



---

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
UNIDAD AJUSCO  
LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

ERRORES COMETIDOS POR ESTUDIANTES DEL INEA Y ESTUDIANTES  
DE SECUNDARIA GENERAL EN LA RESOLUCIÓN  
DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

PRESENTA:

MONSERRAT SÁNCHEZ MORALES

ASESOR:

DR. RODRIGO CAMBRAY NÚÑEZ

CIUDAD DE MÉXICO, OCTUBRE 2016



## AGRADECIMIENTOS

Al creador de todas las cosas, a Dios, que me permitió llegar hasta aquí y me dio fortaleza en los momentos más difíciles que he pasado.

A mi familia, en especial a mis padres José Luis y Teodora, por su amor, trabajo y sacrificios en todos estos años; por enseñarme que con esfuerzo, trabajo y constancia puedo lograr todo lo que me proponga; a mis hermanos, Eliza, Richi y Gise porque son mi principal motivación.

A los profesores Arturo Bazán Zurita, Juan de Dios Hernández Garza y Enrique Vega Ramírez, por su cuidadosa revisión de este trabajo, por sus observaciones y recomendaciones para mejorarlo.

Al doctor Rodrigo Cambray Núñez, por guiarme y orientarme durante el desarrollo de esta tesis, por su dedicación, por motivarme cada día que tuvimos asesoría y por toda la ayuda que he recibido de él.

A Jorge porque siempre me ayudó hasta donde le fue posible, incluso más que eso; por su apoyo incondicional y por creer en mí, porque siempre me dijo que lo lograría.

Monserrat Sánchez Morales



## RESUMEN

En esta tesis se presentan resultados sobre errores que cometen personas jóvenes y adultas que estudian en el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA), en la resolución de ecuaciones de primer grado según se presentan en el material didáctico del INEA destinado a este tema: en la Unidad 4 del módulo *Operaciones avanzadas*. Se presenta una comparación de este contenido con los contenidos de ecuaciones de primer grado de los programas de 2011 de secundaria general (primer y segundo grados) para contrastar errores que cometen jóvenes y adultos que estudian en el INEA con los de estudiantes de secundaria general en la resolución de algunas ecuaciones de primer grado.

La información y las evidencias presentadas en este trabajo de investigación servirán a los asesores educativos y demás personal del INEA para enterarse de una parte importante de la problemática de quienes estudian en el INEA en cuanto a su aprendizaje en la resolución de ecuaciones de primer grado.



## ÍNDICE GENERAL

|   |     |
|---|-----|
| AGRADECIMIENTOS.....  | iii |
| RESUMEN.....  | v   |
| LISTA DE CUADROS.....   | xii |
| LISTA DE FIGURAS.....   | xv  |
| <br>  |     |
| CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.....                                       | 1   |
| Preguntas de investigación.....                                     | 4   |
| Objetivos.....  | 4   |
| <br>  |     |
| CAPÍTULO II. REVISIÓN DE LA LITERATURA.....                         | 7   |
| ¿Qué es un adulto?.....   | 7   |
| Educación de adultos y educación matemática.....                    | 13  |
| Descripción del módulo <i>Operaciones avanzadas</i> .....           | 15  |
| Descripción de la unidad 4.....                                     | 19  |
| Ecuaciones de primer grado en secundaria general.....               | 22  |
| Ecuaciones de primer grado en los programas de estudio de 2011..... | 23  |
| Ecuaciones de primer grado en los programas de estudio de 2006..... | 25  |

|   |    |
|---|----|
| Revisión de la literatura sobre dificultades y errores en           |    |
| el aprendizaje del álgebra.....                                     | 29 |
| Algunas dificultades con las letras.....                            | 32 |
| Dificultades con los signos de operación.....                       | 34 |
| <br>  |    |
| CAPÍTULO III. METODOLOGÍA.....                                      | 38 |
| Revisión y comparación de los programas de matemáticas de educación |    |
| secundaria y el módulo Operaciones avanzadas en el tema de          |    |
| ecuaciones de primer grado .....                                    | 38 |
| Instrumentos.....   | 41 |
| Entrevista a asesores educativos.....                               | 42 |
| Cuestionario A.....   | 42 |
| Cuestionario B .....  | 43 |
| Sujetos que participaron en la investigación.....                   | 44 |
| Asesores educativos .....   | 45 |
| Alumnos de INEA.....  | 46 |
| Alumnos de secundaria general.....                                  | 47 |
| Cartas de consentimiento.....                                       | 47 |
| Procesamiento de la información.....                                | 48 |
| <br>  |    |
| CAPÍTULO IV. PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN.....                   | 50 |
| Comparación de los programas de 2006 y de 2011 en el tema de        |    |
| ecuaciones de primer grado.....                                     | 51 |



|   |     |
|---|-----|
| Comparación del módulo Operaciones avanzadas del INEA con los<br>programa de 2011 de educación secundaria general y el en el tema<br>de ecuaciones de primer grado..... | 57  |
| Análisis de resultados de los instrumentos aplicados a estudiantes del INEA.....  | 63  |
| Cuestionario A .....  | 63  |
| Cuestionario B .....  | 67  |
| Entrevista a asesores educativos.....   | 80  |
| Análisis de resultados de los instrumentos aplicados a estudiantes de<br>secundaria general.....  | 81  |
| Comparación de resultados.....  | 101 |
| CAPÍTULO V.   |     |
| CONCLUSIONES.....   | 108 |
| Conclusiones y sugerencias.....   | 108 |
| Referencias.....  | 116 |
| Apéndice A. Ecuaciones de primer grado en el bloque III de primer grado de<br>educación secundaria en los programas de estudio de<br>2006.....                          | 121 |
| Apéndice B. Ecuaciones de primer grado en el bloque III de segundo grado de<br>educación secundaria en los programas de estudio de<br>2006.....                         | 123 |

|  |     |
|--|-----|
| Apéndice C. Ecuaciones de primer grado en el bloque III de primer grado de educación secundaria en los programas de estudio de 2011.....   | 125 |
| Apéndice D. Ecuaciones de primer grado en el bloque IV de segundo grado de educación secundaria en los programas de estudio de 2011.....   | 126 |
| Apéndice E. Guion de entrevista .....  | 127 |
| Apéndice F. Cuestionario A .....   | 128 |
| Apéndice G. Cuestionario B.....  | 130 |
| Apéndice H. Carta de consentimiento para asesores educativos.....  | 132 |
| Apéndice I. Carta de consentimiento para estudiantes del INEA.....   | 133 |
| Apéndice J. Carta de consentimiento para estudiantes de secundaria general.....  | 134 |
| Apéndice k. Prueba del Alfa de Cronbach para validar la confiabilidad del cuestionario B aplicado a estudiantes del INEA .....             | 135 |
| Apéndice L. Prueba del Alfa de Cronbach para validar la confiabilidad del cuestionario B aplicado a estudiantes de secundaria general..... | 136 |
| Apéndice M. Resultados de los reactivos 3 y 4 de participantes del INEA.....   | 141 |
| Apéndice N. Resultados de los reactivos 3 y 4 de participantes de secundaria general.....  | 142 |
| Datos de la autora de la tesis.....  | 144 |



## LISTA DE CUADROS

|   |    |
|---|----|
| Cuadro 2.1. Ejemplo de estructura de las actividades.....   | 18 |
| Cuadro 2.2. Ecuaciones de primer grado en el módulo <i>Operaciones avanzadas</i> del INEA.....  | 21 |
| Cuadro 4.1. Comparación de los programas de primer grado de 2006 con los programas de 2011 en el tema de ecuaciones de primer grado .....                                       | 52 |
| Cuadro 4. 2. Comparación de los programas de segundo grado de 2006 con los programas de 2011 en el tema de ecuaciones de primer grado .....                                     | 32 |
| Cuadro 4.3. Comparación de los programas de estudio de 2011 con el módulo <i>Operaciones avanzadas</i> del INEA en el tema de ecuaciones de primer grado .....                  | 58 |
| Cuadro 4.4 Competencias en el INEA y en programas de secundaria general.....  | 61 |
| Cuadro 4.5.a. Aspectos relevantes que se relacionan con el estudio y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado de las personas que estudian en el INEA..... | 65 |
| Cuadro 4.5.b. Aspectos relevantes que se relacionan con el estudio y el   |    |

|  |     |
|--|-----|
| aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado de las personas que estudian en el INEA.....                            | 66  |
| Cuadro 4.6. Nociones de ecuación y características de las ecuaciones de primer grado de los estudiantes del INEA.....              | 67  |
| Cuadro 4.7 Resultados de estudiantes de INEA en las preguntas 3 y 4 del cuestionario B.....  | 70  |
| Cuadro 4.8. Errores por ecuación que cometen estudiantes del INEA en la resolución de ecuaciones de primer grado.....              | 76  |
| Cuadro 4.9. Índice de dificultad por incisos del reactivo 3.....   | 78  |
| Cuadro 4.10. Índice de dificultad por incisos del reactivo 4.....  | 79  |
| Cuadro 4.11. Respuestas a las preguntas 1 y 2 del cuestionario B aplicado a estudiantes de secundaria general.....                 | 82  |
| Cuadro 4.12. Resultados de estudiantes de secundaria general en las preguntas 3 y 4 del cuestionario B.....                        | 87  |
| Cuadro 4.13 Errores por ecuación que cometen estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado..... | 97  |
| Cuadro 4.14. Índice de dificultad por incisos del reactivo 3.....  | 100 |
| Cuadro 4.15. Índice de dificultad por incisos del reactivo 4.....  | 101 |
| Cuadro 4.16 Comparación de los niveles de dificultad del reactivo 3.....   | 103 |
| Cuadro 4.17 Comparación de los niveles de dificultad del reactivo 4.....   | 107 |



## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1 Tipos de errores según Socas 1997 .....                   | 37 |
| Figura 4.1. Ecuación del tipo $a - x = b$ .....                      | 71 |
| Figura 4.2. Ecuación del tipo $\frac{x}{a} - b = c$ .....            | 74 |
| Figura 4.3. Problema y ecuación del tipo $\frac{x}{a} - b = c$ ..... | 75 |





## CAPÍTULO I

### INTRODUCCIÓN

En esta tesis se investigaron los errores que cometían las personas jóvenes y adultas que estudiaban (octubre – noviembre 2015) en el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA), en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita según se presentan en la unidad 4 del módulo *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006), así como los errores que cometían estudiantes de secundaria general.

Las personas que estudian en el INEA son muy diversas en cuanto a sus características, intereses y necesidades de aprendizaje. “El INEA es una dependencia educativa de gobierno que atiende a personas de 15 años o más que por alguna situación adversa no tuvieron la oportunidad de aprender a leer o a escribir o bien, que no han concluido su primaria o secundaria” (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011).

El Modelo Educativo para la Vida y el Trabajo (MEVyT) implementado por el INEA “ofrece diversos caminos u opiniones educativas para responder a los múltiples y diversos requerimientos de las personas que desean superarse, y en muchos casos, concluir su educación básica” (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011).

En el *Diario Oficial de la Federación*, Cuarta sección, donde se precisa la forma de operar del INEA, se describe lo siguiente:

La atención educativa que se brinda mediante MEVyT en los niveles inicial, intermedio y avanzado [...], es a través de una oferta múltiple de módulos temáticos, entre los que se encuentran los básicos y diversificados, elaborados con contenidos y actividades didácticas que integran paquetes modulares con materiales variados, orientados a diferentes sectores de población para atender sus necesidades específicas. (SEP, 2014, p. 18)

Todos los módulos, básicos y diversificados, que conforman el plan de estudios están ordenados por ejes temáticos. De los módulos básicos, que son 18, 10 corresponden al nivel de educación primaria y 8 al nivel de educación secundaria: “cubren las necesidades y herramientas fundamentales de aprendizaje, están ordenados en torno a los ejes de Lengua y comunicación, Matemáticas y Ciencias” (SEP, 2014, p. 54). El estudio de todos los módulos que forman estos tres ejes es de carácter obligatorio. En cuanto a los módulos diversificados, estos “abordan temas específicos para cubrir los intereses y necesidades de los diversos sectores de la población, sin secuencia programada [...]. La mayoría son de carácter nacional, pero también hay regionales o estatales” (SEP, 2014, p. 54). El estudio de los módulos diversificados, 2 en primaria y 4 en secundaria, son obligatorios para la certificación del alumno; sin embargo, los módulos diversificados que hay hasta el momento son

50 y están organizados en 6 ejes temáticos adicionales, de los cuales el alumno puede elegir los módulos que cubran sus necesidades e intereses.

El eje de matemáticas presenta el índice más alto de reprobación de los alumnos del INEA. Este eje está conformado por 7 módulos: *Matemáticas para empezar* (Solís *et al.*, 2004), de nivel inicial, que se refiere a la alfabetización; *Los Números* (González *et al.*, 2002), *Cuentas útiles* (Limón *et al.*, 2011), y *Figuras y medidas* (Cortina y Amador, 2010a), que corresponden al nivel intermedio, es decir nivel primaria; y finalmente *Fracciones y porcentajes* (Cortina y Amador, 2010b), *Información y gráficas* (Amador, 2010) y *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006), los tres de nivel avanzado, que corresponde a secundaria. De acuerdo con la experiencia de la autora de esta tesis como asesora educativa, en la unidad 4, “Ecuaciones de primer grado”, del módulo *Operaciones avanzadas*, los alumnos suelen tener mayores dificultades y por ende hay mayor índice de reprobación en este módulo. Esta unidad está enfocada al desarrollo de las nociones de ecuación y de incógnita, así como al planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de los tipos  $x + a = b$ ,  $a - x = b$ ,  $ax = b$ ,  $\frac{x}{a} = b$ ,  $ax + c = b$  y  $\frac{x}{a} + b = c$ , entre otros.

Es por esta situación que la revisión del contenido de la unidad 4 del módulo *Operaciones avanzadas*, así como el análisis y la identificación de errores que cometen los jóvenes y adultos que estudian en el INEA en la resolución de ecuaciones de primer grado, ayudó a responder las preguntas que guiaron esta investigación, las cuales son las siguientes.

## Preguntas de investigación

- ¿Cuáles son los errores que cometen los jóvenes y adultos que estudian en el INEA y estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita?
- ¿Qué nociones tienen jóvenes y adultos que estudian en el INEA y estudiantes de secundaria general acerca de las ecuaciones de primer grado?
- ¿Cómo son los errores que cometen los jóvenes y adultos que estudian en el INEA en comparación con los de estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita?

## Objetivos

### General

- Identificar cuál es el desempeño de estudiantes del INEA y de estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado de tipo aritmético con una incógnita, de acuerdo con lo planteado en el módulo *Operaciones avanzadas*.

### Específicos

- Comparar el contenido y el enfoque de ecuaciones de primer grado de los programas de matemáticas de educación secundaria general de 2006 y de 2011, así como de este último y del módulo *Operaciones avanzadas* del INEA.
- Conocer qué nociones tienen estudiantes del INEA y de secundaria general acerca de las ecuaciones de primer grado de tipo aritmético con una incógnita.

- Comparar el desempeño de estudiantes del INEA y estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado de tipo aritmético con una incógnita.

La *secundaria general* es una de las modalidades escolarizadas para cursar la educación básica, posterior al nivel de educación primaria; abarca tres grados y está dirigida a la población de 12 a 16 años (Álvarez, 1994, p. 3; Aguilar, 2009, p. 33).

En este capítulo se han presentado el planteamiento del problema, las preguntas de investigación y los objetivos, general y específicos; a continuación se incluye un breve resumen del contenido de los demás capítulos.

El capítulo II está dividido en tres apartados, en el primero se discute qué es un adulto, considerando distintos enfoques como el psicológico, el antropológico y el jurídico; además, se incluyen definiciones de educación de adultos y de educación matemática. En el segundo apartado se hace una descripción general del módulo *Operaciones avanzadas*, así como de la unidad 4 de dicho módulo. En el último apartado se incluye una revisión de la literatura sobre dificultades y errores en la resolución de ecuaciones.

En el capítulo III se describe cómo se analizaron los programas de matemáticas de educación secundaria de 2006 y de 2011, así como el módulo *Operaciones avanzadas* con los programas de matemáticas de educación secundaria de 2011. Asimismo, se describen las características de los instrumentos

utilizados en esta investigación y los sujetos que participaron en la misma. También se describe cómo se realizó el procesamiento de la información.

En el capítulo IV se incluyen resultados de los análisis y de la comparación de los programas de matemáticas de educación secundaria de 2006 y de 2011, así como del módulo *Operaciones avanzadas* y de los programas de matemáticas de educación secundaria de 2011. Se presentan los datos obtenidos en las entrevistas a los asesores, así como los resultados y el análisis de las respuestas a los cuestionarios que se aplicaron a estudiantes del INEA y a estudiantes de secundaria general. Al final de este capítulo se incluye una comparación de los errores que cometieron ambos tipos de estudiantes.

En el capítulo V se presentan las conclusiones y sugerencias que se desprenden de esta investigación. Finalmente se incluyen la lista de referencias citadas y los 14 apéndices con información y documentos utilizados en la investigación para esta tesis.

## CAPÍTULO II

### REVISIÓN DE LA LITERATURA

#### ¿Qué es un adulto?

El INEA está destinado a brindar servicios educativos a personas adultas que no han iniciado su educación básica o no la han concluido. En diversos documentos del INEA y de la Secretaría de Educación Pública (SEP) revisados para esta tesis, no se localizó una definición de lo que es un adulto (por ejemplo: SEP, 1976; Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011, y Castro, 2011). Sin embargo, en estos documentos se menciona que la educación de adultos está destinada para personas mayores de 15 años o personas que se encuentran en rezago educativo.

En esta investigación se trabajó con sujetos que estudiaban en el INEA, cuyas edades iban de 15 a 54 años. Así, se entiende por adulto a cada una de estas personas que no habían concluido su educación básica. Esto es, se está considerando en esta tesis lo que es un adulto desde el punto de vista de la escolarización, que, según Quintana (1992, p. 21):

suelen señalarse como sujetos [...] a todos aquellos que, habiendo dejado el sistema escolar (por razón de su edad) no se hallan todavía en posesión de

sus certificados académicos elementales previstos para el final de la misma. Según eso [...] son ya adultos, aun cuando por su edad sean realmente o jóvenes o acaso adolescentes.

Esto coincide con parte de la descripción de Schmelkes (2000a, p. 91):

para el INEA, el adulto sujeto de la educación de adultos, es el individuo mayor de 15 años marginado de los beneficios del desarrollo y de los servicios educativos: analfabetas que han recaído en el analfabetismo [*sic.*], que no han cursado o concluido su educación básica, o bien sin una capacitación para integrarse a un proceso productivo, así como aquellos que pertenecen a grupos étnicos o marginados que no están integrados a la cultura nacional.

Es necesario plantear esta manera de conceptualizar lo que se considera como adulto en esta tesis porque incluso a nivel internacional, definir el concepto de adulto no resulta una tarea fácil, y en México además porque hay carencia de material documental. Gran parte de la literatura que hay se centra en definir lo que es *la educación de adultos* y se describe a los sujetos para los que va dirigida sin llegar a dar una definición de lo que es un adulto. Definir la palabra adulto también depende del enfoque desde el que se considere, de ahí que la palabra adulto sea polisémica.

En un documento del INEA (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011), se describe a los sujetos de *la educación de adultos* como “personas de 15 años o más que por



alguna situación adversa no tuvieron la oportunidad de aprender a leer o a escribir o bien, que no han concluido su primaria o secundaria”.

En el artículo 43.º de la Ley General de Educación (LGE) de México se establece que “la educación para adultos está destinada a individuos de quince años o más que no hayan cursado o concluido la educación primaria y secundaria” (LGE, p. 17). Cabe destacar que el INEA también brinda servicios educativos a “los niños/as y jóvenes de 10 a 14 años que por sus condiciones de extra edad con respecto a las normas escolares, necesitan una opción para ejercer su derecho a estudiar la educación primaria” (SEP, 2014, p. 10). En este sentido, son personas que se encuentran en rezago educativo y que por su condición de extra edad pueden recibir servicios del INEA (sin ser adultos).

En la UNESCO, en la cuarta conferencia de Educación de Adultos celebrada en Hamburgo en 1997, a partir de lo que se considera que es *la educación de adultos*, se hace referencia a las personas adultas cuyo entorno social las considera adultos:

Por educación de adultos se entiende el conjunto de procesos de aprendizaje, formal o no, gracias al cual *las personas cuyo entorno social se consideran adultos* [sic: énfasis añadido] desarrollan sus capacidades, enriquecen sus conocimientos y mejoran sus competencias técnicas o profesionales o las reorientan a fin de atender sus propias necesidades y las de la sociedad.  
(Citado en: Schmelkes, 2000b, p. 339)

De acuerdo con Long (1976, p. 4; citado en Merriam y Brockett 1997, pp. 4-5), se consideraba como educación de adultos “las actividades de aprendizaje formales e informales de los individuos mayores de doce [y hasta] catorce años de edad en la América colonial”. Merriam y Brockett (1997, p. 4) señalan que en los Estado Unidos de Norteamérica “la adultez como una etapa de la vida es un concepto relativamente nuevo” y citan que, de acuerdo con Jordan (1978, p.192), “[e]l concepto no apareció en los Estados Unidos de Norteamérica en absoluto hasta después de la Guerra Civil, en realidad hasta principios del siglo XX”.

A continuación se retoma la problemática de definir lo que es un adulto, desde varios enfoques. En lo referente a su etimología “el término *adulto* procede del verbo latino «adolecere», que significa crecer; así, *adulto* se deriva de la forma del participio pasado «adultum», que significa «el que ha terminado de crecer, el que ha crecido»” (Sarrate, 2002, pp. 96-97). En el *Diccionario de la lengua española* de la Real Academia Española (RAE, 2014) se define “adulto” o “adulta” (del latín *adultus*), como adjetivo y como sustantivo, en su primera de tres acepciones, así: “1. Dicho de un ser vivo: Que ha llegado a la plenitud de crecimiento o desarrollo”.

Desde lo social, “se considera persona adulta a la que está integrada y ocupa un puesto en la sociedad, lo que conlleva determinadas responsabilidades y derechos” (Sarrate, 2002, p. 99).

Antropológicamente, en nuestras sociedades modernas, “se es adulto cuando se deja de ser joven”; en cambio, “en las antiguas y primitivas ocurre que la juventud no existe”, pues se pasa de niño a adulto, lo que acontece a temprana edad (Quintana, 1994, p. 18). También se ha señalado que biológicamente “muchas

culturas consideran que la pubertad es la entrada a la adultez (Merriam y Brockett, 1997, p. 4).

Merriam y Brockett (1997, p. 5), en cuanto a la edad, presentan la siguiente cita tomada de Paterson (1979, p.13):

Aquellas personas (en casi todas las sociedades, la mayoría) a quienes atribuimos la condición de adultos pueden mostrar, y así lo hacen, la más amplia variedad posible de dones intelectuales, facultades físicas, rasgos característicos, creencias, gustos y hábitos. Pero correctamente los consideramos como adultos porque, en virtud de su edad, se justifica que requerimos que muestren las cualidades básicas de la madurez. Los adultos no necesariamente son maduros. Pero se supone que son maduros y es en esta suposición necesaria en la que justificadamente se basa su adultez.

Estos autores (Merriam y Brockett, 1997, p. 5) ponen énfasis en que “[e]n el núcleo del concepto está la noción de que los adultos son mayores que los niños, y como resultado hay un conjunto de expectativas sobre su comportamiento”.

Desde el enfoque jurídico, Sarrate (2002, p. 97) explica que el término adulto viene a determinar lo que se conoce como la mayoría de edad, esto es, aquella edad que, según la ley ha de tener un sujeto para poder disponer de sí, para decidir sobre sus intereses. Esta mayoría de edad está determinada

por criterios psicológicos, sociales, políticos y culturales y por la ley, y varía según la época, los lugares y el medio social.

En México está estipulado en los artículos 646.º y 647.º del Código Civil Federal que “la mayoría de edad comienza a los 18 años” y que el “mayor de edad dispone libremente de su persona y de sus bienes” (2013, p. 71).

En lo psicológico, Jordan (1978, p. 189; citado en Merriam y Brockett 1997, p. 4) señaló, refiriéndose al concepto de adultez, que “como comúnmente se piensa hoy en día, es en gran parte un artefacto de la cultura norteamericana del siglo XX que surgió por un proceso de exclusión, como el producto final de definiciones previas de otras etapas en el ciclo de la vida humana”. En este mismo ámbito, el psicológico, Quintana (1994, p. 21) establece que “la persona adulta es la que ha llegado a su desarrollo pleno y vive en él”, además que “el adulto se caracteriza por ser un individuo «maduro»”; en este sentido, el autor expone que a través del concepto *madurez* se puede llegar a una mayor comprensión de la palabra *adulto*, ya que varios psicólogos han propuesto “características que configuran el estado de la madurez de la personalidad”. Sin embargo, Quintana pone énfasis en diferenciar a los “adultos reales (o «psicológicos») de los meramente «cronológicos»” ya que llegar a determinada edad no es signo de madurez, pues cada adulto muestra distinta madurez y “dependerá no solo de la edad, sino también de si se han dado o no las condiciones favorables para que el individuo haya realizado su maduración personal” (1994, p. 21).

## Educación de adultos y Educación matemática

La investigación para esta tesis se encuentra en el cruce de los campos de investigación *Educación de adultos* y *Educación matemática*. Por tal motivo conviene presentar aquí definiciones de ambos.

Ya se ha dicho que muchas fuentes se centran en definir lo que es la educación de adultos así como a los sujetos para los que va dirigida. En esta tesis se está considerando a la educación de adultos a partir de la definición dada en la conferencia General de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura celebrada en Nairobi en 1976 y que dice que la educación de adultos:

designa la totalidad de los procesos organizados de educación, sea cual sea el contenido, el nivel o el método, sean formales o no formales, ya sea que prolonguen o reemplacen la educación inicial dispensada en las escuelas y universidades y en forma de aprendizaje profesional, gracias a las cuales las personas consideradas como adultos por la sociedad a la que pertenecen, desarrollan sus aptitudes, enriquecen sus conocimientos, mejoran sus competencias técnicas o profesionales o les dan una nueva orientación y hacen evolucionar sus actitudes o su comportamiento en la doble perspectiva de un enriquecimiento integral del hombre y una participación en un desarrollo socioeconómico y cultural equilibrado e independiente (p. 124).

Además, es importante mencionar que la educación de adultos debe estar determinada por los siguientes elementos, de acuerdo con Ávila y García (2000, p. 103):

- 1.- Planes y programas de estudio para personas adultas.
- 2.- Programas por módulos de corta duración.
- 3.- Sistema de evaluación de los módulos.
- 4.- Sistema apropiado de acreditación.
- 5.- Metodología de enseñanza basada en técnicas, procesos y destrezas.
- 6.- Mejora intensiva en los materiales didácticos.

