



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

“El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011”

Tesis que para obtener el Grado de

Maestro en Desarrollo Educativo

Presenta

JOSÉ LUIS CEDILLO OSORNIO

Directora de Tesis: **Dra. Alicia Ávila Storer**

México, Ciudad de México, Noviembre 2016.

“El concepto de equivalencia de fracciones en la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011”



Tesis que para obtener el Grado de
Maestro en Desarrollo Educativo
Presenta:

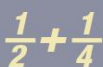
JOSÉ LUIS CEDILLO OSORNIO



Directora de Tesis:
Dra. Alicia Ávila Storer

México, Ciudad de México, Noviembre 2016




$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$



DEDICATORIAS

A mis familiares por todo el apoyo
recibido durante este proceso de formación
sin su comprensión esta fase no sería posible.
Especialmente a mis hijos, padres y hermanos,

A mis compañeros y amigos que están conmigo hoy y siempre.
En todo momento tuve una palabra de aliento
y motivaciones para seguir adelante y lograr mi meta.
De manera especial a JBA, RMJP y NBP.

A mi asesora y lectores agradezco infinitamente
su paciencia y orientaciones que me permitieron
mejorar mi formación profesional,
principalmente enriqueciendo mi trabajo de investigación.

A todos aquellos de que de alguna forma
fortalecieron este trabajo y me ayudan
a ser cada día un profesional.

Índice

Introducción.....	1
CAPITULO I: EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN.....	3
1. Planteamiento del problema	3
1.1 Objetivos y preguntas de investigación.....	6
2. Antecedentes.....	8
2.1 Conceptualización del término fracción	8
2.2 Las fracciones	10
2.2.1 Equivalencia de fracciones	10
2.3 Investigaciones sobre las fracciones y su aprendizaje	11
2.3.1 Las ideas de Hans Freudenthal	11
2.3.2. Investigadores iberoamericanos que siguieron las ideas de Freudenthal	14
3. Metodología de la investigación.....	19
CAPITULO II: La Equivalencia de Fracciones en el currículo introducido en 1960	21
Introducción	21
1. Currículo de Aritmética y Geometría de 1960	22
1.1 Lineamientos para la enseñanza de Aritmética y Geometría.....	23
1.2 Libros y cuadernos de trabajo de Aritmética y Geometría de 1960	24
2. Presentación de las fracciones en el cuarto grado	25
2.1 Mi libro de cuarto año de Aritmética y Geometría	25
2.2 Mi cuaderno de trabajo de cuarto año de Aritmética y Geometría.....	29
2.3 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado	33
3. Presentación de las fracciones en el quinto grado	33
3.1 Mi libro de quinto año Aritmética y Geometría	33
3.2 Mi cuaderno de trabajo de quinto año de Aritmética y Geometría	35
3.3 Tratamiento de la equivalencia en el quinto grado.....	43
4. Conclusiones acerca del currículo introducido en 1960	43
CAPITULO III: La Equivalencia de Fracciones en el currículo introducido en 1972	45
Introducción	45
1. Currículo referente a Matemáticas	45
1.1 Enfoque del currículo de 1972 en matemáticas.....	47
2. Presentación de las fracciones en el tercer grado	49
2.1 Auxiliar didáctico Matemáticas Tercer grado.....	49

2.2 Libro para el alumno Matemáticas tercer grado	49
3. Presentación de las fracciones en el cuarto grado	53
3.1 Libro para el maestro Matemáticas Cuarto grado.....	53
3.2 Auxiliar didáctico Matemáticas Cuarto grado.....	53
3.3 Libro del alumno Matemáticas Cuarto grado	54
3.4 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado	57
4. Presentación de las fracciones en el quinto grado	64
4.1 Auxiliar didáctico Matemáticas Quinto grado.....	64
4.2 Libro del alumno Matemáticas Quinto grado.....	65
4.3 Tratamiento de la equivalencia en el quinto grado	69
5. Conclusiones acerca del currículo introducido en 1972	73
Introducción	75
1. La reforma educativa de los años noventa.....	75
1.1 Propósitos generales del plan y programas de estudio de matemáticas.....	76
2. Presentación de las fracciones en el tercer grado	79
2.1 Libro del alumno. Matemáticas. Tercer Grado.....	79
2.2 Tratamiento de la equivalencia en el tercer grado	79
3. Presentación de las fracciones en el cuarto grado	81
3.1 Avance Programático. Matemáticas. Cuarto grado.....	81
3.2 Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto Grado	82
3.3 Fichero Actividades Didácticas. Matemáticas. Cuarto grado	82
3.4 Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto Grado.....	83
3.5 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado.....	88
4. Secuencia de presentación de las fracciones en el quinto grado.....	89
4.1 Avance Programático. Matemáticas. Quinto grado	89
4.2 Libro Para el Maestro. Matemáticas. Quinto Grado	90
4.3 Fichero Actividades Didácticas. Matemáticas. Quinto grado.....	90
4.4 Libro de texto del alumno. Matemáticas. Quinto Grado	90
4.5 Tratamiento del concepto de equivalencia de fracciones en el Quinto grado.....	95
5. Conclusiones del currículo introducido en 1993.	96
CAPITULO V: La Equivalencia de Fracciones en el currículum introducido en 2011	98
Introducción	98

1. Currículo de matemáticas de educación primaria.....	100
1.1 Enfoque Didáctico en Matemáticas	100
1.2 Material bibliográfico de matemáticas	101
2. Presentación de las fracciones en el tercer grado	103
2.1 Libro del alumno Matemáticas. Tercer grado	103
2.2 Desafíos matemáticos. Libro del alumno. Tercer grado.....	105
2.3 Tratamiento de la equivalencia en el tercer grado.....	107
3. Presentación de las fracciones en el cuarto grado	108
3.1 Libro del alumno Matemáticas Cuarto Grado	108
3.2 Desafíos Matemáticos. Libro del alumno. Cuarto Grado	115
3.3 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado	119
4. Presentación de las fracciones en el quinto grado	119
4.1 Libro de texto del alumno. Matemáticas. Quinto Grado	119
4.2 Desafíos Matemáticos. Alumno. Quinto Grado	124
4.3 Tratamiento de la equivalencia en el quinto grado	125
5. Conclusiones del currículo introducido en 2011.	125
Conclusiones Generales.....	128
Referencias Bibliográficas.....	133
Apéndice A.....	136
Apéndice B	140
Apéndice C	142
Apéndice D.....	148
Apéndice E	152
Apéndice F.....	159
Apéndice G.....	160
Apéndice H.....	161
Apéndice I	162
Apéndice J	163
Apéndice K.....	165
Apéndice L	167
Apéndice M	168
Apéndice N.....	170

Introducción

En el desarrollo de mi actividad docente en la educación primaria se me han presentado diversas dificultades. Considerando la complejidad de las mismas, como profesional de la educación, en la mayoría de los casos he superado estas dificultades de forma empírica. El presente proyecto me proporcionó fundamentos teórico-prácticos basados en las investigaciones en educación matemática, para solucionar algunas de estas dificultades de forma fundamentada, especialmente las relacionadas con la enseñanza de la equivalencia de fracciones.

En mi labor docente uno de los problemas más significativos es el contenido de las fracciones. En la mayor parte de mi práctica en educación básica, me he enfocado en los grados de cuarto, quinto y sexto. He observado lo frágil del conocimiento aritmético que se desarrolla en los alumnos en cuanto a fracciones, desde su conceptualización, comprensión, comparación y hasta la aplicación en operaciones básicas de adición y sustracción. No sólo los alumnos tienen estas carencias, sino también los docentes carecemos del conocimiento matemático y de una metodología fundamentada en investigaciones de educación matemática para enseñar adecuadamente las fracciones en la primaria. Así es que resulta complicado comunicar a los alumnos un conocimiento que no solo no dominamos, sino del que ni siquiera tenemos las bases teórico-pedagógicas.

Así, teniendo como tema general de indagación a las fracciones, me percaté que este trabajo de investigación requería una delimitación pues no podía hacer el análisis de todos los elementos que componen las fracciones en la educación primaria, ni de todas las competencias matemáticas que debe desarrollar un alumno para aprenderlas de manera conveniente. Por lo que me enfocaré en el concepto de equivalencia de fracciones.

Los libros de texto de matemáticas que distribuye desde 1960 la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg), tienen una dosificación de conocimientos y ejercicios que no siempre resultan sencillos ni para el alumno ni para el docente. Sin embargo, son tomados como bibliografía básica y en muchos casos es la única en que se apoya el aprendizaje en la educación primaria.

Se revisaran diferentes cuestiones implicadas en la enseñanza del concepto de equivalencia de fracciones, el cual es fundamental para lograr una comprensión de las fracciones en los alumnos. El concepto de equivalencia de fracciones es utilizado en la mayoría de procesos en los que intervienen las fracciones, desde orden en números fraccionarios, comparación de los mismos, realizar operaciones y expresar los resultados de manera simplificada. Además, este concepto está vinculado a otros contenidos matemáticos escolares como: escalas, porcentajes, números decimales y probabilidad, entre otros.

Específicamente, el objetivo general en este proyecto de investigación fue analizar el tratamiento del concepto de equivalencia de fracciones en los diferentes currículos de la educación primaria mexicana desde 1960 hasta 2011. Esta tesis se ha organizado en cinco capítulos.

En el capítulo I se expone el planteamiento del problema, las preguntas de investigación y los objetivos específicos, así como la conceptualización del término fracción. Además se analizaron algunas investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones y se describe la metodología utilizada para la

revisión y el análisis de los materiales bibliográficos.

En el capítulo II se incluyen los resultados de la revisión y el análisis de la equivalencia de fracciones en el currículo introducido en 1960.

En el capítulo III se indican los resultados de la revisión y el análisis de la equivalencia de fracciones en el currículo introducido en 1972.

En el capítulo IV se presentan los resultados de la revisión y el análisis de la equivalencia de fracciones en el currículo introducido en 1993.

En el capítulo V incluyen los resultados de la revisión y el análisis de la equivalencia de fracciones en el currículo introducido en 2011.

Posteriormente se presentan las conclusiones generales indicando los puntos sobresalientes de la enseñanza de la equivalencia de fracciones en los currículos de la educación primaria mexicana de 1960 a 2011 en términos de las observaciones específicas obtenidas de la revisión y el análisis.

En el apartado de referencias se enlistan los documentos consultados para la elaboración de este trabajo de investigación.

Finalmente se encuentra la sección de apéndices que incluye la descripción del análisis de los respectivos materiales bibliográficos de los currículos de 1990 y 2011. Estos cuadros se incluyeron en esta sección porque contienen información que se organizó de forma horizontal y para una mejor presentación de este trabajo de investigación.

CAPITULO I: EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

1. Planteamiento del problema

Como ya mencioné en la introducción, en el desarrollo de mi actividad docente en la educación primaria, una de mis principales problemáticas ha sido la enseñanza de las fracciones y todo lo que este tema implica en los contenidos y aprendizajes previstos en el plan de estudios y los programas de educación primaria. Debido a la problemática reconocida en el tema, desde hace algunas décadas, y aún en la actualidad, se han realizado diferentes investigaciones que abordan la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria:

“Todos somos conscientes de las dificultades que presenta para los niños el aprendizaje de las fracciones, sobre todo en los niveles elementales. Estas dificultades que abarcan tanto la comprensión conceptual como la destreza de cálculo han sido constatadas por numerosos investigadores de distintos países. Ellos han motivado la realización de estudios que tratan de detectar el origen de las dificultades para, a partir de su conocimiento, proponer soluciones, buscando aproximaciones alternativas para la enseñanza de las fracciones” (SUYDNAM, 1979, cit. en Llinares y Sánchez, 2000, p.30).

También Freudenthal en su libro: *Didactical Phenomenology Of Mathematical Structures*, menciona lo siguiente:

“No se puede negar que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras. Por regla general, los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. [Pero] cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad [el enfoque parte-todo]. Desde mi punto de vista, este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por lo que mucha gente nunca aprende las fracciones.”, (Freudenthal, 1983, p. 134. Traducción propia)

En este sentido de dificultad que expresa Freudenthal, me surgieron algunas preguntas respecto a la problemática que experimenté en mi práctica de enseñanza de las fracciones:

- ¿Qué deben aprender los alumnos sobre fracciones en la educación primaria?
- ¿Sólo lo que nos indica el plan de estudios y programa de educación primaria?
- ¿El plan de estudios se encuentra correctamente dosificado en cuanto a los contenidos y secuencia de los mismos relacionados con las fracciones?
- ¿Con los cambios sucesivos en los currículos de la educación primaria mexicana se habrán recuperado los aspectos positivos de períodos anteriores y se habrán corregido sus limitaciones?

El eje para intentar responder estas preguntas, teniendo como fuente documentos oficiales, son los currículos de matemáticas correspondientes a la educación primaria utilizados en México. Pero antes de iniciar su análisis, haré una aclaración: cuando uso el término currículo, me refiero a los planes y programas de estudio, los libros de texto, los materiales de apoyo para el maestro, y demás materiales

en los que se plasman objetivos y métodos tendientes a lograr la consecución de un proyecto educativo. Por eso, utilizaré tanto la palabra currículo como la expresión planes y programas de estudio y libros de texto para referirme a lo mismo.

También antes de introducirme en el análisis de los currículos, comentaré la investigación realizada por Martha Dávila (1992, pp. 32-45), porque en ella se plantea una pregunta que expresa una inquietud similar a la que motivó esta investigación; esta pregunta central del artículo de la autora es la siguiente: “¿Es pertinente introducir el manejo de fracciones desde los primeros grados [de primaria], de qué forma hacerlo?”.

La investigación de Dávila se realizó teniendo como referente el currículo de 1972, vigente aún en la época en que desarrolló dicha investigación, y concluye que este currículo debería tener algún cambio al respecto, sustentándose en el desarrollo cognitivo del alumno y en que – según este desarrollo - no es recomendable la enseñanza de las fracciones en los grados iniciales: primero y segundo (cf. Dávila, 1992).

Ahora bien, para tener elementos de respuesta a las preguntas e inquietudes anteriores, debo conocer lo que se propone para la enseñanza del concepto de equivalencia de fracciones en los currículos de matemáticas de educación primaria en México de 1960 a 2011.

Esta investigación no consistió en una revisión analítica de los planes de estudios y los libros de texto gratuito de educación primaria. Se centró en los tres últimos grados de la educación primaria, en los cuales el tema de las fracciones tiene un número mayor de contenidos y aprendizajes esperados. Específicamente, este trabajo se centra en cuarto y quinto grados, que es en los que se trabaja la equivalencia de fracciones.

Para esta investigación no se revisaron todos los conceptos vinculados a las fracciones que los diferentes currículos presentan como contenidos, sino exclusivamente se examinó el concepto de *equivalencia de fracciones*. El concepto de *equivalencia de fracciones* es la base para la comprensión de las fracciones y sus operaciones, como se verá en los análisis de cada currículo.

Ahora bien, las pruebas nacionales e internacionales de matemáticas muestran que el tema de las fracciones representa en realidad las dificultades importantes que se han mencionado antes. México se encuentra inmerso en las evaluaciones internacionales como el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (Pisa por sus siglas en inglés) y en nacionales como Excale (Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos) y Enlace (Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares), ahora llamada Planea (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes). Este tipo de evaluaciones nos muestra de manera directa lo que acontece en nuestro país con el aprendizaje de las fracciones: en general es muy limitado.

La prueba Pisa se estructura con base en aspectos conceptuales de las matemáticas que permiten medir

las competencias y derivar los resultados de desempeño de la muestra de alumnos participantes en la prueba. Los resultados se presentan en una escala global donde el puntaje máximo alcanzado en 2012 fue de 613 puntos (Shangai, China), en esta escala existen niveles de desempeño diferenciados por rangos en los puntajes. En el área de matemáticas se estructuraron 6 niveles, en el caso de México en 2012, el 72.8% de los estudiantes evaluados se ubicaron en los tres niveles más bajos. El contenido de fracciones se incluye en el nivel 3 (482.38 a menos de 544.68 puntos, 13.1% de los alumnos evaluados en México se ubicaron ahí). En este nivel se indica en INEE (2013, tabla 2.1 pág. 36), que los evaluados: “Muestran cierta habilidad para el manejo de porcentajes, *fracciones*, números decimales y proporciones”. Pero el 59.7% de los alumnos mexicanos no alcanzó el nivel de competencias básicas en matemáticas, ubicándolos en los niveles Dos (de 420.07 a menos de 482.38 puntos: 27.8 % de los alumnos evaluados en México.) y Nivel Uno (De 357.77 a menos de 420.07; con 31.9 % de los evaluados en este nivel.). Esta situación es indicativa de que la mayoría de los alumnos mexicanos no han desarrollado estas habilidades matemáticas.

Referente a la prueba Planea realizada en junio de 2015 para los alumnos de sexto grado de primaria, (INEE. 2015, p. 6), también se estructuran los resultados del área de matemáticas en cuatro niveles y nos indica que: “Los niveles de logro son acumulativos: aquellos estudiantes que han adquirido los aprendizajes de un determinado nivel de logro poseen los del nivel previo (por ejemplo, quienes se ubican en el nivel 2 tienen ya los aprendizajes del nivel 1, quienes se ubican en el nivel 3 poseen los del 2 y los del 1, y así sucesivamente)”.

Para ubicar los resultados de la prueba Planea, el INEE, estableció los siguientes descriptores genéricos (INEE, 2013, p. 36, Tabla 2.1). Para el nivel IV su descriptor genérico nos dice: “Los estudiantes que se ubican en este nivel tienen un logro sobresaliente de los aprendizajes clave del currículum”. El manejo de fracciones para la solución de problemas en los niveles de matemáticas se ubica en el nivel IV cuya descripción en resultados nacionales 2015. INEE (2015, p. 10), indica: “[Los alumnos] Resuelven problemas aditivos con números naturales, decimales y *fraccionarios*. Resuelven problemas de aplicación de áreas. Resuelven problemas que implican calcular promedios y medianas, y comparar razones.” Los resultados por nivel son: Nivel IV- 6.8 % de los estudiantes, Nivel III: 13.8%, nivel II: 18.9 % y nivel I: 60.5%.

Estos resultados son otro ejemplo de las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas y la importancia de mejorar la enseñanza de las fracciones en la educación primaria mexicana. Al respecto, considero especialmente el concepto de *equivalencia de fracciones* para lograr la comprensión y manejo de los números fraccionarios.

Durante la revisión realizada en diferentes fuentes bibliográficas y tesis referentes a la educación matemática, realizadas en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y el Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (Cinvestav), no encontré estudios o investigaciones que analicen específicamente el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en el currículum mexicano, ni su aprendizaje por parte de los niños de nuestro país.

Considero que las dificultades que conlleva el concepto de fracción, la importancia que para construir dicho concepto tiene la equivalencia, así como la escasez de investigaciones sobre este tema, justifican realizar una investigación sobre el tratamiento de la *equivalencia de fracciones* en los distintos momentos históricos del currículum mexicano.

1.1 Objetivos y preguntas de investigación

El proceso de enseñanza es la actividad principal de todo docente, respecto a matemáticas, Brousseau ha hecho señalamientos importantes:

“El rol del maestro es: Hacer vivir el conocimiento, hacerlo producir por los alumnos como respuesta razonable a una situación familiar y, además, transformar esa ‘respuesta razonable’ en un hecho cognitivo extraordinario, identificado, reconocido desde el exterior. Para el docente, es grande la tentación de saltar estas dos fases y enseñar directamente el saber cómo objeto cultural evitando este doble movimiento. En este caso, se presenta el saber y el alumno se lo apropia como puede.” (Brousseau, 1993, En Parra & Saiz, 2009, p. 65)

Como lo refiere Brousseau en el párrafo anterior, la labor de nosotros como docentes no es sencilla y requiere de las dos fases: hacer vivir el conocimiento y hacerlo producir como un saber identificable. En muchos casos los maestros no realizamos estas dos fases, incluso porque con frecuencia desconocemos lo que el plan y programa de estudios nos sugiere como secuencias didácticas esenciales para desarrollar dichas fases y lograr los conocimientos significativos en los alumnos. Enseñar el contenido de fracciones, implicaría más y mejores actividades de nosotros como docentes para cubrir con las fases propuestas por Brousseau.

En los diferentes planteles educativos en los que he realizado mi actividad profesional, he observado que mis compañeros maestros y yo mismo, tomamos como base para el desarrollo de contenidos y actividades para la enseñanza que se indican en los libros de texto que produce y distribuye la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg). Pero ya mencioné los docentes no los conocemos con profundidad.

Los aspectos enunciados anteriormente me permiten considerar que es importante revisar y conocer cómo se ha tratado en el currículum de la educación primaria mexicana la *equivalencia de fracciones*, para recuperar algunos elementos de las propuestas de enseñanza que pudieron ser favorables e identificar otros que no fueran muy convenientes en el aprendizaje de este concepto. Estos elementos podrán ser la base para la elaboración de una propuesta de enseñanza de la *equivalencia de fracciones*.

La problemática hasta aquí expuesta me conduce a la pregunta central de esta investigación:

¿Cómo se ha tratado la equivalencia de fracciones en los diferentes currículos de educación primaria en México, entre 1960 y 2011?

Para dar respuesta a esta interrogante, y dada la importancia del concepto de *equivalencia de fracciones*, para la comprensión de estos números, me propongo los siguientes objetivos:

- ***Conocer el tratamiento del concepto de equivalencia de fracciones en los diferentes currículos de la Educación Primaria Mexicana utilizados entre 1960 y 2011.***
- ***Identificar los aspectos positivos, así como las deficiencias en el tratamiento de la equivalencia en cada uno de los períodos curriculares mencionados.***

Antes de plantear los objetivos específicos de esta investigación enlisto las preguntas que pretendo responder al desarrollarla:

- *¿Cómo se ha introducido el concepto de equivalencia en los currículos de los últimos 50 años en la educación primaria en México?*
- *¿Qué significados de las fracciones se han empleado para la enseñanza del concepto de equivalencia?*
- *¿Qué representaciones de las fracciones se han vinculado al concepto de equivalencia?*
- *¿Qué situaciones didácticas, actividades y/o materiales se han utilizado para tratar el concepto de equivalencia?*
- *¿Qué aplicaciones y usos se le han dado al concepto de equivalencia de fracciones en los diferentes currículos de la educación primaria?*
- *¿Cuáles son las diferentes definiciones o formalizaciones del concepto de equivalencia que se han utilizado en los currículos de la educación primaria?*
- *¿En qué momento del proceso de enseñanza y aprendizaje se han incorporado dichas formalizaciones?*
- *¿Qué fortalezas y debilidades tiene(n) la(s) secuencia(s) utilizada(s) para introducir y trabajar el concepto de equivalencia en los distintos currículos en la educación primaria?*

De las preguntas anteriores derivamos que los objetivos específicos de esta investigación sean:

- *Conocer cómo se ha introducido en el currículum de la educación primaria mexicana el concepto de equivalencia de fracciones.*
- *Analizar los diferentes aspectos didácticos y conceptuales que se observan en las secuencias utilizadas en los distintos planes y programas de estudio de la educación primaria mexicana para la enseñanza del concepto de equivalencia de fracciones.*
- *Identificar los aspectos favorables de las secuencias didácticas utilizadas en los diferentes currículos de la educación primaria mexicana para promover el aprendizaje de la equivalencia de fracciones.*
- *Distinguir las situaciones, actividades, significados, definiciones y representaciones que se han empleado en los distintos currículos de la educación primaria mexicana para la enseñanza del*

concepto de equivalencia de fracciones.

- *Conocer los diferentes usos y aplicaciones que se le ha dado al concepto de equivalencia de fracciones en los distintos currículos de la educación primaria mexicana.*
- *Identificar los elementos útiles para la elaboración de una propuesta didáctica conformada por las fortalezas y evitando las debilidades identificadas en los diferentes currículos de la educación primaria mexicana para la enseñanza del concepto de equivalencia de fracciones.*

2. Antecedentes

En este apartado se presentan los aspectos preliminares de esta investigación. Se expone lo relacionado con el término fracción, desde su conceptualización didáctica hasta su definición matemática. También se presentan algunas investigaciones realizadas en educación matemática, que tienen como objetivo el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones considerando, aunque de manera tangencial, el concepto de ***equivalencia de fracciones***. Empezaré por abordar lo que es una fracción.

2.1 Conceptualización del término fracción

Dienes fue uno de los primeros investigadores que reflexionó sobre el concepto de fracción como contenido de enseñanza. Este investigador planteó sus reflexiones sobre el término de fracción como una pregunta con su respectiva respuesta:

“¿Qué es una Fracción? Básicamente existen dos formas de considerar una fracción. Una fracción puede ser o bien la descripción de un estado de cosas o bien una orden, es decir, el resultado de la orden de ejecución de una operación. Dos tercios pueden significar que describimos las dos terceras partes de una cosa cualquiera y con ello indicamos un estado de las cosas. Por otra parte, podemos decir ‘Tómese dos tercios de la cosa, sea cual fuere esta, y con ello indicamos una orden’. Normalmente se admite que dividimos lo que tenemos (sea lo que sea) en tres conjuntos equivalentes y que tomamos dos de dichos conjuntos. La propiedad número, es decir, el cardinal del conjunto reunión de los dos conjuntos será dos tercios. La orden de tomar dos tercios nos indica la ejecución de dos operaciones sucesivas, la primera de ellas es una división por tres y la segunda una multiplicación por dos” Dienes (1972, pp. 8-9)

La reflexión de Dienes nos permite ver que el término fracción es parte del lenguaje cotidiano y que tiene dos significados referentes a las cosas, objetos y acciones que tenemos a nuestro alrededor. De forma similar Freudenthal, expone la definición de fracción en términos de lenguaje y situaciones del mundo real. De acuerdo con mi traducción, según Freudenthal:

“Las fracciones: Son el recurso fenomenológico del número racional –una fuente que nunca se seca -, Fracción – o lo que corresponda en otras lenguas, es la palabra con la que entra el número racional, y en todas las lenguas que conozco está relacionado con ruptura, fractura. ‘Número Racional’ evoca asociaciones mucho menos violentas, racional está relacionado con ‘razón’, no en el sentido estricto de razón sino de proporción, de medida, en un contexto de aprendizaje es mucho más que fracción” Freudenthal (1983, pp. 134)

La intención de Freudenthal al hacer este análisis fue presentar las fracciones en su completa riqueza fenomenológica, es decir en las formas que se vinculan con los hechos del mundo. Así, señala que las fracciones en el lenguaje cotidiano, pueden entenderse como:

- a) “*La mitad de....* seguido de largo, pesado, viejo, compara cantidades y valores de magnitudes. Menos usual, un tercio de, dos tercios de...
- b) *Dos y un tercio veces de....* Largo, pesado, viejo. Es como si fueran una extensión del doble de... o una tercera parte de... Aunque estas expresiones difícilmente pueden ser consideradas que pertenecen al lenguaje cotidiano.
- c) *La mitad de, un tercio de, un cuarto de....* Un pastel, un camino, el viaje, la hora... En el lenguaje común se pueden formar múltiplos, *dos tercios de, tres cuartos de...* Un pastel, un camino, el viaje, la hora.....
- d) *La mitad de un..., la mitad del....* Se usan en el mismo sentido.
- e) Del sustantivo o numeral para el significado del número de medida expresado mediante cifras como $1/3$, $2/3$, $5 \frac{1}{4}$ de *m*, *kg*, *seg*, entre otras.
- f) *Como vez o veces.....* tras las fracciones. Por ejemplo: agarrar *m* veces *n* canicas, girar *m* veces la llave en la cerradura, rodar *m* veces una rueda.
- g) La terminología más natural es $1/3$ de.... $2/3$ de.... Aplicado a un número, cantidad de objetos, entre otros. Por ejemplo $1/3$ de 30 canicas. $2/3$ de un pastel.
- h) De otro modo, *de o en, o entre, o por*. Por ejemplo 5 de 100 (5%), una oportunidad entre cien, 35 millas por galón, entre otros.
- i) Una terminología con significado más fuerte: Cada tercer lote gana, cada quinto hombre es chino.” (apoyado en traducción de Puig (2001))

Entonces Freudenthal y Dienes coinciden en que el vocablo fracción se refiere a situaciones y acciones del mundo real. Aun cuando lo usemos sin comprender el término en su sentido matemático, podemos referirnos a este término de manera espontánea y con cierto significado, dependiendo del contexto en que lo usemos.

De lo mencionado por estos dos investigadores, concluyo que una definición o concepción de fracción no es ni única, ni definitiva, contiene muchas acepciones, vinculadas al contexto y a las formas de interpretación de dichos números.

Según Behr, Lesh, Post y Silver (1983) el conocimiento acerca de las fracciones puede ser desarrollado a través de diversos significados relativos a este concepto, diseñados para lograr una comprensión de que los números racionales pueden expresarse de diversas formas (razones, puntos en una línea, medidas y partes de un “todo”). Muchos otros investigadores han llegado también a esa conclusión, pero antes de continuar con la presentación de este tipo de trabajos, me referiré al sentido matemático de las fracciones. Las fracciones son una concreción de los números racionales (Q), es por ello que continuaré con tales aspectos de estos números.

2.2 Las fracciones

Mucho antes de que los griegos realizaran la sistematización de los conocimientos matemáticos, los babilonios (2000-1800 AC) y los egipcios ya conocían las fracciones, surgidas de la necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen o el peso (Baldor (1983, p. 28)). La respuesta a esta necesidad dio origen a las fracciones.

Todos los números fraccionarios son números racionales, y entre otras cosas, sirven para representar medidas. Pero la medición no es el único fenómeno al que se asocian las fracciones. Freudenthal (1983, p. 134) afirma:

“La abundancia de fenómenos que se dominan con fracciones y razón es lo que causa el problema [de comprensión de estos números]. Para escribir una fenomenología tengo que prestar atención a todos estos fenómenos; organizarlos muy sistemáticamente puede significar simplificarlos tanto que ponga trabas a la tarea fenomenológica.”(Traducción propia).

Centrándose en el tema de esta investigación, en seguida intentaré definirlo que es la ***equivalencia de fracciones***.

2.2.1 Equivalencia de fracciones

En lenguaje común y basado en la respuesta de algunos compañeros maestros cuestionados sobre qué son las fracciones equivalentes, puedo concluir que: *“Son las fracciones que expresan la misma cantidad, pero se representan de manera diferente”*.

Una forma de definir la equivalencia que aparece en libros de matemáticas, como el de Peterson J. & Hashisaki J. (1998, pp. 200-206)), es la siguiente:

Considerando las parejas de números (a; b), (c; d), donde a, b, c y d son números enteros y $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Se establece la siguiente relación:

$$[(a; b) \equiv (c; d)] \text{ si y solo si } [ad = bc]^1$$

Ejemplo: Si consideramos las parejas de números (5, 7), (35, 49), entonces:

$$(5/7) \equiv (35/49) \text{ si y solo si } [5 \cdot 49 = 7 \cdot 35]$$

¹Se usa el símbolo \equiv (**equivalencia**) en lugar de = (igual) para acentuar que esta es una relación definida en el conjunto de los números racionales (Q), que es diferente en términos de la relación de “igualdad” en el conjunto de los números enteros (Z).

Como observamos, esta es una definición un tanto abstracta de la *equivalencia de fracciones*. En la educación primaria este concepto no se trata con este nivel de formalidad. En la educación primaria la equivalencia se enseña en general con situaciones concretas como: representaciones gráficas, problemas de reparto y partición, aplicación en solución de problemas y apoyo en los procedimientos para resolver operaciones con fracciones de diferente denominador. Sin embargo es importante que los docentes conozcamos esta definición como parte del conocimiento que nos permitirá enseñarlas mejor.

Esta definición de la *equivalencia de fracciones* nos lleva al algoritmo o procedimiento de productos cruzados para comprobar la equivalencia o no equivalencia entre pares de fracciones. Estos conceptos son contenidos de aprendizaje a desarrollar en los grados de cuarto y/o quinto de la educación primaria en los diferentes currículos revisados.

Estas ideas y definiciones nos ayudan a concretar la importancia que tiene el concepto de *equivalencia de fracciones* en sí mismo. Adelantándome al contenido y las conclusiones de esta tesis, comento que: este concepto debe incorporarse en los planes y programas de estudio de la educación primaria de manera específica y gradual para una mejor enseñanza y comprensión de las fracciones. Esto porque el orden entre fracciones, así como las operaciones con números fraccionarios, especialmente la suma y la resta, se sustentan en la comprensión de la equivalencia.

2.3 Investigaciones sobre las fracciones y su aprendizaje

En esta sección me enfocaré en presentar algunas investigaciones realizadas sobre las distintas interpretaciones que pueden hacerse de las fracciones, así como algunas situaciones que se proponen para mejorar la enseñanza de estos números.

Las diversas interpretaciones de las fracciones tienen gran importancia en la didáctica del concepto de fracción, por lo que muchos investigadores se han dedicado a trabajar en dichas interpretaciones.

2.3.1 Las ideas de Hans Freudenthal

Hans Freudenthal (1983), fue pionero en torno al sentido de analizar el término fracción y su significado, por esto, expondré en primer lugar y más extensamente las interpretaciones y significados definidos por él.

El término fracción, según señaló este investigador, tiene dos grandes significados: fracturador y comparador. De esta manera Freudenthal inicia la clasificación de las distintas interpretaciones de las fracciones que sirvieron de base y fundamento para muchas investigaciones posteriores. En los párrafos siguientes incluyo, desde mi propia interpretación, las ideas de Freudenthal sobre estos dos grandes significados.

La *fracción como facturador*: Este es uno de los significados más generales que Freudenthal definió para la fracción y de este significado se desprenden fundamentalmente tres interpretaciones que se

refieren a fracturar:

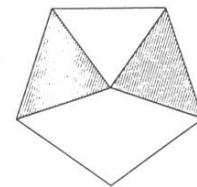
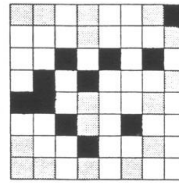
La primera es denominada: “**Causar Fracciones**”, se refiere a una fracción que implica una acción con cambios a todo tipo de magnitudes, en esencia, fracturar [repartir en partes equitativas] una magnitud. También se refiere a las transformaciones y descomposición de las magnitudes. Por ejemplo:

Distribuir un líquido en un número de vasos congruentes.

Distribuir el volumen del pastel en partes congruentes mediante procesos no exactos o por tanteo.

Otra interpretación dentro de la idea de Fracturar es: “**Todo y Parte**”: se refiere a un todo, que puede ser un conjunto continuo o discreto y definido o indefinido. A este conjunto (discreto o continuo), se le aplican acciones como: dividir, cortar, rebanar, o colorear en partes iguales.

Ejemplos de un todo definido proporcionados por Freudenthal:



- Un cuadrado o polígono regular que se divide en partes.
- Una bolsa de canicas (todo definido discreto) de la que se saca una décima parte de las canicas; la atención puede estar en esa décima parte, pero también puede centrarse en los nueve décimos que quedan en la bolsa.

Como ejemplos de un todo indefinido Freudenthal proporciona los siguientes:

- La humanidad dividida o clasificada por alguna característica propia del ser humano como: tipo de sangre o raza, entre otros.
- Una tira de papel con segmentos coloreados.
- El aire dividido en los elementos químicos que lo componen (oxígeno, nitrógeno, entre otros).

La tercera y última interpretación que menciona Freudenthal es la de: “**Todo, parte y fracción**”: Las partes y el todo se comparan fundamentalmente considerando cuántas veces cabe una parte en un todo.

A decir de Freudenthal, la interpretación de parte – todo, a pesar de tener tantas formas y abundancia de ejemplos, puede ser una idea restringida, no sólo desde el punto de vista fenomenológico sino también desde el punto de vista matemático, pues este enfoque produce solo fracciones propias.

El otro significado general de las fracciones, según Freudenthal (1983) es: la **fracción como comparador** que tiene fundamentalmente dos interpretaciones.

La primera es: “**Comparar objetos concretos**”, Freudenthal afirma que las fracciones también sirven para comparar objetos separados uno del otro, o que se piensan como si estuvieran separados. Por ejemplo:

- La silla es la mitad de alto que la mesa,
- La calle es $2\frac{1}{2}$ veces más ancha que la banqueta.
- Juan gana la mitad que Pedro

Dentro de la fracción como comparador la otra interpretación es: “*Fracción y magnitud*”: y consiste en distribuir magnitudes en partes iguales. Freudenthal (1983) desarrolla un capítulo sobre magnitudes y señala en especial aspectos de cómo construir una magnitud en un sistema de cantidades, por lo que en esta clasificación de manera general puedo decir que se distribuyen volúmenes, pesos o longitudes en partes iguales, donde la fracción aparece como un comparador cuando se consideran dos cantidades de esta magnitud y son comparadas respecto de su valor. Por ejemplo: un líquido distribuido en un número de vasos iguales, en los que se comparan las alturas del líquido.

Freudenthal (1983) hace un complemento a su clasificación de la fracción como fracturador y como comparador, este complemento lo identifica con el título “aspectos de la fracción”, estos aspectos clasifican la fracción como transformador cuando esta aparece en un operador o en una relación.

En síntesis, Freudenthal considera que las fracciones tienen diferentes interpretaciones: *Fracturador*; Parte – Todo, Operador, Fracción y Magnitud, *Transformador*; Fracción como Medida de Magnitudes, Puntos Sobre la Recta Numérica y como Número Racional. Y *Comparador*; establecer relaciones de comparación basadas en criterios que pueden ser usando magnitudes como longitud, peso y volumen.

Es importante también destacar el énfasis que pone Freudenthal (1983) en la definición del “todo” como algo dinámico y determinado por las situaciones fenomenológicas.

Puedo inferir con base en las afirmaciones de Freudenthal que la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones resulta muy complejo en la educación primaria, por lo que se deben emplear las secuencias y los recursos adecuados, de forma que la didáctica sea convenientemente aplicada y los alumnos obtengan el conocimiento esperado.

Las interpretaciones y aspectos de la fracción estudiados por Freudenthal sentaron las bases para que muchos investigadores en educación matemática continúen analizando y estructurando toda la fenomenología que implica el número racional concretizado en números fraccionarios.

Como conclusión, se puede decir que Freudenthal estudió el número racional enfocado en su “Fenomenología”, es decir, señaló que el término fracción se emplea vinculado con el lenguaje usual, y con distintas situaciones del mundo. De estas cuestiones se derivan los distintos significados a los que pueden asociarse estos números. Por lo tanto, para lograr un aprendizaje más completo, una secuencia didáctica para la enseñanza de las fracciones debe hacerse con el mayor número de interpretaciones posibles y con la contextualización adecuada.

2.3.2. Investigadores iberoamericanos que siguieron las ideas de Freudenthal

Ahora analizaré las interpretaciones a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones realizadas por investigadores de lengua hispana contemporáneos quienes, como veremos, se inspiraron principalmente en las ideas de Freudenthal.

Respecto de sus perspectivas sobre las fracciones estos investigadores reflejan algunos aspectos que presentan coincidencias entre ellos y aspectos que los hacen particulares.

Eduardo Mancera (1992):

En los artículos elaborados por este investigador mexicano para sintetizar los distintos estudios realizados en México y el extranjero referentes a las fracciones, se mencionan las dificultades en la enseñanza de estos números en la escuela primaria mexicana, así como los diversos significados asociados a este concepto y la homonimia y sinonimia que dificulta la comprensión de las fracciones. Sobre las dificultades, Mancera destaca el trabajo realizado por Alicia Ávila (Ávila, 1986), donde se analiza el currículum para la enseñanza de las matemáticas en la escuela mexicana desde 1940 hasta 1980, el cual involucra los procesos de enseñanza de las fracciones, destacando estos puntos:

- a) Antes de 1972, se trabajaba fundamentalmente en memorización de procedimientos.
- b) En los planes y programas de 1972 se da mayor énfasis a explicaciones y justificaciones de tipo matemático pero sin considerar el desarrollo cognitivo del alumno según su edad.
- c) En los Planes y Programas de 1980 hay mayor apoyo gráfico y dosificación cuidadosa de contenidos, destacando el papel del alumno, pero no tanto de la didáctica ni del docente.
- d) En los planes posteriores a 1980, la equivalencia se trabaja con base en situaciones de reparto y partición.

Mancera retoma los aspectos principales de las investigaciones de Dienes (1972), Kieren (1976, 1983), Streefland (1978), Freudenthal (1983), Behr, Lesh, Post y Silver (1983) para hacer una síntesis personal. Todos estos trabajos, según el autor, muestran lo complejo de la enseñanza y la comprensión de las fracciones y enfatiza los aspectos siguientes:

- A) El proceso de aprendizaje de las fracciones es largo y depende de muchos aspectos; desde significados hasta factores didácticos y cognitivos.
- B) Pasar del conocimiento de números enteros a fracciones, implica muchas dificultades, la principal es romper con la idea de que el manejo operativo en los números enteros NO es aplicable a los números fraccionarios.
- C) Analizar la problemática relativa a la enseñanza de las fracciones incorporando sus diversos significados (conceptos) y ampliando el uso de numerosos modelos para su enseñanza (representaciones).
- D) El maestro debe buscar los caminos que más le acomoden y sean los más adecuados a las

condiciones de trabajo que se presentan para lograr la enseñanza de las fracciones.

Salvador Llinares y Victoria Sánchez (1997):

Estos estudiosos de la educación matemática basan sus investigaciones en las realizadas por Kieren (1976), Behr, Lesh, Post y Silver (1983) y Dickson, Brown, y Gibson (1984). En éstas, dicen Llinares y Sánchez, se concluye que alcanzar la comprensión del concepto de fracción con todas sus relaciones conlleva un proceso de aprendizaje a largo plazo. Señalan que existe un camino prolongado desde el primer contacto intuitivo de los niños con las fracciones (relación parte-todo) hasta alcanzar el conocimiento algebraico asociado a estos números. Para llegar al “mega-concepto” número racional se tienen que desarrollar de manera eficiente y gradual todos los subconceptos (interpretaciones) de las fracciones. La interpretación parte-todo, según estos autores, es angular en la adquisición de este mega-concepto.

Llinares y Sánchez plantean también la inquietud de continuar investigando al respecto para obtener conclusiones más fundamentadas, sobre todo en las interpretaciones en que la fracción toca aspectos relacionados con los decimales, la razón y los operadores.

Es usual que los docentes empleen simbologías y algoritmos de forma excesiva y mecánica y no utilizamos las interpretaciones adecuadas para enseñar las fracciones de maneras que favorezcan su comprensión en los niños. Los docentes no debemos confundirnos con esta cantidad de interpretaciones y tenemos que desarrollar habilidades para usar el mayor número de éstas adecuadamente en el proceso de enseñanza.

Simón Mochón (Sin fecha)

Al estudiar las distintas interpretaciones de las fracciones, Mochón orienta su investigación con base en los conceptos de Freudenthal (1983), también describe claramente los tres mecanismos constructivos propuestos por Kieren (1988), para que el niño adquiriera el concepto de fracción:

1. *La equivalencia o la igualdad:* Equivalencia de las partes basadas en la igualdad de área de las partes fraccionadas. La equivalencia se manifiesta de diferentes formas y dependerá de las interpretaciones de las fracciones, no solo en áreas sino también en situaciones de reparto. (Equitatividad)
2. *La partición:* Es la equi-división de una cantidad continua o discreta en un número dado de partes. La forma natural de los niños es partir en mitades y mitades de las mitades. (Exhaustividad)
3. *Unidades Divisibles:* Formación de unidades compuestas que engloba el aceptar a la unidad como divisible y ver a las partes obtenidas como nuevas unidades.

Según la interpretación que Mochón hace de Kieren, estos tres mecanismos se deben desarrollar ampliamente en contextos continuos y discretos, no excluyendo alguno de ellos y cumpliendo los

principios de exhaustividad y equitatividad.

Finalmente, Mochón define las interpretaciones de las fracciones como subconstructos que nos ayudan en la enseñanza del concepto de fracción. La fracción se comporta como una medida, un operador, una razón, un cociente o parte de un todo. Si se desarrollan de manera adecuada estos subconstructos, enfatiza el autor, lograremos en los alumnos incluso una comprensión de los algoritmos.

Las investigaciones que acabo de sintetizar tienen varios aspectos comunes:

- Tienen como fundamento principal las investigaciones de Freudenthal (1983) y Kieren (1976, 1981, 1983 y 1988) y coinciden en asumir los diferentes tipos de interpretaciones que hacen estos autores.
- Señalan que la comprensión de las fracciones implica un razonamiento matemático complejo que debe desarrollarse de manera gradual e integral durante toda la educación básica (preescolar, primaria y secundaria)
- Destacan que el aprendizaje del concepto de fracción en la educación primaria implica una serie de procesos graduales que requieren tiempo para poder realizarse.
- Consideran que emplear el mayor número de representaciones en la enseñanza de fracciones ayuda al alumno a la adquisición del concepto de estos números.
- Las interpretaciones más abstractas de las fracciones como son: puntos en la recta numérica y números racionales, requieren habilidades matemáticas que se van desarrollando poco a poco.
- Antes de iniciar operaciones con fracciones, tales como adición, sustracción, multiplicación y división, se debe comprobar que el alumno cuente con una comprensión del concepto de ***equivalencia de fracciones***, que estos investigadores consideran importante para el entendimiento de las fracciones.

Estas investigaciones también arrojan resultados sobre el tema de investigación, incluso algunas abordan directamente la ***equivalencia de fracciones***.

Mancera (1992), basado en Kieren (1983), indica que la ***equivalencia y partición*** son mecanismos constructivos que operan en cada uno de los subconstructos de los números racionales: medida, cociente, razón y operador. Mancera también señala la ***equivalencia de fracciones*** en base al modelo de partición de la unidad para resolver problemas con adición y sustracción, el cual fue empleado exhaustivamente en los planes y programas de 1980.

Mancera indica que la ***equivalencia de fracciones*** es necesaria en cada uno de los subconstructos para adquirir y desarrollar el concepto de fracción.

Mancera destaca además la investigación de Hart (1981), específicamente en lo que refiere al concepto de ***equivalencia de fracciones***: “Las investigaciones de Hart (1981) con niños ingleses arrojan como otro dato relevante entre los reportados que es un error común [de los estudiantes] al trabajar con el

concepto de equivalencia: atender al tamaño del numerador y el denominador por separado y no a la relación entre ambos”. Este error involucra la aplicación de las propiedades de los números enteros a los números fraccionarios, lo cual también es un obstáculo para el aprendizaje de las fracciones.

Del artículo de Mancera, también es importante resaltar lo siguiente respecto de la ***equivalencia de fracciones***:

En la década de 1980 “*se pretende que el niño establezca **equivalencia** con base en el mismo modelo de partición de la unidad, para que, finalmente, resuelva problemas con adición y sustracción de fracciones... No se basan en el conocimiento que el niño aprende realmente al respecto, en cómo aprende, en lo que no puede aprender y por qué no puede hacerlo*”.

Salvador Llinares y Victoria Sánchez también aluden al concepto de equivalencia en las interpretaciones de: fracción como razón y de fracción como operador al mencionarla en los siguientes dos aspectos:

- 1) Equivalencia de situaciones: Contextos similares con datos diferentes.
- 2) Equivalencia de operadores: Al aplicar a un estado inicial, un operador fraccionario “diferente” para que el resultado sea el mismo estado final. Este operador fraccionario es una fracción equivalente a otra para obtener el mismo estado final.

En el artículo de Simón Mochón también se considera, aunque de manera sintética, el concepto de ***equivalencia de fracciones***, pues refiere al mecanismo constructivo de Kieren (1988): La equivalencia, es la idea de relacionar las partes que provienen de particiones distintas. Así, por ejemplo, dice que dos octavos equivalen a un cuarto o que tres cuartos equivalen a un medio y un cuarto.

En el aspecto de la fracción en su interpretación parte-todo, menciona que ***las fracciones equivalentes***, pueden ilustrarse muy bien gráficamente con representaciones parte – todo, pero hace un señalamiento importante sobre esto: “*siempre y cuando, se mantenga una unidad fija de referencia*”. Es decir, debe hacerse comparación de fracciones para encontrar su equivalencia con base en una misma unidad en cuanto forma, tamaño y área, volumen o longitud.

También en la fracción como cociente Mochón menciona repartos de diferente número de objetos a diferente número de individuos, obteniendo como resultado fracciones equivalentes, es decir, señala que toca lo mismo en el reparto representado por diferentes números de individuos y de objetos, si esos números corresponden a fracciones que son equivalentes entre sí.

Enfocándome de manera directa al contexto de México, revisé la investigación realizada por Martha Dávila Vega, que ya mencioné antes y que fue realizada con alumnos de primer y segundo grados de primaria. Aunque sus objetivos y preguntas de investigación no se refieren centralmente al concepto de ***equivalencia de fracciones***, sí lo incluye de manera implícita y de hecho es un determinante en las conclusiones obtenidas, por lo que, es importante mencionar algunos aspectos de este trabajo.

La investigación de Dávila (1992) concluye con los siguientes puntos:

Respecto a la equivalencia, al cortar dos medios de unidades iguales pero de diferente forma, hubo alumnos que:

- “Negaban la equivalencia cuando las formas de los pedazos cambian.
- Aceptaban la equivalencia solo mediante comprobación con material
- Suponían la equivalencia a través de razonamientos compensatorios, ‘son iguales, solo que este está más gordito y este más flaquito’”.

En sus resultados, esta investigadora resalta el concepto de **equivalencia** indicando que: “*se pueden identificar cuatro grupos de alumnos que se diferencian por el nivel de explicación que sustentan en cuanto a la equivalencia de los repartos*”:

Grupo 1: Alumnos que construyen la relación “*A igual número de pasteles y niños les corresponde igual cantidad de pastel. Independientemente de la forma de los pedazos y el número de cortes*”.

Grupo 2: Alumnos en proceso de construir la relación anterior, “*Prevén la equivalencia poniendo en juego la relación descrita en determinadas situaciones pero dudan de ella frente a otras en las que las formas de los pedazos no son usuales o en las que la gran cantidad de pedazos producidos en el reparto les dificulta hacer visualmente su comparación*”.

Grupo 3: Alumnos que “*son conservadores de área pero que no logran prever la equivalencia de los pedazos centrándose en un primer momento en el número de pedazos para determinarla o negarla*”. *Aceptan la equivalencia si les demuestra con material*”.

Grupo 4: Los alumnos que “*no son conservadores de área y que por lo tanto tampoco han logrado construir la relación indicada en el primer grupo y aunque se les demuestre como a los del grupo 3 no les dice nada*”.

Esta secuencia en el aprendizaje nos ayuda a pensar en introducir el concepto de fracción a partir de problemas de reparto con material concreto a los niños de primero y segundo grados, teniendo como eje que el alumno reconozca poco a poco las equivalencias entre los diferentes tipos de reparto; de manera implícita es una introducción al concepto de **equivalencia de fracciones**.

En todas estas investigaciones se aborda el concepto de **equivalencia de fracciones** y este concepto se considera fundamental para desarrollar el conocimiento sobre la fracción y el orden entre fracciones.

Por otra parte, coincido con la nota de Ávila (2006, p. 188) referente a los programas oficiales de educación primaria de 1993 y al libro para el maestro de matemáticas de quinto grado:

“Las fracciones y sus operaciones deben seguirse trabajando a partir de sus distintos significados, es decir, deben proponerse problemas ligados a situaciones de reparto, partición, medición, razón y división ya que se han incorporado [en el currículo de educación primaria] los significados de razón y cociente. Al desarrollar las actividades se recomienda que los alumnos, en la medida en que lo requieran, representen

las fracciones y resuelvan los problemas utilizando objetos o dibujos, haciendo mediciones reales.”

