos de geometría para la elaboración del programa de estudios de matemáticas de 2011 (véase el cuadro 3.6). También se identificó que once contenidos fueron trasladados a otros bloques o grados escolares (véanse los cuadros 3.4 y 3.6).

En cuanto a los contenidos relacionados con los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos, se identificó que en el programa de estudios de matemáticas de 2011 se trabajan de manera conjunta, a diferencia del programa de estudios de matemáticas de 2006 donde éstos se trabajan separadamente.

En el programa de estudios de matemáticas de 2006 se *determinaba* y *aplicaba* el teorema de Tales. Sin embargo, en el programa de estudios de matemáticas de 2011 se *resuelven problemas* mediante del teorema de Tales.

Respecto a estos dos señalamientos sobre los cambios a los contenidos del programa de estudios de 2011 y las consecuencias que tiene para el aprendizaje de la geometría, sería necesario llevar a cabo una secuencia didáctica en la que se trabajará simultáneamente con dos grupos de estudiantes de educación secundaria. En uno de ellos se trabajarían de manera conjunta los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos, mientras que en el otro grupo se trabajarían separadamente. Así, sería posible identificar cuáles son las consecuencias de aprender de una u otra manera, y con cuál de estas dos maneras se obtienen mejores resultados en el aprendizaje de este tema de geometría.

De los 40 contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011, se enuncian 6 para la resolución de problemas (15%): 3 son de primer grado (7.5%), 1 de segundo grado (2.5%) y 2 de tercer grado (5%). Cuatro de estos contenidos son:

7.3.5 Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.

7.5.1 Uso de las fórmulas para calcular el perímetro y el área del círculo en la resolución de problemas.

8.1.5 Resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.

9.3.2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

En los otros dos contenidos se hace mención de la resolución de problemas geométricos (SEP 2011a; énfasis añadido):

7.2.5 *Resolución de problemas geométricos* que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

9.3.3 *Resolución de problemas geométricos* mediante el teorema de Tales.

Ahora bien, en relación con los cambios efectuados en los contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2006 para elaborar el de 2011, no se encontró documentación en la que se explique o describa el porqué de esos cambios.

Por otra parte, se identificó que los contenidos de geometría del *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) están organizados en contenidos generales, y éstos a su vez en contenidos particulares; en este libro, anterior al programa de estudios de matemáticas de 2011, se trabaja con 37 de los 40 contenidos de dicho programa. Esto es, aunque el libro se basa en los temas del Plan y programas de estudio de 1993, es un material de apoyo aún vigente.

Los contenidos de geometría del *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) están organizados en temas y cada tema en fichas de actividades. De los 40 contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011 se trabaja con 27 en 21 fichas de actividades.

En cuanto al material de *Geometría dinámica* (Zubieta *et al.* 2000) del proyecto Emat, los contenidos se organizan en temas, y éstos a su vez en hojas de trabajo. En este material se trabaja con 20 de los 40 contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011.

Con base en la diferencia entre ejercicio de aplicación y problema de matemáticas, se clasificaron para esta tesis las actividades de geometría contenidas en los materiales de apoyo de la SEP. En el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) hay mayor cantidad de problemas de geometría que de ejercicios de aplicación: 85 problemas de geometría (70%) y 37 ejercicios de aplicación. En el *Fichero de actividades didácticas* (Espinoza, García y García 2000) se proponen 14 problemas de geometría (67%) y 7 ejercicios de aplicación, en algunas de las 54 fichas de actividades que comprenden este material. Ahora bien, algunos problemas de geometría planteados en este *Fichero* son los mismos que los propuestos en el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001). Sin embargo, en cada una de las fichas de actividades se sugieren otros problemas (variantes) de mayor dificultad. A diferencia de estos dos materiales de apoyo, en *Geometría dinámica* (Zubieta *et al.* 2000) del proyecto Emat se proponen 17 problemas de geometría (26%) y 45 ejercicios de aplicación de un total de 62 hojas de trabajo. Así, resulta claro que en los materiales de apoyo, a pesar de que el enfoque didáctico se centra en la resolución de problemas, la cantidad de problemas de geometría es muy pequeña.