FitzSimons (2002, p. 8) define a la *educación matemática* como “la enseñanza y el aprendizaje en todos los cursos que incluyen las matemáticas, cálculos numéricos y espaciales, así como los componentes estadísticos”. Sin embargo, en un estudio de caso en Australia (FitzSimons, 2007, pp.111-126) encontró que las personas adultas que volvían a estudiar traían consigo una historia compleja sobre las prácticas de educación matemática a las que estuvieron sujetas. En el estudio de caso la población era femenina, sus edades comprendían de 20 a 60 años. Muchas mujeres se habían formado imágenes negativas de las matemáticas como resultado de sus experiencias en la escuela. (FitzSimons es un investigador australiano; su campo de acción se ubica en los cruces de la educación de adultos, educación matemática y profesionales de la educación.)

Autores como Fitzsimons (2002) y Ávila (2003) coinciden en que la educación matemática ha trasladado los mismos modelos de enseñanza de la educación de niños a la educación de adultos y que “[l]as matemáticas en jóvenes y adultos socialmente se ha encasillado como un problema reducido de comunicar reglas, procedimientos y definiciones” (Ávila, 2003, p. 6). Sin embargo, los adultos tienen conocimientos y habilidades diferentes a las de los niños, lo cual implica necesariamente plantear nuevas y mejores formas de enseñanza de las matemáticas a los adultos:

El desarrollo de habilidades de matemáticas significa mucho más que la habilidad de calcular. Significa desarrollar la habilidad de enfrentarse a un problema hasta que alcanzamos una comprensión crítica de él. Significa aprender tanto a crear como a resolver problemas, hacer preguntas, reunir y extraer información útil, criticar suposiciones y usar números para confirmar o refutar opiniones. Significa aprender a cooperar y compartir ideas, y situar el componente matemático del problema en un contexto que tenga sentido. Significa hacer propios todos los aspectos de experiencia de aprendizaje (Webber, 1988, p. 7; citado en FitzSimons, 2007, p. 110).

#### Descripción del módulo *Operaciones avanzadas*

El módulo *Operaciones avanzadas* consta de un *Libro del adulto*, una revista de *Lecturas de matemáticas*, un *Folleto de juegos*, una calculadora aritmética, una regla graduada y una *Guía del asesor*. El *Libro del adulto*, a partir del cual se organiza el

estudio del módulo, está estructurado en 8 unidades, las cuales tienen de 2 a 4 actividades:

Unidad 1. Números con signo

Unidad 2. Aplicación de los números con signo

Unidad 3. Expresiones algebraicas

Unidad 4. Ecuaciones del primer grado

Unidad 5. Relaciones en plano cartesiano

Unidad 6. Sistema de ecuaciones con dos incógnitas

Unidad 7. Monomios y polinomios

Unidad 8. Teorema de Pitágoras.

La actividad 1 de la unidad 1 inicia con la lectura, escritura y comparación de números con signo, mientras que las actividades 2 y 3 se dedican a las operaciones con este tipo de números. La unidad 2 aborda la jerarquía de operaciones así como el plano cartesiano; las potencias y notación científica son temas que pertenecen también a la unidad 2. En la unidad 3 se desarrollan contenidos relacionados con el lenguaje algebraico.

La unidad 4 está enfocada al desarrollo de las nociones de ecuación e incógnita, así como al planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado. La unidad 5 trata de problemas con dos variables que permiten representar relaciones denominadas funcionales. La unidad 6 aborda la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de sustitución, suma y



resta, y gráfico. La unidad 7 está dedicada al estudio de monomios y polinomios, así como a sus operaciones (suma, resta y multiplicación). Finalmente en la unidad 8 se plantean problemas que se pueden resolver mediante el teorema de Pitágoras y se recupera la idea de potencia, específicamente de potencias cuadradas [Amador, 2006, p. 234, 236; *sic*].

La estructura de cada actividad es la siguiente:

- Propósito: enuncia lo que se espera que el alumno logre al realizar las actividades.
- Número y nombre: Identifica la actividad.
- Recuperar y compartir experiencias: Preguntas relacionadas con diversas actividades en las que se utiliza el contenido que se va a tratar.
- Presentación: Información breve que da la oportunidad de saber algo más sobre un hecho o situación en la que se va a trabajar el contenido.
- Situación problemática inicial: Se presenta una situación que el alumno debe resolver con sus propias estrategias.
- Cómo resuelven otra u otras personas una situación similar: Se incluye ejemplos de cómo otra persona resuelve un problema similar al propuesto inicialmente.
- Resolvamos otros problemas: El alumno resolverá problemas en los que requiere aplicar lo aprendido en el desarrollo de la actividad.
- Cierre: Presenta información sobre el contenido matemático desarrollado en la actividad.

En el cuadro 2.1 se incluye de manera resumida un ejemplo de la estructura de las actividades (Amador, 2006, pp.116-119).

Cuadro 2.1. Ejemplo de estructura de las actividades

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| Propósito:                         | Usted aplicará la noción de ecuación de primer grado e incógnita.  |
| Número y nombre                    | Actividad 11: Con un poco de ingenio.  |
| Recuperar y compartir experiencias | ¿Ha tenido que repartir en partes iguales sin contar con el instrumento adecuado? ¿Cómo lo ha hecho? Comente con su asesor o asesora.  |
| Presentación                       | Muchas veces repartimos equitativamente (en partes iguales) usando objetos no convencionales para medir; por ejemplo, medimos tela con los brazos abiertos o semillas con botones.   |
| Situación                          | 1.- Rosalía necesita pesar 3 kg de fierro, ¿cómo lo puede hacer si sólo tiene una balanza y una pesa 5 kg y otra de 2 kg? Dibuje la balanza, buscando una solución.<br>2.- [...]<br>3.- [...]  |
| Cómo resuelven otras personas      | Observa la forma en que Olga y Lupe razonan ante una situación similar.<br>Olga: [...]<br>[...]  |
| Resolvamos                         | Resolvamos otros problemas<br>4.- Rodrigo gana \$45.00 más que Óscar. Rodrigo gana \$925.00. ¿Cuánto gana Óscar?<br>5.- [...]  |
| Cierre                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>Una <i>igualdad</i> indica que dos expresiones representan un mismo número.</li> </ul> <p>Ejemplos.<br/> <math>4 = 4</math>   <math>16 = 2(8)</math>   <math>6x + 4 = 28</math>   <math>p = 3l</math><br/>         [ y se menciona que son: fórmula, ecuación, solución, miembros de una ecuación y ecuación de primer grado]</p> |

#### *Descripción de la unidad 4*

La unidad 4, “Ecuaciones de primer grado”, está formada de 4 actividades que se numeran de la 11 a la 14.

En la actividad 11, “Con un poco de ingenio”, se desarrollan las nociones de *ecuación e incógnita* y las propiedades de la igualdad. Se incluye una serie de problemas para que el alumno desarrolle expresiones que indiquen una igualdad.

En la actividad 12, “El cambio”, se plantean y resuelven ecuaciones de los tipos  $x + a = b$  y  $a - x = b$ , donde  $x$  es la incógnita y  $a$  y  $b$  son números enteros, positivos y negativos. La actividad se inicia con el planteamiento de un problema y a partir de éste se pide al alumno que determine cuál es la incógnita del mismo, es decir, cuál es la pregunta que hay que responder; una vez identificada la incógnita del problema, el alumno debe elegir una letra para plantear una ecuación que represente al problema y posteriormente resolverla. En esta actividad se introduce el término “despeje” y se dan instrucciones paso a paso para plantear una ecuación en términos del problema y resolverlo mediante ésta. La actividad continúa con otros problemas para que el alumno plantee ecuaciones y las resuelva, así como 4 ejercicios de resolución de ecuaciones sin que en éstos se haga referencia al planteamiento de algún problema; se da una sugerencia para el despeje en este tipo de ecuaciones.

En cuanto a la actividad 13, “Agua malgastada”, en la que se abordan ecuaciones de los tipos  $ax = b$  y  $\frac{x}{a} = b$ , donde  $x$  es la incógnita y  $a$  y  $b$  son números enteros, decimales, positivos y negativos dados, en los problemas que se plantean

ya no se le pide al alumno que identifique la incógnita de manera explícita: se plantea de manera directa la ecuación del problema y se designa un espacio para su resolución. Se explica cómo se procede para multiplicar una fracción por un número entero; por ejemplo,

$$\frac{2}{7} \times 5 = \frac{2}{7} \times \frac{5}{1} = \frac{10}{7}$$

y el procedimiento cuando en lugar del número entero se tiene una incógnita:

$$\frac{2}{7}(x) = \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{2x}{7}.$$

Esto con la finalidad de mostrar cómo se resuelven estas ecuaciones y cómo se lleva a cabo el despeje (Amador, 2006, p. 131).

En la actividad 14, “Grandes construcciones”, se plantean ecuaciones de los tipos  $ax + c = b$  y  $\frac{x}{a} + b = c$ , donde  $x$  es la incógnita y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números enteros, decimales, positivos y negativos dados. En los problemas del primer tipo de ecuaciones los alumnos tienen que plantear la ecuación, y para el tipo  $\frac{x}{a} + b = c$  se da la fórmula para convertir grados centígrados a grados Fahrenheit; se le pide al alumno que a través del despeje escriba la fórmula para convertir grados Fahrenheit a grados centígrados. Y se da una explicación de cómo se resuelven las ecuaciones de este tipo. La actividad finaliza con una serie de preguntas sobre la lectura “¿Vivir sin matemáticas? ¡Imposible!” (Amador, 2011, pp.10-11) y con la resolución del juego “Tráfico en la brecha” (Amador, 2006, p. 1).

Finalmente, en la autoevaluación se plantean ejercicios similares a los del desarrollo de la unidad. En esta unidad 4 ni los problemas ni los ejercicios tienen como solución un número negativo; es hasta los ejercicios de resolución de

ecuaciones que, sin hacer referencia a alguno de los problemas planteados en la autoevaluación, se presentan dos cuya solución es un número negativo.

Cabe aclarar que una *incógnita*, representada por la letra  $x$  en esta descripción, corresponde a un valor particular desconocido, pero que se puede determinar; una *variable* también se representa por una letra, que puede ser la misma  $x$ , pero en este caso corresponde a determinado conjunto de valores.

Cuadro 2.2. Ecuaciones de primer grado en el módulo *Operaciones avanzadas* del INEA (Amador, 2006)

| Unidad 4. Ecuaciones de primer grado |  |
|--------------------------------------|--|
| Propósitos                           | 1.- Aplicará la noción de ecuación de primer grado e incógnita.<br>2.- Resolverá problemas que involucran ecuaciones de la forma $x + a = b$ y $a - x = b$ .<br>3.- Resolverá problemas que involucren ecuaciones de la forma $ax = b$ y $\frac{x}{a} = b$ .<br>4.- Resolverá problemas que involucren ecuaciones de la forma $ax + c = b$ y $\frac{x}{a} + b = c$ . |
| Competencias                         | 1.- Comunicación<br>2.- Participación<br>3.- Razonamiento<br>4.- Solución de problemas   |
| Eje                                  | Matemáticas  |
| Tema                                 | Ecuaciones de primer grado   |

(continúa)

Cuadro 2.2. (Concluye)

| Unidad 4. Ecuaciones de primer grado     |  |
|--|--|
| Ecuaciones en contenido                  | $x + a = b$<br>$a - x = b$<br>$ax = b$<br>$\frac{x}{a} = b$<br>$ax + c = b$<br>$\frac{x}{a} + b = c$ |
| Tipos de números que son $a$ , $b$ y $c$ | Números enteros y decimales, positivos y negativos   |
| Actividades complementarias              | Folleto de juegos página 1   |

#### Ecuaciones de primer grado en secundaria general

Una de las preguntas que guio esta investigación fue ¿Cómo son las dificultades de jóvenes y adultos que estudian en el INEA en comparación con las de alumnos de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado? Para dar respuesta a esta pregunta se identificaron y describieron los temas de ecuaciones de primer grado en los programas de estudio de educación secundaria 2006 (SEP, 2006) y en los de 2011 (SEP, 2011). Fue necesario hacer una revisión de los programas de 2006 porque en los de 2011 no se incluyen los materiales de apoyo que aparecen en los de 2006. A continuación se presenta la descripción del tema de

ecuaciones de primer grado en los programas de educación secundaria 2006 y de 2011, estos últimos están vigentes.

### *Ecuaciones de primer grado en los programas de estudio de 2006*

El programa de matemáticas de educación secundaria de 2006 (SEP, 2006) de cada grado escolar estaba dividido en cinco bloques estructurados en apartados que correspondían a tres ejes: 1.- Sentido numérico y pensamiento algebraico, 2.- Forma, espacio y medida, y 3.- Manejo de la información. Además, al principio de cada bloque estaban los aprendizajes esperados.

La estructura de cada apartado estaba formada por el nombre del eje, nombre del tema, nombre del subtema, los conocimientos y habilidades, y las orientaciones didácticas. En estos programas se nombraba como conocimientos y habilidades al contenido: En las orientaciones didácticas, según los programas, “se fundamenta la necesidad de estudiar los aspectos planteados en la columna de conocimientos y habilidades” (SEP, 2006, p. 21). Algunos de los apartados contaban con actividades complementarias del *Fichero* (Espinosa *et al.*, 2000) y de la Hoja electrónica de cálculo (Mochón *et al.*, 2000).

El estudio de las ecuaciones de primer grado en los programas de estudio de 2006 se ubicaba en el bloque III de primer grado, y en segundo grado en el bloque III. En el programa de primer grado, el aprendizaje esperado que se refería a las ecuaciones de primer grado era el siguiente:

Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas:

$x + a = b$ ;  $ax = b$  y  $ax + b = c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números naturales y/o [sic] decimales. (SEP, 2006, p. 41; véase el apéndice A)

El contenido contemplado sobre ecuaciones de primer grado, denominado en estos programas “conocimientos y habilidades”, se ubicaba en el eje de “Sentido numérico y pensamiento algebraico” en el tema Significado y uso de las literales del subtema de Ecuaciones:

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma  $x + a = b$ ;  $ax = b$ ;  $ax + b = c$ , utilizando las propiedades de la igualdad, con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números naturales, decimales o fraccionarios. (SEP, 2006, p. 43; véase el apéndice A)

En este apartado dedicado a las ecuaciones de primer grado de las formas  $x + a = b$ ,  $ax = b$  y  $ax + b = c$  hay una actividad complementaria en la *Hoja electrónica de cálculo* (Mochón *et al.*, 2000, pp. 61-62).

En segundo grado las ecuaciones de primer grado se ubicaban en el bloque III. El segundo aprendizaje esperado de este bloque que corresponde a las ecuaciones de primer grado es:



Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma:

$ax + b = cx + d$ ; donde los coeficientes son números enteros o fraccionarios, positivos o negativos. (SEP, 2006, p. 83)

El contenido correspondiente a este aprendizaje esperado se ubicaba en el eje de “Sentido numérico y pensamiento algebraico” del tema Significado y uso de las literales del subtema Patrones y fórmulas:

Resolver problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma:  $ax + bx + c = dx + ex + f$  y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos. (SEP, 2006, p. 85; véase el apéndice B)

Nótese que las ecuaciones de primer grado en aprendizajes esperados son del tipo  $ax + b = cx + d$ , y en el contenido son del tipo  $ax + bx + c = dx + ex + f$ .

#### *Ecuaciones de primer grado en los programas de estudio de 2011*

En los programas de matemáticas de la educación secundaria (SEP, 2011), el estudio de las ecuaciones de primer grado se contempla en el primer y segundo grados. Los programas de los tres grados contienen cinco bloques, los cuales están organizados en tres niveles de desglose: 1.- Ejes, 2.- Temas, y 3.- Contenido. Cada bloque está dividido en tres ejes: 1.- Sentido numérico y pensamiento algebraico,

2.- Forma, espacio y medida, y 3.- Manejo de la información. Esta estructura de cada bloque tiene otros dos elementos: 1.- Competencias que se favorecen, y 2.- Aprendizajes esperados. En los programas de matemáticas (SEP, 2011, pp. 26-27) se hace notar que los aprendizajes esperados “son saberes que se construyen como resultado de los procesos de estudio”, y la construcción de los “procesos de estudio” es el contenido. A cada contenido se le destinan de tres a cinco sesiones de estudio.

En el primer grado de educación secundaria el contenido sobre ecuaciones de primer grado se ubica en el bloque III. Las competencias que se favorecen en este bloque son: 1.- Resolver problemas de manera autónoma, 2.- Comunicar información matemática, 3.- Validar procedimientos y resultados, y 4.- Manejar técnicas eficientes. De los tres aprendizajes esperados de este bloque, en el segundo se establece que:

Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas:

$x + a = b$ ;  $ax = b$  y  $ax + b = c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números naturales y/o [sic] decimales. (SEP, 2011, p. 33)

El contenido correspondiente a este aprendizaje se presenta en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” bajo el tema Patrones y ecuaciones; prácticamente dice lo mismo que lo planteado en el aprendizaje esperado, aunque se redactó de manera distinta:

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma  $x + a = b$ ;  $ax = b$ ;  $ax + b = c$ , utilizando las propiedades de la igualdad, con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números naturales, decimales o fraccionarios. (SEP, 2011, p. 33; véase el apéndice C)

Nótese lo siguiente: en el apartado de aprendizajes esperados se dice “resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones” (SEP, 2011, p. 33). Plantear ecuaciones a partir de problemas, plantear problemas a partir de ecuaciones, resolver ecuaciones y plantear una ecuación cuya solución sea un número dado, son situaciones que podrían presentarse en problemas que impliquen “el uso de ecuaciones”; sin embargo, en el apartado de contenido dice “resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones” (SEP, 2011, p. 33).

En ambos apartados se especifica que las ecuaciones son de las formas  $x + a = b$ ,  $ax = b$  y  $ax + b = c$ ; no obstante, en el apartado de aprendizajes esperados dice “de la forma” y no de las formas. Además, en el apartado de contenido dice “ecuaciones de primer grado” y no sólo “ecuaciones”, como en el apartado de aprendizajes esperados.

También en el apartado de contenido se agregó “utilizando las propiedades de la igualdad” (SEP, 2011, p. 33), para la resolución de ecuaciones de primer grado, lo cual no se menciona en aprendizajes esperados. Además, tanto en el apartado de aprendizajes esperados como en el de contenido,  $a$ ,  $b$  y  $c$  son “números naturales y decimales”, aunque en este último apartado se agregan los “números fraccionarios”.

En el segundo grado de educación secundaria el contenido sobre ecuaciones de primer grado se ubica en el bloque IV. Las competencias que favorece este bloque son: 1.- Resolver problemas de manera autónoma, 2.- Comunicar información matemática, 3.- Validar procedimientos y resultados, y 4.- Manejar técnicas eficientes. De los cuatro aprendizajes esperados de este bloque en el segundo se establece que:

Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma:

$ax + b = cx + d$ , donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos. (SEP, 2011, p. 42)

El contenido correspondiente a este aprendizaje se presenta en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” bajo el tema Patrones y ecuaciones. El contenido dice:

Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma:  $ax + b = cx + d$  y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos. (SEP, 2011, p. 42; véase el apéndice D)

Nótese que en ambos apartados se especifica que las ecuaciones son de la forma  $ax + b = cx + d$ . No obstante, en el apartado de contenido dice “ecuaciones

de primer grado de la forma” y no sólo “ecuaciones de la forma”, como en el apartado de aprendizajes esperados. Además, en el apartado de contenidos se especifica que las ecuaciones pueden presentar “paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación”.

### Revisión de la literatura sobre dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra

La palabra dificultad proviene del latín *difficultas* y significa “cualidad de requerir mucho esfuerzo para lograrlo”. En el *Diccionario de la lengua española* (DRAE) de la Real Academia Española (RAE, 2004) se define “dificultad” (del latín *difficultas*), en su primera de dos acepciones, como “1. Embarazo, inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir ejecutar o entender algo bien y pronto”.

El aprendizaje del álgebra suele generar muchas dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de secundaria. Según Socas (1996, p.122), estas dificultades son de distinta naturaleza, y son abordadas desde diferentes perspectivas: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y método de enseñanza. Socas (1996, pp.121-133) agrupa en cinco grandes categorías a las dificultades de los estudiantes en su aprendizaje del álgebra.

- 1.- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas.
- 2.- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- 3.- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas.

4.- Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos

5.- Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Las dos primeras categorías están asociadas directamente con las matemáticas (objetos matemáticos y procesos de pensamiento); las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas “opera en dos niveles, el semántico –los signos son dados con un significado claro y preciso–, y el nivel sintáctico –los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado” (Socas, 1996, p.126)–.

En las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático,

Los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo, el saber algebraico. (Palarea, 1998, p. 74)

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas “tiene que ver con la institución escolar, con el currículum de las matemáticas y con los métodos de enseñanza” (Socas, 1996, p.132).

Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos “tienen que ver con los estadios generales del desarrollo intelectual, representando cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de álgebra que los alumnos son capaces de hacer” (Palarea, 1998, p. 75).

Las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas son “los sentimientos de tensión y miedo [por parte de los estudiantes] hacia ellas” (Socas, 1996, p. 136).

Existen varias dificultades a las que se enfrentan los estudiantes con respecto al álgebra, particularmente en la resolución de ecuaciones, no sólo de primer grado sino de manera general. Una de estas dificultades se relaciona con los convenios de notación. “Las matemáticas tienen una notación que le[s] es propia y que hace posible la aplicación formal de las reglas de la aritmética o del álgebra”. Sin embargo, según opinión de los alumnos, esta notación provoca en ellos gran confusión. De acuerdo con Socas (1996, p. 14), “esta confusión proviene [...] de la separación entre la apariencia visible de la notación y el significado subyacente de la misma”; esto es, los alumnos se fijan en la apariencia visible y no reflexionan sobre significado de la notación.

Existen muchos convenios de notación de acuerdo con las diferentes ramas de las matemáticas; desde luego que en esta tesis se abordan los que se utilizan en la resolución de ecuaciones de primer grado, según los ejercicios y los problemas matemáticos que forman parte del módulo *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006).

Los principales convenios de notación matemática que suelen presentar dificultades tienen que ver con las literales y con los signos de operación.

### *Algunas dificultades con las letras*

“Una de las mayores dificultades con que se encuentra un alumno al iniciar los estudios formales [del álgebra] está en el uso y significado de las letras” (Alonso *et al.*, 1993, p. 15). De acuerdo con una clasificación sobre el uso de las letras en el lenguaje algebraico, en la que se consideran los diferentes contextos en que se utilizan, Küchemann identificó seis categorías: 1.- Letras evaluadas, 2.- Letras ignoradas, 3.- Letras como objetos, 4.- Letras como incógnitas, 5.- Letras como números generalizados, y 6.- Letras como variables.

*Letras evaluadas.* “Cuando se da a la letra un valor numérico arbitrario, por ejemplo, el que le corresponde por el lugar que ocupa dentro del alfabeto; a la letra *b* se le asignará así el valor 2, a la letra *c* se le asignara el valor 3, etc.” (Alonso *et al.*, 1993, p. 16).

*Letras ignoradas.* “Aunque se den cuenta de que es una letra, los alumnos en ningún caso le atribuyen significado” (Alonso *et al.*, 1993, p. 16). Por ejemplo:

“Si  $a + b = 43$ ,  $a + b + 2 =$  Esta cuestión puede ser resuelta sin el uso de las letras [...]. Pueden ser esencialmente ignoradas por un procedimiento de igualación que enfoca la atención en  $+ 2$ ” (Socas *et al.*, 1996, p. 29).

*Letras como objetos.* “Se considera que la letra es, o bien la inicial de una palabra, o bien un objeto en sí misma. Por ejemplo, en  $7m$ , se puede interpretar que *m* es la inicial de la palabra *mesas*, o que son 7 mesas” (Alonso *et al.*, 1993, p. 16). En esta



categoría se “reduce el significado abstracto de las letras en objetos” (Socas *et al.*, 1996, p.30).

*Letras como incógnitas.* “El valor de la letra será como un número desconocido, aunque concreto, y se puede operar con él, directamente” (Alonso *et al.*, 1993, p. 16). Algunos ejemplos en este contexto son: 1) Dado un polígono de  $n$  lados, si cada lado tiene una longitud de 2 unidades, calcúlese el perímetro; 2) Los lápices azules cuestan 10 pesetas cada uno y los lápices rojos 12 pesetas cada uno. Compré algunos lápices azules y otros rojos que en total me costaron 180 pesetas (Socas *et al.*, 1996, pp. 30-31).

*Letras como números generalizados.* “Puede tomar distintos valores en vez de uno” (Alonso *et al.*, 1993, p.16). Por ejemplo: Si un prisma tiene como base un triángulo, tiene 9 aristas; un prisma que tiene de base un cuadrilátero, tiene 12 aristas. ¿Cuántas aristas tiene un prisma cuya base es un heptágono? Para responder esta pregunta, se llega a la expresión general de  $3a$ , donde la letra  $a$  representa el número de lados que tiene la base del prisma (3, 4, 7,...).

*Letras como variables.* Puede tomar valores de determinado conjunto de números. Se establecen relaciones sistemáticas entre dos o más variables, de modo que intervienen dos o más conjuntos de valores numéricos. Por ejemplo, en la ecuación  $y = 2x$  se tienen dos variables,  $x$  y  $y$ . Si a la variable  $x$  se le asigna un valor del conjunto de los números naturales  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  entonces el valor de la variable  $y$  corresponderá al conjunto de los números pares  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ .

### *Dificultades con los signos de operación*

La mayoría de los símbolos empleados en aritmética se utilizan también en álgebra, aunque algunos de ellos adquieren nuevos significados. Por ejemplo, “[e]n aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números, y que da como resultado otro número, [...]. En álgebra tienen un carácter de «representación», ya que indican operaciones que no siempre tienen por qué realizarse” (Alonso *et al.*, 1993, p. 20). Otro ejemplo es el signo de igualdad: mientras que en aritmética es manejado “como un mandato operacional” que por lo regular “tiene un carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado”, en álgebra se utiliza para indicar un equilibrio en la ecuación, ya no tiene carácter unidireccional y deben manejarse simultáneamente el primer miembro (el que está a la izquierda del signo =) y el segundo miembro (el que está a la derecha del signo =) de la ecuación (Cf., Alonso *et al.*, 1993, p. 22). Además, esto se liga a la importancia de la distinción y la percepción de las estructuras de una ecuación:

La estructura “superficial” de las expresiones literales y los números que aparecen en ellas; y la estructura “sistémica”, que tiene que ver con las operaciones y relaciones de las expresiones algebraicas que hay en ambos lados [miembros] de la igualdad, así como la propiedad de la relación de equilibrio que define la ecuación. (Kieran, 1989; citado en Alonso *et al.*, 1993, p. 94)

La aplicación incorrecta de alguna de estas propiedades de ambas estructuras puede generar errores.

