UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

"La fracción como medida: una experiencia con alumnos de quinto grado"

Tesis para obtener el Grado de

Maestra en Desarrollo Educativo

Presenta

María Guadalupe Juárez Martínez

Director de Tesis

José Luis Cortina Morfín

Ciudad de México, febrero 2017

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El eje esencial de esta tesis fue la instrumentación y puesta en práctica de una propuesta de aprendizaje sobre diferentes temas de fracciones. Esta propuesta de aprendizaje fue llevada a cabo con estudiantes de quinto grado de educación primaria, en una escuela pública de la Ciudad de México, en turno vespertino. El objetivo primordial de la propuesta de aprendizaje fue favorecer en los estudiantes la comprensión de conceptos básicos relacionados con fracciones comunes.

Este trabajo de investigación se divide en seis capítulos, una introducción y un apartado de conclusiones. En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, mismo que surge de mi preocupación sobre la falta de comprensión que en los estudiantes de quinto grado de educación primaria, en cuestiones básicas relacionadas con el uso de fracciones, por ejemplo al no poder argumentar la relación de orden entre una fracción propia y una impropia.

También se documenta en este primer capítulo, que la falta de comprensión en los diferentes temas de fracciones, no solo ha existido en mis salones de clase, sino que es un problema nacional. Se revisan los reportes de la aplicación del Examen para la Calidad y el Logro Educativo 2009 (EXCALE 2009) de alumnos de sexto grado de primaria, así los del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea 2015), publicados por Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).

En el segundo capítulo, titulado “marco referencial”, se describen los elementos que se retomaron para el diseño y la puesta en práctica de la propuesta de aprendizaje. Estos elementos se tomaron de dos fuentes: (1) el “Programa de Estudio 2011. Guía para el Maestro, Educación Básica Primaria, Quinto Grado”, que proporciona la Secretaría de Educación Pública (SEP) a las escuelas primarias de todo el país y (2) el libro “De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos”, del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2015).

La primera fuente sirvió para puntualizar los objetivos que debe cumplir el docente en un salón de clases con estudiantes de educación Primaria. También esta primera fuente se utilizó para saber los fundamentos teóricos, filosóficos y metodológicos que sustentan el trabajo de las asignaturas de educación primaria, incluyendo la de Matemáticas. De la segunda fuente, “De los principios a la acción”, se toman cinco de las ocho recomendaciones que se hacen en el libro, para que los alumnos lograran generalizar conceptos matemáticos.

En el tercer capítulo se describe la metodología empleada para el diseño de la propuesta de aprendizaje, que fue la columna vertebral del trabajo de investigación. Se menciona que se usó la metodología de los experimentos de diseño en el aula, en la forma en que ha sido desarrollada por el Dr. Paul Cobb y sus colegas (Gravemeijer y Cobb, 2006; Stephan, Bowers, y Cobb, 2013). Asimismo, se presentan que uno de los propósitos de un experimento de enseñanza es poner a prueba y contribuir al continuo desarrollo de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA). En el caso de la presente tesis, se trata de la THA que está siendo desarrollada por Cortina y sus colegas (Cortina, Visnovska, y Zúñiga, 2014; Cortina y Zúñiga, 2008).

Otro punto importante que se indica en este tercer capítulo es que la THA está constituida de conjeturas sobre cómo puede evolucionar el aprendizaje de las fracciones en una comunidad de aula, y sobre los recursos que pueden ser utilizados para organizar este aprendizaje. En la parte final del tercer capítulo, se describen las características de la escuela donde se puso en práctica la propuesta de aprendizaje, así como también la instrumentación de la misma.

En el Capítulo IV se detalla el análisis de la prueba diagnóstica que se aplicó a los estudiantes de forma escrita, el cual se separa en dos dimensiones. En la primera dimensión se dan a conocer los resultados generales obtenidos por los alumnos en las cinco secciones del diagnóstico: números naturales, duplicación directa e inversa, proporcionalidad, fracciones en el contexto de medida y relación de orden de fracciones.

En la segunda dimensión de la prueba diagnóstica se analizan las respuestas que de manera individual dieron cada uno de los 20 alumnos participantes. Con base en ellas se les organiza en tres grupos A, B, y C.

En el Capítulo V se presenta el análisis de las 18 sesiones de enseñanza. Para cada sesión se especifica el objetivo de aprendizaje que la guió. Además se describe el inicio, desarrollo y cierre de cada una de las clases.

En el inicio de cada una de las sesiones, se menciona desde la organización del grupo hasta la introducción del tema.

En el desarrollo se describen algunos momentos importantes que se tuvieron en las sesiones. En estas descripciones se incluyen diálogos que se generaron en las clases. También se analizan algunos argumentos que expresaron los estudiantes, los cuales ilustran su nivel de compresión. En el cierre de la sesión se hace una reflexión respecto a si se logra o no el objetivo de aprendizaje.

En el Capítulo VI se dan a conocer los resultados de la evaluación final que se les aplicó a los estudiantes. El análisis de los resultados también se separó en dos dimensiones. En la primera dimensión se dan a conocer las tres secciones que conformaron la prueba, se describen las características de cada uno de los reactivos y se asigna el porcentaje de alumnos que contestaron correctamente cada uno de ellos, mostrados en una tabla.

En la segunda dimensión de la prueba final se analizan las respuestas de cada uno de los 20 alumnos que participaron en la propuesta de intervención, clasificándolos en dos grupos (A y B) de acuerdo a sus respuestas dadas en cada uno de los 28 reactivos.

En el último apartado de esta tesis, se presentan algunas conclusiones que se desprenden de las actividades realizadas durante el proceso de investigación. De manera general puedo afirmar que dicho proceso permitió fortalecer mi quehacer docente en los diferentes contenidos de fracciones con alumnos de quinto grado, también me aportó conocimientos que sirven para abordar los diferentes temas que se establecen en los programas de estudio de educación primaria. Por tal motivo que este trabajo beneficie a más compañeros maestros.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Soy maestra de educación primaria. Mi formación la llevé a cabo en la Benemérita Escuela Nacional de Maestros (BENM). Tengo 15 años de servicio como docente frente grupo. Durante mi trayectoria, he trabajado con los diferentes grados de educación primaria, pero me he inclinado por los grados de quinto y sexto.

Soy una maestra que se ha preocupado por consolidar una formación como profesora en el aula. Por tal motivo, después de que egresé de la BENM y estando en servicio como docente frente a grupo, cursé el diplomado "Las matemáticas y su didáctica en la educación básica" con una duración de 225 horas y 30 créditos. También cursé la especialización "La matemática y su enseñanza en la escuela primaria", con una duración de cuatro trimestres, además de algunos cursos que ofertó la Secretaría de Educación Pública (SEP). Esta formación la llevé a cabo en contra-turno y los días sábados.

Durante mis años de servicio, me percaté y me preocupé porque mis alumnos parecía que no aprendían los contenidos que se encuentran en el programa de estudio de matemáticas, en específico, los diferentes temas de fracciones. Lo noté cuando mis estudiantes se enfrentaban a un problema matemático y su solución no era la correcta. Además, no podían explicar sus estrategias de resolución. Sus dificultades también se advertían en las evaluaciones escritas que se les aplicaban al término de cada bimestre, ya sea por mí o por alguna autoridad educativa.

Creía que iniciar un ciclo escolar con el mismo grupo de alumnos del año anterior era una ventaja, porque sabía que los diferentes temas de fracciones ya se habían trabajado en el ciclo anterior y por tal motivo se podía enseñar algo más. Pero no era así. Me daba cuenta que los alumnos no tenían claro lo que habían aprendido. Me preguntaba: si ya habíamos trabajado temas de fracciones en el ciclo anterior, ¿por qué no se veía reflejado ese trabajo?

Durante la elaboración de la presente tesis, me di cuenta que la falta de comprensión en los diferentes temas de fracciones no solo existía en mi salón de clases, sino que se encuentra en nuestro país en los diferentes contextos escolares. Esta realidad se puede constatar en los resultados que reporta el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) a través del Examen para la Calidad y el Logro Educativo 2009 (EXCALE 2009) aplicado a los alumnos de sexto grado de primaria. Por ejemplo, en uno de los reactivos de la mencionada prueba, se le presentó a los alumnos un problema de relación de orden de fracciones, similar a éste:

> Susana, Luis y Martha jugaron a ver quién duraba más tiempo equilibrando una escoba en un dedo. El tiempo que duró cada uno se muestra a continuación:
> -Susana: $\frac{2}{3}$ de minuto
> -Luis: $\frac{3}{2}$ de minuto
> -Martha: $\frac{5}{6}$ de minuto
> A partir del tiempo que duraron equilibrando la escoba, ¿cuál opción muestra el orden correcto?

A) 1er lugar: Luis. 2o lugar: Susana. 3er lugar: Martha.	B) 1er lugar: Martha. 2o lugar: Luis. 3er lugar: Susana.
C) 1er lugar: Luis. 2o lugar: Martha. 3er lugar: Susana.	D) 1er lugar: Martha. 2o lugar: Susana. 3er lugar: Luis.

El porcentaje de las respuestas correctas obtenido a nivel nacional fue de 29%, sólo cuatro puntos por arriba del puntaje esperado si todos los alumnos hubieran escogido su respuesta de manera aleatoria (25%). En el caso de las escuelas públicas del Distrito Federal, el porcentaje de respuestas correctas obtenido fue de 31%, un poco superior al nacional (cf., Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2015).

En otros reactivos en los que se evaluaron los conocimientos en cuanto a los diferentes contenidos de fracciones, en estudiantes de sexto grado de educación primaria, los resultados fueron mejores, pero no satisfactorios (ver Tabla 1). En general, los resultados del Excale 2009 sugieren que son muy pocos los estudiantes que logran adquirir los conocimientos de fracciones que se especifican en programas de estudio de educación primaria.

Tabla 1. Contenidos temáticos y porcentajes de aciertos de la prueba Excale 2009.

Contenido temático	Porcentaje de aciertos
Comparar fracciones menores a la unidad con el mismo denominador	64
Identificar fracciones comunes equivalentes	59
Ubicar fracciones comunes en la recta numérica	57
Comparar fracciones mixtas con impropias	39
Ubicar una fracción impropia en la recta numérica	37
Comparar fracciones menores a la unidad con distinto denominador que no sea múltiplo uno del otro	35

Otra evidencia de que la falta de comprensión de los diferentes temas de fracciones no solo está en un salón de clase, sino en muchos más, son los resultados de la prueba Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (Planea 2015), que también aplicó el INEE a estudiantes de sexto grado de primaria y tercero de secundaria en junio del 2015. El propósito fundamental de esta prueba fue conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en diferentes momentos de la educación obligatoria.

Para poder medir el dominio de los aprendizajes en alumnos de sexto grado, se evaluó a 104 204 estudiantes quienes estaban distribuidos en 3 446 escuelas de la República Mexicana. Estos alumnos contestaron la prueba que constó de 147 reactivos de la materia de matemáticas en total de los cuales cada alumno contesto una parte. Los resultados muestran que 60.5 % de los estudiantes examinados se encuentran en el Nivel 1, es decir, 63 043 de los alumnos evaluados se encuentran en el nivel más bajo de logro, donde en el solo escriben y comparan números naturales; sin embargo no resuelven problemas aritméticos con números naturales.

Otros 19 694 alumnos que corresponden al 18.9 % del total se encuentran en el Nivel 2, en el sólo resuelven problemas aritméticos que involucran suma, resta, multiplicación y división con números naturales. En el Nivel 3, se tiene el 13.8% que equivale a 14 380 alumnos que resuelven problemas aritméticos con números naturales o decimales y resuelven problemas de aplicación de perímetros.

Tabla 2. Contenidos curriculares y porcentajes de respuestas correctas que se obtuvieron de la evaluación Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (Planea 2015).

Contenido curricular	Muestra global en porcentaje
Identificar la fracción que representa un modelo continuo	56
Multiplicar una fracción por un natural	49
Identificar la fracción que representa un modelo discreto.	45
Comparar fracciones unitarias con denominadores que no son múltiplos unos de otros.	44
Comparar fracciones con denominadores múltiplos unos de otros	42
Comparar fracciones con denominadores que no son múltiplos unos de otros	42
Identificar la representación gráfica en un modelo discreto de una fracción propia	42
Identificar la fracción que representa un modelo discreto.	41
Identificar la representación gráfica en un modelo discreto de una fracción propia.	
Resolver problemas de multiplicación de una fracción por un natural	39
Identificar una fracción impropia en la recta numérica	35
Resolver problemas de multiplicación de una fracción por un natural	32
Resolver problemas de división de un numero fraccionario por un natural	33
Identificar una fracción impropia en la recta numérica	30
Sumar dos fracciones propias	28
Resolver problemas de suma de fracciones	27
Resolver problemas de comparación que impliquen sumas de fracciones	22

Solo 7085 de los estudiantes evaluados, lo que corresponden al 6.8% del total, se encuentran en el Nivel 4. Es decir, una minoría logró resolver problemas aditivos con números naturales, decimales y fraccionarios, además de resolver problemas que implican calcular áreas de una superficie y problemas que implican calcular promedios y medianas, y comparar razones.

La prueba Planea 2015 para sexto grado incluyó varios reactivos que se vinculan a los números fraccionarios. Se enuncian los contenidos que corresponden y el porcentaje de respuestas correctas que se obtuvieron en esta prueba en la Tabla 2.

De acuerdo con los resultados de la evaluación Planea, se puede conjeturar que pocos de los alumnos de sexto grado logran alcanzar los objetivos que se plantean el currículo de educación primaria.

El trabajo de investigación que llevo a cabo Francisco Javier Maya Juárez (2011) para obtener el grado de doctor. Da cuenta también de la falta de comprensión en los diferentes temas de fracciones y que es un problema generalizado, en nuestro sistema educativo, es la investigación de Francisco Javier Maya Juárez (2011). Este autor se dio cuenta que los estudiantes de las áreas económico administrativas en una universidad privada tenían un gran rezago en la comprensión de este contenido.

En mi caso, en cada una de mis sesiones de clase con alumnos de quinto o sexto grado de educación primaria, consideré y apliqué algunas estrategias de enseñanza que a mi parecer eran las adecuadas para abordar los diferentes temas de fracciones. Sin embargo, me daba cuenta de que mis alumnos no prendían y no sabía el porqué. Las dudas que me surgían eran: ¿Las estrategias son las adecuadas? ¿Podría ser que mi forma de intervenir como maestra en el desarrollo de la sesión no era la adecuada?

Estas dudas las traía a colación en las juntas de consejo técnico, donde nos reuníamos maestros de grupo, director, supervisor, jefe de sector y otros maestros que realizaban labores administrativas. Ahí se discutían asuntos relacionados con las dificultades observadas en los alumnos para aprender los diferentes contenidos de la curricula. Sin embargo no hubo una orientación adecuada con respecto a los diferentes temas de fracciones. Esto me indicaba que no solo era problema mío, porque nadie parecía saber cómo mejorar los resultados en los alumnos con respecto a los diferentes contenidos de fracciones.

Es así que la presente tesis se realizó con el objetivo de contribuir al desarrollo de recursos teóricos y prácticos útiles para mejorar la enseñanza de los diferentes contenidos de fracciones. Se espera que estos recursos, nos ayuden a los profesores frente a grupo a solucionar las algunas dificultades que presentan nuestros estudiantes de educación primaria en la comprensión de estos contenidos.

Como ya se mencionó, esta falta de comprensión se refleja en los problemas que presentan los alumnos en el momento de explicar sus estrategias de resolución a los problemas que implican fracciones. Además, se reflejan en resultados deficientes en las evaluaciones nacionales. También en el aparente desconocimiento que tienen del tema, incluso después de haberlo tratado en grados anteriores en múltiples ocasiones.

CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

En el presente capítulo se describen los fundamentos sobre la enseñanza de las matemáticas que fueron centrales en el diseño y puesta a prueba de la propuesta de aprendizaje y que es la base de la presente tesis.

Estos elementos se retomaron de dos fuentes: (1) el "Programa de Estudio 2011. Guía para el Maestro, Educación Básica Primaria, Quinto Grado", que proporciona la Secretaría de Educación Pública (SEP) a las escuelas primarias de todo el país y (2) el libro "De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos", del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los E.U.A (NCTM 2015).

2.1. Programa de Estudio 2011. Guía para el Maestro, Educación Básica Primaria, Quinto Grado.

En este documento se puntualiza el trabajo que debe realizar el docente en un aula para cumplir con los objetivos y favorecer el aprendizaje de los estudiantes de Educación Primaria. También se describen los fundamentos teóricos, filosóficos y metodológicos que sustentan el trabajo de las asignaturas de educación primaria, incluyendo la de Matemáticas.

Para la elaboración e instrumentación de la propuesta de aprendizaje se retomó el principio que indica que se debe promover el desarrollo de diferentes formas de pensar, que les permita a los estudiantes formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos, que en este caso estarían relacionados con el tema de las fracciones. Otro principio que se retomó fue el de procurar que los alumnos desarrollaran la disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo.

También se retomaron algunos de los "Estándares de Matemáticas". Según el Programa de Estudio, "los Estándares Curriculares de Matemáticas presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos".

Comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos de educación básica (preescolar, primaria y secundaria).

A continuación, se mencionan los cuatro aspectos alrededor de los cuales se organizan los estándares que se describen en el Programa de Estudio:

1.- Sentido numérico y pensamiento algebraico
2.- Forma, espacio y medida
3.- Manejo de información
4.- Actitud hacia el estudio de las matemáticas.

De los cuatro aspectos antes enumerados, se retomaron solamente tres para la elaboración de la propuesta y de estos solo algunos indicadores. Del primer aspecto, que se refiere al sentido numérico y pensamiento algebraico, se retomó el indicador que los alumnos lograran leer, escribir y comparar números fraccionarios. Del segundo aspecto, forma, espacio y medida, se favoreció al contenido de medida.

El aspecto número cuatro se refiere a las actitudes hacia el estudio de las matemáticas. De éste se retomó el que los alumnos desarrollaran un concepto positivo de sí mismos como usuarios de las matemáticas. También un gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos. Además se buscó que los estudiantes aplicaran el razonamiento matemático a la solución de problemas, aceptando el principio de que existen diversos procedimientos para resolver los problemas.

Otra de las situaciones que se promovió durante la puesta en práctica de la propuesta de aprendizaje fue que los alumnos desarrollaran el pensamiento racional y utilizaran las reglas de debate matemático al formular explicaciones o mostrar soluciones. De manera sistemática se insistió que los estudiantes de quinto grado de educación primaria compartieran e intercambiaran ideas sobre sus procedimientos y resultados al resolver problemas.

Finalmente, del enfoque didáctico se retomó la recomendación de utilizar secuencias problemáticas que despertaran el interés de los alumnos y los invitaran a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validaran los resultados. Al mismo tiempo se procuró que las situaciones planteadas implicaran justamente los conocimientos y habilidades que se quería desarrollar.

También se retomaron algunas sugerencias sobre los escenarios que se mencionan en el "Enfoque Didáctico" del Programa de Estudio. Estos fueron los siguientes:

a) Que los alumnos pensaran y discutieran en pequeños grupos cómo resolver los problemas que se les plantearon, mientras que la docente observaba, cuestionaba o daba algunas alternativas para que los alumnos lograran avanzar en la solución.
b) Que trabajaran colaborativamente, que expresaran sus ideas en una puesta en común cuando se tenían dos o más respuestas diferentes y este trabajo lo llevaría a cabo cualquier integrante del equipo.
c) Que se avanzara o retrocediera según se percatara la docente de si se cumplía con el objetivo de la sesión.
d) No tener temor a cómo piensan los alumnos. Esto se retomó a lo largo del trabajo realizado durante la propuesta de aprendizaje, ya que la docente planteaba un problema y lo dejaba en manos de los alumnos, sin explicación previa de cómo se resuelve, surgiendo procedimientos y resultados diferentes, que fueron producto de cómo pensaban los alumnos y de lo qué sabían hacer. El reto de la docente fue ayudar a los estudiantes a analizar y socializar lo que produjeron.

2.2. De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas

Para la elaboración de la propuesta también se retomó lo que se señala en el libro "De los principios a la acción" del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los E.U.A (NCTM 2015, por sus siglas en inglés). En la primera sección del libro se describen ocho prácticas de enseñanza necesarias para que los alumnos logren generalizar conceptos matemáticos. Para el trabajo de la propuesta de aprendizaje sólo se tomaron cinco de ellas. A continuación se especifican cuáles fueron y en un segundo momento se menciona qué recomendaciones de cada una de ellas se tomaron en cuenta para el diseño y puesta en práctica de la propuesta de aprendizaje.

La primera acción es el establecimiento de las metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje. La segunda, la instrumentación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas. La tercera, el favorecimiento del discurso matemático significativo. La cuarta, el apoyo al esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas. La quinta y la última se refieren al tema de la evaluación.

2.2.1. Establecimiento de las metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje

Como ya lo mencioné anteriormente, en la primera parte del libro se describen ocho prácticas de enseñanza basadas en investigaciones que pretenden reforzar el aprendizaje matemático de los estudiantes. La primera recomendación que se tomó para el diseño y la instrumentación de la propuesta de aprendizaje fue la del establecimiento de las metas matemáticas enfocadas en el aprendizaje.

Esta práctica sugiere que se establezcan objetivos claros para guiar el trabajo del docente durante una sesión de clase con los alumnos, así como también el maestro debe centrar la atención de los estudiantes en el seguimiento de su propio progreso hacia el objetivo de aprendizaje que se propone para el desarrollo de la sesión. Según esta práctica, las metas deben de estar vinculadas con el plan de estudios y las necesidades de aprendizaje del estudiante. Es esencial que el docente lleve a cabo la anterior vinculación, ya que le puede proporcionar un sustento más firme para las decisiones de enseñanza.

En la puesta en práctica de la propuesta de aprendizaje, lo esencial de establecer metas claras es para que se tuviera una indicador de lo qué están comprendiendo los alumnos, así como proporcionar el punto inicial y el fundamento de una enseñanza eficaz y reflexiva. Ya que uno de los propósitos fundamentales de las metas de aprendizaje es que centran en el trabajo de enseñanza y el aprendizaje del alumno, para tomar decisiones objetivas durante el saber.

2.2.2. La instrumentación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas

Una segunda práctica de enseñanza de las matemáticas que se tomó en cuenta para el trabajo de la propuesta fue la instrumentación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas. El libro mencionado nos recomienda utilizar las tareas como una manera para motivar el aprendizaje de los estudiantes y para ayudarlo a construir un nuevo conocimiento matemático a través de la resolución de problemas. Para que esto suceda el docente debe seleccionar e implementar en forma regular tareas que estimulen el razonamiento y la resolución de problemas. Es importante que los profesores comprendan la forma en que pueden emplearse los contextos, la cultura, las condiciones y el lenguaje con el propósito de crear tareas matemáticas que tomen en cuenta el conocimiento previo y las experiencias anteriores de los estudiantes.

2.2.3. Favorecimiento del discurso matemático significativo

Una tercera recomendación que se ocupó en el trabajo de la propuesta de aprendizaje fue la del favorecimiento del discurso. Según el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, el discurso en el salón de clases brinda a los estudiantes la oportunidad de compartir ideas y clarificar su comprensión, de construir argumentos convincentes, así como que los estudiantes desarrollen un lenguaje para expresar las ideas matemáticas y por consiguiente ampliaran su comprensión conceptual y el aprendizaje significativo de las matemáticas.

En la puesta en práctica de la propuesta de aprendizaje, la docente llevó a cabo la recomendación de determinar el modo de construir y de respetar el pensamiento de cada uno de los estudiantes, asegurándose de que las ideas matemáticas fueran la esencia de la clase, teniendo éstas un lugar importante en las puestas en común que se generaban de acuerdo con la participación de los alumnos.

Las siguientes recomendaciones también se tomaron en cuenta durante el trabajo de la propuesta de aprendizaje para promover el discurso matemático en los estudiantes. Primero, invitar a los estudiantes a anticipar sus respuestas. Segundo, supervisar el trabajo de los alumnos, e invitar a la totalidad de ellos, para que se involucraran en las tareas. La tercera recomendación que la maestra tomó en cuenta fue seleccionar a algunos estudiantes para que mostraran su trabajo. En la mayoría de las ocasiones fueron estudiantes a quienes se les dificultaba resolver el problema planteado o alumnos que tenían poca habilidad para expresar sus ideas.

2.2.4. Apoyo al esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas

Para el diseño y la puesta en práctica de la propuesta de aprendizaje, se adoptó la recomendación del libro “De los principios a la acción” del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM 2015, por sus siglas en inglés) de que cada uno de los esfuerzos de los estudiantes se tomaran como oportunidades para lograr el objetivo de aprendizaje o profundizar en la comprensión de la situación problemática, así como también lograr hacer las relaciones entre las ideas matemáticas para buscar soluciones correctas.

Algunos de los esfuerzos de los alumnos que se tomaron en cuenta durante la propuesta de aprendizaje fueron los siguientes: cuando los estudiantes comentaban sobre alguna predicción, es decir, sobre que pensaban o que creían que iba a suceder antes de hacer las cosas. Un ejemplo claro de esto fue cuando los alumnos elaboraron los pequeños, antes de que esto sucediera se hacían preguntas como la siguiente: ¿El pequeño de a tres será más grande o más pequeño que el pequeño de a dos? En ocasiones algunos alumnos acertaban y otros no. La docente consideró que en estos momentos de la sesión hay un esfuerzo productivo, debido a que los alumnos que aciertan ya tienen un progreso y le están dando sentido a lo que están haciendo, pero también los que tienen el error o los que no aciertan dieron oportunidad de aclarar las dudas con los comentarios del resto del grupo o al momento de llevar a cabo la acción de la construcción de los pequeños o con los comentarios de la profesora.

Para el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, a este tipo de esfuerzo lo llaman *esfuerzo productivo*. Está en contraposición con el *esfuerzo improductivo* que acontece cuando los estudiantes no tienen progreso alguno en dar sentido, explicar o en abordar un problema o tarea que proponga el maestro para lograr algún fin: “La enseñanza que incluye y utiliza el esfuerzo productivo reditúa beneficios de larga duración, facultando mejor a los estudiantes para que apliquen su aprendizaje a nuevos problemas contextualizados” (Kapur, 2010, citado en NCTM, 2015, p. 49).

Los profesores deben aceptar que el esfuerzo es importante para el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, transmitirles este mensaje y darles tiempo para que intenten superar sus incertidumbres. Lo anterior fue otra de las recomendaciones que se tomó, en el trabajo con la propuesta de aprendizaje.

2.2.5. Evaluación

En cuanto al tema de evaluación, se tomaron las siguientes recomendaciones para el trabajo de la propuesta de aprendizaje: La primera fue que la evaluación en un proceso cuyo propósito principal es recopilar datos que refuercen y mejoren la enseñanza y el aprendizaje en los estudiantes en cuanto a los diferentes temas de fracciones. La segunda recomendación fue que es necesario supervisar el proceso de cada uno de los alumnos para fomentar su aprendizaje. La tercera fue tomar decisiones respecto de la enseñanza para modificarla, con el objeto de lograr el aprendizaje del estudiante. La cuarta recomendación fue evaluar el logro de los estudiantes a fin de resumir y reportar la comprensión mostrada por ellos durante la propuesta de aprendizaje. Y la quinta recomendación fue que la docente concluyera, interpretara y utilizara la evidencia sobre el logro de los estudiantes, con el fin de tomar decisiones sobre las próximas sesiones de trabajo con ellos. Según el documento del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, con ello probablemente se toman mejores decisiones que las que se tomarían en ausencia de la evidencia.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

Como recordará el lector, en el planteamiento del problema expliqué la falta de comprensión por parte de los alumnos de quinto grado de educación primaria, en relación con los diferentes temas de fracciones. Mencioné que la falta de comprensión, se puede conjeturar cuando los estudiantes se enfrentan a solucionar una situación problemática y explican sus procedimientos de solución en pequeños grupos o frente al grupo. Asimismo expuse en el planteamiento del problema que esta falta de comprensión también se ve reflejada en los desalentadores resultados de las evaluaciones escritas nacionales e internacionales.

3.1. Experimentos de enseñanza

Tomando en cuenta esta problemática, se diseñó y se puso en práctica un experimento de enseñanza, como una vía para ayudar a mejorar la comprensión de los diferentes temas de fracciones. Se decidió llevar a cabo el experimento de enseñanza con alumnos de quinto grado, debido a mis experiencias obtenidas en este grado durante mi trayectoria como maestra frente a grupo.

Como ya lo dije antes, para el diseño de la propuesta de aprendizaje, se utilizó la metodología de los experimentos de diseño en el aula, en la forma en que ha sido desarrollada por el Dr. Paul Cobb y sus colegas (Gravemeijer y Cobb, 2006; Stephan, Bowers, y Cobb, 2013). Con esta metodología, uno de los propósitos del experimento de enseñanza fue poner a prueba y contribuir al desarrollo de una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) de la fracción como medida. Esta THA está siendo desarrollada por Cortina y sus colegas (Cortina, Visnovska, y Zúñiga, 2014; Cortina y Zúñiga, 2008).

La trayectoria en cuestión está constituida de conjeturas sobre cómo puede evolucionar el aprendizaje de las fracciones en una comunidad de aula, y sobre los recursos que pueden ser utilizados para organizar este aprendizaje.

3.2. La fracción como medida

En la operacionalización que, para fines didácticos, se hace en la THA del constructo "fracción como medida", se retoman las consideraciones de Freudenthal (1983) sobre dos formas de aproximarse a las fracciones. En su fenomenología didáctica, este autor hace una distinción entre *la fracción como facturadora* y *como comparadora*.

La distinción de Freudenthal (1983) es equiparable a la que Kieren (1980) y otros han hecho entre el uso de las fracciones para cuantificar relaciones parte-todo y para cuantificar medidas. Aunque, en contraste con el trabajo de esos otros autores, la preocupación de Freudenthal no se centra en caracterizar las imágenes mentales que emergen cuando se interpreta las fracciones en una u otra de estas formas, sino en las características de las situaciones cotidianas en la que alguna de estas interpretaciones emergería como una manera más o menos "natural" de abordarlas.

Una diferencia fenomenológica fundamental que Freudenthal identifica entre las situaciones que invitan a ser interpretadas en el modo facturador y comparador es que las primeras implican únicamente el uso de fracciones propias. Así pues, una situación de fracturación sería aquella que no podría implicar el uso de una fracción impropia. Por ejemplo, si preguntamos: "¿Cuánto de su pastel de cumpleaños se comió Ana?" la respuesta no puede ser mayor que uno. Decir que Ana se comió $\frac{4}{3}$ o $\frac{9}{8}$ de su pastel sería absurdo. Igualmente, si preguntáramos: "¿Qué proporción de los nuevos votantes van a votar por el partido azul?" una respuesta que implique a una fracción impropia carecería de sentido.

En contrate, en las situaciones de comparación (esto es, de medición), los "enteros" no aparecen como *enteros reales* sino como unidades de medida. Esto posibilita el uso sensato tanto de fracciones propias como impropias. Es en este tipo de situaciones en las que tiene sentido hablar de algo como " $\frac{9}{4}$ de un pastel". Por ejemplo, se puede decir que la cantidad de pastel que se comieron los invitados de una fiesta es $\frac{9}{4}$ de un pastel". Es importante notar que, en esta situación, el ente “un pastel” no debe ser considerado como “un entero” o “un todo”, sino como una unidad de medida. Así pues, para ser sensata, la afirmación tiene que ser interpretada como algo parecido a: “La cantidad de pastel que se comieron los invitados durante la fiesta corresponde a nueve veces la cuarta parte de un pastel unitario”.

La aproximación de Freudenthal, a las diferencias entre las situaciones que implican establecer una relación cuantitativa entre la parte y el todo, y las que implican medir, ha sido central en la elaboración de la THA que fue puesta a prueba durante la instrumentación de la propuesta de aprendizaje. En ésta, se busca apoyar el aprendizaje de los alumnos completamente dentro del contexto de la fracción como comparadora. Se procura que los estudiantes consideren las fracciones como números que dan cuenta de la longitud de las cosas, en referencia a una unidad de medida.

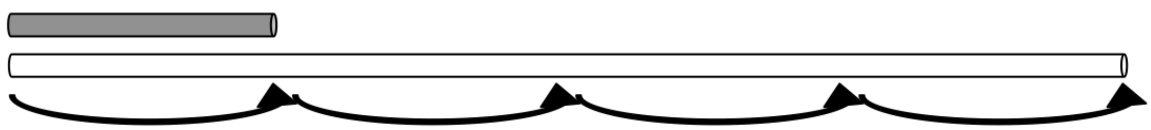
Vale la pena mencionar que la medición de longitudes ha sido considerada por varios autores como un ámbito particularmente favorable para promover el aprendizaje de las fracciones. Entre ellos están Davydov (1969 / 1991) y Brousseau (2004), además de muchos otros.

Otro aspecto central de la THA que fue puesta a prueba durante la instrumentación de la propuesta de aprendizaje, implica orientar a los alumnos a interpretar la magnitud que es cuantificada por una fracción unitaria como un divisor en una división tasativa (también conocida como “división de medición”).

En general, en las etapas tempranas de la enseñanza de las fracciones lo más común es que se oriente a los alumnos a interpretar el número fraccionario, en particular las fracciones unitarias, como el tamaño de la parte, que es producida cuando un entero o una unidad de medida que es partida en partes iguales. Por ejemplo, es común que se oriente a los alumnos a interpretar el significado de $\frac{1}{3}$, ya sea como una cantidad de pastel que resulta de partir un pastel en tres partes iguales y tomar una o de segmentar una longitud en tres segmentos iguales y tomar uno. En ambos casos, es válido decir que se presentan las fracciones unitarias como cocientes de una división de reparto en las que el dividendo es *uno* (esto es, el entero o la unidad de medida), y el divisor es un número natural (el número de partes en las que se parte al entero o se segmenta a la longitud).

En los trabajos de Steffe y Olive (2010), así como de Tzur (1999), es posible identificar una forma alternativa en la que los estudiantes pueden darle sentido a las fracciones unitarias como cantidades. Ésta implica interpretarlas como divisores en una división tasativa, en la que la unidad de referencia es dividida en un número entero de veces, sin que quede residuo alguno. Esto es: $1 \div 1/n = n$, donde n es un número natural. En el contexto de la medición de longitudes, esto significa que se espera que $\frac{1}{4}$ de una vara de medición sea interpretada como una longitud que cabría (o que dividiría) la longitud de una unidad de referencia exactamente cuatro veces (ver Figura 1).

Figura 1. Un cuarto como una longitud que divide exactamente cuatro veces a la unidad de referencia.



En la THA, que fue puesta a prueba durante la instrumentación de la propuesta de aprendizaje, se orienta a los alumnos a interpretar de esta manera el valor que representan las fracciones unitarias. La preferencia de esta forma de interpretación se basa en su consistencia con entender a las fracciones unitarias como valores susceptibles de ser tratados, por sí mismos, como unidades (o bien, subunidades) de medida.

3.3. Características de la escuela

Para la implementación de la propuesta de aprendizaje, me di a la tarea de buscar una escuela. El plantel donde se me permitió trabajar, fue una escuela primaria pública en turno vespertino. El Consejo Técnico de la institución estaba conformado por una supervisora, un director, una subdirectora académica, un asesor técnico pedagógico, doce profesores y dos intendentes. Es importante mencionar que aunque la supervisora no estaba dentro del consejo técnico ella siempre estaba cuando este sesionaba, por tal motivo se le considera como parte de este.

La institución se encuentra ubicada al poniente de la Ciudad de México. Se conforma de doce grupos, dos de cada grado. El número de alumnos por cada grupo era de entre 20 y 25 alumnos. El grupo en el cual se trabajó la propuesta de aprendizaje fue de quinto grado, con 20 alumnos, 11 niñas y 9 niños.

Es importante mencionar que a esta escuela asisten, en su mayoría, estudiantes de escasos recursos. Lo típico es que los padres de familia no tienen un trabajo estable o formal. Es decir, que las madres de familia fueran trabajadoras domésticas de entrada por salida y los padres choferes provisionales de microbuses, o empleados de limpieza temporales de alguna tienda de autoservicio.

Respecto al nivel de escolaridad de los padres de familia, pocos eran los que contaban con educación primaria completa.

Otro punto importante respecto a la situación familiar de los estudiantes es que algunos de ellos vivían en hogares en los que son atendidos solo por su mamá. A otros alumnos los cuidaban los abuelos maternos o algún familiar por parte de la mamá o del papá. Es decir, la desintegración familiar fue una característica muy presente en la vida de los estudiantes.

3.4. Instrumentación

La instrumentación de la propuesta implicó primero la aplicación de una prueba diagnóstica escrita. Los temas que se trabajaron en la prueba diagnóstica escrita fueron los siguientes: números naturales, duplicación directa e inversa, proporcionalidad, fracciones en el contexto de medida y relación de orden de fracciones.

Posteriormente a la aplicación de la prueba diagnóstica se hizo el análisis de los resultados. Con base en éstos, se planeó la primera actividad. Es importante mencionar que en cada una de las sesiones de intervención se planeó con base en los aprendizajes que se iban logrando y los que faltaban por comprender. Desde que se inició el trabajo con los alumnos se consideró que los objetivos de aprendizaje iban a ser el corazón de la planeación.

El objetivo esencial de la aplicación y posteriormente el análisis de la evaluación diagnóstica fue tener presente los conocimientos previos de los alumnos para poder delinear los objetivos de aprendizaje. Estos objetivos tuvieron la finalidad de que los estudiantes lograran comparar fracciones propias con impropias y establecer desigualdades entre ellas.

Los objetivos de aprendizaje que se trabajaron fueron los siguientes:

1º. Comprender cómo se pueden medir longitudes usando unidades no convencionales.

2º. Reconocer las ventajas y desventajas de medir usando como unidad de medida partes del cuerpo, o una unidad común.

3º. Reconocer el problema de dar cuenta del residuo de una medición cuando se usa una unidad común.

4º. Comprender la relación del orden inverso de las sub-unidades de medida, es decir, a mayor denominador menor medida.

5º. Comprender la equivalencia entre la iteración de la longitud de sub-unidades de medida (del tamaño de una fracción impropia) y la longitud de la unidad común.

6º. Identificar cuándo una medida fraccionaria es menor, igual a, o mayor a uno.

7º. Ubicar fracciones en la recta numérica.

Para lograr los anteriores, objetivos de la propuesta de aprendizaje se instrumentaron 18 sesiones de trabajo, las cuales fueron documentadas con 50 fotografías, 18 videograbaciones, un cuaderno de campo, trabajos de los alumnos y 20 pruebas escritas finales, una por cada alumno.

El tiempo de duración de las sesiones de trabajo osciló entre media hora y cuarenta minutos. Las primeras clases y las últimas fueron de casi una hora. La variación del tiempo de las clases fue a consecuencia de las necesidades de los estudiantes.

CAPÍTULO IV.LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

El análisis de la prueba diagnóstica (ver Anexo 1) se realiza en dos dimensiones. En la primera dimensión se dan a conocer los resultados en las cinco secciones de la prueba (números naturales, duplicación directa e inversa, proporcionalidad, fracciones en el contexto de magnitud de medida y desigualdad en relación de orden de fracciones). También se muestran cada uno de los reactivos y su consigna, así como el porcentaje de alumnos que contestaron correctamente cada uno de ellos. Posteriormente se realiza un breve análisis de cada de las secciones.

En la segunda dimensión se analizan las respuestas de cada uno de los 20 alumnos que participaron durante la propuesta de intervención, clasificándolos en tres grupos (A, B, C) de acuerdo a lo que respondieron en cada uno de los 29 reactivos.