3. Metodología de la investigación

Dado que esta investigación es de tipo bibliográfico, para su realización haré una revisión de los programas y planes de estudio y de los libros de texto gratuitos de matemáticas en la educación primaria mexicana que se han utilizado entre 1960 y 2011. Estudiaré este período porque es en el que se han publicado y distribuido planes y programas de estudio nacionales y libros de texto gratuitos para los alumnos. Me enfocaré principalmente en los grados de cuarto y quinto, debido a que en estos grados es donde se ha incluido de forma más completa y directa el tratamiento del concepto de ***equivalencia de fracciones***. Eventualmente, en algunos currículos se inicia el desarrollo de este concepto desde tercer grado, en estos casos también será considerado este grado.

De esta forma, enfocaré los esfuerzos, tratando de cumplir con los objetivos planteados para la investigación. De los materiales mencionados, se extraerá y recopilará la información relacionada con las propuestas de enseñanza de la ***equivalencia de fracciones***. Esta revisión se hará de forma selectiva con base en los siguientes procesos:

- *Recopilar toda la información acerca de la enseñanza de la equivalencia de fracciones en los currículos de la educación primaria mexicana entre 1960 y 2011.*
- *Analizar los contenidos, aprendizajes esperados y el proceso de enseñanza y aprendizaje de la ***equivalencia de fracciones*** propuesto en estos currículos.*

De manera general los pasos a seguir en el trabajo de investigación son:

- A) Investigar cuáles fueron los diferentes currículos de la educación primaria mexicana implementados entre 1960 y 2011.
- B) Seleccionar los libros de texto gratuitos que traten con énfasis el tema de ***equivalencia de fracciones***, principalmente de los grados de cuarto y quinto de la asignatura de matemáticas de los diferentes programas de estudio de primaria a analizar.
- C) Identificar las diferentes lecciones y contenidos de cada libro y programa de educación primaria que tengan como tema central la enseñanza de fracciones.
- D) Seleccionar las lecciones que impliquen el concepto de ***equivalencia de fracciones*** implícita o explícitamente.
- E) Conocer la secuencia de las lecciones que implican el concepto de ***equivalencia de fracciones***.
- F) Identificar el tipo de contextos que se utilizan en las lecciones que implican el concepto de ***equivalencia de fracciones***.
- G) Conocer y analizar el tipo de representaciones que se emplean en las lecciones que implican el concepto de ***equivalencia de fracciones***.
- H) Entender los diferentes usos y aplicaciones que se le ha dado al concepto de equivalencia en los

currículos de la educación primaria mexicana.

- I) Reconocer las diferentes formalizaciones que se le han dado al concepto de *equivalencia de fracciones* en el sentido de hacer definiciones formales o no formales de este concepto.
- J) Registrar los aspectos adecuados utilizados en las diferentes secuencias del proceso de enseñanza del concepto de *equivalencia de fracciones*.
- K) Identificar los elementos que permitan integrar en una propuesta didáctica todos los aspectos adecuados de las secuencias analizadas en los diferentes currículos de la educación primaria mexicana.

Con base en los aspectos anteriores se analizarán específicamente los libros de texto gratuitos y los planes y programas de estudio de la educación primaria utilizados en México de 1960 a 2011 y así cumplir con los objetivos de investigación y contestar las preguntas planteadas.

CAPITULO II: La Equivalencia de Fracciones en el currículo introducido en 1960

Introducción²

La Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg) fue fundada en el año de 1959. Los primeros libros que publicó esta Comisión fueron muy importantes para nuestro país, por lo que, según su Presidente, Martín Luis Guzmán, su diseño debía ser cuidadoso, a fin de no contener expresiones que suscitaran rencores, odios, prejuicios o controversias.

La producción de estos libros buscó ser un apoyo a la igualdad en la educación, ya que se distribuyeron en las escuelas de todo el país y muchos de los libros que se publicaron se reeditaron cada año durante los siguientes 12 años. En 1960 se produjeron 19 títulos para los alumnos de primaria y 2 para el maestro. Las portadas de estos libros presentaban obras de los ilustres pintores David Alfaro Siqueiros, Roberto Montenegro, Alfredo Zalce, Fernando Leal y Raúl Anguiano. Además de conmemorar 150 años de la independencia y 50 de la revolución mexicana, las portadas tenían como objetivo promover en los niños el sentimiento de “ser mexicano”.

En 1962 se empleó una obra de Jorge González Camarena como portada de los libros de texto la ilustración de una mujer morena - "La Patria" – que representaba el pasado, presente y futuro de nuestra Nación (Imagen 1). Esta imagen fue sumamente apreciada hasta 1972, ilustró más de 350 libros. En el año de 2015 se retoma esta imagen y actualmente aparece de nuevo en las portadas de los libros de texto gratuitos de primaria.



Imagen 1. Portada “La Patria” de los primeros libros de texto gratuito.

Respecto del contenido de aquellos libros, el Consejo Nacional Técnico de la Educación (Conalite) propuso un conocimiento basado en las propias experiencias que sustituyera al aprendizaje memorístico, y por un equilibrio entre la formación y la información que se diera a los niños mexicanos. Con este fin, elaboró un documento donde se exponían los principios científicos y pedagógicos que normarían el

² Este apartado constituye un resumen con algunos comentarios del texto que se muestra en la página web <http://www.gob.mx/index.php/historia>. Conaliteg. Historia. (s.f.). Recuperado el 22 de noviembre de 2014, de <http://www.conaliteg.gob.mx/>

Sistema Educativo, los objetivos y requisitos de los planes de estudio. En Educación Primaria, se propuso: estructurar las materias en áreas que correspondiesen a los grandes objetivos de la Educación Nacional y a la formación de hábitos y destrezas de importancia esencial. Es así como surgen los planes y programas de estudio de 1960.

En este trabajo de investigación me enfocaré a la asignatura de matemáticas que en aquella época incluía sólo dos ramas de esta disciplina: Aritmética y Geometría. De estas dos ramas analizaré únicamente los contenidos y actividades desarrollados dentro de la Aritmética, pues es la parte de las matemáticas que estudia las fracciones y sus operaciones; dentro de las fracciones analizaré el concepto de ***equivalencia de fracciones***, tema de estudio del presente proyecto de investigación. A continuación, me referiré específicamente a Aritmética y Geometría.

1. Currículo de Aritmética y Geometría de 1960³

En julio de 1959, como se cita en Ávila (1988, p. 23), el entonces Secretario de Educación Pública, Jaime Torres Bodet, planteó al Conalste, la necesidad de revisar los programas de estudio “*a fin de eliminar de ellos lo superfluo, acentuar los puntos esenciales, ordenar mejor los temas, dar a la educación primaria un sentido activo y mejorar el rendimiento escolar*”.

El resultado de la revisión fue el Plan de Estudios elaborado por el Conalste, estructurado en seis áreas:

1. Protección a la salud y el mejoramiento del vigor físico.
2. Investigación del medio y aprovechamiento de los recursos naturales.
3. Comprensión y mejoramiento de la vida social.
4. Actividades creadoras.
5. Actividades prácticas.
6. ***Adquisición de los elementos de la cultura.***

La Aritmética y La Geometría, junto con Lengua Nacional (Español), eran sub-áreas del área de adquisición de los elementos de la cultura. Los objetivos generales que los alumnos deberían alcanzar para los seis años de primaria fueron los siguientes:

1. Capacidad para apreciar conjuntos.
2. Habilidad para resolver problemas.
3. Destrezas para pesar y medir.
4. Prácticas de trazo geométrico y construcción de objetos útiles.
5. Habilidad para elaborar proyectos.
6. Actitud y habilidad para registrar hechos y fenómenos.

El programa de Aritmética y Geometría incluía los siguientes apartados:

³Este apartado constituye una síntesis con algunos comentarios personales de los textos: Ávila A. (1988, pp. 23-29) y de Villa L. (2009, pp. 110-112), las fichas completas se encuentran en las referencias bibliográficas.

- A) Metas generales para la educación primaria.
- B) Recomendaciones didácticas, tituladas “Recomendaciones sobre métodos”, también generales para la educación primaria.
- C) Programas por Grado, que incluían metas de conocimiento, habilidad, hábito, capacidad y actitud y una mezcla de actividades y temas desglosados que se tratarían durante el año escolar.

Los temas generales de estudio de la Aritmética y la Geometría en el nivel de educación primaria eran los siguientes:

Aritmética:

- 1. Numeración.
- 2. ***Operaciones fundamentales con enteros, fracciones comunes, fracciones decimales, números complejos (denominados).***
- 3. Sistemas de pesas y medidas.
- 4. Sistemas monetarios.
- 5. Operaciones comerciales.
- 6. Nociones estadísticas.
- 7. Segunda y tercera potencias de los números enteros. Extracción de raíz cuadrada.
- 8. Nociones elementales de Contabilidad.

Geometría:

- 1. Forma y dimensiones de los cuerpos
- 2. Cuerpos geométricos

Como se puede observar, en el tema número 2 de Aritmética se incluye el contenido de fracciones comunes.

1.1 Lineamientos para la enseñanza de Aritmética y Geometría

Según dice Ávila (1988, p. 28), en estos programas se observan ciertos avances, con respecto al plan de 1944, en lo que a la propuesta didáctica se refiere.

“El Plan de Estudios de 1958, empieza a precisar una postura frente al aprendizaje matemático, al rechazar explícitamente el aprender mecánico y sin algún significado. En él se afirma: El problema debe ser el punto de partida y de llegada de todo estudio matemático. Es un error hacer de la multiplicación o de cualquier otra parte del cálculo una finalidad de la enseñanza. Saber hacer una operación solo tiene valor cuando se aplica a la resolución de problemas. El saber mecánico, automático, sin propósito, constituye una negación de los fines educativos”.

En este currículo también se indica con claridad el cómo enseñar matemáticas; se dan a los profesores los siguientes lineamientos generales para la enseñanza de la aritmética y la geometría (Villa L. (2009, p. 112)):

- 1. La enseñanza de las matemáticas elementales debe ir de lo concreto a lo abstracto.
- 2. La práctica matemática se llevará por medio de situaciones concretas y objetos conocidos.

3. La enseñanza se basará en manipulaciones experimentales y el manejo de objetos.
4. Toda tarea práctica precederá a la realización de las operaciones con símbolos.
5. El conocimiento del símbolo se presentará en el momento oportuno para que el niño descubra los principios y reglas que rigen las operaciones.
6. La comprensión precederá a la habilidad del cálculo y la memorización de las reglas.
7. Los temas, ejercicios y problemas serán ordenados a fin de lograr su más fácil aplicación práctica.
8. La experiencia debe permitir la captación del símbolo correspondiente.
9. El aprendizaje debe interesar al alumno para lograr la comprensión del conocimiento teórico.

En estos lineamientos puede observarse la preocupación por anteponer a lo abstracto, el mundo “de lo concreto”. Este ha de ser el punto de partida para todo aprendizaje, ha de partirse de la experiencia sensible para llegar a lo abstracto, al mundo de los símbolos y las ideas, como se comenta en Ávila (1988, pp. 28-29).

Esto es lo que señala en teoría el currículo, pero como veremos en los siguientes incisos, se observa en los libros y cuadernos de trabajo de aritmética y geometría de esta época que se promueve un aprendizaje de tipo mecánico.

1.2 Libros y cuadernos de trabajo de Aritmética y Geometría de 1960

En cada área del plan de estudios se editaron dos libros para el alumno para cada grado. En el caso de Aritmética y Geometría, uno llamado “Mi cuaderno de trabajo de Aritmética y Geometría” y otro llamado: “Mi libro de Aritmética y Geometría”.

En este currículo también se indican seis áreas básicas que deben contener los libros de matemáticas por grado; estas áreas son:

1. Conjunto de conocimientos aritméticos y geométricos que debe adquirir gradualmente el educando para que al concluir el sexto año domine los *sistemas de numeración de enteros y fracciones y las cuatro operaciones fundamentales de esos números*; el sistema métrico decimal y las medidas inglesas, las medidas de tiempo y los números denominados, los conceptos de razón y proporción; el sistema monetario mexicano, y el conocimientos de figuras planas y cuerpos geométricos.
2. Desarrollar en el educando la habilidad para aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas prácticos.
3. Desarrollo de la habilidad para pesar y medir.
4. Práctica para el trazo y la construcción geométricos.
5. Capacidad para elaborar proyectos.
6. Habilidad para registrar hechos y fenómenos (Villa L. (2009, p. 112).

Es importante resaltar que en la primera de estas áreas básicas, se propone desarrollar el dominio de las fracciones y operaciones fundamentales de estos números durante toda la educación primaria.

Como ya mencioné antes, el presente trabajo de investigación se enfoca principalmente en el cuarto y quinto grados de la Educación Primaria, pues en la revisión preliminar a los currículos de Educación Primaria de 1960 a 2011 se observó que en se da especial atención al contenido y uso de fracciones en estos dos grados.

En el caso específico del currículo de 1960, se inicia el análisis con cuarto año, pues en este grado se comienza el desarrollo de las fracciones y específicamente del concepto de *equivalencia de fracciones*, que es el interés de esta tesis.

2. Presentación de las fracciones en el cuarto grado

2.1 Mi libro de cuarto año de Aritmética y Geometría

El material bibliográfico con el que inicio el análisis es: “Mi libro de cuarto año de Aritmética y Geometría”, específicamente analizaré el desarrollo de la *equivalencia de fracciones*. Este libro se trabajaba conjuntamente con el cuaderno de trabajo que se describirá en el apartado 2.2 de este capítulo. En este cuaderno se ejercitan los conceptos, procedimientos y los algoritmos expuestos en el libro, mediante la resolución de ejercicios y realización de actividades con cierto sentido mecánico y memorístico y con mínima resolución de problemas.

En este libro se inicia el tema de: “Fracciones Comunes”. Con la situación de repartir melones entre un grupo de alumnos y maestros que se presenta en el libro, se introduce el concepto de fracción, y el de *fracción equivalente*, presentando las siguientes definiciones:

“Toda fracción puede convertirse en otra de igual valor”. (SEP (1969a, p. 46)

“Simplificar fracciones es transformarlas en otras, equivalentes, pero de términos más sencillos. Se hace la operación dividiendo ambos términos entre un mismo número”. (SEP (1969a, p. 47)

Para las operaciones de suma y resta de fracciones de diferente denominador, se señala:

“Reducir fracciones a un común denominador es transformarlas en otras, equivalentes, que tengan el mismo denominador. El valor de una fracción no se altera cuando se multiplican ambos términos por un mismo número”. (SEP (1969a, p. 50)

El concepto de *equivalencia de fracciones*, se introduce definiéndola con base en una división sucesiva de los términos de varias fracciones entre dos y usando el signo igual (=) en lugar del término equivalente:

“Si dividimos $\frac{1}{2}$ en dos partes iguales, tendremos $\frac{2}{4}$, y si volvemos a dividir esos $\frac{2}{4}$, cada uno en otras dos partes iguales tendremos $\frac{4}{8}$ y así sucesivamente, es decir que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, etcétera” (Imagen 2)

Es que las fracciones siempre se pueden dividir en otras partes iguales. Si dividimos $\frac{1}{2}$ en dos partes iguales, tendremos $\frac{2}{4}$, y si volvemos a dividir esos $\frac{2}{4}$, cada uno en otras dos partes iguales, tendremos $\frac{4}{8}$, y así sucesivamente; es decir, que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, etcétera.

Si $\frac{1}{2}$ lo dividimos en tres partes iguales, tendremos $\frac{3}{6}$, y si esos $\frac{3}{6}$ volvemos a dividirlos, cada uno en dos partes iguales, tendremos $\frac{6}{12}$, etc.; es decir, que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$, etc.

Imagen 2: Definición de equivalencia empleando la igualdad. Mi libro de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1969a, p. 46)

En páginas posteriores se indica el procedimiento para simplificar fracciones y se especifica el procedimiento para encontrar fracciones equivalentes mediante división del numerador y denominador entre el mismo número. (Imagen 3).

Luis sabía que $\frac{2}{4}$ es igual a $\frac{1}{2}$ porque puede convertir una fracción en otra de igual valor. Es decir, **sabe simplificarla**.

También nosotros podemos hacerlo. Si tenemos $\frac{6}{8}$, los podemos transformar en $\frac{3}{4}$ dividiendo ambos términos **entre dos**. Así:

$$\frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$$

Si queremos simplificar $\frac{8}{12}$, dividimos los términos **entre cuatro**. Así:

$$\frac{8 : 4}{12 : 4} = \frac{2}{3}$$

Simplificar fracciones es transformarlas en otras, equivalentes pero de términos más sencillos. Se hace la operación dividiendo ambos términos entre un mismo número.

Imagen 3: Procedimiento para simplificar fracciones. Mi libro de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1969a, p. 50).

Al presentar el algoritmo para resolver sumas de fracciones con diferente denominador, se indica el uso de la **equivalencia de fracciones** al convertir todas las fracciones a un mismo denominador:

“Solo se suman fracciones de igual denominación, es decir, homogéneas, [entonces] tenemos que convertirlas a un mismo denominador”. (SEP. 1969a, p. 51)

También se sugiere emplear tablas de equivalencias de fracciones que, desde mi punto de vista, fomentan la memorización y el proceso mecánico para realizar las operaciones, pues se utiliza como unico apoyo gráfico la misma tabla de equivalencias, no se realizan mas actividades para una mejor visualización y comprensión de la **equivalencia de fracciones**(Imagen 4).

Además, como puede verse en esa misma página del libro, se fomenta el aprendizaje memorístico desde el momento que se menciona al inicio de la misma página (Imagen 4) que: *“Luis es muy listo porque se sabe de memoria las equivalencias, aprendámoslas”* y se muestran las tablas de equivalencia.

REDUCCION DE FRACCIONES A UN COMUN DENOMINADOR

Luis es muy listo y suma fracciones rápidamente, ya que sabe de memoria las equivalencias. Aprendámoslas:

$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

A Luis, su mamá le preguntó:
 —¿Cuánto es $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{4}$ de metro de tela?
 —Son $\frac{5}{8}$, mamá —contestó Luis sin titubear.
 Escribamos lo que Luis hizo mentalmente.
 Como sabemos que sólo se suman fracciones de igual denominación, es decir, **homogéneas**, tenemos que convertirlas a un mismo denominador, el cual, en este caso, es 8; tenemos, pues, que $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, según nos lo dice la tabla de equivalencias. Ahora sí podemos sumar:

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

El resultado se expresa en su forma más simple.
 Siempre que queramos tener fracciones con un mismo denominador, estará en nuestra mano el convertirlas en otras equivalentes, valiéndonos de las **tablas de equivalencias**.
 Podemos convertir $\frac{1}{2}$ en cuartos, en sextos, en octavos; $\frac{2}{3}$ en sextos, en doceavos; $\frac{3}{4}$ en octavos, en doceavos; $\frac{3}{5}$ en décimos, etcétera.
 Por las equivalencias sabemos que el **común denominador**:
 de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ es 12; el de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{10}$ es 10;
 el de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$ es 8; el de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ es 6.
 Así: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

Imagen 4: Tablas de equivalencias y algoritmo para resolver suma de fracciones con diferente denominador. Mi libro de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1969a, p. 51).

El procedimiento para encontrar fracciones equivalentes se completa posteriormente con la idea de mutiplicar el numerador y el denominador por el mismo número. (Imagen 5)

Al hacer esta transformación encontramos que lo que hicimos fue multiplicar ambos términos de cada fracción por un mismo número:

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

Reducir fracciones a un común denominador es transformarlas en otras, equivalentes, que tengan un mismo denominador. El valor de una fracción no se altera cuando se **mutiplican ambos términos por un mismo número**.

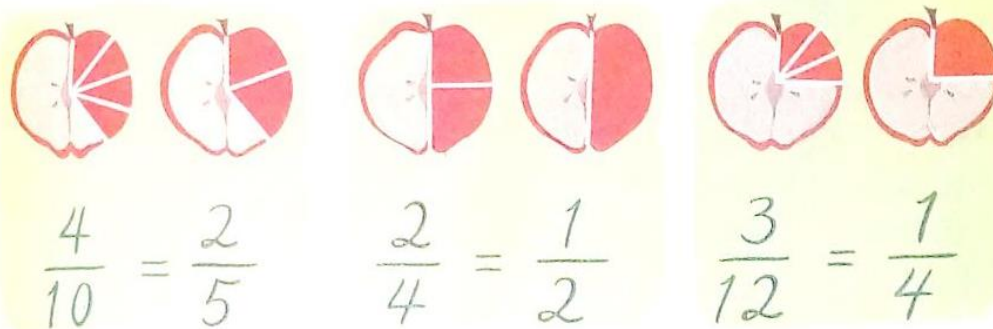
Imagen 5: Procedimiento para encontrar fracciones equivalentes. Mi libro de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1969a, p. 52).

En el procedimiento para obtener fracciones equivalentes presentado en la imagen 5, se muestra al igual

que el de la imagen 4, un aprendizaje por medio de reglas, sin que con anterioridad haya habido sustentos gráficos suficientes u otra actividad que evite la mecanización; se fomenta nuevamente el aprendizaje memorístico.

Al indicarse el algoritmo para resolver la resta de fracciones con diferente denominador, también se define, al igual que la suma de fracciones con diferente denominador, que para poder efectuar la operación, las fracciones se deben transformar en otras con denominador común. Se complementa esta regla con algunos dibujos de manzanas que se observan para que se aprendan las fracciones equivalentes por simple visualización, como se indica en la imagen 6. Aunque esta representación no cumple el principio de equitatividad, pues las partes en que se dividieron las figuras no son iguales.

Para la **sustracción** también deben tener las fracciones igual denominador, y se procede en la misma forma.



Si de $\frac{1}{2}$ m de tela, se usan $\frac{2}{5}$ m, ¿cuánto queda?

Los **medios** y los **quintos** se convierten en **décimos**; 10 es el común denominador. Luego:

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

Ahora, podemos restar:

$\frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$

Aprendamos las equivalencias de las fracciones y, por simple observación, encontraremos el **común denominador** que convenga.

Para sumar y restar fracciones, éstas deben tener igual denominador. En caso contrario, hay que convertirlas a **un común denominador**.

Imagen 6: Algoritmo para realizar restas de fracciones con diferente denominador. Mi libro de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1969a, p.53).

Con este algoritmo se concluye en este libro el desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones*. El contenido del libro se integraba con ejercicios y actividades que se incluían en el cuaderno de trabajo que lo complementaba.

2.2 Mi cuaderno de trabajo de cuarto año de Aritmética y Geometría

En el siguiente cuadro (Cuadro 1), se anotan los datos principales sobre los contenidos y actividades para el aprendizaje de las fracciones incluidas en “Mi cuaderno de trabajo de cuarto año” (SEP. 1961a).

Cuadro 1. Actividades y contenidos de fracciones en el cuarto grado. (SEP. 1961a)

Tema	Paginas	Contenidos y Actividades
Fracciones Comunes (Quebrados).	38 – 43	Realizar sumas de fracciones con diferente denominador, con apoyo de representaciones gráficas (círculos). Ordenar fracciones con apoyo de representaciones gráficas en círculos; indicar cuál fracción de las representadas es mayor y cuál es menor. Ordenar fracciones a partir de representaciones numéricas. Encontrar fracciones equivalentes a partir de representaciones numéricas. Identificar fracciones impropias en un grupo de fracciones dadas. Convertir fracciones impropias a números mixtos. Reducir una fracción dada a su mínima expresión (simplificar fracciones). Encontrar una fracción equivalente a otra dada. Escribir el numerador faltante en pares de fracciones equivalentes dadas. Elaborar una tabla de equivalencias de las fracciones comunes: medios, tercios, cuartos. Resolver sumas y restas de fracciones de dos o tres términos con igual o diferente denominador, anotando el resultado de forma simplificada y cuando sea una fracción impropia convertirla a número mixto. Resolver multiplicaciones y divisiones de fracciones anotando el resultado de forma simplificada y cuando sea una fracción impropia convertirla a número mixto. Resolver problemas que impliquen alguna operación sencilla con fracciones. Empleo de la definición de <i>equivalencia de fracciones</i> y el procedimiento para encontrar <i>fracciones equivalentes</i> de forma mecánica.

En este cuaderno de trabajo se presenta el tema de fracciones en un segmento de páginas continuas y en las páginas subsecuentes ya no se vuelve a abordar el tema. En este análisis destaco las actividades que tienen alguna relación con el concepto de *equivalencia de fracciones*.

Se inicia el tema de fracciones comunes con sumas de fracciones de diferente denominador en forma gráfica utilizando círculos; como se aprecia en la imagen 7. Al realizar la suma y expresar el resultado de la misma y ordenar los resultados, se emplea el concepto de *equivalencia de fracciones*.

Representa con números las fracciones que ves expresadas gráficamente. Suma las que están sombreadas y anota el resultado en el espacio de la derecha.

¿Cuál de las fracciones comunes, expresadas arriba, es la mayor? _____ ¿Cuál es la menor? _____

Imagen 7: Suma en forma gráfica de fracciones con diferente denominador y orden de las fracciones. Mi cuaderno de trabajo de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1961a, p. 38).

En el siguiente ejercicio de la misma lección, se pide al alumno subrayar de entre varios números, cuál es igual (=) al número dado (Imagen 8):

Subraya la respuesta correcta:

$\frac{5}{5}$ es igual a:	1	5	3	2
2 es igual a:	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{2}$

Imagen 8: Subrayar el número que es igual al número dado. Mi cuaderno de trabajo de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1961a, p. 38)

En la actividad que se muestra en la Imagen 9, se pide reducir las fracciones a su más simple expresión (simplificar). Solo se indica el procedimiento mostrado en la imagen 3 para hacerlo, no señalan ejemplos resueltos, ni algún apoyo gráfico para resolver estos ejercicios.

Reduce las fracciones siguientes a su más simple expresión:

$\frac{6}{12} =$	$\frac{2}{4} =$	$\frac{3}{9} =$
$\frac{2}{8} =$	$\frac{3}{12} =$	$\frac{6}{8} =$
$\frac{4}{6} =$	$\frac{4}{8} =$	$\frac{8}{10} =$
$\frac{8}{12} =$	$\frac{6}{10} =$	$\frac{3}{6} =$

Imagen 9: Simplificar fracciones. Mi cuaderno de trabajo de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1961a, p. 39).

Después de resolver estos dos ejercicios que requieren uso de *fracciones equivalentes*, se introduce a los alumnos en la realización de ejercicios para obtener una *fracción equivalente* a una fracción dada, ya utilizando el término *equivalente* (Imagen 10).

Anota una fracción equivalente a:

$\frac{1}{2} =$	$\frac{1}{3} =$	$\frac{2}{3} =$	$\frac{1}{5} =$	$\frac{1}{6} =$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Imagen 10: Anotar una fracción equivalente. Mi cuaderno de trabajo de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1961a, p. 39).

En los siguientes ejercicios y actividades, se emplea el término *fracciones equivalentes*, de manera mecánica, al simplificar fracciones, dibujar tablas de equivalencia, resolver sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de fracciones. Como se puede ver en las imágenes, ya no se da ningún apoyo gráfico ni algún tipo de representación que no sea simbólica para apoyar las respuestas. Se espera que los alumnos al haber memorizado las reglas para obtener las *fracciones equivalentes* indicados en el libro de Aritmética y Geometría (1969a), resuelvan correctamente los ejercicios. (Imagen 11).

Busca los numeradores que completen correctamente estas fracciones equivalentes:

$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$	$\frac{1}{3} = \frac{\quad}{6}$	$\frac{1}{6} = \frac{\quad}{12}$
$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{12}$	$\frac{2}{6} = \frac{\quad}{12}$	$\frac{1}{4} = \frac{\quad}{8}$
$\frac{4}{6} = \frac{\quad}{3}$	$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{8}$	$\frac{2}{8} = \frac{\quad}{4}$

Dibuja tu tabla de equivalencias de las siguientes fracciones comunes: **medios, tercios, cuartos.**

Realiza estas operaciones en una hoja de papel y pon los resultados frente al signo de igualdad, en su forma más simple. Si el resultado es una fracción impropia, redúcela a número mixto.

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$	$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} =$	$\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} =$
$\frac{2}{5} + \frac{1}{10} =$	$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} =$	$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} =$
$\frac{1}{3} + \frac{8}{9} =$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{10} =$	$\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$
	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$	

Procede de la misma manera con las siguientes restas:

$\frac{2}{8} - \frac{1}{8} =$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$	$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} =$
$\frac{5}{12} - \frac{1}{6} =$	$\frac{7}{12} - \frac{1}{3} =$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$
$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} =$	$\frac{5}{6} - \frac{5}{12} =$	$\frac{5}{6} - \frac{5}{12} =$
	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$	

Haz las siguientes multiplicaciones. Reduce los resultados a su más simple expresión, y si obtienes fracciones impropias, conviértelas en números mixtos.

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = & \frac{12}{5} \times \frac{1}{2} = & \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = & \frac{9}{4} \times \frac{4}{5} = & \frac{4}{3} \times \frac{5}{3} = \\ \frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = & \frac{8}{10} \times \frac{1}{2} = \\ & \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = & \end{array}$$

Ejecuta las siguientes divisiones. Simplifica los resultados y conviértelos en números mixtos, si conviene.

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} : \frac{2}{3} = & \frac{8}{12} : \frac{1}{3} = & \frac{4}{6} : \frac{1}{4} = \\ \frac{6}{8} : \frac{2}{4} = & \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = & \frac{9}{10} : \frac{1}{8} = \\ \frac{1}{2} : \frac{1}{5} = & \frac{2}{5} : \frac{1}{6} = & \frac{7}{2} : \frac{2}{10} = \\ & \frac{4}{5} : \frac{3}{8} = & \end{array}$$

Imagen 11: Ejercicios y actividades donde se emplea el concepto de fracciones equivalentes. Mi cuaderno de trabajo de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1961a, pp. 41-42).

Los únicos problemas que se plantean en este Cuaderno de trabajo son los que se ven en la imagen 12. Considero que no es suficiente plantear cuatro problemas sobre fracciones en todo el año escolar para desarrollar la capacidad de resolver problemas con estos números, el docente debió integrar todos los necesarios.

Resuelve los siguientes problemas:

A Luis le dieron $\frac{1}{4}$ de un pastel, y a Jaime $\frac{3}{8}$. ¿Quién tiene el pedazo más grande? R _____

El maestro formó cuatro equipos y dividió entre ellos la parcela correspondiente a su clase, para que la cultivaran. Al primer equipo le dio $\frac{1}{3}$; al 2º, $\frac{2}{12}$; al 3º, $\frac{1}{6}$; y al 4º, $\frac{2}{6}$. ¿Qué parte de la parcela quedó sin cultivar? R _____

Toma esta jalea, dice a Margarita su mamá. La mitad llévala a tu abuelita, guárdame $\frac{1}{8}$ en la despensa, y la demás repártela a tus hermanos. ¿Qué fracción le queda para sus hermanos? R _____

Los alumnos de 4º año han organizado una fiesta. Calculan que $\frac{1}{4}$ de caja de nieve es bastante para cada niño. ¿Cuántas cajas necesitan comprar si son 32 alumnos? R _____

Imagen 12: Resolución de Problemas que implican operaciones con fracciones. Mi cuaderno de trabajo de cuarto año aritmética y geometría. (SEP. 1961a, p. 43).

2.3 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado

En este grado destaco los puntos siguientes:

- ❖ La cantidad y la forma de presentación de los ejercicios es extensa. Se orientan más bien a una idea procedimental y mecánica de la equivalencia, los apoyos gráficos son mínimos.
- ❖ Se establecen definiciones y procedimientos a partir de algún ejemplo expresado numéricamente, fomentando así la memorización.

Por lo anterior, considero que en cuarto grado la secuencia de enseñanza de las **fracciones equivalentes** tiene una orientación basada en procedimientos, en cierta forma mecánica y que la aplicación de este concepto es muy limitada pues principalmente se hace a partir de la simplificación de resultados de las operaciones entre fracciones y solución de cuatro problemas.

3. Presentación de las fracciones en el quinto grado

3.1 Mi libro de quinto año Aritmética y Geometría

En este material bibliográfico, el tema se titula: “Fracciones Comunes y Números mixtos”, aquí se da una explicación y ejemplos de fracciones comunes con un enfoque teórico.

El concepto de fracción en este grado se inicia proporcionando algunas informaciones, como las siguientes:

“Una fracción es la parte de un entero; las fracciones son conocidas desde la antigüedad (en las culturas egipcia o azteca, entre otras); una serie de significados de numerador o dividendo y denominador o divisor, fracciones propias, impropias y mixtas” (SEP. 1969b, p. 42).

El procedimiento para obtener **fracciones equivalentes** se da con base en dibujos de figuras planas como: círculos, cuadrados y rectángulos: se muestra una figura dividida en tercios, otra en sextos y se hace la comparación siguiente: $1/3 = 2/6$ porque son “de igual tamaño y forma”. Después de hacer notar lo anterior, se obtiene como conclusión que “el valor de un quebrado no se altera si tanto el numerador como el denominador se dividen o multiplican por el mismo número” (Imagen 13).

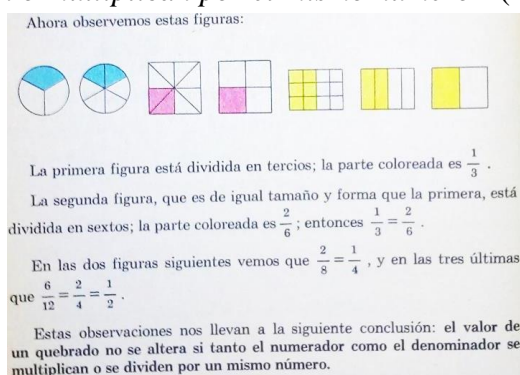


Imagen 13: Definición y procedimiento para obtener fracciones equivalentes. Mi libro de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1969b, p. 54).

Este libro nos señala que al usar el procedimiento para obtener *fracciones equivalentes* a partir de multiplicar o dividir por el mismo número los dos términos de una fracción dada, “esta propiedad nos permite simplificar un quebrado”, “también nos permite transformar una fracción en otra que tenga el denominador que queramos” (Imagen 14).

Esta propiedad nos permite simplificar un quebrado, es decir, darle la forma más simple. Ejemplos:

Los dos términos se dividen entre .

$\frac{5}{15}$	cinco	$\frac{1}{3}$	}	quebrados simplificados.
$\frac{4}{12}$	cuatro	$\frac{1}{3}$		
$\frac{7}{14}$	siete	$\frac{1}{2}$		

Esa misma propiedad nos permite también transformar una fracción en otra que tenga el denominador que queramos. Por ejemplo: quiere convertirse $\frac{3}{4}$ a dieciseisavos, esto es, $\frac{3}{4} = \frac{?}{16}$; el denominador 4 debe multiplicarse por 4 para dar 16; entonces, el numerador también debe multiplicarse por 4, y queda $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$.

Otro ejemplo: $\frac{5}{7} = \frac{?}{21}$; para que 7 se convierta en 21 se ha multiplicado por 3, luego el 5 también debe multiplicarse por 3, así: $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$.

Imagen 14: Procedimiento y definición de simplificación de fracciones. Mi libro de quinto año aritmética y geometría. (SEP, 1969b, p. 55).

Para finalizar el tratamiento de la equivalencia en este libro se menciona que en la adición y sustracción de quebrados con diferente denominador; “la condición indispensable para que dos cantidades puedan sumarse o restarse es que ambas cantidades sean de una misma especie... dos quebrados son de una misma especie si tienen un mismo denominador” (SEP, 1969b, p. 56) y la obtención de los quebrados con el mismo denominador debe ser por medio del mínimo común denominador (mcd). No se utiliza explícitamente la definición de *fracciones equivalentes*, pero sí una forma mecánica de encontrar el mínimo común denominador (Imagen 15).

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE QUEBRADOS

Como ya dijimos al hablar de suma y resta de enteros, la condición **indispensable** para que dos cantidades puedan sumarse o restarse es que **ambas cantidades sean de una misma especie**. Así:

$$3 \text{ manzanas} + 7 \text{ manzanas} = 10 \text{ manzanas.}$$

$$10 \text{ peras} - 4 \text{ peras} = 6 \text{ peras.}$$

$$3 \text{ séptimos} + 2 \text{ séptimos} = 5 \text{ séptimos} \quad \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \right)$$

$$4 \text{ manzanas} + 5 \text{ peras} = \text{no pueden sumarse.}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \text{así no pueden sumarse.}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \text{así no pueden restarse.}$$

Resulta sencillo entender que dos quebrados son de una **misma especie** si tienen un **mismo denominador**. Cuando no lo tienen, se transforman de manera que puedan tenerlo; así:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$$

Imagen 15: Algoritmo para resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador. Mi libro de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1969b, p. 56).

3.2 Mi cuaderno de trabajo de quinto año de Aritmética y Geometría

El análisis de “Mi cuaderno de trabajo de quinto año. Aritmética y geometría” que es el complemento del libro del alumno, está enfocado en el manejo de las fracciones y específicamente en el concepto de equivalencia entre las mismas. En este cuaderno de trabajo lo que realmente se trabaja es la definición de *fracciones equivalentes*.

En el cuadro 2, se indican los contenidos y actividades relacionadas con fracciones, incluidas en este cuaderno de trabajo:

Cuadro 2. Actividades y contenidos de quinto grado sobre fracciones. (SEP. 1961b).

Tema	Paginas	Contenidos y Actividades
Fracciones Comunes (Quebrados).	78 – 105	<p>Representación de fracciones en rectángulos tipo regletas.</p> <p>Comparar pares de fracciones para indicar cuál es mayor, observando la representación anterior.</p> <p>Completar pares de fracciones de manera que sean equivalentes.</p> <p>Completar, anotando el numerador o denominador faltante en pares de fracciones equivalentes.</p> <p>Anotar fracciones equivalentes a una dada.</p> <p>Anotar el signo = o \neq a cada par de fracciones, según corresponda.</p> <p>Escribir la fracción faltante a otra fracción que se da para completar un entero.</p> <p>Completar expresiones correspondientes a reglas y definiciones relacionadas con fracciones (incluidas algunas referentes a <i>fracciones equivalentes</i>).</p> <p>Resolver sumas y restas de fracciones con diferente o igual denominador.</p> <p>Completar “secuencias” de fracciones.</p> <p>Convertir fracciones impropias a mixtas y viceversa.</p> <p>Simplificar fracciones, a partir de un ejemplo dividiendo el numerador y denominador entre el mismo número.</p> <p>Encontrar el menor múltiplo común a números dados.</p> <p>Resolver sumas de fracciones usando el mínimo común denominador (mcd).</p> <p>Resolver restas de fracciones usando el mínimo común denominador (mcd).</p> <p>Resolver sumas y restas de fracciones con números mixtos usando el mínimo común denominador y simplificando resultados.</p> <p>Resolver problemas que impliquen suma o resta de fracciones.</p> <p>Completar cuadros mágicos empleando fracciones cuyas sumas horizontales, verticales y diagonales den como resultado la misma cantidad.</p> <p>Completar un cuadro de referencias cruzadas; en las columnas tiene los números enteros del 1 al 12 y en los renglones las fracciones de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, hasta $\frac{1}{10}$ realizando la multiplicación de la fracción por el número entero y escribiendo el resultado en el lugar correspondiente de manera simplificada.</p> <p>Realizar multiplicaciones de fracciones, simplificando los resultados.</p> <p>Realizar algunas actividades como completar expresiones donde se aplique la multiplicación de fracciones.</p> <p>Encontrar el recíproco de un número, empleando fracciones y enteros.</p> <p>Transformar en multiplicación de fracciones las divisiones de fracciones dadas.</p> <p>Resolver divisiones de fracciones.</p> <p>Resolver problemas que impliquen división de fracciones.</p> <p>Resolver ejercicios donde se aplica todo lo aprendido sobre fracciones.</p> <p>Empleo de definición y procedimiento para encontrar fracciones equivalentes.</p>
Equivalencia	106-107	Equivalencia entre fracciones comunes y decimales.

(Continúa)

Cuadro 2. (Concluye)

Tema	Paginas	Contenidos y Actividades
entre Fracciones comunes y decimales.		<p>Leer textos que expresan los procedimientos para convertir fracciones comunes a decimales.</p> <p>Realizar sumas y restas con combinación de decimales y fracciones comunes.</p> <p>Obtener el número decimal correspondiente a una fracción indicada, mediante el procedimiento de dividir el numerador entre el denominador.</p> <p>Obtener fracciones decimales escribiendo la fracción correspondiente con denominador 10, 100 o 1000 y simplificarla.</p>
Razones y Proporciones	163-172	<p>Representación de fracciones utilizando figuras planas.</p> <p>Completar enunciados de razones y proporciones, utilizando fracciones.</p> <p>Resolver problemas de razones y proporciones.</p> <p>La fracción como razón.</p>
Por ciento e interés simple	173-178	<p>Por ciento⁴ como fracción común con denominador 100 y su equivalente en la expresión utilizando % (por ciento).</p> <p>Establecer equivalencias entre fracción decimal, fracción común, fracción común simplificada y tanto por ciento.</p> <p>Realizar ejercicios y problemas de aplicación de por ciento e interés.</p>

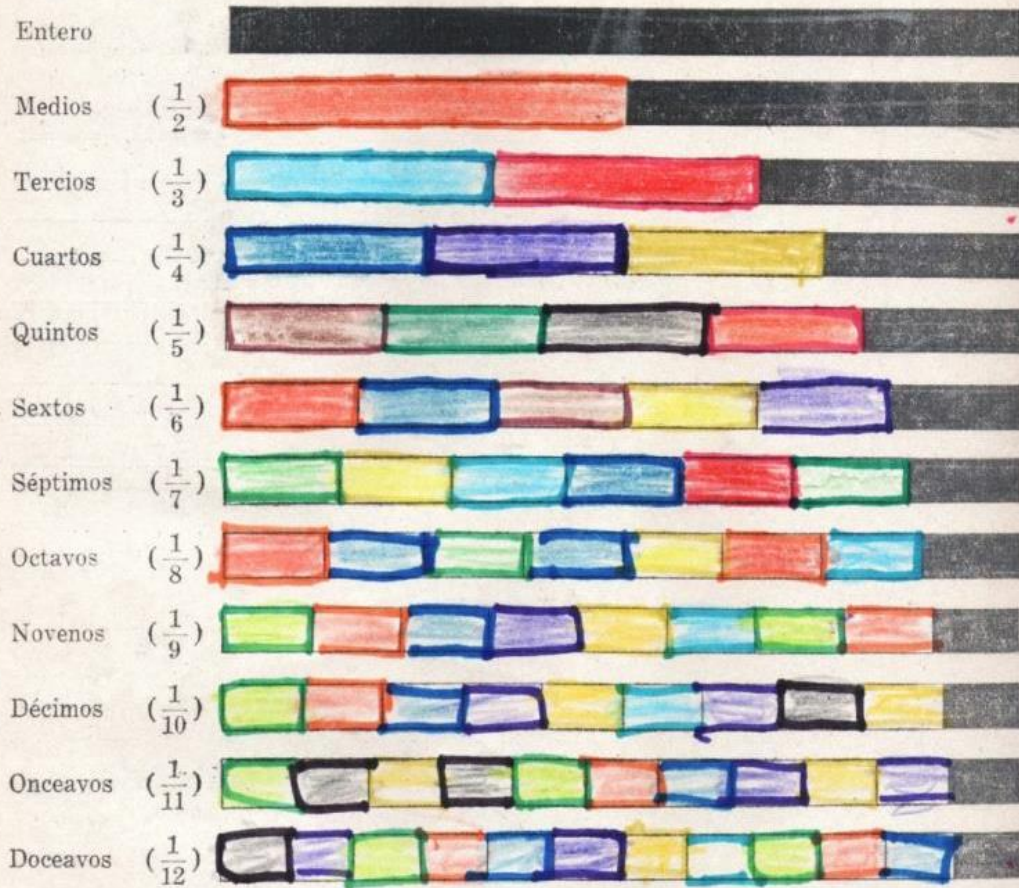
El tratamiento de la *equivalencia de fracciones* en este cuaderno de trabajo se inicia con la actividad de completar un apoyo visual que consiste en varios rectángulos del mismo tamaño, divididos cada uno en diferentes partes iguales: desde la unidad, pasando por medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos, décimos, onceavos hasta doceavos. Se deben colorear las partes faltantes para completar la unidad (el entero), de acuerdo a la parte sombreada presentada como ejemplo. Apoyados en esta representación, se solicita después a los alumnos indicar de cada par de fracciones dadas, ¿cuál de ellas es la mayor? Este es el único apoyo gráfico para el tema de fracciones que se incluye en este cuaderno de trabajo. (Imagen 16)⁵.

⁴ Esta es la forma en que en el currículo de 1960 se denomina al porcentaje.

⁵ Las imágenes corresponden a un cuaderno de trabajo de quinto grado aritmética y geometría de 1961 resuelto por un alumno que cursó este grado en esa época.

FRACCIONES COMUNES

A continuación hay varios rectángulos divididos en partes iguales. Ilumínalos con colores.



I. Observando los rectángulos anteriores, contesta o completa lo siguiente, según sea el caso:

¿Cuál es mayor?

$\frac{1}{7}$ ó $\frac{1}{8}$	<u>1</u> ✓	$\frac{3}{4}$ ó $\frac{3}{5}$	<u>3</u> ✓
	7		4
$\frac{5}{12}$ ó $\frac{3}{6}$	<u>3</u> ✓	$\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{5}$	<u>1</u> ✓
	6		4
		$\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{4}$	<u>2</u> ✗
			3

Imagen 16: Única representación gráfica de fracciones en Mi cuaderno de trabajo e indicar que fracción es mayor. Mi cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 78).

La actividad en el cuaderno de trabajo continúa de la siguiente manera: observando la representación anterior de fracciones, se solicita escribir una fracción equivalente a otra dada. En algunos reactivos se debe escribir la fracción completa, en otros solo el numerador o el denominador faltante y en el último escribir cinco fracciones equivalentes a otra dada (Imagen 17):

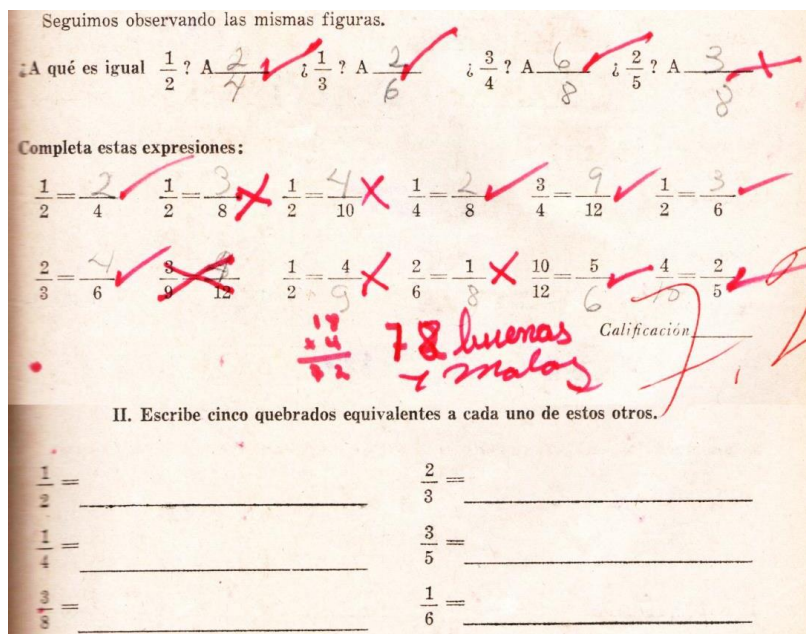


Imagen 17: Escribir fracciones equivalentes en diferentes actividades. Mi cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 79).

Posteriormente se comparan pares de fracciones; anotando el símbolo igual (=) o diferente (\neq), según corresponda. De esta forma se señala si las fracciones son *equivalentes* o no. (Imagen 18):

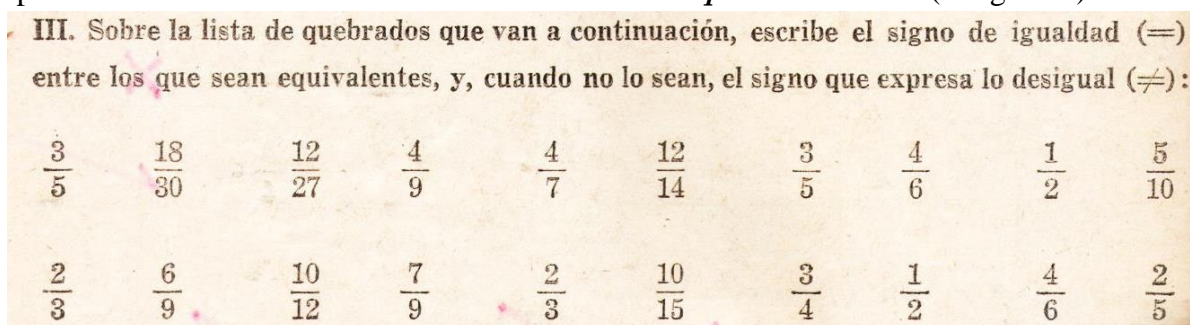


Imagen 18: Comparar pares de fracciones con el símbolo igual (=) o diferente (\neq). Mi cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 80).

Después se completan frases relacionadas con la suma de fracciones, incluyendo el concepto de *equivalencia de fracciones*. A continuación se mencionan las que se refieren a *equivalencia*:

1. “Para sumar o restar quebrados es necesario que tengan: denominadores iguales.”
2. “Dos quebrados de diferente denominador si se pueden sumar.”
3. “Para sumar o restar medios con cuartos se deben transformar los medios en cuartos”.
7. “Si se multiplican o se dividen por un mismo número los dos términos de un quebrado, su valor: es equivalente”(SEP 1961b, p. 81)

La siguiente actividad incluida en el cuaderno de trabajo (Imagen 19) consiste en resolver sumas y restas de fracciones con igual o diferente denominador o enteros de forma oral y escribir el resultado final; al resolverlas y simplificar los resultados, se puede emplear el concepto de *equivalencia de fracciones*:

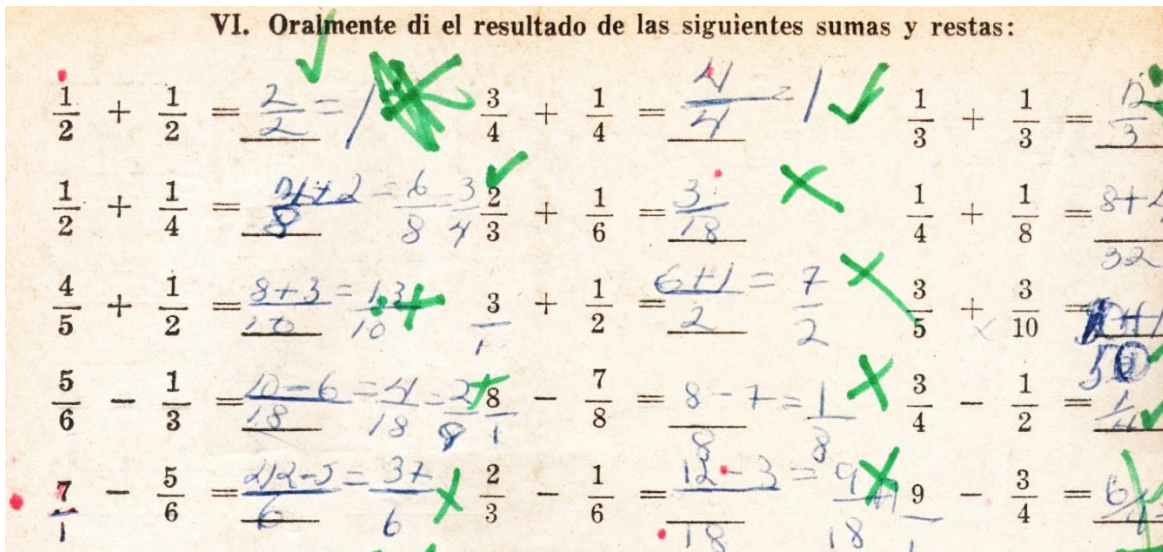


Imagen 19: Resolver sumas y restas de fracciones de forma oral. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 82).