La operación de sustracción se representa con el signo  $-$  (menos). Este signo tiene una doble función: como signo de operación y también para denotar a los inversos aditivos de números (el inverso de un número  $a$  es  $-a$  y el inverso aditivo de  $-a$  es  $-(-a)$ ).

Para la operación de multiplicación en aritmética el símbolo que se utiliza con mayor frecuencia es  $\times$  (por), aunque también suele usarse un punto,  $5 \cdot 3$ . En álgebra, para indicar multiplicación suele suprimirse el signo,  $\times$  o  $\cdot$ , de tal modo que  $a \times b$  o  $a \cdot b$  se escribe  $ab$ .

Además, el método de transposición de términos para resolver ecuaciones, en el que se utiliza la inversa de determinada operación, suele ser causa de dificultades porque los estudiantes tienen “escasa conciencia en la utilización de las operaciones inversas” (Alonso *et al.*, 1993, p. 93). En este sentido, la enseñanza de algunos métodos formales no son garantía de que los estudiantes resolverán ecuaciones correctamente, pues no se apropian de los métodos.

Cabe señalar que en las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación se aplican determinadas restricciones o condiciones, conocidas como *propiedades* o *leyes*. La aplicación de dichas leyes conduce a resultados correctos, independientemente del método que se utilice para resolver ecuaciones. Kieran y Filloy (1989, p. 230) habían hecho notar que los estudiantes a menudo no consideraban los paréntesis al efectuar operaciones, y

establecían la jerarquía de éstas conforme estaban escritos los términos, de izquierda a derecha.

Al plantear algunos problemas a estudiantes de secundaria y pedirles que pasaran el enunciado a una expresión algebraica, la mayoría tuvo dificultades que no tenían que ver directamente con comprender el planteamiento: la dificultad radicaba en usar la simbología algebraica correctamente (Alonso *et al.*, 1993, pp. 73-84). Esto es algunas de las dificultades que tienen los estudiantes para escribir expresiones algebraicas surge por los convenios de notación. Kieran y Filloy (1989, pp. 230-231) habían señalado que el basto uso de métodos informales en la escuela elemental por parte de los niños y centrarse únicamente en conseguir la respuesta, provocaba que no se pusiera atención al método usado, ni en los convenios de notación.

“La complejidad de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas [...] se traduce en errores que cometen los alumnos” (Socas, 1996, p. 144). En cuanto a errores cometidos por los estudiantes, el mismo Socas (1996, p. 21) había señalado: “Estas *dificultades* se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y *se manifiestan en los alumnos en forma de errores*” (énfasis añadido). La palabra “error” proviene del latín *error*, y ésta del verbo *errare* que quiere decir “fallar, no dar con el blanco, equivocarse”. De acuerdo con el DRAE, en dos de sus cinco acepciones, “error” es: “2. Acción desacertada o equivocada” o “3. Cosa hecha erradamente” (RAE, 2004).

Autores como Ruano, Socas y Palarea (2008) y Palarea (1998) toman como referencia el marco teórico descrito por Socas (1996), quien considera tres ejes para analizar el origen de errores.

- 1.- Errores que tiene su origen en obstáculos.
- 2.- Errores que tiene su origen en ausencia del sentido.
- 3.- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

A su vez se desglosan más niveles de errores, en la figura 2.1 se muestran dichos niveles de desglose.

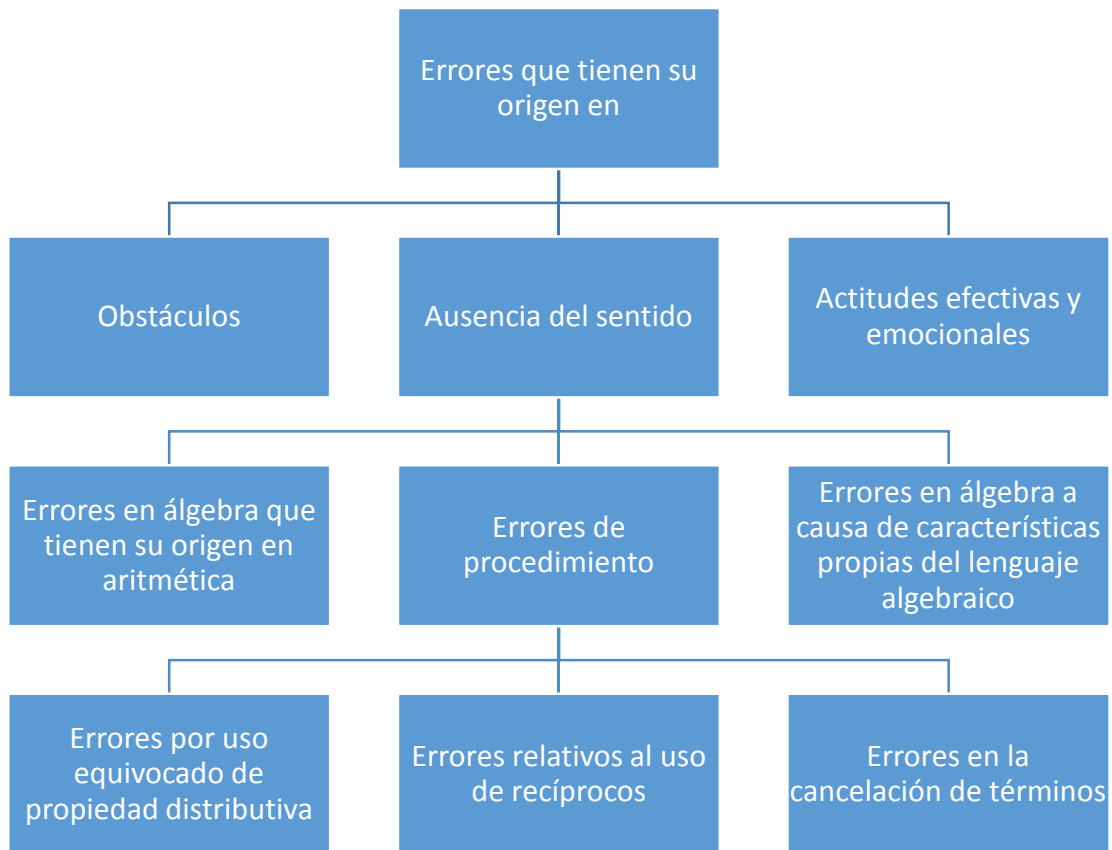


Figura 2.1 Tipos de errores según Socas (1997)

### CAPÍTULO III

#### METODOLOGÍA

En este capítulo se describe cómo se analizaron los programas de matemáticas de educación secundaria de 2006 y de 2011 (SEP, 2006; SEP, 2011), así como el módulo *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006) con los programas de matemáticas de educación secundaria de 2011. Asimismo, se describen las características de los instrumentos utilizados en esta investigación y los sujetos que participaron en la misma y se hace referencia a las cartas de consentimiento. También se incluye cómo se realizó el procesamiento de la información.

Revisión y comparación de los programas de matemáticas de educación secundaria y el módulo *Operaciones avanzadas* en el tema de ecuaciones de primer grado

Se revisaron los programas de estudio de educación secundaria (PEES) de 2006 (SEP, 2006) y de 2011 (SEP, 2011) en el tema de ecuaciones de primer grado, y se comparó el PEES de 2011 con el módulo *Operaciones avanzadas* para diseñar el instrumento que se aplicó a alumnos del Instituto Nacional para la Educación de los

Adultos (INEA) y a alumnos de secundaria general para conocer los errores que cometen en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Primero se ubicó en los programas de educación secundaria el contenido correspondiente a las ecuaciones de primer grado (con una incógnita) y se establecieron las siguientes dimensiones para la revisión y comparación.

- Eje
- Tema
- Subtema
- Competencias
- Aprendizaje esperado
- Contenido
- Orientaciones didácticas
- Ecuaciones en el contenido
- Tipos de números (coeficientes y términos independientes)
- Actividades complementarias

Se hizo la comparación de los PEES de primer y segundo grados, ya que en estos se incluye el estudio de las ecuaciones de primer grado. Una vez hecha la comparación de los PEES de 2006 y de 2011, se comparó el PEES de 2011 con el módulo *Operaciones avanzadas*.

La dimensión de “Eje” se estableció a partir de que los PEES de 2006 y de 2011 están organizados en niveles de desglose, siendo uno de ellos el correspondiente a determinado contenido. En los materiales del INEA se organizan los módulos por ejes temáticos, según el contenido de cada módulo. Otro de los niveles de desglose tanto en los PEES de 2006 y de 2011 como en el módulo *Operaciones avanzadas* es el de “Tema”. La dimensión de “Subtema” se incluyó para comparar los PEES de 2006 y de 2011, aunque sólo aparece este nivel de desglose en el de 2006. En la comparación del PEES de 2011 con el módulo *Operaciones avanzadas* no se incluye la dimensión de “Subtema” porque ninguno de éstos la contiene.

La dimensión de “Aprendizajes esperados” se estableció porque aparece tanto en los PEES de 2006 y de 2011 como en el módulo *Operaciones avanzadas*. En cuanto a la dimensión de “Competencias”, en el PEES de 2011 se alude a ellas de forma específica; en el PEES de 2006 y en el módulo *Operaciones avanzadas* no aparecen. Sin embargo, en el curso para la formación de asesores educativos (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011) se menciona que la metodología del INEA, el Modelo Educativo para la Vida y el Trabajo (MEVyT), promueve y favorece cuatro *competencias* básicas y que esta metodología está presente en todos los módulos del INEA.



Para el PEES de 2011 no se tiene como parte del contenido de ecuaciones de primer grado algo parecido a la dimensión “Orientaciones didácticas” que sí forma parte del PEES de 2006, motivo por el que esta dimensión sólo se incluyó en la comparación de los PEES de 2006 y de 2011 y no en la comparación del PEES de 2011 con el módulo *Operaciones avanzadas*.

La dimensión de “Ecuaciones en el contenido” se estableció para comparar si las ecuaciones en los contenidos de los PEES de 2006 y de 2011 y el módulo *Operaciones avanzadas* eran similares o diferentes. En la dimensión “Tipos de números” (coeficientes y términos independientes) se estableció porque en los PEES de 2006 y de 2011 se especifica, aunque no en el módulo *Operaciones avanzadas*. Cabe aclarar que se analizaron los tipos de números (coeficientes y términos independientes) en el módulo *Operaciones avanzadas*.

La última dimensión, “Actividades complementarias”, es parte de ambas comparaciones porque en el PEES de 2006 y en el módulo *Operaciones avanzadas* sí hay actividades complementarias propias del tema de ecuaciones de primer grado.

### Instrumentos

Los instrumentos utilizados para esta investigación fueron una guía de entrevista semiestructurada y dos cuestionarios, denominados aquí cuestionario A y cuestionario B. La entrevista se aplicó únicamente a asesores educativos del INEA. Los cuestionarios A y B se aplicaron a estudiantes del INEA; sólo el cuestionario B se aplicó también a estudiantes de secundaria general. El cuestionario B se diseñó para identificar dificultades de los estudiantes al resolver ecuaciones de primer grado, de

acuerdo con lo planteado en el módulo *Operaciones avanzadas*. A causa de que todos los tipos de ecuaciones de primer grado que se tratan en el módulo *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006, pp. 114-153) también aparecen en los programas de educación secundaria de 2011 (SEP, 2011), se aplicó el mismo cuestionario B a estudiantes de secundaria general.

#### *Entrevista de asesores educativos*

La entrevista de asesores educativos tuvo la finalidad de identificar, a partir de la experiencia de cuatro asesores, cuál era el módulo de nivel secundaria que reprobaban con mayor frecuencia los alumnos del INEA, así como el contenido que más se les dificultaba tanto a ellos como los alumnos (véase el apéndice E).

#### *Cuestionario A*

El objetivo del Cuestionario A que se aplicó únicamente a los jóvenes y adultos que estudiaban en el INEA fue identificar aspectos relevantes que se relacionan con el estudio y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado que se presentan en el módulo *Operaciones avanzadas* (véase el apéndice F).

Los datos de edad, sexo, ocupación y si tienen hijos se usaron para fines estadísticos. Con la primera pregunta se quería saber si tenían gusto por las matemáticas; de la segunda a la cuarta preguntas si tuvieron estudios previos de secundaria general y si les enseñaron a resolver ecuaciones de primer grado.

Las preguntas subsecuentes tienen que ver con el tiempo de estancia en el INEA, la modalidad en que estudiaban el módulo *Operaciones avanzadas*, si fue de

manera física (es decir, si tenían el módulo impreso) o virtual (si el módulo lo estudiaban a través de la computadora), si asistían a asesorías y, finalmente, si habían presentado examen del módulo y cuántas veces.

### *Cuestionario B*

El cuestionario B, que se aplicó a estudiantes del INEA y a estudiantes de secundaria general, tuvo como objetivo detectar errores en la resolución de ecuaciones de primer grado de acuerdo con su planteamiento en el módulo *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006, pp. 114-153). En el apéndice G se incluye el cuestionario B.

Los reactivos 1 y 2 estuvieron destinados a responder una de las pregunta de este trabajo de investigación: ¿Qué nociones tienen jóvenes y adultos que estudian en el INEA y estudiantes de secundaria general acerca de las ecuaciones de primer grado? Las respuestas a estos reactivos mostraron cómo definían los estudiantes que participaron en esta investigación las ecuaciones de primer grado y cuáles son las características que las identifican.

En el reactivo 3 se presenta una serie de ejercicios de resolución de ecuaciones, sin que se haga referencia a algún problema. Los incisos a) y b) son ecuaciones de los tipos  $x + a = b$  y  $a - x = b$ ; en éstos se quería identificar si cometen errores con la inversa correspondiente de la adición y sustracción y con el signo menos del termino independiente del segundo miembro de la ecuación. Los incisos c) y d) son ecuaciones del tipo  $ax = b$ ; estuvieron destinados a identificar errores con la inversa de la multiplicación o división; los incisos e) y f), son ecuaciones del tipo  $ax + c = b$ ; estuvieron destinadas a identificar errores con las

inversas correspondientes de las operaciones y el orden de las operaciones al despejar la incógnita. Finalmente, los incisos g) y h) son ecuaciones del tipo  $\frac{x}{a} + b = c$ ; estuvieron destinadas a identificar errores con las inversas correspondientes de las operaciones, el orden de las operaciones al despejar la incógnita y las leyes de los signos.

En el reactivo 4 se presentan tres problemas en los que el alumno debió pasar de una situación problemática a una situación algebraica; es decir, que a partir de los problemas presentados el alumno debió plantear una ecuación para posteriormente resolverla.

#### Sujetos que participaron en la investigación

Esta investigación se realizó con cuatro asesores educativos y nueve estudiantes del INEA de la coordinación de la zona Chimalhuacán que se ubica en el municipio de Chicoloapan, Estado de México, así como con un grupo de veintitrés estudiantes de secundaria general de segundo grado del turno matutino de la escuela secundaria pública oficial núm. 0533, “José María Velasco”, que se ubica en el mismo municipio.

Las aplicaciones de los instrumentos fueron en las siguientes fechas.

- 1.- Aplicación del cuestionario a estudiantes del INEA: del 16 de octubre al 1 de noviembre de 2015.
- 2.- Aplicación del cuestionario a estudiantes de secundaria general: 20 de enero de 2016.
- 3.- Entrevista a asesores educativos: del 9 al 14 de octubre de 2015.

### *Asesores educativos*

Se entrevistó a cuatro asesores educativos; todos pertenecían a la coordinación de la zona Chimalhuacán que se ubica en el municipio de Chicoloapan, Estado de México. Cada coordinación de zona cuenta con Plazas comunitarias, Puntos de encuentro y Círculos de estudio para brindar los servicios educativos que ofrece el INEA.

Las Plazas comunitarias son espacios abiertos a todas las personas. En ellas se aprende usando la computadora, el internet, los discos compactos y videos, entre otros recursos. También ofrecen otros servicios, como aplicación de exámenes, formación y capacitación para los asesores. Los Puntos de encuentro están formados por más de dos círculos de estudio, pero a diferencia de las plazas comunitarias, no cuentan con tecnologías. Los Círculos de estudio son un grupo de educandos guiados en su aprendizaje por un asesor. El espacio físico varía, ya que cada asesor se encarga de conseguir el espacio; puede ser una escuela, un centro de salud o un centro comunitario (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011).

Se entrevistó a una asesora educativa el día 9 de octubre de 2015 a las 5:00 p. m. en el Punto de encuentro Delegación Santa Rosa. La entrevista duró aproximadamente 30 minutos (mientras era entrevistada, también estaba dando asesoría a sus alumnos del INEA). Durante la entrevista dijo que llevaba 8 años como asesora educativa y que terminó su educación básica en el INEA, siendo la secundaria su grado máximo de estudios.

El día 12 de octubre de 2015 a las 9:05 p. m. se entrevistó a otro asesor de la Plaza Comunitaria San José. La entrevista duró aproximadamente 15 minutos en su

domicilio. El tiempo que llevaba el asesor en el INEA era de 2 años y 6 meses, siendo su grado máximo de estudios la licenciatura en derecho.

El 14 de octubre de 2015 se entrevistó a dos asesores de dos Círculos de estudio diferentes. El asesor del Círculo de estudio San Pablo, que fue entrevistado mientras daba asesoría dijo tener 5 años consecutivos como asesor educativo, aunque anteriormente ya había participado como asesor educativo en la ciudad de México a los 18 años. Su grado máximo de estudios era una carrera técnica del Conalep. La entrevista a la asesora del Círculo de estudio Felipe Ángeles tuvo una duración de 20 minutos y fue antes de que ella iniciara sus asesorías. Dijo tener más de 20 años como asesora educativa; su grado máximo de estudios era la secundaria, aunque estaba por terminar la preparatoria a distancia. Además, contaba con 2 diplomados del Conevyt-INEA, uno de álgebra y otro de español.

#### *Alumnos del INEA*

Se aplicó el instrumento a 9 jóvenes y adultos estudiantes del INEA; uno del Punto de encuentro Delegación Santa Rosa, dos del Círculo de estudio San Pablo, dos del Círculo de estudio Felipe Ángeles y cuatro de la Plaza comunitaria San José, todos de la coordinación de la zona Chimalhuacán. Los cuestionarios A y B se aplicaron del 16 de octubre al 1 de noviembre de 2015; se hizo de forma individual. A la mayoría de los participantes les tomó aproximadamente 15 minutos responder el cuestionario A y 1 hora para responder el cuestionario B. Cabe señalar que en las indicaciones no se hizo mención sobre el tiempo para responder los cuestionarios.

Todos los participantes estaban estudiando el módulo *Operaciones avanzadas* y tenían de 2 a 3 semanas que habían concluido el estudio de la cuarta unidad del módulo (que corresponde al estudio de ecuaciones de primer grado). A estos 9 participantes se le avisó días antes sobre la aplicación del cuestionario B, por lo que la mayoría hizo un repaso con su asesor poco antes de la aplicación del cuestionario.

#### *Alumnos de secundaria general*

El cuestionario que se aplicó a estudiantes de secundaria general, lo contestaron 43 alumnos de un grupo de segundo grado del turno matutino de la escuela secundaria pública oficial núm. 0533, “José María Velasco”, ubicada en el municipio de Chicoloapan, Estado de México. Se aplicó el día 20 de enero de 2016 a las 7:50 a. m. y, al igual que los estudiantes del INEA, a los participantes les tomó aproximadamente 1 hora responderlo. Estos alumnos estaban estudiando el bloque IV, y una semana antes de la aplicación del cuestionario B habían terminado el estudio del tema de ecuaciones de primer grado.

#### Cartas de consentimiento

Antes de aplicar las entrevistas, encuestas y cuestionarios, se les explicó a los participantes —asesores, estudiantes del INEA y estudiantes de secundaria general— sobre la investigación y la importancia de su participación. Se les pidió que firmaran una carta de consentimiento en la que se les indicaba que los datos proporcionados serían tratados confidencialmente y utilizados solo para propósitos de esta investigación. Las cartas de consentimiento, que son tres (una para la

entrevista de asesores, otra para los estudiantes del INEA y la otra para estudiantes de secundaria general), se incluyen en los apéndices H,I y J.

### Procesamiento de la información

Para el análisis de los resultados obtenidos mediante el cuestionario B, se clasificaron las respuestas de estudiantes del INEA y de estudiantes de secundaria general, como correctas e incorrectas y se analizaron los tipos de errores que cometieron en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Una vez obtenida esta información se procedió a comparar los resultados de ambos tipos de estudiantes.

Primero se revisaron los cuestionarios aplicados a estudiantes del INEA que participaron en esta investigación, en cada cuestionario se observaron las respuestas correctas e incorrectas y se elaboraron dos cuadros, en el primero se presentan las respuestas a los reactivos 1.- ¿Qué entiendes por ecuación? y 2. ¿Qué caracteriza las ecuaciones de primer grado?, el segundo cuadro contiene las respuestas correctas e incorrectas de los reactivos 3 y 4.

En los reactivos 3 y 4 se observó el procedimiento que utilizaron los estudiantes para resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita y poder detectar los errores que cometían. Se elaboró un cuadro con los errores detectados, los cuales son: con la inversa de la sustracción o adición, con la inversa de la multiplicación o división, al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción, en la adición de números positivos o negativos, al transformar números fraccionarios a decimales, en el orden de las operaciones al despejar la incógnita, al



ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro, al ignorar la incógnita y al no concluir el procedimiento.

Además se describió el procedimiento que siguieron para obtener el valor de las incógnitas y posteriormente se calcularon los índices de dificultad de los reactivos y se analizaron.

Para el análisis de los resultados obtenidos mediante los cuestionarios aplicados a estudiantes de secundaria general se procedió de la misma forma que con los resultados de los cuestionarios aplicados a estudiantes del INEA. Los errores que cometieron los estudiantes de secundaria general fueron los mismos errores que cometieron los estudiantes del INEA más otros tres; 1.- al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción, 2.- al ignorar datos en la resolución y, 3.- al no considerar las leyes de los signos. El único error que no cometieron los estudiantes de secundaria general y uno del INEA sí, fue al transformar un número fraccionario a decimales. También se describieron los procedimientos que siguieron los participantes para obtener el valor de la incógnita.

Finalmente, se compararon los errores que más cometieron estudiantes del INEA y estudiantes de secundaria general así como los tipos de ecuaciones en que se cometieron errores con mayor frecuencia y se elaboraron cuadros con los índices de dificultad de los reactivos 3 y 4 para su comparación.

## CAPÍTULO IV

### PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo se hace una comparación del contenido de ecuaciones de primer grado en los programas de matemáticas de educación secundaria de 2006 y de 2011 (SEP, 2006; SEP, 2011), así como el contenido de la unidad 4 del módulo *Operaciones avanzadas* (Amador, 2006) y el contenido de ecuaciones de primer grado en los programas de 2011 de educación secundaria general (primer y segundo grados).

También se presentan el análisis de los resultados de los instrumentos aplicados a estudiantes del INEA y a estudiantes de segundo grado de secundaria general, y una comparación del desempeño de ambos tipos de estudiantes.

## Comparación de los programas de 2006 y de 2011

### en el tema de ecuaciones de primer grado

Los programas de estudio de educación secundaria de 2006 y los de 2011 son muy similares en cuanto a los contenidos. Sin embargo, presentan modificaciones en sus estructuras. En los cuadros 4.1 y 4.2 se presenta la comparación de los programas de estudio de matemáticas de primer y segundo grados de 2006 con los de 2011. Los programas de 2006 estaban organizados por bloques y, a su vez, cada bloque estaba dividido en apartados en los que se especificaba el eje, el tema, el subtema, los conocimientos y habilidades (contenido) y las orientaciones didácticas (véanse los apéndices A y B). Otro elemento importante en estos programas son las actividades complementarias del *Fichero* (Espinosa *et al.*, 2000) y de la Hoja electrónica de cálculo (Mochón *et al.*, 2000), así como el *Libro para el maestro* (Alarcón *et al.*, 2000), que aunque no formaba parte de las actividades complementarias, era un recurso para el maestro.

En los programas de 2011 desaparecen los apartados y se unifica todo lo de un bloque en una tabla (véanse los apéndice C y D); incluso desaparecen las orientaciones didácticas de cada bloque. Cabe destacar que en estos programas sí hay orientaciones pedagógicas y didácticas, pero es en la *Guía para el maestro* (SEP, 2011, pp. 55-150) donde aparecen. También aparecen las cuatro competencias: 1.- Resolver problemas de manera autónoma, 2.- Comunicar información matemática, 3.- Validar procedimientos y resultados, y 4.- Manejar técnicas eficientes. Estas competencias no eran parte de los programas de 2006.