4.1. Primera dimensión de análisis de la prueba

El primer objetivo fue conocer los saberes previos de los alumnos para llevar a cabo la propuesta de intervención en el tema de fracciones. Por tal motivo se diseñó una prueba diagnóstica (ver Anexo 1) que tuvo cinco secciones. La prueba la respondieron 19 de los 20 estudiantes. En la primera sección se buscó conocer los saberes previos de los alumnos en el contenido de números naturales. La finalidad de la segunda sección fue identificar los conocimientos sobre nociones de duplicación directa e inversa. La meta en la tercera sección fue conocer los saberes de los estudiantes en cuanto al contenido de proporcionalidad. La intención de la cuarta sección fue identificar las nociones fraccionarias en el contexto de las magnitudes. En la última sección se conoció los saberes formales de los niños y niñas en cuanto a fracciones.

4.1.1. Conocimiento de los números naturales

En la primera sección se les presentaron a cada uno de los estudiantes los siguientes reactivos; 40,70, 300, 920, 889, 4000, 5800, 3030, 9009, se les pidió que escribieran el antecesor y el sucesor de cada uno de los números. Y además se les pidió que escribieran cómo se leen las siguientes cantidades 805, 920, 40404. Los resultados se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. Resultados en porcentajes de la primera parte de la prueba diagnóstica.

No. Reactivo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Reactivo	40	70	300	920	889	4000	5800	3030	9009	805	920	40404
Porcentaje de respuestas correctas	70%	85%	60%	70%	50%	50%	45%	60%	50%	55%	85%	60%

Con los resultados de la Tabla 3, se conjetura que no hay dominio total del sistema de numeración, ni siquiera con números de dos cifras.

4.1.2. Duplicación

En la segunda parte de la prueba se solicitó a los alumnos lo siguiente:

1. Pepe tiene 50 pesos y Juan tiene el doble. ¿Cuánto dinero tiene Juan?
2. Juan tiene 1000 pesos y tiene lo doble que Roberto. ¿Cuánto tiene Roberto? Los resultados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Reactivos y porcentajes de respuestas correctas de los reactivos 13 y 14 de la prueba diagnóstica.

No. de reactivo	Reactivo	Porcentaje de respuestas correctas
13	1. Pepe tiene 50 pesos y Juan tiene el doble. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	60 %
14	2. Juan tiene 1000 pesos y tiene lo doble que Roberto. ¿Cuánto tiene Roberto?	20 %

Con las respuestas que aportan los estudiantes, se puede conjeturar qué casi la mitad de ellos, pareciera que no entienden qué es el doble de un número entero. En el reactivo 14 los niños, en su gran mayoría, no reconocen el inverso del doble.

4.1.3. Proporcionalidad

En la tercera sección se planteó las siguientes situaciones problemáticas:

1. Para hacer dos pasteles, Juan utilizó 8 huevos, ¿Cuántos huevos necesita para hacer 10 pasteles? Explica lo que hiciste.
2. 8 paletas cuestan 24 pesos. ¿Cuánto cuestan 10 paletas? (véase respuestas en la Tabla 5)

Tabla 5. Reactivos 15 y 16 con porcentajes de respuestas correctas.

No. de reactivo	Reactivo	Porcentaje de respuestas correctas
15	Para hacer dos pasteles, Juan utilizó 8 huevos, ¿Cuántos huevos necesita para hacer 10 pasteles? Explica lo que hiciste	60 %
16	8 paletas cuestan 24 pesos. ¿Cuánto cuestan 10 paletas?	40 %

Con los resultados que se muestran en la Tabla 5, pareciera que los alumnos de quinto grado tienen poco conocimiento de lo que es en contenido de proporcionalidad.

4.1.4. Fracciones como magnitudes

Como ya se mencionó anteriormente, el objetivo de la cuarta sección fue identificar las nociones fraccionarias en el contexto de las magnitudes. Para esto se pidió a los estudiantes que marcaran el nivel de agua en la imagen de unos tinacos de agua (véase Figura 2).

Figura 2. Ayudó a los estudiantes a poner en práctica sus nociones de fracciones en el contexto de magnitud

.

Las consignas fueron las siguientes:

- Este tanque tarda 3 horas en llenarse, indica dónde estaría el agua después de una hora de llenado.
- Este tanque tarda 2 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.
- Este tanque tarda 4 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.

Los resultados se dan a conocer en la Tabla 6. Con estos resultados de la Tabla 6 se puede conjeturar que la noción de fracción en el contexto de la magnitud es muy pobre en los niños.

Tabla 6. Reactivos 17, 18 y 19 y porcentajes de respuestas correctas.

No. De reactivo	Reactivo	Porcentaje de respuestas correctas
17	Este tanque tarda 3 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.	45 %
18	Este tanque tarda 2 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado	65%
19	Este tanque tarda 4 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.	55%

4.1.5. Igualdades y desigualdades entre fracciones

En la última sección se les pidió que colocaran el signo mayor que >, menor que <, o igual =, según correspondiera. Es importante aclarar que el significado de los signos se repasó con el grupo con anterioridad comparando números naturales y parecía que entendieron lo que significaba cada uno de ellos.

Las fracciones que se les pidió a los alumnos que compararan y los aciertos se muestran en la Tabla 7. Con las respuestas que aportan los alumnos en estos reactivos pareciera que los estudiantes no habían tenido clara la desigualdad de fracciones unitarias. Además, solo el 20% del grupo logró contestar correctamente el reactivo 27, ($\frac{1}{2}$ vs $\frac{2}{4}$), siendo esta una de las equivalencias más simples. Se estudia de manera formal en el tercer grado, según el programa de educación primaria tercer grado.

Tabla 7. Reactivos del 20 al 29 de la prueba diagnóstica con porcentajes de respuestas.

No. de reactivo	Reactivo	Porcentaje de respuestas correctas
20	$\frac{1}{4}$ vs $\frac{1}{8}$	50%
21	$\frac{1}{7}$ vs $\frac{1}{2}$	45%
22	$\frac{3}{4}$ vs $\frac{3}{8}$	50%
23	$\frac{4}{5}$ vs $\frac{5}{12}$	30%
24	$\frac{5}{4}$ vs $\frac{4}{5}$	40%
25	$\frac{1}{5}$ vs $\frac{1}{9}$	60%
26	$\frac{1}{12}$ vs $\frac{1}{125}$	35%
27	$\frac{1}{2}$ vs $\frac{2}{4}$	20%
28	$\frac{2}{9}$ vs $\frac{1}{2}$	65%
29	$\frac{2}{2}$ vs $\frac{3}{3}$	20%

4.2. Segunda dimensión de análisis de la prueba

En la segunda dimensión se clasifican a los 20 alumnos en tres grupos, grupo A, B y C.

4.2.1. Grupo A

El Grupo A se conformó por los seis niños (de 20) con mejor desempeño. Todos respondieron correctamente los reactivos de los números naturales, duplicación, proporcionalidad y fracciones como magnitudes. Además aciertan en sus respuestas a la mayoría de los reactivos de desigualdades. Sin embargo, sólo dos alumnos logran establecer la desigualdad en el reactivo 24 ($\frac{5}{4}$ vs $\frac{4}{5}$). Cuatro estudiantes de este grupo escribieron correctamente el signo igual en los reactivos 27 y 29 ($\frac{1}{2}$ vs $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{2}$ vs $\frac{3}{3}$) y dos de ellos no lo hicieron.

4.2.2. Grupo B

El Grupo B se conformó por ocho niños (de los 20). Se caracterizaron por tener un desempeño notablemente más deficiente que los alumnos del Grupo A. Algunos de estos alumnos parecían tener un conocimiento limitado de los números naturales. Por ejemplo, dos alumnos tuvieron errores con los números de dos cifras. Otros tres se equivocaron al escribir el antecesor y sucesor del número 4000.

En cuanto a la duplicación, contestaron correctamente el reactivo de duplicación directa, pero cinco se equivocaron en el de duplicación inversa. Sólo dos alumnos contestaron correctamente los problemas de proporcionalidad.

En cuanto a las fracciones como magnitudes, sólo tres de estos alumnos contestan correctamente los tres reactivos.

En la sección de igualdades y desigualdades entre fracciones, algunos de los alumnos se equivocaron incluso en las más simples. Cuatro de ellos no contestaron correctamente el reactivo 20 ($\frac{1}{4}$ vs $\frac{1}{8}$). Además 7 de los 8 alumnos que integraron este grupo no contestaron acertadamente los reactivos 27 y 29 ($\frac{1}{2}$ vs $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{2}$ vs $\frac{3}{3}$).

4.2.3. Grupo C

En el Grupo C se ubicó a los 6 alumnos con el más bajo desempeño. Uno de ellos dejó toda la prueba sin contestar. Su conocimiento de los números naturales pareció limitarse a tres cifras. Cuatro de ellos se equivocaron en el problema que pedía duplicar una cantidad. Sólo una alumna contestó correctamente uno de los problemas de proporcionalidad. Además, sólo un estudiante contestó correctamente los problemas que implicaban identificar magnitudes fraccionarias. En cuanto a las igualdades y desigualdades, los estudiantes ubicados en este grupo tienen respuestas incorrectas incluso en las comparaciones más simples. Sin embargo, es importante aclarar que sí acertaron en varias, lo que pudo ser resultado de la casualidad.

CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE LAS SESIONES DE ENSEÑANZA

5.1. Medir con unidades arbitrarias.

El objetivo de la primera sesión fue que los alumnos de quinto grado utilizaran unidades arbitrarias de medida para calcular la longitud de objetos que se encontraban a su alrededor. Esto se hizo con la intención de que los estudiantes se dieran cuenta de la importancia de utilizar una unidad de medida común, lo que era necesario para progresar en la THA.

Este primer propósito se planteó con base en los resultados de la evaluación diagnóstica aplicada a los estudiantes al inició de la propuesta de intervención. Con base en el análisis de la prueba, se conjeturó que los alumnos tenían una pobre comprensión de la noción de acumulación lineal de una magnitud (ver resultados de los reactivos 17, 18 y 19 en el Capítulo IV) Teniendo presente este antecedente, el primer paso fue lograr su comprensión, ya que de lo contrario no se hubiera podido continuar con los siguientes objetivos.

Para iniciar la sesión se organizó al grupo en equipos de cuatro niños. Los grupos pequeños se crearon con el propósito de que los alumnos lograran una interacción más directa entre ellos y pudieran lograr llevar a cabo las actividades propuestas durante la clase. Al formarse los equipos de trabajo, se tomaron en cuenta algunas características de los alumnos, como por ejemplo: los niños con dificultades para comprender los contenidos con alumnos que se les facilita o alumnos que tienen el problema para hablar enfrente de sus compañeros de grupo con los que tienen la habilidad de hacerlo, etc.

Estando el grupo organizado en equipos, se llevó a cabo una contextualización a la época prehispánica. Esto se hizo con la intención de ubicar a los niños en aquella época donde los habitantes no tenían una regla o metro con qué medir. Otro motivo por el cual se decidió ubicarlos en esta época es porque en esos días la escuela organizaba una salida a las pirámides Teotihuacán y los niños estaban entusiasmados. Aprovechando el entusiasmo de los alumnos y tomando en cuenta nuestro propósito de aprendizaje, se decidió ubicarlos en la época de los teotihuacanos.

Se les platicó que los teotihuacanos fueron personas muy inteligentes y muy inquietas, en el sentido que cada día diseñaban y construían algo impresionante. Como muestra de ello están las hermosas pirámides de Teotihuacán. Para llevar a cabo sus construcciones, los teotihuacanos tenían que medir, así que era necesario tener algo con que medir para lograr perfección en sus construcciones.

Así, la maestra[1] se dirigió al grupo diciendo:

> *Niños, imaginen que ustedes viven en aquella época y son parte de ese grupo de teotihuacanos inteligentes. No hay una regla para medir, pero son unas personas inteligentes y necesitan calcular la medida de algunas cosas que se encuentran a su alrededor. ¿Con qué lo harían y qué medirían? Por equipo deciden su unidad de medida y posteriormente los objetos que van a medir*.

Después de un momento, un equipo decidió utilizar como unidad de medida su lápiz, otro grupo de niños el cuaderno, otro la mano derecha de un niño, otro equipo la lapicera, y otro equipo el lapicero. Se observó que al interior de algunos equipos tuvieron que decidir entre ellos cuál iba a ser su unidad de medida, porque tenían varias opciones, pero finalmente tomaron la decisión de manera democrática.

Después de definir cuál sería su unidad de medida, eligieron los objetos que iban a medir. Los estudiantes lo llevaron a cabo “con sencillez”; es decir, midieron y no les causó problema el pedazo que sobraba (el residuo). Por ejemplo, un equipo midió la pantalla de televisión con su lápiz y medió casi cinco lápices y ellos así lo registraron, sin ningún problema.

Al terminar la actividad, la maestra le indicó a cada equipo que comentará al resto de sus compañeros lo que midieron, con qué lo midieron y cuánto midió. El primer equipo mencionó que utilizó el lápiz para medir el largo del pizarrón, obteniendo como medida casi 12 lápices de largo. El largo de la pantalla midió 5

[1] A lo largo de las narrativas que se hacen de las clases, constantemente aludo a la maestra, a la profesora o a la docente, en todos los casos se trata de mi misma, la autora de esta tesis. Hago uso de la tercera persona debido a que estas narrativas son el producto del análisis de videograbaciones en las cuales la perspectiva que adopte fue la de una observadora del trabajo que realizaba como docente en un salón de clase, con estudiantes de quinto grado de educación primaria.

lápices, el ancho de la mesa 9 lápices, etc. El segundo equipo mencionó que utilizó la lapicera para medir el largo de la mesa obteniendo como medida 7 lapiceras, el alto de la puerta del estante midió 8 lapiceras, el largo del cuaderno que midió más de una lapicera, etc. El tercer equipo utilizó como unidad de medida la mano derecha de un integrante del equipo. Midieron el largo del pizarrón, consiguiendo como medida 14 manos. Otro objeto que midieron fue el largo de su libro de español, obteniendo como medida 2 manos.

La unidad de medida que utilizó el cuarto equipo fue un cuaderno. Midieron el alto de la mochila, el largo de la ventana, el ancho su mesa, etc. Obtuvieron como medidas 2 cuadernos la altura de la mochila, 9 cuadernos el largo de la ventana y 4 cuadernos el ancho de la mesa. El quinto equipo midió con un lapicero. Los objetos que midieron fueron: su cuaderno, obteniendo como medida 2 plumas. También midieron el largo del libro de geografía obteniendo como medida 5 plumas.

Al terminar de escuchar las exposiciones se originó el siguiente diálogo

Maestra: ¿Qué ventajas y desventajas hay en utilizar como unidad de medida un lápiz, la mano o la lapicera?
Israel: - para mí no hay desventajas
Maestra: ¿Por qué dices eso Israel?
Israel: Porque donde yo esté puedo tomar lo que pueda y medir lo que yo quiero, sin ningún problema.
Maestra: ¿Alguien opina lo mismo que Israel? (La mayoría de los estudiantes opina lo mismo que Israel).
Karen: Podemos hacer lo que ahorita hicimos tomar un lápiz o con nuestra mano y medir lo que necesitamos medir.
Maestra: Muy bien niños pues agradezco su participación en las actividades y sobre todo sus comentarios. Nos vemos la próxima clase.

Desde que se inició la sesión los estudiantes estuvieron atentos a las actividades, también se organizaron adecuadamente para llevarlas a cabo. Había ruido en el salón pero era por el trabajo que estaban realizando. En el momento que los niños midieron los objetos no parecieron percatarse de ese pedazo que les sobraba (el residuo), o al menos no les causó conflicto alguno. Hicieron la aproximación de la medida sin ningún problema.

De esta sesión se concluyó que los alumnos calculaban la longitud de objetos con una unidad arbitraria sin darse cuenta de la problemática que esto generaría si cada uno de nosotros utilizará una unidad diferente de medida. En el desarrollo de las actividades de la sesión, no se percataron de la importancia de utilizar una unidad común, que era un objetivo importante a lograr para continuar con la progresión de la THA.

Como los puntos generales a tomar en cuenta para las siguientes clases se reconoció que las actividades en las que se les pide a los alumnos que decidan algo, les agradan mucho. Además las reglas de participación a seguir funcionaron en la clase. Finalmente, se consideró que era importante buscar algunas estrategias para que a los alumnos que no se les facilita hablar, lograran hacerlo.

5.2. Ventajas y desventajas de medir con unidades arbitrarias

En la primera sesión no se logró que los alumnos reconocieran las ventajas y desventajas de utilizar una medida no común. Para la segunda sesión se pretendió lograr este objetivo de aprendizaje. Se diseñó un plan de clase con la misma estructura. Contenía un inicio, desarrollo y un cierre, así como también un apartado de observaciones.

Se inició la segunda sesión organizando al grupo en equipos, tomando en cuenta los puntos generales que se reconocieron en la primera sesión. Estos puntos fueron: establecer reglas de participación, buscar estrategias para que a los alumnos que no se les facilitaba hablar, lograran hacerlo, así como la realización de actividades en las que los alumnos tuvieran que tomar decisiones.

Para hacer una retroalimentación de la sesión anterior y tomando en cuenta el punto general de buscar estrategias para los alumnos que no se les facilitaba hablar, la maestra solicitó a los alumnos que comentaran en el interior de su equipo ¿qué se vio en la clase anterior? Los propósitos de la profesora fueron: en un primer momento hacer un recordatorio de las actividades de la sesión anterior, para tener un antecedente del trabajo. Además, se buscó que a los alumnos que les costaba trabajo hablar, pudieran hacerlo primero al interior del equipo.

A continuación la maestra dialogó con Leonardo, un alumno al que se le dificultaba hablar, de manera que todo el grupo escuchara la conversación: El dialogo fue el siguiente:

> *Maestra: Leonardo, ¿recuerdas qué hicieron en la clase anterior de matemáticas?*
> *Leonardo: Medimos cosas.*
> *Maestra: Tu equipo ¿qué midió?*
> *Leonardo: Medimos el pizarrón, la televisión, la mesa.*
> *Maestra: Muy bien Leonardo ¿Algo más que recuerdes que hicieron?*
> *Leonardo: No maestra.*
> *Maestra: Del equipo de Leonardo ¿alguien quiere agregar algo que le haya parecido importante?*
> *Melanie: La clase me gustó porque estuvo divertida. Karen se trepó a la mesa para poder alcanzar la televisión y poderla medir.*
> *Maestra: Muy bien Melanie por tu comentario.*

Algo similar llevó a cabo la maestra con cada uno de los equipos, dirigiéndose a los alumnos que se les dificultaba hablar.

Después de que los alumnos tuvieron un antecedente de la clase anterior. La maestra se dirigió al grupo y dijo lo siguiente:

> *En la clase anterior ustedes hicieron la elección de qué cosas iban a medir. Ahora yo les traje esta tira de papel para que ustedes la midan. Para medir la tira de papel, vamos hacerlo al estilo de Ángel. Él utilizó la mano derecha como unidad de medida.*

Con la ayuda de Braulio, un alumno del grupo, la maestra pegó la tira de papel en el pizarrón. Seleccionó a tres niños, con diferente estatura y tamaño de manos. Los alumnos que se seleccionaron fueron: Israel, Daniela y Fanny. La maestra seleccionó a estos estudiantes por los diferentes tamaños de sus manos. La intención fue que al momento de ver los resultados de la medida, el grupo se diera cuenta de la problemática de utilizar una unidad de medida no común.

La tira de papel tenía como medida cinco manos de la maestra, pero al momento los alumnos no lo sabían. La primera en pasar al pizarrón a medir la tira fue Daniela. La medida que obtuvo fue seis manos, más un pequeño residuo. En segundo lugar pasó Fanny. La medida que ella consiguió fue de casi seis manos. El tercero en pasar fue Israel. La medida que logró fue de siete manos completas, más un residuo un poco más pequeño que su mano. Por último la maestra midió la tira y obtuvo la medida de cinco manos.

Con cara de asombro y molesta la maestra se dirigió al grupo diciendo: *"¡Alguien hizo mal el trabajo! ¡No midieron bien!" Israel respondió: "No maestra, todos medimos con cuidado y tratamos de hacerlo bien"*. Después de la intervención de Israel, la maestra preguntó al grupo: *"¿Están de acuerdo con lo que dice Israel?"* Daniela y Fanny respondieron que sí, así como el resto de grupo.

Con cara de asombro la maestra preguntó al grupo: *"¿Qué problema hay aquí si sus tres compañeros midieron con cuidado y ustedes y yo somos testigos?"* Después a la pregunta hubo un silencio en el salón de clases. A continuación, la maestra comentó: *"¡Me da gusto que estén pensando lo que sucedió!"*

Después de un momento Ángel levantó la mano para comentar lo siguiente, originándose un diálogo:

> *Maestra: Adelante Ángel, ¿Qué es lo que quieres decir?*
> *Ángel: Daniela, Fanny, Israel y Usted midieron con su mano y las manos son de diferentes tamaños.*
> *Maestra: Con cara de emoción dijo: ¡Muy buen comentario Ángel! Posterior al comentario preguntó al grupo ¿Están de acuerdo con lo que dijo Ángel?*
>
> *Bryan: ¡Claro maestra! Es verdad. Cada uno utilizó su mano y son diferentes.*
> *Maestra: De los que pasaron a medir ¿Quién tiene la mano más pequeña y quien la más grande?*
> *Todos los estudiantes coincidieron que Fanny tenía la mano más grande e Israel más pequeña. Para comprobarlo sobrepusieron sus manos unas sobre otras.*
> *Maestra: ¿Cómo es la mano de Fanny con respecto a la mía, más grande o más pequeña? (En coro contestan los alumnos, "más pequeña").*

Hasta este momento de la sesión, los estudiantes habían realizado una retroalimentación de la clase anterior. También midieron de manera empírica la longitud de una tira de papel con la mano derecha, es decir, con una medida no común. Además confrontaron sus experiencias y resultados en grupo, para que llegaran a la conclusión, de que medir con una unidad de medida no común, puede causar problemas en el momento de comunicar los resultados. Asimismo los estudiantes se dieron cuenta, que medir la tira de papel con una mano pequeña, se va a repetir más veces, que si la medimos con una mano más grande.

Para confirmar la conclusión de los alumnos, sobre la problemática que se crea al medir con una unidad de medida no común, la maestra se dirigió al grupo diciendo:

> *Les voy a contar algo raro que me pasó. En diciembre del año pasado cambié mis cortinas de la casa y le pedí a mi hija que midiera con sus manos el ancho y largo de la ventana. Esas medidas se las pasé a una tía que me iba a coser las cortinas. ¿Y qué creen que pasó? Quedaron mal las cortinas. ¿Por qué creen que pasó eso?*

Todos los niños querían contestar, fue entonces que la maestra les mencionó la importancia de hablar en orden y siempre escuchando con atención y respeto al compañero. Después de la observación, se dio el siguiente diálogo:

> *Maestra: Jazmín tienes la palabra.*
> *Jazmín: Le pasó lo mismo que a mis compañeros. Cada quien midió con su mano y son diferentes de tamaño.*
> *Maestra: ¿Ustedes creen que sea buena idea que cada quien utilice una unidad de medida?*
> *Paulina: No maestra no nos entenderíamos.*
> *Maestra: ¿Están de acuerdo con lo que dijo Paulina?*
> *Braulio: Sí maestra porque cada quien tendría diferente medida.*
> *Maestra: ¿Por qué cuando yo medí la tira y lo hice bien, midió cinco manos y cuando lo midió Israel casi ocho manos? ¿Tendrá que ver el tamaño de las manos?*
> *Ángel: Si las manos son grandes se repiten menos veces y si son pequeñas más veces.*
> *Maestra: ¿Quién entendió lo que dijo Ángel?*
> *Fanny: Sí maestra, usted tiene la mano más grande y Israel más pequeña, usted repitió menos veces y el más.*
> *Maestra: Entonces si la tira solo midiera una mano, ¿tendría una mano muy pequeña o muy grande?*
> *Daniela: Tendría una mano muy grande.*
> *Maestra: Y si alguien midiera cien manos, ¿Tendría una mano más grande o más pequeña?*
> *Fernando: Tendría una mano muy pequeña.*
> *Maestra: Si la mano es muy grande se repetirá menos veces y si es pequeña más veces. ¿Están de acuerdo?*
> *Niños: Sí maestra.*
> *Maestra: Me dio gusto su participación entusiasta y ordenada de cada uno de ustedes para realizar esta clase, pero en especial a Leonardo, Melanie, Braulio e Israel. Nos vemos la próxima clase.*

En esta segunda sesión, la maestra estuvo atenta a lo que pasaba, sin perder de vista el objetivo de aprendizaje. Se concluyó que fue una sesión de trabajo donde la participación de los alumnos, las actividades y la guía de la maestra fueron fundamentales, para que se lograra el objetivo de aprendizaje. Con las diferentes actividades los alumnos lograron darse cuenta de la problemática que podría generarse si cada quien utiliza una unidad de medida diferente. Se logró que los alumnos pensaran en longitud y tamaños, cuando observan que entre más veces se repite la mano más pequeña es. Y si la mano es grande se repite menos veces. Esto es uno de los principios esenciales para que los alumnos establezcan la desigualdad de fracciones unitarias de manera significativa.

Como puntos generales, la dinámica de la clase se dio en un ambiente de respeto, con respecto a las participaciones de los alumnos y la interacción entre ellos. El que los alumnos dialogaron en el interior del equipo y posteriormente al resto del grupo, sirvió para que los niños se animaran a hablar. Pero también fue la atención que dio la profesora a cada uno de los comentarios de los niños, así como sus comentarios hacia los estudiantes.

5.3. Tamaño relativo entre unidades de medida arbitrarias

Lograr que los estudiantes comprendieran los objetivos de aprendizaje, en cada una de las sesiones, fue la esencia de la propuesta. Por tal motivo, al darse cuenta la maestra, que en la primera sesión no se logró el primer objetivo de aprendizaje, tomó la decisión de continuar trabajando en éste durante la segunda sesión.

Después del trabajo realizado en la primera y segunda sesión de clase, la profesora conjeturó que los alumnos habían comprendido las ventajas y también las desventajas del uso de una medida no común. Esta suposición fue determinada después de que observó el trabajo de los alumnos en todo momento de las dos sesiones. Los instantes claves de las sesiones para lograr hacer la conjetura, fue cuando los niños exponían sus resultados, así como también cuando confrontaban sus respuestas. Estas discusiones los estudiantes las hicieron en el interior de su equipo de trabajo y ante el resto del grupo.

En esta tercera sesión el objetivo fue seguir indagando sobre la conjetura de que los alumnos habían comprendido las ventajas y desventajas de usar medidas no comunes, así como también de que lograran generalizar sobre quién tenía la mano más grande, si quien repetía más veces o quien repetía menos veces.

Para iniciar la sesión, la maestra reunió a los alumnos en equipos, tomando en cuenta las experiencias positivas de las sesiones anteriores. Reunidos en pequeños grupos, los estudiantes tenían una interacción más directa entre ellos, así como también llevaban a cabo de manera favorable las actividades propuestas durante la clase.

La intención de la maestra era estar segura de que el objetivo de aprendizaje se había logrado en todo el grupo, pero sobre todo con los alumnos que presentaban dificultades. Para esto, la maestra se dirigió al grupo diciendo:

> *Voy a exponer algunas situaciones que quiero que escuchen y piensen su respuesta. Después de un momento yo voy a elegir a uno de ustedes para que exprese su respuesta al grupo.*

La maestra continuó diciendo:

> *Hace algunas semanas se rompió el cristal de la venta del salón del Grupo de Cuarto B. Como urgía comprar el cristal, los directores, tanto del turno matutino como del vespertino, midieron con sus manos, así como lo hizo Ángel y luego ustedes. Los maestros reportaron las medidas a la maestra Paty, secretaria de la escuela. El director del turno matutino reportó que el ancho de la ventana era de 10 manos y el maestro Víctor, director del turno vespertino, reporto que medía 9 manos. La maestra Paty se preguntaba: ¿Por qué si los maestros habían medido la misma ventana, reportaban diferentes medidas?*

Después de explicarse la situación se originó el siguiente diálogo:

> *Maestra: Piensen su respuesta. En un momento a alguien de ustedes le preguntaré. Leonardo, ¿qué crees que pasó? Si midieron la misma ventana ¿por qué reportaron diferentes medidas?*
> *Leonardo: Por las manos maestra.*
> *Maestra: ¿Qué pasa con las manos?*
> *(Leonardo ya no responde).*
> *Maestra: Muy bien Leonardo, estás pensando tu respuesta, ¿Verdad? Mientras Leonardo piensa su respuesta, me gustaría escuchar a Melanie. ¿Qué piensas Melanie? ¿Estás de acuerdo con Leonardo, que es por las manos?*
> *Melanie: Sí maestra, como son diferentes personas, son diferentes manos.*
> *Maestra: Leonardo ¿estás de acuerdo con lo que dice Melanie?*
> *Leonardo: Sí. Somos diferentes y tenemos diferentes tamaños de manos.*
> *Maestra: Muy bien Leonardo, tu comentario es muy cierto. ¿Habrá algún problema Braulio el que hayan medido con las manos?*

Braulio: Yo creo que sí, porque como midieron cada director con sus manos hay dos medidas diferentes.
Maestra: Muy bien Braulio.

La maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente:

Maestra:¿Qué va a pasar si la maestra Paty habla por teléfono a la vidriería y pide un cristal que tenga 10 manos de largo?
Paulina: El señor que vende los vidrios mediría un vidrio de 10 manos, pero sus manos no van a ser iguales a la de los directores.
Maestra: ¿Hay algún problema si cada uno utiliza sus manos?
Karen: Sí, tendríamos muchas medidas diferentes.
Maestra: ¿Cuál sería la solución a este problema?
Bryan: Utilizar una sola cosa para medir.
Maestra: ¿Están de acuerdo con Bryan?
Axel: Yo sí maestra. Así no hay problema con la medida.
Maestra: ¿Están de acuerdo con Axel?
(El grupo contesta afirmativamente.)

Después de que se originó el diálogo, la maestra preguntó lo siguiente:

Si el maestro Víctor obtuvo como medida 9 manos y el director de la mañana 10 ¿qué maestro tiene la mano más grande? ¿Y por qué?

Varios niños levantaron la mano para contestar, pero la maestra eligió a Karen. Se generó la siguiente conversación:

Maestra: Karen, quién crees que tiene la mano más grande ¿el maestro que obtuvo como medida 10 manos o el que obtuvo 9?
Karen: Yo creo, yo creo, que el que midió 9.
Maestra: ¿Por qué piensas eso?
Karen: Porque la clase pasada vimos que si uno de mis compañeros tenía la mano grande se repetía menos veces.
Maestra: ¿Y si la mano es más pequeña?
Karen: Se repite más veces.
Maestra: ¿Quién tiene la mano más grande: el maestro Víctor o el director de la mañana?
Ángel: El maestro Víctor, porque repitió solamente 9 veces su mano y el maestro de la mañana 10 veces.
Maestra: Muy bien Ángel.

La maestra se percató que para algunos niños no estaba claro, que entre más grande sea la unidad de medida menos veces se repite y entre más pequeña es, más veces se repite. Por tal motivo, se dirigió al grupo exponiendo lo siguiente:

Mi esposo y su primo contaron los pasos que hay de la casa a la tienda más cercana. Mi esposo contó 50 pasos y su primo 45 ¿Quién dio los pasos más largos? ¿Por qué?

La mayoría del grupo quería contestar, pero en esta ocasión la maestra le pidió a Israel que diera su respuesta.

Maestra: Israel ¿Qué piensas?
Israel: Yo pienso que su esposo dio los pasos más grandes.
Maestra: Muy bien Israel, levanten la mano los niños que estén de acuerdo con Israel.
(Ningún niño levantó la mano).

La maestra indicó que solo levantaran la mano sin dar ninguna respuesta. Posteriormente pidió a Israel que pasara al frente y midiera el ancho del salón. Obteniendo como medida 11 pasos. Después le solicitó a Axel, un niño más alto que Israel, que hiciera lo mismo. Axel obtuvo como medida 9 pasos.

Cuando los dos alumnos terminaron de medir, la maestra se dirigió a Israel para pregúntale lo siguiente.

Maestra: ¿Quién dio los pasos más grandes Axel o tú?
Israel: Axel.
Maestra: Si Axel dio los pasos más grandes se repiten más veces o menos veces en comparación de tus pasos.
Israel: Menos veces.
Maestra: Cómo fueron tus pasos en comparación de los de Axel, más grandes o más pequeños.
Israel: Más pequeños.
Maestra: Si mi esposo contó 50 pasos y su primo 45 ¿Quién dio los pasos más grandes?
Israel: El primo.
Maestra: ¿Por qué?
Israel: Se repitió menos veces.

Maestra: Muy bien Israel. Si la unidad de medida es más grande se repetirá menos veces y si es más pequeña se repetirá más veces ¿Eso fue lo que entendiste Israel?
Israel: Sí maestra.
Maestra: ¿Están de acuerdo con Israel?
(El resto del grupo contestó que sí).
Maestra: Muy bien niños con esto vamos a cerrar nuestra clase, les agradezco sus participaciones y hay que seguir respetando los comentarios de los compañeros, así como también escuchar con atención las indicaciones.

La maestra concluyó lo siguiente de esta sesión: Los alumnos tienen claro que utilizar una unidad de medida no común ocasiona problemas al momento de medir y de comunicar la medida. La gran mayoría del grupo comprendió que entre más grande sea la unidad de medida, menos veces se va a repetir y si es pequeña, más veces se va a repetir. Pero como no es la totalidad del grupo, la maestra decidió que seguirá trabajando al iniciar las siguientes sesiones con situaciones similares como las que se trabajaron en esta clase hasta que ya no sea un problema entender que si algo se repite menos veces es más grande de algo que se repite más veces.

Como los puntos generales a tomar en cuenta para las siguientes clases se reconoció que es necesario recordarles a los estudiantes, en cualquier momento de la sesión, el respeto a escuchar los comentarios de sus compañeros, así como también atender las indicaciones que la maestra aporta.

5.4. Medir con una unidad común

El objetivo de esta cuarta sesión fue que los alumnos se familiarizaran con el uso de una unidad de medida común (la vara; ver Anexo 2) y que hicieran la relación entre la iteración de la vara y el residuo.

Para iniciar la cuarta sesión de trabajo, la maestra pidió a los alumnos que se reunieran en equipos, como en la clase anterior. Estando reunidos en pequeños grupos, la maestra comentó lo siguiente:

> *En una visita que hice a las pirámides de Teotihuacán, me atendió una arqueóloga. Me dijo que cuando los teotihuacanos estaban planeando algo muy importante, se reunían en grupos, así como lo estamos ahora. Pero para que realmente les surgieran buenas ideas tenían que cerrar los ojos. Nosotros vamos hacer algo similar. Cierren los ojos, ahora, traigan a su mente algunas cosa que hicimos la clase pasada. En un momento pediré a alguno de ustedes que me comente lo que recuerda.*

Después de un momento la maestra pidió a algunos niños que abrieran los ojos y algunos de ellos comentaran lo que recordaban. Se dirigió directamente con algunos estudiantes, surgiendo el siguiente diálogo:

> *Maestra: Bryan ¿Me puedes comentar lo que vimos la clase pasada?*
> *Bryan: Hablamos sobre la ventana del grupo de cuarto grado.*
> *Maestra: Gracias Bryan. Israel ¿qué más recuerdas?*
> *Israel: Yo me acuerdo que los directores midieron con su mano la ventana, para comprar el cristal que se rompió y la maestra Paty anotó las medidas.*
> *Maestra: Muy bien Israel. Axel, si la maestra Paty hubiera hablado a la tienda donde venden los cristales para hacer el pedido, y hubiera dado la medida de 10 manos ¿Crees que el vidrio, al colocarlo en la ventana del salón del grupo de cuarto grado, hubiera sido el correcto?*

Axel: No maestra, porque el señor de la vidriería, hubiera medido con su mano y no es igual a la de los directores.
Maestra: Lo que tú quieres dar a entender es que si se utiliza como unidad de medida, las manos, habría problemas para medir y comunicar las medidas.
Axel: Sí maestra, sería un caos.
Maestra: Gracias Axel.

Después de estas intervenciones la maestra se dirigió a Braulio y le preguntó lo siguiente:

Maestra: Braulio, si el director de la mañana midió la ventana y obtuvo 10 manos como medida y el maestro Víctor hizo lo mismo, obteniendo como medida 9 manos ¿quién tiene la mano más grande?
Braulio: El maestro Víctor.
Maestra: ¿Por qué crees eso Braulio?
Braulio no contestó.
Maestra: Braulio, sé que estás pensando tu respuesta ¿Qué te parece si escuchas lo que va a comentar tu compañera y me dices si es lo que estabas pensando? ¿Alguien quiere ayudar a Braulio a explicar su respuesta?
(Natalie levanta la mano y explica lo siguiente.)
Natalie: El maestro Víctor tiene la mano más grande, porque repitió menos veces la mano y el director de la mañana tiene la mano más pequeña, porque se repitió más veces.
Maestra: Braulio ¿Estás de acuerdo con lo que dice Natalie?
Braulio: Sí maestra, lo que pasa es que no sabía cómo explicarlo.
Maestra: Cada uno de sus compañeros aportó algo muy importante al grupo, como por ejemplo, Axel nos comentó que usar una medida no común sería un caos. Braulio y Natalie, concluyeron que el maestro Víctor tiene la mano más grande porque se repite menos veces y la mano del director de la mañana es más pequeña, porque se repite más veces. Entonces puedo decir que la estrategia de reunirse en grupo y cerrar los ojos, que usaban los teotihuacanos, sí funciona, ya que hicieron excelentes aportaciones. Gracias niños.

Para continuar la sesión, la maestra se dirigió al grupo diciendo lo siguiente:

Al iniciar la clase les comenté que en la visita que hice a Teotihuacán, me atendió una arqueóloga. Ella me dijo que al igual que ustedes, los teotihuacanos medían con cualquier cosa que encontraban a su alrededor. Pero esto les causó muchos problemas. Así que uno de esos tantos días que se reunían para darle solución a su gran problema, llegó el más viejo del pueblo, muy emocionado porque había encontrado la solución al problema. Todos los integrantes del pueblo mostraron cara de asombro, cuando el viejo les dijo que había encontrado la solución a los problemas que les causaba medir y comunicar una medida.

La maestra hizo una pausa y preguntó al grupo: *"¿Pueden imaginarse qué es lo que el viejo les iba a mostrar a su tribu?"* Los alumnos no contestaron. La maestra intentó animar a los alumnos para que comentaran, pero fue inútil. Así que la maestra continua diciendo:

> *Esto que les voy a mostrar es una copia de lo que aquel día mostró el más viejo a la tribu. Y no cualquier persona lo tiene. Al enterarse, la arqueóloga, de que era maestra, me regaló la copia. La arqueóloga me dijo que poca gente tiene la copia de ese gran invento. Así que ustedes van a ser personas con un gran privilegio.*

La maestra sacó de una caja, una vara de madera de aproximadamente 24 cm de largo (ver Anexo 2), se la mostró a los niños, y les preguntó *"¿Se imaginaron que éste era el gran invento?"* Melanie con cara de asombro dijo: *"No maestra, ni idea"*. Después de algunos comentarios de los alumnos, similares a los de Melanie, la maestra comentó al grupo lo siguiente:

> *El nombre de la pieza está en náhuatl, lengua de los teotihuacanos. El nombre es "tlakotl" que en español significa "Vara". La maestra escribe el nombre en el pizarrón y pide a los alumnos que repitan varias veces el nombre en náhuatl.*

Al ver la vara los alumnos querían que la maestra les permitiera tocarla, así que la maestra permitió que algunos estudiantes la tuvieran en sus manos. Después de un momento, la profesora pidió que un alumno la colocara en la caja, comentando que es una pieza muy valiosa, que tiene que ser tocada con mucho cuidado. Pero no se preocupen, dijo la maestra, cada uno de ustedes va a tener su propia tlakotl, ya que fui con un carpintero para que me hiciera varias copias de tlakotl. Pero como no es fácil hacerla, solo me entregó una para cada equipo.