En la actividad subsecuente se simplifican fracciones dividiendo el numerador y el denominador entre el mismo número; es decir, se trata de encontrar una *fracción equivalente* según el ejemplo dado. De manera implícita se indica el procedimiento para encontrar *fracciones equivalentes*. (Imagen 20):

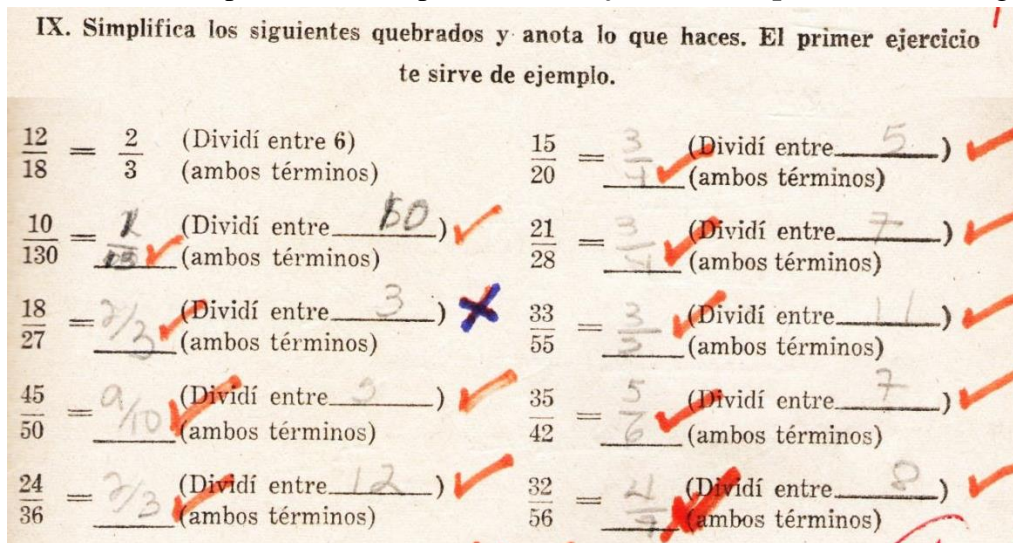


Imagen 20: Simplificar fracciones, algoritmo para encontrar fracciones equivalentes. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 83).

En los ejercicios siguientes se resuelven sumas y restas de fracciones empleando el concepto de mínimo común denominador (mcd). Es importante señalar que en esta actividad se podría hacer referencia a la obtención de *fracciones equivalentes*, como se indica en las frases a completar de la página 81 de este cuaderno de trabajo, no se observa una correspondencia entre lo que se define y el algoritmo para resolver las operaciones. Sin embargo, al simplificar los resultados de las sumas y restas sí se está aplicando el procedimiento para obtener *equivalencia de fracciones* (Imagen 21).

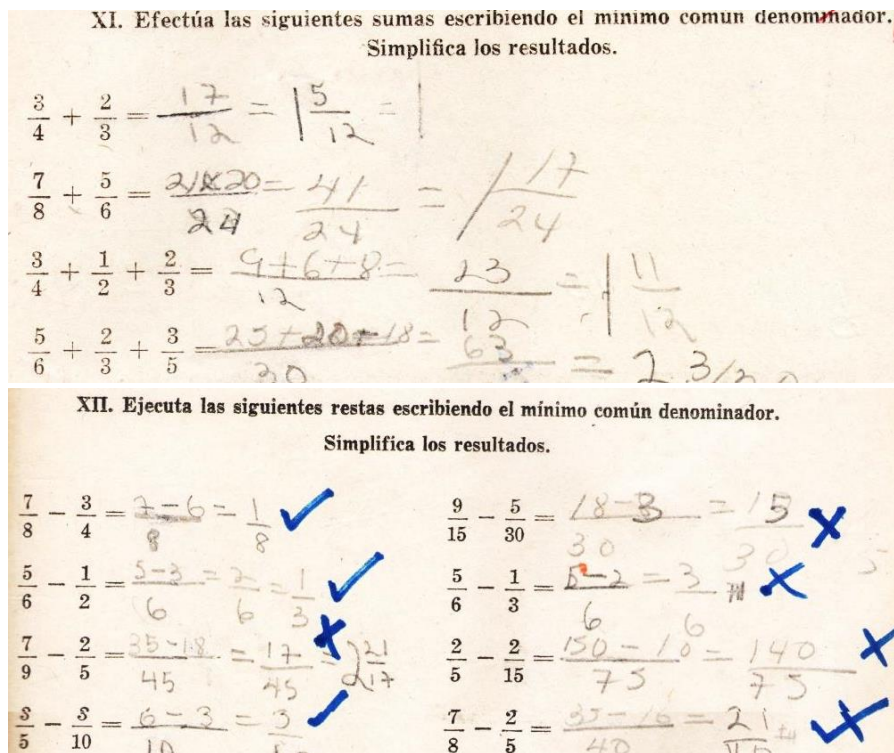
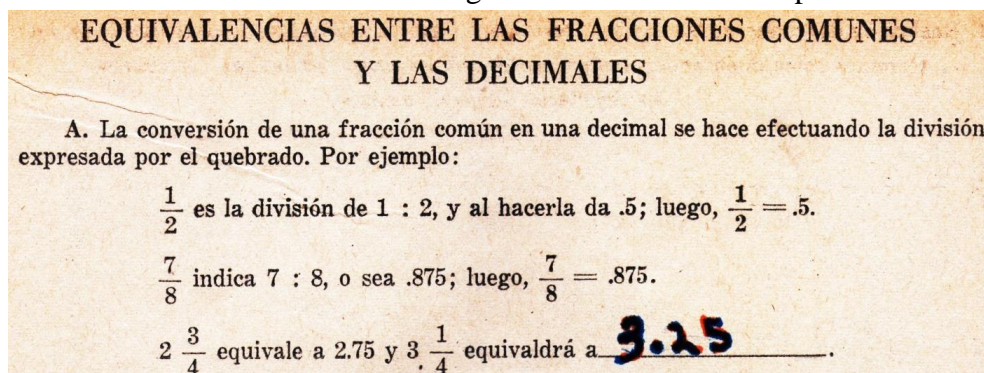


Imagen 21: Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, pp. 4-85).

Después, se pide al alumno resolver ejercicios de multiplicación, división de fracciones y problemas que impliquen el uso de estas operaciones y simplificar los resultados de dichas operaciones. Cuaderno de trabajo de quinto año Aritmética y Geometría. (SEP, 1961b, pp. 90-97).

Finalmente, para concluir la secuencia de actividades presentada en el currículo de 1960 sobre el tema de fracciones, se solicita resolver ejercicios cuya finalidad es revisar y ejercitar los contenidos abordados, como el título de la lección lo indica: “Ejercicios de prueba y revisión de quebrados”. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP, 1961b, pp. 98-102).

En lecciones posteriores, se establece la equivalencia entre fracciones comunes y sus respectivas fracciones decimales. Como se observa en la imagen 22 el tema inicia con procedimientos y ejemplos:



B. La conversión de una fracción decimal en un quebrado se hace poniendo el denominador 10, 100 o 1000, según se trate de décimos, centésimos o milésimos, y después se simplifica el quebrado que resulte. Por ejemplo:

.8 se lee 8 **décimos**, que también puede escribirse $\frac{8}{10}$, o sea, que ya está hecha la conversión.

Como se acostumbra simplificar los quebrados, lo hacemos en este caso, y se encuentra:

$$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Así que $.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

De aquí que: $.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ $.325 = \frac{325}{1000} = \frac{13}{40}$

Imagen 22: Equivalencia entre fracciones comunes y fracciones decimales. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 106).

Basados en los procedimientos y ejemplos señalados en la imagen 22, en la siguiente actividad se pide que de manera recíproca se escriba la fracción decimal equivalente a la fracción común (Imagen 23).

I. Escribe la fracción equivalente que falta en las operaciones de abajo. Si está escrita la común, escribe tú la decimal, y viceversa.

$\frac{3}{8} = \underline{.375}$ $.4 = \underline{\frac{4}{10}}$ $.75 = \underline{\frac{75}{100}}$ $\frac{3}{5} = \underline{.6}$ $.3 = \underline{\frac{3}{10}}$
 $.7 = \underline{\frac{7}{10}}$ $\frac{1}{20} = \underline{.05}$ $\frac{2}{3} = \underline{.66}$ $\frac{9}{10} = \underline{.9}$ $.85 = \underline{\frac{85}{100}}$
 $2.5 = \underline{\frac{25}{10}}$ $5\frac{1}{6} = \underline{5.16}$ $7\frac{1}{2} = \underline{7.5}$ $4.25 = \underline{\frac{425}{100}}$ $3.05 = \underline{\frac{305}{100}}$
 $1.6 = \underline{\frac{16}{10}}$ $5\frac{4}{9} = \underline{5.44}$ $6\frac{2}{7} = \underline{6.28}$ $5.1 = \underline{\frac{51}{10}}$ $1\frac{11}{12} = \underline{1.91}$

Calificación _____

Imagen 23: Equivalencia entre fracciones comunes y fracciones decimales. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 106).

La última actividad del cuaderno de trabajo donde se observa el uso del concepto de **equivalencia de fracciones** consiste en realizar operaciones combinadas de números **fraccionarios con su equivalente** en escritura decimal (Imagen 24).

II. Realiza de dos maneras las sumas y restas que figuran abajo: una, escribiendo todos los términos como quebrados; la otra, escribiéndolos como decimales. Comprueba si los resultados son equivalentes:

$\frac{3}{4} + \frac{8}{10} + \frac{1}{2} + \frac{12}{10} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} + \frac{10}{20} + \frac{24}{20} = \frac{45}{20} = 3\frac{5}{20} = 3\frac{1}{4}$
 $1.5 + \frac{3}{8} + .375 + 2.25 = 1.5 + 0.375 + 0.375 + 2.25 = 4.5$
 $2\frac{1}{5} + \frac{6}{10} + 5\frac{3}{10} + 1\frac{1}{4} = \frac{4}{20} + \frac{12}{20} + \frac{21}{4} + \frac{5}{20} = \frac{4}{20} + \frac{12}{20} + \frac{25}{20} + \frac{5}{20} = \frac{46}{20} = 2\frac{7}{20}$
 $\frac{5.35}{100} - 2\frac{7}{15} = \frac{535}{10000} - \frac{2800}{1500} = \frac{535}{10000} - \frac{168000}{10000} = \frac{-167465}{10000}$

Imagen 24: Resolver operaciones combinadas de fracciones comunes y decimales. Cuaderno de trabajo de quinto año aritmética y geometría. (SEP. 1961b, p. 107).

En este cuaderno de trabajo de aritmética y geometría de quinto grado, se presenta para el aprendizaje de fracciones una secuencia didáctica dividida por subtemas. Cada tema inicia con procedimientos,

definiciones, algunos ejemplos y ejercicios que más bien pueden considerarse mecanizaciones por el gran número de reactivos que se presentan y que fomentan en los alumnos la mecanización y memorización de las definiciones y los procedimientos. También se incluye una sección denominada “*pasatiempos*”, donde se proponen juegos o ciertos retos (por ejemplo, resolver cuadros mágicos de fracciones). La última sección es la de “*Ejercicios de prueba y revisión de quebrados*”, que más bien tiene un enfoque de aplicación del conocimiento adquirido mediante mecanizaciones y al final de la sección se pide la resolución de cinco problemas (rutinarios) que impliquen alguna de las operaciones con fracciones. En la mayoría de ejercicios y actividades observamos que se trabaja en forma de expresiones numéricas y definiciones.

3.3 Tratamiento de la equivalencia en el quinto grado

Las *fracciones equivalentes* se introducen mediante figuras planas como círculos y rectángulos que simulan regletas y el concepto de equivalencia se aplica en los algoritmos de suma y resta, en la simplificación de fracciones y para establecer relaciones de orden entre ellas. No se realizan actividades que promuevan la comprensión del concepto y su posterior aplicación a situaciones diversas. Hay una ligera vinculación con situaciones que intentan ser de la vida real, reflejadas en problemas prácticos sencillos que se pide resolver a los niños, aunque esto se hace muy pocas veces. Se emplean también algunas preguntas o textos que ayudan a formalizar el concepto.

Se observa que *Mi cuaderno de trabajo* y *Mi libro de quinto grado* continúan con la tendencia -vista en el cuarto grado- de un número considerable de ejercicios y de definiciones que si no son correctamente relacionados no se establece la complementariedad necesaria para el aprendizaje de las fracciones y el concepto de *equivalencia de fracciones*.

En este currículo existen básicamente dos materiales bibliográficos por grado de Aritmética y Geometría, uno es: “Mi libro de _____ año y el otro “Mi cuaderno de trabajo de _____ año”. Se percibe una diferencia importante entre estos dos materiales: el primero contiene una cantidad considerable de definiciones que se presentan vinculadas a alguna situación cotidiana sencilla y el segundo contiene gran cantidad de ejercicios. Si no se relacionan de manera conveniente estos dos materiales, parecerían materiales diferentes, desarticulados y no complementarios.

4. Conclusiones acerca del currículo introducido en 1960

En el currículo introducido en 1960, a las fracciones se les denomina “quebrados”, lo que es una muestra del enfoque del concepto de fracción en este currículo. La fracción es vista como parte de algo que se ha fracturado, dividido, como afirmaría Freudenthal (1983), se trata de la fracción como fracturador. La única interpretación utilizada es la de *parte-todo*. Se debe considerar que en 1960 no había conocimientos sobre investigación en educación matemática respecto a las fracciones y entonces era la única conocida.

Como resultado de la revisión de los libros y cuadernos de trabajo del cuarto y quinto grado de Aritmética

y Geometría correspondientes a los años 1960, se observa por el número de ejercicios que se presentan, que se da importancia fundamental a mecanizar y memorizar procedimientos para encontrar fracciones equivalentes y resolver operaciones con fracciones.

Respecto a las representaciones empleadas, se presentan algunos apoyos gráficos consistentes en figuras planas como círculos, rectángulos y cuadrados y en dibujos de frutas, por ejemplo manzanas. En general estas figuras no se asocian a alguna situación del entorno, es decir, no están contextualizadas. Sólo al introducirse el concepto en “Mi libro de cuarto año” se dan ejemplos de situaciones familiares a los niños como reparto de frutas y otros objetos en un día de campo.

Las fracciones equivalentes se identifican como un elemento para realizar mecanizaciones, sobre todo al resolver las operaciones con fracciones; no como un instrumento que facilite entender más ampliamente el concepto de fracción,

Las acepciones de equivalencia de fracciones que se incorporan en este currículo, se comunican de manera rígida, puesto que se presentan definiciones que se obtienen a partir de un único ejemplo basado en alguna representación gráfica o a partir de mostrar ejercicios referentes a lo que se dice; no son obtenidas como resultado de un proceso constructivo que sustente la obtención de las diferentes definiciones.

Por la precisión y cantidad de definiciones que se señalan para cada tema, puedo afirmar que el enfoque es el de una enseñanza basada en algoritmos, procedimientos, mecanizaciones y memorizaciones y no se fomenta la construcción del conocimiento en el alumno, como en las actuales propuestas de aprendizaje, obviamente porque el constructivismo surgió después de este currículo de 1960.

Como resultado final del análisis de este currículo observé que se abordan subtemas, conceptos y contenidos que son básicos en el proceso de aprendizaje de las fracciones. Entre estos, se le da especial importancia al concepto de *equivalencia de fracciones*, que es incluido en diferentes ejercicios, definiciones y actividades de esta propuesta.

Este currículo proporciona las bases procedimentales, pero se descuida la comprensión del concepto de equivalencia y en general del concepto de fracción y de los problemas que pueden resolverse utilizándolas.

Debe tenerse en cuenta que cuando se desarrolló este currículo no se contaba con investigaciones en educación matemática enfocadas a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones de manera que se promoviera el razonamiento o la construcción de los conceptos por parte de los niños. Por esto, la forma en que son desarrollados los contenidos de fracciones fue de manera mecánica, memorística y algorítmica, esto se constata si se reflexiona en que los apoyos gráficos se presentan únicamente al principio del tema de fracciones comunes en cada grado y se considera que eso es suficiente para generar la comprensión y razonamiento necesarios para lograr los aprendizajes esperados.

CAPITULO III: La Equivalencia de Fracciones en el currículo introducido en 1972

Introducción⁶

En 1970 se da inicio a una reforma para la educación primaria en la que se observa una concepción de educación diferente a la correspondiente al currículo anterior (1960). En el currículo de 1970 se cambió de asignaturas al trabajo por áreas de estudio. Se agruparon las materias de Lengua Nacional, Aritmética, Geometría, Historia, Geografía e Instrucción Cívica en siete campos de conocimiento o áreas programáticas; cuatro de ellas se consideraban fundamentales: Español, Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales, y tres se consideraban complementarias: Educación Física, Educación Artística y Educación Tecnológica.

Con este currículo surgió la segunda generación de Libros de Texto Gratuitos. En esta ocasión la elaboración de estos libros fue encargada a investigadores del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y de El Colegio de México. Se produjeron tres materiales bibliográficos por grado: un libro de texto para el alumno por cada área de estudio (ya no se publicaron cuadernos de trabajo, como en el currículo anterior), un libro y un auxiliar didáctico también para el maestro, por cada área de estudio. (Imagen 25)



Imagen 25: Materiales bibliográficos correspondientes al currículo de 1970.

El auxiliar didáctico para el maestro contenía información de la disciplina y sugerencias de actividades que complementaban las lecciones del libro de texto para el alumno. Específicamente, en el auxiliar didáctico de matemáticas “aparece por primera vez una consideración explícita acerca del papel de los problemas en la construcción de conocimientos matemáticos que está referida a la historia de las matemáticas, pero se sugiere una derivación hacia los procesos de aprendizaje de las matemáticas”. Block, Martínez, Dávila, Ramírez, (2000, pp. 150-151, citado en Villa L. (2009, p. 115)).

1. Currículo referente a Matemáticas ⁷

⁶Este apartado constituye una síntesis con algunos comentarios del libro: Villa, L. (2009, pp. 89-93)

⁷Este apartado constituye un resumen con algunos comentarios de: Ávila A. (1988, pp. 67-74) y Villa L. (2009, pp. 89-93). Las fichas completas se encuentran en las referencias bibliográficas.

En los años setenta, explica D. Block:

“[...] se pretendió modernizar y actualizar los contenidos de la asignatura de matemáticas, para ponerlos a tono con lo que se consideraba los usos contemporáneos de esta disciplina. La reforma estuvo bastante influida por las matemáticas modernas, un movimiento muy fuerte que nació en Francia, el cual preconizaba el interés de estudiar los fundamentos de las matemáticas, sus estructuras más generales, para de ahí inferir todas sus particularidades y detalles. Se utilizó a la teoría de conjuntos como una herramienta unificadora de las diferentes ramas de las matemáticas y se empezaron a enseñar versiones elementales de dicha teoría desde preescolar hasta la Universidad. En algunos países fue tan radical esta reforma que resultó caótica y no funcionó. En México no nos llegó con ese grado de radicalidad, aunque sí se nota en los programas la influencia de esa época. Por ejemplo, en los libros de matemáticas se encuentran lecciones de lógica y conjuntos, con la idea de que se podía aprender pensamiento lógico y luego aplicarlo a lo demás. Después se vio que no funciona así. Había la expectativa de trabajar una matemática más abstracta en los setenta [...],” (Entrevista a D. Block, cit. en (Villa L. 2009, p. 115)).

En el marco de estas ideas internacionales, en 1972, se emprendió en México la reforma curricular. Se pretendía superar la enseñanza de algoritmos y reglas, situaciones que caracterizaron el currículo de 1960, introduciendo la enseñanza de las estructuras propias de las matemáticas.

Es importante destacar que en este programa de estudios, bajo la idea que se ha mencionado, se incorporan a la asignatura de matemáticas otras ramas de esta ciencia que nunca habían sido incluidas en los programas de educación primaria; las áreas que se integraron son: Lógica, Probabilidad, Estadística y Variación Funcional.

Otro cambio significativo en el currículo de Matemáticas de 1972, como vimos en la reseña de Block citada antes, fue que se introduce la teoría de conjuntos.

“El número se presenta como clase de equivalencia de conjuntos equipotentes, la resta como el cardinal del complemento de un conjunto, la multiplicación como el cardinal del producto cartesiano”. (Entrevista a D. Block Sevilla, realizada el 28 de julio de 2008, cit. en Villa L, 2009, p. 119)

En este currículo se consideraba que:

“Uno de los instrumentos más poderosos que ha creado el hombre para normalizar su pensamiento son las matemáticas, de las que se ha servido para explicar y explicarse las más diversas situaciones. [...]” (Villa L., 2009, p. 91)

Como se indica en la cita anterior, las matemáticas son un instrumento con el que se pretende fomentar el razonamiento de los alumnos para establecer las formalizaciones de los conceptos matemáticos y para que tengan la capacidad de aplicar este razonamiento a situaciones reales, a diferencia del currículo de 1960, en el que no se fomentaba el proceso deductivo, sino otros procesos como la mecanización y memorización.

Ahora bien, el currículo introducido en 1972, plantea para matemáticas los siguientes objetivos:

Objetivo general: Propiciar en el alumno el desarrollo del pensamiento cuantitativo y relacional, como un instrumento de comprensión, interpretación y expresión de los fenómenos sociales, científicos y artísticos.

Objetivos específicos. El único objetivo de aritmética planteado en este currículo que incluye el contenido de fracciones es:

“Aritmética: Manejar y aplicar los conceptos y métodos aritméticos en situaciones concretas.”
 Villa L. (2009, p. 115)

1.1 Enfoque del currículo de 1972 en matemáticas⁸

Uno de los objetivos educativos en matemáticas en este currículo fue el siguiente:

“La enseñanza de las matemáticas debe fomentar en el educando la capacidad de formalizar con precisión, es decir, la capacidad de razonar, y asimismo la capacidad de aplicar sus razonamientos a situaciones reales o hipotéticas de las cuales pueda derivarse a su vez conclusiones prácticas u otras formalizaciones.”
 SEP. Plan de estudios y programas de educación primaria. P. XV, Cit. en Ávila A. (1988, p. 68)

En este currículo se pretendía que los alumnos desarrollaran aptitudes científicas y técnicas que el mundo moderno (1970's) requería. Las formas de lograr este objetivo estuvieron basadas en que el mismo alumno descubriera los conocimientos a través de secuencias de actividades y preguntas focalizadas.

Así en Ávila (1988, p. 73) se destaca que en la propuesta didáctica de 1972:

“El niño construye los conocimientos por medio de descubrimiento; descubrimiento que significa reflexión en torno a una situación que se le presenta en el libro de texto tomando como base los conocimientos que por experiencia previa ya posee.”

En el cuadro 1 se enuncian por grado, las características principales u objetivos básicos de los Libros de Texto Gratuitos de matemáticas. Es importante detallarlos porque en este currículo se agregaron cuatro áreas más de esta ciencia, respecto al programa de 1960, y para identificar en qué grado se inicia el tratamiento del contenido de fracciones.

Cuadro 1: Características principales de los libros de texto por grado que formaban parte del currículo de 1972.
 Fuente: Aguilar Sierra, Roberto, 1982, pp. 235-238.

Grado	Características Principales / Objetivos Básicos
Primero	El objetivo general de este grado era el siguiente: que los niños adquieran familiaridad con los números, la operación de la suma y el sistema decimal de numeración. Se pretendía también que el alumno aprendiera a elaborar e interpretar registros elementales sobre fenómenos cotidianos y a relacionarlos con la idea de probabilidad de un evento.

(Continúa)

⁸ Este apartado constituye una síntesis, con algunos comentarios de: Ávila A. (1988, pp. 68-74). La ficha completa se encuentra en las referencias bibliográficas.

Cuadro 1. (Concluye)

Grado	Características Principales / Objetivos Básicos
Segundo	El objetivo en este grado fue: que los educandos adquieran familiaridad con el sistema decimal de numeración, así como con el algoritmo de la suma y la resta en ese sistema, así como con la idea de multiplicación y sus propiedades fundamentales, y de número fraccionario e ideas sencillas de geometría.
Tercero	El libro se integraba por lecciones y no por unidades como en los grados anteriores. El correspondiente al alumno comprendía 106 lecciones por medio de las cuales lograría conocer los siguientes temas: En Aritmética: recta numérica, relaciones de orden, el sistema posicional, los conceptos de suma y resta, los algoritmos, la multiplicación, la división, los quebrados . En Geometría: formas geométricas, simetría, coordenadas, área de figuras planas, medida lineal o medida de longitud. La probabilidad se presentaba mediante el concepto de azar y la distinción de fenómenos deterministas y de azar.
Cuarto	El libro de cuarto grado estaba integrado por 92 lecciones para desarrollar los aspectos que indicaba el programa de estudios respectivo. Sistema decimal: empleo de fracciones de la unidad , la integración del metro como unidad de medida y la suma y resta con punto decimal. Multiplicación: representación de ésta en números naturales, relación de tres factores con el volumen de un paralelepípedo. De igual modo se repasaban y ampliaban los conceptos de división, de los quebrados , de la simetría bilateral y se introducía el término de producción a escala, mediante ejemplos simples.
<i>Quinto</i>	El libro de quinto grado estaba formado por 80 lecciones de las cuales <i>35 correspondían al estudio de la aritmética</i> , 16 al de la geometría, 19 a estadística y probabilidad y 10 a conceptos de lógica. Se buscaba lograr que el alumno manejara los conceptos como sistemas posicionales de numeración, con especial énfasis en el sistema decimal, las cuatro operaciones entre fracciones y enteros positivos, entre otros.
Sexto	El libro de sexto grado, se conformaba de dos partes: la primera con 52 lecciones que contenían una serie de actividades entre las cuales se mezclaban la aritmética, la geometría y la probabilidad en razón de que en la vida cotidiana los problemas de ese tipo abarcan varios de esos aspectos. La segunda, contenía un compendio de aritmética, geometría, probabilidad y estadística, consideradas ideas fundamentales de la matemática de primaria.

Como se observa en este cuadro, el conocimiento de fracciones -o quebrados como se les llama a veces en estos libros- se inicia en el tercer grado, se continúa desarrollando en el cuarto grado, y finalmente en el quinto grado, donde se tiene una carga considerable sobre este tema; también se incluye la enseñanza de las cuatro operaciones con fracciones.

En estos libros se observa un mayor número de contenidos referentes a fracciones y una dosificación a la largo del ciclo escolar, diferencias importantes respecto a los libros del currículo de 1960.

Continuaré con la revisión de los contenidos de fracciones por grado en las fuentes bibliográficas publicadas por la Conaliteg para los grados de tercero, cuarto y quinto, especificaré algunos puntos del tratamiento que se da a las **fracciones equivalentes**.

2. Presentación de las fracciones en el tercer grado

2.1 Auxiliar didáctico Matemáticas Tercer grado

En este libro se indican los objetivos generales que se pretende lograr en el tercer grado con las lecciones sobre fracciones:

- a) *“Llevar al niño al concepto de quebrado concibiéndolo como fragmento de un objeto, o como una agregación de fragmentos de uno o varios objetos iguales.*
- b) *Introducir los quebrados y su estructura numérica como nombres y símbolos de ciertos fragmentos de un objeto, representándolos después en forma abstracta como puntos en la recta numérica, haciendo notar la correspondencia entre distintos nombres de un quebrado (forma fraccionaria y forma mixta, por ejemplo).*
- c) *Relacionar de una manera cualitativa los números fraccionarios con las magnitudes que representan.*
- d) *Efectuar sumas y restas entre quebrados con iguales denominadores y sin pasar de la unidad.”*
(SEP. 1974a, p. 80)

Como podemos observar, en los objetivos de este grado se pretende trabajar con la interpretación parte-todo y llevando luego esta idea a la representación de fracciones como puntos en la recta numérica. También se manejan definiciones como numerador, denominador, números mixtos, fracciones impropias y fracciones propias, entre otras.

2.2 Libro para el alumno Matemáticas tercer grado

En el Cuadro 2 se muestran los contenidos y actividades que refieren al tema de fracciones y se especifican los contenidos relacionados con el concepto de *equivalencia de fracciones*.

Cuadro 2. Actividades y contenidos de fracciones en el tercer grado. (SEP. 1974c)

Lección	Tema	Páginas	Contenidos y actividades
79	Fracciones	201– 205	Representar las fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ en diferentes contextos como repartos y figuras planas. Destacar la función del denominador para expresar numéricamente fracciones de objetos expresadas en lenguaje natural. Con base en el apoyo gráfico utilizado en la actividad anterior, identificar y comparar fracciones.
80	Suma de fracciones	206– 207	Expresar simbólicamente fracciones representadas mediante figuras planas, identificando la función del numerador y denominador. Sumar fracciones con el mismo denominador con apoyo gráfico de figuras planas como cuadrado, círculo o pentágono. Comparar fracciones, contando con algunos apoyos gráficos de figuras planas.
88	Suma de fracciones	231– 233	Resolver sumas de fracciones con el mismo denominador y, en algunos ejercicios, identificar el sumando faltante. Leer la definición de numerador y denominador y su uso al sumar fracciones

Continúa

Cuadro 2. (Concluye)

Lección	Tema	Páginas	Contenidos y actividades
			de igual denominador. Con apoyo gráfico de círculos divididos en medios, tercios y cuartos, identificar las fracciones que forman una unidad (Por ejemplo: $2/2$, $3/3$, $4/4$). Completar el sumando faltante en sumas de fracciones de igual denominador, cuyo resultado es la unidad. Resolver problemas que impliquen suma de fracciones con el mismo denominador.
97	Recta numérica y las fracciones	249–253	Identificar fracciones representadas en la recta numérica. Ubicar en la recta numérica las fracciones iguales a la unidad. A partir de un ejemplo de fracciones representadas en la recta numérica, comparar el orden de pares de fracciones, escribiendo el signo $>$ o $<$. Resolver ejercicios de sumas de fracciones con igual denominador, a partir de ejemplos de suma de fracciones con el mismo denominador representadas en la recta numérica,
98	Resta de fracciones	254–256	A partir de ejemplos de obtención del sumando faltante en una suma de fracciones con igual denominador, inferir que también se puede encontrar este sumando realizando una resta. Resolver restas de fracciones del mismo denominador a las que les falta un término e identificar este término mediante una suma de fracciones del mismo denominador. Resolver sumas y restas de fracciones con igual denominador. Resolver problemas que impliquen resta de fracciones.
100	Números mixtos y la recta numérica	259–264	Identificar enteros a partir de una representación gráfica (partes de naranja y de tabletas de chocolate). En una situación de reparto identificar fracciones mayores a la unidad. Identificar en la recta numérica fracciones mayores a la unidad. A partir de representaciones en la recta identificar números mixtos. Convertir fracciones impropias a mixtas y viceversa. Representar fracciones mixtas en la recta numérica y comparar pares de fracciones mixtas o impropias con los signos $>$ o $<$.
101	Números mixtos y fracciones	265–270	A partir de una situación de reparto identificar fracciones mixtas. Por medio de ejemplos inferir cuál es el procedimiento para convertir números enteros a fracciones y números mixtos a fracciones impropias. Resolver ejercicios aplicando el procedimiento inferido

2.3 Tratamiento de la equivalencia en el tercer grado

En la revisión del auxiliar didáctico no identifiqué alguna introducción o desarrollo del concepto de fracciones equivalentes. Sin embargo, se puede considerar que en el libro del alumno tal concepto se refiere (implícitamente) en algunas lecciones por el símbolo de igualdad ($=$) que se maneja entre pares de fracciones; por ejemplo en la lección 89 (Imagen 2) donde se completan fracciones iguales a la unidad.

En el libro del alumno de un total de 106 lecciones, se contabilizaron ocho referentes al tema de fracciones, de las cuales:

- Cinco lecciones (79, 80, 88, 97 y 98) no se refieren a fracciones equivalentes. (Continúa)
- Tres lecciones (89, 100 y 101) emplean de manera indirecta el concepto de *equivalencia de*

fracciones, es decir, lo utilizan y ejemplifican al resolver ejercicios, sin referirlo directamente.

- c) No hay alguna lección dedicada a la introducción o desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones*, tampoco identifiqué en el lenguaje utilizado el término equivalencia.

A continuación mencionaré algunos ejercicios o actividades donde se utiliza de manera implícita el concepto.

En la lección 89, al indicar de manera gráfica y simbólica una suma de fracciones con el mismo denominador y que da como resultado la unidad, se indica la igualdad entre diferentes fracciones y la unidad o entero (Imagen 2).

Si juntas todas las partes de una galleta obtienes una galleta:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Para hacer los siguientes ejercicios, si quieres, imagínate que los quebrados son partes de galleta.

Escribe los números que faltan.

$\frac{4}{4} = 1$ $\frac{8}{\quad} = 1$ $\frac{\quad}{12} = 1$

$\frac{\quad}{7} = 1$ $\frac{\quad}{5} = 1$ $\frac{26}{\quad} = 1$

Imagen 2. Completar fracciones iguales a la unidad. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP. 1974c, p. 232).

También en la lección 100 de este libro se emplea la igualdad al representar números mixtos y fracciones impropias en la recta numérica para después escribirlos en forma mixta o como fracciones impropias; se observa el uso implícito del concepto de *equivalencia* entre fracciones impropias y mixtas. (Imagen 3).

Usa las rectas numéricas del principio de la lección para hacer los siguientes ejercicios:

$\frac{5}{3}$	también se escribe	$1\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	también se escribe	—
$\frac{10}{6}$	también se escribe	—	$\frac{11}{7}$	también se escribe	—
$\frac{9}{8}$	también se escribe	—	$\frac{17}{9}$	también se escribe	—
$\frac{12}{5}$	también se escribe	—	$\frac{18}{7}$	también se escribe	—
$\frac{27}{10}$	también se escribe	—	$\frac{27}{8}$	también se escribe	—

Imagen 3: Escribir fracciones impropias como mixtas. Libro del alumno. Matemáticas tercer grado. (SEP. 1974c, p. 262).

Al igualar enteros con fracciones de diferente denominador en la lección 101, también se aplica de manera indirecta el concepto de *equivalencia de fracciones* (Imagen 4).

En la lección anterior encontraste en la recta numérica que

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \frac{9}{9} = \frac{10}{10}$$

$$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8} = \frac{18}{9} = \frac{20}{10}$$

$$3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{18}{6} = \frac{21}{7} = \frac{24}{8} = \frac{27}{9} = \frac{30}{10}$$

Escribe:

2 en medios:

3 en cuartos:

4 en quintos:

6 en cuartos:

7 en séptimos:

Imagen 4: Observar y escribir fracciones iguales a los enteros indicados. Libro del alumno de matemáticas tercer grado. (SEP. 1974c, pp. 267-268).

Como se identifica en el análisis del tercer grado, el concepto de equivalencia se trata de manera implícita y usando el término igualdad o el signo igual (=); es decir, no se establece alguna definición ni se hace mención formal de dicho concepto. Este concepto se desarrollará de manera amplia y formal en el cuarto grado.

3. Presentación de las fracciones en el cuarto grado

3.1 Libro para el maestro Matemáticas Cuarto grado

En este libro se proporciona información general al docente acerca del enfoque, la metodología, el programa correspondiente a las ocho unidades de aprendizaje y algunas recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas.

El contenido de fracciones inicia su desarrollo a partir de la unidad 2 y continúa en todas las unidades subsecuentes. En la unidad 5 se menciona en el objetivo particular 5.3:

“En las fracciones y sus operaciones: efectuar adiciones y sustracciones de fracciones con distinto denominador, convertir fracciones de distinto denominador a fracciones equivalentes con igual denominador” SEP. (1982, p. 95).

Con este objetivo particular se indica el inicio del tratamiento de la **equivalencia de fracciones** en este currículo.

Respecto a las consideraciones metodológicas para desarrollar el contenido de las fracciones y sus operaciones y el concepto de **equivalencia de fracciones**, este libro señala:

- ❖ El tratamiento de las fracciones se lleva a cabo en este grado refiriéndose siempre a un modelo geométrico (como puede ser la recta numérica) para que el niño elabore estos conceptos a partir de la observación de partes de objetos. (SEP, 1982, p.12)
- ❖ **La equivalencia**, es esencial en el cuarto grado porque aquí se inicia la adición y sustracción con fracciones de diferente denominador. (SEP, 1982, p.13)
- ❖ Uno de los principales contenidos a tratar en cuarto grado es el concepto de **equivalencia** por ser este concepto la base para elaborar algoritmos que permitan efectuar comparaciones y operaciones con fracciones. (SEP, 1982, p.14)

Como se observa en estos puntos, se sugiere a los maestros emplear el concepto de **equivalencia de fracciones** como base para resolver operaciones de fracciones con diferente denominador y establecer comparaciones entre fracciones: mayor que ($>$), menor que ($<$) o igual ($=$). Esto refleja la importancia que se da al concepto en el aprendizaje de las fracciones en este currículo, lo que coincide con mi punto de vista de que el concepto de **equivalencia de fracciones** es primordial para lograr una comprensión de las fracciones y sus operaciones. Para conocer un poco más la importancia dada a este enfoque, revisaremos el auxiliar didáctico.

3.2 Auxiliar didáctico Matemáticas Cuarto grado

En este auxiliar se mencionan algunas consideraciones didácticas para la enseñanza de las fracciones, que en mi interpretación son:

- a) Las fracciones son utilizadas en el lenguaje común debido a situaciones como medición, proporción o partes de algo.
- b) Para comparar fracciones ($>$, $<$, $=$) se requiere de un conocimiento abstracto de las fracciones y la idea de orden entre ellas.
- c) El desarrollo que se hará de las fracciones parte de situaciones concretas y objetivas, sencillas de la vida diaria y los conceptos que surgen se van refinando gradualmente hasta llegar a inducir ya en abstracto algoritmos o procedimientos para realizar las operaciones entre quebrados.
- d) Las fracciones son vistas como parte de algo, incluyendo un segmento de recta, también como magnitudes que resulten de la división de segmentos.
- e) No es conveniente desarrollar el conocimiento de las fracciones basados en una sola concepción (lo que con el desarrollo en décadas posteriores de la investigación en educación matemática se conoce como interpretación de las fracciones).
- f) La **equivalencia** se define como: “si tenemos dos fracciones tales que el numerador y el denominador de una de ellas se obtiene multiplicando (o dividiendo) por el mismo número el numerador y el denominador, respectivamente, de la otra, las fracciones son exactamente lo mismo” SEP. (1972a, p. 13).
- g) La idea de **fracciones equivalentes** es imprescindible para resolver operaciones con fracciones de diferente denominador, que se pueden obtener como el producto de los denominadores.
- h) El algoritmo de “multiplicar el numerador y denominador de la primera fracción por el denominador de la segunda y viceversa nos da un criterio muy simple de la **equivalencia de fracciones**” SEP. (1972a, p. 14).
- i) Se emplea el concepto de **equivalencia de fracciones** para resolver operaciones de fracciones y no el de mínimo común denominador.
- j) En este currículo se desarrolla la idea de equivalencia con cierta lentitud para ayudar a su asimilación y se ha insistido en los procesos paso a paso de obtención de algoritmos utilizando el concepto de **equivalencia de fracciones**. SEP. (1972a, p. 15)

En estas consideraciones didácticas se indican las diferentes interpretaciones y representaciones de las fracciones y es evidente la importancia que se le da al concepto de **equivalencia de fracciones** en el cuarto grado; que es considerado fundamental para: la creación de algoritmos, establecer orden, comparar fracciones y resolver operaciones con fracciones. Y desde mi experiencia docente, empleando este concepto en todos los procesos inherentes a las fracciones, se fomenta una mejor comprensión del término fracción.

Para concluir la revisión de materiales bibliográficos del cuarto grado se analiza el libro de matemáticas del alumno.

3.3 Libro del alumno Matemáticas Cuarto grado

En el siguiente cuadro (Cuadro 3) se incluyen los contenidos y actividades respecto a fracciones del libro de matemáticas del alumno de cuarto grado.

Cuadro 3. Actividades y contenidos de fracciones en cuarto grado. (SEP, 1974b)

Lección	Tema	Páginas	Contenido / Actividades
15	Identificar fracciones	40-43	A partir de observar objetos divididos en partes iguales, escribir la fracción que representan con numerador uno. Observar figuras geométricas planas divididas en fracciones e identificar la fracción correspondiente. Identificar fracciones empleando conjuntos continuos y discretos.
17	Suma de fracciones	47-49	A partir de la observación de figuras planas, identificar sumas de fracciones con el mismo denominador y la definición de numerador y denominador. Completar el numerador faltante en sumas con igual denominador. Con apoyo gráfico de círculos, identificar que la suma de sus fracciones da como resultado un entero. Completar fracciones para determinar la cantidad que representa dicha fracción en magnitudes como horas, pesos, metros, entre otros.
19	Fracciones mayores a la unidad	52-54	Identificar fracciones mayores a una unidad con apoyo gráfico de más de un objeto dividido en partes iguales. Identificar que una fracción impropia es mayor o menor a determinado número entero. Completar el término faltante en sumas de fracciones con igual denominador. Resolver problemas que impliquen suma de fracciones con el mismo denominador y el resultado sea mayor que la unidad.
29	Fracciones en la recta numérica	76-77	Identificar fracciones representadas en la recta numérica empleando la definición de numerador y denominador indicado en la lección 17. A partir de las rectas numéricas establecer la equivalencia de 1, 2 y 3 enteros a fracciones desde medios hasta séptimos. Con el uso de rectas numéricas, indicar en pares de fracciones cuál es mayor. Leer las expresiones indicadas para, identificar las fracciones menores, mayores o iguales a la unidad. <i>Por primera vez en este currículo se emplea el término de fracciones equivalentes.</i>
36	Sumas y restas de fracciones	96-98	Mediante una situación de partición de la unidad y reparto representada de manera gráfica en un rectángulo, identificar fracciones con diferente denominador. Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador con apoyo gráfico de figuras planas. <i>Con apoyo de figuras planas identificar fracciones equivalentes para resolver sumas con diferente denominador.</i>
37	Sumas y restas de fracciones	99-101	Representar en la recta numérica sumas y restas de fracciones con igual denominador. En el caso de las sumas identificar si el resultado es mayor a la unidad, también como punto en la recta numérica.

Continúa

Cuadro 3 (Continúa)

Lección	Tema	Páginas	Contenido / Actividades
40	Sumas y restas de fracciones	109-111	<p>Identificar la equivalencia de las fracciones $1/2$, $2/4$ y $3/6$ en círculos y en la recta numérica.</p> <p>A partir de estas representaciones resolver sumas con denominador 2, 4 y 6.</p> <p>Resolver problemas que impliquen suma de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador. Usar fracciones equivalentes para resolver sumas de fracciones con diferente denominador.</p>
46	Sumas y restas de fracciones	123-125	<p>Identificar la equivalencia de tercios, sextos y doceavos en la recta numérica.</p> <p>A partir de estas representaciones resolver equivalencias con denominador 3, 6 y 12.</p> <p>Comparar pares de fracciones con denominador 3, 6 y 12.</p> <p>Resolver sumas de fracciones con denominador 3, 6 y 12.</p> <p>Identificar en la recta numérica fracciones equivalentes con denominador 2, 4 y 8.</p> <p>Completar equivalencias de fracciones con denominador 2, 4 y 8.</p> <p>Comparar pares de fracciones con denominador 2, 4 y 8.</p> <p>Resolver sumas y restas de fracciones con denominador 2, 4 y 8.</p> <p>Usar fracciones equivalentes para compararlas y resolver sumas de fracciones con diferente denominador.</p>
49	Fracciones equivalentes	132-133	<p>A partir de un ejemplo de reparto empleando la fracción $4/3$ y multiplicarla por diferentes números, se indica el procedimiento de que al multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo número se obtienen fracciones equivalentes.</p> <p>Realizar ejercicios empleando el procedimiento indicado.</p> <p>Mediante una situación de reparto se comparan fracciones con diferente denominador para encontrar cuál es mayor, empleando el procedimiento de multiplicar el denominador de la segunda fracción por numerador y denominador de la primera y viceversa para obtener dos fracciones con el mismo denominador.</p> <p>Resolver ejercicios empleando el procedimiento anterior para obtener fracciones equivalentes.</p> <p>Procedimientos para obtener fracciones equivalentes.</p>
53	Fracciones equivalentes	142-143	<p>Observar la representación gráfica en rectángulos del mismo tamaño de las siguientes fracciones: $2/3$, $4/6$, $6/9$, $8/12$, $10/15$, $16/18$ para identificar su equivalencia.</p> <p>Observar la representación gráfica en rectángulos del mismo tamaño de $3/4$, $6/8$, $9/12$, $12/16$, $15/20$, $18/24$ para identificar su equivalencia completando el numerador correspondiente en cada fracción.</p> <p>Representación gráfica de fracciones equivalentes.</p>
65	Fracciones equivalentes	173-174	<p>Encontrar fracciones equivalentes usando el procedimiento de multiplicar numerador y denominador por un mismo número entero cada término de la fracción, apoyándose en la representación de rectángulos del mismo tamaño.</p> <p>Encontrar fracciones equivalentes en una situación de velocidad, empleando el procedimiento presentado en la actividad anterior.</p> <p>Procedimiento para obtener fracciones equivalentes.</p>

Continúa

Cuadro 3 (Concluye)

Lección	Tema	Páginas	Contenido / Actividades
65	Fracciones equivalentes	180-181	Inferir el procedimiento para saber si dos fracciones son equivalentes al multiplicar el denominador de la segunda fracción por numerador de la primera y viceversa. Si el resultado del producto es el mismo, entonces las fracciones son equivalentes, procedimiento ejemplificado en una situación de reparto. Aplicar el procedimiento indicado para escribir el signo $>$ o $<$ entre pares de fracciones. Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador usando el procedimiento señalado en la actividad anterior para obtener fracciones con igual denominador. <i>Procedimiento para obtener fracciones equivalentes.</i>
71	Sumas y restas de fracciones	188-189	Resolver problemas empleando algún procedimiento para obtener denominadores iguales (convertir las fracciones dadas a otras con un mismo denominador). Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador empleando algún procedimiento indicado en las lecciones anteriores. <i>Procedimiento para obtener fracciones equivalentes.</i>
73	Conversión de enteros en fracciones	192-193	Leer el procedimiento para convertir enteros a fracciones con determinado denominador. Resolver ejercicios de convertir enteros a un denominador dado. Comparar fracciones (usando $>$, $<$) con un entero empleando el procedimiento anterior. <i>Procedimiento para obtener fracciones equivalentes.</i>
75	Fracciones mixtas	197-199	Inferir la definición de número mixto mediante una representación gráfica de una situación de elaboración de sarapes. Inferir el procedimiento de convertir números mixtos a fracciones impropias y viceversa. Resolver ejercicios y problemas donde convierta fracciones impropias a números mixtos y viceversa.
77	Suma y resta de fracciones	204-205	Revisar problemas resueltos para identificar el procedimiento para obtención de fracciones equivalentes para resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador. Resolver ejercicios y problemas que impliquen suma y/o resta de fracciones con diferente denominador. <i>Usar fracciones equivalentes para resolver sumas y/o restas de fracciones con diferente denominador.</i>

3.4 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado

En este grado se desarrolla de manera exhaustiva el concepto de ***equivalencia de fracciones***, enfocado a la elaboración y entendimiento de los procedimientos para encontrar fracciones equivalentes. En algunas lecciones se emplean para su comprensión algunos apoyos gráficos como la representación en figuras planas, en dibujos de objetos y en la recta numérica.

En este libro del alumno, de un total de 92 lecciones, se contabilizaron 16 referentes al tema de fracciones comunes, de las cuales:

- a) Cinco lecciones (15, 17, 19, 37 y 75) contienen de forma implícita el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo utilizan como recurso al resolver los ejercicios y situaciones, sin referirlo directamente.
- b) Once lecciones (29, 36, 40, 46, 49, 53, 65, 68, 71, 73 y 77) están dedicadas al desarrollo del concepto de *equivalencia* enfocándose a que los alumnos infieran los procedimientos para obtener *fracciones equivalentes* utilizando ejemplos, ejercicios y solución de problemas.

Me enfocaré a analizar más detalladamente las lecciones, indicando las actividades que tienen como contenido el desarrollo y comprensión del concepto de *equivalencia de fracciones*.

La primera es la lección 29 que introduce el concepto de *equivalencia de fracciones* representando fracciones en la recta numérica y presentando la definición, como una especie de conclusión: “*has escrito números de varias maneras distintas, que llamaremos equivalentes*” (Imagen 5):

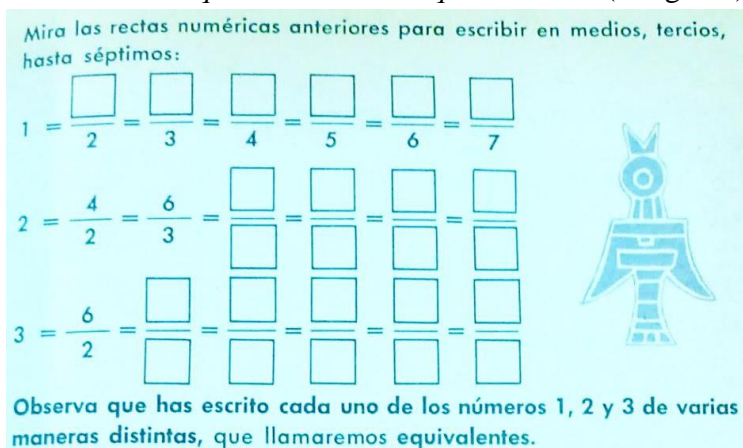
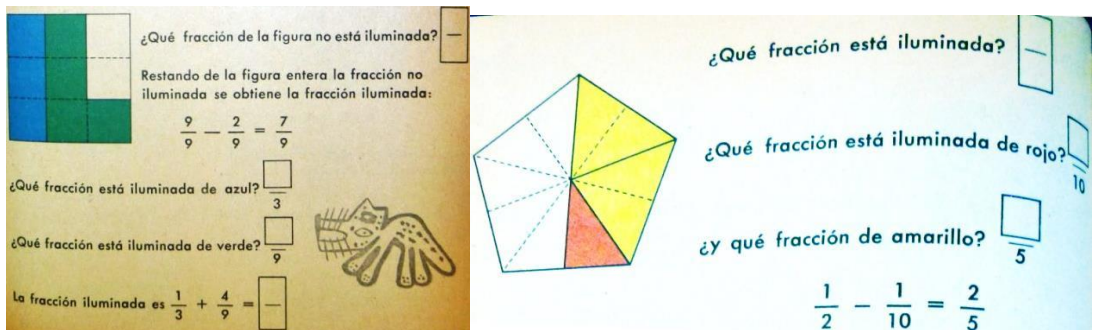


Imagen 5: Primera vez que se emplea el término equivalente en el cuarto grado. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, p. 77).

La secuencia continúa con la lección 36 donde se emplean apoyos gráficos de figuras planas: un rectángulo, un pentágono y una estrella, y en ellas se muestra la equivalencia de fracciones entre tercios y novenos, medios, quintos y décimos y entre medios y doceavos, al resolver sumas sencillas. (Imagen 6).



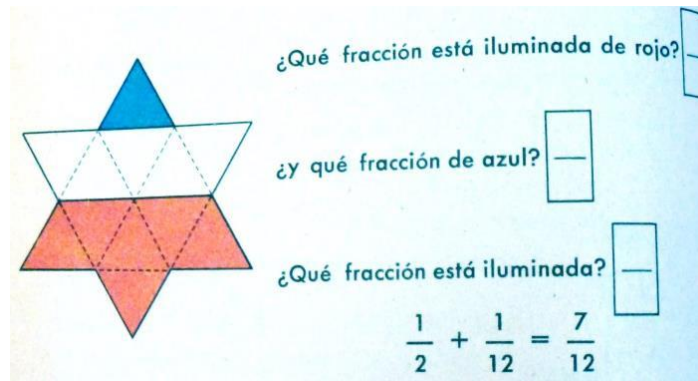


Imagen 6: Empleo de figuras planas para representar fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 97-98).