Cuadro 4.1. Comparación de los programas de primer grado de 2006 con los programas de 2011 en el tema de ecuaciones de primer grado

|                          | Programas de 2006   | Programas de 2011   |
|--------------------------|---|---|
| Primer grado, bloque III |   |   |
| Eje                      | Sentido numérico y pensamiento algebraico   | Sentido numérico y pensamiento algebraico   |
| Tema                     | Significado y uso de las literales  | Patrones y ecuaciones   |
| Subtema                  | Ecuaciones  | Sin subtema   |
| Competencias             | Sin competencias  | 1.- Resolver problemas de manera autónoma.<br>2.- Comunicar información matemática.<br>3.- Validar procedimientos y resultados.<br>4.- Manejar técnicas eficientes.     |
| Aprendizaje esperado     | Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$ ; $ax = b$ y $ax + b = c$ , donde $a$ , $b$ y $c$ son números naturales y/o decimales. | Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: $x + a = b$ ; $ax = b$ y $ax + b = c$ , donde $a$ , $b$ y $c$ son números naturales y/o decimales. |

(Continúa)

Cuadro 4.1. (Concluye)

|   | Programas de 2006   | Programas de 2011   |
|---|---|---|
| Primer grado, bloque III                                  |   |   |
| Contenido   | Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$ ; $ax = b$ ; $ax + b = c$ , utilizando las propiedades de la igualdad, con $a$ , $b$ y $c$ números naturales, decimales o fraccionarios. | Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$ ; $ax = b$ ; $ax + b = c$ , utilizando las propiedades de la igualdad, con $a$ , $b$ y $c$ números naturales, decimales o fraccionarios. |
| Orientaciones didácticas                                  | Las ecuaciones son una herramienta básica para la resolución de problemas, [...] con el uso de las propiedades de la igualdad.  | Sin orientaciones didácticas  |
| Ecuaciones en contenido                                   | $x + a = b$<br>$ax = b$<br>$ax + b = c$   | $x + a = b$<br>$ax = b$<br>$ax + b = c$   |
| Tipos de números (coeficientes y términos independientes) | Números naturales, decimales o fraccionarios  | Números naturales, decimales o fraccionarios  |
| Actividades complementarias                               | Hoja de cálculo pp. 61-62   | Sin actividades   |

Cuadro 4.2 Comparación de los programas de segundo grado de 2006 con los programas de 2011 en el tema de ecuaciones de primer grado

|                      | Programas de 2006  | Programas de 2011  |
|----------------------|--|--|
| Segundo grado        |  |  |
| Bloque               | III  | IV   |
| Eje                  | Sentido numérico y pensamiento algebraico  | Sentido numérico y pensamiento algebraico  |
| Tema                 | Significado y uso de las literales   | Patrones y ecuaciones  |
| Subtema              | Patrones y fórmulas  | Sin subtema  |
| Competencias         | Sin competencias   | 1.- Resolver problemas de manera autónoma.<br>2.- Comunicar información matemática.<br>3.- Validar procedimientos y resultados.<br>4.- Manejar técnicas eficientes.                  |
| Aprendizaje esperado | Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$ ; donde los coeficientes son números enteros o fraccionarios, positivos o negativos. | Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: $ax + b = cx + d$ , donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos. |

(Continúa)

Cuadro 4.2. (Concluye)

|   | Programas de 2006  | Programas de 2011  |
|---|--|--|
| Segundo grado   |  |  |
| Bloque  | III  | IV   |
| Contenido   | Resolver problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: $ax + bx + c = dx + ex + f$ y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos. | Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: $ax + b = cx + d$ y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos. |
| Orientaciones didácticas                                  | Una vez que los alumnos encuentran sentido a las ecuaciones, [...] es importante que consoliden la técnica para resolverlas.   | Sin orientaciones didácticas   |
| Ecuaciones en aprendizajes esperados                      | $ax + b = cx + d$  | $ax + b = cx + d$  |
| Ecuaciones en contenido                                   | $bx + c = dx + ex + f$   | $ax + b = cx + d$  |
| Tipos de números (coeficientes y términos independientes) | Enteros o fraccionarios, positivos o negativos   | Enteros o fraccionarios o decimales, positivos o negativos   |

Como se mencionó anteriormente y como se puede observar en los cuadros 4.1 y 4.2, los programas de 2006 y de 2011 son muy similares. En primer grado el “eje” y el “bloque” en el que se ubican las ecuaciones de primer grado como los “aprendizajes esperados”, el “contenido”, los tipos de “ecuaciones en el contenido” y los “tipos de números” (coeficientes y términos independientes), son exactamente los mismos en ambos programas. Sin embargo, el “tema” en el que se ubica el estudio de las ecuaciones de primer grado cambia de “significado y uso de las literales” por “patrones y ecuaciones”, además en los programas de 2011 desaparecen los “subtemas”, las “orientaciones didácticas” y las “actividades complementarias” y una dimensión que aparece son las “competencias”.

Nótese que en los programas de matemáticas de primer grado de 2006 y de 2011, en “aprendizajes esperados” y en “contenido” (véase el cuadro 4.1) se hace referencia a  $a$ ,  $b$  y  $c$  como “números”, no como “coeficientes y términos independientes”, que es así como se les ha denominado en esta tesis en la línea correspondiente a “tipos de números” en el cuadro 4.1. Por otra parte, en los programas de matemáticas de segundo grado de 2006 y de 2011, en “aprendizajes esperados” y en “contenido”, (véase el cuadro 4.2) se hace referencia a  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  y  $f$  como “coeficientes”; en esta tesis también se les ha denominado en la línea correspondiente a “tipos de números” en el cuadro 4.1, “coeficientes y términos independientes”.

En segundo grado, al igual que en primer grado, el “eje”, los “aprendizajes esperados”, el “contenido”, los tipos de “ecuaciones en aprendizajes esperados” y los “tipos de números” (coeficientes y términos independientes), son exactamente los



mismos en ambos programas. Sólo cambia el “bloque” y el “tema” en el que se estudian las ecuaciones de primer grado, siendo en el bloque III en los de 2006 y en el bloque IV en los de 2011. Al igual que en el caso de los programas de primer grado de 2006 y de 2011 desaparecen los “subtemas”, las “orientaciones didácticas” y las “actividades complementarias” y una dimensión importante que aparece son las “competencias”. En los programas de 2011, que están vigentes, se incorporan las competencias según a la reforma educativa por competencias, sin embargo con la comparación se evidencia que los programas de 2006 cuentan con más elemento para la enseñanza de las ecuaciones de primer grado que los programas de 2011.

Comparación del módulo *Operaciones avanzadas* del INEA  
con los programas de 2011 de educación secundaria general  
en el tema de ecuaciones de primer grado

En este apartado se hará una comparación del módulo *Operaciones avanzadas* del INEA con los programas de educación secundaria de 2011 en cuanto a las ecuaciones de primer grado (véase el cuadro 4.3). En el apartado anterior se compararon los programas de educación secundaria de 2006 y de 2011. Mediante la comparación de ambos programas se mostró que el contenido referente a ecuaciones de primer grado es exactamente el mismo en ambos programas, aunque no la estructura.

El módulo *Operaciones avanzadas* es uno de los doce módulos que deben estudiar los alumnos del INEA para acreditar su educación secundaria. En él se destina la unidad 4 al estudio de las ecuaciones de primer grado. En secundaria

general el estudio de las ecuaciones de primer grado se ubica en el bloque III de primer y segundo grados.

Las ecuaciones de primer grado en el módulo *Operaciones avanzadas* forman parte del eje de “Matemáticas” y del tema “Ecuaciones de primer grado”; en los programas de 2011 de secundaria general, las ecuaciones de primer grado se ubican en el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” en el tema “Patrones y ecuaciones” (véase el cuadro 4.3).

Cuadro 4.3. Comparación del módulo *Operaciones avanzadas* del INEA y los programas de estudio de 2011 en el tema de ecuaciones de primer grado

|   | INEA   | Secundaria general  |
|---|--|---|
| Ubicación de estudio sobre ecuaciones de primer grado | Unidad 4. Ecuaciones de primer grado   | 1.- Primer grado, bloque III<br>2.- Segundo grado, bloque III   |
| Eje   | Matemáticas  | Sentido numérico y pensamiento algebraico   |
| Tema  | Ecuaciones de primer grado   | Patrones y ecuaciones   |
| Competencias  | 1.- Comunicación<br>2.- Participación<br>3.- Razonamiento<br>4.- Solución de problemas | 1.- Resolver problemas de manera autónoma.<br>2.- Comunicar información matemática.<br>3.- Validar procedimientos y resultados.<br>4.- Manejar técnicas eficientes. |

(Continúa)

Cuadro 4.3 (Concluye)

|  | INEA   | Secundaria general  |
|--|--|---|
| Aprendizajes esperados o Propósitos                      | <p>Propósitos:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.- Aplicará la noción de ecuación de primer grado e incógnita.</li> <li>2.- Resolverá problemas que involucran ecuaciones de la forma <math>x + a = b</math> y <math>a - x = b</math>.</li> <li>3.- Resolverá problemas que involucren ecuaciones de la forma <math>ax = b</math> y <math>\frac{x}{a} = b</math>.</li> <li>4.- Resolverá problemas que involucren ecuaciones de la forma <math>ax + c = b</math> y <math>\frac{x}{a} + b = c</math>.</li> </ol> | <p>Aprendizajes esperados:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1.- Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: <math>x + a = b</math>; <math>ax = b</math> y <math>ax + b = c</math>, donde <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math> son números naturales y/o decimales.</li> <li>2.- Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: <math>ax + b = cx + d</math>, donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.</li> </ol> |
| Ecuaciones   | $x + a = b$<br>$a - x = b$<br>$ax = b$<br>$\frac{x}{a} = b$<br>$ax + c = b$  | $x + a = b$<br>$ax = b$<br>$ax + b = c$<br>$ax + b = cx + d$  |
| Tipos de número (coeficientes y términos independientes) | Números enteros y decimales, positivos y negativos   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1.- Números naturales, decimales o fraccionarios</li> <li>2.- Enteros o fraccionarios, positivos o negativos</li> </ol>  |

Los módulos del INEA promueve cuatro competencias generales (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011).

#### 1.- Comunicación

Capacidad para comprender lo que otros desean transmitir, así como la de expresar con claridad y respeto las ideas, necesidades y puntos de vista, aplicando diferentes lenguajes y medios.

#### 2.- Participación

Se refiere a la posibilidad de actuar junto con otros, de intervenir para transformar distintas situaciones, además de valorar y enriquecer la vida personal y social.

#### 3.- Razonamiento

Es la aplicación de los recursos del pensamiento que permite la comprensión, el desarrollo, la creación y la recreación del pensamiento.

#### 4.- Solución de problemas

Es la capacidad para enfrentar situaciones, identificar problemas, proponer y aplicar diversos caminos para su solución, tomar decisiones y actuar.

De acuerdo con los cursos *Para el asesor* (Aravedo, Mendoza y Sánchez, 2011), estas competencias se promueven de manera general en el INEA, pero en los módulos no se especifica qué competencias se promueven.

En los programas de 2011 de secundaria general se favorecen cuatro competencias:

1.- Resolver problemas de manera autónoma, 2.- Comunicar información

matemática, 3.- Validar procedimientos y resultados, y 4.- Manejar técnicas eficientes. A diferencia de las competencias generales que promueve el INEA, éstas sí forman parte de los bloques (véase el cuadro 4.3).

Algunas de las competencias que promueve el INEA son similares a las competencias que se favorecen en los programas de 2011 de secundaria general: la competencia “Comunicación” del INEA con la competencia “Comunicar información matemática” de los programas de secundaria general; la competencia “Razonamiento” del INEA con la competencia “Validar procedimientos y resultados” de los programas de secundaria general; y finalmente la competencia “Solución de problemas” del INEA con la competencia de “Resolver problemas de manera autónoma” de los programas de secundaria general (véanse los cuadros 4.3 y 4.4).

Cuadro 4.4 Competencias en el INEA y en programas de secundaria general

|              | INEA                  | Secundaria general                     |
|--------------|-----------------------|--|
| Competencias | Comunicación          | Comunicar información matemática.      |
|              | Razonamiento          | Validar procedimientos y resultados.   |
|              | Solución de problemas | Resolver problemas de manera autónoma. |

Los propósitos del módulo *Operaciones avanzadas* son cuatro: 1.- Aplicará la noción de ecuación de primer grado e incógnita, 2.- Resolverá problemas que involucran ecuaciones de la forma  $x + a = b$  y  $a - x = b$ , 3.- Resolverá problemas que

involucren ecuaciones de la forma  $ax = b$  y  $\frac{x}{a} = b$ , y 4.- Resolverá problemas que involucren ecuaciones de la forma  $ax + c = b$  y  $\frac{x}{a} + b = c$ . Nótese que en los “propósitos” del INEA (véase el cuadro 4.3) no se dice que tipos de números son los coeficientes y términos independientes. En los programas de secundaria los aprendizajes esperados correspondientes a primer y segundo grados son:

- 1.- Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas:  $x + a = b$ ;  $ax = b$  y  $ax + b = c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números naturales y/o decimales, y
- 2.- Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma:  $ax + b = cx + d$ , donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos (véase el cuadro 4.3).

El primer propósito del módulo *Operaciones avanzadas* es “Aplicará la noción de ecuación de primer grado e incógnita”, y en los aprendizajes esperados no se tiene algo similar. Los otros tres propósitos del módulo *Operaciones avanzadas* son similares al aprendizaje esperado de primer grado de los programas de 2011 de secundaria general; tanto en los tres propósitos como en el aprendizaje esperado se plantea que los alumnos resuelvan “problemas que impliquen el uso de ecuaciones” de primer grado de “las formas”  $x + a = b$ ,  $ax = b$  y  $ax + b = c$ . Sin embargo, en el módulo *Operaciones avanzadas* aparecen además las formas  $a - x = b$ ,  $\frac{x}{a} = b$  y  $\frac{x}{a} + b = c$ . Además, el aprendizaje esperado de segundo grado contiene la forma  $ax + b = cx + d$  (véase el cuadro 4.3).

En cuanto a los números  $a$ ,  $b$  y  $c$ , en el módulo *Operaciones avanzadas* se hizo un análisis y se encontró que son enteros, fraccionarios y decimales, positivos y

negativos; en los programas de 2011, que son números naturales, fraccionarios, decimales, positivos o negativos (véase el cuadro 4.3).

Análisis de resultados de los instrumentos aplicados a estudiantes del INEA

### *Cuestionario A*

A continuación se presenta la información obtenida mediante el cuestionario A que tenía como objetivo identificar aspectos relevantes que se relacionan con el estudio y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita de las personas jóvenes y adultas que estudian en el INEA.

Se aplicó el cuestionario a 9 personas, del 16 de octubre al 1 de noviembre de 2015, que estudiaban el módulo *Operaciones avanzadas* y que además ya habían estudiado el tema de ecuaciones de primer grado (véanse los cuadros 4.5.a. y 4.5.b.) De estas personas, 6 eran mujeres y 3 hombres; sus edades iban de los 15 a los 54 años. Tres mujeres y dos hombres tenían de 1 a 4 hijos y los demás no tenían hijos. Sus ocupaciones eran: 3 obreros, 2 amas de casa, 1 estudiante (en ese momento todos eran estudiantes; sin embargo, se catalogó a una persona como estudiante porque no tenía otra ocupación), 1 mecánico, 1 comerciante y 1 empleada.

En la primera pregunta (¿Te gustan las matemáticas?), sólo 3 participantes respondieron que sí y el resto anotó que no, porque las consideraban difíciles, complicadas de entender y aburridas.

De los 9 participantes, 5 de ellos respondieron que sí a la pregunta 2 (¿Estudiaste la secundaria general?), donde dicen haber estudiado la secundaria general, una hasta el 1.º grado, otra hasta 2.º y los otros tres hasta 3.º. Estos 5

participantes afirmaron que les enseñaron a resolver ecuaciones de primer grado, pero que no recordaban algún método.

El tiempo que llevaban estudiando en el INEA los participantes iba de 1 mes a 5 meses; sólo uno de ellos llevaba un año y medio en el INEA (véase el cuadro 4.5.b). La modalidad de estudio del módulo fue físico para tres participantes y para los otros seis fue virtual. Además, del total de los participantes, 5 ya habían presentado examen del módulo de una a tres veces. Siete de los participantes asistían a asesorías; sin embargo, cuando tenían dudas para resolver un problema, seis le preguntaban al asesor; otro participante buscaba en sus notas de secundaria general, y otro le preguntaba a un familiar.



Cuadro 4.5.a. Aspectos relevantes que se relacionan con el estudio y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado de las personas que estudian en el INEA

|   | Nombre        | Edad    | Sexo   | Ocupación               | Hijos | Preguntas * |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---------------|---------|--------|-------------------------|-------|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
|   |               |         |        |                         |       | 1           |    | 2  |    | 3  |    |    | 4  |    |
|   |               |         |        |                         |       | Sí          | No | Sí | No | 1° | 2° | 3° | Sí | No |
| 1 | Aide Michel   | 15 años | Mujer  | Estudiante              | 0     |             | X  | X  |    |    |    | X  | X  |    |
| 2 | Perla Aline   | 15 años | Mujer  | Obrero (Ayudante gral.) | 0     |             | X  | X  |    | X  |    |    | X  |    |
| 3 | Jorge Nicolás | 19 años | Hombre | Obrero                  | 0     |             | X  | X  |    |    |    | X  | X  |    |
| 4 | Luis Ángel    | 20 años | Hombre | Obrero                  | 1     |             | X  | X  |    |    |    | X  | X  |    |
| 5 | Dominga       | 35 años | Mujer  | Ama de casa             | 0     | X           |    |    | X  |    |    |    |    |    |
| 6 | Elisa         | 38 años | Mujer  | Comerciante             | 3     |             | X  |    | X  |    |    |    |    |    |
| 7 | Salvador      | 41 años | Hombre | Mecánico                | 2     |             | X  | X  |    |    | X  |    | X  |    |
| 8 | Bertha        | 42 años | Mujer  | Empleada                | 2     | X           |    |    | X  |    |    |    |    |    |
| 9 | Teodora       | 54 años | Mujer  | Ama de casa             | 4     | X           |    |    | X  |    |    |    |    |    |

\* 1.- ¿Te gustan las matemáticas?

2.- ¿Estudiaste la secundaria general?

3.- ¿Hasta qué grado estudiaste la secundaria?

4.- ¿Te enseñaron a resolver ecuaciones?

Cuadro 4.5.b. Aspectos relevantes que se relacionan con el estudio y el aprendizaje de la resolución de ecuaciones de primer grado de las personas que estudian en el INEA

|        |               | Preguntas* |         |        |    |    |         |    |    |    |   |   |
|--------|---------------|------------|---------|--------|----|----|---------|----|----|----|---|---|
|        |               | 5          | 6       |        | 7  |    | 8       | 9  |    | 10 |   |   |
| Nombre |               |            | Virtual | Físico | Sí | No |         | Sí | No | a  | b | c |
| 1      | Aide Michel   | 3 semanas  | X       |        |    | X  |         | X  |    | X  |   |   |
| 2      | Perla Aline   | 3 meses    | X       |        | X  |    | 2 veces | X  |    |    |   | X |
| 3      | Jorge Nicolás | 1.5 años   |         | X      |    | X  |         | X  |    | X  |   |   |
| 4      | Luis Ángel    | 2 meses    | X       |        | X  |    | 2 veces |    | X  |    | X |   |
| 5      | Dominga       | 5 meses    |         | X      |    | X  |         | X  |    | X  | X |   |
| 6      | Elisa         | 3 meses    | X       |        | X  |    | 2 veces | X  |    | X  |   |   |
| 7      | Salvador      | 1 mes      | X       |        | X  |    | 1 vez   | X  |    | X  |   |   |
| 8      | Bertha        | 4 meses    | X       |        | X  |    | 3 veces | X  |    | X  |   |   |
| 9      | Teodora       | 4 meses    |         | X      |    | X  |         |    | X  |    | X |   |

\* 5.- ¿Cuánto tiempo llevas estudiando en el INEA?

6.- ¿En qué modalidad estudiaste el módulo *Operaciones avanzadas*?

7.- ¿Has presentado examen del módulo?

8.- ¿Cuántas veces?

9.- ¿Asistes a asesorías?

10.- Cuando tienes dudas al resolver un problema, ¿a quién le pides ayuda?

a) a un asesor

b) a un familiar

c) otro\_\_\_\_\_

### Cuestionario B

El cuestionario B tenía como objetivo identificar los errores que cometían las personas que estudiaban en el INEA al resolver ecuaciones de primer grado de acuerdo con lo planteado en el módulo *Operaciones avanzadas*. Las respuestas que dieron los participantes a las primeras dos preguntas (¿Qué entiendes por ecuación?, y ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?) están concentradas en el cuadro 4.6. El resto de las respuestas se concentraron en el cuadro 4.7.

Cuadro 4.6. Nociones de ecuación y características de las ecuaciones de primer grado de los estudiantes del INEA

|   | Nombre        | ¿Qué entiendes por ecuación?                              | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?                    |
|---|---------------|---|---|
| 1 | Aide Michel   | Resolver operaciones de matemáticas                       | Resolver y analizar   |
| 2 | Perla Aline   | Cuando haces un procedimiento para encontrar un resultado | Es el principio de lo que verás, un poco más difícil                  |
| 3 | Jorge Nicolás | Una operación de mayor nivel                              | Se tiene que despejar x para obtener el resultado de alguna operación |
| 4 | Luis Ángel    | Realizar y resolver una operación                         | Son fáciles y todas tienen una incógnita                              |

(Continúa)

Cuadro 4.6 (Concluye)

|   | Nombre   | ¿Qué entiendes por ecuación?   | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?   |
|---|----------|--|--|
| 5 | Dominga  | Porque hay que buscar el número de la incógnita                                      | Por las letras que ponen por ejemplo $x + y$   |
| 6 | Salvador | Una operación matemática que consiste en encontrar el valor de una incógnita (letra) | Se caracteriza por tener un procedimiento que consiste mayormente en suma, resta o división y preferentemente elevada a una sola potencia. |
| 7 | Elisa    | Multiplicar, sumar, y dividir  | Porque tenemos que encontrar el valor de las incógnitas  |
| 8 | Bertha   | Resolver problemas de matemáticas  | Saber resolver las ecuaciones  |
| 9 | Teodora  | El desarrollo de las matemáticas   | Que son más sencillas de resolver por lo tanto más fáciles de resolver   |

Los participantes tienen una idea errónea de lo que son las ecuaciones y no saben cuáles son las características de las ecuaciones de primer grado.

Seis de los participantes coinciden en que una ecuación es realizar o resolver problemas y operaciones matemáticas, dos de los participantes coinciden en que es encontrar el valor de la incógnita y solo uno de ellos que es el desarrollo de las matemáticas. Las ecuaciones conllevan todo lo que mencionaron los participantes; sin embargo, ninguno se acercó a la definición de ecuación que ofrece el módulo

*Operaciones avanzadas.* Uno de los propósitos de la unidad 4 es que los alumnos apliquen la noción de ecuación e incógnita para lo cual el módulo define “Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en las cuales las literales representan **incógnitas**” (Amador, 2006, p.118), sin embargo en esta unidad no se define que es incógnita y más adelante el módulo dice “Una **ecuación de primer grado** se caracteriza porque las literales o incógnitas están elevadas al exponente 1” (Amador, 2006, p. 119). De acuerdo con uno de los asesores que participaron en la entrevista, al preguntarle si los alumnos podían definir la palabra ecuación, respondió que no porque a los jóvenes y adultos se les enseña más a plantear y resolver problemas que sobre los conceptos y explicó que los alumnos de INEA “a lo que se dedican es a responder el examen, no les interesa cuál es la definición [por ejemplo] de una incógnita [...] ellos lo que quieren es pasar el examen y [obtener] el documento [certificado]”.

En el cuadro 4.7 se muestran los resultados de los reactivos 3 y 4. Para el reactivo 4, 4a, 4b y 4c se refiere al para planteamiento de la ecuación del problema, y 4aa, 4bb y 4cc a la resolución y el resultado. El 1 indica que el participante contestó correctamente el reactivo y el 0 que respondió incorrectamente. En el apéndice K se incluye la prueba del Alfa de Cronbach para validar la confiabilidad del cuestionario B, que dio como resultado  $\alpha = 0.74231557$ , lo que indica que el instrumento es confiable.

Cuadro 4.7 Resultados de estudiantes de INEA en las preguntas 3 y 4 del cuestionario B

|   | Nombre        | 3a | 3b | 3c | 3d | 3e | 3f | 3g | 3h | 4a | 4aa | 4b | 4bb | 4c | 4cc | Total |
|---|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|-------|
| 1 | Aide Michel   | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 8     |
| 2 | Perla Aline   | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 1   | 7     |
| 3 | Jorge Nicolás | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 11    |
| 4 | Luis Ángel    | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1   | 0  | 1   | 0  | 1   | 8     |
| 5 | Dominga       | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0   | 0  | 1   | 0  | 0   | 3     |
| 6 | Salvador      | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 11    |
| 7 | Elisa         | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1   | 0  | 1   | 0  | 1   | 8     |
| 8 | Bertha        | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1   | 0  | 1   | 0  | 1   | 10    |
| 9 | Teodora       | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1   | 0  | 1   | 0  | 1   | 11    |
|   | Total         | 9  | 5  | 8  | 7  | 5  | 6  | 7  | 6  | 3  | 8   | 0  | 8   | 0  | 5   | 77    |

En el inciso a) del reactivo 3, que es una ecuación del tipo  $x + a = b$ , todos los participantes resolvieron la ecuación  $43 + x = 179$ . Sin embargo, el procedimiento que emplearon 4 de los participantes consistió en buscar un número que al sumarle 43 diera 179, hicieron la comprobación sumando  $43 + 136$ . Los otros cinco anotaron los pasos del despeje de la incógnita  $x$ :  $x = 179 - 43$ ;  $x = 136$ .

En el inciso b) del reactivo 3, se presenta una ecuación del tipo  $a - x = b$ . En esta ecuación,  $45 - x = -5$ , cinco de los nueve participantes obtuvieron el resultado correcto mediante pasos para despejar la incógnita  $x$ ; otros tres participantes obtuvieron como resultado 40, y uno  $-50$ . Dos de los que obtuvieron como resultado 40, buscaron un número que al restarle 45 diera como resultado  $-5$ : no tomaron en cuenta el signo  $-$  (menos) del término independiente del segundo miembro de la

ecuación. El otro participante que obtuvo 40, como se ve en la figura 4.1, se equivocó al sumar  $45 + 5$ ; anotó  $x = 45 + 5$  y en el siguiente renglón  $x = 40$ . De los cuatro quienes llegaron al resultado correcto; dos anotaron  $45 - x = -5$  en el siguiente renglón  $-x = -5 - 45$  para obtener  $x = 50$ ; los otros dos participantes anotaron lo siguiente  $45 - 50 = -5$ .

b)  $45 - x = -5$   
 $x = 45 + 5$   
 $x = 40$

Figura 4.1. Ecuación del tipo  $a - x = b$

En el inciso c) del reactivo 3, que es una ecuación del tipo  $ax = b$ , en la ecuación  $4m = 16$ , sólo un participante tuvo incorrecto el resultado; utilizó el método de transposición y en lugar de usar la operación inversa de la multiplicación, utilizó la inversa de la adición; anotó  $m = 16 - 4$  y en el siguiente renglón  $m = 12$ . Quienes llegaron al resultado correcto escribieron  $m = \frac{16}{4}$ , y después  $m = 4$ . En el inciso d), la ecuación  $7k = 91$  (también del tipo  $ax = b$ ), dos participantes obtuvieron el resultado incorrecto, una de ellas fue la misma que tuvo incorrecto el inciso c), ambos participantes utilizaron el método de transposición y en lugar de usar la operación inversa de la multiplicación, utilizó la inversa de la adición; anotaron  $k = 91 - 7$  y en el siguiente renglón  $k = 84$ . Quienes llegaron al resultado correcto escribieron  $k = \frac{91}{7}$  y después  $k = 13$ .

En el inciso e) del reactivo 3, que es una ecuación del tipo  $ax + c = b$ , cuatro de los participantes tuvieron errores en la adición con números negativos para resolver la ecuación  $21l + 5 = -56$ ; utilizaron el método de transposición de términos; en el primer paso, al trasladar  $+5$  al segundo miembro de la ecuación, lo hicieron de manera correcta y lo pasaron como  $-5$ . Sin embargo, ignoraron el signo  $-$  (menos) del término independiente del segundo miembro y anotaron  $51$ . Además de estos cuatro participantes; una no concluyó el procedimiento y anotó el resultado como  $21l = 51$ ; dos participantes se equivocaron con la inversa de la multiplicación y en el siguiente paso escribieron  $l = 51 - 21$ , en el siguiente renglón pusieron como resultado  $l = 30$ ; otra participante tuvo dificultad en convertir la fracción  $l = \frac{-56}{21}$  en decimales y colocó  $l = -2.1 \frac{1}{21}$ . Los cinco participantes que obtuvieron correcto el resultado anotaron  $21l + 5 = -56$ , después  $21l = -56 - 5$ , después  $l = \frac{-61}{21}$  y obtuvieron como resultado  $l = -2.90$ .