Cuando cada equipo teníala tlakotl, la maestra aclaró que con ella los teotihuacanos midieron muchas cosas y parecía que ya no tenían problemas. La maestra se dirigió al grupo y les propuso a los niños medir conla tlakotl, algunas de las cosas que se encontraban a su alrededor, para comprobar si era verdad que con eso los problemas de los teotihuacanos fueron solucionados. La maestra agregó que esta actividad era algo similar a lo que hicieron en la primera sesión, pero ahora con una sola unidad de medida.

Los alumnos emocionados midieron y registraron sus medidas. Después de un tiempo, la profesora les solicitó que comentaran sus resultados. Ángel levantó la mano y dijo:

> *Maestra, nosotros medimos el largo de la mesa y nos dio como resultado tres varitas. También medimos el largo del cuaderno y midió una varita. El largo de su escritorio midió cuatro varitas.*

Cuando Ángel terminó de hacer sus comentarios, la maestra preguntó: *"¿El largo de la mesa fue exactamente tres varitas?"*. Después de que la maestra hizo la pregunta, Ángel fue a medir el largo de la mesa, con la vara, se dio cuenta que eran tres varitas y quedaba un poco más (un residuo). Inmediatamente de la intervención de Ángel, el resto del grupo, al darse cuenta que habían hecho lo mismo que el equipo de Ángel, solicitaron a la maestra rectificar sus medidas. La maestra se dirigió al grupo y les dijo lo siguiente:

> *Está bien. No se preocupen. Esto que les sucedió a ustedes, les sucedió a los teotihuacanos, así que vayan de nuevo a medir y en un momento comentamos los resultados.*

Cuando la maestra observó que la mayoría de los equipos había terminado, solicitó que se sentaran y estuvieran en silencio, para escuchar con atención los resultados del trabajo de cada uno de los equipos.

Ángel levantó la mano y solicitó continuar comentando el trabajo de su equipo. La maestra le dio la palabra. Ángel comentó que sus medidas fueron las siguientes: *"se midió al largo de la mesa y nos dio como resultado tres varitas y un pedazo más; el largo del cuaderno, midió una varita y pedacito más y el largo de su escritorio midió cuatro varitas y un pedazo más*". Cuando Ángel terminó de hacer su comentario la maestra se dirigió al resto del grupo y preguntó: *¿Qué hacer y cómo medir el espacio que queda?* Después de la pregunta Bryan comentó, *"nosotros para medir el pedazo que nos faltó utilizamos los dedos"*. La maestra se dirigió al grupo preguntando, *"¿Están de acuerdo con lo que dice Bryan? Utilizar los dedos es una buena alternativa*. Jazmín levantó la mano y dijo *"va a pasar lo mismo que cuando medimos con las manos, los dedos son diferentes y sería un problema*". Después del comentario de Jazmín, Bryan y el resto del grupo, se dieron cuenta, que sí iba a ser un problema utilizar los dedos de las manos, es decir, no era una buena solución al problema.

Los alumnos no dieron ninguna otra solución, así que la profesora les comentó que "*los teotihuacanos tuvieron ese mismo problema y por más que se reunían para pensar en una solución, no lo lograban. Así, que una comisión del pueblo* *teotihuacano se dirigió a preguntarle al más viejo de la tribu, el que había inventado a la tlakotl, para que los ayudara".* La maestra dirigiéndose al grupo preguntó: *"¿Qué creen que les dio para solucionar su problema?"* Algunos niños contestaron que posiblemente era otra varita. La maestra con cara de asombro dijo:

> *Muy bien niños acertaron, pero qué creen, tengo que entrevistarme con la arqueóloga para que me dé esas varitas y la próxima clase se las entrego junto con la tlakotl de cada uno de ustedes. Niños, agradezco el trabajo que hicieron durante la clase, así como cada uno de los comentarios expuestos al grupo. Nos vemos la próxima clase.*

La intención de la maestra fue dejar emocionados a los alumnos, para que esperaran la próxima clase con ansiedad.

En esta cuarta sesión se concluyó que solamente tres niños no podían explicar claramente si el que repite menos veces la mano, la tiene más grande o más pequeña. Pero al momento de escuchar la explicación de otro compañero podían hacerlo de manera correcta. Por lo anterior, la maestra decidió seguir trabajando hasta que para estos tres niños ya no sea un problema y puedan argumentar sus respuestas.

También se concluyó que los alumnos se familiarizan con la tlakotl (la vara), aceptándolo como una unidad de medida común. Además los estudiantes se percatan de que la vara (unidad de medida común) no es suficiente para llevar a cabo una medida con exactitud, ya que utilizaron sus dedos como alternativa para dar una medida exacta.

Otro aspecto importante que se concluyó en esta cuarta sesión, es que se comenzó a problematizar la relación entre la longitud de la unidad común y el residuo. No se concluyó la sesión debido al tiempo dedicado a cada uno de los momentos de la clase, así que la maestra continuará hasta lograr el objetivo de aprendizaje.

5.5. ¿Qué hacer con el residuo?

En la cuarta sesión, los alumnos conocieron y utilizaron la tlakotl, la vara de los teotihuacanos (ver Anexo 2). Al momento de medir las cosas con él, se percataron que había un residuo. Adecuadamente los estudiantes empezaron a comprender que el uso de una unidad común única (la tlakotl o vara) no es suficiente para medir.

El objetivo de esta quinta sesión fue que los alumnos se siguieran familiarizando con el uso de una unidad de medida común (la vara), así como también comprendieran la relación entre la iteración de la vara y el residuo. Y además que advirtieran que la vara no es suficiente para medir y comunicar una longitud.

La maestra inició la clase reuniendo al grupo en equipos de trabajo. Posteriormente se dirigió al grupo preguntando: *"¿Alguien puede decirnos qué trabajamos la clase pasada?"* La mayoría de los alumnos levantaron la mano para contestar, pero la maestra solo eligió a algunos de ellos. Los comentarios de los alumnos, fueron los siguientes: *"Conocimos a la tlakotl, la vara que los teotihuacanos habían utilizado para medir". "También medimos con ella algunas cosas".*

Después de estos comentarios, la maestra se dirigió al grupo haciendo la siguiente pregunta: *"¿Ustedes creen que fue suficiente que los teotihuacanos midieran solo con la tlakotl, la vara?"* Ángel respondió:

> *No maestra. La clase anterior nos dimos cuenta que hay un pedazo que queda sin medir. Y no podemos utilizar los dedos, porque sería el mismo problema de medir con las manos. Hay niños que tienen los dedos gordos y hay niños que tienen los dedos muy delgados.*

Al terminar la participación de Ángel, la maestra lo felicitó por sus comentarios. También preguntó al grupo: *"¿Qué hacer y cómo medir el espacio que queda?" La maestra continuó diciendo: "Ángel nos comentó que no es buena idea usar los dedos. Pero ¿cómo medir ese espacio?".* Los alumnos se quedan en silencio.

Después de este momento de silencio, la profesora les dijo lo siguiente: *"Le llamé por teléfono a la arqueóloga que me atendió el día que hice la visita a las pirámides de Teotihuacán. La llamada telefónica fue con el objetivo de preguntar qué solución habían dado a este mismo problema los teotihuacanos"*. La maestra continuó diciendo, "*La arqueóloga me aclaró que en aquella época había a los alrededores donde vivían los teotihuacanos, árboles muy grandes y frondosos, con unas ramas muy suaves y fáciles de cortar. Desafortunadamente habían desaparecido y no había manera de conseguirlas, para que nos regalara algunas y ustedes las utilizaran. Así que pensé cómo sustituir esa* *rama suave y fácil de cortar, por un material que tuviera algunas de las condiciones de la varita que manejaron los teotihuacanos".*

La profesora mostró unos popotes de color rojo, más pequeños que la longitud de la vara. *"No se me hubiera ocurrido", "No me pasó por la mente esa idea", "Los popotes se pueden cortar fácilmente"*, etc., fueron algunos comentarios que los alumnos hicieron al ver los popotes.

La maestra proporcionó la vara y algunos popotes de color rojo a cada equipo, para que midieran con ellos. El propósito esencial era que los estudiantes cubrieran con el popote el pedazo que sobraba, es decir el residuo. La profesora se percató que los estudiantes trataban de hacer el trabajo con gran exactitud al momento de iterar la vara, así como también al momento de cortar el popote, que cubriría el residuo.

Cuando la maestra observó que los alumnos habían terminado de medir, solicitó que se sentaran y mantuvieran el orden para escuchar el trabajo de cada uno de los equipos. La profesora reiteró la importancia de respetar a los compañeros que exponían su trabajo, así como la importancia de expresarse con claridad.

Ya que los alumnos se encontraban sentados y en silencio, la profesora se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Quién quiere iniciar a exponer su trabajo?"* Todo el grupo levantó la mano, pero la maestra le solicitó al equipo de Karen que iniciara. Cada integrante del equipo de Karen participó, diciendo qué habían medido, cuánto midió, y mostraron el pedazo de popote que obtuvieron.

La participación del equipo de Karen fue de la siguiente manera. Karen dijo: "*Medimos el largo de la televisión y midió dos varitas y este pedazo de popote".* Fanny comentó lo siguiente: *"También medimos el largo del cuaderno y midió una varita y este pequeño pedazo de popote".* Israel comento: *"La medida del largo de la mesa fue de tres varitas y este pedazo de popote"*. Por último participó Leonardo, diciendo: *"Medimos el largo de la lapicera de Karen y midió una varita y este pedazo de popote".*

Algo similar hicieron el resto de los equipos de trabajo, diciendo qué habían medido, cuánto había medido y mostrando al grupo el pedazo de popote que representaba el residuo.

Después de que todos los alumnos terminaron de comentar su trabajo, la maestra se dirigió a Ángel para preguntarle lo siguiente: *"Ángel ¿crees que el usar la tlakotl y los popotes no tenían problemas de medir y comunicar las medidas los teotihuacanos?"* Ángel se tomó un tiempo para pensar su respuesta. Después de un momento, Ángel respondió: *"Yo pienso que ya no había problema, porque median con la tlakotl y decían cuántas varas y el pedazo de popote".* Al terminar Ángel su intervención, la maestra le agradeció su comentario y preguntó al grupo: *"¿Están de acuerdo con Ángel?".* Los estudiantes no respondieron.

Cuando la maestra, percibió que los alumnos no respondieron, comentó lo siguiente:

> *Imaginen que el maestro Víctor hace un pedido de mesas por teléfono, en una carpintería que utilizan la vara como unidad de medida y los popotes. En el momento que le contestan la llamada, el maestro proporciona la medida que el equipo de Karen obtuvo, que fue de tres varitas y un pedazo de popote ¿Ustedes creen que le manden las mesas correctas, al maestro Víctor? Piensen su respuesta.*

Posteriormente, Ángel levantó la mano y explicó: *"Sabe qué maestra, creo que me equivoqué". "¿Por qué dices eso Ángel?"*, preguntó la maestra. Ángel continúo diciendo:

> *El total de varitas no hay problema, porque son tres y ya. Pero con el popote sí va a haber problema, porque si el maestro Víctor dice que es un pedazo de popote, no van a saber exactamente el tamaño de popote.*

"¡Muy bien Ángel, tu comentario es excelente", dijo la maestra.

Con esta explicación, que dio Ángel al grupo, la maestra advirtió, que él había comprendido que la comunicación de una medida, utilizando los popotes sin darle un nombre y ciertas características, iba a ser un problema. Así que felicitó a Ángel por su valiosa participación y agregó diciendo:

> *Lo que nos quieres dar a entender, Ángel, es que comunicar una medida con los popotes sería un problema, porque el tamaño del popote sería más grande o más pequeño que el que tiene el equipo de Karen. ¿Están de acuerdo niños?*

El grupo contestó afirmativamente.

Para reafirmar la conjetura de Ángel, la maestra tomó una varita y otro popote de diferente tamaño y dijo:

> *Imaginen que el señor de la carpintería, donde el maestro Víctor mandó a hacer las mesas, tiene el tamaño de este popote, que es diferente al que tiene*

> *el equipo de Karen. Las mesas no quedarían a la medida que las pidió el maestro, porque el tamaño del popote es diferente. Levanten la mano si están de acuerdo.*

La totalidad del grupo levantó la mano. Con la explicación de Ángel y el comentario de la maestra, se conjeturó que el grupo había comprendido la problemática que habría en el momento de producir libremente popotes para dar cuenta de la longitud de los residuos.

En seguida de este momento de la sesión, la maestra se dirigió al grupo para hacer las siguientes preguntas: *"¿Cómo comunicó la longitud de la mesa sin tener ningún problema ¿Qué creen que hicieron los teotihuacanos para resolver este problema?"* Los niños no dieron ninguna respuesta, así que la maestra comentó:

> *La arqueóloga me dijo que los teotihuacanos les pusieron nombres a esas varitas. Pero imagínense si a cada pedazo de popote le ponemos un nombre, tendríamos muchos nombres, así que más tarde me comunicaré con la arqueóloga para preguntarle más sobre esas varitas que utilizaban los teotihuacanos y la próxima clase se los comento. Damos por terminada la sesión de hoy y nos vemos la próxima clase. Hasta luego niños y gracias por su atención.*

En esta sesión se concluyó que los alumnos se apropiaron de la tlakotl, la vara, como una unidad de medida común, así como también comprendieron la relación entre la iteración de la vara y el residuo. Además advirtieron que la vara no es suficiente para llevar a cabo una medida. También vieron a los popotes como una solución parcial a la cuestión del residuo.

Como temas generales, la maestra concluyó que los estudiantes piensan y explican sus respuestas de manera sistemática, aunque en ocasiones son incorrectas. Pero esto le da a la maestra la oportunidad para intervenir y guiar la sesión, para que los alumnos finalmente comprendan las ideas que conforman cada objetivo de aprendizaje. En cada momento de la sesión, se notó la participación de los alumnos para hacer sus comentarios con fundamento.

5.6. Subunidades de medida: el medio

En la cuarta y quinta sesión, los estudiantes conocieron, utilizaron y comprendieron el uso de la tlakotl (una vara de madera de aproximadamente 24 cm de largo) como unidad de medida común. También se percataron que no es suficiente la vara para llevar a cabo una medición. Con estos objetivos alcanzados, la maestra consideró que podía avanzar en la THA.

En la sexta sesión el objetivo fue comprender al residuo en relación con la iteración de la vara, e iniciar el trabajo con la relación del orden inverso de las fracciones unitarias, a través de construir subunidades de medida (ver Anexo 2).

La profesora comenzó esta sexta sesión tomando en cuenta el éxito alcanzado durante las sesiones anteriores. Ella se percató que los estudiantes trabajaban de manera satisfactoria reunidos en pequeños grupos, así que esta forma de trabajo la utilizó en esta sexta sesión.

Cuando el grupo estuvo organizado en equipos, inmediatamente Rafael levantó la mano para preguntarle a la maestra lo siguiente: *"Maestra. ¿Logró hablar por teléfono con la arqueóloga para preguntarle sobre los nombres que le pusieron a las varitas que utilizaban los teotihuacanos?"*. La maestra contestó que sí.

La estructura que llevaba la maestra para iniciar la clase, era hacer una retroalimentación de la sesión anterior, pero la pregunta de Rafael dio pie a comenzar de manera diferente. Con esto la profesora comprendió que el alumno tenía claro el antecedente de la sesión anterior, y que fue por tal motivo que hizo su pregunta.

Después de que la maestra contestó afirmativamente a la pregunta de Rafael, la profesora le dijo: *"Considero que a tus compañeros no les interesa saber sobre la conversación que tuve con la arqueóloga o ¿Estoy equivocada niños?"*

Bryan contesto: *"A mí también me gustaría saber, porque estuve pensando qué invento habían hecho los teotihuacanos"*.

Al terminar el comentario de Bryan, la maestra se dirigió al grupo diciendo: *"Levante la mano ¿quién quiere saber sobre lo que me comentó la arqueóloga?".* Todos los estudiantes levantaron la mano. La maestra siguió diciendo: *"Muy bien en vista que todos quieren enterarse del chisme, voy a contarles, pero quiero que estén en silencio para que puedan escucharme"*. Sin más indicaciones, los alumnos se comportaron como la maestra lo indicó.

Al percatarse la maestra que los alumnos estaban interesados en saber sobre la conversación que tuvo con la arqueóloga, comentó lo siguiente:

> *Primero que nada la arqueóloga los mandó felicitar, porque están haciendo un buen trabajo. También me comentó que le gusta recibir mis llamadas para ayudar a solucionar los problemas que les surjan en el momento de estar haciendo el trabajo. Otra cosa importante que me dijo, que así como ustedes tuvieron problemas, también los tuvieron los teotihuacanos y de igual manera, el pueblo de teotihuacanos averiguó con el más viejo, el que había inventado la tlakotl.*

A los alumnos les gustaba que la maestra les hablara del pueblo, teotihuacanos, mencionara palabras en náhuatl, pero sobre todo, que la profesora mencionara las cualidades de los estudiantes y se aplaudiera cada vez que hacían un buen comentario.

Para continuar la sesión, la maestra se dirigió al grupo para preguntar:

> *De verdad ¿No tienen alguna idea de la solución que dieron los teotihuacanos, al problema de usar varitas para medir las partes, que la tlakotl no cubría con precisión? Si ustedes son muy inteligentes.*

Algunos alumnos responden: “No tenemos ni idea”.

La maestra advirtió que los alumnos tenían el interés de saber la respuesta, así que comentó lo siguiente:

> *La arqueóloga me dijo que una tarde se reunió la gran tribu de los teotihuacanos con el inventor de la tlakotl, el más viejo de la tribu, para discutir qué podían hacer para resolver el problema de medir las partes que la vara no alcanzaba a cubrir con exactitud. Al viejo de la tribu se le ocurrió una forma ingeniosa de hacer los palitos. Él sugirió hacerlos de una forma que se pudieran hacer muchos palitos y que fuera fácil reconocer el tamaño de cada uno. El viejo propuso que la tribu hiciera el tlatlapantle ome.*

Después de que la maestra dijo las palabras en náhuatl, inmediatamente Bryan preguntó: *“¿Qué significan esas palabras maestra?”* Antes de contestar a la pregunta de Bryan, la maestra escribió las palabras en el pizarrón y pidió al grupo que las repitieran en voz alta, de manera grupal e individual, situación que agradó a los estudiantes. Posteriormente la maestra comentó que el significado de estas dos palabras era, *“el pequeño de a dos”*.

“El pequeño de a dos ¿Qué es eso?”, preguntaron los alumnos con una cara de desconcierto. La profesora se dirigió al grupo para preguntar: *“¿Tienen alguna idea de cómo era ese pequeño de a dos o el tlatlapantle ome?”* Los estudiantes hicieron comentarios como los que a continuación se mencionan: *“No tengo ni idea”. “No se me viene nada a la mente”. “Es algo que nunca había escuchado”*, etcétera.

En seguida la maestra comentó, *“la arqueóloga me dijo que el pequeño de a dos era una varita que cabía dos veces en la tlakotl*”. *“¿Cómo es eso maestra?”* preguntó Fernando.

La maestra no contestó la pregunta, si no que dijo: *“En un momento lo vas a entender, permíteme Fernando”.* Tomó las tlakotl y le dio a cada niño una, así como también cada equipo recibió una cantidad considerable de popotes azules que tenían una longitud menor a la de la tlakotl (18cm, aproximadamente).

Cuando la maestra terminó de entregar el material, dijo lo siguiente: *“Así como los teotihuacanos, ustedes van a crear su pequeño de a dos, que consiste en que esa varita (señalando el popote azul) mida dos veces la vara o la tlakotl”.*

En seguida, la maestra tomó la tlakotl y un popote azul y mostró al grupo que esa varita azul no cabía dos veces en la vara, así que tenían que ajustarla para que cuando se repitiera dos veces y cubriera exactamente en la tlakotl. Indicó que tenían que ir cortando el popote azul, hasta que cupiera dos veces en la vara. Es importante recordar que la longitud de los popotes azules era menor a una vara, pero mayor a mitad de la vara. Asimismo lo que se requería es que la vara que construyeran los estudiantes midiera 12 cm para que quepa dos veces en la vara.

Al terminar de dar la explicación, inmediatamente los estudiantes iniciaron el trabajo, cortando y calculando que el popote cupiera exactamente dos veces en la vara. La profesora se percató que los alumnos hacían su pequeño de a dos con mucho cuidado y precisión. Esto ocasionó que los alumnos, utilizaran varios popotes azules y también tardaran varios minutos para concluir el trabajo.

Se debe mencionar que aunque hacían el trabajo de manera individual, los alumnos se comunicaban entre ellos. En un equipo de alumnos, Bryan, para hacer exactamente su pequeño de a dos, tomó su lápiz y empezó a marcar en la vara sus intentos, es decir, ponía una referencia hasta donde llegaba lo que consideraba su pequeño de a dos. En un primero momento para verificar que la subunidad o pequeño de a dos cupiera dos veces en la vara y en un segundo momento para construir su pequeño de a dos con mayor rapidez. La maestra observó que esta situación la consideró correcta el resto del equipo y también el resto del grupo e hicieron lo mismo que hizo Bryan.

El tiempo que se tardaron los alumnos fue considerable, pero la maestra no lo vio como un problema. Al contrario, aplaudió el esfuerzo que hicieron los estudiantes, comentando que ellos se habían tardado menos que los teotihuacanos: *"Esta tribu se tardó días y noches hasta lograr con exactitud su tlatlapantle ome." "Así que no se preocupen",* reiteró la maestra.

Cuando la maestra observó que todos los alumnos tenían su pequeño de a dos, propuso que algunos demostraran que realmente era su tlatlapantle ome. Al demostrar que realmente su popote cabía dos veces en la vara, los estudiantes, se sintieron muy satisfechos de su gran esfuerzo.

La maestra, entregó unas bolsas de plástico con el nombre de cada niño, para que guardaran ahí su pequeño de a dos (su tlatlapantle ome) y recogió las varitas (las varas blancas). Con esta acción dio por terminada la sesión, agradeciendo el trabajo de cada uno de los alumnos.

En esta clase se concluyó lo siguiente: En el momento de que los alumnos elaboran su pequeño de a dos, lo están viendo como una vara que se repite dos veces en la tlakotl y que tiene que ser más pequeño que la vara, pero no cualquier tamaño, sino la mitad de la vara. Este es un principio que va a lograr que los alumnos comprendan la relación del orden inverso, es decir, entre más veces se repita la subunidad para cubrir al entero más pequeña va a ser la fracción.

También sucedió que no alcanzó el tiempo para trabajar con el pequeño de a tres, así que para la siguiente sesión se continuará el trabajo.

La profesora concluyó que el largo tiempo utilizado por los alumnos para lograr obtener una vara que cupiera dos veces la tlakotl, se debió a que era la primera vez que hacían un trabajo como el que realizaron en esta clase, así como también su dedicación para que su vara cupiera exactamente dos veces en la tlakotl. La profesora consideró que no hay problema, porque el centro de esta propuesta es el aprendizaje de los alumnos, así que ellos darán las pautas para continuar o detenerse.

5.7. Subunidades de medida: el pequeño de a tres y el pequeño de a cuatro.

El objetivo que se planteó en la sexta sesión, fue que los alumnos comprendieran la relación de orden inverso de las fracciones unitarias, a través de construir pequeños. Este objetivo se definió con base en el análisis de la evaluación diagnóstica. Específicamente, en la quinta sección donde se les solicitó a los estudiantes que establecieran la relación de orden entre fracciones unitarias. Tomando en cuenta las respuestas de los estudiantes, la profesora concluyó que la mayoría de los estudiantes tenía una muy pobre comprensión de este contenido y que los alumnos tenían que entender la relación del orden inverso, para poder establecer la relación de orden entre las fracciones unitarias.

Es necesario puntualizar que el tiempo de la sexta sesión no fue suficiente para construir el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro, el pequeño de a seis y de esta manera lograr el objetivo. Esto se debió a que los niños usaron todo el tiempo de la sesión para construir su pequeño de a seis. Así que en la séptima sesión, la profesora continuó trabajando para que los alumnos construyeran las subunidades de la vara.

La séptima sesión se inició invitando a los alumnos a que se reunieran en equipos de cuatro integrantes, de la misma manera como se encontraban en la sesión anterior. Cuando los estudiantes estaban reunidos en pequeños grupos, la maestra se dirigió al grupo para hacer la siguiente pregunta: *"¿Qué es lo que más les gustó de la clase anterior?"* Inmediatamente varios alumnos levantaron la mano, pero la maestra se dirigió a Braulio, un alumno que se le dificultaba hablar y prefería no participar ante sus compañeros. Para lograr que Braulio tuviera confianza y expresara su comentario, la maestra solicitó al grupo que estuviera en silencio y le pusieran atención a Braulio. Cuando el grupo se encontraba en silencio la maestra se dirigió a Braulio y se originó el siguiente diálogo:

Maestra: Vamos Braulio, me interesa saber tu comentario.
Braulio: A mí me gustaron las palabras en otro idioma.
Maestra: ¿Te refieres a las palabras en náhuatl?
Braulio: Sí maestra.
Maestra: ¿Te acuerdas cuáles son?
Braulio: Tlatlapantle ome-

Maestra: Muy bien Braulio se ve que estuviste repasándolas- ¿Te acuerdas que significa en español?
Braulio: Sí maestra. Significa el pequeño de a dos.
Maestra: Muy bien Braulio. ¿Quieres comentar algo más?
Braulio: No maestra.

Después de la intervención de Braulio, la profesora se dirigió al grupo y dijo *"Lo que acaba de comentar Braulio es muy interesante. ¿Alguien quiere ampliar el comentario de Braulio, con respecto a qué es el pequeño de a dos o el tlatlapantle ome?"* Alejandro respondió: *"Era una varita que construyeron los teotihuacanos y se tardaron días y noches".*

La maestra elogió el comentario de Alejandro. Posteriormente la maestra solicitó a Melanie que continuara con el comentario: *"Melanie ¿qué más nos puedes decir de ese pequeño de a dos?"*. Melanie responde, *"es de color azul"*. La maestra siguió cuestionando a Melanie: *"¿Cómo construiste tu pequeño de a dos?"* Melanie hace un pequeño silencio y luego continúa diciendo:

> *Usted nos dio la varita y luego muchos popotes azules. Cuando tuvimos los popotes iniciamos a cortarlos. Yo corté muchos popotes azules para construir mi pequeño de a dos. Al principio fue difícil, pero después marcaba con mi lápiz en la vara, como lo hicieron mis compañeros y fue más sencillo.*

La profesora agradeció y felicitó a Melanie por su participación. Posteriormente la maestra se dirigió al grupo y preguntó lo siguiente: *"¿Recuerdan la característica que tenía el pequeño de a dos, con respecto a la vara o la tlakotl?"* Bryan contestó: *"Mi pequeño de a dos era un popote que cabía dos veces en la tlakotl o la vara". "Muy bien Bryan"*, dijo la maestra.

Después de haber hecho un recuento de lo ocurrido en la sesión anterior, la profesora entregó a cada niño la tlakotl y el pequeño de a dos. Cuando los estudiantes tuvieron el material lo sacaron de la bolsa y volvieron a verificar que el popote cabía dos veces en la vara. Algunos niños se dieron cuenta que sobraba un pedazo pequeño y sugirieron a la maestra volverlo a hacer. La profesora les comentó que no se preocuparan, que posiblemente las tijeras no hicieron bien el trabajo, lo que sobraba era muy pequeño y que realmente no se percibía.

Desde la sesión anterior la maestra se percató que los estudiantes se esmeraban por construir su pequeño de a dos lo más exacto posible. Con esto supuso que la construcción de los demás pequeños, lo iba a hacer con la misma dedicación, así que tenía que tener paciencia y no apresurar a los alumnos hasta que ellos lograran su objetivo de aproximarse a la exactitud.

La maestra pidió que colocaran la tlakotl y su tlatlapantle ome sobre su mesa y les preguntó lo siguiente: *"¿Ustedes creen que los teotihuacanos se conformaron solo en construir el tlatlapantle ome o pequeño de a dos?".* Varios niños levantaron la mano, pero la maestra solicitó a Jazmín que respondiera. Jazmín comentó lo siguiente: *"Yo pienso que los teotihuacanos hicieron más varitas".*

Después de que Jazmín expresó su opinión, la maestra se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Quién está de acuerdo con Jazmín?"* Todos los alumnos levantaron la mano y Ángel explicó lo siguiente: *"Yo creo que hicieron más varitas, porque si vemos las pirámides no solo hicieron una, sino que construyeron más".*

Inmediatamente la profesora confirmó los comentarios de los alumnos y agregó lo siguiente:

> *Como les comenté en las primeras sesiones, los teotihuacanos fueron personas muy inteligentes e inquietas. Les gustaba estar inventando cosas a cada momento. Así que es cierto, construyeron más varitas pero igual que el pequeño de a dos, con características especificas y dándole un nombre para que no hubiera confusión. ¿Se pueden imaginar cómo era la siguiente varita que construyó la tribu de los teotihuacanos?*

Daniela respondió: *"Yo me imagino que construyeron otra vara pero no puedo decir sus características, solo sé que sí construyeron más varitas".*

Después del comentario de Daniela, la maestra le agradeció y dijo lo siguiente:

> *La arqueóloga me comentó que la siguiente vara que construyeron los teotihuacanos la llamaron tlatlapantle eyi, que en español significa pequeño de a tres.*

En coro dijeron los niños: *"Cómo no se nos ocurrió que después del pequeño de a dos seguía el pequeño de a tres".*

La maestra continuó diciendo:

> *Así es niños. Los teotihuacanos construyeron el tlatlapantle eyi, o pequeño de a tres. Pero como el pequeño de a dos, con ciertas características especificas. ¿Se imaginan cómo era el tlatlapantle eyi o pequeño de a tres? ¿Será más pequeño o más grande que el pequeño de a dos?*

La maestra les indicó que levantaran la mano quienes creían que era más grande y quienes creían que era más pequeño. Entonces todos levantaron la mano. En el pizarrón la maestra apuntó que 13 alumnos pensaban que el pequeño de a tres era más grande que el pequeño de a dos y 7 alumnos pensaban que el pequeño de a tres era más pequeño. Sin más explicaciones la maestra se dirigió al grupo diciendo: *"Voy a dejar estos datos en el pizarrón y vamos a comprobar quién tiene la razón".*

La profesora entregó a cada equipo una cantidad considerable de popotes de color verde e indicó que ese pequeño de a tres, o tlatlapantle eyi, tenía que caber tres veces en la tlakotl.

Danna levantó la mano y dijo: *"Ya entendí maestra esta varita verde se tiene que repetir tres veces en la vara"* También preguntó: *"¿Podemos marcar con el lápiz como lo hicimos con el pequeño de a dos?"* La maestra respondió: *"Sí, Danna, pueden utilizar el lápiz para marcar la medida de los intentos"*. Inmediatamente los alumnos iniciaron el reto de lograr que su popote verde cupiera exactamente tres veces en la tlakotl.

Cuando los alumnos manipulaban el material, la maestra observaba a cada uno de los equipos y se percató que se comunicaban entre ellos para lograr hacer con exactitud el pequeño de a tres.

El tamaño original de los popotes verdes fue igual que el popote azul: más de la mitad de la vara y menos que una vara. Es importante mencionar que el color del popote tiene una finalidad específica, no confundir a los estudiantes cuando se les presentara el material de los pequeños en madera, como se verá en la decima sesión (ver Anexo 2).

La maestra indicó que era muy importante que todo el grupo terminara su pequeño de a tres para comprobar quiénes habían estado en lo correcto: Los que pensaban que el pequeño de a tres era más grande que el pequeño de a dos, o los que pensaban que el pequeño de a tres era más pequeño que el pequeño de a dos.

Cuando la maestra se dio cuenta que todo el grupo tenía su pequeño de a tres, solicitó que comprobaran quién era más grande, el pequeño de a dos o el pequeño de a tres. Los alumnos tomaron los dos pequeños, los juntaron y finalmente comprobaron que el pequeño de a tres era más pequeño que el pequeño de a dos.

La maestra preguntó: *"¿Por qué el pequeño de a tres es más pequeño que el pequeño de a dos?"* Ningún alumno contestó la pregunta. La maestra comentó: *"No se preocupen más a delante encontraremos la respuesta y la explicación".*

La profesora se dirigió al grupo y dijo:

> *Anteriormente se comentó que los teotihuacanos construyeron varios pequeños. Ustedes ya construyeron el pequeño de a dos y el pequeño de a tres. ¿Ahora cual seguirá?*

Todos los alumnos contestaron: *"El pequeño de a cuatro"*. La maestra comentó con gran emoción:

> *Estoy frente a estudiantes muy inteligentes que construyeron los mismos pequeños que los teotihuacanos, en menos tiempo y con una gran precisión y también saben lo que sigue. Estoy muy fascinada de trabajar con ustedes.*

La maestra continuó diciendo: *"Ahora cómo será el pequeño de a cuatro, más pequeño que el pequeño de a tres o más grande, levanten la mano quienes piensan una cosa y quien piensa diferente".* La mayoría levantó la mano anunciando que el pequeño de a cuatro iba a ser más pequeño y cuatro niños no quisieron levantar la mano, situación que la maestra respetó y felicitó. Es importante aclarar que hasta este momento de la sesión, los alumnos no podían explicar por qué el pequeño de a cuatro tenía que ser más pequeño que el pequeño de a tres.

La maestra comentó a los alumnos que el nombre del pequeño de a cuatro se los iba a dar hasta la próxima sesión, debido a que la arqueóloga no estaba segura de la escritura. Posterior al comentario de la profesora, los alumnos iniciaron a construir el pequeño de a cuatro con las mismas estrategias que el pequeño de a dos y el pequeño de a tres. Ningún estudiante se percató que podían tomar como referencia el pequeño de a dos para poder lograr construir en menos tiempo el pequeño de a cuatro.

La profesora advirtió que la mayoría de los estudiantes tenían presente el pequeño de a tres para verificar si lo que habían dicho era verdad, que el pequeño de a cuatro era más pequeño que el de a tres.

Al finalizar la actividad se confirmó que el pequeño de a cuatro fue más pequeño que el de a tres. Los cuatro alumnos que no levantaron la mano, comentaron que querían estar seguros antes de tomar una decisión.

Con la construcción del pequeño de a cuatro la maestra dio por terminada la sesión, concluyendo lo siguiente: Los alumnos ven a los pequeños como subunidades que cubren a la vara y la mayoría del grupo está seguro que el pequeño que sigue será más pequeño que el anterior, pero aun no pueden explicar el porqué. La maestra lo advirtió cuando los alumnos levantaron la mano para determinar que el pequeño de a cuatro fue más pequeño que el de tres. La profesora conjeturó que los alumnos sí están entendiendo la relación del orden inverso, solo faltó que lo argumenten.

La maestra supone que con la construcción del pequeño de a cinco y seis los alumnos puedan lograr argumentar por qué entre más veces quepa la subunidad en la vara más pequeña tiene que ser.

En los temas generales, la maestra concluyó que los alumnos que no tenían la habilidad para expresarse, tuvieron en esta séptima sesión un gran avance, pero tiene que seguir trabajando con ellos. Además que el tiempo utilizado para construir los pequeños fue menos que el tiempo de la sexta sesión. La profesora determinó que se debió al antecedente de la clase anterior, así como la actitud de los alumnos para confirmar sus predicciones e interés en la clase.

Por último, la intención de la maestra de no dar el nombre en náhuatl del pequeño de a cuatro fue para mantener el interés de los estudiantes.

5.8. La relación de orden inverso entre subunidades de medida (fracciones unitarias)

El objetivo principal de aprendizaje de la octava sesión fue que los alumnos comprendieran la relación de orden inverso de las fracciones unitarias, a través de construir pequeños. Este objetivo se venía trabajando desde la sexta sesión. En esta octava sesión se siguió trabajando, debido a que los estudiantes no habían logrado argumentar porqué el pequeño que sigue sería más pequeño que el anterior. Además, no se terminó de construir el pequeño de a cinco y el pequeño de a seis.

Lo que se advirtió es que la mayoría de los estudiantes sabían que el pequeño que seguiría sería más pequeño que la anterior. La profesora supuso que fue por la predicción, construcción, y la reflexión que tuvieron los alumnos antes, durante y después de trabajar el pequeño de a dos, el pequeño de a tres y el pequeño de a cuatro.

La profesora inició la octava sesión integrando a los estudiantes en pequeños grupos de cuatro niños, tal y como lo hizo en las sesiones anteriores. Cuando la maestra se percató que el grupo estaba integrado en equipos, solicitó lo siguiente:

> *En equipos platiquen de lo que trabajaron la sesión anterior. En un momento yo indicaré quién de ustedes comentará lo que platicaron en el equipo.*

El objetivo de la profesora con estas actividades de inicio fue que los alumnos tuvieran presente las actividades de la sesión anterior, así como seguir trabajando con los alumnos que aún no tenían la habilidad de hablar ante sus compañeros.

Después de unos minutos, la maestra solicitó a los alumnos que estuvieran en silencio para escuchar a sus compañeros. Reiteró la importancia de respetar al alumno que expresara su comentario. Posteriormente la profesora pidió a Leonardo que comentara lo que habían platicado al interior de su equipo. Leonardo dijo lo siguiente: *"Cortamos popotes de color azul, verde y amarillo y también escribimos los nombres en palabras en náhuatl".*

Después del comentario de Leonardo, la maestra le preguntó: *"¿Sabes el nombre de cada uno de los popotes?"* Para ayudar a contestar la pregunta a Leonardo, la maestra entregó a cada uno de los alumnos la bolsa que contenía la vara, el pequeño de a dos, el pequeño de a tres y el pequeño de a cuatro.

Cuando Leonardo tenía en sus manos los pequeños, la maestra le pidió que sacara el popote azul. *"¿Recuerdas qué nombre recibe esta varita?"* preguntó la docente. Leonardo contestó: *"Pequeño de a dos"*. La maestra le dijo: *"Muy bien Leonardo".* La maestra terminó de alagarlo e inmediatamente Leonardo sacó el popote verde y dijo, mostrando el popote: *"Este es el pequeño de a tres".* Por último, sacó de la bolsa el popote amarillo diciendo: *"Este es el pequeño de a cuatro".*

La maestra agradeció la participación de Leonardo y se dirigió al equipo de Braulio para indicar lo siguiente: *"Braulio me gustaría que nos comentaras qué es lo que tu equipo platicó sobre la clase anterior".* Braulio mencionó algo similar a lo que había comentado Leonardo, pero además dijo los nombres de los pequeños en náhuatl, con ayuda de su equipo.

Bryan, un integrante del equipo de Braulio, dijo a la maestra: *"Nos faltó el nombre del pequeño de a cuatro en náhuatl, porque usted quedó en darlo en esta clase".* La maestra dijo: *"Tiene razón Bryan. Pensé que no les interesaba pero ya veo que me equivoqué".* La profesora sacó un cuaderno de su bolsa y anotó las siguientes palabras en el pizarrón, "tlatlapantle nawi, que significa pequeño de a cuatro".