Se continúa el desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones** en la lección 40 empleando repartos de objetos entre número de personas, y después duplicando o triplicando la cantidad inicial y empleando representaciones gráficas en círculos y en la recta numérica; de esta forma se lleva al alumno a aplicar el concepto de **equivalencia de fracciones** en la solución de sumas y restas de fracciones con diferente denominador (Imagen 7).

Pepe y Meche tenían 1 pastel azul para repartírselo entre los 2:

A cada uno le iba a tocar $\frac{1}{2}$ de pastel.

En ambos casos la fracción de pastel que le tocó a cada uno es la misma: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

En la recta numérica también puedes ver que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$:

¿Puedes ahora sumar $\frac{1}{2} + \frac{7}{4}$?

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{\square}{4} + \frac{7}{4} = \frac{\square}{4}$$

Pero llegaron Paco y Marta con un pastel amarillo y decidieron repartirse los 2 pasteles entre los 4:

A cada uno le tocaron $\frac{2}{4}$ de pastel.

En esta lección has visto que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{15}{30}$.

Los quebrados $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{6}{12}, \frac{15}{30}$ son nombres distintos de la misma fracción; por ello decimos que son fracciones **equivalentes**.

Usa lo que han aprendido aquí para hacer las siguientes sumas y restas:

$\frac{1}{2} - \frac{7}{30} = \frac{\square}{30} - \frac{7}{30} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{\square}{8} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{\square}{8} + \frac{5}{8} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{15}{12} - \frac{1}{2} = \frac{15}{12} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{1}{2} + \frac{15}{12} = \frac{\square}{12} + \frac{15}{12} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{42}{30} - \frac{1}{2} = \frac{42}{30} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Date cuenta de que, usando fracciones equivalentes, has podido escribir con denominadores iguales dos fracciones que tenían denominadores distintos. Al hacer esto, puedes sumar y restar como ya sabías hacerlo.

Imagen 7: Empleo de la equivalencia entre medios, cuartos, sextos, octavos, doceavos, para resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 109-111).

El concepto de *equivalencia de fracciones* se continúa, en la lección 46, entre tercios, sextos y doceavos y medios para introducir el procedimiento de que las sumas y restas de fracciones se pueden realizar si todas las fracciones tienen el mismo denominador (Imagen 8).

Patricia vio que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$. Es decir, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{4}{12}$ son fracciones equivalentes.

Con fracciones equivalentes también puedes sumar y restar quebrados con denominadores distintos, escribiéndolos primero con el mismo denominador. Completa:

$\frac{15}{12} + \frac{2}{3} = \frac{15}{12} + \frac{\square}{12} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{11}{12} - \frac{5}{6} = \frac{11}{12} - \frac{\square}{12} = \frac{\square}{\square}$
$\frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{43}{12} - \frac{5}{6} = \frac{43}{12} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Imagen 8: Introducción al procedimiento de utilizar fracciones equivalentes para realizar sumas y restas de fracciones con diferente denominador. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 123–124).

La lección 49 muestra con ejemplos numéricos el procedimiento de multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo número para obtener fracciones equivalentes y también se indica como procedimiento que para obtener fracciones equivalentes, muchas veces se usa el denominador de la otra fracción como número para multiplicar numerador y denominador de la fracción y así obtener otras fracciones equivalentes. (Imagen 9).

Es decir, $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{20}{15} = \frac{40}{30}$
o sea, $\frac{4}{3} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4 \times 3}{3 \times 3} = \frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4 \times 5}{3 \times 5} = \frac{4 \times 10}{3 \times 10}$

Al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número entero (distinto de cero), se obtiene la misma fracción, pero escrita de distintas maneras equivalentes.

Fíjate que para escribir las dos fracciones $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$ de manera que tuvieran el mismo denominador, el número que escogimos para multiplicar al numerador y al denominador de cada fracción es el denominador de la otra fracción. Así, estas formas equivalentes de escribir las fracciones $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$ tendrán ambas como denominador a $7 \times 5 = 35$.

Imagen 9: Explicaciones de procedimientos para obtener fracciones equivalentes o con el mismo denominador. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 132–133).

Se continúa el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en la lección 53 con el empleo de rectángulos congruentes para representar fracciones con diferente denominador que son equivalentes (Imagen 10).

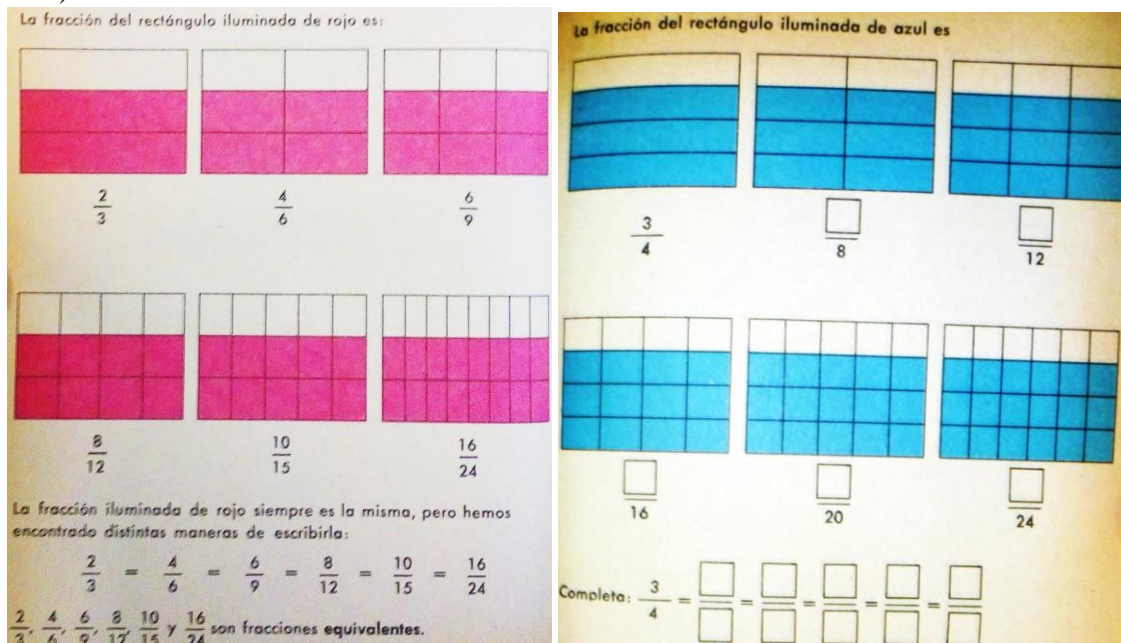
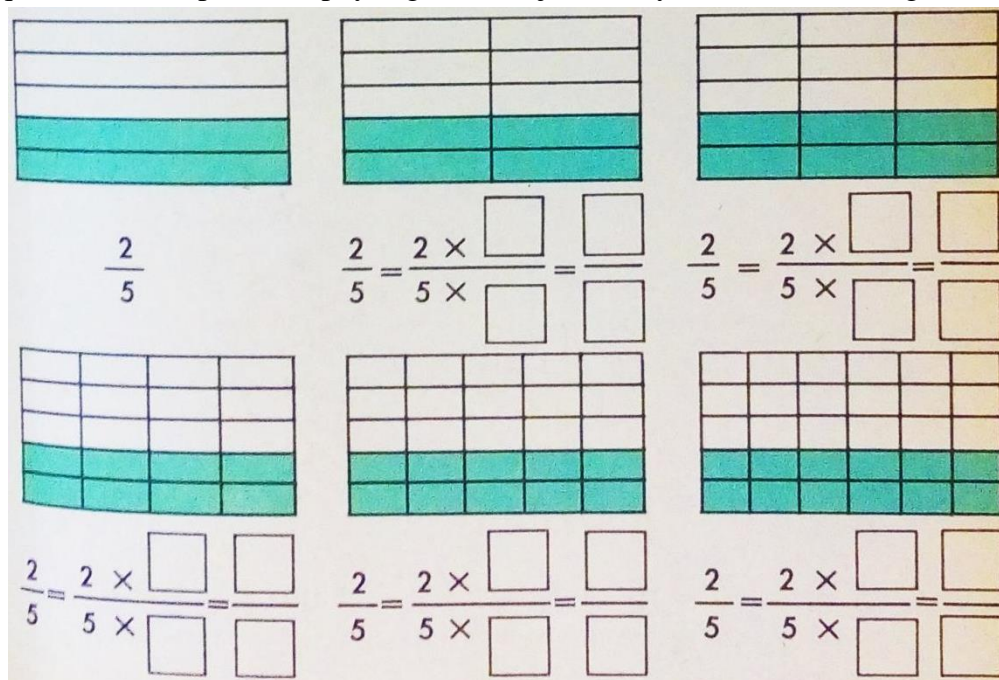


Imagen 10: Representación de fracciones equivalentes en rectángulos. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 142-143).

En esta lección se busca que los niños tengan un apoyo visual para identificar o encontrar fracciones equivalentes. Durante las lecciones 65 y 68 se realiza un repaso de los procedimientos para encontrar fracciones equivalentes, empleando apoyos gráficos, ejercicios y definiciones (Imagen 11).



Lo que hemos hecho al escribir $\frac{4}{11} = \frac{12}{33}$ y $\frac{1}{3} = \frac{11}{33}$ es poner las dos

fracciones con el mismo denominador. Esto se llama poner común denominador. En este caso el común denominador es 33.

Si tienes dos quebrados, puedes encontrar fracciones equivalentes a ellos, con común denominador, multiplicando el numerador y el denominador de cada quebrado por el denominador del otro.

Observa que al multiplicar los denominadores de los dos quebrados se obtiene un común denominador.

Imagen 11: Apoyos gráficos y definiciones para reafirmar procedimientos para obtener fracciones equivalentes o fracciones con el mismo denominador. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 173,180).

En las lecciones 71, 73 y 77 se plantea la aplicación de los procedimientos descritos en las lecciones 65 y 68 para resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador y resolución de problemas que impliquen alguna de estas operaciones y para indicar orden entre pares de fracciones. (Imagen 12).

Efectúa las siguientes sumas y restas de quebrados, poniendo primero común denominador:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{7} = \frac{3 \times \square}{2 \times \square} - \frac{2 \times \square}{7 \times \square} = \frac{\square}{14} - \frac{\square}{14} = \frac{\square}{14}$$

Para hacer las siguientes comparaciones con $>$ ó $<$, escribe primero el número entero con el mismo denominador que el quebrado, o sea con común denominador:

$\frac{21}{4}, \quad 5 = \frac{5 \times 4}{4} = \frac{20}{4}$ $\frac{21}{4} \boxed{>} 5$	$\frac{40}{6}, \quad 7 = \frac{\square \times \square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{40}{6} \boxed{} 7$
---	--

Para escribir un número mixto en forma de quebrado, primero ponemos la parte entera en forma de quebrado con igual denominador que la parte fraccionaria; así se pueden sumar las dos partes.

$$3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Este resultado se puede verificar en la recta numérica:

Un diputado compró 10 botellas de champaña de 1 litro para una cena. Al abrirse, una botella se rompió, 5 botellas perdieron $\frac{1}{11}$ de su contenido y otras 3 botellas perdieron $\frac{1}{4}$ de litro.

¿Cuántos litros quedaron?

¿Cuántas botellas más tenía que comprar para volver a tener 10 litros?

Imagen 12: Aplicación y ejercicios sobre los procedimientos indicados para obtener fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1974b, pp. 189, 193, 199 y 205).

Como conclusión del análisis del libro del cuarto grado; el concepto de *equivalencia de fracciones* se trabaja por un tiempo constante en el transcurso del año escolar; utilizándose gran cantidad de apoyos gráficos de figuras planas y la recta numérica. También, aunque en menos situaciones, se utilizan situaciones de reparto.

El concepto de *equivalencia de fracciones* es fundamental para la obtención de procedimientos para resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador y establecer el orden entre pares de fracciones.

En este sentido vemos que el concepto de *equivalencia de fracciones* es utilizado a manera de pasos de un procedimiento para realizar otras acciones, aunque se promueve un razonamiento basado en la realización de ejercicios, ejemplos gráficos y ejemplos numéricos que están enfocados específicamente a permitir que los alumnos infieran las ideas y los procedimientos a los que se les quiere llevar. Con esto se busca apoyar la comprensión del concepto de fracción y los conceptos relacionados, como la *equivalencia de fracciones*.

Para concluir con el análisis del tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en el currículo introducido en 1972, revisaré el material bibliográfico correspondiente al quinto grado.

4. Presentación de las fracciones en el quinto grado

4.1 Auxiliar didáctico Matemáticas Quinto grado

Este material de apoyo para el docente indica que las fracciones se continuarán representando mediante partes coloreadas de una figura, partes de un conjunto o puntos en la recta numérica. Se puntualiza que la recta numérica tiene la facilidad de visualizar geoméricamente la suma y la resta de fracciones.

También se señala que se tratará la multiplicación y división de fracciones considerando varios casos particulares hasta hacer comprender al alumno que una forma de resolver estas operaciones es utilizando el algoritmo.

En este auxiliar se plantea también un reforzamiento y aplicación de los procedimientos vistos en cuarto grado para la obtención de *fracciones equivalentes* con el fin de utilizarlos en la solución de sumas y restas de fracciones con diferente denominador y establecer el orden entre fracciones.

En este auxiliar didáctico se afirma que las *fracciones equivalentes* son: “*Diferentes formas de escribir el mismo número*” y “*dada una fracción se pueden obtener fracciones equivalentes a ella multiplicando (y dividiendo) por el mismo número el denominador y el numerador*”. Y a su vez se nos explica que esto es útil para obtener fracciones con igual denominador pues para sumar o restar fracciones “*bastará considerar el caso en que todas ellas tengan el mismo denominador*”. También se emplea esta definición de fracciones equivalentes para la simplificación a su mínima expresión de los resultados de las operaciones entre fracciones. SEP. (1972b, p. 34)

Este libro explica también el procedimiento para obtener fracciones con el mismo denominador e identificar si son equivalentes dando la siguiente definición:

Si a/b y c/d son fracciones equivalentes, entonces:

$$\begin{aligned} \underline{a \times d} &= \underline{c \times b} \\ b \times d &= d \times b \end{aligned}$$

Entonces, se dice que “*en las fracciones equivalentes y sólo en las fracciones equivalentes, los productos cruzados son iguales*”. Esta definición coincide con la definición matemática de equivalencia en los números racionales. (Imagen 13).

Fraciones equivalentes son diferentes formas de escribir el mismo número:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{4}{20} = \frac{5}{25} = \frac{6}{30} = \dots = \frac{1 \times n}{5 \times n}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \frac{5}{30} = \frac{6}{36} = \dots = \frac{1 \times n}{6 \times n}$$

y en forma similar para cualquier otro caso. Podemos indicar, en general, que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n}$$

es decir, dada una fracción, se pueden obtener fracciones equivalentes a ella multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número.

También es cierto que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

es decir, se pueden obtener frac-

ciones equivalentes a una dada, dividiendo su numerador y su denominador por el mismo número (siempre y cuando ambos sean divisibles por ese número).

Esto nos permite reducir fracciones a un común denominador.

Sean por ejemplo $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{5}$:

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{10}{35}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35}$$

en general, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones que se quieren expresar con el mismo denominador, procedemos así:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones equivalentes, entonces:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

como los denominadores son iguales, entonces los numeradores también lo son:

$$a \times d = c \times b$$

Imagen 13: Procedimientos aritméticos para encontrar fracciones equivalentes. Auxiliar didáctico. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972b, pp. 34-35).

Este libro proporciona también una serie de sugerencias de actividades concretas para trabajar la equivalencia que requieren la manipulación de materiales como hojas de papel, uso de figuras planas como: cuadrados, rectángulos o círculos en papel o cartulina para representar las fracciones.

Continuaré con el libro del alumno que está enfocado a las actividades y ejercicios que los educandos de este grado deben realizar respecto a la equivalencia.

4.2 Libro del alumno Matemáticas Quinto grado

En el cuadro 4 se indican los contenidos y actividades principales que incluyen manejo de fracciones y específicamente la *equivalencia de fracciones*:

Cuadro 4. Actividades y contenidos de fracciones en el quinto grado. (SEP. 1972c)

Lección	Tema	Paginas	Contenidos / Actividades
10	Fraciones	31-36	Completar un cuadro con las columnas tituladas de la siguiente manera: "gráfica" [Representación gráfica en figuras planas], "partes coloreadas", "total de partes", "fracción", "numerador" y "denominador". Colorear o señalar la fracción indicada, empleando figuras planas, recta

Continúa

Cuadro 4 (Continúa)

Lección	Tema	Páginas	Contenidos / Actividades
			numérica y conjuntos de figuras planas. Contestar preguntas referentes a situaciones contextualizadas que implican el uso de fracciones.
12	Equivalencia de fracciones	38-44	Colorear en rectángulos congruentes, algunas fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$. Escribir el signo que relaciona las fracciones ($=$), con base en la representación en los rectángulos. Observar la representación en círculos del mismo tamaño de las fracciones: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$. Escribir el signo ($=$) que relaciona estas tres fracciones. Leer la formulación del concepto de fracciones equivalentes con base en las relaciones y representaciones anteriores. Contestar preguntas explicando las relaciones que existen entre numeradores y denominadores de las fracciones representadas. Escribir fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{11}$, en forma de secuencia. Explicación del procedimiento de productos cruzados para comprobar si una fracción es equivalente a otra y realizar ejercicios aplicando este procedimiento. Completar, usando productos cruzados, pares de fracciones equivalentes a las que les falta un dato (numerador o denominador). Completar secuencias de fracciones equivalentes. Escribir si la fracción dada es equivalente a $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{2}$. Actividades para la comprensión del concepto de equivalencia de fracciones.
13	Comparación de fracciones	45-47	Observar fracciones representadas en rectángulos del mismo tamaño. Identificar el orden de las fracciones con base en las representaciones anteriores. Identificar fracciones representadas en la recta numérica y observar el orden tomando como base dicha representación. Inferir el procedimiento de multiplicar por el mismo número el numerador y el denominador de una fracción para obtener otra equivalente mediante ejemplos y ejercicios. Ordenar grupos de fracciones de mayor a menor empleando el procedimiento indicado. Representar en una recta numérica fracciones con igual denominador y en otra recta numérica fracciones con diferente denominador. Obtener e identificar fracciones equivalentes de forma gráfica y geométrica.
17	Suma de fracciones	52-55	Resolver sumas de fracciones con igual denominador. Mediante un ejemplo de suma con diferente denominador, aplicar el procedimiento de obtener fracciones equivalentes para igualar denominadores y resolver la adición indicada. Resolver ejercicios de sumas de fracciones con diferente denominador empleando el procedimiento señalado. Resolver sumas de enteros y fracciones, utilizando el denominador uno para el entero y el procedimiento de igualar denominadores. Uso del concepto de equivalencia para resolver sumas de fracciones.
18	Resta de fracciones	56-58	Resolver ejercicios de restas de fracciones con igual denominador. Resolver restas de fracciones con diferente denominador, utilizando

Continúa

Cuadro 4. (Continúa)

Lección	Tema	Páginas	Contenidos / Actividades
			<p>como procedimiento el de igualar denominadores. Resolver ejercicios de restas de fracciones con diferente denominador empleando el procedimiento descrito. Uso del concepto de equivalencia para resolver restas de fracciones.</p>
20	Fracciones Decimales	60-67	<p>Inferir el concepto de fracción decimal, a partir de fracciones comunes, obteniendo una representación de denominador 10 o potencia de 10 de la fracción común dada. Completar un cuadro con las columnas siguientes: fracción, fracción equivalente con denominador decimal y “cómo se lee [la fracción]”. Completar frases referentes al cuadro anterior. Identificar con ejemplos y completar expresiones sobre la notación desarrollada de enteros y fracciones decimales para la escritura de números decimales. Realizar ejercicios de notación desarrollada de números decimales empleando fracciones con denominador 10, 100 o 1000, de acuerdo con los ejemplos señalados. Escribir el número decimal correspondiente escrito en notación desarrollada, según ejemplos indicados. A partir de un número decimal escrito en notación desarrollada anotar cómo se lee dicho número decimal y escribirlo en forma numérica. Completar un cuadro anotando cómo se lee un número decimal y viceversa. Subrayar el número decimal equivalente a una fracción indicada, con denominador 10 o potencia de 10. Completar un cuadro con las columnas: fracción, fracción decimal equivalente, expresión decimal y cómo se lee, según ejemplo indicado. Completar un cuadro con las columnas: expresión, fracción decimal equivalente, expresión decimal y cómo se lee, según ejemplo indicado. Realizar ejercicios de conversión de número decimal a fracción común y viceversa. Uso del concepto de equivalencia entre fracciones y decimales.</p>
55	Producto de un entero por una fracción	165-171	<p>Observar ejemplos y ejercicios de multiplicación de fracciones con apoyos gráficos de figuras planas e inferir, a partir de estos, el algoritmo para efectuar multiplicaciones de fracciones. Resolver multiplicaciones de fracciones, incluyendo enteros, indicando el denominador uno en los enteros. Simplificar el resultado de estas multiplicaciones a la mínima expresión. Contestar preguntas referentes a lo que significa la multiplicación de fracciones. [Cuando se multiplica una fracción por un entero se obtienen tantas partes (fracciones) como el entero nos indica: $5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ y cuando se multiplica fracción por fracción se fractura la fracción en las partes que indica una de las fracciones $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, es decir, el medio se fracciona en cuartos y el resultado es un octavo]. Se concluye que multiplicar fracciones es tomar partes de.... Uso del concepto de equivalencia al simplificar fracciones.</p>
56	Multiplicación de fracciones	172-180	<p>Identificar en representaciones gráficas de figuras planas y recta numérica el significado y el resultado de multiplicar fracciones. Contestar preguntas referentes a esta representación para avanzar en la comprensión del concepto y el algoritmo de multiplicación de fracciones.</p>

Continúa

Cuadro 4. (Concluye)

Lección	Tema	Paginas	Contenidos / Actividades
			Resolver ejercicios de multiplicación de fracciones usando el algoritmo indicado. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al simplificar resultados.</i>
57	Producto de fracciones	186-191	Con apoyos gráficos en figuras planas identificar la multiplicación de fracciones para entender el concepto, de que no significa aumentar como en los números naturales, sino obtener partes de... y de esta forma identificar el algoritmo para resolver multiplicaciones, resaltando también las propiedades: conmutativa e inverso multiplicativo. Resolver ejercicios de multiplicación de fracciones <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al simplificar resultados.</i>
61 y 63	Probabilidad	196-200	Determinar probabilidades y sus representaciones en fracciones comunes. <i>Empleo de la definición de fracciones equivalentes.</i>
64	Comparación de probabilidades	206-207	Determinar las probabilidades de eventos expresados en fracciones y compararlas para saber cual tiene mayor probabilidad. <i>Uso de la definición de fracciones equivalentes.</i>
66	Cociente de fracciones	213-219	Encontrar el factor faltante en una multiplicación de fracciones e indicar que este “número perdido” es el cociente de las fracciones dadas. Identificar el procedimiento para obtener el cociente de fracciones multiplicando por el inverso multiplicativo del segundo factor. De esta manera se indica el algoritmo para resolver división de fracciones. Con apoyos gráficos en figuras planas y puntos en la recta numérica representar el cociente de fracciones expresado como: encontrar “el número perdido”, ¿Qué parte es...? ¿Cuántas veces contiene...? O ¿Qué número multiplicado por..., nos da...? <i>Uso de fracciones equivalentes al simplificar resultados.</i>
68	Las fracciones y los enteros en la recta numérica	222-225	Representar números decimales y fracciones comunes en la misma recta numérica, para identificar orden entre ellos y en algunos casos equivalencia. <i>Representación de fracciones equivalentes en la recta numérica.</i>
72	Suma y resta de fracciones	237-243	Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador, indicándose como procedimiento para resolverlas encontrar fracciones equivalentes; al multiplicar el denominador de la segunda fracción por la primera fracción. Resolver problemas que impliquen suma o resta de fracciones, incluyendo cálculo de perímetro de figuras planas. <i>Uso del concepto de equivalencia al sumar y restar fracciones.</i>
75	Multiplicación de fracciones	250-256	Mediante ejemplos y representación gráfica en figuras planas, interpretar el significado y el algoritmo para la multiplicación de fracciones. Resolver problemas que impliquen multiplicación de fracciones. <i>Uso del concepto de equivalencia al simplificar resultados.</i>
79	División de fracciones	265-270	Presentación de ejemplos y de una explicación del algoritmo para resolver división de fracciones. Resolver ejercicios de división de fracciones Resolver problemas que impliquen división de fracciones. <i>Uso del concepto de equivalencia al simplificar resultados.</i>

4.3 Tratamiento de la equivalencia en el quinto grado

En este libro del alumno se contabilizaron, de un total de 91 lecciones; 17 referentes al tema de fracciones, de las cuales:

- a) Once lecciones (10, 17, 18, 55, 56, 57, 66, 68, 72, 75 y 79) emplean el concepto de **equivalencia de fracciones** de manera implícita, es decir, el concepto es utilizado en los ejemplos mostrados y requerido para resolver los ejercicios propuestos, pero no se formaliza este concepto.
- b) Cuatro lecciones (20, 61, 63 y 64) emplean el concepto de **equivalencia de fracciones** en temas relacionados como: fracciones decimales y probabilidad.
- c) Dos lecciones (12 y 13) están dedicadas al desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones** y los procedimientos correspondientes para obtener *fracciones equivalentes*.

A continuación se detallan las dos lecciones que desarrollan el concepto de **equivalencia de fracciones**.

Lección 12. En esta lección, titulada: **Equivalencia de Fracciones**, se repasa el concepto de equivalencia desarrollado en el cuarto grado. Se inicia con la representación en rectángulos congruentes de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ y con base en ésta representación se establece la relación de igualdad entre las fracciones. (Imagen 14).

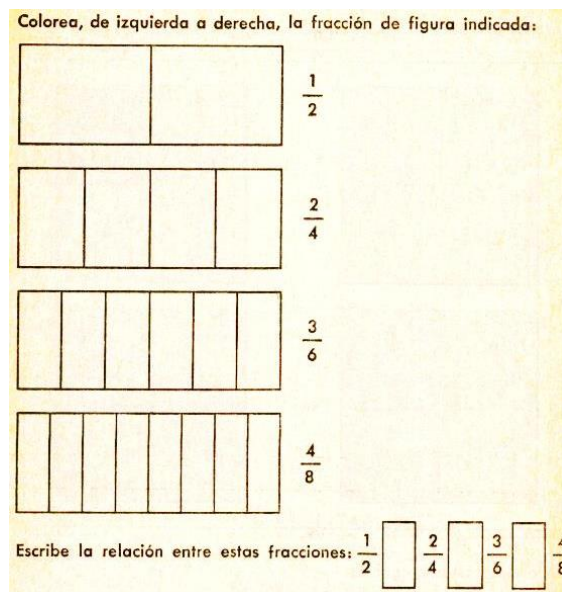
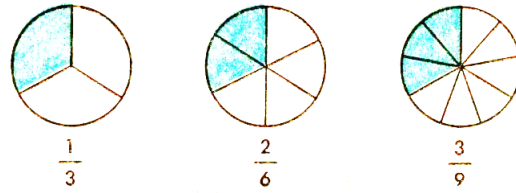


Imagen 14: Representación en rectángulos de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 38).

Se continúa la lección con representaciones en círculos del mismo tamaño de fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$. Con base en estas representaciones y relaciones se infiere nuevamente que son fracciones equivalentes (Imagen 15).



Escribe la relación entre estas fracciones: $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$

En las figuras de la página anterior, podemos observar que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$ representan la misma porción de una figura, son diferentes formas de escribir el mismo número.

Se dice entonces que:

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ son fracciones equivalentes

y se escribe:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

Imagen 15: Representación en círculos de fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y definición de fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, pp. 38–39).

La lección continúa con la aplicación de la definición de fracciones equivalentes a ejercicios de completar sucesiones. (Imagen 16).

Completa los valores que faltan en las siguientes series de fracciones equivalentes:

$\frac{1}{4}$	=	$\frac{2}{8}$	=	$\frac{3}{12}$	=	—	=	—	=	$\frac{6}{28}$	=	—	=	—
$\frac{1}{5}$	=	$\frac{2}{10}$	=	$\frac{3}{15}$	=	—	=	$\frac{4}{25}$	=	—	=	$\frac{5}{8}$	=	—
$\frac{1}{6}$	=	$\frac{2}{12}$	=	—	=	—	=	$\frac{5}{30}$	=	—	=	—	=	$\frac{9}{54}$
$\frac{1}{7}$	=	—	=	—	=	$\frac{4}{28}$	=	—	=	—	=	$\frac{7}{49}$	=	—
$\frac{1}{8}$	=	—	=	—	=	—	=	$\frac{5}{48}$	=	—	=	—	=	$\frac{72}{72}$
$\frac{1}{9}$	=	—	=	$\frac{3}{27}$	=	—	=	—	=	$\frac{7}{7}$	=	—	=	$\frac{9}{9}$

Imagen 16: Completar sucesiones de fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 40).

Se presenta una formalización del procedimiento de multiplicar o dividir por el mismo número al denominador y numerador de una fracción para obtener una fracción equivalente. Así mismo, se explica el procedimiento de productos cruzados; (numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y el numerador de la segunda por el denominador de la primera) como una forma de identificar si dos fracciones son equivalentes o no. (Imagen 17).

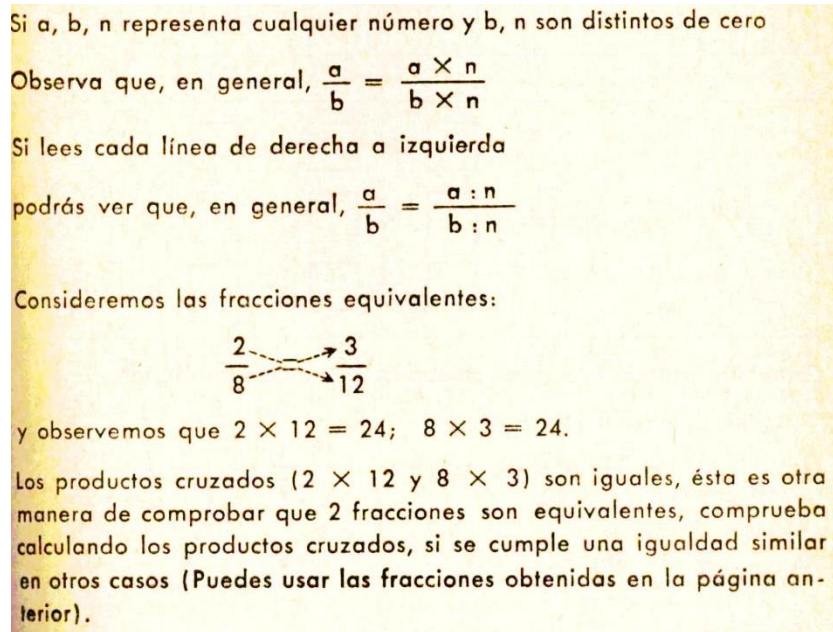


Imagen 17: Procedimientos aritméticos para obtener fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 41).

Se continúa el desarrollo de la *equivalencia de fracciones* en esta lección al realizar actividades que implican el uso de los procedimientos indicados para obtener fracciones equivalentes: escribiendo pares de fracciones y obteniendo los productos cruzados, y en otros pares de fracciones completar el numerador o denominador faltante para que las fracciones sean equivalentes. (Imagen 18).

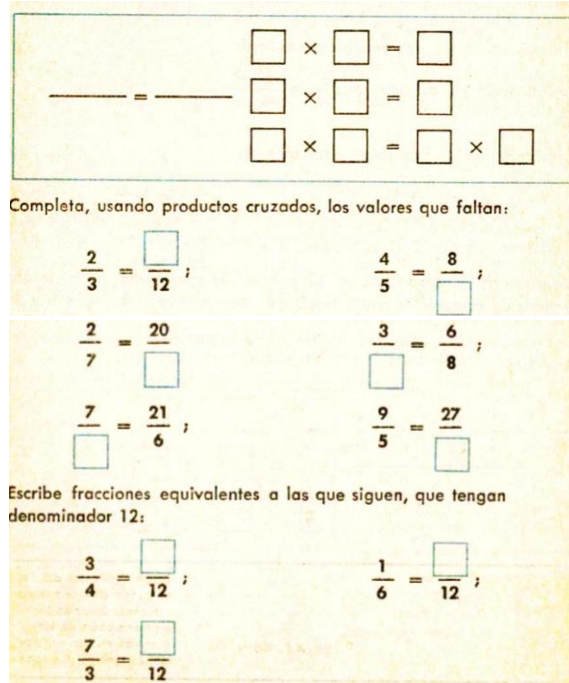


Imagen 18: Ejercicios donde se emplean los algoritmos para encontrar fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 42).

Esta lección, dedicada al concepto de *equivalencia de fracciones*, se concluye resolviendo ejercicios donde se solicita indicar si una fracción dada es equivalente a $\frac{2}{3}$ o $\frac{3}{2}$ (Imagen 19).

II. En los cuadritos escribe $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{2}$ según creas pertinente:

$\frac{8}{12} =$ <input type="text"/>	$\frac{4}{6} =$ <input type="text"/>	$\frac{6}{9} =$ <input type="text"/>
$\frac{10}{15} =$ <input type="text"/>	$\frac{40}{60} =$ <input type="text"/>	$\frac{12}{8} =$ <input type="text"/>
$\frac{20}{30} =$ <input type="text"/>	$\frac{9}{6} =$ <input type="text"/>	$\frac{80}{120} =$ <input type="text"/>
$\frac{66}{44} =$ <input type="text"/>	$\frac{6}{4} =$ <input type="text"/>	$\frac{44}{66} =$ <input type="text"/>

Imagen 19: Ejercicios para concluir la lección de fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 42).

En la lección 13, titulada *Comparación de fracciones* se emplea el procedimiento de multiplicar numerador y denominador de la primera fracción por el denominador de la segunda y viceversa. Esto con el fin de igualar denominadores y establecer el orden de las fracciones comparadas ($>$, $=$, $<$) con apoyos gráficos de figuras planas y representación en la recta numérica (Imagen 20). Es importante mencionar que en esta lección, se señala respecto del orden, que a fracciones más grandes, corresponden en la recta numérica puntos más alejados del cero.

Observemos la porción coloreada de estas gráficas:

$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{5}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{5}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{5}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	

Comparando las áreas coloreadas de azul deducimos que

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}.$$

Asimismo, comparando las áreas coloreadas de rojo podemos ver que

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5} > \frac{2}{5} > \frac{1}{5}.$$

Representemos ahora algunas fracciones en la recta:

Las fracciones más grandes determinan en la recta puntos más lejanos de 0. Por tanto:

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} ; \frac{3}{6} < \frac{3}{4}$$

Imagen 20: Apoyos gráficos y recta numérica para representar fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 45).

Se continúa la lección con ejercicios de aplicación del procedimiento descrito para indicar el orden de fracciones ($>$, $=$, $<$) (Imagen 21).

De cada par de fracciones, indica cuál es la mayor:

$\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{3} = \frac{\square}{3 \times 5} = \frac{\square}{15}$ $\frac{4}{5} = \frac{\square}{5 \times 3} = \frac{\square}{15}$ $\frac{2}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$ y $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{5} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{4}{3} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{6}{5}$ <input type="checkbox"/> $\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$ $\frac{1}{3} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{4}{9} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{1}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{4}{9}$
---	---	---

Imagen 21: Ejercicios de comparación de fracción empleando el algoritmo descrito. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 47).

Se concluye la lección ordenando grupos de fracciones con igual o diferente denominador, auxiliándose de la representación en la recta numérica (Imagen 22).

Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones:

$\frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{2}, \frac{2}{6}$ $\frac{8}{7}, \frac{3}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$

Representa sobre la recta las fracciones $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ y $\frac{6}{5}$

Representa sobre la recta las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$

Imagen 22: Ordenar un conjunto de fracciones de mayor a menor utilizando recta numérica. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 1972c, p. 47).

Con esta lección se cierra el tratamiento de la equivalencia en el currículo introducido en 1972, pues en el sexto grado ya solo se resuelven problemas donde se aplican los conceptos de fracciones trabajados en los de cuarto y quinto.

5. Conclusiones acerca del currículo introducido en 1972

En este currículo se abandonó el tratamiento del tema de fracciones en un solo bloque y de manera consecutiva, propia del currículo de 1960. En el currículo de 1972, las lecciones que abordan las fracciones, se distribuyen a lo largo del libro de texto y del año escolar. Cada lección tiene un propósito y en ellas se sugieren secuencias didácticas, las cuales integran apoyos visuales, ejemplos, definiciones, explicaciones y ejercicios. En la revisión del material bibliográfico de tercero, cuarto y quinto grados de

este currículo, se observa que el término fracción se encuentra en transición para dejar de ser “quebrado” (unidad fracturada) como lo fue en los libros antecesores (1960). Se intenta dar otro enfoque al concepto de fracción y ya no solo ser porción de algo “quebrado” en partes o un todo que se ha dividido. Se incluyen otras representaciones, como conjuntos discretos y la recta numérica, además de un mayor número de representaciones gráficas en figuras planas que ya no se limitan a círculos y rectángulos. Ahora se incluyen polígonos regulares y otras figuras como estrellas y flores.

En las secuencias didácticas sugeridas, se puede observar que la conceptualización de *fracciones equivalentes*, se pretende lograr de manera razonada, apoyada con un mayor número de representaciones gráficas y con ejemplos y ejercicios como forma de verificar lo que se dice en las definiciones y conceptos. En comparación con la propuesta anterior (1960), en la de 1972 se disminuyen las mecanizaciones y procedimientos rígidos como los algoritmos basados en la memorización, sin llegar a una completa eliminación de los mismos. También se incrementó la cantidad de apoyos visuales y se intenta que el alumno analice y comprenda las definiciones con ejemplos y más elementos gráficos.

De manera general, observé que la mayoría de lecciones estaban diseñadas para que los alumnos infirieran los conceptos, definiciones y procedimientos a partir de proporcionar ejemplos numéricos y se plantean preguntas para observar ciertas regularidades. Específicamente, en muchas lecciones se buscaba que ellos obtuvieran las conclusiones a las que los ejercicios y las preguntas los orientaban.

En este currículo se destaca que el concepto de *equivalencia de fracciones* tiene una importancia considerable y se dedican varias lecciones y gran cantidad de ejercicios, problemas y ejemplos para promover la comprensión del concepto y entender los procedimientos propuestos para obtener fracciones equivalentes o con igual denominador. También se da un desarrollo amplio y una conceptualización con ejemplos numéricos y “formalización” de la *equivalencia de fracciones*. Se explican diferentes procedimientos para obtener fracciones equivalentes y el concepto se aplica en otros contenidos de aprendizaje como la comparación de fracciones, determinar orden entre ellas ($>$, $=$, $<$), resolver sumas y restas de fracciones, simplificar resultados de las cuatro operaciones básicas a la mínima expresión y como apoyo en el proceso de solución de las mismas. También es un concepto fundamental para la introducción y entendimiento de los números decimales y de la probabilidad.

En síntesis, se destaca de manera importante el concepto de *equivalencia de fracciones*, para el entendimiento y desarrollo de los contenidos y conceptos relacionados con las fracciones, principalmente en el cuarto grado, que es donde se introduce, desarrolla y vincula con las fracciones, sus operaciones y su orden.

Finalmente, es importante resaltar que con el enfoque de las “matemáticas modernas” en este currículo, la recta numérica es considerada como esencial para el desarrollo del contenido de fracciones. Esto favoreció que la *equivalencia de fracciones* se introdujera y se desarrollara con mayor número de representaciones desde contextos discretos y continuos, como puntos en la recta numérica y en números decimales y probabilidad.

CAPITULO IV: La Equivalencia de Fracciones en el currículo introducido en 1993

Introducción⁹

En la década de 1990, se realizó la última reforma a los planes y programas de la educación primaria del siglo XX. Este currículo se dio en medio de otros cambios referentes a la educación, como los realizados a la Ley Federal de Educación y al Artículo 3º Constitucional. Entre otros aspectos, se modificó la duración de la educación básica a diez años.

En este periodo el currículo tuvo un cambio sustancial, pues se reformularon los contenidos que conforman los planes de estudio y todos los materiales de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje, incluidos los libros de texto gratuitos. Las áreas de estudio que se introdujeron en 1972 se sustituyeron por asignaturas.

1. La reforma educativa de los años noventa

Esta reforma fue el resultado del *Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica*, su introducción se inició, en una primera fase, en el ciclo escolar 1993-1994.

En la primera fase de esta reforma se dio lugar al nuevo currículo, que se enfocaron a las siguientes orientaciones generales:

- 1) Prioridad al dominio de la lectura, escritura y expresión oral.
- 2) ***Dedicar a las matemáticas por lo menos un cuarto del tiempo de estudio en los seis grados.***
- 3) En ciencias naturales, se relacionaron los temas de la salud y la protección del medio ambiente.
- 4) Recuperación del estudio sistemático de la historia, la geografía y la educación cívica a partir del cuarto grado.
- 5) Asignación de un espacio de tiempo importante para la educación artística y física.

El currículo de este periodo tenía como propósito asegurar que los niños adquirieran las habilidades y conocimientos específicos previstos en cada una de las asignaturas. En términos generales, se plantearon los siguientes objetivos:

*“Que los alumnos adquieran y desarrollen las habilidades intelectuales (la lectura y la escritura, la expresión oral, la búsqueda y selección de información, la **aplicación de las matemáticas a la realidad**) que les permitan aprender permanentemente y con independencia, así como actuar con eficacia e iniciativa en las cuestiones prácticas de la vida cotidiana.” (Plan y programas de estudio de educación primaria, 1993, SEP, 1994h, p. 13)*

⁹Este apartado constituye una síntesis con algunos comentarios del libro: Villa L. (2009, pp.74-78). La ficha completa se encuentra en las referencias bibliográficas.

Este currículo también propuso una nueva distribución del tiempo escolar, donde se priorizaban las asignaturas de Español y *Matemáticas*, En el caso de matemáticas, para primero y segundo grados se propuso dedicar un 30% y de tercero a sexto grados un 25% del total de las horas de clase, como se aprecia en el cuadro 1:

Cuadro 1: Distribución del tiempo de trabajo para educación primaria.

Distribución del tiempo de trabajo/Primero a sexto grados					
Primero y segundo grados			Tercero a sexto grados		
Asignatura	Horas anuales	Horas semanales	Asignatura	Horas anuales	Horas semanales
Español	360	9	Español	240	6
Matemáticas	240	6	Matemáticas	200	5
Conocimiento del Medio*	120	3	Ciencias Naturales	120	3
Educación Artística	40	1	Historia	60	1.5
Educación Física	40	1	Geografía	60	1.5
Total	800	20	Educación Cívica	40	1
			Educación Artística	40	1
			Educación física	40	1
			Total	800	20

*Trabajo integrado de: Ciencias Naturales, Historia, Geografía y Educación Cívica.
Fuente: Plan y programas de estudio de educación primaria, 1993, SEP, 1994:14

1.1 Propósitos generales del plan y programas de estudio de matemáticas

Según se dice en este plan de estudios, los alumnos en la escuela primaria *deberán adquirir conocimientos básicos de las matemáticas* y desarrollar las capacidades de:

- ⊕ **Reconocer, plantear y resolver problemas.**
- ⊕ Anticipar y verificar resultados.
- ⊕ Comunicar e interpretar información matemática.
- ⊕ Identificar patrones y situaciones análogas.
- ⊕ Tener imaginación espacial.
- ⊕ Estimar resultados de cálculos y mediciones.
- ⊕ Usar instrumentos de medición, dibujo y cálculo.
- ⊕ Construir el pensamiento abstracto por medio de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias. (SEP, 1994h, p. 50).

En la asignatura de Matemáticas se abandonó el enfoque estructuralista del currículo de 1970 y se sustituyó por otro basado en el planteamiento y resolución de problemas como forma de construcción de los conocimientos matemáticos. El enfoque se caracterizó por la importancia que se dio a los significados de los conceptos matemáticos en distintos contextos y a la resolución de problemas como actividad fundamental.

El enfoque metodológico propuesto ubica los problemas como el punto central del aprendizaje. Este enfoque metodológico se sustentó en resultados de investigación en matemática educativa desarrolladas en México en varias instituciones como: Departamentos de Investigaciones Educativas (DIE), de Matemática Educativa (DME, del Cinvestav) y la Universidad Pedagógica Nacional. Del extranjero se recibió influencia de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas –IREM por sus siglas en francés – y del Instituto de Formación de Maestros de Rouen, Francia.

Esta propuesta de matemáticas intentó romper con la enseñanza memorística, que, de acuerdo a mi experiencia docente, se sigue utilizando debido a la falta de conocimientos matemáticos y didácticos de esta asignatura por parte de los maestros.

Ahora bien, en la asignatura de Matemáticas, el currículum está organizado a través de seis ejes, llamados ejes conceptuales que deben desarrollarse en paralelo a lo largo de cada grado (Cuadro 2):

Cuadro 2: Ejes conceptuales y objetivos de la asignatura de matemáticas. (SEP. 1994h, pp. 50-51).

Ejes conceptuales	Objetivos
<i>Los números, sus relaciones y sus operaciones</i>	<i>Comprender el significado de los números y de los símbolos que los representan para que puedan utilizarlos como herramientas de solución.</i>
Medición	Construir los conceptos ligados a ella a través de acciones directas sobre los objetos, mediante la reflexión sobre esas acciones y la comunicación de sus resultados.
Geometría	Estructurar y enriquecer el manejo e interpretación del espacio y de las formas mediante actividades de manipulación, observación, dibujo y análisis de las mismas.
Tratamiento de la información	Analizar y seleccionar información planteada a través de textos, imágenes y otros medios para resolver problemas matemáticos.
Predicción y azar	Explorar situaciones donde el azar interviene y desarrollar gradualmente la noción de lo que es probable o no es probable que ocurra en dichas situaciones.
Procesos de cambio	Abordar fenómenos de variación proporcional y no proporcional mediante la lectura, elaboración y análisis de tablas y gráficas.

Los cuatro primeros ejes conceptuales de este programa, se empiezan a desarrollar en primer grado y continúan desarrollándose hasta el sexto grado, mientras que los dos últimos (predicción y azar y procesos de cambio) y el contenido de números fraccionarios se inician a partir del tercer grado, como se puede observar en el siguiente cuadro. (Cuadro 3):

Cuadro 3: Contenidos generales a desarrollar por grado de la asignatura de matemáticas (SEP. 1994h, pp. 55-68).

Grado	Contenidos
Tercero	Números naturales; <i>números fraccionarios</i> ; longitudes y áreas; capacidad, peso y tiempo; ubicación espacial; cuerpos geométricos; figuras geométricas; tratamiento de la información; predicción y azar.
Cuarto Quinto Sexto	Números naturales; <i>números fraccionarios</i> ; números decimales; longitudes, áreas y volúmenes; capacidad, peso y tiempo; ubicación espacial; cuerpos geométricos; figuras geométricas; tratamiento de la información; procesos de cambio; predicción y azar.

Después de 20 años de vigencia de los Libros de Texto Gratuitos creados para el currículum de 1972, en

la década de 1990 se hizo una renovación de todos estos libros. En esta ocasión, la SEP publicó una “Convocatoria al Concurso para la Renovación de los Libros de Texto Gratuito de Educación Primaria”. Mediante esta convocatoria, se invitó a maestros, pedagogos, investigadores y a todos aquellos vinculados con la enseñanza y la investigación educativa a participar en la renovación de los contenidos de los libros de texto.

En total se renovaron 39 libros y se produjeron más de 200 materiales de apoyo para el maestro o la escuela. Los materiales producidos para algunas asignaturas y algunos grados fueron: un libro de texto para el alumno, un fichero de actividades didácticas, un libro para el maestro con información sobre el enfoque didáctico y un avance programático en el que se sugiere una articulación de lecciones del libro de texto y actividades del fichero.

Los libros para el Maestro no sólo plantearon los momentos del proceso de aprendizaje que resultan adecuados para que los niños trabajen las lecciones, sino también hacen sugerencias de temas y problemas que el maestro puede plantear a sus alumnos para aprovechar mejor cada lección. (Fuenlabrada, 1994, cit. en Villa L., 2009, p. 122).

En el libro sobre los Cincuenta años de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos de Villa Lever, se indica en la entrevista realizada el 28 de julio de 2008 a David Block:

“Una característica del enfoque de esa época –el cual todavía se mantiene vigente– es el postulado o el principio de afiliación constructivista según el cual los alumnos pueden desarrollar conocimientos matemáticos al intentar resolver ciertas situaciones problemáticas para ellos. Los problemas en la enseñanza de las matemáticas son de toda la vida. Se pretendió que los alumnos pudieran aproximarse a ciertas nociones de esta disciplina a partir de la resolución de problemas.”(Villa L. 2009, p. 122)

En esta opinión de Block, con la cual coincido, en los libros de matemáticas de 1993 se ponía en primer plano la invención y la construcción del conocimiento, pero abandonó la práctica, sobre todo si se les compara con los libros del currículo de 1972 y 1960 que enfatizaban este aspecto.

Los libros de texto de matemáticas de este periodo tuvieron algunas modificaciones con:

“La idea de mejorar tanto la secuencia al interior, como la secuencia general a lo largo de la educación primaria. En estos cambios, la entonces Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la SEP, conformó un grupo de personas de diversas instituciones: del DIE-Cinvestav David Block, Irma Fuenlabrada y Guillermina Waldegg; de la SEP, Hugo Balbuena y de la UPN, Alicia Ávila Storer. Resultado de estas modificaciones, en el año 2000 se hicieron nuevas versiones de libros para el alumno de 5° y 6° grados, los cuales tuvieron mayor coherencia interna. Esto implicó que los libros para el maestro se editaran con un nuevo formato que ayuda a los profesores a analizar cada una de las lecciones” (Entrevista al maestro Hugo Balbuena, realizada el 23 de septiembre de 2008, cit. en (Villa L., 2009, p. 123)).

Como se mencionó anteriormente, en este currículo se produjeron varios materiales educativos por grado

y por asignatura, en el caso de matemáticas analizaremos: el libro de texto para el alumno; el fichero de actividades didácticas, el libro para el maestro y el avance programático de tercero, cuarto y quinto grados.

Se indicó en el cuadro 3 que el contenido de fracciones inició su tratamiento a partir de tercer grado. Por lo que iniciaré el análisis desde el tercer grado para ubicar específicamente el concepto de *equivalencia de fracciones*; el tema de investigación de este proyecto.

Los cuadros referentes a los análisis de los materiales bibliográficos de este currículo que tienen un formato que no es posible visualizar de manera vertical se incluirán en apéndices con formato horizontal.

2. Presentación de las fracciones en el tercer grado

En el avance programático para el tercer grado se plantea el siguiente programa referente a los números fraccionarios:

- “Introducción a la noción de fracción en casos sencillos (por ejemplo, medios, cuartos y octavos) mediante actividades de reparto y medición de longitudes.
- Comparación de fracciones sencillas representadas con material concreto, para *observar la equivalencia entre fracciones*.
- Representación convencional de las fracciones.
- Planteamiento y resolución de problemas que impliquen suma de fracciones sencillas mediante manipulación de material” (SEP. 1994c, p. 60)

En el segundo punto se enfatiza que las actividades relacionadas con las fracciones tienen como finalidad: “*observarla equivalencia entre fracciones*”. Con base en mi análisis, puedo comentar que no se usa el término de fracción equivalente ni la nomenclatura formal en este grado escolar, sólo se introduce este concepto a través de material concreto y *observando* igualdades entre fracciones con denominador dos, cuatro y ocho. Esto se muestra más específicamente en la revisión del libro de texto del alumno.

2.1 Libro del alumno. Matemáticas. Tercer Grado

En el apéndice A se señalan los contenidos principales de las lecciones del tercer grado que incluyen manejo de fracciones y específicamente el concepto de *equivalencia de fracciones*.