En el libro *La enseñanza de la geometría* (García y López 2008), publicado por el INEE, no se propone ningún problema de geometría, más bien, se sugieren algunas actividades de modo que el alumno analice y explore algunas propiedades de las figuras mediante el uso de material concreto.

En los análisis de esta investigación, a partir de la definición de Thompson (1996) sobre qué es un problema de geometría, se clasificaron los problemas de geometría de los materiales de apoyo de la SEP en tres categorías: *a)* construcción, *b)* cálculo y *c)* deducción de fórmulas.

En el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.* 2001) se reconocieron dos tipos de problemas de construcción: *1)* problemas relacionados con el trazo de líneas rectas y las construcciones de figuras geométricas bidimensionales, y *2)* problemas de representación plana de cuerpos geométricos. En cuanto a los problemas de cálculo se identificaron seis tipos: *1)* problemas de cálculo de áreas, *2)* de cálculo de perímetros de determinadas figuras, *3)* problemas de cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos, *4)* problemas que se resuelven usando el teorema de Pitágoras, *5)* problemas que se resuelven usando el teorema de Tales, y *6)* problemas de razones trigonométricas. Se identificó que la mayoría de los problemas que se proponen en este material son problemas de cálculo (71%); son 17% de construcción y 12% de deducción de fórmulas. Al igual que el *Libro para el maestro*, la mayoría de los problemas que se proponen en el *Fichero de actividades* *didácticas* (Espinoza, García y García 2000) son problemas de cálculo (72%) y más de la mitad de éstos se encuentran en tercer grado (44%); al primer grado corresponde 21%, y 7% al segundo grado. A diferencia de estos dos materiales, en el libro *Geometría dinámica* (Zubieta *et al.* 2000) el mayor porcentaje corresponde a problemas de construcción (41%); en realidad, son sólo 7 estos problemas, y 5 de ellos se plantean para primer grado.

En el material *Geometría dinámica* se menciona que al hacer uso de éste el alumno podrá resolver problemas, descubrir y construir conceptos y técnicas de resolución (Zubieta *et al.* 2000, p. 11). En este material sí se proponen problemas de geometría al alumno, pero son pocos en comparación con la cantidad de hojas de trabajo que lo constituye. En cuanto a que el alumno descubra y construya conceptos y técnicas de resolución, la realidad es que en algunas hojas de trabajo se impide que el alumno utilice sus estrategias de resolución, pues se le indican los pasos que debe seguir en el desarrollo de determinada actividad.

En el *Libro* y en el *Fichero* no se utiliza *software* para *trazar* o *construir*, por lo que se debe recurrir al uso del compás y de la regla en la resolución de problemas de construcción. Sin embargo, las construcciones en *Geometría dinámica* (Zubieta *et al.* 2000) pueden llegar a ser una forma de validación o exploración de propiedades geométricas; por ejemplo, al mover algunos de los elementos de una figura geométrica, ésta debe conservar sus propiedades.

Con respecto a los ejercicios de los materiales de apoyo de la SEP, éstos permiten al alumno explorar algunas propiedades de figuras planas y de cuerpos geométricos, además de estimar medidas de ángulos y hacer uso del juego de geometría para verificar algunos trazos o construcciones geométricas.

Así, en documentos oficiales de la SEP (programas de estudio y materiales de apoyo para los profesores) sobre la educación secundaria en México, analizados para esta tesis se encontró que es escaso el trabajo propuesto sobre *resolución* de problemas de geometría y todavía más escaso el *planteamiento* de problemas de geometría ─en realidad, en los documentos se menciona el *planteamiento* de problemas pero en los materiales de apoyo no se proponen actividades en las que el alumno tenga que plantear problemas─.

Dado que los materiales de apoyo para profesores de matemáticas de educación secundaria son escasos, y además las sugerencias en los programas de estudio vigentes (SEP 2011a) son insuficientes (se proponen textos en inglés y tesis de maestría del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnológica Avanzada del Instituto Politécnico Nacional), es necesario la elaboración de nuevos materiales que apoyen la práctica docente.