Cuando la maestra terminó de anotar las palabras en náhuatl, Sindy levantó la mano para solicitarle a la maestra que anotará en el pizarrón el nombre de demás pequeños en náhuatl. La maestra atendió la solitud de la alumna y agregó los siguientes nombres, tlatlapantle ome y tlatlapantle eyi. Posteriormente los alumnos repitieron los nombres en coro.

No perdiendo de vista la secuencia de la sesión, la maestra se dirigió a los equipos restantes para solicitarles sus comentarios con la misma estrategia. Los alumnos que participaron fueron Melanie, Adriana e Israel. Los tres estudiantes comentaron cosas similares a Leonardo y Braulio. Melanie hizo el siguiente comentario: *"Votamos sobre cómo iba a ser el pequeño que seguía, y nos gustó hacer esto, porque votamos por la respuesta correcta".*

La maestra agradeció y elogió los comentarios de los estudiantes, pero sobre todo tomó el comentario de Melanie sobre la correcta predicción que hicieron para saber cómo iba a ser el tamaño del próximo pequeño. La profesora se dirigió al grupo y dijo lo siguiente: *"A mí me gustaría saber si realmente fue suerte o pensaron en lo que iba a pasar".* La maestra solicitó que colocaran la vara y sus tres pequeños que construyeron sobre su mesa para que los observaran y posteriormente comentaran la siguiente pregunta, ¿por qué el pequeño que sigue tiene ser más pequeño que el anterior? Los alumnos solo observaban el material, pero no comentaron nada al respecto.

La profesora se percató que los alumnos no iban a responder, así que dijo lo siguiente: *"Ya construyeron el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro. ¿Qué pequeño seguirá?".* Inmediatamente los alumnos dijeron en coro *"El pequeño de a cinco". "Muy bien niños, ahora vuelvo a confirmar, estoy trabajando con alumnos muy inteligentes"*, dijo la maestra. La maestra continuó preguntando: *"¿Hubo magia en la respuesta que dieron o realmente hay una lógica?"* Ángel levantó la mano y dijo: *"No hay magia maestra, pero es fácil decir qué sigue, si ya hicimos el pequeño de a dos, el pequeño de a tres y el pequeño de a cuatro obvio sigue el pequeño de a cinco".*

La profesora continuó diciendo:

> *Lo que Ángel dio a entender es que no hay magia en sus respuestas y que ustedes realmente están pensando en lo que sigue, en base a una lógica. Muy bien niños, ahora me gustaría saber, ¿Si el pequeño de a cinco va a ser más pequeño o más grande que el pequeño de a cuatro?*

Después de un momento de silencio, Daniela levantó la mano y dijo lo siguiente: *"Yo digo que el pequeño de a cinco va a ser más pequeño que el de a cuatro". Inmediatamente la maestra preguntó: "¿Por qué piensas eso Daniela?"* Daniela acomodó sus pequeños de la misma forma que los fue construyendo, es decir, primero el pequeño de a dos, segundo el pequeño de a tres y por último el pequeño de a cuatro y dijo observando sus pequeños:

> *El pequeño de a dos es más grande que el pequeño de a tres y el pequeño de a tres fue más pequeño que el de dos y el pequeño de a cuatro fue más pequeño que el de tres. Entonces el pequeño de a cinco va a ser más pequeño del de a cuatro.*

Cuando Daniela terminó de dar su comentario, la maestra aplaudió lo que había dicho la alumna, así como también hizo el siguiente comentario: *"Daniela es sorprendente lo que acabas de decir, de verdad a mi no se me había ocurrido, te felicitó Daniela y agradezco tu participación".*

La maestra se dirigió al grupo y preguntó:

> *¿Quién entendió lo que dijo Daniela? ¿Quién comparte la hipótesis de Daniela, que el pequeño de a cinco va a ser más pequeño que el pequeño de a cuatro?*

Todos los alumnos levantaron la mano para confirmar que sí habían entendido el comentario de Daniela y estaban de acuerdo con la hipótesis de que el pequeño de a cinco iba a ser más pequeño que el de a cuatro. De algo que se percató la profesora es que los estudiantes observaban sus pequeños y se daban cuenta de que cada vez se iban haciendo más pequeños.

Inmediatamente, la maestra entregó a cada equipo una cantidad considerable de popotes de color naranja con las mismas características de los popotes anteriores, más de la mitad que la vara y menos que la vara. También les solicitó que construyeran el pequeño de a cinco para comprobar la hipótesis de Daniela. Los alumnos sin más indicaciones iniciaron la construcción.

Cuando los alumnos estaban trabajando, Rafael le preguntó a la maestra lo siguiente: *"¿El pequeño de a cinco también tiene nombre náhuatl?"*. La maestra contestó que sí y escribió en el pizarrón las siguientes palabras: "tlatlapantle makwil que significan pequeño de a cinco". También indicó la maestra, que en cuanto terminaran la construcción de su pequeño, repasarían el nombre en náhuatl, situación que a los estudiantes agradó.

Después de un tiempo considerable los alumnos terminaron la construcción de su pequeño de a cinco (o tlatlapantle makwil) y advirtieron que la hipótesis de Daniela era verdadera. El pequeño de a cinco fue más pequeño que el de a cuatro.

La maestra se dirigió al grupo y dijo:

> Ángel en un momento de la clase comentó que no hay magia en este trabajo y estoy de acuerdo con él. Me gustaría que observaran su vara y sus pequeños y recordaran qué es lo que hicieron después de que ya tenían construidos cada uno de sus pequeños.

Posteriormente al comentario de la maestra, Bryan levantó la mano para pedir la palabra y dijo:

> *Cuando terminé de construir el pequeño de a dos, el de a tres, el de a cuatro y el de a cinco, verifiqué que cada uno de los pequeños se repitieran en la vara las veces que se tenían que repetir exactamente; es decir, que el pequeño de a dos se repitiera exactamente dos veces en la vara, el pequeño de a tres se repitiera exactamente tres veces en la vara, el pequeño de a cuatro se repitiera exactamente cuatro veces en la vara y por último que el pequeño de a cinco se repitiera exactamente cinco veces en la vara.*

Al terminar el comentario de Bryan, la maestra agradeció la participación del alumno, así como también se dirigió al grupo para preguntar si alguien más había hecho lo que hizo Bryan. Todos los alumnos respondieron con un sí.

Luego del valioso comentario de Bryan, la maestra pidió a los alumnos que observaran sus pequeños tomando como punto de partida el pequeño de a dos, luego el pequeño de a tres, así hasta el pequeño de a cinco.

La maestra preguntó:

> *¿Tendrá que ver el tamaño de los pequeños con las veces que se repite en la vara ola tlakotl?*

Inmediatamente Ángel levantó la mano y dijo:

> *Claro que sí maestra. Si el pequeño de a dos fuera más grande no se podría repetir exactamente dos veces en la vara ola tlakotl y si el pequeño de a tres también fuera más grande no se podría repetir exactamente tres veces.*

La maestra dijo lo siguiente:

> *¿Lo que tú quieres dar a entender Ángel es que entre más veces se repita el pequeño en la vara más pequeño tiene que ser y entre menos veces se repita más grande va a ser? ¿Estás de acuerdo Ángel?*

Ángel movió la cabeza diciendo que sí. La maestra dijo lo siguiente:

> *Yo estoy de acuerdo con lo que dice Ángel. Si ustedes observan el pequeño de a tres se repite más veces que el pequeño de a dos y es más pequeño. Ahora vean, el pequeño de a cuatro se repite menos veces que el pequeño de a cinco y es más grande que el pequeño de a cinco. Entonces yo coincido con Ángel, que entre más veces se repita el pequeño más pequeño va a ser y entre menos veces se repita más grande va a ser el pequeño.*

Se dirigió al grupo para preguntarles si también estaban de acuerdo con lo que había dicho Ángel. Bryan levantó la mano y dijo:

> *Yo también estoy de acuerdo porque por eso es qué fuimos cortando los popotes hasta que nuestro pequeño cupiera dos, tres, cuatro o cinco veces y cada vez iban siendo más pequeños.*

Aprovechando este momento esencial de la sesión, la maestra preguntó lo siguiente: *"¿El pequeño de a seis será más grande o más pequeño que el pequeño de a cinco?"* La mayoría levantó la mano para contestar, pero la maestra se dirigió a los alumnos que no habían levantado la mano. Uno de ellos fue Braulio. La profesora le preguntó: *"¿Qué opinas Braulio? ¿El pequeño de a seis será más pequeño o más grande que el pequeño de a cinco?"* Braulio contestó observando sus pequeños, *"El pequeño de a seis va a ser más pequeño que el pequeño de a cinco"*. Después del comentario de Braulio, la maestra se dirigió a Rafael y le preguntó: *"¿Estás de acuerdo con Braulio?".* Rafael respondió que sí.

La maestra entonces hizo la siguiente pregunta: *"¿Por qué estás de acuerdo con Braulio?".* Rafael respondió lo siguiente: *"El pequeño de a seis se va a repetir más veces en la vara. Entonces tiene que ser más pequeño para que quepa".* La maestra felicitó a Braulio y a Rafael, luego indicó al grupo que comprobaran la hipótesis de Braulio y Rafael: *"Que el pequeño de a seis es más pequeño que el pequeño de a cinco, porque el pequeño de a seis se iba a repetir más veces".*

Al poco tiempo los alumnos construyeron su pequeño de a seis y verificaron que realmente se repetía seis veces en la vara, posteriormente se dieron cuenta que era más pequeño que el pequeño de a cinco.

Para cerrar la sesión, la maestra pidió que tomaran su vara y cada uno de los pequeños, en el orden que los construyeron y fueran diciendo por qué el pequeño de a tres era más pequeño que el pequeño de a dos y así sucesivamente, con el objetivo de que los alumnos tuvieran claro que el tamaño de los pequeños tenía que ver con las veces que se repiten en la vara. La maestra también quiso que tuvieran en cuenta que entre más veces se repita el pequeño, más pequeño va a ser, y entre menos veces se repita el pequeño, más grande va a ser.

En esta sesión se concluyó que la mayoría de los alumnos se dieron cuenta que entre más veces se repita el pequeño en la vara más pequeño va a ser y entre menos veces se repita el pequeño va a ser más grande.

La maestra consideró que sería necesaria otra sesión de trabajo para que la totalidad del grupo tuviera claro por qué el pequeño que sigue tiene que ser más pequeño, y por qué el pequeño que lo antecede es más grande.

También concluyó la profesora que el material fue un excelente recurso para que la mayoría de los niños lograran comprender el objetivo, así como también que fuera un apoyo para poder dar un buen comentario o una buena argumentación.

Cuando la profesora se apoyó en los comentarios de los alumnos para dar una explicación, se percató que los estudiantes entendieron lo que ella decía, así como también los hizo sentir importantes.

5.9. Consolidando la relación de orden inverso

La maestra consideró necesaria una sesión más de trabajo para lograr el objetivo de que la totalidad del grupo tuviera claro por qué el pequeño que sigue tiene que ser más pequeño, así como también por qué el pequeño que lo antecede es más grande. Así, se continuó el trabajo para lograr este objetivo, el cual inició en la sexta sesión. El propósito fue que los alumnos comprendieran la relación del orden inverso de las fracciones unitarias, a través de construir las sub-unidades de medida (los pequeños).

Desde que la profesora inició el trabajo de la propuesta de aprendizaje, se dio cuenta que el trabajo en pequeños grupos era eficaz para lograr los objetivos de aprendizaje. Así que tomando en cuenta las buenas experiencias obtenidas durante las sesiones anteriores, comenzó la novena sesión organizando al grupo en equipos de cuatro niños.

Cuando la maestra observó que los alumnos se encontraban integrados en equipos de trabajo, entregó a cada estudiante una bolsa con los pequeños que se construyeron en las sesiones anteriores. Posteriormente, pidió que sacaran el material y lo acomodaran sobre su mesa. La forma de acomodarlo en su mesa era en el mismo orden que los fueron construyendo.

Hubo niños que acomodaron los pequeños de derecha e izquierda colocando el pequeño de a dos en primer lugar y en último lugar el pequeño de a seis. Otros estudiantes acomodaron sus pequeños de manera inversa. La maestra solicitó que todo el grupo tuviera sus pequeños ordenados de la misma manera. Sin embargo, no quiso ser ella quien determinara el orden, así que la decisión fue tomada de manera democrática. Los niños votaron cómo iban a acomodar sus pequeños. Finalmente el material se acomodó de la siguiente manera, iniciando de izquierda a derecha, en primer lugar el pequeño de a dos y en último lugar el pequeño de a seis.

Cuando la maestra observó que todos los alumnos tenían su material acomodado de la misma manera, se dirigió al grupo y dijo lo siguiente:

> *Uno de ustedes va a indicar el nombre de un pequeño y el resto del grupo levantará con su mano el pequeño que se esté solicitando y vamos a ir*

> *contestando algunas preguntas con respecto al pequeño que tienen en la mano y el resto de los pequeños.*

"Vamos a iniciar", dijo la maestra, y continuó comentando lo siguiente: *"Melanie, dime qué pequeño quieres que levanten tus compañeros".* Melanie contestó: *"El pequeño de a cuatro*". *"Ahora todos levanten el pequeño de a cuatro"*, dijo la maestra. Cuando todos los alumnos tenían el pequeño de a cuatro levantado, la profesora pregunto: *"¿Quién está antes del pequeño de a cuatro?" Todos los alumnos contestaron en coro: "El pequeño de a tres".*

La maestra continuó preguntando: *"¿Cómo es el pequeño de a tres? ¿Más grande o más pequeño que el pequeño de a cuatro?"* Daniela pidió la palabra para decir lo siguiente: *"Maestra, el pequeño de a tres es más grande que el pequeño de a cuatro".*

La profesora aprovechó la participación de Daniela para seguir cuestionándola con lo siguiente: *"Daniela, ¿quién se repite más veces en la vara, el pequeño de a cuatro o el pequeño de a tres?"* Daniela contestó: *"El pequeño de a tres."* La maestra agradeció la participación de Daniela e inmediatamente preguntó al grupo: *"¿Quién está de acuerdo con Daniela?".* La mayoría del grupo estaba en desacuerdo con Daniela y levantaron la mano para aclarar su comentario, pero la maestra cedió la palabra a Adriana.

La maestra se dirigió a Adriana y le dijo lo siguiente: *"Adriana ¿estás de acuerdo con Daniela? Ella dice que el pequeño de a tres se repite más veces que el pequeño de a cuatro. ¿Tú qué opinas?"*. Para asegurar su respuesta, Adriana, tomó su pequeño de a tres y su pequeño de a cuatro para comprobar quién se repetía más veces en la vara. Ella obtuvo como resultado que el pequeño de a cuatro se repetía más veces en la vara. Fue la respuesta que dio al grupo, que el pequeño de a cuatro se repetía más veces que el pequeño de a tres.

Después de la respuesta de Adriana, la maestra aclaró que en la clase se valía equivocarse y también era excelente que utilizaran el material para dar una buena respuesta. Hizo lo anterior para seguir dando confianza a los alumnos en el momento de hacer algún comentario erróneo o darle alguna respuesta al grupo. También lo hizo para darle uso al recurso didáctico.

La maestra siguió la misma estrategia para cada uno de los pequeños, así como también continuó cuestionando a los estudiantes que se les había dificultado entender que entre más veces se repetía el pequeño más pequeño tenía que ser y entre más grande es el pequeño menos veces se repite en la vara.

Al finalizar la actividad de cuestionar a los alumnos sobre cada uno de los pequeños, Ángel levantó la mano y dijo lo siguiente: *"Ya sé cómo saber cuántas veces se repite un pequeño en la vara sin utilizar ni los pequeños ni la vara".* La maestra sabía que el alumno diría algo muy interesante como todos los alumnos que solicitaban dar algún cometario, así que pidió la atención del resto del grupo para que lo escucharan.

Cuando el grupo estaba en silencio, Ángel continuó diciendo lo siguiente:

> *El pequeño de a dos se repite dos veces en la vara. El pequeño de a tres se repite tres veces en la vara. Es decir, el nombre de los pequeños tiene que ver cuántas veces se repite en la vara y también tiene que ver el tamaño. Para que el pequeño de a tres se pueda repetir tres veces en la vara tiene que ser más pequeño que el pequeño de a dos, si no, no resultaría y así sería con los demás. El pequeño de a cuatro se repite cuatro veces en la vara y tiene que ser más pequeño que el de a tres, si no tampoco resultaría. El pequeño de a cinco se repite cinco veces en la vara y tiene que ser más pequeño que el pequeño de a cuatro, porque si no tampoco resultaría una vara. Y el pequeño de a seis se repite seis veces en la vara y tiene que ser más pequeño que el de a cinco, si no, no cabe en la vara.*

Inmediatamente que Ángel terminó de dar su comentario la maestra dijo lo siguiente:

> *Déjame ver si entendí lo que acabas de decir, Ángel. Tú sin los pequeños podrías contestarme lo siguiente: ¿Cuántas veces cabe el pequeño de a cinco en la vara? ¿Tú podrías decirme que son cinco veces por el nombre del pequeño. Y si te preguntara: ¿Quién es más pequeño el pequeño de a cuatro o el pequeño de a cinco? Tu respuesta sería el pequeño de a cinco, porque para que pueda caber más veces en la vara tiene que ser más pequeño.*

Ángel sin pensarlo movió la cabeza y también dijo que sí. Cuando Ángel terminó de confirmar su respuesta, la maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Están de acuerdo con lo que dijo Ángel?"* La totalidad del grupo levantó la mano.

La profesora para comprobar que realmente se había comprendido lo anterior, se dirigió a Braulio y le preguntó por el pequeño de a siete, el cual no había sido producido físicamente por el grupo: *"Braulio, si yo quisiera saber cómo va* *a ser el pequeño de a siete tomando como referencia el pequeño de a seis ¿tú qué me dirías?"*. Braulio dijo lo siguiente: *"El pequeño de a siete se va a repetir siete veces en la vara y tiene que ser más pequeño que el pequeño de a seis porque se repite más veces en la vara, sino, no cabe".* Muy buena explicación Braulio, dijo la profesora.

Después de que la maestra terminó de felicitar a Braulio, los alumnos solicitaron construir el pequeño de a siete, así como también pidieron el nombre en náhuatl. La profesora accedió a la petición de los alumnos sin ningún problema. Al contrario, le dio gusto que los estudiantes se encontraran entusiasmados en el trabajo de la construcción de los pequeños. La profesora dio material para que los alumnos construyeran su pequeño de a siete, así como también el nombre de "tlatlapantle chikome" que significa *pequeño de a siete*.

Cuando los alumnos terminaron de construir el pequeño de a siete, o tlatlapantle chikome, la maestra se dirigió a Melanie y le preguntó: *"Melanie ¿el pequeño de a ocho será más grande o más pequeño que el pequeño de a siete?"* Melanie sonrió a la maestra y dijo: *"Obvio maestra, el pequeño de a ocho tiene que ser más pequeño que el de siete porque se repite más veces".* También el resto del grupo dijo: "*Sí maestra, es obvio".* Inmediatamente la maestra preguntó a Leonardo, uno de los estudiantes con menos confianza para hablar en público y también de más bajo desempeño: *"¿Estás de acuerdo con Melanie?".* Leonardo movió la cabeza diciendo que sí. La maestra le pidió que repitiera lo que había dicho su compañera y Leonardo lo hizo con ayuda de Melanie.

Para concluir con la construcción de los pequeños, la maestra solicitó que construyeran el pequeño de a ocho para que también se enteraran cómo era su nombre en náhuatl. Los alumnos construyeron el pequeño de a ocho con el mismo entusiasmo que los anteriores pequeños, pero ya con una mayor facilidad al momento de cortar el popote y de asegurarse de que el pequeño cupiera ocho veces en la vara. El nombre del pequeño de a ocho en náhuatl fue "tlatlapantle chkweyi".

El propósito de la maestra era que los alumnos construyeran solamente el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro y el pequeño de a seis, pero el entusiasmo de los alumnos y la dinámica de las sesiones se prestó para que también construyeran el pequeño de a cinco, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho; todos con sus respectivos nombres en náhuatl. Lo anterior sirvió para que la totalidad del grupo entendiera que entre más veces una subunidad quepa en la unidad más pequeña va a ser, y entre menos veces quepa, más grande va a ser. Esto es, entre más veces quepa un pequeño en la vara, más pequeño va a ser, y entre menos veces quepa, más grande va a ser.

La profesora concluyó que la totalidad del grupo comprendió el objetivo de aprendizaje. Lo anterior se desprende de los comentarios de los estudiantes, pero en especial cuando Melanie dijo: *"Obvio maestra, el pequeño de a ocho tiene que ser más pequeño que el de siete porque se repite más veces" y el resto del grupo lo reafirmó: "Sí maestra, es obvio".*

Con base en esto la profesora dedujo que ya se había alcanzado el objetivo y que la construcción de los pequeños ya no era un reto para los estudiantes. Por tal motivo dio por terminadas las actividades que implicaban la construcción de los pequeños. La profesora también concluyó que el material fue un excelente apoyo para que los alumnos comprendieran el objetivo de aprendizaje.

En temas generales, la maestra confirmó el hecho de que, darle importancia a los comentarios que hacen cada uno de los estudiantes ayudó a que, alumnos quienes no tenían habilidad para expresar sus ideas lograran avanzar durante el trabajo de la sesión. También ayudó el que se reiterara el respeto que debe recibir el estudiante que comenta algo ante el grupo.

5.10. Generalizando la relación de orden inverso

Hasta este momento del experimento de enseñanza se habían alcanzado los siguientes cuatro objetivos: Primero, se logró familiarizar a los estudiantes con la medición de longitudes. Segundo, los alumnos comprendieron las ventajas y desventajas de usar unidades de medición arbitrarias, así como las ventajas de usar una unidad común. Tercero, los alumnos reconocieron el problema de medir la parte donde ya no cabe una unidad entera. Cuarto, los alumnos comprendieron que, entre más veces cabe una subunidad en la unidad de medida, es más pequeña y entre menos veces cabe, es más grande, es decir, comprendieron el inverso de las fracciones unitarias, en el contexto de la medición.

Como el lector recordará, en la sexta sesión se inició el trabajo encaminado a que los estudiantes comprendieran la relación entre el tamaño de la subunidad y las veces que cabe en la unidad de medida, a través de construir varias subunidades a las que se les dio un nombre especial (pequeños). Este objetivo se trabajó hasta la novena sesión, debido a que los estudiantes no lograban argumentar porqué el pequeño que sigue sería más pequeño que el anterior. Al terminar la novena sesión la maestra dio por hecho que se había alcanzado el objetivo. Esta conclusión se derivó de los comentarios que los alumnos hicieron cuando la maestra los cuestionaba por qué el pequeño que lo antecede es más grande qué el que sigue.

La profesora concluyó que con la producción de los pequeños, los estudiantes pensaban de manera implícita en fracciones como partes de una longitud (la vara). Esta noción es fundamental para que más adelante logren valorar adecuadamente y establecer la relación de orden entre fracciones unitarias, así como también logren los alumnos ubicar fracciones en la recta numérica.

El propósito de la décima sesión fue que los estudiantes lograran generalizar la idea de que a menor tamaño la relación del orden inverso de una fracción de una fracción unitaria, más veces cabe en el entero y a la inversa, a mayor tamaño, menos veces cabe.

Para iniciar el trabajo de la décima sesión la maestra solicitó a los estudiantes que no se integraran en equipos, quedando cada uno de ellos en su lugar. Los estudiantes estaban sentados en cinco filas con cuatro pupitres en cada una. El propósito de la profesora era que los alumnos iniciaran el trabajo de manera individual para posteriormente organizarse en pequeños grupos.

Cuando la profesora se observó que los alumnos se encontraban en sus lugares de trabajo se dirigió a ellos y les dijo lo siguiente:

> *Ayer por la tarde hablé por teléfono con la arqueóloga. El objetivo de la llamada fue para comentarle todo el trabajo que realizaron cada uno de ustedes. Una de las tantas cosas que le comenté fue el tiempo que tardaron en construir sus pequeños. Ella quedó realmente asombrada porque según las investigaciones que ha realizado, los teotihuacanos tardaron varias semanas para construir los pequeños. Así que a ustedes los considera unas personas muy inteligentes, porque lograron hacer sus pequeños en muy poco tiempo, por tal motivo les envía un felicitación a cada uno de ustedes. Otra de las cosas que también le sorprendió a la arqueóloga fue saber que después de construir los pequeños lograran concluir que entre más veces se repita el pequeño más pequeño va a ser y entre menos veces se repita más grande va a ser… La arqueóloga los considera a ustedes unos alumnos muy inteligentes, por tal motivo les compartió un gran invento que los teotihuacanos hicieron.*

Después de este comentario, la profesora nuevamente se dirigió al grupo para preguntar: "¿Quieren saber de qué se trata ese gran invento de los teotihuacanos?" Todos los alumnos contestaron en coro con un sí.

La maestra se dirigió al pizarrón y trazó un pequeño rectángulo ($\boxed{}$), indicó que para los teotihuacanos era una cajita que significaba "el pequeño". Posteriormente la profesora escribió lo siguiente en el pizarrón, $\boxed{2}$ que significa el pequeño de a dos, $\boxed{3}$ pequeño de a tres, $\boxed{4}$ pequeño de a cuatro, $\boxed{5}$ pequeño de a cinco, $\boxed{6}$ pequeño de a seis, $\boxed{7}$ pequeño de a siete y $\boxed{8}$ pequeño de a ocho. La maestra explicó que esta era una manera en que los teotihuacanos ahorraban tiempo en el momento de escribir sus mensajes.

Cuando la maestra terminó de explicar, Israel levantó la mano para decir lo siguiente: *"Ya sé maestra. Me imagino como un código".* Inmediatamente la maestra dijo: "*Exactamente Israel es el código de los teotihuacanos".* Después de este comentario, la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"Si borro las palabras pequeño de a dos, pequeño de a tres, etc., ¿Ustedes podrán determinar qué* *dice con solo tener el número dentro de la cajita?"*. Los alumnos contestaron que sí. La maestra borró las palabras y solo quedaron los números dentro de las cajitas.

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

Para asegurarse que los alumnos habían comprendido este sistema de inscripción, la profesora, hizo que algunos niños comentaran qué significaba cada número dentro de la cajita en código teotihuacano, como lo había definido Israel. Posteriormente llevó a cabo un breve dictado en el que los alumnos solo tenían que escribir la cajita y el número, dependiendo del pequeño. Por ejemplo, la maestra dijo: *"Escriban "pequeño de a seis" en código teotihuacano".* Los alumnos solo escribían $\boxed{6}$.

La escritura fue de manera individual. Para revisarla, la maestra pidió que intercambiaran su trabajo y un alumno escribía en el pizarrón lo que se solicitó, para verificar que todos tenían lo mismo. Uno de los alumnos que pasa al pizarrón fue Leonardo (con más rezago en el grupo). La maestra observó que no fue problema para él llevar a cabo este trabajo, ni para el resto del grupo.

Cuando la maestra se dio cuenta que se había introducido adecuadamente este sistema de inscripción representativo, entregó a cada alumno un ejercicio que trabajarían de manera individual. La profesora explicó que tenían que comparar quién era más grande si un pequeño de a seis o el pequeño de a dos, escribiendo el signo el signo mayor que >, menor que < o igual = según correspondiera.

La profesora aclaró que si el signo era un problema para ellos, podían utilizar las palabras mayor que, menor que o igual, según fuera necesario. Los ejercicios fueron los que se encuentran en la Tabla 8.

Después de un tiempo aproximado de cinco minutos, en el que los alumnos trabajaron de manera individual, la maestra solicitó que trabajaran en parejas para comparar sus respuestas. La maestra organizó las parejas de tal manera que, en cada una hubiera un estudiante con habilidad para expresarse y comprender el ejercicio, con alguien que se le dificultara. Por ejemplo, la maestra integró a Bryan con Leonardo. Bryan es de los alumnos que muestran habilidad de hacer las cosas y Leonardo es de los que muestran dificultad en algunas situaciones, además es un niño con rezago escolar.

Es importante aclarar que en este momento de la sesión, los alumnos no contaban con el material de los pequeños, ya que el objetivo de la profesora era que los estudiantes llegaran a la generalización.

Tabla 8. Ejercicios que trabajaron los estudiantes de manera individual, comparando cada uno de los pequeños.

No.	Ejercicio
1	$\boxed{3}$ vs $\boxed{2}$
2	$\boxed{4}$ vs $\boxed{8}$
3	$\boxed{6}$ vs $\boxed{5}$
4	$\boxed{7}$ vs $\boxed{3}$
5	$\boxed{2}$ vs $\boxed{8}$
6	$\boxed{6}$ vs $\boxed{7}$
7	$\boxed{5}$ vs $\boxed{2}$
8	$\boxed{8}$ vs $\boxed{4}$
9	$\boxed{2}$ vs $\boxed{7}$
10	$\boxed{7}$ vs $\boxed{6}$

Después de un tiempo, aproximadamente de cinco minutos la maestra solicitó a un niño de cada pareja que expresara su respuesta del ejercicio. Por ejemplo la maestra se dirigió a Adriana para decirle lo siguiente: *"Adriana, en el primer ejercicio qué es el pequeño de a tres con respecto al pequeño de a dos".* Adriana después de analizarlo de manera individual y comentarlo con su compañero de equipo, que este caso fue Rafael, con toda seguridad dijo que el pequeño de a tres era más pequeño que el pequeño de a dos. La maestra continúo preguntando:

“¿Por qué llegaron a esa conclusión?” Inmediatamente Rafael levantó la mano para decir lo siguiente: “Me puede prestar mis pequeños y la vara”.

La maestra entregó el material a Rafael, él tomó los dos pequeños y demostró que el pequeño de a tres era más pequeño que el pequeño de a dos. Además Rafael dijo lo siguiente: *“El pequeño de a tres es más pequeño que el pequeño de a dos, porque se repite tres veces, y por eso tiene que ser más chico que el de dos”.* Al momento que Rafael iba diciendo lo anterior lo comprobaba en la vara. Después de que Rafael dio su respuesta, la maestra dijo que lo que habían hecho Adriana y Rafael fue excelente y los felicitó por su trabajo.

La maestra continuó con la sesión solicitando a algunos alumnos que dieran su respuesta y su argumento. Cuando solicitó a Leonardo que diera su respuesta a la que habían llegado junto con su compañero Bryan, la maestra consideró necesario entregar el material de los pequeños a Leonardo para darle más seguridad, y solicitó el apoyo de Bryan para que su compañero argumentara su respuesta.

Estas intervenciones fueron esenciales para la maestra, ya que los alumnos argumentaban sus respuestas y así ella podía darse cuenta de si los niños estaban entendiendo para llegar al objetivo de aprendizaje.

Todas las respuestas que comentaron cada uno de los alumnos fueron correctas. La maestra consideró que fue por el trabajo que llevaron a cabo de manera individual y luego en parejas. Pero sobre todo, por el trabajo que los estudiantes llevaron a cabo cuando construyeron los pequeños.

Como el objetivo de la profesora era llegar a la generalización, planteó el siguiente problema al grupo:

> *La maestra Carmen y la maestra Mónica tienen cada una un pequeño. La maestra Carmen tiene un pequeño de a dos y la maestra Mónica un pequeño de a treinta. Ellas quieren saber quién tiene el pequeño más grande.*

Después que la maestra terminó de exponer el problema escribió en el pizarrón los dos pequeños en código teotihuacano ($\boxed{2}$ y $\boxed{30}$). Se dirigió al grupo y dijo lo siguiente: *“Quiero que piensen su respuesta y en un momento preguntaré a alguno de ustedes”.*

Se dirigió a Sindy y le preguntó:

> *¿Tú qué piensas Sindy? ¿Qué maestra tiene el pequeño más grande, la maestra que tiene el pequeño de a dos o la maestra que tiene el pequeño de a treinta?*

Sindy solo miraba a la maestra y no respondía. Así que la maestra se dirigió a ella para decirle lo siguiente:

> *Sindy, recuerda que si te equivocas no hay ningún problema. Pero para mí es muy importante escucharte. Vamos Sindy, dime quién de las dos maestras tiene el pequeño más grande.*

Después del comentario de la maestra Sindy dijo lo siguiente: "*Yo pienso que la maestra que tiene el pequeño de a dos." "Muy bien Sindy"*, dijo la maestra.

A continuación la maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Quien está de acuerdo con Sindy?"* El grupo ansioso de contestar inmediatamente levantaron la mano para indicar que Sindy había dicho lo correcto. La maestra se dirigió a Sindy y le preguntó: *"¿Quieres comentarnos por qué piensas que la maestra que tiene el pequeño de a dos, es la maestra que tiene el pequeño más grande?"* Sindy solo se mantuvo en silencio.

La maestra comentó al grupo que Sindy estaba pensando su respuesta y preguntó al grupo: *"¿Quién quiere comentar porqué la maestra que tiene el pequeño de a dos tiene el pequeño más grande?"* La mayoría del grupo levantó la mano, pero la maestra cedió la palabra a Fernando, quien dijo lo siguiente:

> *La maestra que tiene el pequeño de a dos tiene el pequeño más grande porque se repite solo dos veces en la vara y el pequeño de a treinta se va a repetir treinta veces y si el pequeño de a ocho es pequeño el pequeño de treinta es más pequeño.*

Cuando Fernando terminó de dar su respuesta, la maestra sacó el pequeño de a ocho y dijo: *"Tienes razón Fernando. Si el pequeño de a ocho es más pequeño que el de a dos, me puedo imaginar el pequeño de a treinta, que es más pequeñito".*

La maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Se pueden imaginar el pequeño de a cincuenta?"* Bryan levantó la mano y dijo: *"Maestra sería muy pequeño".*

Luego que Bryan terminó de dar su respuesta. La maestra dijo lo siguiente:

> *Quién será más pequeño, un pequeño de a cien o un pequeño de a tres. Esto quiero que lo conteste Axel. A ver Axel, ¿Quién será más pequeño un pequeño de a cien o un pequeño de a tres?*

Axel miró a la maestra y dijo: *"El pequeño de a tres".* Inmediatamente el grupo dijo: *"No Axel estás mal".* Axel quedó confundido y la maestra solicitó a Rafael que explicará por qué Axel estaba equivocado. Rafael dijo:

> *Lo que pasa es que el pequeño de a cien se tendría que repetir cien veces en la vara. Entonces tendría que ser muy pequeño y el pequeño de a tres solo se repite tres veces en la vara y por eso es más grande.*

La maestra se dirigió a Axel y le preguntó si estaba de acuerdo con Rafael, Axel movió la cabeza y dijo que sí, solo que lo había agarrado distraído.

Después del comentario de Axel, la profesora dio por terminada la sesión concluyendo lo siguiente: la mayoría del grupo fue capaz de generalizar que entre más veces se repita el pequeño más pequeño va a ser y entre menos veces se repita el pequeño más grande va a ser. Consideró que en las próximas sesiones tendría que seguir trabajando con situaciones similares hasta que la totalidad del grupo pudiera llegar a la generalización y pudiera argumentar por qué, por ejemplo, un pequeño de a seis sería más grande que un pequeño de a sesenta.

5.11. Las subunidades como recursos para medir

Para esta sesión la profesora tuvo dos objetivos: El primero fue continuar trabajando con los estudiantes hasta que la totalidad de ellos llegaran a generalizar la relación entre el tamaño de una parte y el número de veces que se repite en el todo de orden inverso. El segundo fue que los alumnos comprendieran que los pequeños pueden servir para medir, ya que hasta este momento solo los habían considerado como partes de una longitud.

La maestra inició la décima primera sesión solicitando a los alumnos que permanecieran en su lugar y en filas. Posteriormente se dirigió al pizarrón para escribir pequeño de a siete en código teotihuacano ($\boxed{7}$).

En seguida se dirigió a Melanie para hacerle la siguiente pregunta: *"Melanie ¿Sabes cómo se lee esté código teotihuacano?"* Cuando la maestra terminó de hacer la pregunta, se escuchó en voz baja la respuesta. La maestra supo quién lo había hecho, pero se dirigió al grupo diciendo lo siguiente:

> *Es muy importante que permitan que su compañera diga la respuesta que se le solicita, ya que de esta manera yo me puedo percatar si ella está entendiendo lo que se ve en clase y si ustedes intervienen no me es posible.*

La maestra también preguntó dirigiéndose al grupo *"¿Estamos de acuerdo?"*. Los alumnos al ver molesta a la profesora, con cara de serios contestaron que estaban de acuerdo.

Después de esta aclaración, la maestra continuó con Melanie y nuevamente le preguntó, señalando la cajita con el número siete adentro: *"Melanie. ¿Sabes cómo se lee este código teotihuacano?"* Inmediatamente Melanie contestó: *"Pequeño de a siete".* La maestra agradeció la participación de Melanie.

Posteriormente la profesora escribió lo siguiente en el pizarrón, $\boxed{2}$. Solicitó a Kevin que le comentara qué significaba el número dentro de la cajita en código teotihuacano. Él respondió inmediatamente *"Pequeño de a dos".* "Muy bien Kevin", dijo la maestra.

La escritura del pizarrón quedó de la siguiente manera:

$\boxed{7}$ $\boxed{2}$

La maestra se dirigió a Leonardo y le preguntó: *"¿Cuál de los dos pequeños crees que sea más grande?"*. La profesora le indicó que pasara a encerrar el que él consideraba que era el más grande. Leonardo se paró de su asiento y se dirigió al pizarrón, estuvo un momento frente a él, sin contestar. La maestra, al observar que Leonardo no señalaba la respuesta y tomando en cuenta sus áreas de oportunidad, tomó una bolsa con los pequeños que el estudiante había construido en sesiones anteriores. La bolsa de plástico contenía desde el pequeño de a dos hasta el pequeño de a ocho.

Leonardo se tomó un momento para observar y manipular dentro de la bolsa a cada uno de los pequeños. Posteriormente los fue sacando uno por uno de la bolsa y colocándolos en el escritorio. El orden fue el siguiente: Primero tomó el pequeño de a dos, luego el pequeño de a tres, posteriormente el pequeño de a cuatro, enseguida el pequeño de a cinco, luego el pequeño de a seis y por último el pequeño de a siete. El pequeño de a ocho lo dejó en la bolsa, ya que los pequeños que necesitaba eran el pequeño de a siete y el pequeño de a dos.

Cuando Leonardo sacaba cada uno de los pequeños de la bolsa, algunos de sus compañeros en coro mencionaban su nombre, esto ayudó a Leonardo a seleccionar los dos pequeños que le solicitaba el ejercicio escrito en el pizarrón por la maestra. El alumno solo detuvo en sus manos los dos pequeños que necesitaba el resto de los pequeños los regresó a la bolsa. Para estar seguro de su correcta selección de los pequeños, Leonardo observaba a sus compañeros para que ellos le confirmaran que había hecho lo correcto.

Después el estudiante tomó el pequeño de a siete y el pequeño de a dos y los colocó uno junto al otro e inmediatamente se dio cuenta de que el pequeño de a dos era el más grande, así que rápidamente lo señaló en el pizarrón. La profesora felicitó a Leonardo por su respuesta.

La actitud de Leonardo fue muy significativa para la docente, ya que se detuvo a pensar en su respuesta. No fue y señaló nada más porque sí, sino que estuvo pensando la respuesta. Además, seleccionó el material en el mismo orden que los fue construyendo, aunque no decía el nombre del pequeño que sacaba de la bolsa, tal vez sí lo sabía por la manera de actuar con los pequeños.