2.2 Tratamiento de la equivalencia en el tercer grado

En el libro del alumno analizado en el apéndice A, de un total de 89 lecciones, se contabilizaron catorce referentes al tema de fracciones, de las cuales:

- a) Siete lecciones (3, 8, 14, 22, 29, 47 y 62) no refieren fracciones equivalentes.
- b) Seis lecciones (38, 39, 58, 60, 66 y 82) emplean de manera implícita el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo mencionan y ejemplifican al resolver los ejercicios, sin referirlo directamente.

c) Una lección (65) es utilizada para la introducción del concepto de equivalencia. Esta lección emplea de forma directa el concepto sin llegar a una formalización o definición, utiliza el símbolo igual (=) y el término igualdad.

A continuación se analiza la lección 65 para mostrar cómo se introduce el concepto de *equivalencia de fracciones* en este currículo (Cabe señalar que es la única lección que toca el tema en este grado).

La lección se inicia señalando con diferentes colores los saltos de algunos animales en un dibujo de un camino en forma de S que representa 18 metros de longitud: ardilla (color rojo), 1 metro; chapulín (color verde), $\frac{1}{2}$ metro y sapo (color azul), $\frac{1}{4}$ de metro (Imagen 1).



Imagen 1: Representación de medios, cuartos y enteros de metro en un mismo segmento. Libro del alumno. Matemáticas. Tercero grado. (SEP. 1994e, p. 148).

Al señalar los medios, cuartos y enteros en el camino y con colores diferentes, se aprecia que varios colores se ubican en el mismo lugar, por lo que sin mencionar igualdad o equivalencia de fracciones se están representando y utilizando fracciones equivalentes y la idea se complementa al responder preguntas referentes a esta situación (Imagen 2):

La ardilla les dijo al chapulín y al sapo: "Los espero a la mitad del camino".
 ¿Cuántos saltos dio la ardilla para llegar a la mitad del camino? _____
 ¿Cuántos dio el chapulín? _____ ¿Cuántos el sapo? _____

Imagen 2: Uso del concepto de equivalencia sin empleo del lenguaje formal. Libro del alumno. Matemáticas. Tercero grado. (SEP. 1994e, p. 149).

En el análisis de este grado se observa, en cuanto a las fracciones, que es poco el empleo de figuras planas para representarlas y se utilizan otras representaciones como: segmentos de recta simulados por caminos, tiras de papel y cuerdas, el uso de conjuntos discretos así como "todos" de distintas formas y tipos. Las fracciones ahora se vinculan a distintos contextos y a situaciones de reparto y a magnitudes de longitud, peso y capacidad.

En este grado se emplean fracciones sencillas como medios, cuartos y octavos. Las definiciones y algoritmos no se dan de manera directa, se plantean situaciones que ayudan a inferirlos. El empleo del lenguaje formal de fracciones es mínimo.

Todas las lecciones se encuentran contextualizadas en diversas situaciones que pretenden ser familiares para los niños, aunque aquí entraría la creatividad y el criterio del maestro para determinar si son adecuadas para el medio en que realiza su labor docente, o si deberá modificar el contexto para que sea significativo para los alumnos.

Estos aspectos también se observan en los grados de cuarto y quinto con la introducción y manejo de fracciones más complejas (tercios, séptimos, quintos, novenos, doceavos, entre otras) que se verá a continuación.

3. Presentación de las fracciones en el cuarto grado

Para este grado se revisaron los cuatro materiales bibliográficos editados por la SEP: registro de avance programático, libro para el maestro, libro de texto para el alumno y fichero de actividades didácticas, enfatizando el manejo de las fracciones y específicamente el concepto de equivalencia entre las mismas.

3.1 Avance Programático. Matemáticas. Cuarto grado

El avance programático incluye de manera general los contenidos de la asignatura de *Matemáticas*. Se indica el número de la ficha (F) en el fichero de actividades didácticas, la lección y páginas del libro de texto del alumno (LT) que apoyan cada contenido.

Este avance programático debió combinarse con el libro para el maestro para cumplir los objetivo(s) planteado(s) para cada lección.

Cuadro 4. Contenidos referentes a fracciones (SEP, 1994a)

Bloque	Contenido	Propósito	Ficha Didáctica y L. de Texto
I	Los Números, sus relaciones y operaciones	Utilice, compare, ordene y represente simbólicamente <i>fracciones</i> en situaciones de medición de longitudes.	F: 3, LT: 14-16, 26-28
II		Utilice, compare, ordene y represente simbólicamente <i>fracciones</i> en situaciones de partición y reparto.	F: 11 LT: 48-49, 64-65, 82-83
III		Utilice, compare, ordene y represente <i>fracciones</i> en situaciones de reparto y distribución en magnitudes como el metro.	F: 22 LT: 94-95, 102-103, 110-11, 118-119
IV		Resuelva mediante procedimientos informales sumas de <i>fracciones</i> con igual y diferente denominador.	F: 31 LT: 136-137.
V		Realizar operaciones con números naturales, <i>fracciones</i> y decimales. Representar <i>fracciones</i> y decimales en situaciones de proporcionalidad.	F: LT: 164-165, 174-175.

En el bloque III de este avance programático se inicia el desarrollo y uso del concepto de **equivalencia de fracciones** a través de situaciones de reparto, de comparación de fracciones y al resolver operaciones con fracciones de diferente denominador. Estos contenidos se desarrollan más detalladamente en el libro del maestro y del alumno.

3.2 Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto Grado

Este material representó un apoyo al trabajo que el maestro realiza en la escuela primaria. Proporciona a los docentes una orientación didáctica para profundizar en la enseñanza de los contenidos de matemáticas. En él se plantea el siguiente propósito relacionado con las fracciones:

- ❖ Que el alumno resuelva problemas que impliquen el uso de fracciones en situaciones de reparto, medición, comparación, **equivalencia** u orden. (SEP, 1994f, p. 11).

Las propuestas didácticas de matemáticas en este material son abiertas y ofrecen amplias posibilidades a las formas de trabajo del maestro. Las recomendaciones didácticas se indican por eje. Relacionadas con el tema de fracciones tenemos la siguiente:

- El trabajo con las fracciones se amplía en el cuarto grado. Se enfatiza su uso en situaciones problemáticas en diferentes contextos: medición de longitudes, el peso de algunos objetos, la capacidad de algunos recipientes y situaciones de reparto.

En el caso de la **equivalencia de fracciones**, se indica que:

- “Uno de los aspectos más importantes para la comprensión de las fracciones es la noción de **equivalencia**. Antes de abordar este tema se hace la comparación de fracciones con procedimientos informales. A lo largo del libro de texto del alumno se presentan situaciones que propician el uso de expresiones equivalentes que se pueden aprovechar para enfatizar dicha noción. No se pretende que los alumnos utilicen las expresiones formales o las reglas ni algoritmos para encontrar **fracciones equivalentes**”. (SEP, 1994f, p. 35)
- Existen algunas lecciones y ejercicios en los que se calculan sumas y restas de fracciones sin necesidad de utilizar el algoritmo convencional; “Si la **equivalencia** y el orden se trabajan detenidamente, los niños no tendrán dificultad para inferir resultados de estas operaciones aritméticas” (SEP, 1994f, p. 36).

Con estas sugerencias se pretende apoyar al maestro en su labor docente, pues se proporcionan desde fundamentos metodológicos y didácticos hasta actividades específicas para cada contenido, como las que son presentadas en el fichero de actividades didácticas.

3.3 Fichero Actividades Didácticas. Matemáticas. Cuarto grado

Este fichero complementa los materiales bibliográficos proporcionados para el cuarto grado en la asignatura de matemáticas. Las actividades propuestas en él pretenden apoyar al alumno a: “*construir*

conocimientos, desarrollar y ejercitar habilidades que son necesarias para abordar los contenidos del programa” (SEP, 1995a, Presentación).

En el apéndice B se indican las fichas de actividades didácticas que contienen el desarrollo de fracciones y específicamente las que incluyen el concepto de **equivalencia de fracciones**.

En este fichero de cuarto grado, de un total de 41 fichas de actividades didácticas, se contabilizaron cuatro referentes al tema de **equivalencia de fracciones**, de las cuales:

- a) Dos fichas didácticas (3 y 31) refieren de manera indirecta el concepto de **equivalencia de fracciones**, es decir, lo requieren para resolver las situaciones y los ejercicios planteados.
- b) Dos fichas didácticas (11 y 22) están dedicadas a la introducción y desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones**, a través de representaciones en unidades de longitud y figuras planas como rectángulos.

Para concluir el análisis del material de matemáticas de cuarto grado se revisará el contenido del libro del alumno.

3.4 Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto Grado

En el apéndice C se indican las lecciones y los contenidos que incluyen manejo de fracciones y especialmente el concepto de **equivalencia de fracciones**.

Como se observa en el apéndice C, de un total de 91 lecciones, se contabilizaron diez referentes al tema de **equivalencia de fracciones**, de las cuales:

- a) Siete lecciones (I.4, I.6, II.1, II.18, III.7, IV.4 y IV.5) refieren de manera indirecta el concepto de **equivalencia de fracciones**, es decir, lo requieren para resolver las situaciones y ejercicios planteados.
- b) Tres lecciones (II.9, III.3 y III.15) están dedicadas a la introducción y desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones** a través de situaciones de reparto y representaciones gráficas como dibujos.

A continuación se indican específicamente las actividades de las lecciones enfocadas a la introducción y desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones**.

En la lección II.9 se inicia la introducción del concepto de **equivalencia de fracciones**. La actividad consiste en observar un dibujo de rectángulos que simulan hojas de papel divididas en cuartos, octavos y dieciseisavos y contestar preguntas para identificar la fracción que se representa en cada hoja. (Imagen 2).

La maestra de Jaime usa tarjetas de papel de distintos tamaños. Las más grandes son para enviar recados, las medianas para anotar problemas y las más chicas para hacer sorteos.



- 1** La maestra partió tres hojas, una para tarjetas grandes, otra para tarjetas medianas y otra para tarjetas chicas.
- ¿Cuántas tarjetas grandes obtuvo?
- ¿Cuántas tarjetas medianas?
- ¿Cuántas tarjetas chicas?

Imagen 2: Representación de medios, cuartos y dieciseisavos en rectángulos del mismo tamaño. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 64).

La lección continúa solicitando que se completen expresiones. Algunas de estas expresiones se refieren a la equivalencia: “Un cuarto de la hoja es igual a ____ octavos de la hoja. Y un octavo de la hoja es igual a ____ dieciseisavos de la hoja.”(Imagen 3).

Completa las siguientes expresiones. Si necesitas, usa una hoja.

La tarjeta grande es $\frac{1}{4}$ de la hoja.

La tarjeta mediana es de la hoja.

La tarjeta chica es de la hoja.

Un cuarto de la hoja es igual a octavos de la hoja.

Un octavo de la hoja es igual a dieciseisavos de la hoja.

Imagen 3: Expresiones que refieren al concepto de equivalencia. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 64).

La siguiente actividad también es parte de la lección II.9, y consiste en repartir gráficamente un cierto número de hojas entre un cierto número de niños para obtener medios, cuartos y octavos como resultado del reparto. En seguida se contestan preguntas que favorecen la reflexión sobre los repartos realizados (Imagen 4).

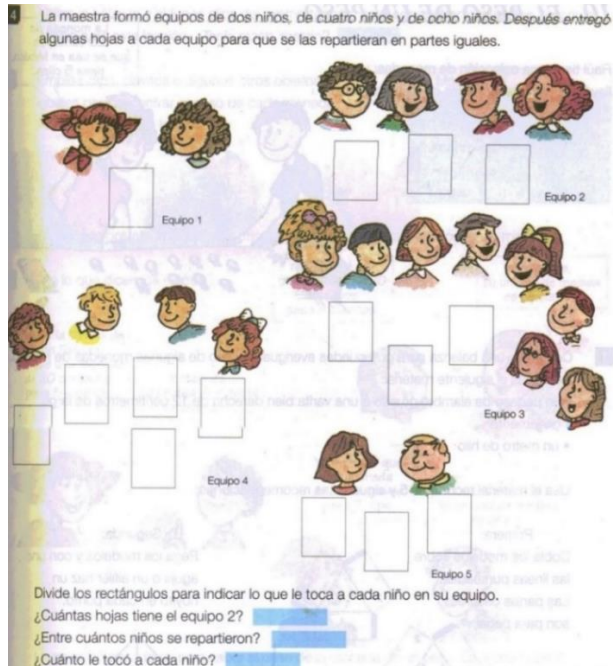


Imagen 4: Representar situaciones de reparto. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 1994d, p. 65).

Para finalizar esta lección se debe completar una tabla, con base en los repartos anteriores (Imagen 5). Con esta tabla se busca que los niños hagan una síntesis de qué ocurrió en cada uno de los repartos.

Completa los datos que faltan en la siguiente tabla.

Equipo	Hojas	Niños	A cada niño le tocó
1			
2			
3			
4			
5	3	2	$1 + \frac{1}{2}$ hoja

Imagen 5: Completar una tabla referente a las situaciones de reparto. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 65).

El desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones* se continúa en la lección III.3, vinculado a las situaciones de reparto. En este caso, se presentan dibujos de dos situaciones de reparto, se toma una como base y en la siguiente se duplica el número de galletas y de niños. (Imagen 6).

3. MÁS GALLETAS Y MÁS NIÑOS

Raúl, Sonia y Yoatzin volvieron a jugar a los repartos y sucedió algo interesante.

1 Observa el dibujo de Sonia para que hagas el de Yoatzin y el de Raúl.

Dibujo de Sonia

Dibujo de Yoatzin

Dibujo de Raúl

Hay el doble de galletas y el doble de niños que en el dibujo de Sonia. Hay el doble de galletas y el doble de niños que en el dibujo de Yoatzin.

¿En cuál de los repartos crees que le toca más galleta a cada niño?

Comenta tu respuesta con tus compañeros y tu maestro.

Imagen 6: Representar situaciones de reparto equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP., 1994d, p. 94).

Con base en esa situación y mediante preguntas que favorecen la reflexión, se observa que los repartos dan diferentes expresiones fraccionarias que representan el mismo número, según se obtengan medios, cuartos y octavos al hacer los repartos, y se busca que los niños intercambien ideas y argumenten qué significa esta situación. (Imagen 7).

2 Al realizar sus repartos, Sonia encontró que a cada niño le toca $\frac{1}{2}$ de galleta. Yoatzin encontró que a cada niño le toca $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ de galleta. Raúl encontró que a cada niño le toca $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ de galleta. Realiza los repartos para ver si encuentras lo mismo que Sonia, Yoatzin y Raúl.

3 Julián dice que en el reparto de Sonia, en el de Raúl y en el de Yoatzin, le toca la misma cantidad de galleta a cada niño. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Julián? ¿Por qué?

Imagen 7: Preguntas y expresiones referentes a un reparto equivalente. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 94).

Otra actividad es repartir dos galletas entre tres niños en una ilustración y dibujar otro reparto donde toque la misma cantidad de galletas con diferente número de niños y de galletas. (Imagen 8).

4 Julián y Ramón quieren dibujar repartos en los que le toque la misma cantidad de galleta a cada niño. Dibuja el reparto de Ramón.

Dibujo de Julián

Dibujo de Ramón

Imagen 8: Situación de reparto equivalente. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 94).

Finalmente, se comparan algunas fracciones obtenidas en distintos repartos y se pide indicar a quiénes les tocó más, observando los dibujos y justificando la respuesta. (Imagen 9).

5 Sonia, Yoatzin, Raúl y Jaime formaron parejas con otros niños y jugaron a adivinar a quién le toca más galleta. Lee lo que dicen y averigua, como tú quieras, a quién le toca más.

Me tocaron $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Me tocaron $\frac{5}{4}$

¿A quién le tocó más? ¿Por qué?

Me tocaron $\frac{2}{5}$

Me tocaron $\frac{3}{5}$

¿A quién le tocó más? ¿Por qué?

Me tocaron $\frac{2}{5}$

Me tocaron $\frac{8}{10}$

¿A quién le tocó más? ¿Por qué?

Me tocaron $\frac{3}{4}$

Me tocaron $\frac{3}{5}$

¿A quién le tocó más? ¿Por qué?

Imagen 9: Preguntas y expresiones referentes a repartos equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 95).

Con la lección III.15 se finaliza en este grado el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* con la actividad de medir la longitud de los lados de una figura que representa la silueta de una paloma. La medición se hace con diferentes segmentos de recta que representan: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, novenos, décimos y doceavos de una unidad. (Imagen 10).

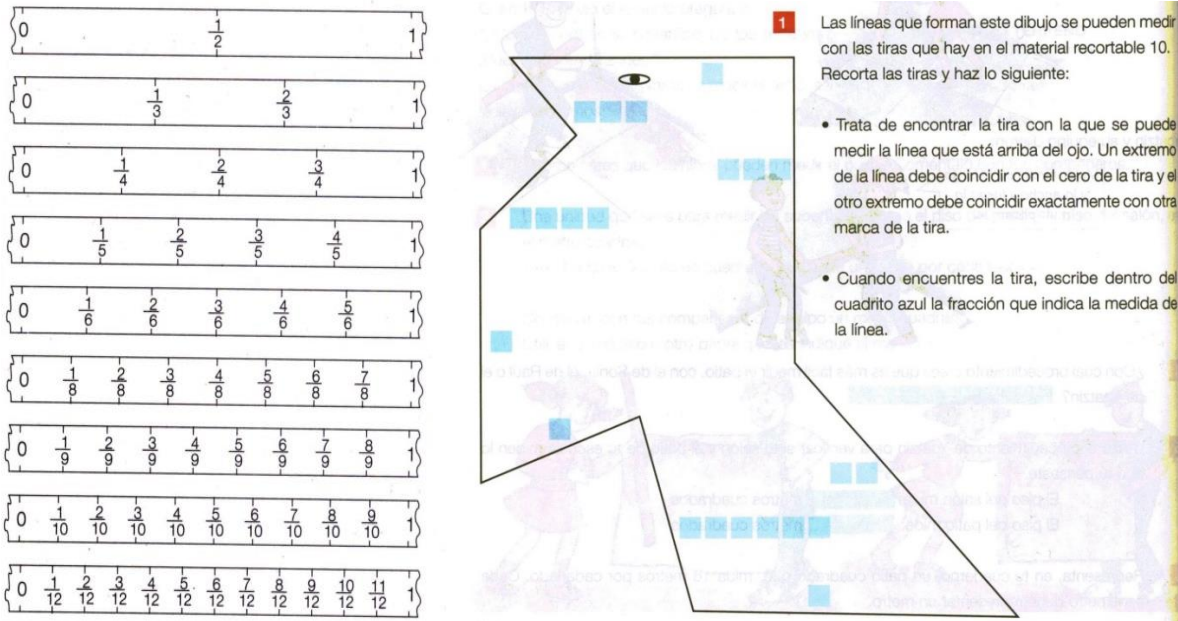


Imagen 10: Medir perímetro de una figura utilizando segmentos de recta. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 118).

Luego se identifican, superponiendo, comparando o iterando las tiras utilizadas en la actividad anterior (las cuales representan fracciones en segmentos de recta). Si un cierto número de tiras corresponde a la misma longitud que otro número de tiras, aunque esta longitud se represente de manera diferente, entonces representan longitudes equivalentes. (Imagen 11).

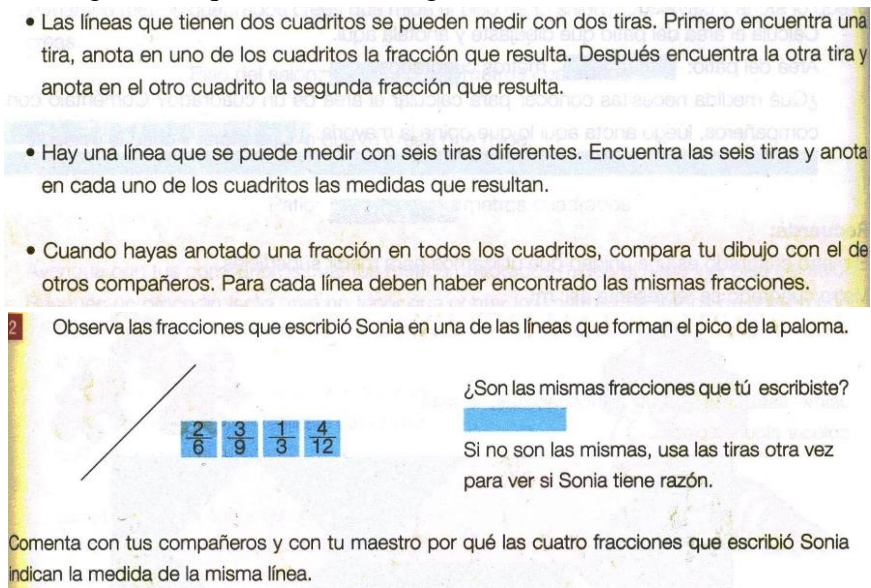


Imagen 11: Comparar segmentos de recta para igualar longitudes. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 119).

Para concluir la lección, se identifican fracciones equivalentes en segmentos de recta divididos en quintos y décimos y se completa el término faltante en pares de fracciones para que sean equivalentes. (Imagen 12)

3 Para medir una de las líneas que forman la cola de la paloma, Yoatzin usó estas tiras:

¿Cuánto mide la línea, si la mides con la tira dividida en quintos?

¿Cuánto mide la línea, si la mides con la tira dividida en décimos?

¿Es cierto que $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$? ¿Por qué?

4 Toma tus tiras y contesta:

Si una línea mide $\frac{2}{5}$, ¿cuántos décimos mide la misma línea?

Si una línea mide $\frac{3}{5}$, ¿cuántos décimos mide la misma línea?

Si una línea mide $\frac{7}{5}$, ¿cuántos décimos mide la misma línea?

5 Lee lo que dicen Sonia, Raúl y Yoatzin y coméntalo con tus compañeros.

En $\frac{8}{10}$ hay el doble de partes que en $\frac{4}{5}$.

Pero los décimos son la mitad de los quintos.

Por eso $\frac{8}{10}$ es igual a $\frac{4}{5}$.

6 Utiliza tus tiras para completar las siguientes expresiones:

$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{8}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{\quad}$ $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{9}$ $\frac{6}{8} = \frac{\quad}{4}$

Imagen 12: Identificar equivalencia entre décimos y quintos. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 1994d, p. 119).

3.5 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado

Mediante la revisión de los materiales bibliográficos de matemáticas para el cuarto grado de este currículo, observé que para promover el aprendizaje del contenido de fracciones se utilizan diferentes significados e interpretaciones: como parte de un entero, como puntos en la recta numérica o como resultado de un reparto. Para desarrollar el concepto de *equivalencia de fracciones* se emplean principalmente las situaciones de reparto.

A diferencia de los currículos anteriores, en éste se intenta dar otro enfoque al concepto de fracción, presentándola en diferentes contextos, tanto discretos, como continuos y en magnitudes (longitud y peso). También se emplea la representación de números fraccionarios como puntos en la recta numérica.

El desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones* se construye con base en situaciones de reparto, donde se duplican las cantidades para inferir que una fracción es equivalente a otra si sus términos se multiplican por el mismo número. El término de equivalencia entre fracciones no se utiliza directamente, para expresar el concepto se utiliza el signo igual (=) o el término igualdad entre las fracciones. Para la comprensión de este concepto también se emplea la representación de fracciones en segmentos de recta enfatizando que se ubican en el mismo punto aunque se escriban de diferente forma.

En el caso del fichero de actividades didácticas, se promueve que los niños comprendan que las fracciones son equivalentes si representan el mismo espacio en figuras planas y en rectángulos congruentes.

El concepto de *equivalencia de fracciones* se emplea para comparar fracciones ($>$, $=$, $<$) y establecer el orden entre las mismas.

Este análisis continúa con la conclusión del tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en este currículo con las actividades propuestas en el quinto grado.

4. Secuencia de presentación de las fracciones en el quinto grado

En el quinto grado, al igual que en el cuarto, se revisarán los materiales siguientes: avance programático, libro para el maestro, libro de texto para el alumno y el fichero de actividades didácticas, enfatizando el tema de este proyecto de investigación: el manejo de las fracciones y específicamente el concepto de *equivalencia de fracciones*.

4.1 Avance Programático. Matemáticas. Quinto grado

Este avance programático, igual que el de los otros grados, indica el propósito de aprendizaje, la(s) lección(es) del libro de texto (LT) y el número(s) de la ficha(s) (F) en el libro de actividades didácticas que apoyan cada propósito. Las indicaciones de este avance programático deberán complementarse con las sugerencias y orientaciones que se dan en el libro para el maestro para lograr el propósito de cada bloque que se señala en el cuadro 5.

Cuadro 5. Objetivos relacionados con fracciones. (SEP. 1994b, pp. 7-41).

Bloque	Contenido	Propósito	Ficha Didáctica y Libro de Texto
I	Los Números, sus relaciones y operaciones	Utilice, compare, ordene y represente simbólicamente <i>fracciones</i> y decimales en diversos contextos.	F: 5 y 6. LT: 34-40
II		Utilice, compare, ordene y represente simbólicamente <i>fracciones</i> y decimales en contextos de medición y reparto. Resuelva problemas de suma y resta de fracciones.	F: 9, 10, 11, y 18. LT 41-47, 52-56, 72-79
III		Represente <i>fracciones</i> en la recta numérica. Resuelva problemas sencillos que involucren la fracción como razón entre dos cantidades.	F: 31-37 y 42 LT: 93 -105, 119 - 126.
V		Localice números entre dos números dados (naturales, decimales y fracciones). Ordene una lista de números naturales, decimales y fraccionarios. Resuelva problemas sencillos que involucren la fracción como división. Resuelva problemas de sumas y restas de fracciones.	F: 67-70 LT: 172-188

En los propósitos de este avance programático no se menciona de manera directa el concepto de *equivalencia de fracciones*, sin embargo, en los *contenidos específicos* para el desarrollo de este concepto se indica lo siguiente:

- ❖ *Equivalencia de fracciones sencillas*; medios y cuartos, tercios y sextos, quintos y décimos.(SEP, 1994b, lección 18, pp. 52-56 y 72-79)
- ❖ *Equivalencia* entre décimos, centésimos y milésimos expresados como fracciones decimales.(SEP, 1994b, lección 27, pp. 80-87)
- ❖ Resolución de problemas sencillos de suma y resta mediante la *equivalencia de fracciones*.(SEP, 1994b, lección37, pp. 99-105)

4.2 Libro Para el Maestro. Matemáticas. Quinto Grado

En el libro para el maestro de este grado, se vinculan los contenidos del fichero de actividades didácticas, con los del libro de texto del alumno, atendiendo al contenido central que se trabaja en cada una de las lecciones. A diferencia del libro para el maestro de cuarto grado, este libro menciona de manera específica y detallada las intenciones didácticas y actividades sugeridas para cada uno de los contenidos y establece una relación directa con las lecciones del libro del alumno. No proporciona información específica acerca del tema de investigación.

4.3 Fichero Actividades Didácticas. Matemáticas. Quinto grado

En el apéndice D se especifican las fichas que incluyen manejo de fracciones y especialmente el concepto de *equivalencia de fracciones*.

En el apéndice D se contabilizaron 16 fichas referentes al tema de fracciones de un total de 73 fichas de las cuales:

- a) Doce lecciones (5, 9, 10, 11, 18, 21, 31, 32, 34, 35, 45 y 69) refieren de manera indirecta el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo requieren para resolver las situaciones y actividades planteadas.
- b) Cuatro lecciones (6, 18, 37 y 67) están dedicadas al desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones*, a través de situaciones de reparto, representaciones en la recta numérica y procedimientos aritméticos para obtener fracciones equivalentes.

Para concluir el análisis del tema de investigación en este currículo, a continuación se indican los contenidos y actividades del libro del alumno de quinto grado.

4.4 Libro de texto del alumno. Matemáticas. Quinto Grado

En el apéndice E se sintetizan las lecciones que se refieren al tema de fracciones y que emplean de alguna forma el concepto de *equivalencia de fracciones*.

En el análisis del libro de texto del alumno indicado en el apéndice E, de un total de 87 lecciones, se contabilizaron 20 referentes al tema de fracciones, de las cuales:

- a) Cuatro lecciones (14, 23, 52 y 83) no refieren a **fracciones equivalentes**.
- b) Doce lecciones (28, 35, 47, 49, 55, 58, 64, 70, 73, 79, 82 y 86) refieren de manera indirecta el concepto de **equivalencia de fracciones**, lo requieren para resolver las situaciones y actividades planteadas.
- c) Cuatro lecciones (31, 33, 44 y 53) están dedicadas a la continuación del desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones**, a través de situaciones de reparto y representaciones gráficas, principalmente rectángulos, dibujos y recta numérica.

Este libro incluye al final de cada bloque una sección de repaso con diferentes tipos de ejercicios desde mecanizaciones hasta resolución de problemas y retos matemáticos, todos relacionados con los contenidos desarrollados en el bloque estudiado.

A continuación se indican las actividades de las lecciones enfocadas a la introducción y desarrollo del concepto de **equivalencia de fracciones**. Este concepto se inicia en la lección II.31 con la actividad de resolver un problema donde se reparten cinco galletas entre ocho niños y determinar si la cantidad que les tocó es más o menos de una galleta (una unidad) o más o menos de un medio de galleta y contestar preguntas de reflexión referentes al reparto (Imagen 13).

1. Resuelve el siguiente problema: Alicia quiere repartir cinco galletas entre ocho niños, de manera que a todos les toque igual y que no sobre. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Después de resolver el problema, compara tu resultado con el de otros compañeros.

Lo que le tocó a cada niño, ¿es más que una galleta o menos que una galleta? _____

¿Por qué? _____

Lo que le tocó a cada niño, ¿es más que media galleta o menos que media galleta? _____

¿Por qué? _____

Si son ocho niños, ¿cuántas galletas se necesitan para que a cada niño le toque una galleta entera? _____

Si son ocho niños, ¿cuántas galletas se necesitan para que a cada niño le toque $\frac{1}{2}$ galleta? _____

Y para que les toque $\frac{1}{4}$ de galleta, ¿cuántas se necesitan? _____

2. Si se reparten cuatro galletas entre tres niños, de manera que a todos les toque igual y que no sobre, ¿a cada niño le tocará más que una galleta o menos que una galleta? _____

¿Por qué? _____

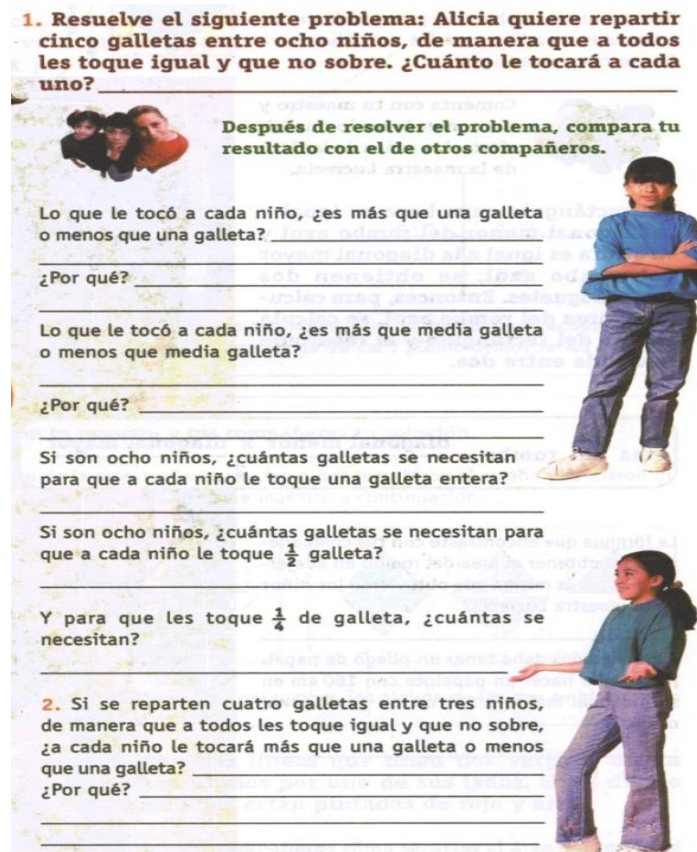


Imagen 13: Identificar equivalencia al resolver problemas de reparto. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, p. 72).

Esta lección continúa con la actividad de completar una tabla con las columnas: galletas, niños, más que una galleta, una galleta y menos que una galleta (Imagen 14).

Datos del reparto		Lo que le toca a cada uno		
Galletas	Niños	Más que una galleta	Una galleta	Menos que una galleta
1	3			X
4	5			
5	4			
6	6			
14	15			
3	2			
7		X		
	9			X
	2		X	
		X		

Imagen 14: Completar un cuadro con datos de repartos. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, p. 73).

Se continúa esta lección de la siguiente manera: conociendo el resultado de un reparto, identificar cuántas galletas se repartieron entre cuantos niños y al comparar las respuestas, identificar que existen formas equivalentes de representar la misma fracción y enunciar tres ejemplos de situaciones de reparto de galletas cuyo resultado sean fracciones equivalentes (Imagen 15).

4. Rodrigo repartió algunas galletas entre sus amigos. A cada niño le tocó $\frac{3}{4}$ de galleta. ¿Cuántas galletas pudo haber repartido Rodrigo y cuántos niños pueden ser?



Comenta con tus compañeros y tu maestro las respuestas que puede tener este problema.

Juan dijo que eran tres galletas y cuatro niños. Pablo dijo que eran seis galletas y ocho niños. ¿Quién de los dos tiene razón?

5. A Juan le tocó $\frac{2}{3}$ de galleta y a María $\frac{4}{6}$ de galleta. ¿A quién le tocó más? _____
¿Por qué? _____

- Encuentra tres situaciones diferentes de reparto de galletas entre niños, en los que a cada niño le toque la misma cantidad de galleta.



Imagen 15: Identificar equivalencia en situaciones de reparto. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, p. 73).

Se continúa el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en la lección II.33 al resolver un problema de recorrido hacia la escuela donde se dan trayectos de un kilómetro en fracciones equivalentes ($\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$ de km.); otra actividad consiste en resolver y comentar problemas con datos de fracciones equivalentes, usando esquemas gráficos como rectas numéricas, cuadrados o conjuntos de objetos (Imagen 16).

1. Pablo y Juan viven en lugares distintos, pero cada uno de ellos tiene que recorrer un kilómetro para ir de su casa a la escuela.

Salen de sus casas y cuando se cruzan Pablo ha recorrido $\frac{3}{5}$ y Juan ha recorrido $\frac{6}{10}$ del camino. ¿Quién de los dos está más lejos de su casa?

Comenta tu respuesta con tus compañeros y tu maestro.

2. En el grupo de Pablo hay 32 alumnos, $\frac{5}{8}$ del total son mujeres y $\frac{10}{16}$ del total usan lentes. ¿Quiénes son más, las mujeres o los que usan lentes?

3. Juan ha resuelto $\frac{1}{3}$ de las lecciones de matemáticas, Pablo ha resuelto $\frac{2}{6}$. ¿Quién ha resuelto más lecciones?

4. El salón de Pablo es rectangular. El piso está cubierto con mosaicos de tres colores, $\frac{3}{9}$ del total son verdes, $\frac{6}{18}$ son naranjas y $\frac{9}{27}$ son rojos. ¿De qué color hay más mosaicos?

5. Pablo y Juan compraron lápices de igual tamaño. Pablo ha gastado $\frac{2}{3}$ de su lápiz y Juan ha gastado $\frac{3}{4}$. ¿A quién le queda el lápiz más largo?

• Identifica el esquema que más te sirva de la siguiente página para resolver cada uno de los problemas anteriores.

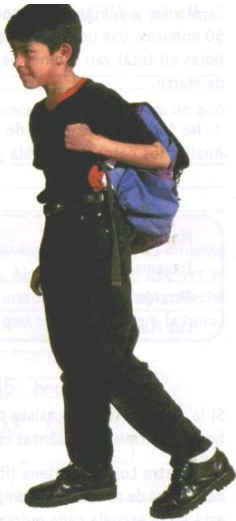



Imagen 16: Identificar equivalencia al resolver problemas empleando diferentes representaciones de las fracciones. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, pp. 76-77).

En la misma lección, de una lista de fracciones, se debe encerrar en un círculo las fracciones que son equivalentes a $\frac{1}{3}$. En seguida se debe comentar cómo se sabe que estas fracciones son equivalentes y se escriben parejas de fracciones equivalentes explicando por qué lo son (Imagen 17).

6. Encierra en un círculo todas las fracciones que son equivalentes a $\frac{1}{3}$.

- | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|
| $\frac{5}{30}$ | $\frac{6}{24}$ | $\frac{7}{21}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{4}{12}$ | $\frac{10}{60}$ | $\frac{10}{30}$ | $\frac{4}{24}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{6}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|---------------|---------------|



Comenta con tus compañeros cómo te diste cuenta.

7. Trabaja con un compañero. Uno de los dos escribe una fracción y el otro escribe una que sea equivalente. Entre los dos comprueben si lo hicieron bien.

Imagen 17: Identificar fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$ y escribir de forma libre parejas de fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, p. 77).

Se finaliza el tratamiento de la equivalencia en la lección IV.53 iniciando con la actividad de resolver mediante estimación, problemas que impliquen suma o resta de fracciones, indicando si es menos, igual o más de una unidad e indicar en una lista de suma o resta de fracciones con cuál de éstas se resolvería cada problema (Imagen 18).

1. Después de leer cada uno de los siguientes problemas, selecciona cuál de las tres es la respuesta correcta.

a) Compré $\frac{1}{2}$ kg de guayabas y $\frac{3}{4}$ de kg de uvas. ¿Cuántos kilogramos compré en total?

Menos de un kg Más de un kg Un kg

b) Para ir de mi casa al trabajo esperé $\frac{1}{4}$ de hora para tomar un taxi y el recorrido duró $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuánto tiempo hice de mi casa al trabajo?

Menos de una hora Más de una hora Una hora

c) Utilicé $\frac{3}{5}$ de metro de listón para atar un regalo y $\frac{3}{10}$ de metro para hacer el moño. ¿Cuánto listón utilicé en total?

Menos de un metro Más de un metro Un metro

d) El carrete de cinta adhesiva contenía $2\frac{1}{2}$ metros y gasté $\frac{3}{8}$ de metro. ¿Qué cantidad de cinta adhesiva quedó en el carrete?

Más de un metro Menos de un metro Un metro

e) Al iniciar el viaje la aguja marcaba $\frac{7}{8}$ de tanque de gasolina y al terminar marcaba $\frac{1}{4}$. ¿Qué parte del tanque se consumió?

Más de $\frac{1}{2}$ tanque Menos de $\frac{1}{2}$ tanque $\frac{1}{2}$ tanque

f) La mitad del grupo votó por Amelia y la tercera parte votó por Raúl. ¿Qué parte del grupo no votó?

Más de $\frac{1}{2}$ del grupo Menos de $\frac{1}{2}$ del grupo $\frac{1}{2}$ del grupo

2. Anota en cada etiqueta la letra del problema anterior que se puede resolver con esa operación. Dos etiquetas quedan sin letra.

restarle a uno la suma

$\frac{3}{5} + \frac{3}{10}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

$\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$

$\frac{7}{8} + \frac{1}{4}$

$2\frac{1}{3} - \frac{3}{6}$

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

Imagen 18: Resolver problemas que impliquen suma o resta de fracciones con diferente denominador. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, pp. 120-121).

Continúa la lección indicando que por medio de múltiplos se encuentran fracciones equivalentes: “A veces, el denominador de una de las fracciones es múltiplo del denominador de la otra. Por ejemplo $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. En estos casos se puede encontrar una fracción equivalente: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (Se muestran ejemplos)”. (Imagen 19).

A veces, el denominador de una de las fracciones es múltiplo del denominador de la otra. Por ejemplo $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$. En estos casos se puede encontrar una fracción equivalente, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

$$\text{Entonces } \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

- Resuelve las operaciones anteriores igualando los denominadores donde sea necesario y verifica tus respuestas de la página anterior.

Para sumar $\frac{7}{8} + \frac{1}{4}$ conviene convertir $\frac{1}{4}$ en octavos. ¿En qué fracción conviene convertir para sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$? _____



Coméntalo con tus compañeros y tu maestro.

Imagen 19: Algoritmo para encontrar fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2000, p. 121).

4.5 Tratamiento del concepto de equivalencia de fracciones en el Quinto grado

Como resultado de la revisión de los materiales de matemáticas proporcionados por la SEP para el quinto grado, se observó que el término fracción se representa y usa en diferentes contextos; en “todos” discretos y continuos. Se trabaja de manera más amplia y con un número mayor de lecciones respecto del cuarto grado. Se aborda de manera extensa la ubicación de números fraccionarios como puntos en la recta numérica con el fin de compararlos y representar en un mismo punto fracciones equivalentes con diferente denominador.

En el quinto grado se profundiza el tratamiento de fracciones en general, enfatizando los siguientes aspectos:

- ✓ Fracciones con denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 10 en situaciones de partición, reparto y medición de magnitudes diversas (longitud, peso y volumen).
- ✓ Estimación, cuantificación y comparación de longitudes utilizando medios, cuartos, quintos y décimos de metro.
- ✓ Representación simbólica de fracciones sencillas con denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 10 con fines de comparación, orden y realización de operaciones de suma y resta.
- ✓ Comparación de medios, cuartos, octavos, tercios, sextos, quintos y décimos con respecto a la integración de una unidad (un entero).

Para integrar una unidad se emplean tarjetas de cartulina, con la nomenclatura de fracciones al frente y al reverso, para que al realizar operaciones de suma y/o resta se obtenga como resultado un entero. También se emplean tiras de papel, representando fracciones al doblarlas en las partes que se indiquen, señalando las diferentes fracciones que conforman un entero.

En base a la revisión bibliográfica de este currículo se observa que no se le da mucha importancia al conocimiento de reglas, ni algoritmos, ni fórmulas, ni definiciones. Los conceptos sólo se utilizan en la medida en que los alumnos los puedan usar de manera no rígida y principalmente para resolver problemas pues, en general, todas las fracciones y las operaciones con ellas son contextualizadas y utilizando procedimientos espontáneos.

En esta propuesta de matemáticas, también se le da énfasis al conocimiento, solución y socialización de estrategias para resolver problemas que impliquen el uso de fracciones. Toda la construcción de conocimientos, tales como conceptos, reglas y algoritmos, está basada en resolución de problemas. Se reconoce que la comprensión de fracciones y en especial del concepto de *equivalencia de fracciones*, necesita de procesos de estudio largos que van de lo informal a lo convencional, en términos de representaciones, lenguaje y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en la resolución de problemas y el razonamiento que en la memorización y mecanización, estas dos últimas características la hacen diferente de los currículos anteriores; en mayor proporción del de 1960 y en menor grado del de 1972.

En resumen, para el aprendizaje del concepto de *equivalencia de fracciones*, conforme a la propuesta curricular de 1993, no es importante que los alumnos memoricen definiciones ni algoritmos o mecanizaciones. Este currículo se centra en que los alumnos desarrollen procesos de resolución de problemas y de ahí puedan obtener conocimientos y elaborar procedimientos adecuados para encontrar las soluciones y éstas les sirvan para aplicarlas a la resolución de otros problemas. Todo el proceso de

enseñanza y aprendizaje se realiza de esta manera y está basado en cuestionamientos que fomentan el razonamiento y la argumentación por parte de los alumnos, porque se busca que sean ellos los que infieran los procedimientos y los conceptos.

5. Conclusiones del currículo introducido en 1993.

En este currículo se introduce el concepto de *equivalencia de fracciones* empleando inicialmente la recta numérica representada en un camino recorrido por diferentes animales y estableciendo igualdad entre fracciones con denominadores dos y cuatro. Posteriormente se utilizan situaciones de reparto y se integran equivalencias con fracciones de denominador ocho y dieciséis para finalmente generalizar igualdades con fracciones de diferentes denominadores e inferir procedimientos de obtención de fracciones equivalentes y utilizarlas al resolver operaciones con fracciones de diferente denominador. Este procedimiento es básicamente uno: el de multiplicar o dividir los elementos de una fracción por un mismo número.

Durante el desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones* se observa que no se emplea el lenguaje formal para identificar fracciones, tampoco se dan definiciones específicas ni algoritmos estrictos, se trabajan ejemplos y situaciones que permitan al alumno de alguna forma inferir lo que se le solicita. En el caso de los algoritmos, también se permite que el alumno sugiera pasos o procedimientos y así determinar de manera consensuada las formas más convenientes. Contrario al currículo de 1960, aquí no se presentan definiciones ni algoritmos al inicio de cada lección para que se ejerciten posteriormente, sino que se pide a los alumnos observar, elaborar conjeturas, comentar y expresar sus opiniones respecto al contenido que se está trabajando.

En este currículo, una de las aplicaciones más importantes del concepto de *equivalencia de fracciones*, es utilizarlo como apoyo para resolver operaciones con fracciones de diferente denominador y simplificar los resultados de las mismas. Estas operaciones siempre están relacionadas con alguna situación problemática cotidiana para el alumno. De este modo, se intenta lograr la comprensión del término equivalente y utilizarlo para resolver problemas que involucran operaciones con fracciones.

En este análisis, todos los contenidos de fracciones se desarrollan de manera contextualizada y empleando diferentes representaciones de las fracciones. Principalmente se utilizan la recta numérica y los conjuntos discretos así como situaciones de reparto. En muy pocas lecciones se emplean apoyos gráficos de figuras planas como rectángulos, cuadrados o círculos, recursos muy utilizados en el currículo anterior (1972).

Refiriéndonos específicamente al concepto de *equivalencia de fracciones*, se desarrolla a través de situaciones de reparto, ubicación de fracciones como puntos en una recta y contextualizado con diversas magnitudes: longitud, peso y capacidad.

El concepto que investigo en este proyecto está relacionado estrechamente con el orden entre fracciones. Para establecer dicho orden en este currículo se utiliza principalmente la recta numérica al ubicar las fracciones como puntos en ella. Para su ubicación se utiliza la técnica de las “hoja rayada” o “líneas paralelas”, que permiten dividir un mismo segmento en fracciones de diferente denominador y así facilitar a los niños esta ubicación en una misma recta e identificar de forma sencilla su orden.

En algún punto de la secuencia se trabaja la ***equivalencia de fracciones*** expresadas en la forma a/b y las expresiones decimales correspondientes. Para esto se emplean recursos como el “*rectángulo-unidad*”. En la contextualización de las fracciones equivalentes con unidades de medida, se utilizan apoyos gráficos de dibujos de recipientes y balanzas. Todos estos apoyos son referidos en varias lecciones a lo largo del ciclo escolar para lograr un mejor conocimiento del orden entre fracciones y el concepto de ***equivalencia de fracciones***.

Este currículo tiene también la particularidad de establecer una vinculación de diferentes contenidos matemáticos con la ***equivalencia de fracciones***; entre estos podemos mencionar: cálculo de probabilidades, representación de figuras a escala, empleo de porcentajes, revisión y análisis de variación proporcional y en las diferentes medidas de longitud, capacidad y peso, todo lo cual significa una amplitud del término de equivalencia, no solo asociado a las fracciones y sus operaciones como se trabajó en currículos anteriores, particularmente en el de 1960.

Finalmente se observa que en este currículo, en comparación con los anteriores, hay un mayor número de significados y representaciones de las fracciones; sobresaliendo el uso de la recta numérica y el empleo de conjuntos discretos en situaciones de reparto, comparación y partición. Se fomenta el razonamiento a través de preguntas que guían el razonamiento sobre las situaciones que se presentan. Las definiciones y algoritmos no se dan de forma directa, se espera que las actividades y ejemplos ayuden a los alumnos a inferirlos y utilizarlos de manera conveniente, pero no hay un énfasis por llegar a la formalización de los conceptos y los procedimientos usando escrituras simbólicas y lenguaje matemático, sino que se haga a través de procedimientos y lenguaje espontáneos.

CAPITULO V: La Equivalencia de Fracciones en el currículum introducido en 2011

Introducción¹⁰

En la primera década del siglo XXI, se desarrolló una política pública orientada a elevar la calidad educativa, colocando en el centro el logro de los aprendizajes, los estándares curriculares establecidos por niveles escolares y el desarrollo de competencias que le permitirán al alumno alcanzar el perfil de egreso propuesto en las directrices de la Educación Básica.

El sistema educativo nacional tiene entre sus metas:

Fortalecer su capacidad para formar estudiantes con competencias para resolver problemas; tomar decisiones; encontrar alternativas de solución; desarrollar productivamente su creatividad; relacionarse de forma proactiva con sus pares y la sociedad; identificar retos y oportunidades en entornos altamente competitivos; reconocer sus tradiciones, valores y oportunidades para enfrentar con mayor éxito los desafíos del presente y del futuro; asumir los valores de la democracia como la base fundamental del Estado laico y la convivencia cívica que reconoce al otro como igual; en el respeto de la ley; el aprecio por la participación, el diálogo, la construcción de acuerdos y la apertura al pensamiento crítico y propositivo. (SEP, 2011a, p. 9).

En este currículum se incluye también de manera puntual el manejo de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TICs) como herramientas del pensamiento, la creatividad y la comunicación; el dominio del idioma inglés, como segunda lengua y el trabajo colaborativo en redes virtuales; también se incluyen como nuevos contenidos de aprendizaje. Estos aspectos hacen una diferencia respecto a los currículos anteriores.

El currículum introducido en 2011, como ya mencioné, está orientado a desarrollar competencias en los estudiantes. Estas competencias deberán considerarse en los tres niveles de Educación Básica y a lo largo de toda la vida.

Respecto de la educación matemática esta propuesta pretende que el alumno muestre los siguientes rasgos al egresar de la Educación Básica:

“Argumenta y razona al analizar situaciones, identifica problemas, formula preguntas, emite juicios, propone soluciones, aplica estrategias y toma decisiones. Valora los razonamientos y la evidencia proporcionados por otros y puede modificar, en consecuencia, los propios puntos de vista”. (SEP, 2011a, p. 39).

Este enfoque de las matemáticas está relacionado con los campos de formación para la educación básica, que-conforme a los documentos oficiales- organizan, regulan y articulan los espacios curriculares. Estos campos tienen un carácter interactivo entre sí, y son congruentes con las competencias para la vida y los rasgos del perfil de egreso, a continuación se menciona el campo referente a matemáticas:

¹⁰Este apartado constituye un resumen con algunos comentarios del libro: (SEP, 2011a, pp. 9-58). Plan de estudios 2011.

“El mundo contemporáneo obliga a construir diversas visiones sobre la realidad y proponer formas diferenciadas para la solución de problemas usando el razonamiento como herramienta fundamental. Representar una solución implica establecer simbolismos y correlaciones mediante el lenguaje matemático. El campo pensamiento matemático articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla.

El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas. De ahí que los procesos de estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización.

El énfasis de este campo se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones. En síntesis, se trata de pasar de la aplicación mecánica de un algoritmo a la representación algebraica.”(SEP, 2011a, p. 48)

En la educación primaria, el estudio de las matemáticas considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición de manera específica.

Con este cambio curricular se modifica nuevamente la distribución del tiempo dedicado a cada asignatura en las escuelas, dependiendo de su tipo*, específicamente mencionaré la distribución referente a matemáticas en los grados de cuarto, quinto y sexto de la educación primaria (Cuadro 1):

Cuadro 1: Tiempo dedicado a la asignatura de matemáticas, de acuerdo al tipo de funcionamiento de la escuela primaria. (SEP. 2011b, pp. 74, 78 y 83)

DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO DE TRABAJO PARA CUARTO, QUINTO Y SEXTO GRADOS DE PRIMARIA TIEMPO COMPLETO		
ASIGNATURAS	HORAS SEMANALES	HORAS ANUALES
Matemáticas	7.0	280
DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO DE TRABAJO PARA CUARTO, QUINTO Y SEXTO GRADOS DE PRIMARIA JORNADA AMPLIADA		
ASIGNATURAS	HORAS SEMANALES	HORAS ANUALES
Matemáticas	6.0	240
DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO DE TRABAJO PARA CUARTO, QUINTO Y SEXTO GRADOS DE PRIMARIA		
ASIGNATURAS	HORAS SEMANALES MÍNIMAS	HORAS ANUALES MÍNIMAS
Matemáticas	5	200

* En este currículo se considera necesario reorganizar el tiempo y avanzar en la ampliación de la jornada escolar, en el caso de educación primaria, se establecen dos modalidades de operación, en las que básicamente cambia el horario de funcionamiento. Una modalidad es la escuela de tiempo completo, para alumnos que requieren una estancia escolar prolongada (dos horarios de funcionamiento: de 8:00 a 14:30 (Jornada ampliada) y de 8:00 a 16:00 horas (Tiempo completo)) y la escuela primaria general en horarios matutino (8:00 a 12:30 horas) y vespertino (14:00 a 18:30 horas).