En el inciso f) del reactivo 3, que es una ecuación del tipo  $ax - c = b$ , tres participantes tuvieron incorrecto el resultado de la ecuación  $18m - 5 = 80$ . Uno de los participantes ignoró la incógnita  $m$  y sumó el coeficiente  $18$  con el término independiente de la ecuación sin tomar en cuenta el signo  $-$  (menos), obteniendo  $18 + 5 = 23$ , y luego restó esta suma al segundo miembro de la ecuación  $80 - 23 = 57$ . Otro participante trató de resolverla con el método de transposición de términos, pero en el primer paso no utilizó la inversa de la adición y colocó  $18m = 80 - 5$  y en el siguiente renglón escribió  $18m = 75$  y ya no concluyó el procedimiento. La tercera participante la resolvió con el método de transposición de



términos y en el primer paso al trasladar el  $- 5$  al segundo miembro de la ecuación no utilizó la inversa de la sustracción y escribió  $18m = 80 - 5$ , en el siguiente renglón escribió  $m = \frac{75}{18}$  por lo que obtuvo  $m = 4.16$ . Quienes llegaron al resultado correcto anotaron  $18m = 80 + 5$  en el siguiente renglón escribieron  $18m = 85$ , en el siguiente renglón  $m = \frac{85}{18}$  para obtener  $m = 4.722$ .

En el inciso g) del reactivo 3, que es una ecuación del tipo  $\frac{x}{a} + b = c$ , dos de los participantes obtuvieron resultados incorrectos en la ecuación  $\frac{x}{5} + 4 = 13$ . Los dos porque en el método de transposición no usaron la inversa de la adición: anotaron  $\frac{x}{5} = 13 + 4$  y uno de ellos no concluyó el procedimiento y el otro participante en el siguiente paso anotó  $x = 17$  (5), en el tercer paso anotó  $x = 85$ . Los siete participantes que respondieron correctamente anotaron  $\frac{x}{5} = 13 - 4$ , luego  $\frac{x}{5} = 9$ , en el siguiente renglón  $x = 9$  (5) y obtuvieron  $x = 45$ .

En el último inciso del reactivo 3, en la ecuación  $\frac{x}{6} - 24 = 422$ , que es del tipo  $\frac{x}{a} - b = c$ , tres participantes tuvieron incorrecto el resultado. Dos de los participante porque al usar el método de transposición no usaron la inversa de la sustracción y anotaron  $\frac{x}{6} = 422 - 24$ ; una de ellas no concluyó el procedimiento y anotó hasta el siguiente paso  $\frac{x}{6} = 398$ ; la otra participante en el siguiente paso colocó  $x = 426$ (6) obteniendo como resultado  $x = 2556$ ; la tercera participante, como se muestra en la figura 4.2, no es claro como procedió: restó 24 a 422 en lugar de sumar obteniendo 398; luego se olvidó de este y dividió 442 entre 6 en lugar de multiplicar por 6.

Quienes llegaron al resultado correcto anotaron:  $\frac{x}{6} = 422 + 24$ , después  $x = 446$  (6) para obtener  $x = 2672$ .

h)  $\frac{x}{6} - 24 = 422$   
 $\frac{x}{6} = 422 + 24$   
 $x(6) = 422 - 24 =$   
 $\begin{array}{r} 422 \\ - 24 \\ \hline 398 \end{array}$   
 $x = 70.3$   
 $70.3(6) = 422 - 24 = 398$

Figura 4.2. Ecuación del tipo  $\frac{x}{a} - b = c$

Para el reactivo 4, en el cuadro 4.7 se anotó 4a para referirse al planteamiento de la ecuación del problema y 4aa para la resolución, y así para los tres incisos del reactivo. En el inciso a) de este reactivo sólo un estudiante no resolvió el problema de manera correcta, aunque sí había planteado una ecuación correctamente; anotó  $5800 - x = 4300$ . Sólo otros dos participantes plantearon la misma ecuación. Esto es, tres participantes si plantearon una ecuación y el resto no planteó ninguna porque lo resolvieron aritméticamente; anotaron  $5800 - 1500 = 4300$ .

En el inciso b), nadie logró plantear una ecuación para este problema; sin embargo ocho de los nueve resolvieron correctamente el problema; dividieron 39 entre 3 y obtuvieron como resultado 13, multiplicaron por 2 y el resultado era la edad de Ana.

Finalmente, en el inciso c), al igual que en b), nadie planteó una ecuación que representara el problema; cuatro de los participantes obtuvieron un resultado

incorrecto; uno de ellos anotó los datos, aunque no con las operaciones correctas y no logró identificar cuál era la incógnita; otro, como se muestra en figura 4.3, también trató de ubicar los datos para calcular la altura, incluso trató de hacerlo de manera gráfica. Un participante más entendió bien el problema y utilizó la multiplicación, pero en lugar de multiplicar por 5, multiplicó por 4; y el otro participante sí utilizó la  $x$  para plantear la ecuación, pero no ubicó todos los datos. Quienes respondieron correctamente el problema escribieron;  $12 + 3 = 15$  y en el siguiente renglón  $15(5) = 75$ .

c) Sobre Avenida Revolución hay un edificio, cuyo primer balcón se encuentra a una altura de 12 metros, y a una quinta parte de la altura del edificio menos 3 metros. ¿Cuál es la altura del edificio?

Figura 4.3. Problema y ecuación del tipo  $\frac{x}{a} - b = c$

En el cuadro 4.8 se concentran los errores por ecuación que presentaron estudiantes del INEA en la resolución de ecuaciones de primer grado.

Cuadro 4.8. Errores por ecuación que cometen estudiantes del INEA en la resolución de ecuaciones de primer grado

| Errores \ Tipo de ecuación  | $43 + x = 179$ | $45 - x = -5$ | $4m = 16$ | $7k = 91$ | $21l + 5 = -56$ | $18m - 5 = 80$ | $\frac{x}{5} + 4 = 13$ | $\frac{x}{6} - 24 = 422$ | Frecuencia de errores |
|---|----------------|---------------|-----------|-----------|-----------------|----------------|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición     | 0              | 1             | 0         | 0         | 0               | 2              | 2                      | 2                        | 7                     |
| Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división | 0              | 0             | 1         | 0         | 2               | 0              | 0                      | 0                        | 3                     |
| Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción             | 0              | 0             | 0         | 2         | 0               | 0              | 0                      | 0                        | 2                     |
| En la adición de números positivos o negativos                              | 0              | 1             | 0         | 0         | 0               | 0              | 0                      | 0                        | 1                     |
| Al transformar números fraccionarios a decimales                            | 0              | 0             | 0         | 0         | 1               | 0              | 0                      | 0                        | 1                     |
| En el orden de las operaciones al despejar la incógnita                     | 0              | 0             | 0         | 0         | 0               | 0              | 0                      | 1                        | 1                     |
| Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro     | 0              | 3             | 0         | 0         | 4               | 0              | 0                      | 0                        | 7                     |
| Al ignorar la incógnita   | 0              | 0             | 0         | 0         | 0               | 1              | 0                      | 0                        | 1                     |
| Al no concluir el procedimiento   | 0              | 0             | 0         | 0         | 1               | 1              | 1                      | 1                        | 4                     |
| Frecuencia de errores por ecuación  | 0              | 5             | 1         | 2         | 8               | 4              | 3                      | 4                        |                       |

Los errores que tuvieron con mayor frecuencia los estudiantes del INEA al resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita (véase el cuadro 4.8) fueron; con la inversa de la sustracción o adición, pues al pasar el coeficiente o termino independiente en el segundo miembro de la ecuación no utilizaron de manera correcta la operación inversa correspondiente; y al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro.

De acuerdo con el cuadro 4.8 los estudiantes del INEA que participaron en esta investigación cometieron los siguientes errores de mayor a menor frecuencia.

I (Frecuencia: 7; 78%)

- 1.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición.
- 2.- Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro.

II (Frecuencia: 4; 44%)

- 3.- Al no concluir el procedimiento.

III (Frecuencia: 3; 33%)

- 4.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.

IV (Frecuencia: 2; 22%)

- 5.- Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción.

V (Frecuencia: 1; 11%)

- 6.- En la adición de números positivos o negativos.
- 7.- Al transformar números fraccionarios a decimales.
- 8.- En el orden de las operaciones al despejar la incógnita.
- 9.- Al ignorar la incógnita.

Se calculó el índice de dificultad de los reactivos 3 y 4 (véanse los cuadro 4.9 y 4. 10). Para calcular el índice de dificultad de cada reactivo se utilizó la fórmula  $100 \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)$ , donde  $n$ : es el número de participantes y  $n_1$ : es el número de respuestas correctas por reactivo. La escala que se utilizó para el índice de dificultad es la siguiente: de 0 a 20 muy fácil, de 21 a 40 fácil, de 41 a 60 dificultad moderada, de 61 a 80 difícil y de 81 a 100 muy difícil.

De acuerdo con el cuadro 4.8 se observa que la ecuación en la que los participantes tuvieron más errores fue la del inciso 3e:  $21 l + 5 = -56$ , su índice de dificultad fue 44 por lo que su nivel de dificultad se ubicó en moderada. Las ecuaciones que le siguen en las que los participantes cometen más errores son las ecuaciones del inciso 3b y 3f:  $45 - x = -5$  y  $18 m - 5=80$  que presentan la misma cantidad de errores y sus índices de dificultad son fáciles (véase el cuadro 4.9).

Cuadro 4.9. Índice de dificultad por incisos del reactivo 3

| Reactivo             | 3a             | 3b                  | 3c        | 3d        | 3e                  | 3f            | 3g                     | 3h                       |
|----------------------|----------------|---------------------|-----------|-----------|---------------------|---------------|------------------------|--------------------------|
| Ecuación             | $43 + x = 179$ | $45 - x = -5$       | $4m = 16$ | $7k = 91$ | $21 l + 5 = -56$    | $18 m - 5=80$ | $\frac{x}{5} + 4 = 13$ | $\frac{x}{6} - 24 = 422$ |
| Total de aciertos    | 9              | 5                   | 8         | 7         | 5                   | 6             | 7                      | 6                        |
| Índice de dificultad | 0              | 44                  | 11        | 22        | 44                  | 33            | 22                     | 33                       |
| Nivel de dificultad  | muy fácil      | dificultad moderada | muy fácil | fácil     | dificultad moderada | fácil         | fácil                  | fácil                    |

Ahora bien, en cuanto al planteamiento de ecuaciones para representar problemas, en el cuadro 4.10 se observa que solo tres participantes plantearon la ecuación  $5800 - x = 4300$  correspondiente al problema 4a; y ningún participante pudo plantear la ecuación  $2x + x = 39$  del problema 4b ni la ecuación  $\frac{x}{5} - 3 = 12$  del problema 4c por lo que los niveles de dificultad de estos reactivos se ubican de difíciles a muy difíciles. Sin embargo, como ya se ha comentado previamente, con sus propios procedimientos, cuatro participantes resolvieron los tres problemas; tres resolvieron los problemas 4a y 4b y otro resolvió los problemas 4a y 4c; un participante resolvió únicamente 4b por lo que los problemas de los reactivos 4aa y 4bb resultan muy fáciles de resolver, y el reactivo 4cc medianamente difícil de resolver.

Cuadro 4.10. Índice de dificultad por incisos del reactivo 4

| Reactivo             | 4a                | 4aa       | 4b            | 4bb       | 4c                     | 4cc                 |
|----------------------|-------------------|-----------|---------------|-----------|------------------------|---------------------|
| Ecuación             | $5800 - x = 4300$ |           | $2x + x = 39$ |           | $\frac{x}{5} - 3 = 12$ |                     |
| Total de aciertos    | 3                 | 8         | 0             | 8         | 0                      | 5                   |
| Índice de dificultad | 67                | 11        | 100           | 11        | 100                    | 44                  |
| Nivel de dificultad  | Difícil           | Muy fácil | Muy difícil   | Muy fácil | Muy difícil            | Dificultad moderada |

### *Entrevista a asesores educativos*

Para esta investigación se entrevistó a 4 asesores educativos del INEA. Las entrevistas se llevaron a cabo del 9 al 14 de octubre de 2015. Durante la entrevista se les preguntó: “Por tu experiencia, ¿qué módulo es el que más reprueban los alumnos de secundaria?”. Tres de los asesores coincidieron en que era el módulo *Operaciones avanzadas*; para el otro asesor, era el módulo *Fracciones y porcentajes*. Los asesores coincidieron en que los alumnos reprueban el módulo *Operaciones avanzadas* porque en él se utiliza lenguaje algebraico, no están acostumbrados a usar letras en vez de números y no saben plantear ecuaciones; además, no entienden muchos de los conceptos.

También se les preguntó qué contenido del módulo *Operaciones avanzadas* se les dificulta más a los alumnos. Respondieron que son las ecuaciones lineales, en especial la resolución de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por los métodos de sustitución, suma y resta, y el método gráfico. También informaron que de manera general se les dificultan los despejes, plantear una ecuación, y las operaciones con signo.

De los asesores entrevistados, 3 dijeron no tener dificultades para comprender el contenido del módulo *Operaciones avanzadas*. Sin embargo, a la dificultad que se enfrentan tiene que ver con transmitir el conocimiento al alumno y que éste lo comprenda y aplique cuando presenta un examen. De acuerdo con lo que dijeron los asesores entrevistados, en cuanto a lo pedagógico, el INEA ofrece capacitación para el desarrollo de algunos módulos o ejes temáticos; estas capacitaciones son cursos



que duran dos días y que, si bien sirven para reforzar o comprender contenidos, no les enseñan cómo transmitir los contenidos de los módulos a los alumnos

#### Análisis de resultados de los instrumentos aplicados a estudiantes de secundaria general

El cuestionario B que tenía como objetivo identificar errores cometidos por estudiantes de secundaria general al resolver ecuaciones de primer grado se aplicó en la escuela secundaria pública oficial núm. 0533, “José María Velasco”, ubicada en el municipio de Chicoloapan, Estado de México. El instrumento se aplicó a 43 estudiantes de segundo grado del grupo D del turno matutino, el día 20 de enero de 2015. Se eligió un grupo de segundo grado porque los estudiantes de primer grado estaban revisando el bloque III y aún no veían el tema de ecuaciones de primer grado. Los estudiantes de segundo grado no sólo ya habían visto el tema en primer grado sino que también días antes de la aplicación del cuestionario habían empezado el estudio de las ecuaciones de primer grado.

Los resultados de las respuestas que dieron los participantes a las primeras dos preguntas (¿Qué entiendes por ecuación?, y ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?) están concentrados en el cuadro 4.11.

Cuadro 4.11. Respuestas a las preguntas 1 y 2 del cuestionario B aplicado a estudiantes de secundaria general

|   | Nombre  | ¿Qué entiendes por ecuación?   | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?                      |
|---|---------|--|---|
| 1 | Luis    | Es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contienen productos entre las variables. | Sólo se realizan sumas o restas.  |
| 2 | Yanelly | También se le llama ecuación lineales. Es un planteamiento de igualdad, involucrando 1 o más variables a la primera potencia.            | Sólo se realiza en suma y resta.  |
| 3 | Nancy   | Planteamiento de igualdad involucrando 1 o más variables a la primer potencia y sólo involucra suma y restas.                            | Que sólo se utilizan sumas y restas.                                    |
| 4 | Israel  | Sacan los valores de cualquier operación de primer grado.  | Se representa en los valores numéricos y en la potencia en todo anillo. |
| 5 | Daniela | Una igualdad de dos expresiones en las que aparece una incógnita.  | Las incógnitas.   |
| 6 | Ulises  | Son expresiones algebraicas que permiten traducir algo al lenguaje matemático.   | Son ecuaciones de un solo término.                                      |
| 7 | Ángel   | Un problema matemático ilustrado con letras.   | Que son fáciles.  |
| 8 | Alma    | Una operación con diferentes términos de igualdad.   | Son operaciones de igualdad.  |
| 9 | Johan   | Es igualdad para verificar valores concretos que se inician en una operación.  | La verificación de igualdad entre dos términos.                         |

(Continúa)

Cuadro 4.11 (Continúa)

|    | Nombre  | ¿Qué entiendes por ecuación?   | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?  |
|----|---------|--|---|
| 10 | Ángeles | Es una operación en la cual se invierten y ocupan la división, multiplicación, suma y resta.   | Que se invierten las operaciones y se trata de dejar la letra de dicha operación sola (despeje o despeja la letra). |
| 11 | Brayan  | Una ecuación es un planteamiento donde hay una letra que se representa como una incógnita y para resolverlo se necesita saber cuánto vale la incógnita.  | Las ecuaciones de primer grado son del tipo: $ax + b = 0$ con a.  |
| 12 | Diego   | Son operaciones más complejas y las sencillas.   | Tiene letras y signos y números.  |
| 13 | Yesenia | Una operación algebraica donde se encuentra el valor de las letras.  | Las letras.   |
| 14 | Itzel   | Yo entiendo que es cuando desarrollamos una cantidad.  | Yo digo que es caracterizada cuando vemos expresiones algebraicas.  |
| 15 | Aldair  | Que viene de las matemáticas y son un tanto difíciles.   | Las literales que traen las ecuaciones.   |
| 16 | Tamara  | Es una expresión en términos matemáticos.  | Que si no tiene número se define que el exponente es 1.   |
| 17 | Sarai   | Ecuación es un problema matemático hecho para calcular los métodos de problemas más complicados.   | Los símbolos los procedimientos.  |
| 18 | Bryan   | Lo que entiendo es que debes de encontrar la literal y debe de tener términos iguales.   | Pues tiene unas incógnitas o también literales que son las que debes de sustituir.                                  |
| 19 | Yoalli  | Ecuación es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primer potencia que no productos entre las variables, es decir una ocasión que involucra solamente suma y resta de una variable. | La igualdad, potencia, variables.   |

(Continúa)

Cuadro 4.11 (Continúa)

|    | Nombre    | ¿Qué entiendes por ecuación?  | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?  |
|----|-----------|---|---|
| 20 | Gisela    | Yo lo que entiendo por ecuación es sobre el despeje de una operación.   | Lo que las caracteriza yo creo que son las letras, números, etc.  |
| 21 | Nadia     | Un problema matemático indispensable para cualquier situación de diversas materias.   | Su despeje, sus cambios de signos y sus formas de procedimientos diferentes a otros.                          |
| 22 | Vannesa   | Yo entiendo que es un problema matemático.  | Yo digo que las letras son importantes y en la posición que estén acomodados y saber cuánto valen las letras. |
| 23 | Jorge     | Es un número sumado por otro acompañado de una letra tenemos que buscar lo que significa.   | Sus respuestas y su desarrollo.   |
| 24 | Isaías    | Que es una expresión algebraica que podemos expresar letras, sumas y divisiones.  | Que puede expresar con cualquier letra o también llamada lineal.  |
| 25 | Miguel    | Que son ecuaciones de primer grado y pues son sobre multiplicaciones.   | Que hay algunas que si les entiendo y hay otras que casi no.  |
| 26 | Nataly    | Un planteamiento de igualdad involucrando una o más variables, es decir que involucra sumas o restas.                               | A la primer potencia que solo involucra una o más variables.  |
| 27 | Octavio   | Es un problema matemático.  | Que el resultado es raro y se resuelve difícil.   |
| 28 | Lizbeth   | Que es una operación matemática a una sola potencia.  | Que son elevadas a la primera potencia.   |
| 29 | Pedro     | Que es una operación matemática.  | Que son elevados a la potencia.   |
| 30 | Francisco | Es una igualdad de dos expresiones en la que aparece una incógnita cuyo valor está relacionado a través de operaciones aritméticas. |   |

(Continúa)

Cuadro 4.11 (Continúa)

|    | Nombre   | ¿Qué entiendes por ecuación?  | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?   |
|----|----------|---|--|
| 31 | Juan     | Se denomina ecuaciones de primer grado el exponente de la incógnita es uno.   | El exponente de la incógnita y está relacionado por operaciones aritméticas.   |
| 32 | Lourdes  | Ecuación es una operación matemática.   |  |
| 33 | Magaly   | Pues para mí una ecuación es una expresión de dos donde aparece una incógnita.  | Es una ecuación de uno o dos dígitos.  |
| 34 | Yadira   | Pues que es un planteamiento de igualdad involucrando variables a una primera potencia que también involucra sumas y restas.              | Que es un planteamiento variable de igualdad.  |
| 35 | Jazmín   | Ecuación es aquella que tiene una letra que es un número no descubierto y se tiene que tener o hacer un procedimiento para saber cuál es. | Tiene como característica dos exponentes y un signo de operación.  |
| 36 | Fernanda | Son sumas y restas de un grado.   | Son como $b+a+3a=-4a$ son más fáciles.   |
| 37 | Oswaldo  | Es un problema matemático donde lleva letras y exponentes.  | Que todas sus letras son minúsculas.   |
| 38 | Jesús    | Es algo que se le puede llamar modo matemático que se utiliza casi para toda la vida.   | Que todas las letras son minúsculas.   |
| 39 | Karen    | Son características de igualdad.  | Que es un planteamiento de igualdad involucrando una o más variables a la primera potencia y que solamente involucra sumas y restas. |
| 40 | Sandra   | Que es un planteamiento con una o más variables y tiene potencias, también se pueden sumar y restar con la primera potencia.              | Contiene una o más variables que se restan o suman.  |

(Continúa)

Cuadro 4.11 (Concluye)

|    | Nombre  | ¿Qué entiendes por ecuación?   | ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?  |
|----|---------|--|---|
| 41 | Jazmín  | Es un planteamiento de igualdad que se llama una ecuación de primero o lineal solamente contiene sumas o restas. | Solamente sumas restas de una variable a la primera potencia en todo anillo comunicativo. |
| 42 | Dulce   | Que es un planteamiento de igualdad involucrando uno a más variables a la primera potencia.                      | Que son sumas o restas.   |
| 43 | América | La verdad bien bien no sé qué es una ecuación, pero yo digo que es una especie de problema matemático.           | Son creo un poco más fáciles.   |

Como se observa en el cuadro 4.11, todos los participantes intentaron definir el término ecuación, sin embargo, fueron los siguientes participantes quienes definieron correctamente el término ecuación, cabe hacer la aclaración que se consideró como correcta la definición a partir de lo que es una ecuación de primer grado, 1.- Luis, 2.- Yanelly, 3.- Nancy, 5.- Daniela, 19.- Yoalli, 26.- Nataly, 30.- Francisco, 34.- Yadira, 40.- Sandra, 41.- Jazmín y 42.- Dulce, además las participantes 2.- Yanelly y 41.- Jazmín incluyeron el término *ecuación lineal* para referirse a las mismas. Dentro de sus definiciones, los participantes 2.- Yanelly, 19.- Yoalli, 34.- Yadira, 40.- Sandra y 42.- Dulce escribieron las características de las ecuaciones de primer grado, cabe destacar que los participantes 3.- Nancy, 19.- Yoalli y 26.- Nataly escribieron que las ecuaciones de primer grado solo involucran sumas y restas. En algunas definiciones, los participantes incluyeron términos como incógnita, letra, despeje y variable; sin embargo, algunos de los

participantes que incluyeron estos términos en sus respuestas, no definieron correctamente qué es una ecuación.

El cuadro 4.12 contiene los resultados de los reactivos 3 y 4. El 1 indica que la respuesta es correcta, el 0 que es incorrecta y N que no contestó la pregunta. En el apéndice L se incluye la prueba del Alfa de Cronbach para validar la confiabilidad del cuestionario B, que dio como resultado  $\alpha = 0.69823148$ , lo que indica que el instrumento es confiable.

Cuadro 4.12. Resultados de estudiantes de secundaria general en las preguntas 3 y 4 del cuestionario B

|    | Nombre  | 3a | 3b | 3c | 3d | 3e | 3f | 3g | 3h | 4a | 4aa | 4b | 4bb | 4c | 4cc | Total |
|----|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|-------|
| 1  | Luis    | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 2  | Yanelly | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 3  | Nancy   | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 1   | N  | 0   | 3     |
| 4  | Israel  | 1  | N  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 3     |
| 5  | Daniela | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | N   | N  | 0   | N  | 0   | 1     |
| 6  | Ulises  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 8     |
| 7  | Ángel   | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 6     |
| 8  | Alma    | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 9     |
| 9  | Johan   | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | N   | N  | N   | 5     |
| 10 | Ángeles | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0   | N  | 0   | N  | 0   | 6     |
| 11 | Brayan  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | N  | N   | N  | N   | N  | N   | 5     |
| 12 | Diego   | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | N  | N  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 4     |
| 13 | Yesenia | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | N  | N  | N  | N   | N  | N   | N  | N   | 3     |
| 14 | Itzel   | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | N  | 0   | N  | 0   | N  | 0   | 4     |

(Continúa)

Cuadro 4.12. (Continúa)

|    | Nombre    | 3a | 3b | 3c | 3d | 3e | 3f | 3g | 3h | 4a | 4aa | 4b | 4bb | 4c | 4cc | Total |
|----|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|-------|
| 15 | Aldair    | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | N  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 3     |
| 16 | Tamara    | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | N   | 4     |
| 17 | Sarai     | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 8     |
| 18 | Bryan     | 1  | N  | 1  | N  | 0  | 1  | N  | N  | N  | N   | N  | 1   | N  | N   | 4     |
| 19 | Yoalli    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | N  | N  | 0  | 0   | N  | N   | N  | N   | 0     |
| 20 | Gisela    | 0  | 0  | N  | 0  | 0  | 1  | 0  | N  | N  | N   | N  | N   | N  | N   | 1     |
| 21 | Nadia     | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 5     |
| 22 | Vannesa   | 0  | 0  | N  | N  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0   | 1  | 1   | 0  | 0   | 5     |
| 23 | Jorge     | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1   | N  | 1   | N  | 0   | 7     |
| 24 | Isaías    | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 5     |
| 25 | Miguel    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 2     |
| 26 | Nataly    | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 7     |
| 27 | Octavio   | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | N  | N  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 3     |
| 28 | Lizbeth   | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 6     |
| 29 | Pedro     | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  |    | 1  | 1  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 7     |
| 30 | Francisco | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1  | 0   | N  | 0   | N  | 0   | 2     |
| 31 | Juan      | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1   | 0  | 0   | 11    |
| 32 | Lourdes   | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 0   | N  | 0   | N  | 0   | 3     |
| 33 | Magaly    | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 5     |
| 34 | Yadira    | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | N   | 0  | 0   | N  | N   | 0     |
| 35 | Jazmín    | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | N  | N  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 2     |
| 36 | Fernanda  | 0  | N  | N  | N  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 1     |
| 37 | Osvaldo   | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 3     |
| 38 | Jesús     | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 2     |
| 39 | Karen     | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 0     |
| 40 | Sandra    | 0  | N  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 0     |

(Continúa)



Cuadro 4.12. (Concluye)

|    | Nombre    | 3a | 3b | 3c | 3d | 3e | 3f | 3g | 3h | 4a | 4aa | 4b | 4bb | 4c | 4cc | Total |
|----|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|-------|
| 41 | Jazmín L. | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 0   | N  | 0   | 3     |
| 42 | Dulce     | 0  | N  | 0  | N  | 0  | 0  | 0  | 0  | N  | 1   | N  | 1   | N  | 0   | 2     |
| 43 | América   | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | N  | 0  | 0  | 0  | 1   | N  | 1   | N  | 0   | 3     |
|    | Total     | 23 | 19 | 24 | 21 | 5  | 19 | 8  | 8  | 7  | 25  | 2  | 8   | 0  | 0   |       |

En el inciso a) del reactivo 3, que es una ecuación del tipo  $x + a = b$ , 23 de los participantes resolvieron correctamente la ecuación  $43 + x = 179$ , la mayoría de estos participantes anotaron los pasos del despeje de la incógnita  $x$ :  $x = 179 - 43$ ;  $x = 136$ . De los veinte participantes que resolvieron incorrectamente la ecuación, diez tuvieron dificultad con la inversa de la adición el método de transposición de términos; ocho de ellos escribieron  $x = 179 + 43$  y como resultado  $x = 222$ ; los otros dos escribieron  $x = \frac{179}{43}$ , y en el siguiente paso escribieron  $x = 4.16$ . Otros cinco participantes ignoraron la letra y escribieron  $43 + 179 = 222$ , los otro cinco participantes no concluyen el procedimiento y solo anotaron  $x = 179 - 43$ .