La maestra pudo suponer que tal vez sabía cuál era la respuesta pero le faltaba tener la seguridad. Leonardo era un niño con una autoestima baja, así que la profesora tenía que apoyarlo para que sus respuestas fueran exitosas, para que poco a poco superara su problema y logrará avanzar en lo académico.

La maestra solicitó a Leonardo que se quedara al frente de sus compañeros, para que escuchara el argumento de por qué el pequeño de a dos era más grande que el pequeño de a siete. También la maestra le dijo que escuchara con mucha atención la respuesta de su compañero para que después la repitiera.

La profesora pidió a Bryan que explicará por qué el pequeño de a dos era más grande que el pequeño de a siete. Él dijo lo siguiente:

> *El pequeño de a dos es más grande que el pequeño de a siete, porque se repite solamente dos veces en la vara y el pequeño de a siete se repite siete veces en la vara y tiene que ser más pequeño, si no cabe.*

La maestra agradeció la participación de Bryan y solicitó a Leonardo que repitiera lo que había dicho Bryan. Leonardo trató de decirlo tal y como lo había dicho Bryan, pero lo hizo ejemplificándolo con la vara y los pequeños. En un segundo momento, la maestra lo invitó a que lo comentara sin utilizar el material, situación que se le complicó, pero Bryan lo apoyó para que tuviera éxito en su explicación.

La docente borró el ejercicio que se encontraba en el pizarrón para escribir el siguiente: $\boxed{6}$ $\boxed{4}$. Motivó a los alumnos para que observaran el ejercicio y pensaran: ¿Cuál de los dos pequeños sería el más pequeño? Si el pequeño de a seis o el pequeño de a cuatro. La mayoría de los alumnos quería dar la respuesta, pero la profesora alentó a Axel para que conteste la pregunta. Él contestó que el pequeño de a seis era el más pequeño. Axel agregó lo siguiente:

> *Es algo parecido que el ejercicio anterior. El pequeño de a seis se repite seis veces en la vara y el pequeño de a cuatro se repite solo cuatro, entonces el pequeño de a seis tiene que ser más pequeño para que quepa en la vara.*

"Muy bien Axel", dijo la maestra.

La maestra se dirigió al grupo y dijo:

> *Con los comentarios que hicieron Leonardo, Bryan y Axel están reafirmando lo que habían dicho anteriormente, en sesiones pasadas: "que entre más veces se repita el pequeño más pequeño va a ser y entre menos veces se repita más grande va a ser".*

La docente continuó diciendo:

> *Yo estoy totalmente de acuerdo con ustedes, ya que lo puedo verificar tomando los pequeños y la vara. Me puedo dar cuenta que entre más veces se repite el pequeño en la vara más pequeño es y entre menos veces se repita más grande va a ser.*

La maestra fue tomando cada uno de los pequeños en el orden en que los fueron construyendo, para mostrarlos a los estudiantes y ellos comprendieran lo que la profesora indicaba.

En seguida la maestra escribió el siguiente ejercicio en el pizarrón: $\boxed{5}$ $\boxed{20}$. La profesora preguntó, "*¿Quién es más grande, el pequeño de a cinco o el pequeño de a 20?".* La mayoría levantó la mano para contestar, pero la maestra solicitó a Estefanía que diera su respuesta. Estefanía inmediatamente dijo lo siguiente:

> *El pequeño de a cinco es el más grande, porque el de a veinte tenía que repetirse veinte veces en la vara y el pequeño de a cinco solamente cinco veces, entonces el pequeño de a cinco era el más grande.*

El último ejercicio que escribió la docente fue el siguiente: $\boxed{6}$ $\boxed{30}$. La profesora se dirigió al grupo para preguntar, *"¿Quién es más pequeño, el pequeño de* *a seis o el pequeño de a treinta?*" Posteriormente la docente solicitó a Ángel y a Sindy que pasaran al frente y discutieran la respuesta. Después la maestra preguntó a Sindy cuál había sido su respuesta, ella respondió lo siguiente:

> *Que el pequeño de a treinta era el más pequeño, porque se tenía que repetir treinta veces y el pequeño de a seis solo se repetía seis veces, entonces el pequeño de a treinta era el más pequeño.*

"Muy bien Sindy agradezco a ti y a Ángel por esta respuesta, pasen a su asiento", dijo la maestra.

La profesora concluyó que algunos niños solo necesitaban un pequeño apoyo para poder argumentar su respuesta, tal fue el caso de Sindy, que con la ayuda de Ángel pudo argumentar su respuesta. También, con los comentarios de los estudiantes infirió que habían comprendido el primer objetivo, pero para asegurarse se dirigió al grupo y dijo lo siguiente:

> *Me acaba de surgir una duda. ¿Cómo sería un pequeño de uno, más grande o más pequeño que la vara?*

Los niños hicieron cara de asombro, Bryan preguntó: *"¿Cómo un pequeño de a uno?* No se puede maestra o ¿Sí?". La profesora continúa diciendo *"No sé, por eso les pregunto".* La maestra solicitó que pensaran su respuesta. Inmediatamente dividió el pizarrón en dos columnas, en una escribió el signo de más (+) y en la otra escribió un signo de menos (-).

La docente solicitó que levantaran la mano quienes pensaban que el pequeño de a uno sería más grande que la vara. Solamente ocho alumnos levantaron la mano. La maestra escribió un número ocho abajo del signo de más, dando a entender que ocho niños pensaban que el pequeño de a uno era más grande que la vara.

Enseguida invitó a que levantaran la mano quien pensaba que el pequeño de a uno iba a ser más pequeño que la vara. Once niños pensaron que el pequeño de a uno iba a ser más pequeño que la vara, así que la maestra anotó el número once abajo del signo de menos.

Bryan no votó en ninguna de las opciones, argumentando que no estaba seguro de su respuesta, así que la maestra solo anotó su nombre en un espacio del pizarrón.

La maestra sacó de una bolsa la vara y un popote más largo que la vara y dijo: *"Voy a construir mi pequeño de a uno"* Se dirigió al grupo para preguntar "*¿Cuántas veces se tiene que repetir mi pequeño de a uno?"* Todo el grupo respondió en una sola voz, *"Una vez".* La maestra continuó diciendo: *"Tengo que cuidar que mi pequeño solamente se repita una vez"*. La profesora tomó la vara y el popote y los colocó juntos. Sólo cortó un pedazo del popote y quedó del tamaño de la vara.

La docente se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *¿Entonces qué pasó? ¿Quién tiene la razón, los que votaron que el pequeño de a uno iba a ser más grande que la vara o los que pensaban que iba a ser más pequeño que la vara?*

Ángel respondió: *"Todos nos equivocamos, menos Bryan porque él no votó".*

La profesora preguntó al grupo: *"¿El pequeño de a uno qué es con respecto a la vara?"*. Todos los alumnos contestaron en coro: *"Es igual a la vara". "Muy bien",* dijo la maestra.

Fernando levantó la mano para hacer la siguiente pregunta: *"Maestra, ¿Podemos hacer nuestro pequeño de a uno, para completar nuestra colección?".* La maestra contestó afirmativamente y también entregó a cada niño un popote para que hicieran su pequeño de a uno.

Cuando los estudiantes construían el pequeño de a uno, la profesora fue pasando con cada uno de los alumnos y les entregó sus pequeños. Después de lo anterior, la docente pidió a los alumnos que se formaran en equipos de cuatro niños, como las sesiones anteriores. Ellos atendieron la indicación de la maestra e inmediatamente se integraron en pequeños grupos.

En el momento que la docente observó que los alumnos se integraron en equipos, se dirigió al grupo y preguntó lo siguiente: *"Si ustedes fueran parte del grupo de los teotihuacanos ¿para qué utilizarían sus pequeños?"* Las respuestas que comentaron los niños fueron las siguientes: "*Yo los utilizaría para medir mi celular". "Yo los utilizaría para medir cuánto mido de alto". "Yo los utilizaría para medir el ancho de la mesa",* etc. La maestra comentó que estaba asombrada de la utilidad que le darían a sus pequeños, *"Me parecen fabulosas sus ideas"*, dijo la docente.

Posteriormente, la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *En una conversación que tuve con la arqueóloga el día de mi visita a la zona arqueológica de Teotihuacán, me comentó que los teotihuacanos adornaron las pirámides con unas tiras de un papel especial, que extraían de una planta similar al maguey, pero que desafortunadamente con el cambio de clima y otros problemas, esa planta había desaparecido y desafortunadamente no podía darme una de ellas para que ustedes las conocieran. Algo muy interesante que me comentó la arqueóloga es que los teotihuacanos utilizaban sus pequeños para medir exactamente las tiras y que las pirámides u objetos que ellos estaban adornando quedaran perfectamente. Así que ya saben para qué utilizaron los teotihuacanos sus pequeños.*

La profesora continuó diciendo:

> *A cada equipo voy a entregar tres tiras de papel, van a hacer lo que hacían los teotihuacanos, medir las tiras de ese papel especial utilizando sus pequeños, cuando obtengan la medida la escriben en la tira de papel.*

Posteriormente la maestra preguntó: *"¿Entendieron lo que van a hacer?"* La mayoría del grupo contestó que sí, Ángel dijo: *"Sí maestra vamos a medir con nuestros pequeños las tiras de papel".* Es importante mencionar que a cada equipo se le entregó una tira de 24 cm, otra de 16 cm y otra de 36 cm. Así como también que los estudiantes no tenían conocimiento de cuánto medían las tiras.

La maestra no especificó a los alumnos con qué pequeño tenían que medir, así que los estudiantes utilizaron diferentes pequeños para medir la longitud de la tira de papel. La maestra se percató de esta situación, pero dejó que los alumnos continuaran su trabajo.

Cuando los alumnos terminaron de medir las tiras, la profesora solicitó que las guardaran con mucho cuidado en unas bolsas para utilizarlas la próxima sesión, ya que el tiempo se había terminado.

Con esta actividad la maestra dio por terminada la sesión. Ella concluyó lo siguiente: Con las actividades que se llevaron a cabo al inicio de la sesión la totalidad de los alumnos llegaron a la generalización de la relación de orden inverso de las fracciones unitarias. Observó que solo algunos niños, como Leonardo, necesitan el material concreto o el apoyo de un compañero o de la misma maestra, para argumentar sus razonamientos.

La profesora también concluyó que el segundo objetivo no se logró del todo, debido a que se agotó el tiempo programado para la sesión, así que lo continuará en la próxima sesión.

En temas generales la docente observó que el trabajo individual fue difícil para algunos alumnos, pero piensa que es importante seguir trabajando con esta forma de organización del grupo, ya que cada uno de los alumnos tiene la posibilidad de hacer sus propias reflexiones.

5.12. Cuantificando la iteración de una subunidad

Uno de los objetivos de esta sesión fue que los alumnos comprendieran que los pequeños sirven para medir, ya que hasta este momento del trabajo de la propuesta solo habían considerado a los pequeños o subunidades como tamaños de longitud. En la sesión anterior, la docente inició el trabajo en ese objetivo pero no se concluyó por falta de tiempo. Un segundo objetivo fue iniciar el uso de una nueva notación, que posteriormente, ayudará a la comprensión significativa de la representación convencional de las fracciones propias e impropias.

Para iniciar la sesión, la profesora indicó a los estudiantes que se organizaran en equipos. En seguida se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: “¿Recuerdan qué se vio en la clase pasada?” Inmediatamente una de las manos de los niños estaba levantada, solicitando la palabra para contestar.

La maestra se dirigió al grupo y dijo lo siguiente:

> *Me da gusto ver sus manos levantadas, ya que con eso me dan a entender que cada uno de ustedes entendió lo que vimos la sesión anterior. Pero recuerden que sólo algunos de ustedes podrán expresar su comentario y el resto del grupo es necesario que respeten y escuchen con atención la observación del compañero que esté hablando.*

Después de decir lo anterior, la docente, se dirigió a Cristofer para darle la palabra, y él dijo lo siguiente: *“En la clase pasada medimos tiras de papel con los pequeños”. “Muy bien Cristofer”,* dijo la maestra.

Posteriormente la docente se dirigió a Danna para preguntarle lo siguiente: *“¿Estás de acuerdo Danna con lo que dijo Cristofer?”*. Danna respondió afirmativamente. La maestra continuó preguntando a la alumna lo siguiente: *“¿Recuerdas algo más de la clase anterior?”.* Danna respondió: *“Escribimos números en código teotihuacano”*. La profesora le sugirió a Danna pasar al pizarrón a escribir los números en código teotihuacano. La alumna se levantó de su asiento y se dirigió al pizarrón para escribir lo siguiente:

4	6

Cuando Danna terminó de escribir lo anterior en el pizarrón, continuó diciendo: *"Este número se lee, en código teotihuacano, como pequeño de a cuatro"*. La alumna señaló el cuatro dentro de la cajita. Posteriormente señaló el seis y la cajita, y dijo: *"Este número se lee como pequeño de a seis"*. La maestra agradeció y felicitó la participación de Danna.

Luego de esta intervención y apoyándose en lo que escribió la estudiante en el pizarrón, la docente se dirigió a Braulio para preguntarle: *"Braulio, ¿recuerdas qué más hicimos tomando en cuenta lo que escribió y explicó Danna?".* Cuando la maestra terminó de hablar, Bryan levantó la mano para hacer la siguiente aclaración: *"Maestra, yo recuerdo que el seis va primero y luego el cuatro*". La maestra confirmó la observación de Bryan diciendo: *"Tienes razón Bryan, Danna invirtió los números, pero no hay problema, en este momento se corrigen".* Danna solicitó a la maestra pasar al pizarrón para corregir el trabajo y la maestra autorizó que lo hiciera. El ejercicio quedó escrito en el pizarrón de la siguiente manera:

6	4

A continuación de estas intervenciones, la maestra se dirigió nuevamente a Braulio para preguntarle: *"¿Recuerdas algo más que se trabajó, tomando en cuenta lo que escribió Danna en el pizarrón?"* Braulio respondió lo siguiente: *"Sí maestra, estuvimos viendo qué pequeño era más grande"*. La maestra preguntó a Braulio lo siguiente: *"¿Cuál de los dos pequeños es más grande, el pequeño de a seis o el pequeño de a cuatro?"* Braulio inmediatamente respondió *"El pequeño de a cuatro".*

Después de la respuesta de Braulio, la maestra se dirigió a Ana Karen para preguntar: *"Ana Karen. ¿Por qué el pequeño de a cuatro es más grande qué el pequeño de a seis?"* La alumna respondió: *"Es porque el pequeño de a cuatro solo se repite cuatro veces en la vara y el pequeño de a seis se repite seis veces y tiene que ser más pequeño que el de a cuatro". "Muy bien Ana Karen, agradezco tu valioso cometario",* dijo la maestra.

Para seguir reafirmando lo comprendido en sesiones anteriores, la profesora se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Tomando en cuenta lo que comentó Ana Karen, entiendo que el nombre de los pequeños tiene que ver con las veces que se repiten en la vara. Es decir,*

el pequeño de a seis se llama así porque se repite seis veces en la vara y el pequeño de a cuatro también se llama así porque se repite cuatro veces en la vara. ¿Están de acuerdo conmigo?

Los alumnos respondieron en coro que sí. La maestra continuó diciendo:

También entendí que entre más veces se repite un pequeño, más pequeño tiene que ser y entre menos veces se repita un pequeño más grande va a ser, ¿Están de a cuerdo conmigo?

Los alumnos también respondieron en coro que sí.

Después de este repaso, la maestra se dirigió a los alumnos para felicitarlos por sus comentarios y también por su buen comportamiento cuando alguno de sus compañeros expresaba una observación.

Asimismo dijo la profesora lo siguiente:

Cristofer comentó al inició de esta sesión que una de las actividades que hicieron en la clase anterior fue medir tiras de papel con sus pequeños. Yo estoy de acuerdo con él, ya que fue la última actividad que llevaron a cabo. ¿Sí lo recuerdan?

El grupo contestó afirmativamente.

La maestra continuó diciendo:

En este momento voy a entregar sus tres tiras de papel a cada equipo, así como sus pequeños que construyeron y tendrán unos minutos para dialogar sobre su trabajo que hicieron y posteriormente uno de ustedes comentará qué pequeños utilizaron y cuál fue la medida que obtuvieron.

Los pequeños que entrega la docente a cada alumno son: el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro, el pequeños de a cinco, el pequeño de a seis, el pequeño de a siete, el pequeño de a ocho, el pequeño de a uno y la vara.

La maestra dio un tiempo de cinco minutos para que los niños conversaran en el interior del equipo y también se pusieran de acuerdo quién de ellos comentaría al resto de la clase el trabajo.

Después de dar tiempo a cada equipo para organizarse, la docente solicitó que los alumnos designados de cada uno de los pequeños grupos, para comentar el trabajo, pasaran al frente para que expusieran al resto del grupo lo que habían hecho en la clase anterior con las tiras de papel. Los alumnos que pasaron al frente fueron: Rafael, Paulina, Fernando, Estefanía y Ángel.

Para dar a conocer los trabajos, la maestra solicitó que fuera en el siguiente orden: primero, que mencionaran la medida de la tira más pequeña; en segundo lugar, la longitud de la tira mediana; y, por último, la medida de la tira más grande. Así mismo, reiteró la importancia de mantener el orden y el respeto en el momento de que sus compañeros expusieran el trabajo.

Como recordará el lector, las medidas de las tres tiras eran las siguientes: La tira más pequeña midió 16 cm (o 2/3 de la vara), la tira mediana tenía de longitud 24 cm (o una vara) y la tira más grande medía 36 cm (o una vara y media). También es importante mencionar que los estudiantes desconocían la longitud en centímetros de las tiras.

Cuando la maestra observó que el grupo se encontraba en silencio y atentos para escuchar a sus compañeros que se encontraban al frente del salón, le dio la palabra a Rafael para que iniciara la exposición. Él comentó lo siguiente:

> *La tira pequeña midió un pequeño de a dos y un pequeño de a seis. La tira mediana midió dos pequeños de a cuatro y un pequeño de a dos. La tira más grande midió tres pequeños de a dos.*

La siguiente en participar fue Paulina. Ella dijo lo siguiente:

> *La tira pequeña tuvo como medida dos pequeños de a cuatro y un pequeño de a seis. La tira que sigue midió dos pequeños de a dos y la ultima tira midió cuatro pequeños de a cuatro, un pequeño de a tres y un pequeño de a cinco.*

En tercer lugar participo Fernando. Él comentó lo siguiente:

> *Nuestra tira pequeña midió dos pequeños de a tres, la tira que sigue midió ocho pequeños de a ocho y la tira más grande midió un pequeño de a dos y tres pequeños de a tres.*

Estefanía fue la cuarta alumna en comentar el trabajo. Ella dijo lo siguiente:

> *La tira pequeña tiene como medida un pequeño de a dos y un pequeño de a siete. La tira mediana tiene dos pequeños de a dos y la tira más grande midió un pequeño de a cuatro, un pequeño de a tres, un pequeño de a dos, un pequeño de a cuatro y otro pequeño de a cuatro.*

El último alumno en participar fue Ángel. Él comentó que su tira más pequeña midió un pequeño de a seis y un pequeño de a dos. También dijo que la tira mediana tuvo una longitud de dos pequeños de a dos y la tira más grande midió tres pequeños de a dos.

En el momento de que los alumnos exponían el trabajo, la maestra solo escuchaba con atención y tomaba nota, esto lo hacía con la finalidad de verificar la longitud de cada una de las tiras. Ella se percató que el equipo de Paulina y Estefanía había tenido errores, así que al final de la exposición, la profesora solicitó que rectificaran sus medidas en cada una de las tiras. En el equipo de Paulina, el error lo tuvieron en la tira más grande y en el equipo de Estefanía fue el de la tira más pequeña. Paulina dijo que su tira grande medía cuatro pequeños de a cuatro, un pequeño de a tres y un pequeño de a cinco. Después de que el equipo rectificó la medida, quedó de la siguiente manera: cuatro pequeños de a cuatro, un pequeño de a tres y un pequeño de a seis.

Estefanía dijo que su tira más pequeña medía un pequeño de a dos y un pequeño de a siete. Después de verificar la medida quedó de la siguiente manera: un pequeño de a dos y un pequeño de a seis.

En el momento que los dos equipos comprobaban si la medida de cada tira era la correcta, se dieron cuenta que habían colocado mal a sus pequeños y también que había pequeños errores en el tamaño de los pequeños. En el caso del equipo de Paulina fue en el pequeño de a cinco y en el equipo de Estefanía fue el pequeño de a siete. Por tal motivo, la medida de la longitud de la tira fue diferente.

La maestra aclaró que eso también pasaba con los teotihuacanos y que no se preocuparan tanto. También dijo que lo más importante de su trabajo es que todos lo hicieron con mucho cuidado y se aproximaron a la longitud real de la tira, pero más importante fue que utilizaron a sus pequeños para saber la medida de las tiras, como lo habían hecho los teotihuacanos.

Después de corregir las medidas de las tiras, la docente invitó a Rafael a que escribiera en el pizarrón las medidas que habían obtenido en cada una de las tiras. El alumno escribió lo siguiente:

Tira pequeña: $\boxed{2}\ \boxed{6}$

Tira mediana: $\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$

Tira grande $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$

La docente solicitó a Rafael que escribiera sus medidas con el propósito de explicar a los estudiantes lo siguiente:

Los teotihuacanos hacían lo mismo para registrar sus medidas, pero tuvieron un gran problema cuando alguna tira media diez o veinte veces un pequeño, ya que tenían que repetir el número con la cajita diez o veinte veces. Y si la medida era cincuenta veces el pequeño de a dos tenían que repetir el pequeño de a dos cincuenta veces.

La profesora también comentó:

Para los teotihuacanos esto era un gran problema, ya que no sólo medían una o dos tiras con esta longitud, sino que en ocasiones median hasta cien tiras por día.

La maestra continuó diciendo:

La gran problemática que tenía el grupo de los teotihuacanos hizo que se reunieran para dar solución. ¿Ustedes cómo creen que solucionaron este problema los teotihuacanos?

Bryan contestó lo siguiente: *"Yo creo que hicieron algún otro código, pero no sé cual"*. Cuando el alumno terminó de dar su comentario, la maestra se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Alguien tiene otra idea?"* Nadie contestó.

Así que la maestra continuó diciendo: *"¿Recuerdan a la arqueóloga que me atendió cuando visité la zona arqueológica de Teotihuacán?"* Los alumnos contestaron que sí, en coro.

Pues bien, ella me dijo que los teotihuacanos crearon un código, como lo comentó Bryan, para no escribir tantas veces un pequeño e indicar la medida de las tiras u otro objeto de una manera práctica y que todos entendieran el significado.

La maestra se dirigió al pizarrón para escribir este nuevo código teotihuacano tomando como referencia las medidas que escribió Rafael. El trabajo quedó de la siguiente manera:

Tira pequeña: $\boxed{2}\ \boxed{6}$	$\boxed{2}\ \boxed{6}$
Tira mediana: $\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{2}$	$2\,\boxed{4}\ \boxed{2}$
Tira grande $\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}$	$3\,\boxed{2}$

Apoyándose del trabajo escrito en el pizarrón, la profesora comentó al grupo que las medidas de la tira pequeña no tenía ningún cambio, ya que solo era un pequeño de a dos y un pequeño de a seis. En la tira mediana, según el nuevo código teotihuacano, sí se tenía que modificar. La docente comentó al grupo de estudiantes que el dos indicaba las dos veces que se repetía el pequeño y se leía de la siguiente manera: Dos veces el pequeño de a cuatro y un pequeño de a dos.

En la tira grande, según también el nuevo código teotihuacano, la medida sería tres veces el pequeño de a dos.

Cuando la maestra terminó de explicar el nuevo código, Paulina levantó la mano y solicitó a la profesora pasar a escribir sus medidas en este nuevo código al pizarrón. La docente dio la apertura para que Paulina pasara a escribir sus medidas. Las medidas de las tiras del equipo de Paulina quedaron de la siguiente manera:

Tira pequeña: 2 $\boxed{4}$ $\boxed{6}$

Tira mediana: 2 $\boxed{2}$

Tira grande 4 $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$

Cuando Paulina había terminado de escribir las medidas de las tiras con este nuevo código, la docente le solicitó que diera lectura a su trabajo. Paulina dijo lo siguiente, señalando lo que había escrito en el pizarrón:

> *La tira pequeña midió dos veces el pequeño de a cuatro y un pequeño de a seis. La tira mediana midió dos pequeños de a dos y la tira grande midió cuatro veces el pequeño de a cuatro, una vez el pequeño de a tres y una vez el pequeños de a seis.*

Para que quedara claro este nuevo lenguaje la profesora propuso que el resto de los equipos escribieran sus medidas en este nuevo código, de la misma manera que lo había realizado Paulina. El resto de los equipos accedieron sin ningún problema.

A continuación se escribe el trabajo escrito en el pizarrón por los tres equipos que solicitó la docente, así como la lectura que llevaron a cabo cada uno de los estudiantes que representaba al equipo de trabajo.

Tira pequeña: 2 $\boxed{3}$

Tira mediana: 8 $\boxed{8}$

Tira grande $\boxed{2}$ 3 $\boxed{3}$

Medidas del equipo de Fernando:

Tira pequeña: 2 $\boxed{3}$

Tira mediana: 8 $\boxed{8}$

Tira grande $\boxed{2}$ 3 $\boxed{3}$

Teniendo los datos escritos, Fernando hizo la siguiente lectura:

> *La tira pequeña midió dos veces el pequeño de a tres. La tira mediana tuvo la longitud de ocho veces el pequeño de a ocho y la tira grande midió un pequeño de a dos y tres pequeños de a tres.*

Medidas del equipo de Estefanía:

Tira pequeña: $\boxed{2}\,\boxed{4}$

Tira mediana: 2 $\boxed{2}$

Tira grande 4$\boxed{4}\,\boxed{2}$

Estefanía solicitó ayuda de su compañero de equipo para que él llevara a cabo la lectura. En este caso fue Bryan y dijo lo siguiente:

> *Nuestra tira pequeña midió un pequeño de a dos y un pequeños de a cuatro. Nuestra tira mediana midió dos pequeños de a dos. Y nuestra tira grande midió cuatro veces el pequeño de a cuatro y un pequeños de a dos.*

Medidas del equipo de Ángel

Tira pequeña: $\boxed{6}\,\boxed{2}$

Tira mediana: 2 $\boxed{2}$

Tira grande 3 $\boxed{2}$

Ángel con toda la confianza hizo la lectura del trabajo escrito en el pizarrón, diciendo lo siguiente:

> *La tira pequeña midió un pequeño de a seis y un pequeño de a dos. La tira mediana tuvo como medida dos veces el pequeño de a dos y la tira grande midió tres veces el pequeño de a dos.*

Con la intervención de Ángel, la maestra dio por terminada la sesión. Ella concluyó con lo siguiente: Los alumnos comprendieron que los pequeños que construyeron sirven para medir las tiras de papel. También se inició con una nueva notación, que supone la docente, ayudará a que los alumnos comprendan fácilmente la representación de fracciones propias e impropias. La profesora también concluyó que aunque los estudiantes se dieron cuenta que los pequeños sirven para medir, continuará el trabajo en la siguiente sesión, pero sugiriendo con qué pequeño medir, para seguir trabajando la nueva notación teotihuacana y que la totalidad del grupo la entienda.

5.13. El numerador como recurso para dar cuenta de la iteración de una subunidad

Como recordará el lector, en la undécima sesión, la profesora inició con el siguiente objetivo: Que los alumnos comprendieran que los pequeños sirven para medir, ya que solo los habían considerado a los pequeños o subunidades como tamaños de longitud. Es un objetivo que no se logró rápidamente, debido a que en cada una de las dos sesiones que se trabajó el propósito, se presentaban oportunidades de aprendizaje que la profesora aprovechaba para que los estudiantes lograran el objetivo. Por ejemplo, una oportunidad de aprendizaje fue cuando en el grupo había más de una respuesta o cuando los alumnos tenían dudas o contestaban erróneamente.

El uso de una nueva notación fue un segundo objetivo que la docente inició en la duodécima sesión, pero tampoco concluyó. Por tal motivo, en esta decimotercera sesión, la maestra continuó trabajando los dos propósitos antes mencionados.

Para esta sesión los niños ya no usaron los pequeños que ellos habían construido, sino que se les repartieron unos hechos de madera. Además de la vara, a los niños se les repartió un conjunto de pequeños que incluía el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el de cuatro y el de seis (ver Anexo 2), como se explica con más detalle más adelante.

Para iniciar esta sesión de trabajo, la docente reunió a los alumnos en equipos. Cada pequeño grupo se conformaba de cuatro alumnos. Es importante mencionar que esta estrategia le había sido funcional a la profesora durante el trabajo de las clases anteriores.

Cuando los alumnos se encontraban reunidos en equipos de trabajo y en silencio, la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Durante las sesiones anteriores han trabajado de manera muy bonita. Algunos de ustedes aportando sus comentarios y otros escuchando con atención y respeto al compañero que está hablando. Realmente los felicito por este gran compromiso. Sé que algunos de ustedes tienen que seguir esforzándose para poder adquirir la confianza que se necesita para perder ese miedo al momento de hablar frente a sus compañeros u otras personas. Cada uno de ustedes mejorará si siguen trabajando como hasta ahora.*

Los alumnos escuchaban con atención a la maestra. Posteriormente ella preguntó: *"¿Alguien quiere comentar cómo se ha sentido durante el trabajo de cada clase?"* Bryan levantó la mano y dijo: *"Yo me he sentido bien".* El resto del grupo respaldó el comentario de Bryan. La maestra continuó diciendo: *"Si en algo no están de a cuerdo o no les gusta, me gustaría que lo comentaran para poder dar otra alternativa y seguir trabajando como hasta ahora. ¿Estamos de a cuerdo?"* Los alumnos contestaron con un sí, en coro.

Después de esta significativa introducción, la maestra continuó diciendo:

> *Pasando a otro tema, voy a comentarles algo que me sucedió el domingo por la tarde. Estaba descansando en la casa con mi familia y de repente sonó mi celular. La persona que me llamó fue la arqueóloga. Me sorprendió mucho su llamada, pero también me dio gusto, ya que siempre yo era la que le llamaba. La arqueóloga estaba interesada por saber sobre el trabajo que realizaron en la clase anterior. Yo le comenté que ustedes midieron tiras de papel con sus pequeños, así como lo habían hecho los teotihuacanos. También le dije que habían utilizado el nuevo código de los teotihuacanos para representar la medida de las tiras. Ambas cosas que llevaron a cabo ustedes durante la sesión anterior, le agradaron mucho a la arqueóloga.*
>
> *Otra de las cosas que le expliqué a la arqueóloga, fue que algunos de ustedes habían tenido problemas en el momento de obtener la medida de la tira de papel. La arqueóloga me dijo que era normal, debido al material que utilizaron para construir sus pequeños. Ella les manda decir que no se preocuparan, que eso mismo les sucedió a los teotihuacanos. Ya que ellos, en un primer momento construyeron sus pequeños con un material que con el uso se fue haciendo frágil. Esta fragilidad dificultaba obtener una medida real de las cosas que medían. Por tal motivo los teotihuacanos iniciaron una búsqueda de un material más resistente. La arqueóloga me explicó que los teotihuacanos sí encontraron un material muy resistente y que con él elaboraron una gran cantidad de pequeños.*
>
> *Con estos nuevos pequeños ya no tuvieron problemas los teotihuacanos al momento de obtener la medida de las tiras o de algún objeto que les interesaba saber su medida. La arqueóloga me comentó que desafortunadamente no puede mandarles una muestra de los pequeños que elaboraron los teotihuacanos, debido a que el material necesita estar en un lugar especial para que no se destruyan y se siga conservando como hasta ahora. Lo que sí les envió, fue una copia de esos pequeños, elaborados por un gran carpintero que trabaja con ella.*

La maestra con cara de desánimo continuó diciendo al grupo: *"Yo sé que a ustedes no les interesa conocer a los pequeños elaborados por ese magnífico carpintero. ¿O me equivoco?"*, preguntó la maestra de manera irónica.

Después de la pregunta de la maestra, inmediatamente los niños respondieron en coro que sí, querían conocer el material. La maestra con cara de alegría se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"Me da mucho gusto que se interesen por un material tan maravilloso, elaborado por un magnífico carpintero".* Después de hacer este comentario, la docente, sacó de una bolsa unos paquetes que contenían cada uno de los siguientes pequeños, construidos en madera y del mismo color que los alumnos habían trabajado en el momento de construir sus pequeños, con la diferencia de que los alumnos habían utilizado popotes de plástico de los colores que se muestran en la tabla y además construyeron el pequeño de a cinco, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho. Estos tres últimos pequeños no venían en el paquete que entregó la profesora, debido a que se dificultaba su construcción.

En la Tabla 9 se muestran las características de cada uno de los pequeños que la maestra entregó a todos los estudiantes.

Tabla 9. Tamaño de los pequeños que la maestra entregó a todos los estudiantes.

Pequeño	Color	Longitud
Vara	Blanca	24 cm
Pequeño de a dos	Azul	12cm
Pequeño de a tres	Verde	8 cm
Pequeño de a cuatro	Amarillo	6 cm
Pequeño de a seis	Rojo	4 cm

Cuando los niños tuvieron en sus manos el material, inmediatamente lo sacaron de la bolsa de plástico para tocarlo y comprobar que realmente fueran igual a los pequeños que ellos habían construido. La mayoría de los alumnos tomaron a cada uno de los pequeños y lo repetían tantas veces en la vara para verificar si era el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro y el pequeño de a seis.

Ángel, después de haber comprobado la longitud de cada uno de los pequeños, con respecto a la vara, levantó la mano para preguntar lo siguiente: *"¿Por qué sólo nos dio la vara y cuatro pequeños?"* La maestra para hacerlos sentir unos alumnos importantes, contestó lo siguiente:

El carpintero que hizo estos pequeños es tan bueno que le gusta que las cosas queden perfectas, hasta el momento, según la arqueóloga, no ha podido construir el pequeño de a cinco, ni el pequeño de a siete, menos el pequeño de a ocho, algo que ustedes sí lograron hacer. Por eso, ante los ojos de la arqueóloga, ustedes son considerados como las personas más inteligentes y han superado al gran carpintero. Pero no se preocupen, estoy segura que si el carpintero logra construir los tres pequeños que faltan, la arqueóloga los compartirá con ustedes.

La docente continuó diciendo:

Es importante que ustedes también se enteren que estos pequeños son una copia de los pequeños que los teotihuacanos utilizaron para construir las pirámides la pirámide del sol y de la luna. También deben enterarse que ustedes son los privilegiados en usar este material. La arqueóloga me comentó que es muy difícil que alguien más lo use, debido a que no le dan el cuidado que necesita. Así que el favor que les pido es que lo utilicen de la mejor manera y el cuidado que se necesita para regresar el material en las mejores condiciones. ¿Estamos de acuerdo?

Los alumnos contestaron afirmativamente. La maestra continuó diciendo: *"Vamos a darle utilidad al material que nos prestaron".*

Para dar la utilidad al material, la maestra entregó a cada equipo tres tiras de papel con las siguientes medidas: Una tira de 24 cm (o una vara), otra de 32 cm (o una vara y un tercio) y una tercera tira de 18 cm (o ¾ de la vara). La docente indicó que midieran las tiras con los pequeños de madera que les había entregado. También la maestra dijo que podían elegir solo uno de los cuatro pequeños como unidad de medida para cada una de las tiras, es decir, cada una de las tiras se tenía que medir con un pequeño diferente. Asimismo comentó que posteriormente, un integrante de cada equipo le explicaría al grupo la medida obtenida. La docente comentó que este trabajo sería similar a lo que se trabajó la clase anterior, pero ahora utilizando el material de los pequeños de madera y sólo cuatro de ellos. La maestra, además indicó que el registro de la medida tenía que ser con el nuevo código teotihuacano y en cada una de las tiras de papel.

La maestra dio aproximadamente diez minutos para que los alumnos llevaran a cabo el trabajo. En el momento de que los niños trabajaban midiendo las tiras, la profesora observó que los alumnos medían las tiras con diferentes pequeños, hasta lograr que el pequeño cupiera exactamente tantas veces en la tira.

Cuando la profesora observó que todos los equipos habían terminado, solicitó a un integrante de cada equipo que compartiera lo que habían trabajado en equipo. La docente se dirigió a Melanie para que fuera la primera en comentar el trabajo. La maestra indicó al grupo que el orden para explicar el trabajo iba a ser el siguiente: Primero se mencionaría la longitud de la tira más grande, luego la mediana y por último la más pequeña.

Al tener la palabra, Melanie dijo lo siguiente:

> *Nuestra tira más grande midió: cuatro pequeños de a tres. La tira mediana midió dos pequeños de a dos y la tira pequeña midió tres pequeños de a cuatro.*

Después de escuchar el trabajo de Melanie, la maestra le propuso que escribiera en el pizarrón la longitud de cada una de sus tiras. La alumna escribió lo siguiente en el pizarrón:

$\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$	$4\ \boxed{3}$
$\boxed{2}\ \boxed{2}$	$2\ \boxed{2}$
$\boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$	$3\ \boxed{4}$

La alumna comentó que para medir la tira más grande repitieron cuatro pequeños de a tres. Para medir la tira mediana repitieron dos pequeños de a dos y para medir la tira más pequeña repitieron tres veces el pequeño de a cuatro.

La maestra agradeció y felicitó el trabajo del equipo de Melanie. Además, la docente, se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Alguien tiene algo diferente al trabajo del equipo de Melanie?"*. El resto de los equipos coincidieron que habían utilizado los mismos pequeños que el equipo de Melanie para medir la tira grande y la pequeña. Es decir, todos los equipos utilizaron el pequeño de a tres para medir la tira más grande y para medir la tira más pequeña utilizaron el pequeño de a cuatro, obteniendo la misma cantidad de pequeños que el equipo de Melanie.

Después de la aclaración anterior, la docente se dirigió a Leonardo para que pasara a escribir la medida de la tira mediana, ya que la unidad de medida que utilizaron fue diferente a la que utilizó el equipo de Melanie. Los compañeros de equipo de Leonardo, le dieron la tira mediana y le indicaron que solo tenía que transcribir lo que estaba escrito en la tira en el pizarrón y decir cuántas veces se repitió el pequeño.

Leonardo escribió lo siguiente en el pizarrón:

$\boxed{6}\ \boxed{6}\ \boxed{6}\ \boxed{6}\ \boxed{6}\ \boxed{6}\quad 6\boxed{6}$

Posteriormente Leonardo explicó que él y su equipo habían utilizado seis pequeños de a seis para medir la tira mediana. Cuando terminó Leonardo de explicar su trabajo, la maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *“¿Alguien tiene algo diferente del trabajo del equipo de Leonardo?”* Moviendo la cabeza algunos niños contestaron que no. *“Muy bien”,* dijo la maestra.

La maestra se percató que la longitud de las tiras y la indicación de qué solo utilizaran un pequeño como unidad de medida en una tira, dio como resultado que la mayoría coincidiera en la longitud de las tiras. Otra situación que se presentó en esta actividad fue que ningún equipo repitió algún pequeño para medir las tiras, es decir, utilizaron un pequeño diferente para cada tira.

También la docente se observó que todos los alumnos necesitaron escribir la medida de cada una de las tiras escribiendo tantas veces como se repitió el pequeño, para posteriormente escribir la medida en el nuevo código teotihuacano. Con lo anterior, la profesora concluyó que los alumnos necesitaban seguir trabajando en la medición de tiras hasta que se apropiaran del nuevo código, es decir, si la tira mide cuatro pequeños de a tres, solo escribieran: 4 $\boxed{3}$.