Aquí observo una inconsistencia pues existe un solo programa y plan de estudios de matemáticas para las diferentes modalidades de funcionamiento de las escuelas primarias, aun cuando en la distribución de tiempo no se dedican el mismo número de horas semanales para esta asignatura, proporcionando mayores posibilidades de tiempo de trabajo en las escuelas de jornada completa.

1. Currículo de matemáticas de educación primaria¹¹

Mediante el estudio de la asignatura de Matemáticas, en la Educación Básica se pretende que los niños:

- Desarrollen formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
- Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.
- Muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo.

En el aspecto de fracciones, se espera que los alumnos:

- Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con *números fraccionarios* y decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos. (SEP, 2011b, p. 64)

Los Estándares Curriculares de matemáticas para primaria, mencionados en la página anterior, corresponden a tres ejes temáticos de esta materia: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información.

La enseñanza de las fracciones se ubica en el eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico; en el cual se espera que al término de la educación primaria y dentro del contenido de fracciones, el alumno:

- ✓ Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.
- ✓ Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.
- ✓ Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.
- ✓ Para orientar en el cumplimiento de estos propósitos y supuestos se proporciona al maestro la siguiente orientación didáctica. (SEP. 2011b, p. 64)

1.1 Enfoque Didáctico en Matemáticas

El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los

¹¹Los párrafos siguientes exponen el contenido sintetizado del Programas de estudio 2011. SEP. (2011a, pp. 61-80)

alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar.

Para resolver una situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, mismos que le permiten entrar en la situación, pero el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, ya sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación.

De cada uno de los ejes se desprenden varios temas y, para cada uno de éstos hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad. Los temas son grandes ideas matemáticas cuyo estudio requiere un desglose en contenidos. En el caso de la educación primaria se consideran ocho temas: Números y sistemas de numeración, Problemas aditivos, Problemas multiplicativos, Figuras y cuerpos, Ubicación espacial, Medida, Proporcionalidad y funciones y Análisis y representación de datos.

Este programa marca cuatro competencias matemáticas que se deben cumplir a lo largo de la educación primaria:

- 1) **Resolver problemas de manera autónoma.** Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones.
- 2) **Comunicar información matemática.** Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno.
- 3) **Validar procedimientos y resultados.** Los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.
- 4) **Manejar técnicas eficientemente.** Uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora. (SEP, 2011b, p. 71)

Para lograr estas competencias, el docente se basará en los contenidos que son aspectos muy concretos que se desprenden de los temas, cuyo estudio requiere entre dos y cinco sesiones de clase. El tiempo de estudio hace referencia a la fase de reflexión, análisis, aplicación y construcción del conocimiento en cuestión, pero hay un tiempo más largo en el que dicho conocimiento se usa, se relaciona con otros conocimientos y se consolida para constituirse en saber o saber hacer. Se proporcionan diferentes materiales bibliográficos por grado y asignatura para apoyo en el cumplimiento de las competencias.

1.2 Material bibliográfico de matemáticas

Los libros de texto correspondientes a este currículo se diseñaron a partir de los siguientes lineamientos:

- Las actividades se orientan al desarrollo de competencias.
- Propiciar la formalización de los conocimientos.
- Favorecer por medio de las evaluaciones el análisis y la reflexión.
- Claridad expositiva y comprensiva de textos e imágenes.

- Redacción sencilla, breve y clara, adecuada para el nivel y grado escolar, y a la capacidad cognoscitiva y de comprensión de los alumnos.
- Proporción texto-imagen según el nivel y el grado.
- Tipografía adecuada para las capacidades lectoras de cada nivel y grado. (SEP, 2011b, p. 22)

El currículo de 2011 señala también que las actividades de aprendizaje deben representar desafíos intelectuales para los estudiantes, con el fin de que formulen alternativas de solución. Se afirma que si en verdad se trata de actividades de aprendizaje que representan desafíos intelectuales, entonces los alumnos participan en ellas y producen ideas que es necesario analizar para sacar conclusiones claras y poder avanzar en el aprendizaje. Sin duda se trata de una orientación diferente a la práctica común que privilegia las explicaciones del maestro como medio para que los alumnos aprendan. Por esto, además de los libros de texto de matemáticas para el alumno, a partir del ciclo escolar 2012-2013 se distribuyen libros de *Desafíos matemáticos* por grado. Y en los ciclos escolares de: 2014-2015 y 2015-2016 (No se sabe si posteriormente se distribuirán) ya no se distribuyeron los libros de texto de matemáticas, únicamente se entregó el libro de *Desafíos matemáticos* por grado. (SEP, 2014, Catalogo 2014-2015)

Los libros de texto de matemáticas del alumno se utilizaron y distribuyeron únicamente por tres años (de 2010 a 2013), muy poco tiempo comparado con los libros similares de los currículos anteriores, que en algunos casos duraron hasta 20 años en las escuelas.

Inicié el análisis general de este material bibliográfico que además utilicé de manera directa en mi labor docente en los últimos años, con el siguiente cuestionamiento: ¿Por qué la Conaliteg ya no los continúa distribuyendo y por lo tanto, los profesores ya no los utilizamos en nuestra actividad de enseñanza?.

Como resultado del análisis general de los libros de texto de matemáticas del alumno de tercero, cuarto resalto los siguientes aspectos:

En cada grado, el libro de texto de matemáticas para el alumno se encuentra estructurado en cinco bloques de estudio integrados por diversas lecciones. Cada bloque de estudio está conformado por las siguientes secciones:

- *Aprendizajes esperados*: Listado de los aprendizajes matemáticos que el alumno debe poseer al concluir el bloque.
- *Lecciones*: Diferentes secciones dedicadas a cada tema matemático que permitirían el desarrollo de cada aprendizaje esperado. En algunas lecciones se plantean actividades adicionales llamadas “retos” que en su mayoría están relacionados con la lección. Las lecciones cuentan con un título, un tema de aprendizaje, el aspecto del tema que se debe desarrollar y un contenido específico que el alumno debe obtener al término de la lección.
- *Integro lo aprendido*: Actividades de repaso de las diferentes lecciones.
- *Evaluación*: Ejercicios y actividades que de alguna forma permiten identificar el grado de adquisición del conocimiento alcanzado en el bloque.

- *Autoevaluación*: Cuadros generales donde los alumnos indican si los contenidos adquiridos se realizan siempre, a veces o difícilmente se realizan.

En este currículo se produjeron básicamente dos materiales de apoyo por grado para los alumnos: el libro de texto del alumno y posteriormente el libro de Desafíos matemáticos. Revisaré ambos libros, iniciando con los de tercer grado, pues en este grado se comienza el desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones*.

2. Presentación de las fracciones en el tercer grado

Se inicia el análisis con la revisión del programa y plan de estudios 2011 de tercer grado, identificando los conocimientos y orientaciones didácticas del contenido de fracciones especificadas en el apéndice F.

2.1 Libro del alumno Matemáticas. Tercer grado

En el apéndice G, se indica el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en el libro del alumno de tercer grado.

Según lo especificado en el apéndice C en este libro del alumno se contabilizaron seis lecciones referentes al tema de fracciones de un total de 52, de las cuales:

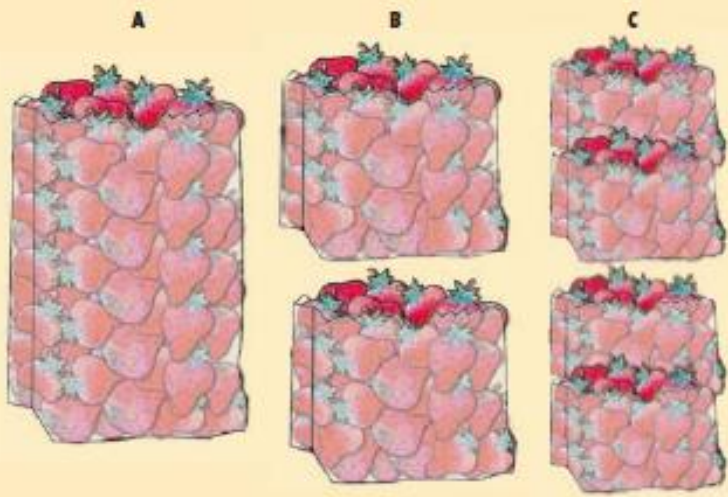
- Tres lecciones (16, 26 y 41) se refieren a temas generales de fracciones.
- Dos lecciones (43 y 46) refieren indirectamente al concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo requieren y ejemplifican al realizar las actividades propuestas.
- Una lección (35) es utilizada para la introducción del concepto de *equivalencia de fracciones*. Esta lección emplea de forma directa la definición de fracciones equivalentes y de alguna manera se llega a una formalización del concepto que es la siguiente: “*Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de fracciones equivalentes*”. (SEP, 2010c, p. 117).

Con base en esta definición de alguna manera se llega a una formalización del concepto. Como se verá en el análisis de las lecciones, tal definición no tiene un apoyo didáctico conveniente. Pues se introduce únicamente a partir de una situación de reparto, faltando actividades que permitan la construcción del concepto en los alumnos, como lo indican los lineamientos y orientaciones didácticas especificadas en el plan y programa de estudio 2011.

A continuación se presenta el análisis de la única lección del libro del alumno que se emplea en tercer grado para la introducción y desarrollo del concepto de *equivalencia de fracciones* y así conocer más específicamente la secuencia didáctica utilizada en este grado para tal fin.

La lección 35 inicia con la representación de un reparto de cierta cantidad de kilogramos en bolsas de diferentes capacidades y el alumno debe contestar preguntas referentes a las capacidades de las bolsas y el reparto señalado (Imagen 1).

2. Reúnanse en equipos y lleven a cabo la actividad.
 Observen los dibujos que realizaron en el grupo de Carlos y Rodrigo para representar las bolsas de fresas que compró Cecilia.



A **B** **C**

- * ¿Qué peso representa la bolsa A? _____
- * ¿Qué peso representan las bolsas B? _____
- * ¿Qué peso representan las bolsas C? _____
- * ¿Qué relación hay entre la bolsa A y cada una de las bolsas B? _____
- * ¿Qué relación hay entre las bolsas A y cada una de las bolsas C? _____
- * ¿Qué relación hay entre las bolsas B y dos de las bolsas C? _____

Imagen 1: Representación gráfica de un reparto de kilogramos. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP, 2010c, p. 116).

A continuación se sugiere representar algunas fracciones en rectángulos y se presenta la definición de *fracciones equivalentes* (Imagen 2).

En tu cuaderno dibuja rectángulos que representen bolsas como las de la actividad anterior y correspondan a las siguientes cantidades: $2\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ y $3\frac{1}{4}$ kilogramos.

Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de fracciones equivalentes.

Imagen 2: Definición de fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP, 2010c, p. 117).

Como ya se comentó, se presenta la definición de equivalencia sólo a partir de una situación de reparto y su representación gráfica. Como se observa, estas actividades no son suficientes para lograr la construcción del concepto investigado.

En seguida se pide a los alumnos resolver problemas de comparación de fracciones y representar dichas fracciones en dibujos de figuras planas para comprobar sus respuestas (Imagen 3); No se sugiere una aplicación directa de la definición dada para resolver dichos problemas.

3. Resuelve los siguientes problemas y representa las fracciones indicadas para comprobar tus respuestas.

* Joel obtuvo $\frac{1}{4}$ de una galleta y Pedro $\frac{1}{3}$. ¿A quién le correspondió la mayor cantidad? _____

* Jaime dedica $\frac{4}{8}$ de hora a la lectura y Jesús $\frac{3}{7}$ de hora. ¿Quién lee durante más tiempo? _____

* Catalina se sirve $\frac{1}{3}$ de litro de helado y María $\frac{1}{6}$. ¿Quién se sirvió más? _____





Imagen 3: Resolver problemas de comparación de fracciones. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP, 2010c, p. 117).

Para concluir la lección y la introducción al concepto de **equivalencia de fracciones** en este libro; con el apoyo de preguntas se identifica la equivalencia de fracciones entre tercios y sextos mediante una representación con círculos (Imagen 4).

* Escribe la fracción coloreada de rojo en la primera figura. _____

* Escribe la fracción coloreada de azul en la segunda figura. _____

* ¿Son equivalentes las partes coloreadas en las dos figuras? _____

* Entonces, se puede decir que _____ = _____
¿Por qué? _____

Consulta en...
 Entra a esta dirección y compara fracciones.
www.thatquiz.org/es/practice.html?fracineq



Imagen 4: Identificar equivalencia ente tercios y sextos. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP, 2010c, p. 118).

2.2 Desafíos matemáticos. Libro del alumno. Tercer grado

Para concluir la revisión del tercer grado, en el apéndice H se indican los contenidos de fracciones equivalentes indicadas en el libro de *Desafíos matemáticos*.

En el apéndice H que corresponde al libro de Desafíos matemáticos del alumno se contabilizaron 18 desafíos referentes al tema de fracciones de un total de 76, de las cuales:

- a) Doce desafíos (30, 31, 33, 35, 44, 45, 49, 50, 51, 62, 65 y 66) se refieren a temas generales de fracciones.
- b) Cuatro desafíos (32, 67, 68 y 69) emplean implícitamente el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo mencionan y ejemplifican al resolver los ejercicios y actividades.
- c) Dos desafíos (34 y 48) son utilizados para la introducción del concepto de *equivalencia de fracciones*. Estas lecciones no mencionan de manera formal el término equivalente, lo hacen a través de situaciones de reparto y usando el término igualdad y el signo (=).

En este libro de Desafíos, se inicia el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en la lección 34; en la última situación de reparto planteada se realiza un reparto en partes iguales de un número de pizzas entre un número de personas y después se reparte el doble de pizzas al doble de personas y se identifica la equivalencia entre los repartos a través de preguntas. (Imagen 5).

4. En cada equipo se van a repartir pizzas, de manera que a todos les toque lo mismo y que no sobre.



a) ¿A Rosa y a Fernando les tocará la misma cantidad de pizza?

¿Por qué?

b) ¿Cuántas pizzas más tendría que comprar el equipo de Rosa para que cada uno pueda comer media pizza más que los niños del equipo de Fernando?

Imagen 5: Identificar equivalencia en una situación de reparto donde se duplica la cantidad de pizzas y la cantidad de personas. Libro de Desafíos matemáticos. Tercer grado. (SEP. 2013b, p. 79).

Para concluir el tratamiento de la equivalencia en este grado, en la lección 48 del libro Desafíos, se emplea el concepto de *equivalencia de fracciones* al resolver un problema de longitud empleando medios, cuartos y octavos de metro para recorrer la misma longitud (dos metros). Una vez resuelto el problema, se contestan preguntas para identificar igualdad en las longitudes recorridas (Imagen 6).

2. Un conejo, una rana y un chapulín tienen que cruzar un puente que mide 2 metros de largo. El conejo da saltos de $\frac{1}{2}$ metro, la rana de $\frac{1}{4}$ y el chapulín de $\frac{1}{8}$. Contesten las siguientes preguntas.



a) ¿Cuál de los tres animales da saltos más largos?

b) Si el conejo da 3 saltos, la rana 6 y el chapulín 12, ¿qué distancia ha recorrido cada animal?



c) ¿Cuántos saltos tiene que dar cada uno para cruzar el puente?

Imagen 6: Problema de longitud empleando medios, cuartos y octavos de metro para recorrer la misma longitud y así identificar equivalencia entre fracciones. Libro de Desafíos matemáticos Tercer grado. (SEP, 2013b, pp. 106-107).

2.3 Tratamiento de la equivalencia en el tercer grado

En el libro del alumno se utilizan muy pocas representaciones de las fracciones, y estas se centran básicamente en el empleo de dibujos y figuras planas, se dan definiciones y procedimientos de forma muy general y en cierto sentido mecánico pues no se presenta una secuencia de actividades que favorezcan el desarrollo de procedimientos informales (o que éstos se socialicen o discutan).

En el libro de Desafíos matemáticos, en cambio, no se dan definiciones ni procedimientos para el concepto de *equivalencia de fracciones* y en general para las fracciones se integran situaciones de reparto, una representación de fracciones como puntos en una recta y se promueve el significado de parte-todo. En este libro se emplean un mayor número de representaciones gráficas en figuras planas, en conjuntos discretos y en algunos desafíos se dan secuencias más propicias para favorecer la construcción de definiciones y procedimientos.

Por todos estos aspectos afirmo que existen algunas diferencias e inconsistencias entre el libro de texto y el de Desafíos matemáticos en cuanto a su contenido y enfoque, pues mientras el primero se orienta más a incorporar definiciones, el segundo busca que se resuelvan problemas. Tampoco hay congruencia

con el plan de estudios del tercer grado. A pesar de que deben ser complementos uno de otro. Como ya se mencionó, el libro de texto del alumno ya no se emplea desde el año escolar 2014-2015 y es el de Desafíos matemáticos el que continúa utilizándose.

3. Presentación de las fracciones en el cuarto grado

En el apéndice I se enuncian los conocimientos indicados en este currículo para el cuarto grado referentes al contenido de fracciones; específicamente al concepto de *equivalencia de fracciones*.

3.1 Libro del alumno Matemáticas Cuarto Grado

En el apéndice J se indican los contenidos que incluyen el concepto de *equivalencia de fracciones* en el libro del alumno.

Como se observa en el cuadro del apéndice J se contabilizaron ocho lecciones referentes al tema de fracciones de un total de 51, de las cuales:

- Tres lecciones (2, 21 y 46) se refieren a temas generales de fracciones.
- Dos lecciones (11 y 34) emplean el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo mencionan y utilizan al resolver los ejercicios y actividades.
- Tres lecciones (15, 24 y 25) son utilizadas para la enseñanza del concepto de *equivalencia de fracciones*.

En la lección 15, se inicia el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* con la actividad de obtener fracciones equivalentes a un sexto con base en un conjunto de pelotas y balones dibujados y explicar porque $1/6 = 2/12$ (Imagen 7)

2. Sigue trabajando de manera individual para resolver lo siguiente.
Si Abel tiene 12 pelotas y 10 balones, ¿qué fracción del total representan dos pelotas?

• La fracción que corresponde a los balones blancos, ¿es equivalente a $\frac{1}{6}$? _____
¿Por qué? _____

• ¿A qué fracción equivalen 4 balones? _____

Observa la ilustración de la derecha y encierra $\frac{2}{12}$ que equivalen a 2 de las doce pelotas. Encierra esta cantidad en el primer círculo.

Observa ahora la ilustración de la izquierda. Abel agrupó las pelotas de manera tal que quedaran divididas en 6 partes iguales. Después tomó $\frac{1}{6}$. Encierra esa cantidad.

Si observas con cuidado verás que $\frac{2}{12}$ y $\frac{1}{6}$ representan el mismo número de pelotas. Por esta razón $\frac{2}{12}$ es equivalente a un $\frac{1}{6}$.

Cuando se suma $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ el resultado es $\frac{5}{6}$; en nuestro ejemplo, equivale a sumar 6 pelotas más 4 pelotas y el resultado son 10 pelotas y nos quedan 2 pelotas para completar $\frac{6}{6}$.

Imagen 7: Equivalencia entre sextos y doceavos a partir de un conjunto discreto. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 58).

La siguiente actividad es resolver problemas que impliquen sumas o restas de fracciones y contestar preguntas referentes a la operación realizada (Imagen 8).

3. Reúnete con dos compañeros y efectúen las actividades.

a) En el salón de Isabel hay 35 alumnos. $\frac{1}{7}$ parte de ellos cumple años en octubre, $\frac{2}{7}$ los cumple en noviembre, $\frac{1}{7}$ parte en abril, $\frac{2}{7}$ partes en mayo y julio y el resto en los meses faltantes del año.

b) En sus cuadernos construyan dos rectángulos del mismo tamaño. En el primero, representen a los alumnos divididos de acuerdo con los meses en los que nacieron. En el segundo, la división debe hacerse en 35 partes iguales, de acuerdo con el número de alumnos. Recuerden que los dos rectángulos deben ser del mismo tamaño.

c) En el rectángulo que está dividido en 35 partes iguales, pinta de color azul el número de pedazos necesarios para formar $\frac{1}{7}$.

d) ¿Cuántos alumnos cumplen años en noviembre? _____

e) Al sumar todas las fracciones mencionadas en el inciso a) de la actividad, ¿cuál es el resultado? _____

f) ¿Qué fracción hay que sumar para completar los $\frac{7}{7}$? _____

g) ¿Se puede hacer una división adecuada de los alumnos para saber qué fracción representan 7 alumnos? _____
¿Cuáles? _____

h) Explica cómo obtuviste tu respuesta. _____

i) Con esa misma división, ¿Cuánto representan 21 alumnos? _____

En otro grupo también hay 35 alumnos.

j) Si 35 alumnos representan un entero, ¿cuánto representan los 70 alumnos? _____

k) Si la división es en séptimos, ¿cuántos alumnos representan $\frac{8}{7}$? _____

l) Expliquen su respuesta. _____

Imagen 8: Problemas que implican la fracción como operador. Libro del Alumno Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 59)

La última actividad de esta lección consiste en realizar sumas y restas de fracciones con igual denominador y representar gráficamente los resultados (Imagen 9).

Realiza las siguientes operaciones.

$\bullet \frac{1}{7} + \frac{3}{7} =$	$\frac{6}{5} - \frac{3}{5} =$
$\bullet \frac{3}{8} + \frac{4}{8} =$	$\frac{8}{4} - \frac{3}{4} =$
$\bullet \frac{5}{12} + \frac{3}{12} =$	$\frac{7}{2} - \frac{4}{2} =$
$\bullet \frac{3}{6} + \frac{7}{6} =$	$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} =$
$\bullet \frac{4}{5} + \frac{3}{5} =$	$\frac{6}{5} - \frac{4}{5} =$

En tu cuaderno representa gráficamente cada uno de los resultados obtenidos.

Imagen 9: Sumas y restas de fracciones con igual denominador. Libro del Alumno Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 60).

La lección 24 inicia con la actividad de resolver un problema de reparto de una unidad en diferente número de partes: 2, 3, 4, 5, 6 y 8 y contestar preguntas referentes a ese reparto (Imagen 10).

7. Resuelve el siguiente problema.

El maestro de Matemáticas llevó al salón de clase 6 melones de tamaño y peso similares. Acomodó en filas a sus alumnos y a cada fila le entregó un melón. En la primera fila sólo había 2 alumnos; en la segunda, 4; en la tercera, 3; en la cuarta, 6; en la quinta, 8 y en la sexta, 5. El profesor pidió que cada melón se repartiera en partes iguales entre los alumnos de cada fila.

- ¿En cuál de las filas los alumnos recibieron una porción mayor de melón? _____
- En una de las filas cada alumno recibió la mitad de un melón. ¿De qué fila se trata? _____
- ¿Qué fracción de un melón le tocó a los alumnos de la sexta fila? _____
- Roberto afirma que entre más alumnos haya en la fila, menor porción de melón les tocará. ¿Estás de acuerdo con él? _____
¿Por qué? _____

Cuando todo el grupo haya terminado, con la orientación del profesor, elaboren una conclusión.

Imagen 10: Resolver un problema de reparto para comparar fracciones con base en los resultados del reparto. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p.81).

Se continúa la lección representando medios, cuartos, octavos y dieciseisavos en cuadrados de material concreto, después completar una tabla con las columnas siguientes: figura, fracción coloreada, medios, cuartos, octavos y dieciseisavos y contestar preguntas referentes a dicha tabla (Imagen 11).

2. Reúnete con un compañero para llevar a cabo la actividad.

- En un material transparente (bolsa, papel cebolla, acetato, mica, etcétera) reproduzcan las figuras que están marcadas con medios, cuartos, octavos y dieciséisavos.
- Recórtenlas y pónganlas sobre las figuras numeradas. Completen la tabla y contesten las preguntas.
- Sombrear medios en las figuras 2,3 y 4 y cuartos en la 3.

Figura	Fración coloreada	Medios	Cuartos	Octavos	Dieciséisavos
1	$\frac{1}{2}$				
2	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{3}{8}$				
4	$\frac{3}{4}$				

- Con respecto a la figura 1, ¿qué fracciones representaron la misma parte coloreada? _____
- Si en la tabla se observa que $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$, ¿a cuántos dieciséisavos es igual $\frac{7}{8}$? _____
- ¿De cuántas formas diferentes se puede escribir la fracción $\frac{1}{2}$? _____
- Expliquen, ¿cómo puede saberse que dos fracciones son equivalentes? _____
- Observa la figura dividida en octavos y contesta cuántos equivalen a un cuarto. _____
- Comparen sus respuestas y con apoyo del maestro elaboren una conclusión general.

Imagen 11: Representar fracciones con distinto denominador en cuadrados fraccionados y completar una tabla. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 82).

En seguida se resuelve un problema y una actividad que implica ordenar fracciones (Imagen 12).

3. Resuelve el siguiente problema.

Mayra, Gloria, Daniela y Rebeca trabajan en distintas empresas y ganan el mismo sueldo. Mayra ahorra $\frac{2}{3}$ de su sueldo; Gloria $\frac{1}{2}$; Daniela $\frac{4}{8}$ y Rebeca $\frac{1}{2}$.

- De las cuatro, ¿quiénes ahorran la misma parte de su sueldo? _____
¿Quién ahorra más? _____
- Explica cómo puedes saber quiénes ahorran la misma cantidad de su sueldo. _____

4. Escribe en tarjetas de 5 cm por 3 cm las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ (una fracción por tarjeta). En parejas, ordenen las fracciones de las tarjetas de manera ascendente.

- ¿Cuál es la fracción que se debe colocar en primer lugar? _____
- ¿Cuál debe colocarse al final? _____

Imagen 12: Ordenar fracciones. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 83).

Se concluye la lección al escribir fracciones equivalentes a una fracción dada y se presenta la definición de fracciones equivalentes. “*Dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad*” (Imagen 13).

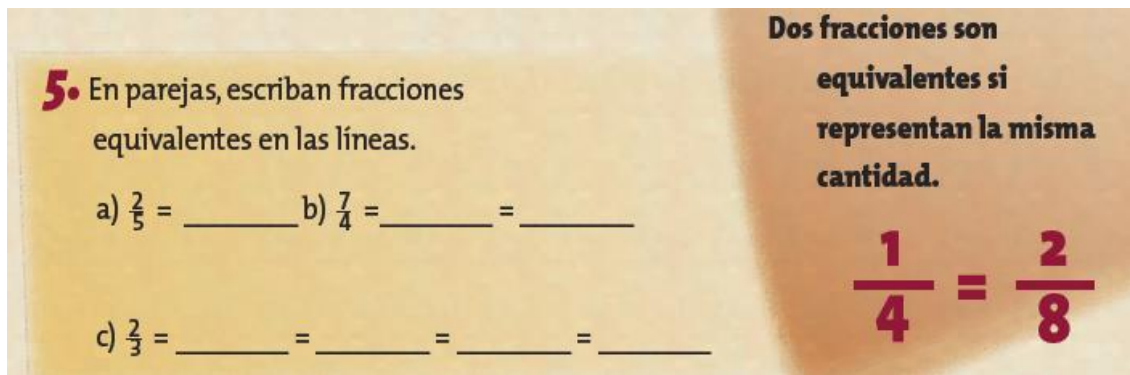


Imagen 13: Definición de fracciones equivalentes. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 83).

La lección 25 inicia con la actividad de representar fracciones de denominador 4, 6, 8 y 16 equivalentes a $\frac{1}{2}$, empleando cartulina y también figuras de rectángulos (Imagen 14).

1. Reúnanse con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

El profesor de Matemáticas pidió a sus alumnos que buscaran cartulina de reúso suficiente para que cada uno formara el equivalente a $\frac{1}{2}$ pliego de cartulina. Óscar llevó dos piezas de cartulina de $\frac{1}{4}$ de pliego, Lilibana tres de $\frac{1}{6}$, Gabriela cuatro de $\frac{1}{8}$ y Felipe cinco de $\frac{1}{10}$. ¿Cuántas porciones de $\frac{1}{16}$ de pliego de cartulina llevó Jazmín para formar $\frac{1}{2}$ pliego? _____

2. En parejas utilicen los siguientes rectángulos de cartulina para ilustrar las fracciones que llevó cada uno de los alumnos del problema anterior. Escriban en cada una de las partes la fracción correspondiente y contesten las preguntas.

- ¿Cuántas partes de $\frac{1}{16}$ sumadas forman $\frac{1}{2}$ de pliego? _____
- Usando sólo fracciones y el signo de suma, escribe la operación que represente la pregunta anterior. _____
- ¿Cómo se podrá representar $\frac{1}{2}$ utilizando varias veces $\frac{1}{16}$? _____

Óscar Lilibana Gabriela Felipe Jazmín

Imagen 14: Representación gráfica de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 84).

Se continúa la lección representando en rectángulos de una misma medida sextos, doceavos, cuartos, octavos, medios y tercios. Y basándose en esta representación, completar una tabla de fracciones equivalentes con las siguientes columnas: Fracción y formas de representar la fracción (Cuatro columnas). (Imagen 15).

3. En parejas, utilicen las hojas necesarias para trazar 9 rectángulos de 3 cm de altura y 6 cm de base, recórtenlos. Sigán las indicaciones.

- El primero divídanlo en tercios, el segundo en sextos, el tercero en doceavos, el cuarto en cuartos, el quinto en octavos, el sexto en medios. Escriban en cada parte del rectángulo la fracción correspondiente: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, etcétera.
- Dividan el séptimo rectángulo en dos partes y coloreen una de éstas de amarillo. El octavo rectángulo divídanlo en cuartos, pinten tres de amarillo y el resto de azul. El último rectángulo divídanlo en tercios, pinten dos de amarillo y el resto de azul.
- Utilicen los primeros siete rectángulos de las fracciones y busquen otra forma de representar las partes coloreadas de amarillo y azul. Registren sus respuestas en la tabla de la derecha.

Fracción	Formas de expresar la fracción			
$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{3}$				
$\frac{3}{4}$				
$\frac{3}{8}$				
$\frac{5}{12}$				

Imagen 15: Representación gráfica y completar cuadro de fracciones equivalentes. Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 2010a, p. 85).

Siguiendo el ejemplo resuelto, escribir al menos dos formas diferentes de expresar las fracciones indicadas (Imagen 16).

4. Escriban al menos dos formas diferentes de expresar las siguientes fracciones. Observa el ejemplo.

- $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$
- $\frac{7}{4} =$
- $\frac{5}{12} =$
- $1\frac{1}{2} =$

Imagen 16: Expresar una fracción dada de dos formas diferentes. Libro del Matemáticas. Cuarto grado. (SEP, 2010a, p. 85).

Una actividad más de esta lección es completar una tabla con las columnas: fracción, mitad, tercio, doble, triple, cuádruple y contestar preguntas referentes a la tabla (Imagen 17).

5. Completa la siguiente tabla.

Fracción	Mitad	Tercio	Doble	Tripla	Cuádruplo
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{9}$			
$\frac{1}{4}$				$\frac{3}{4}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$		$\frac{6}{4}$		
$\frac{1}{5}$					$\frac{4}{5}$

- Observa los denominadores de las fracciones de la columna "Mitad" y "Tercio", y compáralos con los de la columna "Fracción". ¿Qué relación encuentras?

- ¿Cómo se determina la mitad o un tercio de cualquier fracción? _____

- ¿Cómo se obtiene el doble o el triple de una fracción? _____

Imagen 17: Completar un cuadro referente a fracciones. Libro del Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 2010a, p. 85).

Se finaliza la lección y el tratamiento de la equivalencia en este grado, resolviendo problemas; uno de reparto y otro de partes de..., para identificar las fracciones resultantes. Se presenta una nota indicando que una fracción se puede expresar de diferentes formas y se da un ejemplo. (Imagen 18).

6. Resuelve los siguientes problemas.

- Alberto llevó a su casa $\frac{3}{4}$ de un kilogramo de sandía, que quiere repartir en partes iguales entre su esposa, su hija y él. ¿Qué fracción de un kilogramo de sandía le tocó a cada uno de ellos? _____
- Isaac es mecánico y le pidió a su ayudante que comprara un tornillo de $\frac{7}{16}$ de pulgada de largo. Cuando su ayudante llegó, Isaac se dio cuenta de que le había dado la medida incorrecta y le pidió que comprara otro que tuviera el triple de largo que el anterior. ¿Cuál es la longitud del segundo tornillo? _____

Una fracción puede expresarse de diferentes maneras, ya sea sumando una misma fracción o diferentes fracciones. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ puede expresarse como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, entre muchas otras formas.

Imagen 18: Resolver problemas e identificar formas de expresar una fracción. Libro del Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 2010a, p. 86).

3.2 Desafíos Matemáticos. Libro del alumno. Cuarto Grado

El análisis del libro de Desafíos matemáticos de cuarto grado, se presenta en el apéndice K indicando los contenidos que incluyen manejo de fracciones y especialmente el concepto de *equivalencia de fracciones*.

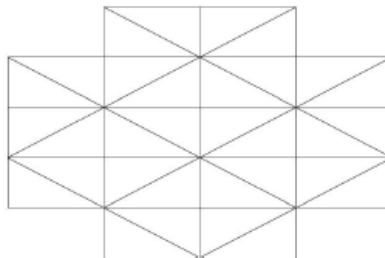
En este libro de Desafíos se contabilizaron dieciséis desafíos referentes al tema de fracciones del total de 106, de las cuales:

- a) Siete desafíos (6, 7, 28, 30, 50, 65 y 66) se refieren a temas generales de fracciones.
- b) Cinco desafíos (4, 5, 51, 52 y 73) emplean de manera directa el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo mencionan y ejemplifican al resolver los ejercicios y actividades.
- c) Cuatro desafíos (29, 49, 89 y 90) son utilizados para el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones*. Estas lecciones no mencionan de manera formal el término fracciones equivalentes lo hacen a través de situaciones de longitud y representaciones gráficas en figuras planas y emplean el término “*es equivalente a*”.

En estos Desafíos se realiza la introducción al concepto de *equivalencia de fracciones* en el desafío 29, con las actividades siguientes: a) representar cuartos, octavos y dieciseisavos en una figura dividida en 32 partes iguales y b) representar quintos y tercios en una figura dividida en sesenta partes iguales; en las dos actividades se contestan preguntas referentes a esa representación para así identificar de alguna manera la equivalencia de partes iluminadas. (Imagen 19).

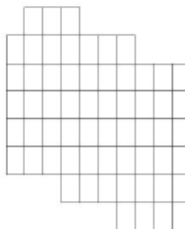
Iluminen cada figura según las indicaciones.

1. $\frac{2}{4}$ de color verde, $\frac{1}{8}$ de anaranjado y $\frac{1}{16}$ de amarillo. Ningún triángulo puede iluminarse dos veces.



¿Cuántos triángulos pequeños se iluminaron? _____

2. $\frac{2}{5}$ de rojo y $\frac{1}{3}$ de rosa. Cuiden que no se sobrepongan ambas zonas.



¿Cuántos rectángulos quedaron sin iluminar? _____

Imagen 19: Representación de fracciones en figuras planas. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, p. 55).

El Desafío 49 se inicia recortando tiras de diferente color y tamaño de la sección recortable de este libro (Imagen 20).



Imagen 20: Tiras de diferentes colores y tamaños. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, pp. 229-231).

Utilizando estas tiras, se debe identificar cuántas veces cabe una tira de determinado color en una tira de otro color, también se pide identificar formas distintas de formar un entero y $\frac{2}{3}$ utilizando las tiras de diferentes colores (Imagen 21).

1. Identifiquen a qué fracción de la tira gris corresponde cada tira de color:

Tira	Fración	Tira	Fración
Verde		Amarilla	
Morada		Café	
Azul		Roja	
Rosa		Anaranjada	
Negra			

2. Encuentren tres formas distintas para representar un entero con tiras de diferente color.

Representación con tiras	Representación con números


3. Para cada caso, encuentren dos formas diferentes de construir $\frac{2}{3}$.

Con tiras del mismo color		Con tiras de diferente color	
Representación con tiras	Representación con números	Representación con tiras	Representación con números

Imagen 21: Identificar cuantas veces cabe una tira de determinado color en otra tira de diferente color. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, pp. 94-95).

En la misma lección, el alumno debe encontrar expresiones equivalentes a una fracción dada empleando las tiras de diferentes colores como apoyo para esta actividad (Imagen 22).

4. Para este ejercicio deben considerar las fracciones que representan las tiras de colores; luego encuentren y anoten en el recuadro las fracciones o expresiones equivalentes posibles para cada fracción.

$\frac{4}{5} =$ 


$1\frac{2}{6} =$ 

Imagen 22: Encontrar expresiones equivalentes a una fracción dada. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, p. 95).

Se finaliza la lección con la actividad de escribir la expresión “es equivalente a” entre dos fracciones; también se pueden utilizar las tiras de colores (Imagen 23).

Escriban sobre la línea “es equivalente a” si las dos fracciones que se comparan tienen el mismo valor. Cuando terminen, comprueben sus respuestas con las tiras de colores.

a) $\frac{6}{12}$ _____ $\frac{5}{10}$

b) $\frac{4}{6}$ _____ $\frac{5}{9}$

c) $\frac{9}{10}$ _____ $\frac{11}{12}$

d) $\frac{6}{6}$ _____ $\frac{10}{10}$

e) $\frac{4}{3}$ _____ $\frac{2}{2} + \frac{1}{6}$

f) $1\frac{3}{12}$ _____ $\frac{3}{4}$

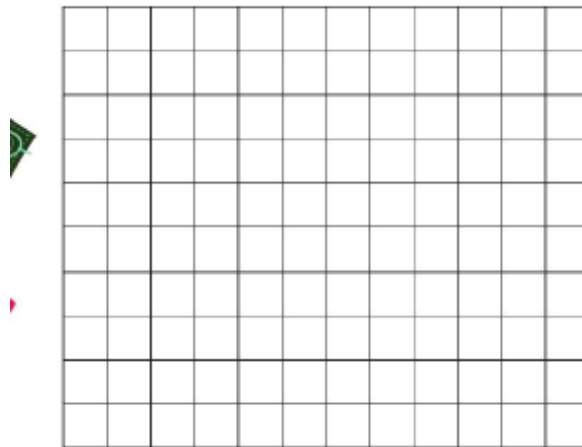
g) $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ _____ $\frac{7}{10}$

h) $\frac{6}{8}$ _____ $\frac{9}{12}$

Imagen 23: Escribir la expresión “es equivalente a” entre dos fracciones. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, p. 96).

La lección 89 de los Desafíos empieza representando fracciones de distinto denominador indicándolas en un rectángulo dividido en 120 partes iguales (Imagen 24).

De manera individual, colorea los cuadros necesarios para representar la fracción que se indica en la tarjeta que te entregue el maestro.



Número de cuadros coloreados: _____

Localiza a los compañeros del grupo que colorearon la misma cantidad de cuadros que tú y revisen que todas sus representaciones sean correctas.

Imagen 24: Representar fracciones de distinto denominador indicándolas en un rectángulo dividido en 120 partes iguales. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, p. 168).

Después se contestan preguntas referentes a las fracciones representadas en el rectángulo de 120 partes, identificando lo que sucede con los numeradores o denominadores (Imagen 25).

Cuando estén seguros de que todos representaron correctamente su fracción, formen un equipo y contesten las preguntas:

a) ¿Por qué para las fracciones de su equipo se coloreó la misma cantidad de cuadros?

b) ¿Qué relación observan en los denominadores de las fracciones que tienen en su equipo?

c) ¿Sucede lo mismo con los numeradores?

¿Por qué?

d) ¿Qué operaciones pueden hacerse a partir de una fracción para obtener las otras?

Imagen 25: Contestar preguntas sobre las representaciones de la imagen 24. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, p. 169).

Con el Desafío 90 se concluye el tratamiento de la equivalencia en este grado pidiendo a los alumnos anotar numerador o denominador faltante en una secuencia de fracciones equivalentes e identificar fracciones equivalentes a una dada. (Imagen 26).

1. Escriban los números que faltan para que las fracciones de cada grupo sean equivalentes:

a) $\frac{5}{3} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{12} = \frac{15}{\quad} = \frac{\quad}{15}$ d) $\frac{70}{50} = \frac{14}{\quad} = \frac{\quad}{5} = \frac{35}{\quad}$

b) $\frac{2}{6} = \frac{\quad}{12} = \frac{6}{\quad} = \frac{20}{\quad} = \frac{\quad}{36}$ e) $\frac{48}{60} = \frac{\quad}{20} = \frac{12}{\quad} = \frac{\quad}{10}$

c) $\frac{4}{2} = \frac{8}{\quad} = \frac{20}{\quad} = \frac{28}{\quad} = \frac{\quad}{20}$ f) $\frac{72}{120} = \frac{18}{\quad} = \frac{12}{\quad} = \frac{\quad}{60}$

2. Encierren en un círculo las fracciones que son equivalentes a la primera de la izquierda.

a) $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{8}{36}$; $\frac{12}{19}$; $\frac{4}{18}$; $\frac{11}{45}$

b) $\frac{9}{27}$; $\frac{6}{24}$; $\frac{7}{21}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{6}$

c) $\frac{12}{18}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{12}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{4}{8}$

Imagen 26: Identificar fracciones equivalentes en secuencias y listas de fracciones. Libro de Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP, 2013a, p. 170).

3.3 Tratamiento de la equivalencia en el cuarto grado

El libro de texto de cuarto grado continúa con el enfoque del tercer grado, es decir, que no se presentan secuencias didácticas suficientes que favorezcan la construcción del concepto de **equivalencia de fracciones**. También en este grado el libro de Desafíos matemáticos presenta secuencias más estructuradas que las del libro de texto y que tienen como objetivo favorecer la construcción del conocimiento de fracciones. En estas secuencias se integran más representaciones y significados de las fracciones, como la recta numérica, longitudes, la relación parte-todo, parte de, es equivalente a... y no se indican definiciones estrictas ni procedimientos mecánicos, como en el libro de texto.

4. Presentación de las fracciones en el quinto grado

En el apéndice L se enuncian los conocimientos del quinto grado indicados en el plan y programa de estudios referentes a fracciones; especialmente del concepto de **equivalencia de fracciones**.

4.1 Libro de texto del alumno. Matemáticas. Quinto Grado

En el apéndice M se indican los contenidos de este libro del alumno que incluyen manejo de fracciones y especialmente del concepto de **equivalencia de fracciones**.

De acuerdo con lo indicado en el apéndice M, en el libro de texto se contabilizaron nueve lecciones

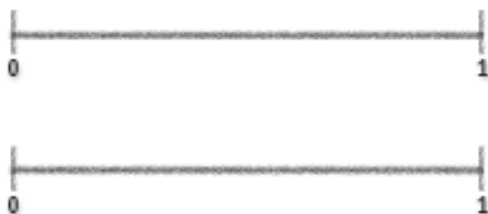
referentes al tema de fracciones de un total de 51, de las cuales:

- a) Cinco lecciones (2, 17, 38, 39 y 44) se refieren a temas generales de fracciones.
- b) Tres lecciones (13, 14 y 27) emplean el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo enuncian y ejemplifican al resolver los ejercicios.
- c) Una lección (25) es utilizada para dar a conocer el procedimiento para obtener fracciones equivalentes. Esta lección emplea de forma directa la definición de fracciones equivalentes al indicar y ejercitar el procedimiento consistente en multiplicar los elementos de la fracción por el mismo número y así obtener fracciones equivalentes.

Me enfocaré a analizar la única lección de este libro dedicada al concepto de *equivalencia de fracciones*; que se utiliza para conocer y ejercitar el procedimiento para encontrar fracciones equivalentes.

La lección 25 comienza resolviendo problemas, en uno se representan fracciones en la recta numérica y se comparan estas fracciones para establecer su orden. En otro problema se realiza un reparto y se representa el resultado también en una recta numérica (Imagen 27).

Con motivo de su cumpleaños, los amigos de Diana le organizaron una fiesta sorpresa. Elisa y Talía se encargaron de la decoración: cada una llevó cinta para adornar. El rollo de Elisa medía 3 m y el de Talía, 6 m. Elisa dividió su rollo en 5 partes iguales para hacer moños y Talía dividió el suyo en 10 partes iguales para colocar tiras entre los moños. Representa en una de las rectas numéricas la medida de los trozos de listón de Elisa y en otra recta, los de Talía.



¿Cuál trozo de listón es más largo, el de Elisa o el de Talía? _____

En parejas, lean los siguientes textos y resuelvan los problemas.

- 1.** Berenice y Sara también son amigas de Diana. Ellas llevaron las bolsas de dulces y apoyaron en la organización de la fiesta. Berenice llevó dulces para los niños y colocó 32 paletas en 8 bolsas. Sara llevó 64 caramelos para las niñas y los colocó en 16 bolsas. ¿Cuáles bolsas contenían más dulces, las de las niñas o las de los niños? _____
Expresa los resultados en fracciones y ubicalos en la recta numérica que a continuación se presenta:

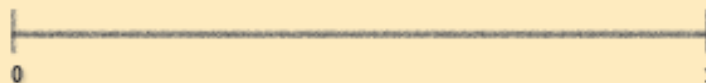


Imagen 27: Resolver problemas y representar las fracciones involucradas en la recta. Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 2010b, p. 85).

Otra actividad de esta lección es colorear en un conjunto de globos las fracciones que se indican y contestar preguntas referentes a esa representación gráfica (Imagen 28).

2. Colorea los siguientes globos como se indica: de rojo $\frac{3}{9}$ del total, de verde $\frac{6}{18}$ y de amarillo $\frac{9}{27}$.

♦ ¿De qué color habrá más globos? _____
 ♦ ¿Por qué? _____

Ubica las fracciones en la recta.

Imagen 28: Representar fracciones empleando conjuntos discretos. Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2010b, p. 86).

A partir de estas dos actividades se indica el procedimiento para obtener *fracciones equivalentes*: “Una forma de obtener fracciones equivalentes es multiplicar una fracción por un entero representado en forma de fracción” (Imagen 29).

Una forma de obtener fracciones equivalentes es multiplicar una fracción por un entero representado en forma de fracción.

Recuerda que un entero es igual a una fracción cuyo numerador es igual al denominador, es decir, $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \dots$

Por ejemplo, tenemos que $\frac{3}{5} \times 1$ equivale a multiplicar $\frac{3}{5} \times \frac{3}{3}$

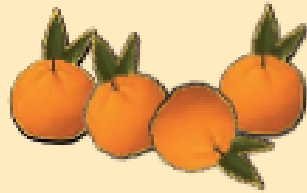
$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{3} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

Imagen 29: Procedimiento para obtener fracciones equivalentes. Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2010b, p. 86).

Otra actividad incluida en esta lección es resolver un problema que implica reparto y con base en la solución completar una tabla que represente en fracciones los diferentes repartos y contestar preguntas referentes a estos repartos (Imagen 30).

3. En parejas, realicen las siguientes actividades.

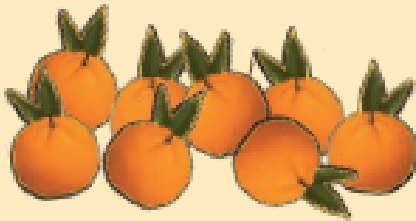
Ana llevó a la escuela 4 naranjas para repartirlas en partes iguales entre ella y 7 amigas.



a) ¿Qué fracción de naranja le tocó a cada una de las amigas de Ana? _____



c) Al llevar 8 naranjas y repartirlas entre 16 personas, ¿qué fracción de naranja le tocaría a cada una de ellas? _____



b) ¿Qué cantidad les correspondería a Ana y a sus 7 amigas si lleva 8 naranjas para repartir? _____



d) ¿Qué cantidad obtendrían si llevara 4 naranjas y las repartiera entre 15 amigos y ella? _____

Con los datos anteriores, completen la siguiente tabla.

Incisos	a	b	c	d
Niños	8			
Naranjas	4			
Naranjas por niño	$\frac{4}{8}$			

♦ ¿Cómo es la fracción del inciso **a)** respecto a la del inciso **c)**? _____
¿Por qué? _____

♦ ¿Cómo es la fracción del inciso **a)** respecto a la del inciso **d)**? _____
¿Por qué? _____

Imagen 30: Resolver problema de reparto para identificar fracciones equivalentes. Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2010b, p. 87).

Una actividad más de la lección es completar una tabla con las columnas: Fracción, Fracción entera por la que se multiplicó, Operación y Fracción equivalente, tomando como base un ejemplo resuelto. De esta manera encontrar fracciones equivalentes multiplicando numerador y denominador por el mismo número. Y escribir cuatro fracciones equivalentes a una fracción dada, aplicando el procedimiento señalado en el ejemplo resuelto. (Imagen 31).

4. Observa la primera fila de ejemplo y completa la tabla.

Fracción	Fracción entera por la que se multiplicó	Operación	Fracción equivalente
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$
		$\frac{3}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{12}$	$\frac{6}{12}$
$\frac{1}{2}$			$\frac{5}{10}$
	$\frac{4}{4}$		$\frac{12}{16}$
$\frac{2}{3}$			$\frac{10}{6}$
$\frac{2}{3}$			$\frac{15}{18}$

✦ Escriban cuatro fracciones que sean equivalentes.

a) $\frac{3}{7} = \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$

b) $\frac{4}{5} = \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$

Imagen 31: Tabla para encontrar fracciones equivalentes. Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2010b, p. 88).

La lección se continúa con la comparación de pares de fracciones anotando el signo mayor que (>), menor que (<) o igual (=) según corresponda (Imagen 32).

Compara las fracciones y escribe en el recuadro el signo >, < o =, según sea el caso. Después, acomoda las fracciones en una recta.

$\frac{3}{5} \square \frac{10}{20}$

$\frac{2}{3} \square \frac{3}{4}$

$\frac{2}{6} \square \frac{2}{5}$

$\frac{7}{8} \square \frac{5}{6}$

$\frac{1}{3} \square \frac{3}{9}$

Imagen 32: Comparar pares de fracciones. Libro del Alumno Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2010b, p. 88).

Para concluir la lección y el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en este libro, de alguna manera se formaliza el procedimiento para obtener fracciones equivalentes e identificar cuándo una fracción es mayor que otra. (Imagen 33).

Una forma de comparar dos fracciones entre sí es expresarlas como fracciones equivalentes de tal manera que ambas tengan el mismo denominador.

Por ejemplo, en las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{6}$ para saber qué fracción es mayor puede hacerse lo siguiente: multiplicar ambas fracciones por un entero, de tal forma que el denominador común sea 30.

$$\frac{3}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{18}{30} \qquad \frac{4}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{20}{30}$$

De este modo podemos ver que $\frac{3}{5} < \frac{4}{6}$ porque al comparar sus respectivas fracciones equivalentes vemos que $\frac{18}{30} < \frac{20}{30}$.



Imagen 33: Formalización del procedimiento para obtener fracciones equivalentes. Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP, 2010b, p. 89).

Para concluir el análisis de este currículo se revisará el libro de Desafíos Matemáticos.

4.2 Desafíos Matemáticos. Alumno. Quinto Grado

El apéndice N indica los contenidos de los Desafíos Matemáticos de quinto grado que incluyen los contenidos de fracciones y específicamente el concepto de *equivalencia de fracciones*.