Así, con base en los análisis presentados en esta tesis, es recomendable que en estos nuevos materiales de apoyo se ponga más atención s en geometría desde la perspectiva de la resolución de problemas como una estrategia de aprendizaje. Además, debe hacerse un estudio profundo sobre las demás áreas de las matemáticas escolares para identificar necesidades en su aprendizaje.

EPÍLOGO

Durante la culminación de esta tesis, la Secretaría de Educación Pública dio a conocer el 29 de junio de 2016 la *Propuesta curricular para la educación básica 2016* (SEP 2016), en donde se exponen los objetivos de esta nueva propuesta educativa, así como su organización y los contenidos que se abordarán en cada asignatura para la educación básica. Esta nueva propuesta aún no entra en vigor en las escuelas de educación básica de México. En cuanto a la asignatura de matemáticas, el enfoque didáctico no ha cambiado con respecto a los programas de estudio anteriores. En la educación secundaria, el trabajo que se refiere a la *resolución* de problemas es todavía más escaso que en los programas de estudio de matemáticas de 2006 y de 2011. Por lo que se refiere al *planteamiento* de problemas, no se encontraron contenidos; en geometría no hay un contenido que se base en este enfoque.

Ahora bien, la distribución de los contenidos para la educación básica se organiza en ejes temáticos y cada eje en temas. Los ejes son *1)* Sentido numérico, *2)* Forma, espacio y medida, *3)* Manejo de datos y *4)* Procesos de cambio y pensamiento algebraico. En cuanto a los temas de geometría, se organizan en Figuras geométricas, y Magnitudes y medidas. A diferencia del programa de estudios de matemáticas de 2011, en esta nueva organización se separan los contenidos de aritmética de los de álgebra dando como resultado un nuevo eje temático. Por otra parte, los contenidos de geometría resultan menos que los del programa de estudios de matemáticas de 2011. En el tema Figuras geométricas se contemplan 7 contenidos y en el tema Magnitudes y medidas se consideran 5 contenidos. Se descartaron algunos contenidos de geometría del programa de estudios de matemáticas de 2011 y se incluyó el contenido “construcción de mapas y croquis”; el contenido “ubicación de puntos en el plano cartesiano” del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico del programa de estudios de matemáticas de 2011 apareció aún en la propuesta de 2016 (SEP 2016).

Según la *Propuesta curricular para la educación básica 2016* (SEP 2016), en los nuevos programas de estudio para la educación básica se consideran contenidos “prioritarios”, es decir, se consideró menor cantidad de contenidos para que hubiera mayor calidad del conocimiento y entendimiento. Sin embargo, si esto es así, ¿por qué descartar contenidos de geometría relacionados con el teorema de Tales, el número pi (π) o las transformaciones isométricas? ¿Por qué si los nuevos programas de estudio para la educación básica sugieren la enseñanza de las matemáticas bajo en el enfoque de la *resolución* y el *planteamiento* de problemas, son pocos los contenidos que se refieren a este enfoque? ¿Por qué y para qué modificar los programas de estudio de matemáticas cuando el actual programa de estudios aún no se ha terminado de cimentar?

REFERENCIAS

Alsina, C., C. Burgués y J. Fortuny, 1997, *Invitación a la didáctica de la geometría*, Síntesis, México.

Alarcón, J., E. Bonilla, R. Nava, T. Rojano y R. Quintero, 2001 (2.ª ed.), *Libro para el maestro. Matemáticas*. Educación secundaria, SEP, México. Consultado el 18 de noviembre de 2016 en: http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/libromaestro.pdf

Boule, F., 2005, *Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*, Uribe y Ferrari, México.

Bressan,A.M., B. Bogisic y K. Crego, 2000, *Razones para enseñar geometría en la educación básica*, Novedades Educativas, México.

Cruz R., M., 2006, *La enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas*, Tomo 1, Educación Habana, Habana.