Para continuar con el trabajo de la sesión, la docente entregó tres tiras de papel a cada equipo. La medida de las tiras fue de 50 cm., asimismo pidió a los alumnos que usando tijeras construyeran tres tiras de diferente longitud. Esto es, en lugar de solo medir, ahora tenían que acordar una medida y después cortar las tiras. Se les pidió que las tiras que produjeran fueran una tira grande, una mediana y una pequeña. La maestra precisó que sólo podían utilizar, para cada tira de papel, un solo pequeño, es decir, que si para hacer la tira pequeña decidían utilizar el pequeño de a dos como unidad de medida, en esa tira no podían utilizar otro pequeño, sólo el pequeño de a dos.

Después de las aclaraciones de la profesora, Rafael levantó la mano para preguntar lo siguiente: *"¿Se puede utilizar el mismo pequeño para construir las tres tiras?".* La maestra contestó lo siguiente: *"Es una buena pregunta y una buena idea Rafael, qué te parece si eso lo decide cada uno de los equipos".*

Los objetivos fueron que los alumnos comprendieran que los pequeños servían para medir, así como también que se apropiaran de la nueva notación. Por tal motivo no vio ningún problema, la profesora, sobre la pregunta de Rafael.

Cuando la maestra se aseguró de que los estudiantes habían entendido la indicación, los invitó a que iniciaran la construcción de las tres tiras, una grande, otra mediana y una pequeña.

En el momento que los alumnos trabajaban en la construcción de las tiras, la docente pasó a observar el trabajo de cada uno de los equipos. Ella advirtió que no se les dificultaba medir y cortar las tiras usando el material de los pequeños de madera. Al contrario, los alumnos trabajaban con facilidad y con precisión. Pero se dio cuenta de que los alumnos se tardaban en decidir qué pequeño utilizar y cuántas veces se debía de repetir el pequeño para obtener una de las tiras.

Después de un tiempo de 10 minutos, la maestra solicitó que levantaran la mano los alumnos, para asegurarse de que todos habían terminado la construcción de las tres tiras. Cuando la profesora se dio cuenta que todos los alumnos tenían listas sus tiras, solicitó lo siguiente: *"Un integrante de cada equipo pasará al pizarrón a escribir la longitud de cada una de las tiras. El alumno que pase será el que cada uno de los equipos decida".* La maestra continuó diciendo:

> *En el pizarrón anotaran la longitud de cada una de las tiras con la nueva notación, es decir, si construyeron una tira de tres pequeños de a dos tendrán que escribir 3 $\boxed{2}$. Se vale haber escrito tres veces el pequeño de a dos en la tira, pero ya en el pizarrón solo se escribirá en el nuevo código teotihuacano. ¿Se entendió?*

La maestra hizo la siguiente tabla en el pizarrón y cada estudiante que pasó escribía su nombre y la longitud de la tira en el orden que se indicaba. El nombre de cada alumno en la tabla indicó el orden en que fueron pasando cada integrante de equipo. La Tabla quedó de la siguiente manera:

Tabla 10. Esta tabla se elaboró en el pizarrón. En ella se escribió el nombre del alumno y la longitud de la tira de papel.

	Equipo de Cristofer	Equipo de Ana Karen	Equipo de Danna	Equipo de Rafael	Equipo de Jazmín
Tira grande	3 $\boxed{2}$	5 $\boxed{3}$	8 $\boxed{6}$	4 $\boxed{2}$	5 $\boxed{3}$
Tira mediana	5 $\boxed{4}$	2 $\boxed{2}$	5 $\boxed{6}$	3 $\boxed{2}$	2 $\boxed{2}$
Tira pequeña	4 $\boxed{6}$	4 $\boxed{6}$	$\boxed{2}$	2 $\boxed{2}$	3 $\boxed{4}$

Después de que cada uno de los representantes de equipo escribió la longitud de la tira dio lectura a cada una de las medidas. Cristofer dijo:

> *La tira grande la hicimos de tres pequeños de a dos. La tira mediana la hicimos de cinco pequeños de a cuatro y la tira pequeña la hicimos de cuatro pequeños de a seis.*

Ana Karen dijo lo siguiente:

> *Nuestra tira grande mide cinco pequeños de a tres. La tira mediana mide dos pequeños de a dos y la tira pequeña mide cuatro pequeños de a seis.*

Danna comentó lo siguiente:

> *La tira grande la hicimos de ocho pequeños de a seis. La tira mediana de cinco pequeños de a seis y la tira más pequeña de un pequeño de a dos.*

Rafael indicó que su equipo utilizó solo el pequeño de a dos para hacer cada una de las tiras:

> *Para hacer la tira más grande repetimos el pequeño de a dos cuatro veces. Para hacer el mediano repetimos el mismo pequeño tres veces y la tira más pequeña la hicimos con dos pequeños de a dos.*

La última en mencionar la longitud de cada una de las tiras, fue Jazmín, ella comentó lo siguiente:

> *Nuestra tira grande midió cinco veces el pequeño de a tres, la tira mediana midió dos pequeños de a dos y nuestra tira más pequeña midió tres pequeños de a cuatro.*

Terminando la participación de Jazmín, la profesora felicitó el trabajo de cada uno de los alumnos, así como también dio por terminada la sesión.

La profesora concluyó lo siguiente: La totalidad de los alumnos han comprendido que los pequeños sirven para medir, así como la mayoría de los estudiantes se han apropiado de la nueva notación. Considera la profesora que debe seguir trabajando la nueva notación hasta que la totalidad del grupo la haya entendido. El uso de los pequeños de madera ayudó de manera importante para lograr los dos propósitos.

5.14. Consolidando la idea del numerador

El propósito de esta sesión, fue que la totalidad del grupo comprendiera el significado y conveniencia de la nueva notación. Esta notación la dio a conocer la profesora en la décima segunda sesión, pero la totalidad del grupo no la ha entendido. Después de revisar la sesión anterior (decimotercera), la profesora observó que los alumnos todavía escribían repetidamente la representación del pequeño. Por ejemplo, escribían: $\boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}$; en lugar de 4 $\boxed{3}$. Por tal motivo la docente decidió que los alumnos continuaran trabajando sobre la nueva notación, hasta lograr que la totalidad del grupo la utilizara.

Para iniciar la décimo cuarta sesión, la maestra solicitó a los estudiantes que permanecieran en filas y cada uno en su lugar. En seguida se dirigió a los alumnos para decir lo siguiente: *"Me gustaría que comentaran, qué les agradó y que no les agradó de la clase anterior".* Inmediatamente levantaron la mano Bryan, Ángel, Rafael, Daniela y Ana Karen. La maestra dio la palabra a Bryan. Él dijo lo siguiente: *"A mí me gustó medir tiras de papel con los pequeños de madera".* La maestra se dirigió a Bryan con la siguiente pregunta: *"¿Hubo algo qué no te agradara?"* Bryan respondió, *"No, nada". "Muy bien Bryan, gracias por tu comentario"*, dijo la profesora.

Después de la participación de Bryan, la maestra cedió la palabra a Ángel, para que expresará su comentario. El alumno dijo lo siguiente: *"A mí también me gustó hacer tiras de papel con los pequeños de madera, pero me gustaría hacer una tira muy grande".* La maestra nuevamente hizo la pregunta *"¿Te desagradó algo de lo que hicimos la clase anterior?"* Ángel contesto: *"No, maestra, nada".* La maestra agradeció la participación del alumno.

Rafael fue el tercer alumno en participar, él comentó lo siguiente:

> *A mí también me gustó medir tiras. Lo que no me gustó fue que no utilizamos nuestros pequeños. Me hubiera gustado hacer una tira con el pequeño de a cinco o con el de siete o el pequeño de a ocho.*

Cuando Rafael terminó de expresar su comentario, la maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿A quién le hubiera gustado trabajar con el pequeño de a cinco, el de a siete y el pequeño de a ocho?"* Todo el grupo levantó la mano. La maestra dijo: *"Voy a ver qué podemos hacer. Vamos a escuchar a Daniela y Ana Karen".*

Posteriormente la maestra dio la palabra a Daniela, ella comentó lo siguiente:

> *A mí también me gustó hacer tiras y también me gustó escribir las medidas en código teotihuacano.*

Cuando Daniela terminó de hacer su comentario, la maestra se dirigió a la alumna para preguntarle: *"¿En tu equipo tuvieron alguna una dificultad en el momento de escribir la medida en código teotihuacano?".* Daniela contestó lo siguiente:

> *Sí, por eso escribimos primero la cantidad de pequeños que se repetían en cada una de las tiras y después en el nuevo código teotihuacano. Lo hacíamos para asegurarnos que habíamos escrito bien la medida.*

"*Muy bien Daniela, agradezco mucho tu comentario"*, comentó la maestra.

Para finalizar esta primera parte de la sesión, la maestra se dirigió a Ana Karen para indicarle que expresara su comentario. La alumna dijo lo siguiente:

> *A mí también me gustó hacer tiras con los pequeños de madera, pero lo que más me gustó, es que mis compañeros de equipo decidieran que yo fuera quien pasara a escribir las medidas en el pizarrón.*

Cuando Ana Karen terminó de expresar su comentario la maestra se dirigió a ella, para decirle lo siguiente: *"Ana Karen, tus compañeros te escogieron a ti, porque ellos sabían que ibas a hacer un buen trabajo"*. La maestra continuó diciendo: *"Muy bien Karen. Agradezco tu comentario".*

La maestra sabía que uno de los objetivos era lograr que la totalidad de los alumnos comprendieran el nuevo código teotihuacano, así que no vio ningún problema en hacer caso a la petición que hizo Rafael durante su comentario. Aunque la docente en su agenda de trabajo tenía otras actividades, se dio cuenta que era similar a lo que proponía Rafael. La diferencia era el material. La maestra tenía planeado usar los pequeños de madera y Rafael propuso utilizar el material construido por ellos mismos, que no se había utilizado la sesión anterior.

La maestra estaba segura de que utilizar los pequeños que los estudiantes habían construido y que no utilizaron la clase anterior sería una nueva estrategia para lograr el propósito. Los pequeños que no utilizaron la clase anterior fueron los siguientes: el pequeño de a cinco, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho.

La profesora se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Rafael hizo una petición, que en lo personal me parece fabulosa. Me gustaría saber si ustedes piensan lo mismo y están de acuerdo en utilizar el pequeño de a cinco, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho para construir tiras de papel.*

La maestra siguió diciendo:

> *Este trabajo sería algo similar a lo que se hizo la sesión anterior. ¿Están de acuerdo en realizarlo?*

La respuesta de los alumnos no se hizo esperar. Inmediatamente contestó todo el grupo que sí, que les gustaría hacer tiras de papel con los pequeños que ellos habían construido y que no utilizaron la sesión anterior. *"Muy bien"*, dijo la maestra.

La profesora continuó diciendo:

> *Pero como en todo trabajo a realizar, hay algunas reglas que se tienen que tomar en cuenta para tener cierto orden, expuestas en la clase anterior, éstas son las siguientes: Van a utilizar un solo pequeño para construir cada una de las tiras de papel. Las tiras a construir serán tres, de diferente tamaño; una grande, una mediana y una pequeña. Harán lo posible de escribir en la tira de papel la medida solo en el nuevo código teotihuacano, que posteriormente registrarán en el pizarrón.*
>
> *El registro de la longitud en el pizarrón, se llevará a cabo de la siguiente manera: Dos integrantes del equipo darán a conocer la longitud de cada una de las tiras. Uno de ustedes desde su lugar dirá la medida y otro de ustedes la escribirá en el pizarrón. La sorpresa será que yo voy a indicar quiénes van a hacer esas dos personas. También indicaré quién será el que dicte la medida y quién el que la escriba en el pizarrón. ¿Estamos de acuerdo?*

Los alumnos contestaron que sí.

Después de que la profesora dio las reglas de la actividad, entregó tres tiras de papel a cada equipo. Estas tiras de papel tenían una longitud aproximada de 50 cm. También entregó unas tijeras para que los estudiantes construyeran tres tiras de diferente longitud. Además, repartió la bolsa de los pequeños que habían construido cada uno de los alumnos en sesiones anteriores. Este paquete de material estaba construido con popotes de plástico de colores. El material que contenía la bolsa era la vara, el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro, el pequeño de a cinco, el pequeño de a seis, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho. Pero solo utilizaron el pequeño de a cinco, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho.

Cuando cada equipo tuvo el material en sus manos, inmediatamente iniciaron el trabajo. La maestra sólo era observadora y en ocasiones daba algunas sugerencias: por ejemplo, sobre qué pequeño utilizar para hacer cada una de las tiras. Una de estas sugerencias que dio la maestra fue que ella utilizaría el pequeño más grande para hacer la tira más grande, el pequeño mediano para hacer la tira mediana y la tira pequeña lo haría con el pequeño más chico. Esta sugerencia la dio a un equipo, pero ellos solo la escucharon, porque no la llevaron a cabo. La docente hacia lo anterior lo hacía porque se daba cuenta que los niños del equipo tardaban en decidir qué pequeño utilizar para construir cada una de las tiras.

Otra de las cosas que advirtió la profesora fue que la mayoría de los equipos escribía la longitud de las tiras con el nuevo código teotihuacano y cuando esto pasaba todos los niños estaban atentos para saber qué se escribía y cómo se hacía, debido a que cualquiera de ellos podía ser el que pasara al pizarrón.

Al observar la docente de que la totalidad de los alumnos habían terminado, la profesora se dirigió al grupo e indicó el orden para dar a conocer el trabajo. La maestra dijo lo siguiente:

> *Primero mencionarán la longitud de la tira más grande, en segundo lugar la medida de la tira mediana y por último la longitud de la tira más pequeña. ¿De acuerdo?*
>
> El grupo contesto que sí.

Posteriormente la docente seleccionó a los dos primeros integrantes de equipo. Estos alumnos fueron Bryan y Sindy. La alumna fue la que escribió en el pizarrón y Bryan fue quien dictó las medidas. El trabajo de este equipo fue el siguiente:

Tabla 11. Trabajo de los alumnos Bryan y Sindy.

Tira	**Longitud**
Tira grande	10 $\boxed{7}$
Tira mediana	6 $\boxed{5}$
Tira pequeña	5 $\boxed{8}$

Antes de escribir cada una de las medidas, Sindy, se detenía un momento para pensar qué es lo que iba a escribir y le solicitaba a su compañero Bryan que repitiera la medida. El alumno lo hacía sin ningún problema, pero además decía: *"Acuérdate Sindy diez pequeños de a siete"* o *"Acuérdate seis pequeños de a cinco".* En ese momento Sindy anotaba sin ningún problema la longitud de la tira. La profesora consideró que Sindy solo necesitaba imaginarse cómo tenía que escribir, para hacerlo de manera correcta.

La segunda pareja en pasar fue: Leonardo y Ángel. Leonardo fue el alumno que dictó las medidas y Ángel las escribió en el pizarrón. El trabajo de este equipo fue el siguiente:

Tabla 12. Trabajo de Leonardo y Ángel.

Tira	**Longitud**
Tira grande	8 $\boxed{5}$
Tira mediana	9 $\boxed{8}$
Tira pequeña	5 $\boxed{7}$

En el momento que Leonardo dictaba las medidas a Ángel, la maestra observó que lo hacía con confianza. La única observación que hizo la docente a Leonardo fue que aumentara el volumen de su voz, para que su compañero escuchara adecuadamente las medidas de cada una de las tiras. En cuanto al trabajo que realizó Ángel, fue el adecuado.

La tercera pareja en pasar fue Rafael y Adriana. Rafael dictó las medidas y Adriana las anotó en el pizarrón. Las medidas que anotó Adriana en el pizarrón fueron las siguientes:

Tabla 13. Trabajo de Rafael y Adriana.

Tira	**Longitud**
Tira grande	7 $\boxed{5}$
Tira mediana	8 $\boxed{7}$
Tira pequeña	6 $\boxed{8}$

Esta pareja lo hizo muy bien. A la maestra le dio mucho gusto que Adriana trabajara con mucha confianza.

La cuarta pareja seleccionada por la maestra fue la de Braulio y Jazmín. Braulio fue quien dictó las medidas y Jazmín las escribió en el pizarrón. El trabajo fue el siguiente:

Tabla 14. Trabajo de Braulio y Jazmín.

Tira	**Longitud**
Tira grande	9 $\boxed{7}$
Tira mediana	7 $\boxed{8}$
Tira pequeña	5 $\boxed{5}$

Cuando Jazmín terminó de escribir las longitudes de cada tira, la maestra se observó que había un error, ya que la longitud de la tira pequeña media una vara y la tira mediana le faltaba un pequeño de a ocho para completar la vara. Por tal motivo la tira pequeña media más, que la tira mediana.

La maestra se dirigió al equipo y preguntó lo siguiente: *"¿Están de acuerdo con lo que escribieron sus compañeros?"*

El resto del equipo miraron a la maestra y dijeron: *"Sí maestra, bueno eso creemos".* Inmediatamente, los alumnos, para saber si estaban en lo correcto, le solicitaron las tiras a Braulio para sobreponerlas. Posteriormente determinaron que sí, había un error.

Después de que el equipo dio una respuesta satisfactoria, la profesora se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente:

> *Imaginen que el equipo de Braulio no tuviera las tiras de papel, solo se tienen los datos que escribió Jazmín y sus pequeños, ¿Cómo podríamos determinar que las medidas de la tira mediana y pequeña son las incorrectas?*

Los alumnos observaron detenidamente la tabla con las medidas por un momento. La maestra, al darse cuenta que no daban ninguna explicación, comentó lo siguiente:

> *No sé por qué algo me dice que tiene que ver con el pequeño de a cinco, el pequeño de a ocho y la vara.*

Todos los equipos tomaron el pequeño de a cinco, el pequeño de a ocho y la vara. Fueron repitiendo cada uno de los pequeños en la vara y se dieron cuenta que cinco veces el pequeño de a cinco era una vara y siete veces el pequeño de a ocho no se completaba la vara, por tal motivo la tira mediana tenía que ser la tira que medía cinco pequeños de a cinco y la tira pequeña era la que medía siete pequeños de a ocho.

Después de hacer lo anterior, Rafael levantó la mano para decir lo siguiente:

> *Espero no equivocarme, bueno, cinco pequeños de a cinco hacen una vara y siete pequeños de a ocho no completan una vara, le falta un pedacito. Entonces…*

En este momento Rafael hizo una pausa y la maestra lo animó para que terminara y Rafael continuó diciendo:

> *Por eso cinco pequeños de a cinco son más, porque se forma una vara y siete pequeños de a ocho es menos porque no se forma una vara.*

La maestra se dio cuenta que a Rafael, ya le costaba seguir hablando, por tal motivo la maestra continuó preguntando:

> *¿Entonces la tira que tiene cinco pequeños de a cinco tiene que ser la tira mediana y la tira que tiene siete pequeños de a ocho tiene que ser la tira más pequeña?*
>
> *Rafael Yo aparte de estar de acuerdo contigo Rafael, estoy muy sorprendida de la explicación que acabas de dar. Te felicito Rafael y también agradezco tu participación.*

Contestó: *“Sí, maestra”.*

Después de la intervención de Rafael, la maestra preguntó al grupo: *"¿Están de acuerdo con lo que dijo Rafael?"* El grupo contestó que sí.

La profesora se dirigió a Rafael para decirle lo siguiente:

A continuación Jazmín corrigió el error, la tabla de su equipo quedó de la siguiente manera:

Tabla 15. Trabajo de Jazmín y Braulio con correcciones.

Tira	Longitud
Tira grande	9 $\boxed{7}$
Tira mediana	5 $\boxed{5}$
Tira pequeña	7 $\boxed{8}$

La última pareja en ser seleccionada por la maestra fueron: Ana Karen y Danna. Ana Karen fue la alumna que dictó las longitudes a Danna, para que ella las escribiera en el pizarrón.

Tabla 16. Trabajo de Ana Karen y Danna

Tira	Longitud
Tira grande	8 $\boxed{5}$
Tira mediana	8 $\boxed{8}$
Tira pequeña	5 $\boxed{7}$

La maestra observó que Ana Karen, antes de dictarle a su compañera las medidas, se aseguró que fueran las correctas, sobreponiendo las tres tiras.

Después de la participación de Ana Karen y Danna, la docente se dirigió al grupo para agradecerle a cada estudiante el trabajo que realizó durante la sesión. Además, la profesora solicitó que se colocaran en filas para llevar a cabo de manera individual el trabajo final de la clase. Éste consistió en hacer un dictado a los alumnos. Para eso la maestra dio a cada alumno la mitad de una hoja blanca tamaño carta, en ella tenían que escribir su nombre y diez incisos iniciando con la letra a hasta la letra *j*. La indicación de la maestra fue que el trabajo tenía que ser presentado en el nuevo código teotihuacano. Antes de iniciar el dictado la docente se dio a la tarea de explicar a los alumnos cómo debía presentarse el trabajo y asegurarse que habían entendido. Después de esto, la docente llevó a cabo el dictado.

Los ejercicios que dictó la maestra a los estudiantes fueron los siguientes:

Tabla 17. Ejercicios que dictó la docente a los estudiantes.

a) 4 $\boxed{2}$	c) 3 $\boxed{3}$	e) 5 $\boxed{6}$	g) 9 $\boxed{4}$	i) 11 $\boxed{8}$
b) 5 $\boxed{7}$	d) 2 $\boxed{4}$	f) 10 $\boxed{8}$	H) 3 $\boxed{5}$	j) 2 $\boxed{3}$

Con el dictado la maestra dio por terminada la sesión. Después de concluir la clase y de haber analizado el dictado de cada alumno, y las participaciones de los estudiantes en clase, la maestra concluyó que la totalidad de los estudiantes habían comprendido la nueva notación.

Una de las estrategias que llevó a cabo la docente con Leonardo, que ayudó a que el alumno obtuviera buenos resultados, fue terminar de hacerle el dictado de manera individual, ya que el alumno se atrasó y no pudo terminar al mismo tiempo que el resto del grupo.

La profesora también concluyó que mientras se tenga claro el objetivo de la sesión, se pueden hacer algunas modificaciones en las actividades, y qué mejor si éstas son propuestas por los propios alumnos.

Uno de los puntos más importantes que concluyó la maestra, es que los errores de los estudiantes son oportunidades de aprendizaje siempre y cuando se aprovechen adecuadamente.

5.15. La equivalencia con la unidad

El objetivo de esta décimo quinta sesión, fue que los estudiantes comprendieran que la iteración de los pequeños tiene equivalencia con la vara, es decir que *n* pequeños de *n* tamaño son equivalentes a una vara o para construir una vara se necesitan seis pequeños de a seis o cuatro pequeños de a cuatro, etc.

La maestra inició esta sesión solicitando a los alumnos que permanecieran en su lugar y en filas, ya que el trabajo se realizaría de manera individual. En seguida cuando la profesora se percató que los alumnos estaban atentos, se dirigió al grupo y preguntó lo siguiente: *¿Quien de ustedes quiere pasar al pizarrón?* Algunos alumnos levantaron la mano. Pero la maestra se dirigió a Melanie, quien no había levantado la mano. Cuando Melanie se encontraba enfrente del pizarrón. La maestra se dirigió al grupo para solicitar lo siguiente:

> *Quiero que piensen que Melanie es una confeccionadora de tiras de papel, similares a la que construyeron la sesión pasada. Imaginen que ustedes requieren que Melanie les construya una tira de cierta medida. Para que ella pueda construir la tira que ustedes requieren, le tienen que dar la longitud. Esta medida, Melanie la escribirá en el nuevo código teotihuacano y la va a anotar en el pizarrón, entre todos vamos a comprobar que sea la medida que ustedes están solicitando*.

La maestra aclaró: *"Estas medidas pueden ser similares a las que ustedes escribieron en sus tiras de papel en la sesión pasada".*

También la profesora aclaró que mantener el orden en el salón iba a permitir que Melanie escuchara perfectamente y que hiciera un buen trabajo. Además, la docente explicó que no había necesidad de levantar la mano, ya que Leonardo y yo vamos a decir quién dictará a Melanie la medida. La maestra preguntó, *"¿Se entendió la actividad?"*. La mayoría de los alumnos contestaron que sí. También se dirigió a Melanie para preguntarle: *"¿Entendiste tu misión?".* Melanie contesto que sí.

Posteriormente la maestra se dirigió a Leonardo y le dijo lo siguiente: *"¿Quién te gustaría que expresara la medida de la tira a Melanie?".* Leonardo contestó, *"Rafael".* La profesora se dirigió a Rafael para pedirle que le dijera la medida de su tira a Melanie. Rafael dijo: *"Yo quiero una tira de ocho pequeños de a tres".* Melanie se quedó pensando un momento. Después de un momento, la alumna, se dirigió a la maestra para decirle lo siguiente: *"No escuchó muy bien maestra, ¿Puede repetirme la medida Rafael?"* La maestra contestó: *"Claro que sí, Melanie".* La profesora indicó a Rafael que repitiera la medida de la tira a Melanie, pero elevando su volumen de voz. Rafael volvió a decir su medida. Inmediatamente Melanie escribió la medida.

La maestra se observó que Melanie al momento de escribir la longitud que Rafael le había dictado, ella la decía en voz alta. Primero el ocho cuando dijo “Pequeños” dibujaba la cajita y por ultimo escribió el tres dentro de la cajita.

Cuando Melanie terminó de escribir la medida, la maestra se dirigió a ella para comentar lo siguiente: *“Me pareció fabuloso lo que acabas de hacer”.* Posteriormente la maestra se dirigió al grupo para comentar lo siguiente:

> *¿Se dieron cuenta que Melanie le fue dando significado a cada cosa que escribía? Es una magnifica manera de hacer un buen trabajo y no tener algún error al momento de escribir una medida en código teotihuacano. A mí no se me hubiera ocurrido. Gracias Melanie tu estrategia me gustó.*

Melanie contestó: *“Gracias maestra”.* La alumna dio media vuelta y se dirigió a su lugar, con una magnífica actitud.

Una de las cosas que valoró la docente de Melanie fue que pasó al pizarrón con mucha confianza, pero además demostró que ha comprendido el objetivo de la sesión anterior, al momento de escribir perfectamente la longitud que Rafael le dictó, pero sobre todo expresando de manera escrita y oral lo que hacía.

Es importante mencionar que al inicio del trabajo con la propuesta de aprendizaje, Melanie era una niña que le costaba mucho expresar sus comentarios al resto del grupo y también le costaba trabajo pasar al pizarrón. Pero en este momento de la decimoquinta sesión, ella había mostrado confianza de hacer correctamente lo que se le solicitó. Además, la maestra observó que estaba muy contenta de llevarlo a cabo.

La medida que escribió Melanie fue la siguiente: 8 $\boxed{3}$.

A continuación de la participación de Melanie, la maestra se dirigió a Braulio para decirle lo siguiente: *“Me gustaría que tú fueras el segundo en pasar al pizarrón”.* Braulio pasó al pizarrón. Cuando Braulio se encontraba al frente del grupo, la maestra le solicitó a Leonardo que indicara quién le gustaría que fuera el alumno que dictara la longitud a Braulio. Leonardo contestó: *“Yo quiero que sea Israel”.* Israel con toda confianza comentó: *“Yo quiero una tira de a diez pequeños de a dos”.* Después de escuchar lo anterior, Braulio pensó un momento e inmediatamente escribió en el pizarrón lo siguiente: 10 $\boxed{2}$. La maestra se dirigió al alumno y le dijo:

“También me gustó tu estrategia Braulio, porque solo pensaste tu respuesta y luego la escribiste. Muy buen trabajo, gracias”.

Braulio, de igual forma que Melanie, regresó a su lugar muy satisfecho.

De manera similar, la profesora llevó a cabo la estrategia de escribir en el pizarrón longitudes con el nuevo código teotihuacano con los siguientes alumnos: Kevin, Ana Karen, Cristofer, Fernando y Leonardo. La docente siguió la misma estrategia que con Melanie y Braulio. Ella eligió a los estudiantes, porque consideró que estos presentaron en la sesión anterior dificultades en la comprensión del nuevo código teotihuacano.

Kevin, Ana Karen, Cristofer y Fernando, hicieron un trabajo similar al de Melanie y Braulio. Cuando tocó el turno a Leonardo, la maestra observó que escribió de manera diferente lo que su compañero Bryan le dictó.

Mencionaré lo que pasó con Leonardo desde que inició su participación. La profesora le solicitó a Leonardo que él escribiera en el pizarrón y Bryan el que dictara la longitud de la tira. Leonardo con un poco de pena pasó al pizarrón. Cuando se dirigía al pizarrón sus compañeros le decían frases como las siguientes: *“Tú puedes Leonardo”. “No es difícil.”* Leonardo tomó el marcador y dijo: “Está bien, dime la medida Bryan”. Inmediatamente Bryan le dijo lo siguiente: *“Yo quiero una tira de seis pequeños de a ocho”*. Leonardo se quedó pensando un momento. Bryan repitió: *“Acuérdate Leonardo, seis pequeños de a ocho”.* Después de escuchar nuevamente a Bryan, Leonardo, primero escribió el número seis, luego el ocho y por último puso el recuadro al número ocho. Quedando la medida de la siguiente manera 6 $\boxed{8}$. Ésta fue otra estrategia que la maestra halagó.

La docente consideraba que la estrategia de Melanie era más funcional que la de Leonardo. Por eso ella se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Hay dos trabajos que me parecen fabulosos. El primero es el de Melanie y el segundo es el de Leonardo. Melanie escribió primero la cantidad de pequeños, luego la cajita que para ella significó pequeños de a y por último el número dentro de la cajita. Por otro lado Leonardo escribió primero la cantidad de pequeños, luego el número del pequeño y por último la cajita.*

La maestra se dirigió al grupo y continuó diciendo: *“Quiero que ustedes analicen las dos estrategias y decidan cual será la más adecuada”.*

Posteriormente la docente se dirigió a Melanie y a Leonardo para aclarar lo siguiente:

> *Con esto no quiero que piensen que su trabajo no es correcto, al contrario han hecho un grandioso trabajo, pero me gustaría que se utilizara la estrategia que facilitara el trabajo al momento de escribir una longitud en código teotihuacano.*

La maestra continuó diciendo: *"Algo como que todos realicemos de la misma manera, como parte del mismo código, ¿De acuerdo?".* Melanie y Leonardo comentaron que no tenían ningún problema. *"Muy bien",* dijo la maestra.

Después de esta aclaración, la maestra se dirigió al grupo y dijo: *"Me gustaría escuchar sus opiniones".* Bryan levantó la mano y dijo:

> *Yo hago lo mismo que hizo Melanie porque me parece más fácil y lo que hizo Leonardo me parece como si después de avanzar tendría que regresarme*.

"Muy bien Bryan", dijo la maestra. Posteriormente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Están de acuerdo con Bryan?".* La mayoría contesto que sí.

La maestra comentó al grupo:

> *Yo estoy de acuerdo con Bryan, pero aplaudo lo que hizo Leonardo, porque pienso que es algo difícil de hacer, pero a pesar de eso Leonardo logró escribir correctamente la longitud.*

La maestra continuó diciendo:

> *Sólo para aclarar y establecer nuestro código, al momento de escribir una longitud primero escribimos la cantidad de pequeños, luego la casita y por último el número que indica el pequeño al cual nos referimos. ¿Estamos de acuerdo?*

Para que quedara comprendido el código del grupo, la maestra escribió en el pizarrón la siguiente medida: Nueve pequeños de a tres. Primero escribió el número nueve, luego la cajita y por último el número tres (9 $\boxed{3}$). La maestra copió la técnica de Melanie, al mismo tiempo que escribía los símbolos los decía en voz alta, dando el crédito a Melanie. Posteriormente la maestra se dirigió al grupo y preguntó, *"¿Quedó claro nuestro código?"* Los alumnos contestaron que sí.

Para asegurarse que esto era cierto, la maestra solicitó a Leonardo que pasara al pizarrón a escribir la siguiente longitud: siete pequeños de a cinco. Leonardo sin ningún problema escribió la notación como lo había hecho Melanie, pero sin decirlo oralmente, situación que la maestra respetó.

Después de que la profesora verificó que la totalidad del grupo había comprendido la nueva notación teotihuacana —propósito de la sesión anterior— y que además se había establecido la correcta escritura de la misma, continuó con la sesión comentando lo siguiente, con voz preocupante:

> *Debo confesarles algo niños. Tenemos que trabajar con la vara, pero, ¿qué creen?, se me olvidaron las varas. Según yo, las había metido a la mochila, pero me acabo dar cuenta que no están. Solo tengo los pequeños de madera y una bolsa de popotes blancos que estoy segura que son más grandes que la vara. ¿Cómo podría solucionar este problema? Me gustaría que me ayudaran a pensar en una solución.*

Después de un rato de no escuchar ninguna alternativa, la maestra dijo: *"Se me está ocurriendo una idea. Podemos usar los pequeños y los popotes blancos".* En este momento, la docente entregó a cada niño un popote blanco que era más largo que la vara, unas tijeras y un paquete que contenía, el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro, el pequeño de a cinco, el pequeño de a seis, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho. El pequeño de a cinco, el pequeño de a siete y el pequeño de a ocho, eran los que cada niño había construido con los popotes de plástico. La maestra anexó al material de madera estos pequeños, con la finalidad de que los estudiantes sintieran que era importante el material que ellos habían construido. Pero sobre todo que ayudaban a lograr al propósito de la sesión. El resto de los pequeños eran de madera.

Después de que cada alumno tenía el material en sus manos, la maestra se dirigió al grupo e hizo la siguiente pregunta: *"¿Cómo utilizar los pequeños para construir la vara?"* Inmediatamente Ángel levantó la mano y dijo: *"Ya sé maestra, con el pequeño de a dos lo repito dos veces en el popote blanco y voy a obtener el tamaño de la vara".* Cuando Ángel terminó de dar su comentario la maestra se dirigió a él y dijo lo siguiente: *"Déjame ver si te entendí. ¿Dos pequeños de a dos hacen una vara? ¿Eso es lo que quieres decir Ángel?".* El alumno movió la cabeza y también dijo que sí.

Después de la respuesta de Ángel, la maestra se dirigió al pizarrón para escribir lo siguiente: $2\ \boxed{2} = 1$ vara. Posteriormente se dirigió al alumno y le preguntó: *"¿Esto que escribí, fue lo que quisiste decir?"* Ángel nuevamente contestó que sí.

Después de la participación de Ángel, Ana Karen levantó la mano para comentar lo siguiente: *"También se puede utilizar el pequeño de a seis para construir la vara."* La maestra se dirigió a la alumna y le preguntó: *"¿Cómo lo harías Ana Karen?"* La estudiante respondió: *"Se tendría que repetir seis veces el pequeño de a seis en el popote para que me dé el tamaño de la vara".*

Cuando Ana Karen terminó de dar su comentario, la maestra le solicitó que escribirá la notación que había mencionado en el nuevo código teotihuacano. Karen escribió en el pizarrón, con ayuda de la profesora, lo siguiente: 6 $\boxed{6}$ = 1 vara. Posteriormente la maestra preguntó al grupo si estaban de acuerdo con lo que había propuesto Ana Karen, el grupo contestó que sí.

Cuando Karen terminó de escribir la notación, Israel levantó la mano y dijo: *"Si se repite el pequeño de a tres, tres veces en el popote también tendríamos el tamaño de la vara". "Muy bien Israel",* dijo la maestra. *"¿Puedes pasar a escribir al pizarrón lo que acabas de decir, qué tres pequeños de a tres es igual a una vara?"* Israel se levantó de su asiento para dirigirse al pizarrón y escribir lo siguiente: 3 $\boxed{3}$ = 1 vara. La maestra también preguntó al grupo qué si estaban de acuerdo con lo que había escrito Israel y el grupo contestó que sí.

Posteriormente la maestra se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Hay alguna otra alternativa para construir la vara?".* Inmediatamente Bryan levantó la mano y dijo lo siguiente:

> *Viendo lo que mis compañeros acaban de escribir en el pizarrón, yo digo que si repetimos el pequeño de a cinco, cinco veces en el popote tendríamos el tamaño de la vara y también si repetimos ocho veces el pequeño de a ocho en el popote blanco también tendríamos el tamaño de la vara.*

Después de escuchar el comentario de Bryan, la maestra lo invitó a escribir su notación en el pizarrón, algo similar a lo que habían hecho sus compañeros. Bryan pasó al pizarrón y escribió lo siguiente: 5 $\boxed{5}$ = 1 vara. También escribió 8 $\boxed{8}$ = 1 vara.

La maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"Si solo tuvieran el pequeño de a nueve ¿cuántas veces se tendría que repetir?"* Inmediatamente varios niños levantaron la mano, pero la maestra eligió a Rafael para que contestara. Él dijo lo siguiente: *"Nueve veces lo tendríamos que repetir en el popote, para tener el* *tamaño de la vara".* Después de la participación de Rafael, la maestra le solicitó que escribiera la notación en el nuevo código teotihuacano. Rafael pasó al pizarrón y escribió lo siguiente: 9 $\boxed{9}$ = 1 vara.

Cuando Rafael terminó de escribir la notación en nuevo código teotihuacano, la maestra volvió a dirigirse al grupo para hacer la siguiente pregunta: *"Y si solo tuviéramos el pequeño de a veinte ¿cuántas veces se tendría que repetir el pequeño de a veinte?"* Jazmín inmediatamente levantó la mano y dijo: *"Veinte veces maestra".* La maestra también invitó a Jazmín para que pasara a escribir la notación en el nuevo código teotihuacano. La alumna escribió en el pizarrón lo siguiente: 20 $\boxed{20}$ = 1 vara.

Después de la participación de Jazmín quedó la siguiente lista en el pizarrón:

2 $\boxed{2}$ = 1 vara

6 $\boxed{6}$ = 1 vara

3 $\boxed{3}$ = 1 vara

5 $\boxed{5}$ = 1 vara

8 $\boxed{8}$ = 1 vara.

9 $\boxed{9}$ = 1 vara.

20 $\boxed{20}$ = 1 vara.

La maestra se apoyó del trabajo de los alumnos que pasaron al pizarrón, para decir lo siguiente:

> *Lo que ustedes dieron a entender con lo que escribieron en el pizarrón, es que si yo repito el pequeño tantas veces como su nombre lo indica, tendré como resultado la vara. Es decir, si yo tengo el pequeño de a treinta, ¿tendría que repetir treinta veces el pequeño de a treinta para construir la vara?*

Los niños respondieron que sí.

Después de este trabajo, la maestra invitó a los alumnos a que construyeran la vara con el pequeño de su preferencia. Cuando los alumnos construían la vara, la profesora observó que la mayoría de los niños utilizó el pequeño de a dos, algunos el pequeño de a tres, pocos niños utilizaron el pequeño de a cuatro.

Cuando la maestra observó que la totalidad del grupo había terminado de construir su vara, se dirigió a Leonardo para preguntarle lo siguiente: *¿Qué pequeño utilizaste?* Leonardo contestó: *"Yo utilicé el pequeño de a dos."* La profesora continuó preguntando al estudiante: *"¿Cuántas veces repetiste el pequeño de a dos para obtener el tamaño de la vara?".* Leonardo respondió: *"Dos veces".*

La profesora se dirigió al grupo para hacer la siguiente pregunta: *"¿Alguien utilizó otro pequeño diferente al pequeño de a dos?".* Danna levantó la mano y dijo: *"Yo utilicé el pequeño de a tres y lo repetí tres veces en el popote". "Muy bien Danna",* comentó la maestra. Daniela comentó que ella había utilizado el pequeño de a cuatro y que lo había repetido cuatro veces en el popote.