En este libro de Desafíos, especificado en el apéndice N, se contabilizaron de un total de 97 desafíos, trece referentes al tema de fracciones, de los cuales:

- Ocho desafíos (1, 20, 21, 36, 63, 64, 80 y 81) se refieren a temas generales de fracciones.
- Cinco desafíos (2, 37, 38, 61 y 62) emplean el concepto de *equivalencia de fracciones*, es decir, lo mencionan y utilizan al resolver los ejercicios y actividades.

En este libro de Desafíos no se identificó algún desafío que incluya de forma directa el desarrollo

o tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones*, por lo que no se presentará ningún análisis de actividades de este material bibliográfico.

4.3 Tratamiento de la equivalencia en el quinto grado

El libro de texto de matemáticas de quinto grado no contiene lecciones que desarrollen o refuercen directamente el concepto de *equivalencia de fracciones*, lo hace de manera tangencial, a través de una lección que nos permite identificar el uso mecánico del procedimiento para encontrar fracciones equivalentes al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número y aplicar dicho procedimiento al realizar operaciones con fracciones. Con la secuencia de actividades presentadas en esta lección no se propicia la construcción del procedimiento para encontrar fracciones equivalentes, ni la aportación de procedimientos espontáneos por parte de los alumnos.

El libro de Desafíos tampoco incorpora algún tratamiento directo del concepto de *equivalencia de fracciones* sólo se incluye una aplicación de dicho concepto al resolver operaciones con fracciones de diferente denominador y ejercitar el algoritmo indicado en el libro de texto.

Por el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en los libros de quinto grado de matemáticas observo que sólo es una aplicación del mismo en ejercicios y procedimientos que los alumnos debieron adquirir en los grados antecedentes previos (tercero y cuarto).

5. Conclusiones del currículo introducido en 2011.

En el análisis específico del concepto de *equivalencia de fracciones* no observé una presentación, un desarrollo o una secuencia de actividades que favorezcan la construcción del concepto, tampoco fomenta el aprendizaje y la comprensión de un contenido más amplio como son las fracciones. Identifiqué que la cantidad y tipo de representaciones utilizadas en las lecciones deberían estar mejor definidas y especificadas, pues los apoyos gráficos de figuras planas son mínimos y en algunos casos confusos, como cuando las figuras no son polígonos regulares y las partes en que se dividen no son equitativas. La representación en todos continuos no están bien establecidas y la representación de fracciones como puntos en la recta numérica es escaso.

Las interpretaciones de fracciones utilizadas son las de parte-todo, como resultado de repartos, o empleando magnitudes como el peso, volumen y longitud. Debido a todo esto, no pude identificar que en este currículo se desarrolle sistemáticamente el concepto de fracción a través de las diversas representaciones, interpretaciones o significados de las fracciones. De hecho, no es posible identificar una secuencia didáctica dónde se manejen gradualmente estos elementos de las fracciones y permitan la construcción del conocimiento. Tampoco se observa una secuencia didáctica bien definida para el concepto de *equivalencia de fracciones*.

Para resolver operaciones entre fracciones y establecer su orden, esta propuesta curricular indica el uso de fracciones equivalentes a través de procedimientos rigurosos y definiciones que en algunos casos son confusas y las operaciones no se realizan de manera informal ni se socializan estas formas para llegar a una convencional, como lo indica el plan de estudios en sus propósitos,

incluso pude identificar que el proceso de aprendizaje, según las actividades propuestas en las lecciones, es con frecuencia inverso al sugerido.

Las aplicaciones del concepto de *equivalencia de fracciones* en otros contenidos matemáticos como la probabilidad, las escalas o los porcentajes, entre otros, están ausentes o no se muestra una vinculación adecuada entre estos.

Las definiciones de *equivalencia de fracciones* y procedimientos para obtenerlas se dan de forma poco estructurada y con una secuencia de actividades que no favorecen el aprendizaje en los alumnos, pues estas actividades sugeridas no apoyan la construcción de los conocimientos o de los procedimientos informales o espontáneos.

Por todos los aspectos mencionados identifiqué que en este periodo se retoman ciertos aspectos del currículo de 1960 como: la memorización, los procedimientos estrictos, lo cual sería un retroceso y una falta de conocimiento en las investigaciones realizadas en educación matemática durante las últimas décadas, específicamente las referentes a fracciones.

En conclusión, existe cierta desarticulación entre todos los elementos de este currículo, como son la estructura, el enfoque metodológico o didáctico y las secuencias de actividades, en lo que al contenido de fracciones corresponde. Todos los puntos mencionados me permitieron identificar un enfoque didáctico o pedagógico inconsistente con el plan de estudios 2011. No identifiqué una secuencia estructurada, congruente, ordenada o definida en la enseñanza de las fracciones y específicamente en el concepto de *equivalencia de fracciones*. Me resultó muy complicado hacer el análisis de este currículo, que resultó ser muy general, comparado sobre todo con los currículos de 1972 y de 1993, en este identifiqué únicamente las lecciones que refieren directamente al tema de investigación y haciendo algunos comentarios, sin realizar un análisis detallado.

Tampoco hay congruencia total entre el plan y programas de estudio, los libros de texto del alumno y los materiales de apoyo para el docente. Esto es contrario a lo observado en las propuestas curriculares anteriores donde es evidente un enfoque, una estructura, una orientación teórica y didáctica, de acuerdo a su tiempo y su contexto.

Al revisar la secuencia de algunas actividades de las lecciones referentes a las fracciones, observé que en su mayoría, no están presentes las situaciones que promuevan la construcción de conocimientos; el orden y distribución de estas actividades tampoco me parece que propicien dicha construcción; en algunas secuencias el planteamiento y los objetivos de las situaciones resultan confusos; los conceptos, definiciones y procedimientos mostrados en estos libros tampoco son un apoyo para generar un razonamiento adecuado en el alumno, mucho menos me que favorezcan la elaboración de un procedimiento convencional basado en cuestiones espontáneas o informales.

Respecto a las representaciones concretas de las fracciones, encontramos que son muy pocas, básicamente el uso de papel y cartulina; en su mayoría se concentran en apoyos gráficos con figuras planas y dibujos de objetos y en algunos casos se podría generar confusión más que proporcionar un apoyo para lograr el aprendizaje en los alumnos.

En muy pocas situaciones se considera la recta numérica, y cuando ésta se incluye, por ejemplo, en el libro de texto del alumno de quinto grado de matemáticas se da la siguiente descripción en un recuadro: “Una fracción puede ubicarse en la recta numérica si se conoce: • la ubicación del cero y la unidad, o • la ubicación del cero y la de una fracción cualquiera, o • la ubicación de cualquier pareja de números”. (SEP. 2010b, p. 46). Esta descripción muestra poca claridad para realizar la ubicación de una fracción como punto en una recta y si se toma como una forma convencional de hacerlo puede ser más una confusión que un apoyo para lograr un aprendizaje.

Los significados de las fracciones se focalizan en el de parte–todo, haciendo consideración mínima de otros como razón, proporción, cociente u operador. En currículos anteriores, sobre todo en los de 1972 y 1993, se considera mayor número de significados y se construye el concepto de *equivalencia de fracciones* de una forma más estructurada.

En términos generales, el currículo de 2011 presenta muchas áreas de oportunidad que nos permitirán a los docentes realizar de manera autónoma más y mejores actividades que apoyen la construcción de los conocimientos en el contenido de fracciones y en específico del concepto de *equivalencia de fracciones*.

Conclusiones Generales

Los currículos se analizaron bajo la misma metodología y preguntas de investigación. En los currículos de 1960 y 1972 es importante destacar que fueron implementados cuando aún no existían investigaciones en educación matemática y tampoco referentes a la enseñanza de las fracciones. Por lo que, en esta investigación estos currículos podrían mostrarse limitados en algunos aspectos de la educación matemática, lo cual sería erróneo pues están contextualizados por el tiempo y condiciones en que fueron desarrollados.

Con base en las preguntas de investigación planteadas en esta investigación sobre el tratamiento del concepto de *equivalencia de fracciones* en los currículos de la educación primaria mexicana de 1960 a 2011, a continuación indico los aspectos más relevantes de cada currículo.

Currículo de 1960

Los significados de las fracciones utilizados en esta propuesta curricular fueron: parte-todo, razón y proporción.

Las representaciones de las fracciones fueron mínimas y poco variadas, en algunos grados incluso las consideraría como únicas; entre estas representaciones estuvieron las figuras planas (círculos, cuadrados y rectángulos) y dibujos de frutas (manzanas).

En las secuencias didácticas que caracterizaron este currículo se encontró que se fomentó la habilidad para el cálculo mecánico, la memorización de reglas y procedimientos y se presentó una gran cantidad de ejercicios que apoyaron dicha mecanización y memorización, los ejercicios propuestos estuvieron descontextualizados en la mayoría de los casos.

En las aplicaciones y usos del concepto de *equivalencia de fracciones* encontré que ésta se utilizó para: resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador; simplificar resultados de operaciones con fracciones; encontrar escrituras equivalentes entre fracciones comunes y fracciones decimales y en el cálculo de porcentajes e interés simple. La aplicación en resolución de problemas fue mínima.

Con este enfoque se dan algunas definiciones o formalizaciones referentes al concepto de *equivalencia de fracciones*. Por ejemplo:

Equivalencia: "*Toda fracción puede convertirse en otra de igual valor*". Dos fracciones son iguales [tienen igual valor] si son "*de igual tamaño y forma*" [Por tamaño y forma refiere a una representación en alguna figura plana]. (SEP, 1969a, p.46)

Procedimientos para obtener fracciones equivalentes: "*El valor de un quebrado no se altera si tanto el numerador como el denominador se dividen o multiplican por el mismo número*". (SEP, 1969a, p. 47)

"*Simplificar fracciones es transformarlas en otras, equivalentes, pero de términos más sencillos. Se hace la operación dividiendo ambos términos entre un mismo número*". (SEP, 1969a, p.50)

De manera general, en este currículo:

- Se transmitieron las definiciones de manera enunciativa, en su mayoría sin o con mínimos apoyos gráficos, que fomentaban la memorización de conceptos.
- Se proporcionó una cantidad considerable de ejercicios que de alguna forma impulsaron la mecanización.
- Los algoritmos se enunciaban de manera directa en el libro y el cuaderno de trabajo para una aplicación mecánica, sin fomentar procesos espontáneos o inductivos, que promovieran su generación y comprensión.

Currículo de 1972

En este currículo se consideraron más significados de la fracción que en la propuesta anterior, estos fueron: parte – todo (como fragmento de un objeto o como una agregación de fragmentos de uno o varios objetos iguales), como operador multiplicativo y la fracción como cociente.

También las representaciones de las fracciones se incrementaron con respecto al currículo de 1960. Se contemplaron desde dibujos de objetos como: frutas: limones, naranjas, sandías, pétalos de flores, estrellas y tabletas de chocolate, figuras planas como círculos, cuadrados, triángulos, cruces, rectángulos, pentágonos, rombos y hasta lo más destacado y utilizado en esta propuesta, que fue la fracción como punto en la recta numérica.

Las situaciones utilizadas para contextualizar el tratamiento de las fracciones fueron: reparto, medición, proporción o partes de un todo.

La enseñanza del concepto de equivalencia se realizó fundamentalmente empleando repartos de objetos entre un cierto número de personas, duplicando o triplicando estas cantidades de objetos y personas y empleando representaciones gráficas como círculos y la recta numérica.

Se desarrollan dos procedimientos para obtener fracciones equivalentes: productos cruzados y multiplicar o dividir los términos de la fracción por un mismo número entero.

En las aplicaciones y usos del concepto de equivalencia de fracciones se destacaron: resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador, establecer orden entre fracciones ($>$, $<$ o $=$), expresar probabilidad, escalas y para identificar y relacionar fracciones con números decimales. En este concepto se incluyeron pocos problemas. Mediante preguntas en cada una de las lecciones, se buscó promover el razonamiento de los alumnos, ya que se buscaba que a partir de ejemplos ellos infirieran los conceptos y los procedimientos.

La definición y formalización referentes al concepto de *equivalencia de fracciones*, en las que también se indica el procedimiento para obtenerlas, fue la siguiente:

Equivalencia: “*si tenemos dos fracciones tales que el numerador y el denominador de una de ellas se obtiene multiplicando (o dividiendo) por el mismo número el numerador y el denominador, respectivamente de la otra, las fracciones son exactamente lo mismo.*”(SEP, 1972a, p.13)

Como puntos sobresalientes de este currículo tenemos:

- La obtención de las definiciones y los procedimientos fue de una forma razonada a través de la realización de ejemplos y ejercicios, es decir, con un cierto grado de mecanización,

- primero se mostraban los ejemplos y ejercicios y posteriormente se formulaba la definición con base en varios ejemplos. De esta manera se dice que lograban la inferencia de los conceptos, es decir, los conocimientos se desarrollaban de lo particular a lo general.
- El número de apoyos gráficos fue muy superior al currículo de 1960, se incluyó de manera enfática la representación de las fracciones como puntos en la recta numérica.
 - Muchos problemas se representaron en la recta numérica o figuras planas para comprenderlos y encontrar las soluciones.
 - En general se pretendía lograr procesos de aprendizaje que tuvieran como resultado algún concepto o procedimiento, mediante preguntas enfocadas que buscaban que los alumnos los infirieran.
 - Se destaca la importancia y aplicación del concepto de *equivalencia de fracciones* en otros contenidos de matemáticas, como la probabilidad.

Currículo de 1993

Los significados de las fracciones considerados en este currículo fueron varios: parte – todo (todo continuo y discreto), fracción como cociente de dos números, fracciones como relaciones o razones y fracciones como operadores.

Las representaciones utilizadas para el aprendizaje de las fracciones fueron: figuras planas (rectángulo, cuadrado, círculos, polígonos regulares), dibujos de objetos (pasteles, barras de chocolate, frutas), fracciones en magnitudes continuas (peso, longitud y volumen) y en conjuntos discretos (frutas, dulces, semillas, artículos domésticos).

En las secuencias didácticas se utilizó: material concreto como hojas de papel y cartulina, por ejemplo para la elaboración de banderas de diferentes países y listones o cuerdas para medir, o tiras de adornos para algún festival. También se utilizaron situaciones de reparto de todos continuos (galletas, pizzas, pasteles) y conjuntos discretos (tacos, una docena de frutas, una caja con chocolates) y las fracciones se asociaron además a magnitudes como el peso, la capacidad o la longitud (kilogramos, litros y metros).

Las aplicaciones del concepto de *equivalencia de fracciones* las encontramos en: medidas a escala, diferentes formas de escribir números decimales, porcentajes, operaciones con números fraccionarios de diferente denominador y para simplificar resultados de operaciones con fracciones.

En cuanto a las definiciones o formalizaciones que involucraron el concepto de *equivalencia de fracciones*: se encontró que el concepto se construyó con base en situaciones de reparto (por ejemplo 4 pizzas entre 6 niños), donde se duplican las cantidades iniciales (de niños y de pizzas) para inferir que una fracción es equivalente a otra si es múltiplo de la primera fracción. No se dan definiciones directas, se fomenta que el alumno las construya.

También se trabajó la idea de cuántas veces cabe una cantidad en otra (medición), ya sea longitud, área o volumen, usando diferentes unidades para hacer la comparación. En este caso los alumnos infieren el concepto de equivalencia porque “distintos resultados” (medidas) corresponden a magnitudes que ocupan el mismo espacio, longitud o volumen, o se ubican en el mismo lugar en la recta numérica.

Se desarrollan y utilizan los dos procedimientos para obtener fracciones equivalentes: el de productos cruzados entre fracciones y el de multiplicar o dividir los términos de la fracción por el

mismo número.

En este currículo se destacan los siguientes puntos:

- ⊕ Se omitieron casi en su totalidad las definiciones y procedimientos estrictos, memorísticos y mecánicos.
- ⊕ El número de representaciones de las fracciones se incrementó y se enfatizó en todos continuos y conjuntos discretos para la adquisición del concepto de equivalencia de fracciones.
- ⊕ Se incluyeron significados como parte-todo, fracciones como cociente a/b y como operador, entre otros.
- ⊕ Las situaciones de reparto y después las de medición de longitud y capacidad fueron el principal contexto para trabajar la equivalencia de fracciones.
- ⊕ Durante el desarrollo de esta propuesta curricular, se contaba ya con muchas investigaciones sobre educación matemática, principalmente sobre las fracciones y su aprendizaje, y esto ayudó a que se incluyeran materiales concretos muy variados, así como elementos que fomentaran en el alumno la construcción de conocimientos, y el planteamiento y resolución de situaciones problemáticas.
- ⊕ No se indican definiciones ni procedimientos únicos ni estrictos para desarrollar y aplicar el concepto de equivalencia de fracciones, sino que a través de procesos informales se institucionaliza dicho concepto.
- ⊕ Todos los ejercicios y actividades están contextualizados en situaciones que se suponen de interés para los alumnos.
- ⊕ La aplicación del concepto de equivalencia de fracciones fue la más amplia de los tres currículos analizados hasta aquí, pues incluyó todos los aspectos de matemáticas como: probabilidad, escala, razón y proporción, porcentaje y cociente.

Currículo de 2011

En los significados de las fracciones en este currículo, se identifica de manera indefinida los de: parte – todo y razón (en situaciones de proporcionalidad).

En las representaciones de las fracciones se encuentran: apoyos gráficos de figuras planas (triángulo, rectángulo, trapecio, círculo, cuadrado) de manera mínima, también se usan dibujos de objetos (figuras libres, tréboles, corazones, estrellas, peras, pétalos de flor), fracciones como puntos en segmentos de recta y en conjuntos discretos (globos, manzanas, naranjas, pizzas) y en muy pocos casos se emplean magnitudes.

Las situaciones didácticas para desarrollar el concepto de equivalencia que se utilizan son: repartos de hojas de papel, cartulinas, pasteles o pizzas entre cierto número de niños o personas y secuencias numéricas de fracciones. En este concepto se comparan fracciones utilizando la expresión: es equivalente a...

No está definida una aplicación específica del concepto de ***equivalencia de fracciones***, pues en ningún caso se identificó como sugerencia al resolver situaciones o problemas de fracciones la aplicación de este concepto.

En las definiciones y formalizaciones que involucran el concepto de equivalencia, se encuentra lo siguiente:

La definición de fracciones equivalentes se da a través de una situación de reparto y una representación gráfica mediante círculos indicando: “*Las fracciones que representan la misma cantidad reciben el nombre de fracciones equivalentes*”. (SEP, 2010c, p.117). También se indica la siguiente: “*Una fracción puede expresarse de diferentes maneras, ya sea sumando una misma fracción o diferentes fracciones. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ puede expresarse como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, entre muchas otras formas*”. (SEP, 2010a, p.86). La forma inicial para la enseñanza de la equivalencia de fracciones se realiza mediante comparación de longitudes y empleo del término “*es equivalente a...*”. (SEP, 2013a, p. 96). El procedimiento para obtener fracciones equivalentes, se señala como: “*Una forma de obtener fracciones equivalentes es multiplicar una fracción por un entero representado en forma de fracción*” (SEP, 2010b, p.86).

En síntesis y de manera general en este currículo:

- Los apoyos gráficos de figuras planas son mínimos y en algunos casos confusos.
- La representación mediante todos continuos no está bien establecida.
- El uso de puntos para representar fracciones en la recta numérica es escaso y en algunos grados nulo.
- Existe una estructuración del conocimiento no convencional y en algunos casos no sistemática, por lo tanto me parece que no se promueve adecuadamente la construcción del conocimiento relacionado con las fracciones y la equivalencia de fracciones.
- En general, existen muchas incongruencias en las secuencias de actividades, contenidos, definiciones, procedimientos y ejercicios.
- Para la enseñanza de las fracciones y el concepto de equivalencia no se observó que se estén considerando las investigaciones realizadas en educación matemática el respecto.

Para finalizar, como resultado general del análisis realizado en los currículos de 1960 a 2011, menciono los siguientes puntos:

- Cada propuesta curricular fue realizada en un contexto histórico, político y social del tiempo en que se desarrolló.
- En todas las propuestas se observa que tiene una importancia considerable el concepto de equivalencia de fracciones pues se desarrollan algunas lecciones que tratan su contenido.
- El desarrollo del concepto, nivel de aplicación y forma de enseñarlo depende del enfoque de cada currículo.
- Las interpretaciones y representaciones de las fracciones se fueron incrementando y mejorando, basadas en el avance de las investigaciones en educación matemática, excepto en el currículo de 2011, en el que no se observa una estructura definida.
- Las definiciones del concepto de equivalencia de fracciones y los algoritmos son parte de los contenidos de cada currículo, la diferencia está en la forma en que desarrolla el conocimiento y en la aplicación que se promueve de dicho concepto.

Sería recomendable para otro proyecto de investigación realizar una propuesta de la enseñanza del concepto de ***equivalencia de fracciones***, considerando todos los puntos señalados en este trabajo destacando las actividades favorables para lograr el aprendizaje del concepto de investigación.

Referencias

- Ávila, A. (1988). *La enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México; su psicopedagogía y transformación (1944-1986)*. México: Universidad Pedagógica Nacional. (Colección de cuadernos de cultura pedagógica. Serie Investigación núm. 6).
- Ávila, A. (2006). La ostensión como base de la actividad frente a una vieja concepción de la fracción. En *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.
- Baldor, A. (1983). *Algebra*, (p. 28). México: Editorial Patria.
- Behr, M.J.; Lesh, R.; Post, T., y Silver, E.A. (1983): [Rational-Number Concepts] en *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Lesh, R. Y Landau M. (Ed.). Nueva York: Academic Press.
- Conaliteg, Historia (s.a.). Recuperado el 22 de noviembre de 2014, de Conaliteg. Sitio web: <http://www.conaliteg.gob.mx/index.php/inicio/historia>.
- Dávila, M. (1992). El reparto y las fracciones. *Educación Matemática*, vol. 4, núm. 1 (pp. 32-45).
- Dienes, Z. (1972). Introducción. En *Fracciones* (pp. 8-9). México: Varazen.
- Dickson, L.; Brown, M.; y Gibson, O.; (1984). *Children Learning Mathematics*. Londres: Cassell Education.
- INEE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación) (2013). *México en PISA 2012*. (1ª ed. Tabla 2.1 p. 36) México: INEE.
- INEE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación) (2015). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea). Resultados nacionales 2015. Sexto de primaria y tercero de secundaria. Lenguaje y comunicación y Matemáticas. p. 10, INEE. México.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. [Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas] Traducción de Luis Puig (2001). En: Varios Autores. Textos seleccionados. México: Cinvestav.
- Freudenthal, H. (1983). Fractions. En *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (pp. 133-177). New York, USA: Kluwer Academic Publishers.
- Hart, K. (1981). Fractions. En *Children's Understanding of Mathematics*. (66-81). London: John Murray.
- Kieren, T.E. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers; en Lesh, R. (ed); *Number and measurement: Papers from a research workshop: ERIC/SMEAC*.
- Kieren, T.E. (1981) Five faces of mathematical knowledge building; Edmonton, Department of Secondary education, University of Alberta.
- Kieren, T.E. (1983) La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales. *Proceeding of Fourth International Congress on Math. Education*, (506-508).
- Kieren, T.E. (1988) Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development; en Hiebert, I. & Behr, M.; *Number Concepts and Operations in the Middle Grades; Research Agenda for Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates, National Council Teachers of Mathematics.
- Llinares, S. & Sánchez, V. (2000). La relación parte-todo. En *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
- Mancera, E. (1992). Significados y Significantes relativos a las fracciones en *Educación Matemática*. vol. 4. núm. 2. (30-53). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Mochón, S. (s.a.). Fracciones: Algo más que romper un todo, Sección de Matemática Educativa del Cinvestav. México (Documento no publicado).
- Parra, C. & Saiz, I. (Comps) (2009). Los diferentes roles del maestro. En *Didáctica de las matemáticas: Aportes y Reflexiones* (pp. 65-66). Madrid: Piados Ibérica.
- Peterson, J. & Hashisaki, J. (1998). *Teoría de la Aritmética* (pp. 200-206), México: Limusa.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1961a). *Mi cuaderno de trabajo de cuarto año de Aritmética y Geometría de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1961b). *Mi cuaderno de trabajo de quinto año de Aritmética y Geometría de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1964). *Programas de educación Primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*. (4ª. ED.) México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1969a). *Mi libro de cuarto año de Aritmética y Geometría de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1969b). *Mi libro de quinto año de Aritmética y Geometría de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1972a). *Auxiliar Didáctico. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1972b). *Auxiliar Didáctico Matemáticas. Quinto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1972c). *Libro de Texto Gratuito Matemáticas. Quinto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1974a). *Auxiliar Didáctico. Matemáticas. Tercer Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1974b). *Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1974c). *Libro del Alumno. Matemáticas. Tercer Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1982). *Libro del Maestro. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1993). *Plan y programas de estudio de educación básica primaria*. México: Fernández Editores.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994a). *Avance Programático. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994b). *Avance Programático. Quinto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994c). *Avance Programático. Tercer Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994d). *Libro del Alumno. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994e). *Libro del Alumno. Matemáticas. Tercer Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994f). *Libro Para el Maestro. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994g). *Libro Para el Maestro. Matemáticas. Tercer*

- Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1994h). *Planes y Programas de Estudio 1993*. México: Conaliteg
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1995a). *Fichero. Actividades Didácticas. Matemáticas. Cuarto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1995b). *Fichero. Actividades Didácticas. Matemáticas. Quinto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (1995c). *Libro Para el Maestro. Matemáticas. Quinto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2000). *Libro del Alumno. Matemáticas. Quinto Grado de Educación Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2009). *Programas de estudio 2009. Tercer grado. Educación básica Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2010a). *Matemáticas. Cuarto grado*. México: Dirección General de Materiales Educativos (DGME-SEP).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2010b). *Matemáticas. Quinto grado*. México: Dirección General de Materiales Educativos (DGME-SEP).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2010c). *Matemáticas. Tercer grado*. México: Dirección General de Materiales Educativos (DGME-SEP).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Cuarto Grado*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto Grado*. México: Conaliteg. SEP. (2012). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Quinto Grado*, México: Dirección General de Materiales Educativos (DGME-SEP).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2013a). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto Grado*. México: Dirección General de Materiales Educativos (DGME-SEP).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2013b). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Tercer Grado*. México: Dirección General de Materiales Educativos (DGME-SEP).
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2014). *Libros de texto gratuitos Ciclo escolar 2014-2015 Catálogo*. México: Conaliteg.
- SEP (Secretaría de Educación Pública). (2015). *Libros de texto gratuitos Ciclo escolar 2015-2016 Catálogo*. México: Conaliteg.
- Streefland, L. (1978); Some observations results concerning the mental construction of the concept of fraction; *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 9.
- Villa L. (2009). *Cincuenta años de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos: Cambios y permanencias en la educación mexicana*. México: Conaliteg.

Apéndice A

Actividades y contenidos de fracciones en el tercer grado. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP. 1994e).

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
I.3	Banderas de colores	12-13	Dividir en dos partes iguales un pliego de papel para forrar dos cajas e iluminar con colores diferentes cada parte (medios) Dividir en cuatro partes tres pliegos de papel de colores, uno rojo, uno blanco y uno verde para elaborar cuatro banderas de México. (Cuartos). Dividir tres pliegos de papel para realizar dos banderas. (medios) Dividir tres pliegos de papel para realizar ocho banderas y otros tres pliegos para tres banderas (octavos y tercios)	Uso de fracciones para expresar medidas de superficie al segmentarlas, sin utilizar lenguaje, ni escritura de fracciones. Representar fracciones dividiendo pliegos de papel en medios, cuartos, octavos y tercios, sin utilizar lenguaje, ni escritura de fracciones.	En cada una de las actividades se deben responder preguntas de reflexión sobre el aspecto trabajado.
I.8	Las trenzas de Mónica	22-23	Dividir un listón de un metro de longitud en dos partes iguales y 3 metros en dos partes iguales (medios). Dividir un metro de listón en cuatro partes iguales (cuartos) y unir dos partes (dos cuartos). Cortar una hoja por la mitad (medios). Identificar diferentes formas de dividir en medios e identificar medios con base en la igualdad de superficies Comparar mitades de hojas de diferentes tamaños. Identificar que un medio se puede representar en diferentes unidades y en diferentes tamaños.	Partición de listones de diferentes longitudes en mitades empleando el término mitad para expresar medios. Partición de cuartos y unión de cuartos para formar medios. Uso espontáneo del lenguaje de fracciones. Diferentes formas de representar medios en superficies rectangulares.	En cada una de las actividades se deben responder preguntas de reflexión sobre el aspecto trabajado Comprobar con superposición de material concreto si las partes son medios o no.
I.14	El calendario	34-35	Observar un calendario (febrero de 2007). Asociar a las fechas del calendario la parte del grupo que asistió ese día. Por ejemplo: Asistió la cuarta parte del grupo: _____. Por medio de algunas preguntas que orienten a identificar medios y cuartos de un grupo de alumnos, indicar en base a ciertos datos del grupo, cuánto es la mitad o un cuarto del grupo.	Fracciones como partes de un conjunto discreto; mitades y cuartos. La lección no aborda de manera significativa el contenido de fracciones, se abordan otros temas.	En la lección se aborda el calendario como contexto para identificar partes de n conjunto discreto.

Continúa

Apéndice A. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
I.22	Un paseo por el zoológico	54-55	Reparto de un frasco de jugo, 8 tacos y 9 mandarinas entre 4 niños e identificar qué parte le tocó a cada uno (cuartos) Contestar algunas preguntas al respecto. Dibujar un pastel y dividirlo en cuatro partes iguales (cuartos) Repartir una barra de chocolate entre cuatro niños y hacer lo mismo con otra barra (cuartos)	Fracciones como resultado de un reparto de conjuntos discretos. Repartir en cuartos una superficie representada en un pastel. Repartos en cuartos y su representación mediante un dibujo.	Se continúa sin utilizar el lenguaje de fracciones. También se hacen repartos a través de fraccionar "todos continuos".
II.29	El gato	68-69	Analizar juegos en los que interviene o no el azar y en la última actividad: Se plantea la situación de repartir tres caramelos entre cuatro personas y representar mediante un dibujo este reparto. (Cuartos). Reparto de tres caramelos entre cuatro niño. Reparto en cuartos.	Realización y análisis de juegos en los que interviene o no interviene el azar. Sólo la última actividad aborda fracciones a través de un reparto.	La lección trata principalmente de juegos de azar y no azar.
III.38	El establo	90-91	Identifica el litro como medida de capacidad y los diferentes recipientes que se pueden usar para obtener cierta cantidad de litros. Por ejemplo, ¿Cuántos vasos pueden llenarse con un litro de agua? (cuartos)	Las fracciones como medidas de capacidad. Uso de medios y cuartos para completar cierta cantidad de litros.	Introducción del lenguaje de fracciones de $1/2$ y $1/4$ asociadas a unidades de capacidad.
III.39	Quesos y Crema	92-93	Dividir un queso y un litro de leche en medios y cuartos y encontrar cuál sería el costo de cada parte, tomando como base el precio de la unidad (medios y cuartos) Calcular total de artículos comprados y su costo. Resolver problemas que impliquen reparto de una unidad. (medios y cuartos) Introducción de la escritura de fracción como formalización del lenguaje utilizado.	Fracciones de cantidades discretas y continuas. Uso de la escritura convencional de $1/2$ y $1/4$. Escritura de medios y cuartos y resolución de problemas. Escritura formal de fracciones. (Medios y cuartos).	Introducción a la suma de cantidades discretas resultado de fraccionarlas en medios y cuartos. Lenguaje formal de fracciones en situaciones de medidas (peso y capacidad)
III.47	Escucha y corre	108-109	Realizar un juego similar al "Stop" para identificar longitudes en metros y centímetros. Calcular "a ojo" cuántos centímetros hay entre dos objetos Calcular "a ojo" cuántos centímetros tiene de largo y ancho de algún objeto. La lección no desarrolla algún otro aspecto de las fracciones, sólo identifica fracciones del metro.	Uso de las fracciones un medio y un cuarto de metro para medir longitudes.	Aplicación de fracciones del metro para estimar longitudes.

Continúa

Apéndice A. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
IV.58	Miel y fruta seca	134-135	<p>Identificar en dibujos ¿Cuántos kilogramos marca la manecilla de una báscula?</p> <p>Indicar el costo en pesos de un litro, de 1/2 litro y de 1/4 de litro de miel.</p> <p>Indicar cuántas nueces hay en media docena o un cuarto de docena.</p> <p>Observar las ilustraciones y comparar lo que se compró de miel - 3/4 o 1/2 - y cual es más. Indicar si 2/4 y 1/2 representan lo mismo.</p> <p>Contestar preguntas sobre si pesa lo mismo, o si pesa más 1/2 kg o 1/2 kg de diferentes productos y 1/2 con 2/4. Se incluye la afirmación siguiente: "1/2 litro es lo mismo que 2/4 de litro; 1/2 kilo es la misma cantidad que 2/4 de kilo".</p> <p>Por medio de representaciones con litros y kilos, se infiere el concepto de equivalencia de $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.</p>	<p>Calcular el costo de medios y cuartos de un litro.</p> <p>Se introduce de manera informal el concepto de la equivalencia entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$.</p> <p>Introducción del concepto de equivalencia de fracciones.</p>	Fracciones de cantidades discretas y continuas.
IV.60	Juguetes de madera	138-139	<p>Comparar tiras de diferentes colores y de diferentes tamaños para indicar cuál es más larga que otra y cuántas veces cabe una en otra.</p> <p>Usando el material recortable indicar cuántas veces cabe una tira de determinado color en otra.</p> <p>Revisar el procedimiento indicado en el libro que sirvió para comparar el tamaño de las tiras y contestar las preguntas.</p>	La fracción como parte de la unidad o como "las veces que una parte cabe en otra"	<p>Introducción al concepto de equivalencia a partir de saber qué número de veces cabe una tira en otra.</p> <p>Comparación de fracciones</p>
IV.62	Compartir con los amigos	142-143	Repartir diferentes cantidades de objetos como 3, 20, 15, 5 y 15 entre cuatro niños en forma gráfica y contestar preguntas referentes al reparto.	Situaciones de reparto exhaustivo y no exhaustivo.	Reflexión sobre qué objetos se pueden partir y cuáles no para hacer repartos exhaustivos.
IV.65	La ardilla, el chapulín y el sapo	148-149	<p>Observar el dibujo de un camino que representa 18 metros y señalar los saltos de 1 metro, 1/2 metro y 1/4 de metro.</p> <p>Marcar con líneas de diferentes colores los saltos de 1 metro, 1/2 metro y 1/4 de metro.</p> <p>Anotar el número de saltos para llegar a los 18 metros, empleando los saltos de un metro, 1/2 metro y 1/4 de metro y contestar algunas preguntas.</p>	<p>Comparación de fracciones con enteros sobre el dibujo de un camino.</p> <p>Fracciones sobre una recta numérica</p>	<p>Uso de una línea para representar las fracciones y establecer equivalencia entre ellas.</p> <p>Introducción al manejo de la recta numérica.</p>

Continúa

Apéndice A. (Concluye)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
			A partir de observar las rectas, sin usar el término fracción equivalente, se establece la igualdad entre fracciones de denominador 2 y 4. <i>Usando directamente el concepto de equivalencia de fracciones sin usar lenguaje formal.</i>		
IV.66	Los envases	150-151	Observar una ilustración de recipientes de diferentes capacidades expresadas en litros y contestar preguntas escribiendo cuántas veces cabe una medida menor en una mayor, por ejemplo $\frac{1}{2}$ litro en $2\frac{1}{2}$ litros. Indicar cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro caben en diferentes recipientes de 1 litro y $\frac{1}{2}$ litro.	Primeras aproximaciones a la suma de fracciones mediante cálculo mental.	<i>Manejo implícito del concepto de equivalencia de fracciones.</i>
IV.82	Lo que cabe en una caja	186-187	Usar las cajas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y 1 litro de capacidad hechas en actividades anteriores e indicar cuántas veces cabe $\frac{1}{4}$ en las diferentes cajas. Utilizar arena para observar cuántas veces cabe el contenido de cada una de las cajas en otra. Señalar cuántas cajas se necesitan para completar diferentes cantidades de litros. Explicar la forma de vaciar diferentes cantidades de arena determinadas en las cajas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y 1 litro, utilizando medidas de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. A partir de llenar recipientes de 1 litro, $\frac{3}{4}$ de litro, $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ de litro, sin usar el término de fracción equivalente, se establece la igualdad entre las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ con las fracciones $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$ litros, 1 litro.	Solución de una situación que implica suma de fracción. Comparación de fracciones que dan un mismo resultado en una suma de fracciones. Escritura simbólica de adición de fracciones con diferente denominador.	<i>Manejo implícito del concepto de equivalencia de fracciones.</i>

Apéndice B

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto Grado. (SEP. 1995a).

Ficha	Propósito	Contenido	Actividades
I.3	<i>Medición de longitudes.</i> Utilizar algunas fracciones para expresar medidas de longitud, ordenarlas y observar su equivalencia con los submúltiplos del metro.	Fracciones comparadas con medidas de longitud.	Utilizar seis tiras de papel de 1 m de largo y 5 cms. de ancho; dividir una tira en cuartos, otra en medios, otra en tercios, otra en décimos, una más en centésimos y la última dejarla sin dividir (Unidad: 1 m.). Estimar longitudes dadas observando la longitud de las tiras. Verificar la estimación midiendo longitudes con las tiras, e indicando el resultado en fracciones y en metros. Identificar de esta manera las fracciones y su equivalente en metros. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia.</i>
II.11	<i>El Patio de Doña Martha.</i> Fraccionar una misma unidad de diferentes formas. Utilizar fracciones al resolver problemas que impliquen partición.	<i>Fracciones equivalentes</i>	Señalar medios en cuadrados divididos en nueve partes. Identificar las fracciones que representan los medios señalados. Indicar tercios en cuadrados divididos en nueve partes. Identificar los tercios que se representan en los cuadrados divididos en novenos. Indicar tercios, en tres rectángulos divididos previamente en décimos. Completar una tabla con las columnas siguientes: “Número de cuadros en el patio”, “número de partes en que se divide”, “cuántos cuadros hay en cada parte”, “qué fracción de patio es cada parte”. <i>Inferir que una fracción es igual a otra, es decir, que son fracciones equivalentes, aunque se escriban de diferente forma.</i> <i>Introducción al término de fracción equivalente representando fracciones en rectángulos y distribución de áreas de figuras planas.</i>
III.22	<i>Rectángulos de colores.</i> Comparar fracciones e identificar su equivalencia.	<i>Fracciones equivalentes</i>	Recortar cinco rectángulos del mismo tamaño (8 x 16 cm); en el primero señalar medios y pintarlos de color azul, en el segundo señalar cuartos de color rojo, en el tercero señalar octavos de color verde, el cuarto en dieciseisavos de color amarillo y el último se deja como unidad. Formar cuatro rectángulos de la misma medida que la unidad que por lo menos tengan tres colores diferentes (medios, cuartos, octavos o dieciseisavos). Realizar varias veces la actividad anterior. <i>Contestar algunas preguntas para identificar las fracciones que representan cada parte y su equivalente.</i> Realizar el mismo ejercicio empleando tercios, novenos, veintisieteavos, mitades, sextos, doceavos, entre otros. <i>Acercamiento al concepto de equivalencia de fracciones con base en dividir rectángulos del mismo tamaño representando fracciones con diferente denominador.</i>

Continúa

Apéndice B. (Concluye)

Ficha	Propósito	Contenido	Actividades
IV.31	<p><i>Para uno, ¿Sobra o falta?</i> Adquirir habilidad para calcular mentalmente la fracción que sobra o falta a otra para ser equivalente a un entero.</p>	<p>Comparación de fracciones.</p>	<p>Usar 20 tarjetas; cada tarjeta tiene anotada una fracción con igual denominador por ambos lados, de manera que al sumarse o restarse el resultado sea un entero (una unidad). Usar dos colores en las tarjetas, uno para el frente y otro para el reverso. Colocar las tarjetas de un solo color al frente y sin voltearla, decir qué fracción está al reverso para que al sumarse o restarse dé como resultado una unidad. <i>Se refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia al identificar fracciones que correspondan a un entero (una unidad).</i></p>

Apéndice C

Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto Grado. (SEP. 1994d).

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
I.4	La tienda del Pueblo	14-15	<p>Medir dibujos de clavos de diferente tamaño empleando una tira como unidad de medida, y usando fracciones propias e impropias para expresar el resultado de la medición.</p> <p>Leer y comentar los procedimientos indicados en la actividad para obtener la medida de los clavos.</p> <p>Usar tiras de diferentes tamaños para medir dibujos de clavos, tornillos y brocas, empleando más de una unidad de medida.</p> <p>En un rectángulo dividido en 16 partes iguales colorear las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$ e indicar qué parte falta para completar el rectángulo</p> <p><i>Esta lección refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia, al colorear $\frac{1}{2}$ en el rectángulo dividido en dieciseisavos.</i></p>	Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$ en situaciones de medición de longitudes.	Medir longitudes usando tiras de papel de diferentes tamaños empleando fracciones.
I.6	En partes iguales sin doblar.	18-19	<p>Recortar tiras de papel del mismo tamaño y dividir una de ellas en ocho partes iguales sin doblar.</p> <p>Observar que mediante la técnica de “líneas paralelas” se pueden dividir las tiras de papel en las partes que se requiera y dividir las tiras restantes en las partes que se indiquen, empleando esta técnica.</p> <p>Medir segmentos de rectas de colores indicados, usando la tira dividida en octavos.</p> <p>Trazar tres segmentos de recta de las siguientes medidas: $\frac{3}{8}$, $1+\frac{1}{2}$ y $1+\frac{2}{8}$ usando la tira de octavos.</p> <p>Trazar un segmento de recta y usar dos hojas con líneas paralelas; unas de color rojo y otras de color azul para dividir dicho segmento en tercios y explicar con cuál grupo de líneas se puede dividir.</p> <p><i>Esta lección refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia, al medir fracciones de diferente denominador con una recta dividida en octavos.</i></p>	<p>Uso de rectas paralelas para dividir un segmento en partes iguales.</p> <p>Escritura formal de $\frac{1}{8}$.</p> <p>Conocer y utilizar la técnica de dividir un segmento en partes iguales utilizando una hoja auxiliar con líneas paralelas.</p>	Representar fracciones en la recta numérica, utilizando segmentos de líneas de colores. Establecer de manera no formal equivalencias de $\frac{1}{8}$.

Continúa

Apéndice C. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
I.10	Cuerdas resistentes	26-27	<p>Medir con hilo una cuerda dibujada y determinar el número de centímetros que mide el hilo (y por transferencia la cuerda) y estimar si mide menos o más de un metro.</p> <p>Marcar en la cuerda los decímetros que mide y los centímetros que hay en el primer decímetro.</p> <p>Señalar en la cuerda $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ de metro.</p> <p>Marcar en el pizarrón o en el piso las siguientes medidas $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{10}{8}$ y $1\frac{3}{4}$ de metro</p> <p>Ordenar las medidas anteriores y anotar los nombres de tres compañeros que midan más de $1\frac{1}{4}$ metros y menos de $1\frac{1}{2}$ de metros.</p> <p>Completar expresiones que indican la equivalencia de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ de metro en decímetros y centímetros</p> <p>Identificar diferentes formas de expresar medio metro: $\frac{2}{4}$ de metro, 50 cms. y $\frac{1}{2}$ metro</p> <p>Observar un cuadro donde se indican las equivalencias del metro en dm y cm.</p>	Fracciones del metro y orden entre fracciones.	<i>Equivalencia entre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de metro y los centímetros y decímetros correspondientes</i>
II.1	El día de la ONU	48-49	<p>Observar banderas de algunos países sin escudos que impliquen fraccionamiento de superficies en tercios, quintos, sextos, medios y cuartos.</p> <p>Identificar los tamaños de las partes en que se dividieron las banderas para indicar si estas partes son iguales.</p> <p>Identificar en una tabla, la fracción que representa las franjas utilizadas en sus dibujos con las columnas de: país, mitades, tercios, cuartos, quintos y sextos.</p> <p>Contestar algunas preguntas referentes a las franjas de los dibujos de las banderas, indicando la fracción que representan.</p> <p><i>Esta lección refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia. Por ejemplo: al indicar en la bandera de Colombia la parte amarilla que representa un medio y que ocupa $\frac{2}{4}$ del todo.</i></p>	<p>Las fracciones en situaciones de partición, empleando imágenes de banderas.</p> <p>Se pone énfasis en la igualdad en las partes en que se divide el todo para que cada parte sea una fracción.</p> <p>Uso de equitatividad al fraccionar rectángulos.</p>	<p>Representación de fracciones en rectángulos del mismo tamaño.</p> <p>Identificación de fracciones en un rectángulo (medios, tercios, cuartos, quintos y sextos)</p> <p>Se define $\frac{1}{4}$ respetando la igualdad de las partes en que se divide un todo.</p>
II.9	Tarjetas de papel.	64-65	Dividir hojas de papel en cuartos, octavos y dieciseisavos, según ejemplo y contestar preguntas para identificar la fracción que se representa en cada hoja.	Identificar equivalencia entre cuartos, octavos y dieciseisavos.	Las fracciones equivalentes en situaciones de reparto.

Continúa

Apéndice C. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
			<p>Algunas de las preguntas que se refieren a equivalencia son: Un cuarto de la hoja es igual a _____ octavos de la hoja. O un octavo de la hoja es igual a _____ dieciseisavos de la hoja.</p> <p>Repartir gráficamente un número de hojas entre un cierto número de niños para obtener medios, cuartos y octavos.</p> <p>Completar una tabla, en base al reparto anterior, que tiene las columnas siguiente: equipo (refiere al número de niños en cada equipo), hojas, niños y a cada niño le tocó.</p> <p>Introducción al concepto de equivalencia de fracciones entre cuartos, octavos y dieciseisavos en situaciones de reparto.</p>		
II.16	La vuelta al mundo	78-79	<p>Dividir un círculo que representa el mundo en ocho partes iguales e identificar en él octavos, cuartos y medios de vuelta</p> <p>Identificar lugares en este círculo, empleando fracciones de vuelta como $1/8$, $1/4$, $3/8$, $1/2$, $5/8$ y $3/4$.</p>	<p>Representar medios, cuartos y octavos en un círculo.</p> <p>Uso del concepto de equivalencia entre octavos, cuartos y medios.</p>	<p>Noción de ángulo asociadas a fracciones de giros en el círculo.</p>
II.18	Galletas redondas	82-83	<p>Repartir cierto número de galletas entre un número de niños de forma gráfica, empleando dibujos.</p> <p>Contestar algunas preguntas respecto a si el resultado de un reparto fue más o menos de una galleta. (Una unidad)</p> <p>Escribir con la nomenclatura de fracciones lo que corresponde al resultado de cada reparto.</p> <p>Ordenar las fracciones resultantes de menor a mayor.</p> <p>Realizar otro ejercicio de reparto con diferente número de galletas y de niños. Contestar preguntas referentes al reparto y ordenar de menor a mayor estas fracciones.</p> <p>Representar con dibujos las situaciones de reparto realizadas.</p> <p>Se refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia, al establecer el orden de las fracciones en situaciones de reparto.</p>	<p>Comparación de fracciones en situaciones de reparto.</p> <p>Uso de fracciones mayores, menores o igual que la unidad, enfatizando la relación entre el tamaño del numerador y el denominador.</p>	<p>Ordenar fracciones de menor a mayor.</p> <p>Identificar fracciones propias e impropias, empleando la relación mayor que entre el numerador y denominador. Sin el uso formal de los términos “propias” e “impropias”.</p>
III.3	Más galletas y más niños	94-95	<p>Representar con dibujos dos situaciones de reparto tomando una como base y duplicando en la siguiente el número de galletas y de niños.</p>	<p>Comparación de fracciones en situaciones de reparto y empleando dibujos.</p>	<p>Fracciones como reparto.</p>

Continúa

Apéndice C. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
			<p>Observar que los repartos dan por resultado diferentes expresiones fraccionarias que representan la misma cantidad, según se empleen medios, cuartos y octavos. Explicar qué significa esta situación. Repartir dos galletas entre tres niños y dibujar otro reparto donde toque la misma cantidad de galletas con diferente número de niños y de galletas. Comparar algunas fracciones obtenidas en otros repartos indicando cuál resultado es mayor, menor o igual. Explicar la respuesta. Introducción al término de fracción equivalente con base en repartos.</p>	Empleo del concepto de equivalencia al multiplicar por el mismo número los términos de la fracción.	Identificar fracciones equivalentes sin uso del término equivalencia.
III.7	Adornos para el festival	102-103	<p>Por medio de una representación gráfica (una cuerda) que simula una recta numérica, identificar décimos. Contestar preguntas que indiquen la ubicación de objetos en la cuerda (representación gráfica anterior) y puntos en la recta numérica, empleando décimos. Representar gráficamente centésimos, tomando como base la recta donde se representaron los décimos, dividiendo cada décimo en diez partes iguales. Contestar preguntas referentes a centésimos y décimos, identificando algunas equivalencias entre décimos y centésimos. Por ejemplo: "la estrella está a $1/10$ de A, o bien, a $___/100$ de A". Uso del concepto de equivalencia de fracciones entre décimos y centésimos.</p>	Fracciones con denominador 10 y 100. Identificar equivalencias entre décimos y centésimos empleando un segmento de recta.	Representar décimos y centésimos en un segmento de recta.
III.11	Las golosinas	110-111	<p>Identificar medios y cuartos de un kilogramo empleando artículos de los que se indica su peso en gramos. Observar el cuadro de equivalencias: $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$, $1/2 \text{ kg} = 500 \text{ g}$ y $1/4 \text{ kg} = 250 \text{ g}$.</p>	Fracciones del kilogramo Identificar equivalencia de $1/2$ y $1/4$ de kilo en gramos.	Uso de equivalencia de fracciones de kilogramo en gramos.
III.12	La vuelta al mundo en 360°	112-113	<p>Ubicar en un círculo dividido en octavos los ángulos que estos representan. Identificar en fracciones del círculo la medida en ángulos, $1/4$ de vuelta = 90°, $1/2$ vuelta = 180° entre otras</p>	Fracciones del Círculo. Identificar fracciones de denominador 2, 4 y 8 de un círculo con su equivalente en grados.	Vinculación de fracciones con su equivalente en grados de un círculo.