Duval, R., 1998, Geometry from a cognitive point of view,en: C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st centu*ry, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,pp. 37-52.(Versión en castellano de V. Hernández y M. Villalba,2001: La geometría desde un punto de vista cognitivo. Obtenido el 20 de febrero de 2015 en: http://datateca.unad.edu.co/contenidos/551103/Unidad_2/La_Geometria_desde_un_Punto_de_Vista_Cognitivo.pdf

Espinoza, H., S. García y M. García, 1999, *Fichero de actividades didácticas*. Matemáticas. Educación secundaria, SEP, México. Consultado el 18 de noviembre de 2016 en: https://dl.dropboxusercontent.com/u/23387111/Blog%20Problemates/FICHEROS/ficheroactividades%20secundaria.pdf

Euclid, 1908, *The thirteen books of* The Elements, vol. 2, libros III y IX, Cambridge University Press, Cambridge. (Trad. del texto de Heiberg, intr. y comentarios de T. L. Heath)

Euclides, 2000, *Elementos*, vol. 1, libros I-IV, Gredos, Madrid. (Trad. al castellano y notas de M. L. Puertas C.; int. gral. de L. Vega)

García, S. y O. López, 2008, *La enseñanza de la geometría*, INEE, México. Consultado el 18 de noviembre de 2016 en: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Textos_divulgacion/Materiales_docentes/Geometria/Completo/geometriacompletoa.pdf

González U., P. M., 2008, *Pitágoras. El filósofo del número*, Nivola, Madrid.

Hemmerling, E.M., 1971, *Geometría elemental*, Limusa, México.

Juidías B., J. e I. R. Rodríguez O., 2007 (enero-abril), Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos, *Revista de Educación*, núm. 342, pp. 257-286.

López R., G., 2017, *Relaciones entre geometría y álgebra en la educación secundaria en México: Una ejemplificación*, UPN, México. (Tesis de licenciatura en pedagogía)

Mochón C., S., T. Rojano C. y S. Ursini L., 2000, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, SEP-ILCE, México. Consultado el 18 de noviembre de 2016 en: http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/hojadeCalculo.pdf

Parra, B., 1996, Dos concepciones de resolución de problemas en matemáticas, en: J. Alarcón y R. S. Rosas (coords.), *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente*, SEP, México.

PISA (Proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos), 2012, *Ítems liberados PISA*, INEE, México.

Polya, G., 1965, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México. (Publicado en inglés en 1945: *How to solve it*, Princeton University Press.)

RAE (Real Academia Española), 2014, *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.), Espasa Libros-Planeta mexicana, México.

Reyes C., X. Y., 2009, *Resolución de problemas de trigonometría: Estrategias de alumnos de educación secundaria*, UPN, México. (Tesis de maestría)

Rojano C., M.T., 2006, *Enseñanza de la física y de las matemáticas con tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la integración social en el aula*, SEP, México.

Santos T., L. M., 2007, *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, Trillas, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 1993, *Plan y programas de estudio 1993. Educación básica. Secundaria*, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2006a, *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2006b, *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudio 2006*, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2011a, *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2011b, *Plan de estudios 2011. Educación Básica,* SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública), 2016, *Propuesta curricular para la educación básica 2016*, SEP, México

Thompson, J.E., 1996, *Geometrías,* Limusa, México.

Zubieta B., A. Martínez, T. Rojano y S. Ursini, 2000, *Geometría dinámica*, SEP-ILCE, México. Consultado el 18 de noviembre de 2016 en: http://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/geometriadinamica.pdf

Datos de la autora de esta tesis

Beatriz Adriana Zuñiga Cruz nació en el Estado de México el 11 de octubre de 1989. Realizó sus estudios de licenciatura en la Escuela Normal Superior de México, donde obtuvo el título de Licenciada en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas, en julio de 2011. El 16 de octubre de 2011 inició su trabajo como profesora de matemáticas en la Escuela Secundaria Técnica 72. De agosto de 2014 a junio de 2016 cursó estudios en la Maestría en Desarrollo Educativo en la Línea de Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.