En seguida del comentario de Daniela, la maestra salió del salón para entrevistarse con su hija[2]. La hija entregó a la profesora un paquete que contenía las varas de madera. La profesora regresó al grupo para decir lo siguiente: *"Mi hija me acaba de entregar las varas que por error coloqué en su mochila"*. Después del comentario de la maestra, Bryan, molesto, dijo: *"¡Ya para qué, si ya terminamos de hacer la vara!".* La maestra aclaró inmediatamente: *"Pero creo que llegaron en un buen momento, porque ustedes pueden verificar que el tamaño del popote es el mismo que la vara de madera".*

La maestra entregó a cada estudiante la vara de madera. Ella observó que en el momento en que los alumnos recibieron la vara de madera, inmediatamente la alinearon con la vara construida con el popote blanco, para verificar que tuvieran la misma longitud. La vara de algunos estudiantes solo tenía un pequeño pedazo de más. Al darse cuenta de esta situación, un alumno tomó las tijeras para cortar el pedazo sobrante y su vara de popote quedó de la misma longitud que la vara de madera. La maestra se dio cuenta de esta actitud de los alumnos, pero no le dio importancia, ya que el objetivo no era construir una vara perfecta sino que los alumnos comprendieran la equivalencia entre la vara y la cantidad de pequeños que caben en ella.

[2] La hija de la maestra estudiaba en una secundaria matutina. Después de clases se reunía con su mamá.

Con la actividad en la cual los alumnos verifican la longitud de la vara que construyeron a la original (la vara de madera), la maestra dio por terminada la sesión. Ella concluyó que la totalidad del grupo logró comprender que *n* pequeños de a *n* tamaños equivalen a una vara. Por ejemplo los estudiantes advirtieron que necesitan tres pequeños de a tres para construir la vara. Así mismo, que necesitan veinte pequeños de a veinte para construir la vara.

La maestra también concluyó que este objetivo se logró con éxito, debido al trabajo que se realizó en sesiones anteriores cuando los alumnos construyeron cada uno de sus pequeños.

5.16. Igualdades y desigualdades entre medidas fraccionarias y la unidad

En la clase anterior la profesora verificó que la totalidad del grupo había comprendido la nueva notación teotihuacana. Además, los estudiantes lograron la correcta escritura de la misma. También en la sesión anterior la docente trabajó con el propósito de que los estudiantes comprendieran que *n* pequeños de a *n* tamaños equivalen a una vara. La profesora concluyó que este objetivo se logró, en el momento en que los alumnos construyeron la vara con la ayuda de los pequeños e hicieron comentarios sobre la relación de equivalencia entre los pequeños y la vara.

Para la decimosexta sesión se buscó que los estudiantes consolidaran la relación de equivalencia de los pequeños con la vara. Otro objetivo fue que los alumnos razonaran sobre la relación de orden entre cierto número de la iteración de los pequeños iguales con la longitud de la vara.

La maestra inició la sesión solicitando a los estudiantes que formaran equipos de cuatro. Cuando la docente se dio cuenta que la clase estaba formada en pequeños grupos, se dirigió a los alumnos para preguntar lo siguiente:

> *He andado un poco distraída y no recuerdo qué vimos la clase pasada. ¿Alguien de ustedes me puede decir qué se vio la sesión pasada?*

Las manos de los alumnos no se hicieron esperar. En sesiones anteriores la profesora daba la oportunidad a que expresaran el trabajo a los alumnos con algunas dificultes para hablar ante sus compañeros. Pero al iniciar esta clase la maestra decidió que los niños con habilidades de expresarse participaran en el trabajo solicitado.

La docente se dirigió a Bryan y le dijo: *"Me gustaría escuchar tu comentario"*. El alumno con mucho gusto dijo: *"Yo recuerdo que hicimos una vara con los pequeños, porque a usted se le olvidaron las varas. Pero no se le olvidaron, las que tenía su hija".* La maestra se dirigió al alumno para decirle. *"Bryan te pido una disculpa, pero de repente se me olvida lo qué hago. Te prometo que no volverá a ocurrir".* El alumno miró a la profesora y le dijo: *"Está bien maestra".* La maestra siguió diciendo: *"Pero este incidente sirvió para que ustedes aprendieran a construir su vara con ayuda de sus pequeños o ¿me equivoco?". Bryan respondió: "Tiene razón maestra".*

Después de la intervención de Bryan, la profesora se dirigió a Rafael para preguntarle: *"¿Estás de acuerdo con lo que dijo Bryan?"* Rafael contestó que sí. La maestra nuevamente se dirigió a Rafael para preguntarle: *"¿Con qué pequeño construiste tu vara la clase pasada?"*. El estudiante respondió: *"Con el pequeño de a tres".* La profesora lo siguió cuestionando: *"¿Cuántas veces repetiste el pequeño de a tres para poder construir tu vara?".* Rafael contestó: *"Tres veces maestra".* La docente le dijo: *"Muy bien Rafael".*

La docente continuó diciendo:

> *Oye Rafael, si yo tuviera sólo un pequeño de a cincuenta y necesitara construir una vara con las mismas condiciones que la que tú construiste la clase pasada, ¿cuántas veces tendría que repetir el pequeño de a cincuenta, en el popote para poder formar la vara?*

Rafael guardó silencio un momento y las manos del resto del grupo se levantaron. La maestra se dirigió a ellos para decirles lo siguiente: *"Rafa está pensando su respuesta, tenemos que darle un momento"*. Cuando la maestra terminó de decir lo anterior, Rafael se levantó de su asiento y dijo: *"Ya sé maestra. Cincuenta veces"*. *"Muy bien Rafael. Sabía que estabas pensando tu respuesta"*, dijo la maestra.

Después de la intervención de Rafael, la docente se dirigió a Ángel para preguntarle: *"¿Estás de acuerdo con Rafael?"*. Ángel respondió, *"Sí maestra". "Muy bien Ángel",* dijo la maestra y siguió preguntando: *"¿Con qué pequeño construiste tu vara?".* Ángel respondió: *"Con el pequeño de a dos"*. La docente continuó preguntando: *"¿Por qué decidiste utilizar al pequeño de a dos y no otro pequeño?"*. El alumno respondió: *"Porque se me hizo más fácil". "Muy bien Ángel",* dijo la maestra. La docente le preguntó lo siguiente: *"Si yo solo tuviera un pequeño de a doscientos ¿cuántas veces tendría que repetir mi pequeño de a doscientos para construir una vara?"* Ángel respondió, *"Pues doscientas veces maestra". "Muy bien Ángel, gracias por tus comentarios"*, dijo la maestra.

La maestra se dirigió a Braulio para preguntarle: *"Si yo tuviera un pequeño de a noventa, ¿cuántas veces tendría que repetir mi pequeño para poder construir la vara?"*. Braulio se mantuvo en silencio y luego dijo: *"Noventa veces maestra". "Gracias Braulio",* dijo la maestra.

Para continuar la sesión la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Ayer por la tarde recibí un mensaje por correo electrónico de la arqueóloga, en el cual me envió una hoja para que ustedes le ayuden a medir con sus pequeños.*

En este momento la maestra entregó a cada estudiante una hoja tamaño carta, con seis barras dibujadas, cada una con una longitud de 24 cm (la misma longitud que la vara; ver Figura 6). Además, entregó un paquete que contenía los pequeños de madera. La maestra solicitó a los estudiantes que sacaran un lápiz para registrar sus medidas.

Después de que cada estudiante tenía el material, la maestra solicitó que colocaran en la mesa su ejercicio. Posteriormente pidió que de sus bolsas sacaran unos polvos mágicos y se los pusieran al ejercicio para que esas barritas se convirtieran en lo que ellos desearan. La maestra se dirigió a Leonardo para preguntarle, *¿En qué convertiste esas barritas?* Leonardo contestó: *"En unas barras de chocolate". "Muy bien Leonardo, no se me hubiera ocurrido, pero me gusta tu idea"*, dijo la profesora.

Posteriormente la maestra se dirigió al grupo y preguntó: *"¿Les gustó la idea de Leonardo?"* Bryan contestó: *"Es lo mismo que se me ocurrió"*. La mayoría del grupo coincidió en que fueran barras de chocolate.

La maestra se dirigió al grupo y dijo: *"Entonces a esas barritas las llamaremos las barras de chocolate".* La docente continuó preguntando: *"¿Cuántas barras de chocolate tenemos?".* Todos los alumnos contestaron *"Seis maestra". "Muy bien",* dijo la profesora. La docente continuó indicando: *"De esas seis barras de chocolate, a la* *primera no le van a hacer nada y a las cinco que restan las van a medir con cada uno de los pequeños que tienen".*

Cuando la maestra terminó de decir lo anterior, Fanny levantó la mano y preguntó: *"¿Se vale repetir alguno de los pequeños?"* La maestra respondió:

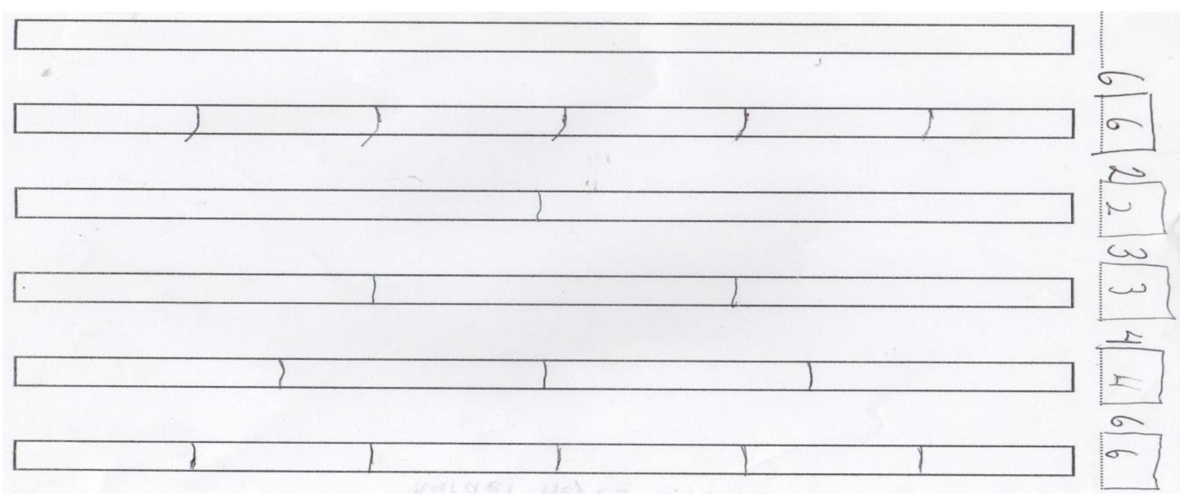
> *Yo considero que sí es necesario, debido a que ustedes solo cuentan con cuatro pequeños y son cinco barras de chocolate que tienen que medir.*

Daniela pidió la palabra para preguntar lo siguiente: *"¿Puede ser cualquiera?"*. La docente se dirigió al grupo para pedir opinión al grupo. Los estudiantes decidieron que cada uno de ellos iba a elegir qué pequeño repetir.

Otra indicación que dio la profesora al grupo fue que la cantidad de pequeños que se repitieran en la barra la iban a escribir con su lápiz en la línea que tenia cada barra.

A continuación se muestra la imagen de uno de los ejercicios que los estudiantes midieron con el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro y el pequeño de a seis.

Figura 3. Trabajo de una estudiante del grupo, donde se llevó a cabo la propuesta de aprendizaje.



Es importante aclarar que los alumnos no sabían que la longitud de las barras de chocolate del ejercicio era la misma que la longitud de la vara. Esto lo descubrieron al momento de terminar de medir cada barra de chocolate, con cada uno de los pequeños de madera.

Cuando Jazmín terminó de medir sus barras de chocolate dijo lo siguiente: *"Ya sé, maestra, cada barra mide lo de una vara".* La maestra le dijo: *"¿Estás segura?".* La alumna contestó: *"Claro que sí maestra".* La maestra siguió diciendo: *"Me gustaría que me lo explicaras porque yo la verdad no entiendo por qué tienes esa idea".* La maestra se acercó al lugar de Jazmín y la estudiante dijo lo siguiente, midiendo nuevamente la barra:

> *Mire maestra, el pequeño de a dos se repite dos veces en la barra. El pequeño de a seis se repite seis veces. El pequeño de a cuatro se repite cuatro veces y el pequeño de a tres se repite tres veces".*

Con cara de sorprendida la maestra dijo:

> *Entonces la arqueóloga me envió una hoja con barritas que tienen la misma longitud de la vara de los teotihuacanos.*

Después de este comentario de Jazmín, la docente se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Alguien tiene algo diferente de lo que comentó Jazmín?".* La mayoría del grupo coincidió con Jazmín, que el pequeño se repetía tantas veces como indicaba su nombre, en la longitud de la barra de chocolate.

Se confirmó que cada barra de chocolate tenía la longitud de la vara. Esta confirmación se hizo con ayuda de la vara. La maestra entregó a cada estudiante la vara para que comprobaran que la barra de chocolate media lo mismo que la vara teotihuacana.

La docente, para confirmar que todos habían entendido el trabajo, se dirigió a Leonardo para preguntarle lo siguiente: *"¿Cuántos pequeños de a tres necesitaste para formar la barra de chocolate o la vara?".* Leonardo miró su hoja del ejercicio y contestó: *"Tres maestra". "Muy bien Leonardo",* dijo la maestra, y preguntó nuevamente: *"¿Cuántos pequeños de a seis se necesitaron para formar la barra de chocolate o la vara?".* Inmediatamente Leonardo contestó: *"Seis maestra".*

Posteriormente la docente se dirigió a Kevin para preguntarle: *"¿Cuántos pequeños de a dos necesitaste para formar la barra de chocolate o la vara?".* El alumno contestó: *"Dos".* La maestra preguntó: *"¿Y cuántos pequeños de a cuatro necesitaste para formar la barra de chocolate o vara?".* Kevin contestó: *"Cuatro maestra".*

La maestra llevó a cabo esta actividad con el propósito de reafirmar el objetivo de la clase anterior. Este objetivo fue que los estudiantes comprendieran que *n* iteración de los pequeños de a *n* tamaños iguales son equivalentes con la vara.

Al darse cuenta de que la totalidad del grupo había comprendido el objetivo antes mencionado, la docente pasó a lo siguiente. La profesora entregó a cada equipo una tira de papel que tenía una longitud mayor que la vara, es decir, medía más de 24 centímetros. Después de entregar la tira de papel, la maestra, solicitó a los estudiantes que sacaran lápiz y tijeras, ya que también las iban a utilizar y que tuvieran presente los pequeños de madera y la vara, que les fueron entregados al inició de la sesión.

Cuando la profesora se observó que todos los equipos tenían el material para trabajar, se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *"¿Se acuerdan que en sesiones pasadas ustedes construyeron tiras de papel, utilizando un solo pequeño? En esta ocasión van a construir una tira de papel que tenga la misma longitud de la vara, pero utilizando diferentes pequeños.*

La maestra aclaró:

> *Ustedes van a decidir cuáles pequeños utilizar y cuántos. Lo único que deben de tener presente es que el tamaño de la tira debe ser igual a la vara.*

La docente continuó diciendo:

> *Es necesario que anoten en su tira que construyan, la longitud en código teotihuacano.*

Después de este comentario los alumnos iniciaron con el trabajo. La maestra solo era observadora de la labor que realizaba cada estudiante. La profesora se observó que la mayoría de los estudiantes tenía como referencia la vara. Un ejemplo de esto fue el equipo de Bryan. Puso la vara, y junto a ella iban poniendo los pequeños que ellos consideraban que juntos tenían la misma longitud de la vara. Por ejemplo, colocaron a un lado de la vara, un pequeño de a cuatro, un pequeño de a dos y un pequeño de a tres. Pero se dieron cuenta que estos tres pequeños no cubrían la longitud de la vara, así que retiraron el pequeño de a tres y utilizaron otro pequeño.

Después de varios intentos, los pequeños que quedaron a un lado de la vara del equipo de Bryan fueron los siguientes: un pequeño de a cuatro, un pequeño de a dos y otro pequeño de a cuatro.

Después de un tiempo aproximado de diez minutos, la profesora, se dio cuenta que todos los equipos habían terminado, así que solicitó que estuvieran en silencio, para que algunos de ellos comentaran su trabajo.

Cuando el grupo estuvo en silencio la maestra se dirigió a ellos para preguntar: *"¿Quién quiere comentar su trabajo?".* Ángel levantó la mano para decir lo siguiente: *"Nosotros hicimos la tira con un pequeño de a dos y dos pequeños de a cuatro"*. Cuando Ángel terminó de dar su comentario, Bryan inmediatamente dijo: *"Nos copiaron maestra"*. La maestra se dirigió a Bryan, para preguntarle: *"¿Estás seguro Bryan?"*. El alumno volvió a afirmar que sí les habían copiado. La maestra nuevamente se dirigió a Bryan para decirle lo siguiente: "*Qué te parece si nos dices el trabajo que hizo tu equipo".* El alumno comentó que ellos habían utilizado un pequeño de a cuatro, un pequeño de a dos y otro pequeño de a cuatro.

La profesora solicitó que Bryan escribiera en el pizarrón la notación teotihuacana que habían escrito en la tira de papel. Bryan pasó al pizarrón y escribió lo siguiente:

$$\boxed{4}\,\boxed{2}\,\boxed{4}$$

Posteriormente la profesora le solicitó a Ángel que pasará a escribir la notación de la longitud de la tira que su equipo había construido. Ángel pasó al pizarrón y escribió lo siguiente:

$$\boxed{2} \qquad 2\,\boxed{4}$$

El equipo de Ángel utilizó un pequeño de a dos y dos pequeños de a cuatro.

Cuando las notaciones teotihuacanas estaban escritas en el pizarrón, la maestra se dirigió a Bryan para preguntarle: *"¿Sigues pensando que tus compañeros les copiaron?"* Bryan con cara de avergonzado dijo: *"Me equivoqué. Lo que pasó es que los dos equipos utilizamos los mismos pequeños, pero los acomodamos diferente".* La maestra se dirigió a Bryan para decirle lo siguiente: *"Me da gusto que te dieras cuenta que te equivocaste, me gustaría que te disculparas con tus compañeros".* Bryan ofreció una disculpa al equipo de Ángel y ellos la aceptaron sin ningún problema.

Después de esta aclaración, la maestra se dirigió al equipo de Rafael para indicarles que expusieran su trabajo. Rafael comentó que para hacer su tira de papel, habían utilizado los mismos pequeños que los equipos de Ángel y Bryan y que los habían acomodado como el equipo de Bryan. También el equipo de Israel comentó, que ellos habían hecho lo mismo. Situación que la maestra comprobó durante el transcurso de la sesión.

Posteriormente la maestra se dirigió al equipo de Braulio para solicitarles que expusieran su trabajo. Él comentó que ellos habían construido su tira de papel con un pequeño de a dos, un pequeño de a seis y un pequeño de a tres. Después de la intervención de Braulio, el resto del grupo quedó impresionado. Hubo algunos comentarios como que no creían que con esos pequeños se pudiera construir la vara.

La maestra se percató de esto y dijo: *"Me parece que no están convencidos de lo que acaba de exponer Braulio. ¿Cómo le podemos hacer para saber que el equipo de Braulio construyó correctamente la tira al tamaño de la vara?".* Bryan levantó la mano y dijo: *"Se puede medir la tira de papel con la vara". "Muy buena opción Bryan",* dijo la maestra. Después de que Bryan terminó de dar su comentario, Jazmín comentó lo siguiente: *"También lo que se puede hacer es tomar los pequeños que nos dijo Braulio y ver si con esos se construye una vara". "Muy bien Jazmín, me parece una idea muy buena"*, expresó la profesora. La maestra continúo diciendo:

> *Cada equipo tiene la tira a la medida. Qué les parece si hacemos lo que comentó Jazmín, tomamos los pequeños que nos mencionó, Braulio y tratamos de formar la vara.*

La maestra solicitó a Braulio que repitiera los pequeños que ellos habían utilizado para formar la vara. El alumno sin ningún problema lo repitió: *"Un pequeño de a dos, un pequeño de a seis y un pequeño de a tres".*

Cuando Braulio terminó de expresar lo anterior, los equipos comprobaron el resultado del equipo de Braulio. Todo el grupo se pudo dar cuenta que el equipo de Braulio estaba en lo correcto.

La docente se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *"Vamos a continuar nuestro trabajo, después de esta magnífica labor del equipo de Braulio. Ahora construyamos una tira de cinco pequeños de a seis, ¿Alguien quiere pasar a escribir la longitud de la tira?*

Todas las manos de los estudiantes estaban arriba, pero la docente le solicitó a Daniela que pasará a escribir la longitud de la tira. Daniela pasó al pizarrón y escribió lo siguiente: 5 $\boxed{6}$.

Cuando Daniela regresó a su lugar, la profesora se dirigió a cada uno de los equipos para entregar la tira de papel, que de igual manera tenía una longitud mayor a 24 centímetros. Los equipos, después de recibir la tira de papel, tomaron su pequeño de a seis y comenzaron a medir, hasta repetir cinco pequeños de a seis.

Además, la maestra solicitó que también construyeran tiras de papel que tuvieran de longitud: una vara, dos pequeños de a dos, cuatro pequeños de a tres, y cinco pequeños de a cuatro. Estas medidas también fueron escritas en el pizarrón por dos alumnos.

Una vez que se tuvieron las cinco tiras, la maestra, indicó a los equipos que verificaran que cada una de las tiras tuviera escrita la longitud en código teotihuacano, como se encontraba escrita en el pizarrón. Asimismo, la docente, solicitó que enrollaran cada una de la tiras y las colocaran al centro de cada uno de los equipos.

Cuando la profesora observó que todos los equipos tenían el material como lo indicó, se dirigió al grupo y dijo:

> *Voy a decir algunas preguntas con respecto al trabajo que acaban de hacer. Deben pensar la respuesta y esperar a que yo indique quién la dará.*

La maestra siguió aclarando: *"En este momento no pueden utilizar sus tiras. Ellas se mantendrán enrolladas".*

Cuando la maestra supuso que los estudiantes habían entendido las indicaciones preguntó lo siguiente:

> *¿Qué tira nos tuvo que haber salido más larga, la que mide una vara o la que mide cinco pequeños de a seis?*

Después de que la maestra dijo la pregunta, algunos niños levantaron la mano. Inmediatamente la profesora solicitó que solo pensaran la respuesta y que ella indicaría quién la comentaría.

La docente después de un momento se dirigió a Fanny y le repitió la pregunta de manera directa.

> *Fanny: ¿Qué tira nos tuvo que haber salido más larga, la que mide una vara o la que mide cinco pequeños de a seis?*

Fanny respondió: *"La que mide una vara".* Después de la respuesta de Fanny, la profesora se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Están de acuerdo con Fanny?".* La totalidad del grupo dijo que sí. La profesora se dirigió a Fanny para preguntarle: *"¿Cómo puedes explicar que lo que dices es correcto?".* Fanny se dirigió a la maestra para decirle:

> *Cuando medí la barra de chocolate con el pequeño de a seis, tuve que repetir seis veces el pequeño de a seis para completar la barra. Entonces, si la tira mide cinco pequeños de a seis, es menos que la vara. Por eso la tira que mide una vara es más grande que la que mide cinco pequeños de a seis.*

Después del comentario de Fanny, la maestra, dijo lo siguiente: *"Nunca pensé que hicieras este maravilloso comentario Fanny, de verdad que te felicito".*

La maestra se dirigió al grupo para preguntar quién estaba de acuerdo con Fanny. Bryan no esperó y dijo:

> *Mire maestra señalando la hoja del ejercicio anterior, Fanny tiene razón para completar esté tamaño, que es el de una vara, tuvimos que repetir el pequeño de a seis, seis veces y si la tira mide cinco pequeños de a seis es menos que la tira que mide una vara.*

"Muy bien Bryan, gracias por tu comentario", dijo la maestra.

Para comprobar que Fanny y Bryan decían lo correcto, pidió que todos los equipos tomaran la tira que medía una vara y la tira de cinco pequeños de a seis y comprobaran que la tira más larga era la que medía una vara.

La maestra llevó a cabo la misma estrategia con la tira de a cinco pequeños de a cuatro, dos pequeños de a dos y cuatro pequeños de a tres. En todas las acciones la totalidad del grupo llegó a las conclusiones correctas sin experimentar dificultad aparente. De todas formas, cada vez se recurrió a las tiras para comprobar que las respuestas eran correctas.

Después de esta actividad, la profesora dio por terminada la sesión. Ella concluyó lo siguiente: La totalidad de los estudiantes han establecido la equivalencia de los pequeños con respecto a la vara. Asimismo, los alumnos han puesto en juego sus conocimientos, con respecto a la notación utilizada en sesiones anteriores.

También la docente concluyó que los alumnos necesitan seguir trabajando situaciones problemáticas de relación de orden, teniendo como referencia el tamaño de la vara, hasta que para los niños sea obvio. Es decir, este trabajo lo continuaría en la siguiente clase.

5.17. El tamaño de una medida, con relación al tamaño de la unidad

En esta sesión se buscó consolidar los conocimientos de los estudiantes de la relación de orden entre las longitudes medidas con la vara y algunas subunidades de ésta. Además, se introdujo un sistema de notación un poco diferente, que se aproxima más a la notación convencional de las fracciones.

La maestra inició la sesión solicitando a los estudiantes que se mantuvieran en su lugar de trabajo. Acto seguido, comentó lo siguiente:

> *El fin de semana me llamó la arqueóloga para preguntarme sobre lo que estaban haciendo y qué era lo que habían aprendido. Le comenté que todos ustedes son unos niños muy trabajadores e inteligentes, ya que han hecho varias cosas y por supuesto han aprendido.*
>
> *Uno de los comentarios que le hice a la arqueóloga en la conversación telefónica fue que ustedes entendieron cómo registrar medidas con el nuevo código teotihuacano. También le dije que construyeron la vara con la ayuda de sus pequeños.*
>
> *Una de las cosas que le fascinó a la arqueóloga, fue que construyeron una tira de papel, al tamaño de la vara, con ayuda de varios pequeños. Además que logran anticipar cuántos pequeños de a noventa se necesitan para construir una vara. Recuerdo que esta pregunta se la hice a Braulio y él contestó que se necesitan noventa pequeños, que es la respuesta correcta.*

La docente continuó platicando a los alumnos lo siguiente:

> *Cuando le comenté, que Jazmín había descubierto que las barritas dibujadas en la hoja que me envió, eran del mismo tamaño de la vara, la arqueóloga me comentó que ella estaba segura de que esto pasaría, porque desde el inicio de este trabajo ustedes han sido unos estudiantes muy inteligentes.*
>
> *Igualmente le comenté que Leonardo había nombrado a las barritas, como barras de chocolate. Le encantó tanto que en ese momento se le antojó una deliciosa barra de un rico chocolate.*
>
> *Otra de las situaciones que le comenté a la arqueóloga fue que ustedes lograron explicar correctamente, por qué una tira de cinco pequeños de a seis era más pequeña que una tira que medía una vara.*

La maestra continuó diciendo:

> *Todo lo que le expliqué a la arqueóloga de ustedes le gustó mucho, tanto que me facilitó dos cosas para ustedes. La primera es una planilla profesional que es una réplica de la que originalmente utilizaron los teotihuacanos y también me compartió una nueva notación que más adelante les mostraré.*

La profesora siguió platicando a los alumnos lo siguiente:

> *La Arqueóloga me dijo que los teotihuacanos utilizaban la planilla profesional para tener una medición lo más exacta posible, ya que a ellos les gustaba hacer sus cosas perfectamente.*

Después de este largo comentario introductorio y de repaso, la maestra preguntó lo siguiente: *"¿Quieren conocer esa planilla?"*. Inmediatamente se escuchó por todos los estudiantes un sí. *"Está bien",* dijo la maestra, se las voy a mostrar. En este momento la maestra repartió a cada estudiante la planilla profesional (ver Anexo 3).

Cuando cada estudiante tuvo en sus manos la planilla profesional, la maestra se dirigió al grupo para comentar lo siguiente:

> *Esta planilla profesional que ustedes están recibiendo es una réplica de la original. Es decir, es una copia, ya que la original se encuentra resguardada en Teotihuacán, así como las piezas originales de los pequeños de madera que ustedes han estado trabajando.*

La maestra continuó diciendo:

> *Les comento algo muy importante, no cualquiera tiene este material, solo se los dan a personas especiales como ustedes, ya que son unos alumnos trabajadores e inteligentes.*

Cuando la profesora terminó de decir lo anterior, Bryan con cara de sorprendido dijo a la profesora, *"¿Segura maestra?".* La docente reiteró diciendo: *"Claro que sí Bryan, ¿O qué no te consideras un estudiante trabajador e inteligente".* Bryan respondió: *"Claro que sí maestra".* La maestra continuó diciendo: *"Por esas grandes razones, la arqueóloga les mandó ese material".*

Posteriormente, la docente solicitó a los estudiantes que observaran la planilla profesional. Cuando los estudiantes observaron la planilla, la docente se percató que los alumnos contaban la cantidad de barritas, así como la cantidad de partes que se encuentra dividida cada una de ellas, también hacían comentarios como "*Qué hoja tan extraña" o "Me gustaría saber más de esta hoja".*

Después de unos minutos la maestra se dirigió a Melanie, para preguntarle lo siguiente: *"¿Qué nos quieres comentar de la planilla profesional?".* La alumna respondió: *"Yo veo diez barritas".* La maestra le dijo a la estudiante: *"Muy bien, ¿Algo más que observes?".* Melanie respondió:

> *También veo que hay una barrita sin dividir, otra que se divide en dos partes, otra en tres partes y así se van dividiendo cada una de las barritas.*

"Muy bien Melanie: ¿Algo más que quieras decir?", dijo la maestra. La alumna respondió *"No, nada maestra".*

Después de la intervención de Melanie, la maestra se dirigió al grupo para preguntar, *"¿Alguien quiere agregar algo más a lo que dijo Melanie?"* Bryan levantó la mano y dijo lo siguiente:

> *Yo creo que estas barritas tienen la misma medida que las anteriores, pero ahora son más y las barritas están divididas. Otra cosa que veo es que no están las barras divididas en siete, ni la barra divida en once partes.*

"Muy bien Bryan", dijo la maestra.

Después de la intervención de Bryan, la maestra tomó la palabra para decir lo siguiente:

> *Todo lo que acaban de decir con respecto a la planilla es cierto. Pero a mí me gustaría que ustedes me dijeran si encuentran alguna relación, entre la planilla y los pequeños que elaboraron en clases anteriores.*

Los alumnos observaban la planilla, hasta que Rafael levantó la mano y dijo lo siguiente: *"Sí maestra, yo creo que utilizaron los pequeños para medir cada barra, como lo hicimos nosotros en la hoja que usted nos entregó la clase pasada"*. Rafael siguió diciendo: *"Lo que veo es que también utilizaron algunos pequeños que nosotros no hicimos".*

Después de este comentario la maestra se dirigió al alumno para decirle lo siguiente: *"Tienes razón en todo lo que acabas de decir Rafael, te felicito por ser un alumno tan observador".*

La maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"La arqueóloga no se equivocó, ustedes son unos alumnos muy inteligentes".* La profesora continuó diciendo: *"Lo que acaba de comentar Rafael realmente es muy asombroso, hay que tener una mirada muy especial para poder verlo"*. La docente continuó diciendo:

> *Es cierto. Esta planilla fue el resultado de un trabajo que los teotihuacanos llevaron a cabo con ayuda de los pequeños, así como lo que ustedes hicieron en la sesión anterior, tomaron cada uno de los pequeños y fueron midiendo y marcando la medida de cada uno de los pequeños. Si ustedes observan hay más pequeños en comparación a lo que ustedes construyeron. Pues, según la arqueóloga, se está llevando a cabo una búsqueda para localizar el resto de*

los pequeños, porque según la planilla que encontraron en una excavación, los teotihuacanos construyeron más pequeños. Pero de eso posiblemente tengamos noticias más adelante.

La maestra regresó a la planilla para preguntar lo siguiente:

Según la arqueóloga con esta planilla los teotihuacanos medían con gran precisión. ¿Alguien me puede decir por qué creen que esto era posible?

Los estudiantes solo miraban la planilla, sin contestar nada. La profesora al darse cuenta de lo anterior, se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

Imaginen que ustedes son parte de ese grupo de teotihuacanos y necesitan construir la parte final de la pirámide del sol, todos los lados de la pieza tienen que ir de la misma medida y solo tienen la planilla profesional. ¿Cómo la utilizarían para construir perfectamente la pieza que falta?

No había ninguna respuesta por parte de los estudiantes, entonces la profesora dijo lo siguiente: "¿Alguien ha acompañado a su mamá a comprar listón o algo por el estilo? Paulina levantó la mano y dijo:

Yo fui el otro día con mi mamá a comprar listón para un mantel que estaba haciendo, llegamos a donde lo venden y la muchacha que nos despachó jaló la punta del listón y lo colocó sobre una mesa que tenía e iba midiendo por metros o medios metros.

A continuación de la intervención de Paulina la maestra, comentó lo siguiente:

Eso que hizo la persona que despachaba el listón, eso mismo hacían los teotihuacanos, colocaban tiras de papel sobre la planilla de acuerdo a la medida que requerían. Por ejemplo si querían una tira de papel de dos pequeños de a seis, se dirigían a la barra que estaba dividida en seis pequeños de a seis y marcaban la tira hasta donde llegaban los dos pequeños de a seis, por tal motivo todo lo que construían lo hacían con mucha precisión.

La maestra continuó preguntando a los estudiantes: *"¿Sí logran entenderlo?"* Algunos alumnos comentaron: *"Más o menos maestra".*

La docente se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"No se preocupen. En este momento vamos a hacer lo que los teotihuacanos hacían".*

La maestra entregó a cada estudiante una tira de papel aproximadamente de 24 cm. La indicación que dio a los estudiantes fue que construyeran una tira de papel de cinco pequeños de a ocho. Los alumnos tomaron la tira y la colocaron sobre la planilla señalando con su lápiz hasta dónde llegaron los cinco pequeños de a ocho, para después cortar lo que sobraba de la tira.

Cuando la maestra observó que todos los estudiantes tenían la tira, solicitó que escribieran la medida con la notación teotihuacana, quedando la longitud de la tira de la siguiente manera: 5 $\boxed{8}$

En ese momento la docente mostró a los estudiantes la nueva notación de los teotihuacanos que la arqueóloga le compartió. Para darla a conocer, la profesora se dirigió al grupo y dijo:

> *"¿Recuerdan que al inicio de la clase les comenté que la arqueóloga me compartió dos cosas? La primera fue la planilla y lo segundo fue una nueva notación.*

La profesora se dirigió al pizarrón y escribió la notación tal cual la habían escrito los estudiantes:

$$5\,\boxed{8}$$

Se observó, que los alumnos estaban atentos a lo que la maestra hacía en el pizarrón. Para llamar más la atención, la docente se dirigió al grupo para decir lo siguiente con un tono de voz de desánimo: *"Creo que a ustedes no les interesa saber lo que la arqueóloga me compartió ¿verdad?".* La respuesta de los alumnos no se hizo esperar. Ellos contestaron sí querían saber la nueva notación que la arqueóloga había comentado a la maestra.

La maestra notó que los alumnos estaban ansiosos por saber la nueva notación, así que se dirigió al pizarrón para escribir, a un lado de lo que había escrito anteriormente como se muestra a continuación.

$$5\,\boxed{8} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ \boxed{8} \end{array}$$

Cuando la maestra terminó de escribir la notación, Bryan comentó lo siguiente: *"Eso se parece como una fracción".* La maestra se dirigió al alumno y le dijo:

> *Pues yo no le veo cara de fracción, a ver Bryan coméntanos, por qué dices que lo que acabo de escribir se parece a una fracción.*

El estudiante siguió diciendo:

> *Mire maestra, cuando yo escribo una fracción, escribo un número, una línea y otro número abajo y es algo parecido a lo que usted acaba de escribir.*

La maestra se dirigió al grupo para preguntarles: *"¿Están de acuerdo con Bryan?"* Rafael comentó:

> *Sí maestra, porque siempre escribimos una fracción con un número arriba y otro abajo y con una línea entre los dos números.*

La maestra al ver que los alumnos tenían razón dijo lo siguiente:

> *Ya me convencieron, creo que sí tienen razón, solo recuerden que lo único que hice fue escribir el cinco arriba de la casita y el ocho, pero el significado de la representación no cambia, sigue siendo cinco pequeños de a ocho.*

Daniela preguntó lo siguiente:

> *Entonces en lugar de escribir el número de pequeños a un lado, lo escribiremos arriba.*

La maestra contestó:

> *Exactamente Daniela. Eso que acabas de decir es totalmente cierto. Lo que cambio en nuestra notación anterior, sólo fue la posición de los números, pero el significado va a seguir siendo el mismo.*

Después de la presentación y la explicación de la nueva notación, la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Vamos a seguir utilizando el material que nos proporcionó la arqueóloga; es decir, la planilla y la nueva notación, qué como comentó Bryan, se parece a una fracción.*

La maestra se dirigió a Melanie para hacerle la siguiente pregunta: *"¿Qué medida te gustaría que tuviera la tira que estamos a punto de construir?"*. La alumna propuso que la tira de papel fuera de seis pequeños de a nueve. La maestra dijo: *"Me parece muy buena idea Melanie".*

Después la maestra se dirigió al grupo y dijo: *"Manos a la obra. Vamos a construir una tira de seis pequeños de a nueve".* La maestra siguió diciendo:

> *Antes de que se construya la tira de seis pequeños de a nueve, me gustaría que comentaran si la tira de seis pequeños de a nueve es más grande o más pequeña que una vara.*

Danna levantó la mano y dijo: *"La tira de seis pequeños de a nueve es más pequeña que una tira que mide una vara, porque le falta para tener el tamaño de la vara". "Muy bien Danna"* dijo la maestra. La profesora continuó preguntándole a la alumna: *"¿Cuántos pequeños de a nueve te faltarían para completar una tira que mide una vara?* La alumna se tomó unos segundos para contestar. Se observó que pensaba su respuesta, ya que utilizaba los dedos de sus manos. Al final comentó lo siguiente: *"Para tener una vara necesito nueve pequeños de a nueve y solo tengo seis. O sea que me faltan tres pequeños de a nueve para tener una vara". "Muy bien Danna eso que tú acabas de comentar es cierto y lo podemos comprobar con la planilla",* dijo la profesora.

En ese momento los estudiantes dirigieron su atención a la planilla para verificar el argumento de Danna y se dieron cuenta que ella había dicho lo correcto.

La docente se dirigió al grupo para pedirles que construyeran la tira de seis pequeños de a nueve que Melanie había propuesto. También la maestra solicitó que escribieran la medida de la tira con la nueva notación que se parece a una fracción. Cuando la maestra terminó de hacer la petición Melanie levantó la mano, para solicitar que se le permitiera pasar al pizarrón a escribir la medida con la nueva notación. La profesora inmediatamente accedió sin ningún problema. La alumna escribió en el pizarrón lo siguiente:

$$\begin{array}{c} 6 \\ \boxed{9} \end{array}$$

Cuando Melanie terminó de escribir la medida de la tira con la nueva notación, dio lectura a la notación, diciendo lo siguiente: *"Seis pequeños de a nueve".* La maestra felicitó a la alumna por el trabajo realizado.