Continúa

Apéndice C. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
III.15	La paloma de la paz	118-119	<p>Medir la longitud de los lados de una figura que representa la silueta de una paloma, con diferentes segmentos que representan: medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos, novenos, décimos y doceavos de una unidad. (Material recortable).</p> <p>Identificar la longitud de cada lado, superponiendo, comparando o iterando las tiras utilizadas en la actividad anterior; si un cierto número de tiras corresponde a la misma longitud que otras, aunque se escriban de manera diferente, entonces representan longitudes equivalentes.</p> <p>Identificar en segmentos divididos en décimos y quintos fracciones equivalentes. Por ejemplo: "si una línea mide $\frac{2}{5}$ ¿Cuántos décimos mide la misma línea? ____"</p> <p>Utilizando las tiras, completar el término faltante en pares de fracciones equivalentes.</p> <p>Observar y comentar en los diálogos que aparecen en la lección, que una fracción es igual a la otra porque hay el "doble" de partes.</p> <p>A partir de observar dos tiras divididas en quintos y décimos, sin usar el término de fracción equivalente, se establece la igualdad entre dos fracciones y se usa directamente el concepto de equivalencia de fracciones.</p>	<p>Identificar fracciones equivalentes en segmentos de recta.</p> <p>Uso de lenguaje convencional de las fracciones al identificar la equivalencia.</p> <p><i>De manera implícita se emplea el procedimiento de múltiplos para encontrar fracciones equivalentes.</i></p>	<p>Se introducen fracciones como quintos, sextos, novenos, décimos y doceavos.</p>
IV.4	Animales que saltan	134-135	<p>Identificar en una recta el salto de un conejo (décimos) y un canguro (un entero).</p> <p>Contestar preguntas referentes a cierto número de saltos del conejo (décimos) en esta representación.</p> <p>Representar los saltos de una pulga como centésimos, dentro de la recta de décimos y enteros, utilizada anteriormente.</p> <p>Contestar algunas preguntas referentes a esta representación.</p> <p>Indicar la ubicación de cinco puntos en la recta numérica, expresando las respuestas en décimos, centésimos y su equivalente en sumas sencillas de fracciones. Por ejemplo: $\frac{25}{100}$, o bien $\frac{2}{10} + \frac{5}{100}$</p>	<p>Relación entre décimos, centésimos y milésimos.</p> <p>Comparar centésimos y décimos mediante la representación en la recta numérica.</p> <p>Equivalencia entre centésimos y décimos.</p>	<p>Ubicar fracciones con denominador 10, 100 y 1,000 en una recta numérica.</p>

Continúa

Apéndice C. (Concluye)

Lección	Título	Páginas	Actividades / Contenido	Aspectos de la fracción	Observaciones
			<i>Esta lección refiere de manera directa el concepto de equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos, sin usar el término equivalencia.</i>		
IV.5	Esferas de plastilina	136-137	<p>Leer dos problemas referentes a peso de esferas y tratar de resolverlos.</p> <p>Observar dibujos de esferas que representan 100g, $\frac{1}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg y $\frac{3}{4}$ kg</p> <p>Identificar pesos de objetos en dibujos de balanzas donde en un brazo tiene las esferas indicando el peso y en el otro brazo los objetos que se pesarán.</p> <p>Inferir que para encontrar el resultado se suman las fracciones de kilogramo indicadas en las esferas.</p> <p>Realizar tres ejercicios de suma de fracciones con el mismo denominador, utilizando el procedimiento informal empleado en los ejercicios anteriores</p> <p><i>Esta lección refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia, indicar que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.</i></p>	Procedimientos informales para sumar fracciones.	Suma de fracciones con igual denominador.
V.8	Los quelites	174-175	<p>Completar tres cuadros que impliquen el uso de fracciones como: medios, cuartos y tercios con las columnas de: ingredientes, 6 raciones, 3 raciones, 12 raciones.</p> <p>Introducción a la suma de fracciones con el mismo denominador. Uso de procedimientos informales.</p> <p>Uso de estrategias espontáneas para resolver situaciones sencillas que implican proporcionalidad entre fracciones.</p>	Procedimientos informales para sumar fracciones.	Uso de la proporcionalidad para resolver situaciones que implican múltiplos y submúltiplos de fracciones.

Apéndice D

Contenidos y actividades de fracciones del Fichero de Actividades didácticas. Quinto grado. Matemáticas. (SEP. 1995b).

Ficha	Contenido	Actividades
I.5	<i>Midiendo con fracciones de metro.</i> Utilizar fracciones de metro para medir longitudes.	Cortar tiras de papel de un metro de largo y 5 cms. de ancho, fraccionarlas en medios, cuartos, octavos, tercios, sextos y quintos de metro, escribiendo la fracción representada. Ordenar las fracciones escritas, de mayor a menor y escribir las fracciones en ese orden en su cuaderno. Utilizando las tiras, trazar una línea que mida más de un metro y menos de dos. Indicar la medida de las líneas trazadas en metros y en fracciones de metro. Explicar el procedimiento que utilizó para medir las líneas y cómo obtuvo la equivalencia de la medida en metros. De esta forma, obtiene la equivalencia entre fracciones decimales y fracciones. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
I.6	<i>Repartimos Pasteles.</i> Utilizar fracciones como resultado de un reparto.	Resolver dos problemas de repartir cierto número de pasteles entre cierto número de niños. Discutir las soluciones obtenidas y explicar el procedimiento para llegar a la solución. Determinar en cuales casos le tocó más o menos pastel a cada niño y por qué. Anotar las expresiones fraccionarias obtenidas y reconocer que valen lo mismo aunque se escriban diferente. Repetir estas situaciones con problemas de diferentes datos pero que impliquen reparto, se pueden realizar dibujos para representar las situaciones de reparto. <i>Esta ficha desarrolla el concepto de equivalencia de fracciones empleando situaciones de reparto.</i>
II.9	<i>Con una hoja rayada.</i> Dividir un segmento en partes iguales.	Trazar segmentos de recta marcados del 0 al 1, y sobreponer en una hoja rayada para dividir en partes iguales, permitiendo procedimientos espontáneos de cómo sobreponer el segmento para indicar por ejemplo diez partes iguales. Representar las siguientes fracciones en los segmentos indicados: $1/6$, $3/7$, $9/9$, $7/10$, $1/10$. Ordenar estas fracciones de menor a mayor y verificar con sus compañeros si es el mismo orden y explicar por qué. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
II.10	<i>Partes no iguales.</i> Expresar el entero como suma de fracciones con igual denominador.	Dividir tiras de papel del mismo tamaño en quintos, sextos, octavos, novenos o décimos utilizando la hoja rayada para indicar las partes y doblarlas en partes no iguales, por ejemplo un doblez que tenga $1/4$ y otro $3/4$ de longitud. Recortar en los dobleces. Ordenar los segmentos de mayor a menor Observar que al juntar segmentos para obtener un entero es similar a sumar dos fracciones con igual denominador y obtener sus resultados para socializar sus experiencias y comentarios. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
II.11	<i>Cuánto falta, cuánto sobra.</i>	Tener un juego de 30 cartas que tengan escrita una fracción en cada lado, de tal forma que al sumar o restar la del anverso con la del reverso se obtenga como resultado una unidad; indicar con un color el anverso y con otro color diferente el reverso.

Continúa

Apéndice D. (Continúa)

Ficha	Contenido	Actividades
	Utilizar suma y resta de fracciones para expresar la unidad.	Tomar una carta y decir cuál es la fracción que se encuentra en el anverso para lograr que dé como resultado una unidad. Gana el alumno que acierte en mayor número de tarjetas. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones</i>
II.18	<i>Descubre lo que falta.</i> Utilizar la equivalencia de fracciones en la resolución de un problema de reparto.	Completar los datos de una tabla que tenga dos renglones uno con el título de: número de pasteles y el otro con el título de: número de niños. Empleando fracciones para completar los espacios faltantes. Comprobar que las cantidades o fracciones obtenidas son equivalentes aunque cambie el número de pasteles y de niños. Explicar el procedimiento que proponga cada alumno para determinar por qué las fracciones son equivalentes. Resaltar los casos donde los alumnos indiquen que una cantidad es el doble, triple de otra fracción, para determinar un procedimiento para obtener fracciones equivalentes. <i>Esta ficha desarrolla el concepto de equivalencia de fracciones enfatizando que una fracción es múltiplo de otra.</i>
II.21	<i>Porcentaje</i> Resolver Problemas de porcentaje expresado como fracción y analicen la proporcionalidad	Completar una tabla con las columnas tituladas: edad, %, fracción y población. Analizar la información obtenida, guiando el análisis por medio de preguntas. Completar otra tabla de datos con los renglones titulados: precio en pesos y número de chocolates. Resolver otros problemas similares para determinar por medio de preguntas referentes a lo que representan algunas cantidades respecto a un total para inferir que algunas fracciones comunes representan un porcentaje y explicar el procedimiento para esta determinación y cómo obtener porcentajes de una cantidad. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
III.31	<i>Adivina el número.</i> Ubicar números fraccionarios en la recta numérica.	Dibujar una recta numérica en el pizarrón que tenga una longitud del 1 al 10 para realizar un juego en el que ubicarán fracciones impropias. Escribir una fracción impropia en un papel y doblarlo para que por medio de diez preguntas referentes a la ubicación de la fracción en la recta numérica, los alumnos traten de adivinar de que fracción se trata y anotarla en el pizarrón para ubicarla en la recta Con estas actividades los alumnos ubican diferentes fracciones en la recta numérica. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
III.32	<i>Unimos pedazos.</i> Utilizar la suma, la resta y la comparación de fracciones para resolver algunos problemas.	Repartir cierto número de barras de chocolate entre un cierto número de niños. Se da una longitud de 9 cms a las barras de chocolate y se determina cuántos cms le tocan a cada niño en el reparto. Responder algunas preguntas para indicar el procedimiento utilizado para obtener las respuestas. Verificar que 3 cms. de chocolate equivalen a $\frac{1}{3}$ e indicar con diferente número de centímetros a cuanto equivalen en fracción común. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
III.34	<i>La Fracción como razón.</i>	Representar mediante círculos el total de alumnos de tres diferentes grupos y el número de alumnos que reprobaron en cada uno.

Continúa

Apéndice D. (Continúa)

Ficha	Contenido	Actividades
	Utilizar la noción de fracción como razón en la resolución de problemas.	Identificar en estas situaciones y en lo representado en los círculos que cuando se trata de razones lo que interesa de una cantidad es qué parte representa de otra. Observar que las fracciones permiten expresar esta relación entre una parte y un todo. Plantear otro problema similar, identificando fracciones de la expresión “x de cada y”.
III.35	<i>Las fracciones mixtas.</i> Expresar una fracción impropia como mixta.	Realizar tres tiras, una de 12 cms., otra de 18 cms. y una de 1 m. de largo por 3 cms. de ancho. Resolver una situación de reparto de cuatro chocolates entre cinco niños, indicando que la tira más chica (12 cms) representa lo que le toca de chocolate a cada niño y determinar qué parte representa esta tira de la grande (1m). Representar las soluciones empleando las tiras para identificar qué fracción representa y cuanto falta para la unidad y si es mayor de la unidad cómo se escribe. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
III.37	<i>Suma de fracciones.</i> Utilizar suma y resta de fracciones en la resolución de problemas.	Resolver problemas que impliquen suma de fracciones con diferente denominador. Comentar las soluciones y procedimientos empleados para encontrar la respuesta. Resolver otros problemas que impliquen suma de fracciones con diferente denominador. Concluir y explicar el mejor procedimiento para dar respuesta a este tipo de problemas. <i>Esta ficha emplea el concepto de equivalencia de fracciones resolviendo sumas de fracciones con diferente denominador.</i>
III.42	<i>Representa números en la recta numérica.</i> Ubicar números naturales, fraccionarios y decimales en la recta numérica.	Ubicar en una recta numérica: medios, cuartos y enteros; en otra recta: quintos, décimos y enteros y en la última recta: medios y cuartos indicando con flechas la ubicación de cada fracción. Indicar el número fraccionario o entero correspondiente a cada fracción en la parte superior de la recta y en la parte inferior el número decimal correspondiente. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
IV.45	<i>Las botellas y los vasos.</i> Resolver una situación de proporcionalidad que implica comparación de capacidades, uso de fracciones, y la búsqueda del factor constante.	Resolver tablas de datos donde se sabe que 4 vasos llenan una botella de un litro, estos renglones son: Número de vaso y botella de un litro. Resolver otra tabla de datos con los renglones Número de vasos y botella de un litro y medio. Resolver tablas de datos, empleando multiplicación y división para obtener la información faltante. <i>Esta ficha refiere de manera indirecta el concepto de equivalencia de fracciones.</i>
V.67	<i>Localizando números.</i> Ubicar un número natural, fraccionario o decimal entre dos números y ordenar una lista de números.	Representar en rectas numéricas longitudes recorridas por robots, una recta para cada robot, utilizando fracciones. Comparar las rectas para identificar qué robots dieron pasos de la misma longitud. Ordenar las tiras que representan las rectas numéricas de mayor a menor longitud de acuerdo a la longitud de cada paso y su fracción correspondiente. Ordenar las rectas numéricas identificando las fracciones equivalentes que representan la misma longitud aunque la fracción se escriba diferente. Escribir fracciones que se ubiquen entre otras donde la fracción a ubicar tiene como denominador el doble de las que se dan.

Continúa

Apéndice D. (Concluye)

Ficha	Contenido	Actividades
		<i>Esta ficha desarrolla el concepto de equivalencia de fracciones representando en la recta numérica las fracciones que son equivalentes.</i>
V.69	<p><i>Sumemos Fracciones.</i> Utilizar la equivalencia de fracciones al resolver problemas de suma y resta.</p>	<p>Trazar segmentos de diferentes longitudes menores a 6 cms, tomando como unidad 6 cms. Graduar la recta unidad identificando el punto de inicio como 0 y el final como 1. Comparar los otros segmentos trazados con la unidad y anotar la fracción que representan respecto a la unidad. Ordenar de mayor a menor los segmentos Plantear y resolver situaciones que impliquen suma de segmentos (suma de fracciones). Plantear otros problemas que impliquen suma y resta de fracciones con diferente denominador. <i>Esta ficha emplea el concepto de equivalencia de fracciones resolviendo sumas y restas de fracciones con diferente denominador.</i></p>

Apéndice E

Actividades y contenidos de fracciones en el quinto grado. Libro del Alumno. Matemáticas. (SEP. 2000).

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
I.14	Adornos con listones	36-37	<p>Observar el dibujo de esferas distribuidas en una tira de listón y contestar preguntas al respecto. Dividir tiras del mismo tamaño en 5, 8 y 10 partes iguales.</p> <p>Usar la técnica de líneas paralelas (hoja rayada) para dividir una tira de listón en cuatro partes iguales y contestar preguntas referentes a la actividad.</p> <p>Dividir una tira en cinco partes iguales, ubicar cuatro esferas colocadas sobre ella y contestar preguntas al respecto.</p> <p>Dividir, con la hoja rayada, una recta numérica del 0 al 1 en séptimos y ubicar $5/7$.</p>	<p>Ubicación de números fraccionarios en una recta numérica</p> <p>Asociar puntos en la recta con fracciones.</p> <p>Identificar la similitud entre la actividad de dividir una recta numérica en partes iguales y los ejercicios realizados con la tira.</p>	<p>Representar fracciones en la recta numérica. Lección similar a la lección III.7 de cuarto grado.</p>
II.23	Rectas y números	56-57	<p>Representar en la recta numérica fracciones como $3/7$, $1/2$, $4/7$ donde la unidad representa una semana e indicar que al dividir en siete partes iguales (empleando la técnica de líneas paralelas), cada parte es $1/7$ (Un día), Representar en la recta numérica fracciones donde cada unidad puede significar un día, un año, una semana y un lustro.</p> <p>Comparar pares de fracciones empleando su representación en la recta numérica.</p>	<p>Uso de nomenclatura formal para fracciones con denominador 7, 5, 3 y 8.</p> <p>Comparar fracciones cuyo denominador no es múltiplo, por ejemplo: tercios con quintos, quintos con octavos y quintos con séptimos.</p> <p>Se inicia orden entre fracciones con denominadores no múltiplos</p>	<p>Representación de fracciones en la recta numérica, utilizando la hoja rayada para hacerlas comparables.</p>
II.28	¿Cuántos centésimos y milésimos?	66-67	<p>Apoyándose en un rectángulo-unidad, donde se representan décimos, centésimos y milésimos, contestar algunas preguntas sobre fracciones decimales.</p> <p>Responder preguntas usando el "rectángulo-unidad" para identificar décimos, centésimos y milésimos y la equivalencia entre estas fracciones decimales.</p> <p>Indicar en décimos cantidades expresadas en unidades.</p> <p>Indicar en centésimos cantidades expresadas en décimos y unidades.</p> <p>Indicar cuántos milésimos hay en cantidades expresadas en centésimos, décimos y unidades.</p>	<p>Equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos, sin utilizar el término equivalente, sino la noción de igualdad y el término "equivaler"</p>	<p>Representación en un mismo rectángulo (rectángulo-unidad) de décimos, centésimos y milésimos.</p>

Continúa

Apéndice E. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
			<p>Expresar números decimales como la suma de unidades, décimos, centésimos o milésimos en su expresión a/b e identificar cual es mayor. Comprobar los resultados usando la representación en el rectángulo – unidad.</p> <p><i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al establecer equivalencias entre unidades, decimos, centésimos y milésimos.</i></p>		
II.31	Reparto de galletas	72-73	<p>Resolver un problema que consiste en repartir cinco galletas entre ocho niños y determinar si la cantidad que les tocó es más o menos de una unidad o más o menos de un medio de galleta. Contestar preguntas referentes al reparto.</p> <p>Completar una tabla con las columnas: galletas, niños, más que una galleta, una galleta y menos que una galleta.</p> <p>Conociendo el resultado de un reparto, identificar cuántas galletas se repartieron entre cuántos niños y, al comparar las respuestas, identificar que existen formas equivalentes de representar la misma fracción.</p> <p>Enunciar tres ejemplos de situaciones de reparto de galletas cuyos resultados sean fracciones equivalentes.</p> <p><i>Se desarrolla el concepto de equivalencia de fracciones a partir de situaciones de reparto empleando medios, tercios, cuartos y sextos.</i></p>	<p>Equivalencia de fracciones con base en el resultado de repartos.</p> <p>Resaltar las fracciones que son menores, iguales o mayores que la unidad, en función de la relación entre numerador y denominador.</p>	<p>Desarrollo del concepto de <i>equivalencia de fracciones</i> a través de situaciones de reparto.</p>
II.33	La escuela de Pablo	76-77	<p>Resolver un problema de recorrido hacia la escuela donde se dan trayectos de un kilómetro en fracciones equivalentes ($3/5$ y $6/10$ de km.).</p> <p>Resolver y comentar problemas con datos de fracciones equivalentes, usando esquemas gráficos como rectas numéricas, cuadrados o conjuntos.</p> <p>De una lista de fracciones, señalar las fracciones que son equivalentes a $1/3$.</p> <p>Comentar cómo saben que estas fracciones son equivalentes.</p>	<p>Uso de diversos recursos para mostrar la equivalencia de fracciones.</p> <p>Equivalencia entre $5/8 = 10/16$, $1/3 = 2/6$, $3/9 = 6/18 = 9/27$.</p> <p>Comparar $2/3$ con $3/4$.</p> <p>Procedimiento espontáneo para identificar fracciones equivalentes.</p> <p>Se establece equivalencia entre tres fracciones.</p>	<p>Identificar fracciones equivalentes empleando longitudes. Como procedimiento informal los niños infieren que una fracción es equivalente a otra si sus términos fueron multiplicados por el mismo número.</p>

Continúa

Apéndice E. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
			<p>Escribir parejas de fracciones equivalentes y explicar por qué lo son.</p> <p><i>Esta lección desarrolla el concepto de equivalencia de fracciones usando diferentes contextos al representarlas; se infiere un procedimiento informal para encontrar fracciones equivalentes.</i></p>		
II.35	Más sobre los decimales	80-81	<p>Usando rectángulo-unidad para representar décimos, centésimos y milésimos, contestar qué fracciones con alguno de estos denominadores es mayor o menor.</p> <p>Unir con una línea dos pares de columnas donde la primera es un número decimal y la segunda el número expresado como suma de enteros y fracciones decimales.</p> <p>Completar una tabla con las siguientes columnas: fracción común, división entre 10, 100 o 1000 y el número decimal correspondiente que se obtiene, empleando la calculadora.</p> <p><i>Esta lección emplea el concepto de equivalencia de fracciones usando igualdad entre fracciones con denominador 10, 100 y 1000 y su correspondiente expresión decimal.</i></p>	Equivalencia entre fracciones con denominador 10, 100 y 1000 y su escritura utilizando el punto decimal.	Identificar fracciones equivalentes con denominador 10, 100 o 1000.
III.44	Las fracciones en la recta	100-101	<p>Ubicar en la recta numérica diez fracciones usando la técnica de las líneas paralelas y determinar si una fracción es mayor o menor a las de una lista dada.</p> <p>Formar fracciones con tarjetas de números enteros: una tarjeta como numerador y otra como denominador y ubicarlas en la recta numérica.</p> <p>De pares de fracciones dadas, encerrar en un círculo la fracción menor de cada par indicado. Utilizar las regletas de la parte recortable para comprobar su respuesta.</p> <p>Ubicar tres fracciones en la recta numérica que se encuentren entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.</p> <p>Comentar las respuestas.</p>	Uso de recursos visuales para ordenar fracciones. Establece orden entre pares de fracciones.	Uso de la recta numérica para ubicar fracciones, algunas mayores que la unidad.

Continúa

Apéndice E. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
			Ubicar cuatro fracciones en la recta numérica que se encuentren entre $4/5$ y $5/5$. Comentar las respuestas. <i>Esta lección emplea el concepto de equivalencia de fracciones ubicándolas en la recta numérica.</i>		
III.47	Tornillos y clavos	106-107	Medir en pulgadas algunas ilustraciones de clavos empleando fracciones como $1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$ de pulgada. Completar datos faltantes en sumas de fracciones con igual y diferente denominador. Contestar preguntas referentes a estas sumas. <i>Uso de nomenclatura formal para realizar las sumas de fracciones.</i>	Usar la regla como recta numérica en la sección de pulgadas para ubicar $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de pulgada. Realizar sumas con fracciones de diferente denominador, permitiendo usar procedimientos espontáneos.	Problemas con suma y resta de fracciones. Uno de estos procedimientos espontáneos puede ser el uso de fracciones equivalentes.
III.49	El grosor de la madera	110-111	Utilizar la regla para identificar pulgadas y las fracciones: $1/4$, $1/2$, $1/3$, $2/3$, $3/4$ de pie (medida inglesa de longitud). Completar un cuadro con las columnas: medida del clavo en pulgadas, grosor de la madera en pulgadas y parte que se introduce del clavo en la pared en pulgadas. <i>Identificar números mixtos y su equivalente en fracción impropia.</i>	Usar la regla graduada en pulgadas como recta numérica para ubicar fracciones del pie. Resta de fracciones con igual y diferente denominador, usando procedimientos informales. Concepto de número mixto y fracción impropia.	Problemas relacionados con la suma y resta de fracciones.
III.52	El tamaño real	116-117	Indicar tamaños reales estableciendo la escala a que se encuentran, en algunos casos se usan fracciones con denominador 10. Completar un cuadro con las columnas: tamaño en el dibujo (cm) y tamaño real (cm). Explicación de cómo expresar en forma de fracción las escalas. Completar dos cuadros con las mismas columnas que el cuadro anterior, usando fracciones con denominador 10	Uso de fracciones en la representación de dibujos a escala.	Uso de fracciones con denominador 10, 100, 1000 en problemas de escala.
IV.53	¿Cómo cuánto resulta?	120-121	Resolver mediante estimación, problemas que impliquen suma o resta de fracciones, indicando si es menos, igual o más de una unidad e indicar en una lista de suma o resta de fracciones con cuál de esas operaciones se resolvería el problema.	Estimar resultados de sumas y restas de fracciones en diferentes contextos. De manera formal se indica el procedimiento de múltiplos de	<i>Diversos significados para la adición y sustracción con fracciones</i>

Continúa

Apéndice E. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
			<p>Se indica que por medio de múltiplos se encuentran fracciones equivalentes en la siguiente frase “A veces, el denominador de una de las fracciones es múltiplo del denominador de la otra.... En estos casos se puede encontrar una fracción equivalente.... (se muestran ejemplos)”</p> <p>Resolver las sumas y restas de fracciones de los problemas indicados empleando fracciones equivalentes.</p> <p><i>Se indica el algoritmo de multiplicar los términos de la fracción por el mismo número para encontrar su fracción equivalente y resolver así la adición o sustracción de fracciones con distinto denominador.</i></p>	<p>denominador para encontrar fracciones equivalentes.</p> <p>No hay ejercicios de aplicación del procedimiento formal para obtener fracciones equivalentes.</p>	<p>Se suman o restan fracciones con distinto denominador obteniendo las fracciones equivalentes mediante la multiplicación de sus términos</p>
IV.55	Cuadrados mágicos	124-125	<p>Completar cuadrados mágicos sumando o restando fracciones de igual denominador. Comentar procedimientos.</p> <p><i>Empleo del concepto de equivalencia al convertir fracciones mixtas y sumar fracciones con diferente denominador.</i></p>	<p>Uso de números mixtos y suma de enteros y fracciones.</p> <p>Uso de equivalencia entre medios, cuartos y sextos para sumar o restar fracciones.</p>	<p>Técnicas espontaneas para sumar o restar fracciones.</p>
IV.58	La tienda de regalos	130-131	<p>Identificar en algunas afirmaciones la equivalencia de fracciones en metros y su correspondiente expresión decimal, por ejemplo: $\frac{3}{4}$ metros=0.75 metros.</p> <p>Completar un cuadro con las columnas: color, medida del listón en metros, número de moños iguales y medida de cada moño en metros</p> <p>Comentar los procedimientos empleados para resolver el cuadro.</p>	<p>Las fracciones como cociente de dos números enteros.</p> <p>Se emplean dos procedimientos: el de dividir el numerador entre el denominador y el de iterar la fracción para encontrar la respuesta.</p>	<p>Fracciones de metro y su equivalente en decimal.</p> <p>Se obtienen resultados en fracciones y en expresiones decimales.</p>
IV.64	La tienda de pinturas	142-143	<p>Contestar algunas preguntas para analizar cómo se mezclan pinturas para obtener algunos colores empleando fracciones con denominador 8, 5 o 3.</p> <p>Identificar fracciones de pintura utilizados para realizar las mezclas.</p> <p>Relacionar dos renglones: en el primer renglón están las fracciones y en el segundo las mezclas que se realizaron para obtener ciertos colores.</p>	<p>Fracciones como relaciones o razones.</p>	<p>Identificación de las fracciones como relaciones o razones.</p>

Continúa

Apéndice E. (Continúa)

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
V.70	El circuito	156-157	<p>Completar cuadros donde una fracción representa una cantidad de vueltas de un circuito que implica 12 kms de longitud y la otra columna el número de kilómetros que corresponde a cada fracción e indicar cuál es mayor. Completar cuadros donde se indica el número de kilómetros en una columna y en la otra se debe indicar número de vueltas del circuito de 12 kms. y viceversa. Resolver problemas que impliquen el uso de fracciones y un operador multiplicativo para encontrar la solución en el contexto del circuito.</p> <p>Completar un cuadro de datos con las columnas: punto de partida, vueltas recorridas (en fracciones del circuito) y punto de llegada. Contestar preguntas referentes a la información del cuadro.</p> <p><i>Esta lección toma la fracción como operador y establece la equivalencia de una fracción con respecto a una longitud dada.</i></p>	Operadores fraccionarios en situaciones sencillas.	<p>Uso de fracciones de una longitud dada (circuito). Utilizar fracciones como un operador para encontrar la respuesta a problemas en contextos deportivos.</p> <p>Relación de equivalencia entre fracciones.</p>
V.73	El deporte favorito	162-163	<p>Identificar fracciones en contexto de preferencias de algún deporte para obtener un número de alumnos de un total determinado.</p> <p>Aplicar la fracción como operador multiplicativo al calcular mentalmente expresiones como: $\frac{1}{2}$ de 32, $\frac{5}{8}$ de 1704, $\frac{3}{4}$ de 24....</p> <p>Usar la calculadora para comprobar los resultados.</p>	Operadores fraccionarios en situaciones sencillas.	Identificar las fracciones como operadores.
V.79	Las unidades de capacidad	174-175	<p>Obtener la equivalencia de una fracción con respecto a unidades de capacidad. Por ejemplo cuántos ml. hay en $\frac{1}{10}$ de litro.</p> <p>Completar un cuadro con las columnas siguientes: unidad: litros con fracciones, unidad: litros con notación decimal y unidad: mililitros.</p> <p>Resolver problemas de capacidad con base en diferentes recipientes de distintas capacidades en litros, usando $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ de litro.</p>	Relación entre las unidades de capacidad, empleando fracciones del litro.	Identificar equivalencia entre medidas de capacidad (litros).
V.82	El costo de los boletos	180-181	Completar un cuadro con las columnas siguientes: Porcentaje en lenguaje natural, %, en fracción con	Problemas que impliquen cálculo de porcentajes.	Relación de equivalencia entre %,

Continúa

Apéndice E. (Concluye)

Lección	Título	Páginas	Contenido / Actividades	Aspectos de la fracción	Comentarios
			denominador 100, fracción con denominador 10 y en notación decimal. Contestar preguntas referentes al cuadro e identificar procedimientos informales para calcular porcentajes		fracción con denominador 10 o 100 y su expresión decimal.
V.83	La Papelería	182-183	Completar un cuadro con las columnas siguientes: costo de cierto número de lápices, cierta parte de costo y fracción de una cantidad entera. Por ejemplo: costo de 10 lápices = la mitad del costo de 20 lápices = $\frac{1}{2}$ de 55 (precio de los 20 lápices) =	La fracción como operador en una cantidad.	La división con cociente hasta centésimos.
V.86	Las unidades de peso	188-189	Completar cuadros donde una fracción representa una cantidad expresada en unidades de peso, por ejemplo: gramos, miligramos y kilogramos.	Relación de equivalencia entre fracciones de kilo y su correspondiente en gramos y miligramos.	Relación entre las unidades de peso.

Apéndice F

Bloques de estudio de tercer grado con el subtema de números fraccionarios. Programas de estudio 2011. Tercer grado. Educación básica. Primaria. (SEP. 2009, pp. 79-101).

Bloque	Tema	Subtema	Eje	Conocimiento	Orientación Didáctica
II	Significado y uso de los números	Números fraccionarios	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Utilizar las fracciones del tipo $m/2n$ (medios, cuartos, octavos...) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.	Para propiciar un primer acercamiento en clase a la noción de fracción se puede aprovechar el uso frecuente que se hace en el comercio de fracciones de unidades de medida, como medios, cuartos y octavos de litro de distintos productos. Nota: La expresión con literales aparece en el libro del alumno.
III				Utilizar las fracciones del tipo $m/2n$ (medios, cuartos, octavos...) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos.	Los repartos constituyen otra fuente de problemas adecuada para el estudio de las fracciones para expresar cantidades. Se sugiere plantear repartos concretos (por ejemplo, hojas de papel que representan pasteles), en los que los resultados sean a veces menores que una unidad y otras mayores (3 pasteles entre 2 niños, 5 pasteles entre 8 niños).
IV				Identificar escrituras equivalentes con fracciones. Comparar fracciones en casos sencillos.	Tanto en las situaciones de medición como en las de reparto pueden aparecer distintas expresiones con fracciones para expresar una misma cantidad. Por ejemplo, del reparto “3 unidades entre 4” pueden aparecer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Esta diversidad de representaciones puede aprovecharse para que los alumnos determinen si son o no <i>equivalentes</i> y para que empiecen a formar un repertorio de equivalencias básicas. Introducción al concepto de equivalencia de fracciones.
V				Elaborar e interpretar representaciones gráficas de las fracciones.	Las actividades anteriores de medición y de reparto llevan a fraccionar magnitudes continuas (longitudes, superficies). Para reforzar los aprendizajes que se favorecen con esas actividades, en particular el estudio de la fracción como expresión de una relación entre una parte y un todo, es conveniente plantear además actividades en las que los alumnos elaboren o interpreten representaciones gráficas de las fracciones Uso del concepto de equivalencia de fracciones.

Apéndice G

Actividades y contenidos de fracciones equivalentes en el tercer grado. Libro del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP. 2010c).

Lección	Tema/Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
IV.35 Comparamos fracciones	Significado y uso de los números. Números fraccionarios. <i>Identifica fracciones equivalentes para compararlas.</i>	1-5 - 118	Resolver problemas de fracciones en situaciones de medición (kg). Observar una representación de reparto de una cantidad de kilogramos en bolsas de diferentes capacidades. Observar la definición de fracciones equivalentes. Resolver problemas y representar las fracciones para comprobar sus respuestas. Identificar con el apoyo de preguntas la equivalencia de fracciones entre tercios y sextos en una representación gráfica en círculos. <i>Definición de fracciones equivalentes</i>	Definición de fracciones equivalentes a través de situaciones de reparto y una representación gráfica en círculos	Empleo de una situación de reparto y una representación gráfica para indicar la definición de fracciones equivalentes
V.43 La huerta de fracciones	Significado y uso de los números. Números fraccionarios. <i>Representa gráficamente fracciones e interprétalas</i>	1-7 - 150	Relacionar fracciones con su representación gráfica en figuras planas y dibujos. Resolver problemas representando en figuras planas como rectángulo y trapecio las fracciones correspondientes. Representar en un rectángulo dividido en 24 partes la fracción $\frac{5}{12}$. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones</i>	Representar fracciones en su forma $\frac{a}{b}$ en figuras planas y dibujos. Identificar fracciones equivalentes de denominador 12 y 24.	Uso del área de figuras planas para representar fracciones.
V.46 Sumar las partes de un todo.	Significado y uso de las operaciones. Problemas Aditivos. <i>Resuelve problemas con sumas o restas de fracciones</i>	1-9 - 161	Representar con dibujos la solución de un problema que implica suma de fracciones con diferente denominador. Resolver problemas de suma o resta de fracciones con diferente denominador empleando apoyos gráficos de figuras planas. Identificar mediante una definición el procedimiento para resolver sumas de fracciones con diferente denominador. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones</i>	Representar la solución de problemas empleando dibujos y apoyos gráficos. Procedimiento para resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador.	Uso de fracciones equivalentes al resolver sumas o restas de fracciones con diferente denominador.

Apéndice H

Actividades y contenidos de fracciones equivalentes en el tercer grado. Libro de Desafíos Matemáticos del alumno. Matemáticas. Tercer grado. (SEP. 2013b).

Desafío	Tema/Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
III.32 ¿Qué parte es?	Significado y uso de los números. Números fraccionarios.	-3 - 74	Identificar fracciones de medios, cuartos y octavos en figuras planas como círculos, cuadrados y rectángulos. Identificar fracciones como puntos en la recta señalados con letras. Comparar pares de fracciones dadas, anotando el símbolo $>$ (mayor que), $<$ (menor que) o $=$ (igual) según corresponda. Uso del concepto de equivalencia de fracciones empleando el símbolo $=$.	Representar fracciones en figuras planas y en la recta.	Con el empleo de igualdades identificar fracciones equivalentes, usando representaciones en figuras planas y en la recta numérica.
III.34 ¿A quién le toco más?		-6 - 79	Realizar diferentes repartos apoyados en dibujos y preguntas. En la última actividad del desafío se indica un reparto de cierto número de galletas entre cierto número de personas y en el siguiente reparto se duplican las personas y las galletas, con esto se indica la igualdad de partes en los resultados y se contestan preguntas relacionadas con esta equivalencia. Introducción al concepto de equivalencia de fracciones empleando igualdad de partes en un reparto.	Realizar situaciones de reparto de diferentes cantidades de objetos entre diferentes cantidades de personas.	Empleando el término igualdad se introduce el concepto de equivalencia de fracciones .
IV.48 Reparto de manzanas		1-6 - 107	Resolver un problema de reparto y contestar preguntas referentes al reparto. Resolver un problema de longitud empleando medios, cuartos y octavos de metro para recorrer la misma longitud (dos metros). Contestar preguntas referentes para identificar igualdad de longitudes. Resolver un problema de reparto y contestar preguntas referentes. Introducción al concepto de equivalencia de fracciones empleando igualdad de partes.	Realizar situaciones de reparto de diferentes objetos entre diferentes personas.	Empleando el término igualdad se introduce el concepto de equivalencia de fracciones .

Apéndice I

Bloques de estudio del cuarto grado con el subtema de números fraccionarios. Programas de estudio 2011. Cuarto grado. Educación básica. Primaria. (SEP. 2011c, pp. 4-78).

Bloque	Aprendizaje(s) Esperado(s)	Eje	Conocimiento(s)
I	Identifica <i>fracciones equivalentes</i> , mayores o menores que la unidad.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Resolución de problemas que impliquen particiones en tercios, quintos y sextos. Análisis de escrituras fraccionarias aditivas equivalentes y de fracciones mayores o menores que la unidad. Introducción al concepto de equivalencia de fracciones.
II	Identifica fracciones de magnitudes continuas o determina qué fracción de una magnitud es una parte dada.		Representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras). Identificación de la unidad, dada una fracción de la misma.
III	Identifica expresiones aditivas, multiplicativas o mixtas que son <i>equivalentes</i> , y las utiliza al efectuar cálculos con números naturales.		Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición. Resolución con procedimientos informales, de sumas o restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos (medios, cuartos, tercios, etcétera). Uso del concepto de equivalencia de fracciones.
IV	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones <i>compuestas</i> .		Uso de las fracciones para expresar partes de una colección. Cálculo del total conociendo una parte.
V	Identifica y genera <i>fracciones equivalentes</i> .		Obtención de fracciones equivalentes con base en la idea de multiplicar o dividir al numerador y al denominador por un mismo número natural. Expresiones equivalentes y cálculo del doble, mitad, cuádruple, triple, etc., de las fracciones más usuales ($1/2$, $1/3$, $2/3$, $3/4$, etcétera). Desarrollo del concepto de equivalencia de fracciones y algoritmo para obtención de fracciones equivalentes.

Apéndice J

Actividades y contenidos de fracciones equivalentes. Libro del alumno. Matemáticas. Cuarto grado. (SEP. 2010a).

Lección	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
II.15 Dividir pelotas	Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos <i>Problemas que impliquen suma o resta de fracciones, en casos sencillos, con distintos procedimientos.</i>	57-60	Representar quintos y sextos de un total de pelotas y contestar preguntas referentes a completar la unidad. Obtener fracciones equivalentes a un sexto con un conjunto de pelotas y balones; observando el grupo de pelotas representadas en una gráfica y determinar por qué $1/6 = 2/12$. Resolver problemas que impliquen sumas o restas de fracciones y contestar preguntas referentes a la operación realizada. Indicar la fracción que se representa en algunas figuras planas. Realizar sumas o restas de fracciones con igual denominador. <i>Introducción y uso al concepto de equivalencia de fracciones.</i>	A partir de situaciones de reparto y representación en figuras planas se introduce el concepto de <i>equivalencia de fracciones.</i>	Empleo del concepto de <i>equivalencia de fracciones</i> al resolver sumas o restas de fracciones.
III.24 ¿Qué es mayor $1/2$ o $1/3$?	Significado y uso de los números. Números fraccionarios. <i>Comparar fracciones e identifica fracciones equivalentes.</i>	84-86	Resolver un problema de reparto de una unidad en diferentes partes: 2, 3, 4, 5, 6 y 8 y contestar preguntas referentes a ese reparto. Representar medios, cuartos, octavos y dieciseisavos en cuadrados, completar una tabla con las columnas: figura, fracción coloreada, medios, cuartos, octavos y dieciseisavos y contestar preguntas referentes a dicha tabla. Resolver un problema y una actividad que implique ordenar fracciones. Escribir fracciones equivalentes a una fracción dada e identificar la definición de fracciones equivalentes. <i>Se indica la definición de fracciones equivalentes.</i>	Encontrar fracciones equivalentes a una dada, partir de la observación de figuras planas. Encontrar fracciones equivalentes a partir de la definición de equivalencia.	Conocer la definición de equivalencia.
III.25 El doble de una	Estimación y cálculo mental. Números fraccionarios.	90-92	Representar fracciones equivalentes a $1/2$ con cuartos, sextos, octavos y décimos empleando pliegos de cartulina.	Encontrar las fracciones equivalentes a una dada, partir de la observación de	Identificar fracciones equivalentes a partir de encontrar el doble de

Continúa

Apéndice J. (Concluye)

Lección	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
fracción	<i>Determina expresiones equivalentes y calcula el doble, mitad, cuádruple, triple, etcétera, de las fracciones más usuales ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etcétera).</i>		<p>Representar esas fracciones equivalentes en rectángulos.</p> <p>Representar en rectángulos de la misma medida los sextos, doceavos, cuartos, octavos, medios y tercios.</p> <p>Basándose en la representación de rectángulos y en la definición indicada, completar una tabla de datos de fracciones equivalentes con las siguientes columnas: Fracción y formas de representar la fracción (Cuatro columnas).</p> <p>Siguiendo el ejemplo indicado, escribir al menos dos formas diferentes de expresar las fracciones indicadas.</p> <p>Completar un cuadro que incluye las columnas siguientes: fracción, mitad, tercio, doble, triple, cuádruple y contestar preguntas referentes al contenido.</p> <p>Resolver problemas; uno de reparto y otro de partes de..., para identificar fracciones. Se indica la definición de equivalencia respecto a que una fracción se puede expresar de diferentes formas.</p> <p><i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al identificar un procedimiento que permita obtener fracciones equivalentes.</i></p>	<p>figuras planas.</p> <p>Encontrar fracciones equivalentes a partir del procedimiento de obtención del doble de una fracción.</p> <p>Se indica la siguiente definición <i>“Una fracción puede expresarse de diferentes maneras, ya sea sumando una misma fracción o diferentes fracciones. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ puede expresarse como $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, entre muchas otras formas”</i> es imprecisa al indicar <i>“sumando una misma fracción”</i>.</p>	<p>cada uno de sus términos y a su vez establecer el procedimiento de multiplicarlos por dos para encontrar fracciones equivalentes.</p>

Apéndice K

Actividades y contenidos de fracciones equivalentes en el cuarto grado. Libro del alumno. Desafíos Matemáticos. Cuarto grado. (SEP. 2013a).

Desafío	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
II.29 Partes de un todo	Significado y uso de los números. Números fraccionarios.	53 – 55	Identificar y representar fracciones en figuras planas como rectángulos, cuadrados, triángulos y en segmentos de recta. Representar cuartos, octavos y dieciseisavos en una figura dividida en 32 partes iguales. Representar quintos y tercios en una figura dividida en sesenta partes iguales. Introducción al concepto de equivalencia de fracciones mediante representaciones gráficas.	Identificar fracciones equivalentes mediante representación gráfica en una figura dividida en un número de partes diferente al denominador de la fracción a representar.	Introducción al concepto de equivalencia de fracciones utilizando representaciones en figuras planas.
III.49 Tiras de Colores		94 – 96	Recortar tiras de diferente color y tamaño. Utilizando estas tiras identificar cuantas veces cabe la tira de determinado color en una tira de otro color. Identificar formas distintas de formar un entero y $\frac{2}{3}$ utilizando las tiras de diferentes colores. Encontrar expresiones equivalentes a una fracción dada empleando las tiras de diferentes colores. Escribir la expresión “es equivalente a” entre dos pares de fracciones; también pueden utilizar las tiras de fracciones. Introducción al concepto de equivalencia de fracciones mediante comparación de longitudes y empleo del término “es equivalente a”	Identificar fracciones equivalentes mediante uso de tiras de diferentes longitudes y colores.	Introducción al concepto de fracciones equivalentes utilizando representaciones en longitudes.
V.89 ¿Por qué son iguales?		168 – 169	Representar fracciones de distinto denominador indicadas en un rectángulo dividido en 120 partes iguales. Contestar preguntas sobre esas representaciones	Identificar fracciones equivalentes mediante uso de una figura plana y determinar un	Indicar el procedimiento para obtener fracciones equivalentes

Continúa

Apéndice K. (Concluye)

Desafío	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
			Identificando lo que sucede con los numeradores o denominadores de las fracciones representadas. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al encontrar el algoritmo de multiplicar la fracción por un número para encontrar su equivalente.</i>	procedimiento para obtener fracciones equivalentes al multiplicar numerador y denominador por el mismo número.	multiplicando el numerador y denominador de una fracción por el mismo número.
V.90 Solo del mismo valor		170	Anotar numerador o denominador faltante o ambos en una secuencia de fracciones equivalentes. Identificar fracciones equivalentes a una dada. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al escribir fracciones equivalentes a otra dada.</i>	Escribir fracciones equivalentes en secuencias de fracciones.	Aplicar el procedimiento indicado en el desafío 89 para encontrar fracciones equivalentes.

Apéndice L

Bloques de estudio del quinto grado con el subtema de números fraccionarios. Programas de estudio 2011. Quinto grado. Educación básica. Primaria. (SEP. 2011d, pp. 76–80).

Bloque	Aprendizajes Esperados	Eje	Contenido
I	Identifica rectas paralelas, perpendiculares y secantes, así como ángulos agudos, rectos y obtusos.	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Problemas aditivos Resolución de problemas que impliquen sumar o restar <i>fracciones</i> cuyos denominadores son múltiplos uno de otro.
II	Resuelve problemas que implican el uso de las características y propiedades de triángulos y cuadriláteros.		Números y sistemas de numeración. Conocimiento de diversas representaciones de un número fraccionario: con cifras, mediante la recta numérica, con superficies, etc. Análisis de las relaciones entre la <i>fracción</i> y el todo.
III	Resuelve problemas de valor faltante en los que la razón interna o externa es un número natural.		Números y sistemas de numeración Comparación de fracciones con distinto denominador, mediante diversos recursos. Problemas aditivos. Uso del cálculo mental para resolver adiciones y sustracciones con números fraccionarios y decimales.
IV	Resuelve problemas que implican sumar o restar números fraccionarios con igual o distinto denominador.		Números y sistemas de numeración Identificar la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión. Problemas aditivos Resolución de problemas que impliquen sumas o restas de fracciones comunes con denominadores diferentes.
V	Usar fracciones para expresar cocientes de divisiones entre dos números naturales		Números y sistemas de numeración Uso de la expresión n/m para representar el cociente de un número entero (n) entre un número entero (m): 2 pasteles entre 3; 5 metros entre 4, etcétera.

Apéndice M

Actividades y contenidos de fracciones equivalentes en el cuarto grado. Libro del alumno. Matemáticas. Quinto grado. (SEP. 2010b).

Lección	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
II.13 Graduados especiales en las rectas	Significado y uso de los números. Números fraccionarios. <i>Ubica fracciones en la recta numérica.</i>	45-46	Elaborar una recta numérica y ubicar diferentes fracciones. Resolver problemas y un reto que implican ubicar fracciones en la recta numérica y contestar preguntas de orden de las fracciones. Uso del concepto de equivalencia de fracciones.	Representar fracciones en la recta numérica y establecer su orden ($>$, $=$ o $<$)	Se introduce la representación de fracciones como puntos en la recta.
II.14 Fracciones de 10 en 10	Significado y uso de los números. Números decimales. <i>Utiliza fracciones decimales para expresar medidas; identifica equivalencias entre fracciones decimales y utiliza escritura con punto decimal en ejemplos de dinero y medición.</i>	47-49	Dibujar una recta numérica y ubicar fracciones con denominador 10, 100 o 1000 y en base a esto contestar algunas preguntas. Ubicar fracciones de décimos y centésimos y explicar por qué hay fracciones que se ubican en el mismo punto. Completar una tabla con las columnas tituladas: Notación Decimal, Unidades, Décimos, Centésimos, Milésimos y Fracciones decimales. Obtener el perímetro de algunas figuras expresado en decímetros. Leer el concepto de fracciones decimales. Resolver problemas que impliquen el uso de fracciones decimales. Uso del concepto de equivalencia de fracciones.	Establecer la equivalencia de números decimales con fracciones decimales.	Utiliza el concepto de equivalencia de fracciones al establecer igualdades entre fracciones decimales y números decimales. (expresiones decimales)
III.25 Fracciones: ¿iguales o distintas?	Significado y uso de los números. Números fraccionarios. <i>Aplica fracciones equivalentes y compara con fracciones de distinto</i>	85-89	Resolver un problema representando fracciones en la recta numérica y comparando el orden de las fracciones. Resolver un problema que implica reparto y presentar el resultado en una recta numérica. Colorear de un conjunto de globos las fracciones que representan. Resolver un problema que implica reparto y completar una tabla que represente los diferentes repartos en fracciones.	Establecer la equivalencia de fracciones empleando representaciones en la recta numérica, en conjuntos discretos y en situaciones de reparto.	Obtiene y aplica el procedimiento de multiplicar los elementos de una fracción por el mismo número para encontrar fracciones equivalentes.

Continúa

Apéndice M. (Concluye)

Lección	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
	<i>denominador.</i>		<p>Completar una tabla con las columnas tituladas: Fracción, Fracción entera por la que se multiplicó, Operación y Fracción equivalente. Tomando como base un ejemplo resuelto.</p> <p>Escribir cuatro fracciones equivalentes a una fracción dada, usando el procedimiento del cuadro anterior.</p> <p>Comparar pares de fracciones indicando los signos $>$, $=$ o $<$, según corresponda.</p> <p>Formalizar el procedimiento para obtener fracciones equivalentes leyéndolo e identificar que es una forma para comparar orden de las mismas.</p> <p><i>Desarrollo del concepto de equivalencia de fracciones al indicar el procedimiento para obtenerlas.</i></p>	<p>Identificar el procedimiento de multiplicar numerador y denominador por el mismo número para encontrar fracciones equivalentes.</p>	
III.27 Fracciones: de la hoja	Significado y uso de las operaciones. Problemas aditivos. Resuelve problemas que incluyen sumas o restas de fracciones y números decimales.	93-95	<p>Doblar una hoja en medios, cuartos y sumar un medio con un cuarto y por medio de preguntas obtener un procedimiento que indique el resultado de la suma de fracciones de diferente denominador.</p> <p>Observar un rectángulo del mismo tamaño dividido en fracciones diferentes e indicar la fracción que representa cada parte. Representación gráfica en rectángulos de una suma de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Identificar en un cuadro el procedimiento para sumar fracciones con diferente denominador y que se debe usar el concepto de <i>equivalencia de fracciones</i> para tener fracciones iguales.</p> <p>Resolver problemas que impliquen suma de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Realizar ejercicios de suma de fracciones con diferente denominador.</p> <p><i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al resolver sumas de fracciones con diferente denominador.</i></p>	<p>Representar en figuras planas la suma de fracciones con diferente denominador.</p> <p>Identificar el procedimiento de suma de fracciones con diferente denominador</p>	<p>Emplear fracciones equivalentes para que los términos en una suma de fracciones con diferente denominador se conviertan en fracciones con el mismo denominador para resolverlas de forma convencional.</p>

Apéndice N

Actividades y contenidos de fracciones equivalentes en el quinto grado. Libro del alumno. Desafíos Matemáticos. Quinto grado. (SEP. 2012).

Desafío	Tema / Subtema	Páginas	Actividades/Contenido	Aspectos de la Fracción	Observaciones
I.2 ¿Sumar o restar?	Números fraccionarios <i>Emplear suma y resta de fracciones para resolver problemas.</i>	11	Resolver problemas que impliquen suma o resta de fracciones de diferente denominador. Representar fracciones dadas de dos formas diferentes cada una. Realizar sumas de fracciones y representar de manera gráfica los resultados obtenidos. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones sumando o restando fracciones con diferente denominador.</i>	Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador.	Usar fracciones equivalentes para resolver sumas o restas de fracciones con diferente denominador.
III.37 <i>Comparación de cantidades</i>	Números fraccionarios <i>Resolver problemas que impliquen identificar el orden de fracciones.</i>	79	Resolver problemas donde se identifique de las fracciones dadas cual es la mayor. De tres series de fracciones dadas con diferente denominador ordenarlas de forma descendente. <i>Uso del concepto de equivalencia de fracciones al establecer orden entre fracciones.</i>	Identificar orden de fracciones con diferente denominador	Uso del concepto de <i>equivalencia de fracciones</i> para establecer orden entre fracciones de diferente denominador.
III.38 <i>¡Atajos con fracciones!</i>	Números fraccionarios Resolver operaciones sencillas con fracciones.	80	Completar una tabla de datos donde se realicen operaciones de suma y resta con fracciones de distinto denominador (sextos, séptimos y quintos) para completar las columnas: Cálculo, resultado y procedimiento. <i>Aplicación del concepto de equivalencia de fracciones al resolver sumas y restas con fracciones.</i>	Resolver sumas y restas de fracciones con diferente denominador	Uso del concepto de <i>equivalencia de fracciones</i> al resolver operaciones con fracciones de diferente denominador.
III.61 y 62 <i>Patrones numéricos.</i>	Números fraccionarios <i>Completar secuencias de números fraccionarios.</i>	116-117	Completar sucesiones de números, los últimos implican el uso de suma de fracciones con diferente denominador. Completar sucesiones de números fraccionarios. <i>Aplicación del concepto de equivalencia de fracciones al completar sucesiones de fracciones.</i>	Completar sucesiones de fracciones con diferente denominador	Uso del concepto de <i>equivalencia de fracciones</i> al resolver completar sucesiones de fracciones con diferente denominador.