El inciso b) del reactivo 3, la ecuación  $45 - x = -5$ , que es una ecuación del tipo  $a - x = b$ , diecinueve de los participantes obtuvieron el resultado correcto, cinco dejaron en blanco el reactivo y del resto que obtuvo incorrecto el resultado; once participantes anotaron  $45 - x = -5$  y en el siguiente renglón  $x = -5 + 45$  para obtener  $x = 40$ ; uno de los participantes se equivocó en la adición de números negativos y anotó  $x = -5 - 45$  y como resultado colocó  $x = 40$  no consideraron al signo menos del segundo miembro de la ecuación; siete participantes no tomaron en

cuenta el signo – (menos) del término independiente del segundo miembro de la ecuación por lo que anotaron  $x = 5 - 45$  y obtuvieron  $x = 40$ ; uno de los participantes no concluyó el procedimiento y solo escribió  $x = - 5 - 45$ . De los diecinueve quienes llegaron al resultado correcto; catorce anotaron  $45 - x = -5$  y en el siguiente renglón  $- x = - 5 - 45$  para obtener  $x = 50$ ; los otros cinco participantes anotaron lo siguiente  $45 - 50 = -5$ .

En el inciso c) del reactivo 3, que es una ecuaciones del tipo  $ax = b$ , en la ecuación  $4m = 16$ , los participantes que resolvieron correctamente la ecuación fueron veinticuatro y escribieron  $m = \frac{16}{4}$ , en el siguiente renglón escribieron  $m = 4$ . Tres participantes no resolvieron la ecuación y los otros dieciséis la resolvieron de manera incorrecta. De los participantes que resolvieron incorrectamente la ecuación; catorce participantes al utilizar el método de transposición de términos en lugar de usar la operación inversa de la multiplicación, utilizaron la inversa de la adición, anotaron  $m = 16 - 4$  y en el siguiente renglón  $m = 12$ ; los otros dos participantes ignoraron la letra  $m$  y escribieron  $4 + 16 = 20$ .

En el inciso d), la ecuación  $7k = 91$  que también es una ecuaciones del tipo  $ax = b$ , veintiuno de los participantes obtuvieron el resultado correcto, tres no resolvieron la ecuación y diecinueve la resolvieron incorrectamente. Quienes llegaron al resultado correcto escribieron  $k = \frac{91}{7}$  y después  $k = 13$ . De los que resolvieron incorrectamente la ecuación; trece al utilizar el método de transposición de términos en lugar de usar la operación inversa de la multiplicación, utilizaron la inversa de la adición, anotaron  $k = 91 - 7$  y obtuvieron  $k = 84$ ; cuatro de los participantes no

consideraron todos los datos y anotaron  $k = 91$ ; los otros dos participantes ignoraron la letra y anotaron  $91 - 7 = 84$ .

En el inciso e) del reactivo 3, la ecuación  $21l + 5 = -56$ , que es una ecuación del tipo  $ax + c = b$ , únicamente cinco participantes resolvieron de manera correcta la ecuación. Los cinco participantes que obtuvieron correcto el resultado anotaron  $21l + 5 = -56$ , después  $21l = -56 - 5$ , después  $l = \frac{-61}{21}$  y obtuvieron como resultado  $l = -2.90$ . De los participantes que resolvieron de manera incorrecta la ecuación, trece se equivocaron con la inversa de la adición al trasladar el  $+5$  al segundo miembro de la ecuación, de estos trece participantes tres anotaron  $21l = -56 + 5$  y después  $l = \frac{-51}{21}$  para obtener como resultado  $l = -2.42$ , otros cinco de los trece participantes ignoraron el signo menos del término independiente del segundo miembro de la ecuación y escribieron  $21l = 56 + 5$  y en el siguiente paso escribieron  $l = \frac{61}{21}$  y anotaron como resultado  $l = 2.90$ , los otros cinco de los trece participantes que se equivocaron con la inversa de la adición no concluyeron el procedimiento y anotaron solo  $21l = -56 + 5$ .

Además en este mismo inciso e), doce participantes se equivocaron en la adición de números negativos y en el primer paso anotaron  $21l = -56 - 5$ , después  $l = \frac{-51}{21}$  y obtuvieron como resultado  $l = -2.42$ , sólo uno de estos doce también se equivocó en la inversa de la multiplicación y en el segundo paso anotó  $l = -51$  ( $21$ ) para obtener como resultado  $l = -1071$ . Cuatro de los participantes ignoraron la incógnita y anotaron  $21 + 5 = -56$  y en el siguiente paso  $56 - 26 = 30$ . Otros cuatro

participantes en el tercer paso anotaron  $l = \frac{-61}{21}$  y al realizar la división los participantes no consideraron las leyes de los signos y anotaron como resultado  $l = 2.90$ . Dos participantes ignoraron datos al resolver la ecuación; uno escribió  $l = -56 - 5$  y obtuvo como resultado  $l = -61$ ; el otro participante  $21l = -56$  y después  $l = \frac{-56}{21}$  y obtuvieron como resultado  $l = -2.42$ . Finalmente en este inciso solo un participante se equivocó en el orden de las operaciones al despejar la incógnita y escribió  $l + 5 = \frac{-56}{21}$ , y en el siguiente renglón escribió  $l = -2.42 - 5$  para obtener como resultado  $l = -7.42$ .

En el inciso f) del reactivo 3, en la ecuación  $18m - 5 = 80$ , que es una ecuación del tipo  $ax - c = b$ , diecinueve participantes tuvieron correcto el resultado, cuatro no resolvieron la ecuación y veinte participantes la resolvieron de forma incorrectamente. Quienes llegaron al resultado correcto anotaron  $18m = 80 + 5$  en el siguiente renglón escribieron  $18m = 85$ , en el siguiente renglón  $m = \frac{85}{18}$  para obtener  $m = 4.722$  como resultado.

De los veinte participantes que se equivocaron en el inciso f); seis participantes se equivocaron con la inversa de la sustracción y colocaron  $18m = 80 - 5$  y en el siguiente renglón escribieron  $18m = 85$  en el siguiente paso escribieron  $m = \frac{85}{18}$  por lo que obtuvieron como resultado 4.47; tres participantes se equivocaron con la inversa de la multiplicación y escribieron en el segundo paso  $m = 85 (18)$  por lo que obtuvieron como resultado  $m = 1530$ ; cuatro de los participantes ignoraron la incógnita  $m$  y restaron el término independiente de la

ecuación al coeficiente 18, obteniendo  $18 - 5 = 13$  y luego restaron esta suma al segundo miembro de la ecuación  $80 - 15 = 65$ ; seis participantes no concluyeron el procedimiento para resolver la ecuación y anotaron  $18m = 80 + 5$ , en el siguiente renglón escribieron como resultado  $18m = 85$ .

Además en este mismo inciso, el f), un participante ignoró el término independiente del primer miembro y escribió  $18m = 80$ , en el siguiente renglón escribió  $m = \frac{80}{18}$  por lo que obtuvo como resultado  $m = 4.44$ ; otro participante no considero el orden de las operaciones al despejar la incógnita y los pasos que siguió fueron  $m - 5 = \frac{80}{18}$ , después anotó  $m = 4.44 - 5$ , y escribió  $m = -.55$  como resultado.

En el inciso g) del reactivo 3, en la ecuación  $\frac{x}{5} + 4 = 13$ , que es una ecuación del tipo  $\frac{x}{a} + b = c$ , sólo 8 participantes resolvieron correctamente la ecuación, 6 participantes no la resolvieron y veintinueve la resolvieron de forma incorrecta. Quienes resolvieron correctamente anotaron  $\frac{x}{5} = 13 - 4$ , luego  $\frac{x}{5} = 9$ , y en el siguiente renglón  $x = 9(5)$ , como resultado obtuvieron  $x = 45$ . De los veintinueve participantes que resolvieron de forma incorrecta la ecuación; 6 porque en el método de transposición no usaron la inversa de la adición y anotaron  $\frac{x}{5} = 13 + 4$  por lo que en los subsecuentes pasos anotaron  $x = 17(5)$  y en el tercero  $x = 85$ ; otros seis participantes iban bien al utilizar el método de transposición de términos y anotaron  $\frac{x}{5} = 13 - 4$  pero en el siguiente paso se equivocaron con la inversa de la división y anotaron  $x = \frac{17}{5}$ , y como resultado anotaron  $x = 3.4$ ; otros seis participantes ignoraron la  $x$  ya que anotaron  $5 + 4 = 9$  y este resultado lo sumaron al término

independiente del segundo miembro de la ecuación, anotaron  $9 + 13 = 22$ ; otros seis participantes no concluyeron el procedimiento para resolver la ecuación y sólo anotaron  $\frac{x}{5} = 9$ ; cinco participantes se equivocaron en el orden de las operaciones para resolver la ecuación por lo que anotaron  $x + 4 = 13$  (5), en el siguiente paso anotaron  $x = 65 - 4$ , y como resultado anotaron  $x = 61$ ; sólo un participante se equivocó en la adición de los números positivo y negativo, anotó  $\frac{x}{5} = 13 - 4$ , luego  $\frac{x}{5} = 18$ , y en el siguiente renglón  $x = 18$  (5), y como resultado obtuvo  $x = 90$ .

En el último inciso del reactivo 3, en la ecuación  $\frac{x}{6} - 24 = 422$ , que es del tipo  $\frac{x}{a} - b = c$ , 8 de los participantes obtuvieron la solución correcta de la ecuación; otros 8 no la resolvieron y el resto obtuvo un resultado incorrecto. Quienes llegaron al resultado correcto anotaron:  $\frac{x}{6} = 422 + 24$ , después  $x = 446$  (6) para obtener  $x = 2672$ .

De los veintisiete participantes que respondieron de forma incorrecta; seis participantes en el método de transposición de términos no usaron la inversa de la sustracción y anotaron  $\frac{x}{6} = 424 - 24$ , y en el siguiente renglón  $\frac{x}{6} = 400$ , en el siguiente renglón colocaban  $x = 400$ (6) y obtuvieron como resultado  $x = 2400$ ; otros cinco participantes iban bien al utilizar el método de transposición de términos y anotaron  $\frac{x}{6} = 422 + 24$ , en el siguiente paso anotaron  $\frac{x}{6} = 444$  y en el siguiente paso se equivocaron con la inversa de la división y anotaron  $x = \frac{444}{6}$ , y como resultado anotaron  $x = 74$ ; otros seis participantes ignoraron la incógnita,

anotaron  $24 - 6 = 18$  y este resultado lo sumaron al término independiente del segundo miembro de la ecuación, anotaron  $18 + 422 = 440$ ; otros cinco participantes no concluyeron el procedimiento para resolver la ecuación y sólo anotaron  $\frac{x}{6} = 444$ ; otros cinco participantes se equivocaron en el orden de las operaciones para resolver la ecuación por lo que anotaron  $x - 24 = 422$  (6), en el siguiente paso anotaron  $x = 2532 + 24$ , y como resultado anotaron  $x = 2556$ . El cuadro 4.13 contiene los errores por ecuación que presentaron estudiantes de secundaria general.

Para el reactivo 4, en el inciso a), una ecuación que se esperaba que los estudiantes plantearan para representar y resolver el problema era  $5800 - x = 4300$ . Siete participantes sí la plantearon, 16 plantearon una ecuación incorrecta (esto es, no representaba el problema) y los otros 20 no intentaron plantear una ecuación. Sin embargo, 25 estudiantes resolvieron correctamente el problema y otros 12 que intentaron resolverlo obtuvieron un resultado incorrecto. La mayoría de los estudiantes utilizó un método aritmético para resolver el problema.

En el inciso b), una ecuación que se esperaba que plantearan los estudiantes era  $2x + x = 39$ . Sólo 2 estudiantes plantearon esta ecuación. Otros 17 plantearon una ecuación incorrecta. Los otros 24 no plantearon ninguna ecuación. Ocho resolvieron el problema correctamente, 30 obtuvieron un resultado incorrecto y los otros 5 no resolvieron el problema.

Cuadro 4.13 Errores por ecuación que cometen estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado.

| Tipo de ecuación<br>Errores   | $43 + x = 179$ | $45 - x = -5$ | $4m = 16$ | $7k = 91$ | $21 / + 5 = -56$ | $18 m - 5=80$ | $\frac{x}{5} + 4 = 13$ | $\frac{x}{6} - 24 = 422$ | Frecuencia de errores |
|---|----------------|---------------|-----------|-----------|------------------|---------------|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición     | 8              | 11            | 0         | 0         | 13               | 6             | 6                      | 6                        | 50                    |
| Al confundir la inversa de la adición con la división                       | 2              | 0             | 0         | 0         | 0                | 0             | 0                      | 0                        | 2                     |
| Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción             | 0              | 0             | 14        | 13        | 0                | 0             | 0                      | 0                        | 27                    |
| Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división | 0              | 0             | 0         | 0         | 1                | 3             | 6                      | 5                        | 15                    |
| En la adición de números positivos o negativos                              | 0              | 1             | 0         | 0         | 12               | 0             | 1                      | 0                        | 14                    |
| En el orden de las operaciones al despejar la incógnita                     | 0              | 0             | 0         | 0         | 1                | 1             | 5                      | 5                        | 12                    |

(Continúa)



Cuadro 4.13 (Concluye)

| <div style="text-align: right;">Tipo de ecuación</div> <div style="text-align: left;">Errores</div> | $43 + x = 179$ | $45 - x = -5$ | $4m = 16$ | $7k = 91$ | $21 / + 5 = -56$ | $18 m - 5=80$ | $\frac{x}{5} + 4 = 13$ | $\frac{x}{6} - 24 = 422$ | Frecuencia de errores |
|---|----------------|---------------|-----------|-----------|------------------|---------------|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro                             | 0              | 7             | 0         | 0         | 5                | 0             | 0                      | 0                        | 12                    |
| al ignorar la incógnita   | 5              | 0             | 2         | 2         | 4                | 4             | 6                      | 6                        | 29                    |
| al ignorar datos  | 0              | 0             | 0         | 2         | 2                | 1             | 0                      | 0                        | 5                     |
| al no considerar las leyes de los signos  | 0              | 0             | 0         | 0         | 4                | 0             | 0                      | 0                        | 4                     |
| al no concluir el procedimiento   | 5              | 1             | 0         | 0         | 5                | 6             | 6                      | 5                        | 28                    |
| <div style="text-align: right;">Frecuencia de errores por ecuación</div>                            | 20             | 20            | 16        | 17        | 47               | 21            | 30                     | 27                       |                       |

Finalmente, en el inciso c), una ecuación que se esperaba que plantearan los estudiantes era  $\frac{x}{5} - 3 = 12$ , treintauno de los estudiantes no plantearon una ecuación para representar el problema y los otros 12 plantearon una ecuación pero fue incorrecta; es decir, ninguno de los participantes logró plantear una ecuación que representara al problema. Sólo ocho de los participantes no resolvieron el problema, los otros 35 intentaron resolverlo pero tuvieron incorrecto el resultado.

El error que tuvieron con mayor frecuencia los estudiantes de secundaria general al resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita fue con la inversa de la sustracción o adición, pues al pasar el coeficiente o termino independiente en el segundo miembro de la ecuación no utilizaron la operación inversa correspondiente (véase el cuadro 4.13).

De acuerdo con el cuadro 4.13 los estudiantes de secundaria general que participaron en esta investigación cometieron los siguientes errores de mayor a menor frecuencia. Recuérdese que fueron 43 estudiantes de secundaria general los que resolvieron las 8 ecuaciones del cuestionario B (reactivo 3). Cometieron 11 tipos de errores. Así, algunos estudiantes cometieron el mismo tipo de error en la resolución de distintas ecuaciones; por eso, por ejemplo, el primer tipo de error tiene una frecuencia de 50, según se observa en el cuadro 4.13, la cual es mayor que el número de estudiantes (43). También ocurrió que un mismo estudiante cometiera al menos dos tipos de errores distintos al resolver una misma ecuación (por ejemplo, la ecuación  $21/ + 5= -56$ , aparece con una frecuencia de errores de 47, la cual es mayor que 43, que fue el número de estudiantes que participó).

I (Frecuencia: 50)

1.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición.

II (Frecuencia: 29)

2.- Al ignorar la incógnita.

III (Frecuencia: 28)

3.- Al no concluir el procedimiento.

IV (Frecuencia: 27)

4.- Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción.

V (Frecuencia: 15)

5.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.

VI (Frecuencia: 14)

6.- En la adición de números positivos o negativos.

VII (Frecuencia: 12)

7.- En el orden de las operaciones al despejar la incógnita.

8.- Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro.

VIII (Frecuencia: 5)

9.- Al ignorar datos en la resolución.

IX (Frecuencia: 4)

10.- Al no considerar las leyes de los signos.

X (Frecuencia: 2)

11.- Al confundir la inversa de la adición con la división.

Se calculó el índice de dificultad de los reactivos 3 y 4, para calcular el índice de dificultad de cada reactivo se utilizó la fórmula  $100 \left(1 - \frac{n_1}{n}\right)$ , donde  $n$ : es el número de participantes y  $n_1$ : es el número de respuestas correctas por reactivo. La escala que se utilizó para el índice de dificultad es la siguiente: de 0 a 20 muy fácil, de 21 a 40 fácil, de 41 a 60 dificultad moderada, de 61 a 80 difícil y de 81 a 100 muy difícil.

De acuerdo con el cuadro 4.12 se observa que la ecuación en la que los participantes cometieron más errores fue la del inciso 3e:  $21 / + 5 = -56$ , con el índice de dificultad de 88 y se ubicó en el nivel “muy difícil”. La ecuación que le siguen en la que los participantes cometieron más errores fue la ecuación del inciso 3g:  $\frac{x}{5} + 4 = 13$  y después la ecuación del inciso 3h:  $\frac{x}{6} - 24 = 422$  ambas ecuaciones se ubicaron en el nivel de dificultad “muy difícil” (véase el cuadro 4.14).

Cuadro 4.14. Índice de dificultad por incisos del reactivo 3

| Reactivo             | 3a                  | 3b                  | 3c                  | 3d                  | 3e               | 3f                  | 3g                     | 3h                       |
|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|------------------|---------------------|------------------------|--------------------------|
| Ecuación             | $43 + x = 179$      | $45 - x = -5$       | $4m = 16$           | $7k = 91$           | $21 / + 5 = -56$ | $18 m - 5=80$       | $\frac{x}{5} + 4 = 13$ | $\frac{x}{6} - 24 = 422$ |
| Total de aciertos    | 23                  | 19                  | 24                  | 21                  | 5                | 19                  | 8                      | 8                        |
| Índice de dificultad | 47                  | 56                  | 44                  | 51                  | 88               | 56                  | 81                     | 81                       |
| Nivel de dificultad  | dificultad moderada | dificultad moderada | dificultad moderada | dificultad moderada | muy difícil      | dificultad moderada | muy difícil            | muy difícil              |

En el cuadro 4.15 se observa que solo siete participantes planearon la ecuación  $5800 - x = 4300$  correspondiente al problema 4a; dos participante

plantearon la ecuación  $2x + x = 39$  del problema 4b y ningún participante logró plantear la ecuación  $\frac{x}{5} - 3 = 12$  del problema 4c por lo que el nivel de dificultad de estos tres reactivos fueron “muy difíciles”. Sin embargo, como ya se ha comentado previamente, con sus propios procedimientos, veinticinco participantes resolvieron el problema 4a; ocho resolvieron el problema 4b y ningún participante resolvió el problema 4c.

Cuadro 4.15. Índice de dificultad por incisos del reactivo 4

| Reactivo             | 4a                | 4aa                 | 4b            | 4bb         | 4c                     | 4cc         |
|----------------------|-------------------|---------------------|---------------|-------------|------------------------|-------------|
| Ecuación             | $5800 - x = 4300$ |                     | $2x + x = 39$ |             | $\frac{x}{5} - 3 = 12$ |             |
| Total de aciertos    | 7                 | 25                  | 2             | 8           | 0                      | 0           |
| Índice de dificultad | 84                | 42                  | 95            | 81          | 100                    | 100         |
| Nivel de dificultad  | muy difícil       | dificultad moderada | muy difícil   | muy difícil | muy difícil            | muy difícil |

#### Comparación de resultados

En este apartado se presenta una comparación de los datos obtenidos mediante los cuestionarios con los que se detectaron errores que cometían estudiantes del INEA y estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Una de las preguntas planteadas para esta investigación es: ¿Qué nociones tienen jóvenes y adultos que estudian en el INEA y estudiantes de secundaria general acerca de las ecuaciones de primer grado? Para responder a esta interrogante, en el cuestionario para detectar los errores que cometían estudiantes en la resolución de ecuaciones de primer grado se incluyeron las preguntas: ¿Qué entiendes por ecuación? y ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado? Se encontró que la mayoría de alumnos del INEA que participaron en la investigación definían a las ecuaciones como realizar o resolver problemas y operaciones matemáticos; sólo dos de los participantes anotaron las palabras *incógnita* y *variable*. Sin embargo, ninguno de los participantes anotó algún componente de la definición de *ecuación* que se ofrece en el módulo *Operaciones avanzadas*; tampoco mencionaron características de las ecuaciones de primer grado.

Por otra parte, de los 43 alumnos de secundaria general que participaron en la investigación, 32.5% anotó una definición correcta de ecuación, y algunos de ellos incluyeron el término *ecuación lineal* para referirse a las ecuaciones de primer grado.

Si a cada estudiantes se le asignara una calificación en una escala del 1 al 10 en sus respuestas a los reactivos 3 y 4 del cuestionario B, que son resolución y problemas de ecuaciones de primer grado, el promedio de las calificaciones de los estudiantes del INEA sería de 6.1 (véase el apéndice M), mientras que el promedio de las calificaciones de los estudiantes de secundaria general sería de 2.7 (véase el apéndice N). Si se elimina el reactivo 4, que son problemas de ecuaciones de primer grado, el promedio de las calificaciones de los estudiantes de INEA sería de 7.4,

mientras que el promedio de las calificaciones de estudiantes de secundaria general sería de 3.7.

En el cuadro 4.16 se presentan el nivel de dificultad de los incisos del reactivo 3 de los participantes del INEA y de secundaria general.

Cuadro 4.16 Comparación de los niveles de dificultad del reactivo 3

| Reactivo |                          | Nivel de dificultad |                     |
|----------|--------------------------|---------------------|---------------------|
|          |                          | INEA                | Secundaria general  |
| 3a       | $43 + x = 179$           | muy fácil           | dificultad moderada |
| 3b       | $45 - x = -5$            | dificultad moderada | dificultad moderada |
| 3c       | $4m = 16$                | muy fácil           | dificultad moderada |
| 3d       | $7k = 91$                | fácil               | dificultad moderada |
| 3f       | $18m - 5 = 80$           | fácil               | dificultad moderada |
| 3g       | $\frac{x}{6} - 24 = 422$ | fácil               | muy difícil         |
| 3h       | $\frac{x}{5} + 4 = 13$   | fácil               | muy difícil         |

Como se observa en el cuadro 4.16 los índices de dificultad en la resolución de las ecuaciones de los participantes del INEA se ubican en los rangos de “muy fácil” a “dificultad moderada”, mientras que los índices de dificultad en la resolución

de las ecuaciones de los participantes de secundaria general se ubican en los rangos de “dificultad moderada” a “muy difíciles”. Los estudiantes del INE tuvieron “dificultad moderada” únicamente en dos incisos (3b y 3c), mientras que los estudiantes de secundaria general tuvieron “dificultad moderada” en 5 de los 8 incisos, los 3 restantes fueron “muy difíciles”. Para los otros del INEA 4 de los incisos restantes fueron “fáciles”, y los otros dos “muy fáciles”. Así, para estudiantes de secundaria general todos los incisos fueron difíciles y para los estudiantes del INEA únicamente los dos incisos mencionados fueron moderadamente difíciles.

Los estudiantes del INEA (9) cometieron los siguientes errores de mayor a menor frecuencia, en la resolución de las ecuaciones planteadas en los ejercicios.

I (Frecuencia: 7; 78%)

- 1.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición.
- 2.- Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro.

II (Frecuencia: 4; 44%)

- 3.- Al no concluir el procedimiento.

III (Frecuencia: 3; 33%)

- 4.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.

IV (Frecuencia: 2; 22%)

- 5.- Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción.

V (Frecuencia: 1; 11%)

- 6.- En la adición de números positivos o negativos.
- 7.- Al transformar números fraccionarios a decimales.



8.- En el orden de las operaciones al despejar la incógnita.

9.- Al ignorar la incógnita.

Los estudiantes de secundaria general (43) cometieron los siguientes errores de mayor a menor frecuencia, en la resolución de las ecuaciones planteadas en los ejercicios.

I (Frecuencia: 50)

1.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición.

II (Frecuencia: 29)

2.- Al ignorar la incógnita.

III (Frecuencia: 28)

3.- Al no concluir el procedimiento.

IV (Frecuencia: 27)

4.- Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción.

V (Frecuencia: 15)

5.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.

VI (Frecuencia: 14)

6.- En la adición de números positivos o negativos.

VII (Frecuencia: 12)

7.- En el orden de las operaciones al despejar la incógnita.

8.- Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro.

VIII (Frecuencia: 5)

9.- Al ignorar datos en la resolución.

IX (Frecuencia: 4)

10.- Al no considerar las leyes de los signos.

X (Frecuencia: 2)

11.- Al confundir la inversa de la adición con la división.

Ambos tipos de estudiantes, como se puede observar, coinciden en los cuatro errores más frecuentes: al no utilizar la operación inversa correspondiente de la sustracción o de la adición, al no concluir el procedimiento para obtener el valor de la incógnita, al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o de la división y al confundir la inversa de la multiplicación de la sustracción. Otro error frecuente de los estudiantes del INEA consiste en ignorar el signo menos de término independiente del segundo miembro de la ecuación (7/9); siendo la frecuencia de este error en estudiantes de secundaria general 12/43. Por otra parte, un error frecuente de estudiantes de secundaria general consistió en ignorar la incógnita (29/43), siendo la frecuencia de este error en estudiantes del INEA 1/9.

Las ecuaciones en las que cometieron más errores los estudiantes del INEA fueron 3e)  $21 l + 5 = -56$ , 3b)  $45 - x = -5$ , 3f)  $18 m - 5 = 80$  y 3g)  $\frac{x}{6} - 24 = 422$ . Los estudiantes de secundaria general cometieron más errores en las ecuaciones 3e)  $21 l + 5 = -56$ , 3h)  $\frac{x}{5} + 4 = 13$ , 3g)  $\frac{x}{6} - 24 = 422$  y 3f)  $18 m - 5 = 80$ . Como se puede observar, ambos tipos de estudiantes coincidieron en cometer errores con más frecuencia en tres de las cinco ecuaciones.

Por otra parte, fueron pocos los participantes, del INEA como de secundaria general, que lograron plantear las ecuaciones correspondientes a los problemas incluidos en el cuestionario. Los niveles de dificultad de ambos tipos de estudiantes se ubicaron en “muy difíciles” a excepción del reactivo 4a del INEA, que se ubicó en “difícil” (véase el cuadro 4.17). Sin embargo, la mayoría de los estudiantes del INEA logró resolver los problemas sin plantear una ecuación por lo que el nivel de dificultad de los reactivos 4aa y 4bb se ubicó en “muy fácil”, y el de 4cc en “moderadamente difícil”. En contraste la mayoría de los estudiantes de secundaria general no resolvió los problemas; los niveles de dificultad de este tipo de estudiantes se ubicaron para 4aa en “moderadamente difícil” y para 4bb y 4cc en “muy difícil”.

Cuadro 4.17 Comparación de los niveles de dificultad del reactivo 4

| Reactivo   | 4a                | 4aa                 | 4b            | 4bb         | 4c                     | 4cc                  |
|--|-------------------|---------------------|---------------|-------------|------------------------|----------------------|
| Ecuación   | $5800 - x = 4300$ |                     | $2x + x = 39$ |             | $\frac{x}{5} - 3 = 12$ |                      |
| Nivel de dificultad de los reactivos para el INEA            | Difícil           | Muy fácil           | Muy difícil   | Muy fácil   | Muy difícil            | Medianamente difícil |
| Nivel de dificultad de los reactivos para secundaria general | muy difícil       | dificultad moderada | muy difícil   | muy difícil | muy difícil            | muy difícil          |

Los participantes del INEA poseen estrategias que les permiten resolver los problemas sin plantear ecuaciones de primer grado y que los estudiantes de secundaria general no han desarrollado.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones que se desprenden de este trabajo de investigación. Además, se dan algunas recomendaciones.

En esta investigación se trabajó con sujetos que estudiaban en el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA), cuyas edades iban de los 15 a los 54 años. En diversos documentos del INEA y de la Secretaría de Educación Pública revisados para esta tesis, no se localizó una definición de lo que es un adulto. Sin embargo, en algunos documentos se menciona que la educación de adultos está destinada para personas mayores de 15 años o personas que se encuentran en rezago educativo. De tal modo que se considera a los jóvenes dentro del grupo de los adultos.

En esta investigación se establecieron tres objetivos específicos, el primero de ellos fue comparar el contenido de ecuaciones de primer grado de los programas de matemáticas de educación secundaria general de 2006 y de 2011, y del módulo *Operaciones avanzadas* del INEA. Se encontró que el contenido referente a ecuaciones de primer grado en los programas de matemáticas de educación secundaria de 2006 y de 2011 coincide en general aunque no la forma en que está

estructurado. Las diferencias que se encontraron fueron que en los programas de 2006 aparecen orientaciones didácticas y actividades complementarias como un recurso para el maestro y en los programas de 2011 desaparecen, incorporándose las competencias.

En la comparación de los programas de 2011 con el módulo *Operaciones avanzadas* se muestra que los tipos de ecuaciones de primer grado en el INEA son  $x + a = b$ ;  $ax = b$ ;  $\frac{x}{a} = b$ , y  $ax + c = b$ , y en secundaria general son los mismo tipos pero además incluyen del tipo  $ax + b = cx + d$ . Tanto en el INEA como en secundaria general los tipos de números en las ecuaciones de primer grado son enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos. Cabe destacar que las ecuaciones de primer grado con números negativos y fraccionarios en el módulo *Operaciones avanzadas* sólo parecen en la autoevaluación y además son pocos los ejercicios.

El segundo de los objetivos fue conocer qué nociones tienen estudiantes del INEA y de secundaria general acerca de las ecuaciones de primer grado con una incógnita de tipo aritmético. La mayoría de estudiantes del INEA que participó en esta investigación definía a las ecuaciones como “realizar o resolver problemas y operaciones matemáticos”. Sólo dos de los participantes anotaron las palabras *incógnita* y *variable* en sus definiciones. Sin embargo, ninguno de los participantes anotó algún componente de la definición de *ecuación* que se ofrece en el módulo *Operaciones avanzadas*; tampoco mencionaron características de las ecuaciones de primer grado.

En cuanto a los estudiantes de secundaria general que participaron en la investigación, 32.5% anotó una definición correcta de ecuación; algunos incluyeron el término *ecuación lineal* para referirse a las ecuaciones de primer grado. En el resto de las definiciones los participantes incluyeron términos como incógnita, letra, despeje y variable; sin embargo, algunos de los participantes que incluyeron estos términos en sus respuestas, no definieron correctamente qué es una ecuación. Cabe destacar que tres participantes escribieron que las ecuaciones de primer grado sólo implica sumas y restas.

El último de los objetivos fue comparar el desempeño de estudiantes del INEA y estudiantes de secundaria general en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita de tipo aritmético. Mediante un cuestionario con ejercicios y problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita se identificaron errores que cometen los estudiantes del INEA y estudiantes de secundaria general en la resolución de los mismos. Si a cada estudiantes se le asignara una calificación en una escala del 1 al 10 en sus respuestas a los reactivos 3 y 4 del cuestionario B, que son ejercicios y problemas de ecuaciones de primer grado, el promedio de las calificaciones de los estudiantes del INEA sería de 6.1, mientras que el promedio de las calificaciones de los estudiantes de secundaria general sería de 2.7, no obstante que el estudio de las ecuaciones de primer grado se hace en primer y segundo grados.

Los estudiantes del INEA cometieron los siguientes cinco errores de mayor a menor frecuencia, en la resolución de las ecuaciones planteadas en los ejercicios.

1.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición.

- 2.- Al ignorar el signo menos del término independiente del segundo miembro.
- 3.- Al no concluir el procedimiento.
- 4.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.
- 5.- Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción.

De los nueve estudiantes del INEA que participaron en esta investigación solamente 3 lograron plantear la ecuación correspondiente al primer problema, y ningún participante planteó una ecuación para los problemas 2 y 3 del reactivo 4 del cuestionario. Sin embargo, la mayoría de ellos logró resolver dichos problemas (8 el primer problema, 8 el segundo problema y 5 el tercer problema) sin plantear una ecuación. Es decir, estos estudiantes no tuvieron dificultades para comprender los problemas y los resolvieron mediante sus propios procedimientos, que no implicaban plantear una ecuación de primer grado. Cabe destacar que las situaciones de los problemas que se presentaron en el cuestionario se basaron en lo planteado en el módulo *Operaciones avanzadas*; esto es, las situaciones en el material didáctico del INEA se pueden manejar sin tener que recurrir al uso del álgebra. Debe señalarse que la unidad 4 del módulo *Operaciones avanzadas* no presenta ejercicios de ecuaciones de primer grado cuya solución sea un número negativo; sólo en la autoevaluación de la unidad se presentan dos ejercicios cuyas soluciones son números negativos.

Los estudiantes de secundaria general cometieron los siguientes cinco errores de mayor a menor frecuencia, en la resolución de las ecuaciones planteadas en los ejercicios.

- 1.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición.
- 2.- Al ignorar la incógnita.
- 3.- Al no concluir el procedimiento.
- 4.- Al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción.
- 5.- Al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.

De los problemas incluidos en el reactivo 4 del cuestionario, únicamente 7 de los 43 participantes lograron plantear las ecuaciones correspondientes al primer problema, 2 al del segundo problema y ninguno la del tercero. Por otra parte, 25 resolvieron el primer problema, 8 el segundo problema y ninguno el tercer problema utilizando sus propios métodos.

Así, en proporción, la mayoría de los estudiantes del INEA resolvieron los problemas, sólo  $\frac{1}{3}$  de los participantes logró plantear la ecuación para el problema 1; sin embargo, del resto que resolvió los problemas utilizaron sus propios procedimientos. En contraste, 25 de los 43 estudiantes de secundaria general que participaron en la investigación plantearon una ecuación para el primer problema, 2 para el segundo y ninguno para el tercero. Además, 25 resolvieron el primer problema, 2 el segundo y ninguno el tercero.

En términos generales, en los incisos de resolución de ecuaciones del cuestionario se identificaron nueve errores cometidos por los participantes del INEA y once errores por los participantes de secundaria general. De estos errores cometidos



por participantes del INEA y participantes de secundaria general son ocho errores que cometieron ambos tipos de participantes. Un estudiante del INEA cometió error al transformar mal un número fraccionario a decimales; este error no pareció en estudiantes de secundaria general. Los tres errores con menor frecuencia que cometieron estudiantes de secundaria general y que no aparecen en estudiantes del INEA fueron: al ignorar datos en la resolución (frecuencia: 5), al no considerar las leyes de los signos frecuencia y al confundir la inversa de la adición con la división (frecuencia: 2).

De los cinco errores más frecuentes que cometieron ambos tipos de participantes fueron cuatro los que cometieron en común: a) al utilizar la operación inversa incorrecta de la sustracción o adición, b) al no concluir el procedimiento, c) al confundir la inversa de la multiplicación con la sustracción y, d) al utilizar la operación inversa incorrecta de la multiplicación o división.

Los errores que cometieron ambos tipos de participantes tienen que ver con la operatividad (operaciones), con ignorar el signo menos, con la omisión de datos y con ignorar la incógnita. Además, fueron pocos los participantes del INEA y los participantes de secundaria general que plantearon una ecuación para representar los problemas del cuestionario. Sin embargo, los participantes del INEA poseían estrategias que les permitieron resolver los problemas sin plantear o utilizar ecuaciones, estrategias que los estudiantes de secundaria general no habían desarrollado o no las mostraron.

Vale la pena resaltar que el primer y único acercamiento con las ecuaciones de primer grado que tienen los jóvenes y adultos que estudian en el INEA es en el

estudio del módulo *Operaciones avanzadas*, mientras que los estudiantes de secundaria general estudian las ecuaciones de primer grado en dos momentos durante sus estudios: en el bloque III de primer grado y en el bloque III de segundo grado, El estudio de las ecuaciones de primer grado es más amplio en secundaria genera y con esto se esperaría fuese mejor el desempeño de estudiantes de secundaria genera.

La información y las evidencias presentadas en este trabajo servirán a los asesores educativos y demás personal del INEA para enterarse de una parte importante de la problemática de quienes estudian en el INEA en cuanto a su aprendizaje en la resolución de ecuaciones de primer grado. Cabe señalar que se carecen de propuestas de actividades que ayuden a los estudiantes a enfrentar las dificultades que han mostrado mediante los errores analizados en esta tesis.

Así, además de las actividades que se presentan en el módulo *Operaciones avanzadas*, los asesores deben incluir ejercicios que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades para plantear ecuaciones de primer grado y que faciliten la comprensión de conceptos y procedimientos en la resolución de ecuaciones de primer grado. El álgebra implicada en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita en el nivel educativo abordadas en esta tesis, corresponde a los inicios de comprensión de que es una herramienta de análisis. Particularmente, debiera ponerse énfasis en el desarrollo de la reversibilidad de pensamiento, lo cual se puede llevarse a cabo con el planteamiento de ejemplos sencillos correspondientes a esquemas como:

- Si  $a - x = b$  entonces  $a = b + x$  o  $a - b = x$

- Si  $\frac{x}{a} = c$  entonces  $x = ac$ .

Particularmente se recomienda que se diversifiquen las muestras que se tomen, con fines de investigación, de estudiantes de secundaria general. También será conveniente llevar a cabo un diagnóstico sobre operatividad y operaciones inversas para determinar con mayor precisión otros tipos de errores que no sean propiamente de operatividad.

En cuanto al INEA, con base en las evidencias presentadas en esta tesis, resulta claro que el modulo *Operaciones avanzadas* requiere de una revisión y de una reformulación, particularmente en el contenido de ecuaciones de primer grado.

Desde luego, cabe señalar que se requiere de mayor apoyo institucional para contar con mejores condiciones en el desarrollo de futuras investigaciones relacionadas con el tema de esta tesis.

## Referencias

- Aguilar R., M. A. y D. Flores V., 2009, *El aprendizaje en tercero de secundaria en México*, INEE, México.
- Alarcón J., B., E. Bonilla R., R. Nava A., T. Rojano C. y R. Quintero, 2000, *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*, SEP, México.
- Alonso F, C. Barbero, I. Fuentes, A. Azcárate, J. Dozagarat, S. Gutiérrez, M. Ortiz, V. Rivire y C. Veiga, 1993, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Síntesis, Madrid.
- Álvarez M., G. (coord.), 1994, *Objetivos y estructura del sistema educativo mexicano (cap.4 de Informe sobre el sistema educativo mexicano)*, OIE, Madrid. (Obtenido en <http://www.oei.es/quipu/mexico>, el 11 de noviembre de 2015.)
- Amador G., M. E., 2006 (3.<sup>a</sup> ed.), *Operaciones avanzadas*, INEA, México.
- Amador G., M. E., 2007, *Operaciones avanzadas. Folleto de juegos*, INEA, México.
- Amador G., M. E., 2010, *Información y gráficas*, INEA, México.
- Amador G., M. E., 2011, *Operaciones avanzadas. Lecturas de matemáticas*, INEA, México.

- Aravedo R., L., S. E. Mendoza O. y G. Sánchez M. (coords.), 2011, *Para el asesor del MEVyT*, INEA, México. (Obtenido en [http://www.conevyt.org.mx/cursos/cursos/asesor\\_v3](http://www.conevyt.org.mx/cursos/cursos/asesor_v3), el 21 de abril de 2015.)
- Ávila, A., 2003 (primavera), Matemáticas y educación de jóvenes y adultos, *Decisio*, pp. 5-7. (Obtenido en [http://www.crefal.edu.mx/decisio/images/pdf/decisio\\_4/decisio4\\_saber1.pdf](http://www.crefal.edu.mx/decisio/images/pdf/decisio_4/decisio4_saber1.pdf) el 30 de mayo de 2016.)
- Ávila D., P y M. A. Garcia D., 2000, Matemáticas, cambio social y formación de personas adultas, en J. M'Goñi (coord.), *El currículum de matemáticas en el siglo XXI*, Graó, Barcelona, pp. 101-114.
- Castro M., J. de D. (coord.), 2011, *A 30 años de su creación, semblanza de la labor del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos*, INEA, México. (Obtenido en <http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/inea/frames.asp?page=36&id=390>, el 6 de junio de 2015.)
- Cedillo Á., T. E., V. Cruz O., E. Vega R. y R. Cambray N., 2006, *Ecuaciones de primer grado*, BID-UPN, México. (Módulo 6 de la serie "Enseñanza de las matemáticas", sección "Álgebra".)
- Código Civil Federal*, 2013, México. (Obtenido en [http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/2\\_241213.pdf](http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/2_241213.pdf), el 5 julio de 2015.)
- Cortina M., J. L. y M. E. Amador G., 2010a, *Figuras y Medidas*, INEA, México.
- Cortina M., J. L. y M. E. Amador G., 2010b, *Fracciones y porcentajes*, INEA, México.
- Espinosa H., P., S. García P. y M. A. García J., 2000, *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria*, SEP, México.

- FitzSimons, G. E., 2002, *What counts as mathematics? Technologies of power in adult and vocational education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- FitzSimons, G. E., 2007, Exclusión y matemáticas: la interrelación entre la historia, las matemáticas y la educación para personas adultas que vuelven a estudiar, en J. Giménez (coord.), *Educación matemática y exclusión*, Graó, Barcelona, pp. 103-128.
- González B., R. E., M. R. Medina B., E. Roldán E. y L. Solís B, 2002, *Los números*, INEA, México.
- Kieran C. y E. Filloy, 1989, El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 7, núm.3, pp. 229-240.
- Lehmann, C. H., 1979, *Álgebra*, Limusa, México. (Versión en castellano de: C. H. Lehmann, 1962, *College Algebra*, John Wiley & Sons, New York.; tr. T. de Hoyos.)
- Ley General de Educación*, 2015, México. (Obtenido en <http://www.ordenjuridico.gob.mx/leyes.php>, el 7 de junio de 2015.)
- Limón S., A., M. E. Ramírez R. y A. L. C. Díaz L., 2011, *Cuentas útiles*, INEA, México.
- Merriam, S. B. y R. G. Brockett, 1997, *The profession and practice of adult education: An introduction*, Jossey-Bass, San Francisco.
- Mochón S., C., T. Rojano C. y S. Ursini L., 2000, *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, SEP, México.
- Organización de las Naciones Unidas (ONU), 1976, Conferencia general para la Educación, la Ciencia y la Cultura, Nairobi.

- Palarea M., M. M., 1998, *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en algebra por alumnos de 12 a 14 años*, Universidad de Laguna, Madrid. (Tesis de doctorado)
- Quintana C., J. M. y F. Sanz F., 1994, Fundamentos de la educación de personas adultas, en F. Sanz F. (dir.), *La formación en educación de personas adultas*, Tomo I, UNED-MEC, Madrid, pp. 9-62.
- RAE (Real Academia Española), 2014, *Diccionario de la lengua española* (23.<sup>a</sup> ed.), Espasa Libros–Planeta mexicana, México.
- Sarrate C., M. L., 2002, Aprender en la edad adulta, en E. López-Barajas (coord.), *La educación de personas adultas: Reto de nuestros tiempos*, Dykinson, Madrid, pp. 95-99.
- Ruano M., R., M. M. Socas R. y M. M. Palarea M., *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra*, PNA, vol. 2, núm. 2, pp.61-67.
- Schmelkes, S. (coord.), 2000a, *Conceptos, política y evaluación en educación de adultos*, Limusa-Noriega, México.
- Schmelkes, S. (coord.) 2000b, *Documentos internacionales sobre educación de adultos*, Limusa-Noriega, México.
- SEP (Secretaría de Educación Pública), 1976, Documentos sobre la Ley Nacional de Educación para Adultos, SEP, México. (Obtenido en <http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/inea/frames.asp?page=36&id=084>, el 5 de junio de 2015.)

- SEP (Secretaría de Educación Pública), 2006, *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*, SEP, México.
- SEP (Secretaría de Educación Pública), 2011, *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas*, SEP, México.
- SEP (Secretaría de Educación Pública), 2014, Reglas de operación del Programa atención a la demanda de educación para adultos (INEA) para el ejercicio fiscal 2015, México. (Acuerdo número 17/12/14 publicado en el *Diario Oficial*, miércoles 2 de diciembre de 2014, Cuarta Sección, pp. 1-63.)
- SEP (Secretaría de Educación Pública), s/a, *La Educación de Adultos en México, realidades y perspectivas. Cuaderno de trabajo en Educación de Adultos*.  
(Obtenido en <http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/inea/frames.asp?page=36&id=080>, el 7 de junio de 2015.)
- Socas M., M. Camacho, M. Palarea y J. Hernández, 1996, *Iniciación al álgebra*, Síntesis, Madrid.
- Socas R., M.M., 1997, *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en secundaria*, Universidad de la Laguna, Madrid.
- Solís B., L., M. A. García J., R.E. González B., M. R. Medina B. y E. Roldán E., 2004 (3.<sup>a</sup> ed.), *Matemáticas para empezar*, INEA, México.



### Bloque 3

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Resuelvan problemas que impliquen efectuar divisiones con números decimales.
2. Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas:  $x + a = b$ ;  $ax + b = c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números naturales y/o decimales.
3. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo de porcentajes o de cualquier término de la relación: Porcentaje = cantidad base  $\times$  tasa.
4. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo de cualquiera de los términos de las fórmulas para calcular el área de triángulos, romboides y trapecios. Asimismo, que expliquen la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.
5. Interpreten y construyan gráficas de barras y circulares de frecuencias absolutas y relativas.
6. Comparen la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos aleatorios para tomar decisiones.

**Conocimientos y habilidades****Orientaciones didácticas**

3.1. Resolver problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos.

Son dos los componentes fundamentales de esta habilidad: saber efectuar la operación que modela el problema e interpretar correctamente el resultado. El primer componente implica que los alumnos enfrenten una diversidad de casos en los que sea pertinente usar la propiedad de multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número, a sabiendas de que el resultado no cambia.

Esta propiedad se vincula con la equivalencia de fracciones y con la idea de proporción.

El segundo componente se refiere al significado de los números decimales, que se ha trabajado ampliamente en la primaria, pero vale la pena repasar porque muy probablemente muchos alumnos siguen pensando que, por ejemplo, 2.5 horas son dos horas con cinco minutos, cuando en realidad se trata de dos horas con treinta minutos.

A diferencia de la división con números fraccionarios, en este caso hay muchos problemas cercanos al entorno de los alumnos que ellos mismos pueden plantear. Por ejemplo:

- Una cinta elástica puede alargarse hasta 3.3 veces su longitud original. Cuando está totalmente alargada alcanza una longitud de 13.86 metros. ¿Cuál es su longitud normal?
- Una canica pesa 0.026 kg. ¿Cuántas canicas tendrá una bolsa que pesa 1.222 kg? (suponemos que todas las canicas pesan lo mismo).

**Conocimientos y habilidades****Orientaciones didácticas**

3.2. Resolver problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma  $x + a = b$ ;  $ax = b$ ;  $ax + b = c$ , utilizando las propiedades de la igualdad, con  $a$ ,  $b$  y  $c$  números naturales o decimales.

Las ecuaciones son una herramienta básica para la resolución de problemas cuando los procedimientos aritméticos resultan poco eficaces. En este grado el esfuerzo debe enfocarse a que los alumnos logren identificar el valor desconocido del problema, lo representen con una literal, planteen la ecuación correspondiente, interpreten la ecuación como una expresión que sintetiza las relaciones entre los datos y la cantidad desconocida del problema y, finalmente, que sean capaces de resolver la ecuación. Hay que tener en cuenta que los alumnos se enfrentan por primera vez a la necesidad de traducir el texto del problema al código algebraico y a la resolución de ecuaciones. Se sugiere entonces planear una sucesión de actividades que favorezca el uso de procedimientos informales y poco a poco familiarice a los estudiantes con el uso de

las propiedades de la igualdad. Un ejemplo interesante del tipo de problemas que se pueden plantear es el siguiente:

\*SEP, 2006, pp. 41 y 43.

### Bloque 3

Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos:

1. Elaboren sucesiones de números con signo a partir de una regla dada.
2. Resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma:  $ax + b = cx + d$ ; donde los coeficientes son números enteros o fraccionarios, positivos o negativos.
3. Expresen mediante una función lineal la relación de dependencia entre dos conjuntos de cantidades.
4. Establezcan y justifiquen la suma de los ángulos internos de cualquier polígono.
5. Argumenten las razones por las cuales una figura geométrica sirve como modelo para recubrir un plano.
6. Identifiquen los efectos de los parámetros  $m$  y  $b$  de la función  $y = mx + b$ , en la gráfica que corresponde.

Eje

Tema

Subtema

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Significado y uso de las literales

PATRONES Y FÓRMULAS

### Conocimientos y habilidades

3.1. Construir sucesiones de números con signo a partir de una regla dada. Obtener la regla que genera una sucesión de números con signo.

### Orientaciones didácticas

Para el desarrollo de esta habilidad es importante alentar a los alumnos a buscar regularidades, a formularlas y a producir argumentos para validarlas. No se trata de que el maestro enseñe las fórmulas o reglas para que los alumnos las apliquen, sino de que éstos tengan la oportunidad de ensayar, corregir y validar sus propuestas. A continuación se enuncian algunos ejemplos de problemas que se pueden plantear:

- La regla de una sucesión de números con signo es  $n - 3$ . ¿Cuáles son los primeros diez números con signo de la sucesión? (Debe recordarse que en los problemas de sucesiones,  $n$  representa la posición de un número cualquiera en la sucesión)
- Obtener la regla que genera la sucesión  $-2.5, -1.5, -0.5, +0.5, +1.5$

Subtema

ECUACIONES

### Conocimientos y habilidades

3.2. Resolver problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma:  $ax + bx + c = dx + ex + f$  y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativos.

### Orientaciones didácticas

Una vez que los alumnos encuentran sentido a las ecuaciones, porque con esta herramienta pueden solucionar una gran variedad de problemas, es importante que consoliden la técnica para resolverlas. Conviene que al principio los alumnos se apoyen en las propiedades de la igualdad. Posteriormente podrán usar la transposición de términos, con objeto de hacer más eficiente la resolución de ecuaciones. Se sugiere utilizar el modelo de la balanza como un apoyo concreto para dar sentido a las propiedades de la igualdad, teniendo cuidado de planear la selección de ejemplos de ecuaciones que se pueden modelar con ese recurso, con objeto de evitar aquellos en los que resulta inadecuado, por ejemplo, en los que intervienen números negativos o el valor de la incógnita es negativo, como en  $2n + 5 = -1$

Por otra parte, se sugiere resaltar el papel que desempeñan las ecuaciones como modelos para resolver situaciones problemáticas. En este sentido, un ejercicio útil consiste en pedir a los alumnos que propongan ejemplos de situaciones que puedan modelarse con una ecuación como:  $2(x - 5) = 18$

\*SEP, 2006, pp. 83 y 85.

Apéndice C. Ecuaciones de primer grado en el bloque III de primer grado de educación secundaria en los programas de estudio de 2011\*

Bloque III

| COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| APRENDIZAJES ESPERADOS  | EJES   |  |  |
|   | SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO  | FORMA, ESPACIO Y MEDIDA  | MANEJO DE LA INFORMACIÓN   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Resuelve problemas que implican efectuar multiplicaciones o divisiones con fracciones y números decimales.</li> <li>Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de las formas: <math>x + a = b</math>; <math>ax = b</math> y <math>ax + b = c</math>, donde <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math> son números naturales y/o decimales.</li> <li>Resuelve problemas que impliquen el cálculo de cualquiera de las variables de las fórmulas para calcular el perímetro y el área de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares. Explica la relación que existe entre el perímetro y el área de las figuras.</li> </ul> | <p><b>PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional.</li> <li>Resolución de problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos, utilizando el algoritmo convencional.</li> </ul> <p><b>PATRONES Y ECUACIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma <math>x + a = b</math>; <math>ax = b</math>; <math>ax + b = c</math>, utilizando las propiedades de la igualdad, con <math>a</math>, <math>b</math> y <math>c</math> números naturales, decimales o fraccionarios.</li> </ul> | <p><b>FIGURAS Y CUERPOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Construcción de polígonos regulares a partir de distintas informaciones (medida de un lado, del ángulo interno, ángulo central). Análisis de la relación entre los elementos de la circunferencia y el polígono inscrito en ella.</li> </ul> <p><b>MEDIDA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.</li> </ul> | <p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.</li> </ul> <p><b>NOCIONES DE PROBABILIDAD</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Anticipación de resultados de una experiencia aleatoria, su verificación al realizar el experimento y su registro en una tabla de frecuencias.</li> </ul> <p><b>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Lectura y comunicación de información mediante el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa.</li> </ul> |

\*SEP, 2006, p. 33.



Bloque IV

COMPETENCIAS QUE SE FAVORECEN: Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

| APRENDIZAJES ESPERADOS  | EJES  |  |  |
|---|---|--|--|
|   | SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO   | FORMA, ESPACIO Y MEDIDA  | MANEJO DE LA INFORMACIÓN   |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>Representa sucesiones de números enteros a partir de una regla dada y viceversa.</li> <li>Resuelve problemas que impliquen el uso de ecuaciones de la forma: <math>ax + b = cx + d</math>, donde los coeficientes son números enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.</li> <li>Identifica, interpreta y expresa relaciones de proporcionalidad directa o inversa, algebraicamente o mediante tablas y gráficas.</li> <li>Resuelve problemas que impliquen calcular, interpretar y explicitar las propiedades de la media y la mediana.</li> </ul> | <p><b>PATRONES Y ECUACIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Construcción de sucesiones de números enteros a partir de las reglas algebraicas que las definen. Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética de números enteros.</li> <li>Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: <math>ax + b = cx + d</math> y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.</li> </ul> | <p><b>MEDIDA</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Caracterización de ángulos inscritos y centrales en un círculo, y análisis de sus relaciones.</li> </ul> | <p><b>PROPORCIONALIDAD Y FUNCIONES</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Análisis de las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.</li> <li>Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: <math>y = ax + b</math>.</li> </ul> <p><b>ANÁLISIS Y REPRESENTACIÓN DE DATOS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolución de situaciones de medias ponderadas.</li> </ul> |

\*SEP, 2006, p. 42.



## Apéndice E. Guion de entrevista a asesores educativos

- ¿Cuánto tiempo lleva como asesor en el INEA?
- Por su experiencia, ¿qué módulo es el que más reprueban los alumnos de secundaria? ¿Por qué?
- Del contenido del módulo *Operaciones avanzadas*, ¿qué se les dificulta más? ¿Por qué?
- ¿A usted se le dificulta alguna parte o contenido del módulo?
- ¿Les ofrece el INEA capacitaciones de álgebra a los asesores? En caso afirmativo, se preguntará:
  - ¿Ha asistido a estas capacitaciones? ¿lo tratado en las capacitaciones lo aplica en sus asesorías?

Apéndice F. Cuestionario A

Nombre: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_

Sexo: \_\_\_\_\_ Ocupación: \_\_\_\_\_ Número de hijos: \_\_\_\_\_

1. ¿Te gustan las matemáticas?

a) Sí

b) No

¿Por qué?

2. ¿Estudiaste la secundaria general?

a) Sí

b) No

En caso de ser negativa la respuesta continúa en la pregunta 5

3. ¿Hasta qué grado estudiaste la secundaria?

a) Primero

b) Segundo

c) Tercero

4. ¿Te enseñaron a resolver ecuaciones?

a) Sí

b) No

5. ¿Cuánto tiempo llevas estudiando en el INEA?



6. ¿En qué modalidad estudias el módulo *Operaciones avanzadas*?
- a) Virtual
  - b) Físico
7. ¿Has presentado examen del módulo?
- a) Sí
  - b) No
8. ¿Cuántas veces?
9. ¿Asistes a asesorías?
- a) Sí
  - b) No
10. Cuando tienes dudas al resolver un problema ¿a quién le pides ayuda?
- a) A un asesor
  - b) A un familiar
  - c) Otro \_\_\_\_\_

## Apéndice G. Cuestionario B

Instrucciones: Lee detenidamente cada una de las preguntas y resuelve lo que se te pide, de ser necesario puedes ocupar hojas adicionales.

1.- Describe qué entiendes por ecuación.

2.- ¿Qué caracteriza a las ecuaciones de primer grado?

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones.

a)  $43 + x = 179$

b)  $45 - x = -5$

c)  $4 m = 16$

d)  $7 k = 91$

e)  $21 l + 5 = -56$

f)  $18 m - 5 = 80$

g)  $\frac{x}{5} + 4 = 13$

h)  $\frac{x}{6} - 24 = 422$

4.- Para cada uno de los problemas escribe una ecuación que lo represente y resuélvela.

a) Guillermo compró un celular de \$5800.00. Al pagar con tarjeta de crédito, le hicieron el descuento de una promoción, por lo cual sólo pagó \$4300.00 por el celular. ¿De cuánto dinero fue el descuento?

b) Ana tiene el doble de la edad de Sofía. Si la suma de las edades es 39, ¿cuántos años tiene Ana y cuántos Sofía?

c) Sobre Avenida Revolución hay un edificio, cuyo primer balcón se encuentra a una altura de 12 metros, y a una quinta parte de la altura del edificio menos 3 metros. ¿Cuál es la altura del edificio?

## Apéndice H. Carta de consentimiento para asesores educativos

Consentimiento para la participación en la entrevista de investigación sobre las dificultades en la resolución de ecuaciones de primer grado.

El propósito de la entrevista es obtener información para la investigación que tiene como objetivos identificar y analizar las dificultades que tienen los jóvenes y adultos, que estudian en el INEA, en la resolución de ecuaciones de primer grado en el módulo *Operaciones avanzadas*, así como identificar la percepción que tienen de las ecuaciones de primer grado. No existen riesgos conocidos asociados con la participación en este estudio. Su colaboración será determinante para cumplir los objetivos de la investigación mencionada.

Su participación es completamente voluntaria. Todos los datos que usted proporcione serán tratados confidencialmente y utilizados solo para propósitos de esta investigación. Todo lo encontrado será presentado en forma resumida en una tesis de licenciatura en pedagogía. Cualquier cita usada de la entrevista será reportada con la frase “de acuerdo con uno de los participantes”.

Yo, \_\_\_\_\_, acepto contestar este cuestionario de investigación. Se me ha explicado el proyecto y doy consentimiento para participar.

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Fecha

Investigadora:

Montserrat Sánchez Morales

Universidad Pedagógica Nacional

## Apéndice I. Carta de consentimiento para estudiantes del INEA

Consentimiento para la participación en el cuestionario de investigación sobre las dificultades en la resolución de ecuaciones de primer grado.

El propósito del cuestionario es obtener información para la investigación que tiene como objetivos identificar y analizar las dificultades que tienen los jóvenes y adultos, que estudian en el INEA, en la resolución de ecuaciones de primer grado en el módulo *Operaciones avanzadas*, así como identificar la percepción que tienen de las ecuaciones de primer grado. No existen riesgos conocidos asociados con la participación en este estudio. Su colaboración será determinante para cumplir los objetivos de la investigación mencionada.

Su participación es completamente voluntaria. Todos los datos que usted proporcione serán tratados confidencialmente y utilizados solo para propósitos de esta investigación. Todo lo encontrado será presentado en forma resumida en una tesis de licenciatura en pedagogía. Cualquier cita usada del cuestionario será reportada con la frase “de acuerdo con uno de los participantes”.

Yo, \_\_\_\_\_, acepto contestar este cuestionario de investigación. Se me ha explicado el proyecto y doy consentimiento para participar.

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Fecha

Investigadora:

Montserrat Sánchez Morales

Universidad Pedagógica Nacional

Apéndice J. Carta de consentimiento para estudiantes de secundaria general  
Consentimiento para la participación en el cuestionario de investigación sobre las  
dificultades en la resolución de ecuaciones de primer grado.

El propósito del cuestionario es obtener información para la investigación que tiene como objetivos identificar y analizar si los estudiantes de secundaria general tienen las mismas dificultades que tienen los jóvenes y adultos que estudian en el INEA, en la resolución de ecuaciones de primer grado. No existen riesgos conocidos asociados con la participación en este estudio. Su colaboración será determinante para cumplir los objetivos de la investigación mencionada.

Su participación es completamente voluntaria. Todos los datos que usted proporcione serán tratados confidencialmente y utilizados solo para propósitos de esta investigación. Todo lo encontrado será presentado en forma resumida en una tesis de licenciatura en pedagogía. Cualquier cita usada del cuestionario será reportada con la frase “de acuerdo con uno de los participantes”.

Yo, \_\_\_\_\_, acepto contestar este cuestionario de investigación. Se me ha explicado el proyecto y doy consentimiento para participar.

\_\_\_\_\_  
Firma

\_\_\_\_\_  
Fecha

Investigadora:

Montserrat Sánchez Morales

Universidad Pedagógica Nacional

Apéndice k. Prueba del Alfa de Cronbach para validar la confiabilidad del cuestionario B aplicado a estudiantes del INEA

|                       | 3a   | 3b   | 3c   | 3d   | 3e   | 3f   | 3g   | 3h   | 4a   | 4aa  | 4b   | 4bb  | 4c   | 4cc  | Total |   |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|---|
| 1                     | 1    | 0    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 8     | K: Número de ítems del instrumento            |
| 2                     | 1    | 0    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 1    | 7     |   |
| 3                     | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 11    |   |
| 4                     | 1    | 0    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 8     |   |
| 5                     | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 3     |   |
| 6                     | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 11    |   |
| 7                     | 1    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 8     |   |
| 8                     | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 10    |   |
| 9                     | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 1    | 11    |   |
| Total                 | 9    | 5    | 8    | 7    | 5    | 6    | 7    | 6    | 3    | 8    | 0    | 8    | 0    | 5    | 77    | $\sum S_i^2$ : Suma de varianzas de los ítems |
| Promedios             | 1.00 | 0.56 | 0.89 | 0.78 | 0.56 | 0.67 | 0.78 | 0.67 | 0.33 | 0.89 | 0.00 | 0.89 | 0.00 | 0.56 | 8.56  |   |
| Cuadrado de 1         | 0.00 | 0.31 | 0.01 | 0.05 | 0.20 | 0.11 | 0.60 | 0.11 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.31 | 0.31  |   |
| Cuadrado de 2         | 0.00 | 0.31 | 0.01 | 0.05 | 0.31 | 0.44 | 0.05 | 0.11 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.79 | 0.00 | 0.20 | 2.42  |   |
| Cuadrado de 3         | 0.00 | 0.20 | 0.01 | 0.05 | 0.20 | 0.11 | 0.05 | 0.11 | 0.44 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.31 | 5.98  |   |
| Cuadrado de 4         | 0.00 | 0.31 | 0.01 | 0.05 | 0.31 | 0.44 | 0.05 | 0.11 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.20 | 0.31  |   |
| Cuadrado de 5         | 0.00 | 0.31 | 0.79 | 0.60 | 0.31 | 0.44 | 0.60 | 0.44 | 0.44 | 0.79 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.31 | 30.86 |   |
| Cuadrado de 6         | 0.00 | 0.20 | 0.01 | 0.05 | 0.20 | 0.11 | 0.05 | 0.11 | 0.44 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.31 | 5.98  |   |
| Cuadrado de 7         | 0.00 | 0.20 | 0.01 | 0.60 | 0.31 | 0.11 | 0.05 | 0.44 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.20 | 0.31  |   |
| Cuadrado de 8         | 0.00 | 0.20 | 0.01 | 0.05 | 0.20 | 0.11 | 0.05 | 0.44 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.20 | 2.09  |   |
| Cuadrado de 9         | 0.00 | 0.20 | 0.01 | 0.05 | 0.20 | 0.11 | 0.05 | 0.11 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | 0.20 | 5.98  |   |
| Suma de cuadrados     | 0.00 | 2.22 | 0.89 | 1.56 | 2.22 | 2.00 | 1.56 | 2.00 | 2.00 | 0.89 | 0.00 | 0.89 | 0.00 | 2.22 | 54.22 | $S_T^2$ : Varianza total                      |
| Varianza de cada ítem | 0.00 | 0.25 | 0.10 | 0.17 | 0.25 | 0.22 | 0.17 | 0.22 | 0.22 | 0.10 | 0.00 | 0.10 | 0.00 | 0.25 | 6.02  |   |

$$\alpha = \frac{K}{K-1} \left[ 1 - \frac{\sum S_i^2}{S_T^2} \right] = \frac{14}{14-1} \left[ 1 - \frac{2.04938272}{6.025} \right] = 0.74231557$$

Apéndice L. Prueba del Alfa de Cronbach para validar la confiabilidad del cuestionario B aplicado a estudiantes de secundaria general

|    | 3a | 3b | 3c | 3d | 3e | 3f | 3g | 3h | 4a | 4aa | 4b | 4bb | 4c | 4cc | Total |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|----|-----|-------|
| 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 2  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 3  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 3     |
| 4  | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 3     |
| 5  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 1     |
| 6  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 8     |
| 7  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 6     |
| 8  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 9     |
| 9  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 5     |
| 10 | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 6     |
| 11 | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 5     |
| 12 | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 13 | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 3     |
| 14 | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 15 | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 3     |
| 16 | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 4     |
| 17 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 8     |
| 18 | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 1   | 0  | 0   | 4     |
| 19 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 0     |
| 20 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0   | 0  | 0   | 1     |
| 21 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 5     |
| 22 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0   | 1  | 1   | 0  | 0   | 5     |
| 23 | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1  | 1   | 0  | 1   | 0  | 0   | 7     |
| 24 | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 5     |
| 25 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | 0  | 0  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 2     |
| 26 | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1   | 0  | 0   | 0  | 0   | 7     |

(Continúa)



Apéndice L. Continúa

|               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 27            | 0    | 0    | 1    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 3    |
| 28            | 0    | 1    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 6    |
| 29            | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 7    |
| 30            | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 2    |
| 31            | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 0    | 11   |
| 32            | 1    | 0    | 1    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 3    |
| 33            | 1    | 1    | 1    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 5    |
| 34            | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 35            | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 2    |
| 36            | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    |
| 37            | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 3    |
| 38            | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 2    |
| 39            | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 40            | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 41            | 1    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 3    |
| 42            | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 2    |
| 43            | 0    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1    | 0    | 1    | 0    | 0    | 3    |
| Total         | 23   | 19   | 24   | 21   | 5    | 19   | 8    | 8    | 7    | 25   | 2    | 8    | 0    | 0    | 169  |
| Promedios     | 0.53 | 0.44 | 0.56 | 0.49 | 0.12 | 0.44 | 0.19 | 0.19 | 0.16 | 0.58 | 0.05 | 0.19 | 0.00 | 0.00 | 3.93 |
| Cuadrado de 1 | 0.22 | 0.20 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Cuadrado de 2 | 0.29 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Cuadrado de 3 | 0.29 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Cuadrado de 4 | 0.22 | 0.20 | 0.31 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.87 |

(Continúa)

Apéndice L. Continúa

|                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Cuadrado de 5  | 0.22 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 8.59  |
| Cuadrado de 6  | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.66 | 0.03 | 0.70 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 16.56 |
| Cuadrado de 7  | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.70 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 4.28  |
| Cuadrado de 8  | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.78 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.70 | 0.18 | 0.00 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 25.70 |
| Cuadrado de 9  | 0.29 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 1.14  |
| Cuadrado de 10 | 0.22 | 0.20 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.66 | 0.66 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 4.28  |
| Cuadrado de 11 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 1.14  |
| Cuadrado de 12 | 0.22 | 0.20 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00  |
| Cuadrado de 13 | 0.22 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.78 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.87  |
| Cuadrado de 14 | 0.22 | 0.20 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00  |
| Cuadrado de 15 | 0.61 | 0.65 | 0.10 | 0.06 | 0.00 | 0.04 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.44 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 31.21 |
| Cuadrado de 16 | 0.29 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00  |
| Cuadrado de 17 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.78 | 0.31 | 0.03 | 0.66 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 16.56 |
| Cuadrado de 18 | 0.22 | 0.20 | 0.20 | 0.24 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 0.00  |
| Cuadrado de 19 | 0.29 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 15.45 |

(Continúa)

Apéndice L. Continúa

|                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Cuadrado de 20 | 0.29 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 8.59  |
| Cuadrado de 21 | 0.29 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.31 | 0.66 | 0.66 | 0.70 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 1.14  |
| Cuadrado de 22 | 0.29 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.31 | 0.66 | 0.66 | 0.03 | 0.34 | 0.91 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 1.14  |
| Cuadrado de 23 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.24 | 0.78 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.70 | 0.18 | 0.00 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 9.42  |
| Cuadrado de 24 | 0.29 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.78 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 1.14  |
| Cuadrado de 25 | 0.29 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 3.73  |
| Cuadrado de 26 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.66 | 0.66 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 9.42  |
| Cuadrado de 27 | 0.29 | 0.20 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.87  |
| Cuadrado de 28 | 0.29 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.66 | 0.66 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 4.28  |
| Cuadrado de 29 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.66 | 0.66 | 0.03 | 0.18 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 9.42  |
| Cuadrado de 30 | 0.29 | 0.31 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.70 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 3.73  |
| Cuadrado de 31 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.66 | 0.66 | 0.70 | 0.18 | 0.91 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 49.98 |
| Cuadrado de 32 | 0.22 | 0.20 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.87  |
| Cuadrado de 33 | 0.22 | 0.31 | 0.20 | 0.26 | 0.01 | 0.31 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 1.14  |
| Cuadrado de 34 | 0.29 | 0.20 | 0.31 | 0.24 | 0.01 | 0.20 | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 15.45 |

(Continúa)

Apéndice L. Concluye

|                       |       |       |       |       |      |       |      |      |      |       |      |      |      |      |                |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|----------------|
| Cuadrado de 35        | 0.22  | 0.20  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.31  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 3.73           |
| Cuadrado de 36        | 0.29  | 0.20  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 8.59           |
| Cuadrado de 37        | 0.29  | 0.20  | 0.20  | 0.24  | 0.01 | 0.31  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.87           |
| Cuadrado de 38        | 0.29  | 0.20  | 0.20  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 3.73           |
| Cuadrado de 39        | 0.29  | 0.20  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 15.45          |
| Cuadrado de 40        | 0.29  | 0.20  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.34  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 15.45          |
| Cuadrado de 41        | 0.22  | 0.31  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18  | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.87           |
| Cuadrado de 42        | 0.29  | 0.20  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18  | 0.00 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 3.73           |
| Cuadrado de 43        | 0.29  | 0.31  | 0.31  | 0.24  | 0.01 | 0.20  | 0.03 | 0.03 | 0.03 | 0.18  | 0.00 | 0.66 | 0.00 | 0.00 | 0.87           |
| Suma de cuadrados     | 11.17 | 11.06 | 10.27 | 10.59 | 4.41 | 10.56 | 6.48 | 6.48 | 5.83 | 10.89 | 1.90 | 5.85 | 0.00 | 0.00 | 300.27         |
| Varianza de cada ítem | 0.26  | 0.26  | 0.24  | 0.25  | 0.10 | 0.25  | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.25  | 0.04 | 0.14 | 0.00 | 0.00 | 6.98           |
|                       |       |       |       |       |      |       |      |      |      |       |      |      |      |      | Varianza total |

$K$ : Número de ítems del instrumento

$\sum s_i^2$ : Suma de varianzas de los ítems

$S_T^2$ : Varianza total

$$\alpha = \frac{K}{K-1} \left[ 1 - \frac{\sum s_i^2}{S_T^2} \right] = \frac{14}{14-1} \left[ 1 - \frac{2.22065564}{6.883} \right] = 0.69823148$$

Apéndice M. Resultados de los reactivos 3 y 4 de participantes del INEA

|                  | Nombre        | Aciertos en el reactivo 3 | Total de aciertos en los reactivos 3 y 4 | Calificación en el reactivo 3 | Calificación en los reactivos 3 y 4 |
|------------------|---------------|---------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1                | Aide Michel   | 6                         | 8  | 7.5                           | 5.7                                 |
| 2                | Perla Aline   | 5                         | 7  | 6.3                           | 5.0                                 |
| 3                | Jorge Nicolás | 8                         | 11                                       | 10.0                          | 7.9                                 |
| 4                | Luis Ángel    | 5                         | 8  | 6.3                           | 5.7                                 |
| 5                | Dominga       | 1                         | 3  | 1.3                           | 2.1                                 |
| 6                | Salvador      | 8                         | 11                                       | 10.0                          | 7.9                                 |
| 7                | Elisa         | 5                         | 8  | 6.3                           | 5.7                                 |
| 8                | Bertha        | 7                         | 10                                       | 8.8                           | 7.1                                 |
| 9                | Teodora       | 8                         | 11                                       | 10.0                          | 7.9                                 |
| Promedio general |               |                           |  | 7.4                           | 6.1                                 |

Apéndice N. Resultados de los reactivos 3 y 4 de participantes de secundaria general

|    | Nombre    | Aciertos en el reactivo 3 | Total de aciertos en los reactivos 3 y 4 | Calificación en el reactivo 3 | Calificación en los reactivos 3 y 4 |
|----|-----------|---------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1  | Luis      | 4                         | 4  | 5.0                           | 2.9                                 |
| 2  | Yanelly   | 4                         | 4  | 5.0                           | 2.9                                 |
| 3  | Nancy     | 1                         | 3  | 1.3                           | 2.1                                 |
| 4  | Israel    | 2                         | 3  | 2.5                           | 2.1                                 |
| 5  | Daniela   | 1                         | 1  | 1.3                           | 0.7                                 |
| 6  | Ulises    | 6                         | 8  | 7.5                           | 5.7                                 |
| 7  | Ángel     | 4                         | 6  | 5.0                           | 4.3                                 |
| 8  | Alma      | 6                         | 9  | 7.5                           | 6.4                                 |
| 9  | Johan     | 4                         | 5  | 5.0                           | 3.6                                 |
| 10 | Ángeles   | 6                         | 6  | 7.5                           | 4.3                                 |
| 11 | Brayan    | 5                         | 1  | 6.3                           | 0.7                                 |
| 12 | Diego     | 3                         | 1  | 3.8                           | 0.7                                 |
| 13 | Yesenia   | 3                         | 3  | 3.8                           | 2.1                                 |
| 14 | Itzel     | 4                         | 4  | 5.0                           | 2.9                                 |
| 15 | Aldair    | 2                         | 3  | 2.5                           | 2.1                                 |
| 16 | Tamara    | 3                         | 4  | 3.8                           | 2.9                                 |
| 17 | Sarai     | 7                         | 8  | 8.8                           | 5.7                                 |
| 18 | Bryan     | 3                         | 4  | 3.8                           | 2.9                                 |
| 19 | Yoalli    | 0                         | 0  | 0.0                           | 0.0                                 |
| 20 | Gisela    | 1                         | 1  | 1.3                           | 0.7                                 |
| 21 | Nadia     | 3                         | 5  | 3.8                           | 3.6                                 |
| 22 | Vannesa   | 3                         | 5  | 3.8                           | 3.6                                 |
| 23 | Jorge     | 4                         | 7  | 5.0                           | 5.0                                 |
| 24 | Isaías    | 4                         | 5  | 5.0                           | 3.6                                 |
| 25 | Miguel    | 1                         | 2  | 1.3                           | 1.4                                 |
| 26 | Nataly    | 6                         | 7  | 7.5                           | 5.0                                 |
| 27 | Octavio   | 2                         | 3  | 2.5                           | 2.1                                 |
| 28 | Lizbeth   | 5                         | 6  | 6.3                           | 4.3                                 |
| 29 | Pedro     | 6                         | 7  | 7.5                           | 5.0                                 |
| 30 | Francisco | 1                         | 2  | 1.3                           | 1.4                                 |
| 31 | Juan      | 7                         | 11                                       | 8.8                           | 7.9                                 |
| 32 | Lourdes   | 3                         | 3  | 3.8                           | 2.1                                 |

(Continúa)

Anexo 2. (Concluye)

|                  | Nombre    | Aciertos en el reactivo 3 | Total de aciertos en los reactivos 3 y 4 | Calificación en el reactivo 3 | Calificación en los reactivos 3 y 4 |
|------------------|-----------|---------------------------|--|-------------------------------|-------------------------------------|
| 33               | Magaly    | 5                         | 5  | 6.3                           | 3.6                                 |
| 34               | Yadira    | 0                         | 0  | 0.0                           | 0.0                                 |
| 35               | Jazmín    | 2                         | 2  | 2.5                           | 1.4                                 |
| 36               | Fernanda  | 0                         | 1  | 0.0                           | 0.7                                 |
| 37               | Oswaldo   | 2                         | 3  | 2.5                           | 2.1                                 |
| 38               | Jesús     | 1                         | 2  | 1.3                           | 1.4                                 |
| 39               | Karen     | 0                         | 0  | 0.0                           | 0.0                                 |
| 40               | Sandra    | 0                         | 0  | 0.0                           | 0.0                                 |
| 41               | Jazmín L. | 2                         | 3  | 2.5                           | 2.1                                 |
| 42               | Dulce     | 0                         | 2  | 0.0                           | 1.4                                 |
| 43               | América   | 1                         | 3  | 1.3                           | 2.1                                 |
| Promedio general |           |                           |  | 3.7                           | 2.7                                 |

### Datos de la autora de la tesis

Montserrat Sánchez Morales es originaria de Chicoloapan, Estado de México. Del año 2010 al 2014 estudió en la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco, la licenciatura en pedagogía. Durante los años 2012 a 2014 se desempeñó como asesora educativa en el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos. Durante sus estudios de licenciatura fue beneficiaria del Programa Nacional de Becas para la Educación Superior.