Hasta este momento se habían elaborado dos tiras de papel, utilizando la plantilla y la nueva notación, a la que Bryan le encontró parecido a la representación de una fracción. También se había trabajado con la equivalencia con la vara.

La maestra consideró construir otra tira más para dejar clara la equivalencia con la vara, pero sobre todo para que los alumnos comprendieran la nueva notación y dieran significado a la planilla.

La tercera tira que se construyó midió ocho pequeños de a doce. La maestra llevó a cabo la misma estrategia anterior. Es decir, solicitó que con ayuda de la planilla construyeran la tira de ocho pequeños de a doce. Asimismo preguntó a los estudiantes antes de construir la tira: *"¿Qué tira será más grande, la tira que mide ocho pequeños de a doce o la que mide una vara".* Las explicaciones que dieron los estudiantes fueron similares a las que comentó Danna.

Igualmente, se llevó a cabo la representación de la longitud con la nueva notación y se leyó como lo había hecho Melanie en la tira de seis pequeños de a nueve. La notación quedó de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} 8 \\ \boxed{12} \end{array}$$

La lectura fue la siguiente: *"Ocho pequeños de a doce".* El alumno que hizo el trabajo de la tercera tira fue Braulio.

Cuando la totalidad de los alumnos tenían las tres tiras, la docente solicitó que las hicieran rollito y que guardaran la planilla. Después la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Haré algunas preguntas pero quiero que piensen su respuesta. Después de un tiempo, yo indicaré quién de ustedes contestará. Es importante que escuchemos lo que el compañero dice, con atención y respeto.*

Posteriormente a estas aclaraciones, la maestra se dirigió al pizarrón para escribir lo siguiente:

$$\overset{6}{\boxed{9}} \qquad \overset{8}{\boxed{12}}$$

Cuando estaban escritas las dos notaciones anteriores en el pizarrón, la maestra señaló cada una de éstas y preguntó: *"¿Cuál es más larga, seis pequeños de a nueve u ocho pequeños de a doce?"* Después de la pregunta los alumnos se mantuvieron en silencio por unos minutos.

Posteriormente la maestra se dirigió a Ángel para preguntarle: *"¿Cuál crees que es más larga, seis pequeños de a nueve u ocho pequeños de a doce?"* Ángel respondió: *"No estoy seguro, pero creo que seis pequeños de a nueve".* La maestra continuó preguntando al alumno: *¿Por qué crees eso Ángel?* El estudiante respondió: *"No sé maestra. Sólo lo creo. No puedo explicarlo". "Muy bien Ángel",* dijo la maestra.

A continuación la profesora se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Alguien opina diferente a Ángel?".* Nadie contestó. La maestra notó que para los alumnos fue complicado dar una respuesta a la pregunta, así que tomó la siguiente alternativa y la comentó a los estudiantes:

> *Como veo que es complicado para ustedes contestar la pregunta, lo llevaremos a cabo por medio de una votación. ¿Les parece?*

Los alumnos contestaron que sí.

La profesora se dirigió al grupo para hacer la siguiente pregunta: *"¿Quién cree que seis pequeños de a nueve es más larga ocho pequeños de a doce?".* Trece alumnos de los veinte levantaron la mano. Inmediatamente la maestra hizo la siguiente pregunta: *“¿Quién cree que ocho pequeños de a doce es más larga que seis pequeños de a nueve?”* Cinco alumnos de los veinte levantaron la mano. Dos alumnos de los veinte no levantaron la mano. La profesora comentó que estaban en su derecho de no contestar.

Después de la votación, la docente solicitó a los estudiantes que se comprobara las dos situaciones antes mencionadas, utilizando las dos tiras que habían elaborado para saber quién había tenido la razón, si los que pensaron que seis pequeños de a nueve es más largo que ocho pequeños de a doce o los que pensaron que ocho pequeños de a doce es más larga.

Los alumnos inmediatamente tomaron las dos tiras, las sobre pusieron una con la otra y algunos decían una cosa y otros decían otra. Lo que causó esta situación fue que al momento de construir las tiras no midieron, ni cortaron con precisión, así que la maestra indicó que utilizaran la planilla para verificar la respuesta.

Con ayuda de la planilla, los alumnos comprobaron que las dos tiras son iguales. Cuando los niños se dieron cuenta de lo anterior, no lo podían creer, tan fue así que Ángel preguntó: *“¿No se equivocaron al momento de hacer la planilla?”*. La maestra respondió:

> *Yo te puedo asegurar que esta planilla fue elaborada con mucho cuidado y con la mayor precisión, ya que con ella los teotihuacanos medían cosas muy importantes, como la altura de los escalones que tienen las pirámides de Teotihuacán, entre otras cosas.*

El alumno contestó: *“Siendo así maestra, sí creo”.*

La maestra se había percatado que las tiras construidas por los estudiantes les faltaban o les sobraba una parte, situación que no iba permitir establecer la desigualdad entre las dos representaciones, ya que entre las tiras había una mínima diferencia. Así que tomó la decisión de apoyarse sólo con la planilla.

La profesora continuó la clase solicitando a los estudiantes que ubicaran las varas divididas en pequeños de a ocho y pequeños de a nueve. Asimismo indicó que, en la vara de ocho pequeños ubicaran a cinco pequeños de a ocho y en la vara de los nueve pequeños, ubicaran a seis pequeños de a nueve. La maestra continuó diciendo:

Solo quiero que las observen y en un momento me dirigiré a alguno de ustedes para hacerle algunas preguntas. Recuerden que al alumno que me dirija es el que debe contestar y hay que escucharlo con respeto.

La maestra se dirigió a Fernando para hacerle las siguientes preguntas, originándose el siguiente diálogo.

Maestra: Fernando. ¿Ya tienes ubicados los cinco pequeños de a ocho?
Fernando: Sí maestra.
Maestra: Muy bien Fernando. ¿Ya ubicaste los seis pequeños de a nueve?
Fernando: Sí maestra.
Maestra: ¿Quién es más pequeño, seis pequeños de a nueve o cinco pequeños de a ocho?
Fernando: El más pequeño es cinco pequeños de a ocho.
Maestra: Muy bien Fernando. ¿Cuántos pequeños de a ocho falta para completar una vara, si ya se tienen cinco pequeños de a ocho?
Fernando: Necesito tres pequeños de a ocho.
Maestra: Muy bien Fernando. Si ya tienes seis pequeños de a nueve, ¿cuántos pequeños de a nueve te faltan para completar una vara?
Fernando: Me faltan tres pequeños de a nueve.
Maestra: Gracias Fernando, respondiste correctamente.

Después de este diálogo entre la profesora y Fernando, la docente se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente:

Fernando me dijo que para completar ambas varas, necesita tres pequeños de a ocho y tres pequeños de a nueve. ¿Por qué si se necesita la misma cantidad de pequeños para completar una vara, cinco pequeños de a ocho es más pequeño que seis pequeños de a nueve?

Rafael levantó la mano y dijo:

Yo veo que a cada vara le faltan tres pequeños, pero también veo que tres pequeños de a ocho es más que tres pequeños de a nueve, por poquito, pero es más".

"Muy bien Rafael. ¿Algo más que quieras decir?", dijo la profesora. El alumno contestó que no.

La maestra felicitó al alumno por su comentario y posteriormente se dirigió al grupo para preguntar si estaban de acuerdo con lo que había dicho Rafael. La totalidad del grupo contestó que sí. También la maestra dijo que si alguien tenía algo que agregar al comentario de Rafael, lo hiciera en ese momento, pero nadie quiso añadir algo más. Así que la docente continuó con lo siguiente: *"Lo que acaba de comentar Rafael es sorprendente, porque no solo observa lo que tiene, sino que también está observando lo que le falta y hace una comparación de este faltante. Y como* *tres pequeños de a ocho es más que tres pequeños de a nueve, por eso cinco pequeños de a ocho es menos que seis pequeños de a nueve, porque le falta más para completar la vara".* La maestra continuó diciendo: *"Si ustedes observan un pequeño de a ocho es más largo que un pequeño de a nueve, pero por un pedacito muy chico, entonces hay que tener mucho cuidado en el momento de decidir cuál es más largo o menos largo, entre estos pequeños".*

Para concluir la sesión la profesora llevó a cabo la siguiente actividad: En el pizarrón escribió las siguientes notaciones. La profesora indicó que para contestar, primero pensarían su respuesta, apoyándose con la planilla y posteriormente un compañero pasaría a encerrar lo que se indicara.

$$\overset{5}{\boxed{6}} \qquad \overset{3}{\boxed{4}}$$

Cuando las notaciones se encontraban escritas en el pizarrón, la docente hizo la siguiente pregunta*: "¿Cuál es más largo, cinco pequeños de a seis o tres pequeños de a cuatro?"*

Daniela pasó a encerrar la notación de la tira más larga, sin ningún problema. Después de que la alumna regresó a su lugar la maestra se dirigió a ella para decirle lo siguiente:

> *Trata de observar sólo las dos varas, la de los pequeños de a seis y la de los pequeños de a cuatro.*

La maestra continuó diciendo: *"Me imagino que marcaste hasta dónde llegaron cada una de las representaciones que están anotadas en el pizarrón"*. La alumna contestó que sí.

Después de esta aclaración, la maestra se dirigió a la alumna para indicarle lo siguiente:

> *Quiero que observes lo que le falta a cada una de las dos varas y me comentes a qué vara le falta más para completarse una vara, si la vara de los pequeños de a cuatro o a la de los pequeños de a seis.*

Daniela observó la planilla y posteriormente dijo: *"A cada una le falta un pequeño, pero a la que le falta más, es a la vara de los pequeños de a cuatro".* La maestra se dirigió al grupo para preguntar, sí estaban de a cuerdo con lo que dijo

$$\overset{9}{\boxed{10}} \qquad \overset{11}{\boxed{12}}$$

Daniela. Como todos los estudiantes hicieron lo mismo que Daniela, contestaron que sí.

Otro de los ejercicios que escribió la docente fue el siguiente:

La profesora indicó lo siguiente*: "¿Cuál es menos larga nueve pequeños de a diez u once pequeños de a doce?".* Algunos alumnos solo pensaban y otros sí utilizaban la planilla para obtener su respuesta. Este ejercicio fue contestado por Braulio. La respuesta del estudiante fue que once pequeños de a doce era menos larga que nueve pequeños de a diez.

Cuando el alumno pasó a encerrar la respuesta, el resto del grupo se percató del error de Braulio, pero la maestra solicitó darle un tiempo para que pensara por qué se había equivocado. El alumno regresó a su lugar y tomó su planilla, aceptó que sí se había equivocado, porque no se fijó bien. La maestra dijo lo siguiente:

> *No te preocupes Braulio, a mí me pasó, porque si te das cuenta la diferencia es mínima entre nueve pequeños de a diez y once pequeños de a doce.*

Después de que Braulio corrigió el ejercicio la maestra le solicitó que juzgara si lo que faltaba era más largo o menos largo.

El tercer ejercicio que escribió en el pizarrón la docente fue el siguiente:

$$\begin{array}{c} 4 \\ \boxed{5} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ \boxed{6} \end{array}$$

La maestra preguntó: *"¿Cuál es más largo cuatro pequeños de a cinco o cinco pequeños de a seis?"* El alumno que contestó este ejercicio fue Kevin. No tuvo problemas para contestarlo correctamente.

Con estos ejercicios la profesora dio por terminada la sesión y concluyó lo siguiente: La planilla ayudó a reforzar y a comprender la equivalencia con la vara. Se dio cuenta de esto la profesora cuando los alumnos argumentan con gran facilidad que seis pequeños de a nueve es más pequeño que una vara, ya que hacen falta tres pequeños de a nueve para completar una vara.

La maestra considera que el segundo objetivo sí se cumplió ya que los alumnos utilizaron la nueva notación (que es muy similar a la convencional) sin perder la esencia del trabajo realizado en otras sesiones.

La profesora consideró que los alumnos tienen que seguir trabajando la relación de orden con la nueva representación hasta que logren generalizar, es decir, consigan contestar correctamente sin el apoyo de la planilla.

5.18. Última sesión de enseñanza

El primer objetivo de esta sesión fue seguir trabajando la relación de orden con fracciones unitarias, fracciones propias e impropias, teniendo como apoyo la planilla profesional, así como también los signos $<$, $>$ o $=$ (menor que, mayor que o igual). Un segundo propósito fue presentar a los alumnos la notación formal de las fracciones, pero sin dejar la esencia del trabajo realizado anteriormente; es decir, no dejar de pensar que $\frac{5}{8}$ son cinco pequeños de a ocho o $\frac{3}{4}$, tres pequeños de a cuatro. Y un tercer propósito fue trabajar algunos ejercicios donde los estudiantes ubicaran las notaciones en la recta numérica.

5.18.1. Relaciones de orden.

La docente inició la sesión solicitando a los estudiantes que se mantuvieran en su lugar. En seguida se dirigió al pizarrón a escribir los siguientes símbolos.

$$> \quad < \quad =$$

Después de que la profesora escribió los símbolos en el pizarrón. Se dirigió al grupo para preguntarles lo siguiente*: "¿Alguien de ustedes sabe qué significa cada uno de estos símbolos?"*. Inmediatamente varios alumnos levantaron la mano, pero la profesora seleccionó a Cristofer para que diera su comentario. El alumno dijo lo siguiente: *"Se leen mayor que, menor que e igual a"*. Cuando Cristofer terminó de decir lo que significaba cada símbolo, la maestra agradeció la participación del estudiante y se dirigió al grupo para preguntar si había alguien que tuviera una respuesta diferente a la de Cristofer. La totalidad del grupo comentó que su compañero había dicho lo correcto.

Posteriormente la profesora se dirigió al grupo para aclarar lo siguiente, tomando en cuenta los símbolos que estaban escritos en el pizarrón:

Sólo quiero agregar algo al comentario de Cristofer. La abertura se tiene que dirigir hacia el número que sea mayor y el vértice o el pico como ustedes le quieran llamar, se dirigirán al número de menor valor.

La profesora continuó diciendo:

Vamos a iniciar haciendo comparaciones, ustedes escribirán el símbolo menor que, mayor que o igual a, según corresponda.

Inmediatamente la profesora se dirigió al pizarrón para escribir las siguientes notaciones:

$$\overset{1}{\boxed{8}} \qquad \overset{1}{\boxed{3}}$$

A continuación la docente hizo las siguientes preguntas: *"¿Cuál de los dos pequeños es más grande? y ¿Cuál es más pequeño?"*. La mayoría de los estudiantes deseaba contestar la pregunta, pero la docente seleccionó a Fanny para que contestara. La alumna dijo: *"Un pequeño de a ocho es más pequeño que un pequeño de a tres".* Después de que Fanny comentó lo anterior, la maestra se dirigió al grupo para preguntar si estaban de acuerdo con lo que había dicho Fanny. Inmediatamente Ángel se levantó de su lugar para decir lo siguiente:

¿Qué no se acuerda maestra, que un pequeño de a ocho se repitió más veces en la vara y por eso tiene que ser más pequeño que el pequeño de a tres, ya que el pequeño de a tres solo se repitió tres veces?

La maestra con una sonrisa, le contestó al estudiante:

Qué bueno que me dices esto Ángel porque de repente se me olvidan las cosas, pero tienes mucha razón. El pequeño de a ocho es más pequeño, que el pequeño de a tres.

Después de la aclaración, la profesora, solicitó a Ángel que repitiera su argumento, para que Leonardo lo escuchara y posteriormente lo repitiera. Cuando Leonardo intentó repetir el argumento de Ángel, lo hizo con la ayuda de la maestra.

Después de que Leonardo dijo su comentario, la profesora le solicitó que escribiera el símbolo que correspondía. Leonardo se dirigió al pizarrón para escribir el símbolo, pero se quedó quieto un momento. Para darle confianza la maestra hizo la siguiente referencia: *"Recuerda Leonardo que la abertura del símbolo se dirige al valor más grande y el vértice o la esquinita se dirige al valor más pequeño".*

Después del comentario de la profesora, Leonardo tomó el marcador y escribió el símbolo correctamente, quedando de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\boxed{8}} < \frac{1}{\boxed{3}}$$

La maestra agradeció y aplaudió el trabajo de Leonardo. El propósito de la docente con esta actividad, fue verificar que los símbolos $<$, $>$ o $=$ (menor que, mayor que o igual a), no causaran ningún problema a los estudiantes. Así como también comprobar que para los estudiantes, las fracciones unitarias ya no eran un problema.

Para seguir apoyando la conjetura anterior, la docente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Qué es más grande un pequeño de a cuatro o un pequeño de a cien?".* Posteriormente la profesora anotó en el pizarrón las notaciones.

$$\frac{1}{\boxed{4}} \qquad \frac{1}{\boxed{100}}$$

La mayoría de las manos levantadas no se hicieron esperar. Pero la maestra seleccionó a Kevin para que contestara. El alumno dijo lo siguiente:

> *Es bien fácil maestra, el más grande es el pequeño de a cuatro, porque solo se repite cuatro veces en la vara y el pequeño de a cien se tendría que repetir cien veces y tendría que ser más pequeño.*

Después de la participación de Kevin, la docente le solicitó que escribiera el signo correspondiente entre las notaciones. Quedando de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\boxed{4}} > \frac{1}{\boxed{100}}$$

La profesora agradeció y felicitó el trabajo de Kevin, así como también se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Qué será más pequeño un pequeño de a trescientos o un pequeño de nueve?"* La mayoría de los estudiantes levantaba la mano para contestar, pero la maestra seleccionó a Braulio. El estudiante dijo: *"También es bien fácil maestra, el pequeño de a nueve es más grande y el pequeño de a trescientos es el más pequeño". "Muy bien Braulio"* dijo la maestra y continuó preguntando: *"Braulio ¿te puedes imaginar un pequeño de a trescientos?"* El alumno contestó: *"Sería muy* *pequeño"*. *"Estoy totalmente de acuerdo contigo, Braulio",* comentó la maestra. Rafael también comentó: *"Sería muy complicado hacer un pequeño de a trescientos" "Tienes razón Rafael, pero hay algo que nos puede ayudar a hacer lo imposible".*

La docente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Saben qué es?".* Los alumnos comentaron que no sabían. La docente comentó con mucho entusiasmo: *"Es nuestra imaginación la que nos hace posible ver lo imposible".* Rafael comentó: *"Tiene razón maestra, yo me puedo imaginar un pequeño de a trescientos sin hacerlo". "Exactamente Rafael, para eso nos sirve nuestra imaginación",* contestó la maestra.

Después de esta conversación y para continuar la sesión, la maestra solicitó a los alumnos se colocaran en pequeños grupos de cuatro personas. La maestra cuidó que los equipos quedaran formados de manera heterogénea.

Cuando se encontraban los estudiantes reunidos en equipos la maestra, se dirigió a ellos para decir lo siguiente: *"Voy a escribir un par de notaciones en el pizarrón lo que quiero que hagan es que piensen su respuesta y posteriormente yo indicaré quién contestará".* Otra de las sugerencias que dio la maestra fue que en el equipo discutieran su respuesta para que quien participara diera una buena justificación al momento de participar.

Después de las aclaraciones anteriores la maestra escribió las siguientes notaciones en el pizarrón:

$$\begin{array}{c}7\\ \boxed{8}\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}8\\ \boxed{9}\end{array}$$

Ya que tenía escritas las notaciones en el pizarrón, la docente se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"Imaginen que tienen dos tiras de papel, una de siete pequeños de a ocho y otra de ocho pequeños de a nueve. ¿Qué tira es más grande?"*. Después de la intervención de la maestra, los alumnos iniciaron a hacer sus comentarios en equipos. La maestra sólo era observadora. De repente se acercó a los equipos a tratar de escuchar lo que discutían, pero era complicado, ya que los alumnos lo hacían con poco volumen.

Después de un momento los equipos discutieron sobre el ejercicio escrito en el pizarrón, la docente se dirigió al grupo para reiterar que solo la persona que ella elegiría, era la única que hablaría y el resto del grupo escucharía con atención y respeto.

Posteriormente la docente se dirigió al equipo de Israel para preguntarle lo siguiente: *"¿Qué tira es más grande, la que mide siete pequeños de a ocho o la que mide ocho pequeños de a nueve?"* Inmediatamente Israel contestó: *"La tira que es más grande es la que mide ocho pequeños de a nueve".* Después de que Israel dijo su respuesta, la maestra se dirigió al equipo y preguntó: *"¿Por qué piensan eso?"* Los integrantes del equipo simplemente contestaron: *"Porque es más grande maestra".* La profesora comentó: *"Me parece una muy buena respuesta, agradezco mucho su trabajo".*

La docente sabía que estaban en lo correcto, pero era necesario mejorar su argumento. Teniendo en cuenta lo anterior, la profesora se dirigió al grupo para hacer la pregunta: *"¿Alguien piensa diferente al equipo de Israel?"* Ángel levantó la mano y dijo:

> *Nosotros estamos confundidos, porque a siete pequeños de a ocho le falta solo un pequeño de a ocho para completar la vara y a ocho pequeños de a nueve también le hace falta un pequeño de a nueve. Entonces por eso no podemos decir cuál es más grande.*

Cuando Ángel terminó de exponer lo que había surgido en su equipo, la maestra, se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Alguien puede ayudar a aclarar la duda que tiene el equipo de Ángel?".* Después de un momento Axel levantó la mano y dijo: *"Tendrían que ver el pequeño que sobra". "Muy bien Axel, estoy de acuerdo contigo",* dijo la docente y continuó diciendo:

> *Yo creo que como dice Axel, tendrían que ver el tamaño de un pequeño de a ocho y un pequeño de a nueve y a partir de ahí saber a cuál de las dos tiras le falta más para tener la misma longitud de una vara, o lo contrario, a cuál le falta menos para completar la longitud de una vara.*

Después de la intervención de la docente, se dirigió al grupo para solicitar lo siguiente:

> *¿Qué les parece si ayudamos al equipo de Ángel a resolver su problema, tomando en cuenta lo que Axel recomendó? Primero respondiendo la siguiente pregunta: ¿Cuál de los dos pequeños es más grande, el pequeño de a ocho o un pequeño de a nueve? Ya que den respuesta, piensen a cuál tira le faltaría más para llegar a completar una vara.*

La docente continuó diciendo:

¿Qué les parece si lo discuten un momento en el interior del equipo y posteriormente el pequeño grupo de Ángel nos comente a qué conclusión llegaron?

La maestra reiteró:

Es importante que esperemos a que sus compañeros del equipo de Ángel den su respuesta y si hay otra idea diferente se comenta. Esto tiene que ser después de la participación del equipo de Ángel. ¿Estamos de acuerdo?

Los alumnos contestaron afirmativamente. Después de esta aclaración la docente dio paso a la discusión en los equipos de trabajo.

Mientras los alumnos discutían en cada uno de los equipos, en relación a lo que se había expuesto, la maestra era observadora y receptora de lo que hacían y decían los estudiantes en cada uno de los equipos. Se acercó al equipo de Ángel y pudo escuchar que habían llegado a la conclusión de que un pequeño de a ocho era más grande que un pequeño de a nueve. Pero lo que no lograban explicar era a qué tira de papel le faltaba más o menos para completar la longitud de la vara; si la tira de papel de siete pequeños de a ocho o la tira de ocho pequeños de a nueve.

La profesora se percató que estos alumnos tenían el mismo problema que tuvo anteriormente, que no se pudo explicar a qué tira de papel le falta más o menos, para tener la misma longitud de la vara. Entonces tomó la siguiente decisión. Se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

Qué les parece si escuchamos a Ángel con su conclusión, sobre cuál es más grande un pequeño de ocho o un pequeño de a nueve y posteriormente vemos qué tira es más grande? ¿Están de acuerdo?

Los estudiantes contestaron que sí.

En ese momento Ángel tomó la palabra para decir lo siguiente:

Mi equipo y yo estamos seguros que un pequeño de a ocho es más grande que un pequeño de a nueve, porque el pequeño de a ocho se repite solo ocho veces en la vara y el pequeño de a nueve se repite nueve veces en la vara, por eso tiene que ser más pequeño que el de a ocho.

"Muy bien Ángel, me parece una excelente explicación" dijo la maestra. Posteriormente la docente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Alguien tiene otra respuesta diferente a lo que acaba de decir Ángel?"*. El resto de los estudiantes explicaron que lo que ellos habían pensado, era lo mismo que Ángel comentó.

La profesora se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Ya sabemos cuál de los dos pequeños es más grande, ahora lo que nos falta explicar cuál de las dos tiras es más grande. ¿Alguien de ustedes tiene algún comentario?*

No hubo respuesta por parte de los estudiantes, así que la maestra hizo lo siguiente: A cada estudiante entregó la planilla profesional, un protector de hojas, unos marcadores de agua y una mantita para que borraran.

Después de que todos los alumnos tenían el material, la maestra solicitó que metieran la planilla profesional en el protector de hojas. Posteriormente invitó a que marcaran en las barritas correspondientes: siete pequeños de a ocho y ocho pequeños de a nueve. En este momento la totalidad de los estudiantes se percató que la tira de ocho pequeños de a nueve era la más grande; por poquito, pero era más grande.

Para confirmar lo anterior, la maestra se dirigió a Danna, una integrante del equipo de Ángel, para preguntarle: *"¿Qué tira es más grande?"* Danna respondió: *"La tira de ocho pequeños de a nueve". "Muy bien Danna",* dijo la maestra. Nuevamente se dirigió a la alumna para decirle lo siguiente:

> *Quiero que observes el pequeño que le falta a cada tira y me digas a cuál de las dos tiras le falta menos y a cuál le falta más para completar la vara.*

La alumna dijo: *"La tira que le falta más es la de siete pequeños de a ocho y a la que le falta menos para completar la vara es la de ocho pequeños de a nueve".* Cuando Danna terminó de dar su comentario, Ángel dijo: *"Ya estábamos cerca de la explicación". "Estoy de acuerdo contigo, solo faltaba una pequeña ayuda",* dijo la maestra.

Cuando la docente terminó de hablar, Bryan levantó la mano para decir lo siguiente:

> *Entonces cuando el pequeño que falta es más grande, lógicamente a la tira le falta más, por eso es más pequeña y cuando el pequeño que le falta es más pequeño, la tira es más grande.*

"*Exactamente Bryan, esto que acabas de decir es lo correcto y es la idea que tenía en la cabeza",* la docente continuó diciendo. *"Eso que acabas de decir Bryan y que me lo quitaste de la cabeza, ¿lo podrías repetir nuevamente?"* El alumno, sin ningún, problema contestó que sí lo haría. La docente también pidió al resto del grupo que escuchara con atención lo que su compañero iba a decir. Cuando el grupo estuvo atento Bryan expresó lo siguiente:

> *Si el pequeño que falta, es más grande, a esa tira le falta más, por eso es más pequeña y cuando el pequeño que le falta es más pequeño, la tira es más grande".*

"Muy bien Bryan y gracias", dijo la maestra.

Después la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"Lo que acaba de comentar Bryan lo podemos comprobar con ayuda de la planilla profesional"*. Inmediatamente los alumnos lo hicieron en la planilla y se dieron cuenta que Bryan tenía razón.

Para finalizar la reflexión anterior, la maestra solicitó a Bryan que colocara el símbolo $<$, $>$ o $=$ (menor que, mayor que o igual a), según correspondiera. El alumno pasó al pizarrón y colocó el símbolo quedando de la siguiente manera:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{\boxed{8}} \quad < \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{8}{\boxed{9}}$$

Después de que los alumnos habían logrado comprender por qué la tira de ocho pequeños de a nueve era más grande que la tira de siete pequeños de a ocho, se continuó con la sesión.

5.18.2. Notación convencional de las medidas fraccionarias

Cuando los estudiantes se encontraban atentos a la clase la docente consideró el momento adecuado para expresar lo siguiente: *"La clase anterior Bryan, comentó que la notación se parecía a una fracción".*

La maestra escribió la siguiente expresión en el pizarrón:

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{\boxed{9}}$$

> *Lo comenté a la arqueóloga y ella me dijo que no se le había ocurrido, pero analizando la representación, coincidió con Bryan y me sugirió que adoptáramos la representación de una fracción, pero sin dejar a un lado la idea de que son cinco pequeños de a nueve. Así que si ustedes están de acuerdo, a partir de este momento quitaremos la casita del número de abajo*

para que quede como ustedes escriben una fracción, pero sin dejar de pensar que son cinco pequeños de a nueve. ¿Qué les parece la idea?

Las respuestas de los alumnos fueron positivas a la intención de la docente, así que a partir de este momento las notaciones serían similares a $\frac{5}{8}$ y lo que no cambiaría sería la lectura, es decir, cinco pequeños de a ocho.

Posteriormente a la aclaración de la docente continuó con ejercicios similares a los anteriores, para que quedara claro este tipo de notación. Los ejemplos fueron los siguientes:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \qquad\qquad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}$$

Para el primer ejercicio, la profesora hizo la siguiente pregunta: *"¿Cuál es más pequeña, una tira de tres pequeños de a cuatro o una de cuatro pequeños de a cinco?"* La mayoría de los estudiantes coincidía en que la tira de tres pequeños de a cuatro era la tira más pequeña. Esta conclusión la llevaron a cabo los estudiantes sin ayuda de la planilla. Después de que los alumnos dieron la respuesta la profesora, dio la oportunidad de comprobarla, marcando cada una de las notaciones en la planilla y de esta manera la totalidad de los estudiantes coincidió con la respuesta anterior.

Las expresiones dos pequeños de a tres y tres pequeños de a cuatro se trabajaron de la misma manera que las notaciones anteriores.

Finalmente las notaciones quedaron de la siguiente manera:

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} \qquad\qquad \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

La profesora continuó realizando comparaciones. Es importante mencionar que los ejercicios fueron resueltos en un primer momento sin la presencia de la planilla profesional.

5.18.3. La relación de orden usando notación convencional

Después de que se estableció la relación de orden en los ejercicios anteriores, la profesora se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

Vamos a seguir comparando notaciones. En un primer momento las analizaremos y posteriormente escribiremos el símbolo menor qué, mayor qué o igual a. Pero algo muy importante, es necesario que mencionen por qué están dando su respuesta; es decir, por qué concluyeron que es menor, mayor o igual.

A continuación de la aclaración, la docente se dirigió al pizarrón para escribir lo siguiente:

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{3}{8}$$

Cuando las notaciones estaban escritas en el pizarrón, la maestra se dirigió al grupo:

Seguiremos imaginando que construyeron tiras de papel. En esta ocasión se construyó una de un pequeño de a cuatro y otra de tres pequeños de a ocho, ¿Qué tira es más pequeña?

Después de que la docente hizo la pregunta, solicitó que comentaran en el interior del equipo y que posteriormente ella diría qué integrante del equipo la expresaría.

Los alumnos iniciaron la discusión sobre qué tira era más pequeña, si la tira de un pequeño de a cuatro o la de tres pequeños de a ocho. Cuando esto pasaba, la maestra se acercó al equipo de Braulio. Ellos habían llegado a la conclusión que la tira de tres pequeños de a ocho era más pequeña que la tira de un pequeño de a cuatro.

La profesora se acercó al equipo para preguntar: *"¿Por qué piensan eso?"* Jazmín, una integrante del equipo de Braulio, dijo: *"Sí maestra, porque un pequeño de a cuatro es más grande que un pequeño de a ocho"* La docente comentó:

Me parece un argumento muy bueno. Pero me gustaría que tomaran en cuenta que la tira se construye con tres pequeños de a ocho.

La alumna respondió:

Eso es cierto, nosotros pensamos que era un pequeño de a ocho. No nos fijamos que son tres pequeños de a ocho.

La maestra se retiró del equipo. Después de ubicar a los estudiantes en el ejercicio, continuó observando el trabajo en algunos equipos y se dio cuenta que algunos equipos pensaban que tres pequeños de a ocho era más pequeño que un pequeño de a cuatro.

Al darse cuenta de esto la docente decidió no intervenir para que los alumnos cambiaran su respuesta, sino hacer una puesta en común una vez que todos hubieran terminado.

La profesora se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Ya tienen su respuesta?"* La totalidad del grupo contestó que sí.

La docente se dirigió al equipo de Daniela y preguntó:

> *¿Ustedes a qué conclusión llegaron? ¿Qué tira es más pequeña la de un pequeño de a cuatro o la de tres pequeños de a ocho?*

Daniela contestó: *"Nosotros pensamos que la tira más pequeña es la tira de tres pequeños de a ocho".* La maestra se dirigió al equipo para preguntar: *"¿Por qué piensan eso?"*. Ángel, que era un compañero de equipo de Daniela, dijo: *"Porque es menos maestra". "Muy bien equipo de Daniela",* dijo la docente.

A continuación la docente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Alguien tiene una respuesta diferente a la del equipo de Daniela?"* Jazmín levantó la mano y dijo: *"Nosotros pensamos que la tira de un pequeño de a cuatro es más pequeña que la tira de tres pequeños de a ocho".* No se hizo esperar la pregunta de la profesora: *"¿Por qué piensan eso Jazmín?* La alumna dijo: *"Porque son más pequeños de a ocho y solo un pequeño de a cuatro".* La docente agradeció la participación de los dos equipos y también preguntó al resto de ellos lo siguiente: *"¿Cuál de las dos respuestas es la correcta?"*. No hubo respuesta por parte de los estudiantes.

Algo muy importante fue que la docente se percató en este momento, fue que otro equipo, aparte del de Jazmín, tenían la misma respuesta con el argumento similar y dos equipos aparte del de Daniela coincidían que la tira más pequeña era la de tres pequeños de a ocho. Es decir, dos equipos de los cinco tenían la respuesta correcta y tres equipos tenían su respuesta errónea.

Al darse cuenta de lo anterior, la docente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Qué sugerencia tienen para poder solucionar este dilema?".* Melanie levantó la mano para decir: *"La planilla profesional nos puede ayudar*". La maestra dijo: *"Exactamente Melanie. Cómo no se me ocurrió antes".*

Posteriormente al comentario de Melanie, la docente indicó: *"Saquen su planilla para solucionar este problema".* Inmediatamente los alumnos sacaron de su mochila la planilla y cuando la tuvieron entre sus manos se dieron cuenta que la tira de un pequeño de a cuatro era más pequeña que la tira de tres pequeños de a ocho. Jazmín dijo: *"Sabíamos que teníamos la razón".* La maestra se dirigió a Jazmín para decirle:

> *Hicieron un buen trabajo, ahora me gustaría que me comentaras: ¿Cuántos pequeños de a ocho necesito para tener un pequeño de a cuatro?*

Jazmín observó su planilla y contestó: *"Necesita dos pequeños de a ocho para tener un pequeño de a cuatro".*

Luego de este comentario, Bryan levantó la mano para decir: *"Entonces por eso también tres pequeños de a ocho es más grande que un pequeño de a cuatro". "Exactamente Bryan"*, dijo la maestra. El alumno continuó diciendo: *"Con tres pequeños de a ocho formo un pequeño de a cuatro y me sobra uno". "Muy bien Bryan"* comentó la maestra.

Después del comentario de Bryan el resto del grupo observó cuidadosamente la planilla profesional confirmando lo que había dicho su compañero. Posteriormente se escucharon algunos comentarios como los siguientes: *"Tiene razón Bryan". "Es verdad".*

A continuación, la maestra tomó la palabra para hacer el siguiente comentario: *"Lo que acaba de encontrar Bryan es la equivalencia de lo que es un pequeño de a cuatro, es decir, lo mismo, pero representado de diferente manera".* La docente continuó diciendo: *"¿Y será la única equivalencia?".*

Apenas la maestra terminó de decir su comentario cuando Rafael ya tenía la mano arriba para decir lo siguiente: *"Ya encontré otra equivalencia, un pequeño de a dos es lo mismo que dos pequeños de a cuatro".* Muy bien Rafa, dijo la maestra. Inmediatamente Israel levantó la mano para comentar: *"Hay varios pequeños que es lo mismo que un pequeño de a dos"*. La maestra se dirigió a Israel para decirle: *"Yo no los veo".* El alumno con mucho entusiasmo dijo: *"Sí maestra, vea. Aparte de dos pequeños de a cuatro, también están tres pequeños de a seis".* La docente continuó diciendo: *"No me había percatado tienes razón Israel".* El alumno y el resto del grupo también se dieron cuenta que cuatro pequeños de a ocho, cinco pequeños de a diez y seis pequeños de a doce, eran equivalentes a un pequeño de a dos.

Lo anterior lo aprovecho la docente para hacer las siguientes igualdades:

$$\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{6}=\frac{1}{2} \qquad \frac{5}{10}=\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Con ayuda de la planilla los alumnos, concluyeron que era lo mismo.

Para continuar la sesión, la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente:

> *Ahora vamos a trabajar con algunas notaciones que ustedes tendrían que pensar muy bien su respuesta, porque no podríamos ayudarnos con la planilla para darles solución.*

La profesora continuó diciendo:

> *Voy a anotar cinco ejercicios en el pizarrón. Todos ustedes los resolverán en equipo, indicando qué notación es más grande, con ayuda de los símbolos, y posteriormente preguntaré la respuesta de cada uno de ellos. Cada equipo tendrá la oportunidad de dar respuesta a un ejercicio, pero yo indicaré quién responde el primero o quien responde el segundo, etcétera.*

Posteriormente a las indicaciones de la maestra, ella se dirigió al pizarrón para escribir los siguientes ejercicios.

1.- $\frac{15}{15} \quad \frac{19}{19}$ 2.- $\frac{31}{30} \quad \frac{19}{18}$ 3.- $\frac{39}{40} \quad \frac{14}{15}$ 4.- $\frac{8}{4} \quad \frac{27}{10}$ 5.- $\frac{7}{6} \quad \frac{3}{4}$

Cuando los alumnos se percataron de la dificultad del trabajo, solicitaron a la docente escribirlos en una hoja de su cuaderno para poder solucionarlos. La maestra comentó que no había problema. Los estudiantes comenzaron a escribir los ejercicios en la hoja y a trabajarlos, en este momento la docente sólo fue observadora del trabajo que llevaban a cabo los niños. La docente se percató de lo siguiente: El primer ejercicio lo resolvieron rápidamente, así como el tercero y el quinto. Pero el segundo y el cuarto costaron trabajo.

Después de un tiempo aproximado de diez minutos, la maestra se dirigió al grupo para decir lo siguiente: *"Es tiempo de escuchar sus respuestas. Me gustaría que el equipo de Leonardo nos comente cuál fue su respuesta en el primer ejercicio".* Leonardo respondió: *"Son iguales maestra".* La docente se dirigió al alumno para preguntarle: *"¿Por qué piensan eso Leonardo?"* Inmediatamente Ángel intervino para decir: *"Yo le puedo explicar".*

La docente sabía que a Leonardo le costaba trabajo expresarse y lo que menos quería era que el alumno no continuara con su mejora, en cuanto a lograr expresarse frente a sus compañeros. Así que la profesora se dirigió a Leonardo para preguntarle: *"¿Estás de acuerdo que tu compañero Ángel dé la explicación?"*

Inmediatamente Leonardo respondió: *"Sí maestra". "Muy bien Leonardo",* comentó la docente. Y continuó diciendo: *"Adelante Ángel con tu explicación".* El alumno ansioso por contestar dijo lo siguiente: "*Son iguales, porque con quince pequeños de a quince se hace una vara y lo mismo pasa con diecinueve pequeños de a diecinueve, se forma una vara". "Muy bien Ángel. ¿Tienes algo más que decir?",* preguntó la maestra al alumno. El estudiante dijo que no.

Después de la respuesta de Ángel, la docente se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *"¿Están de acuerdo con la respuesta del equipo de Leonardo y Ángel?"* Bryan levantó la mano para decir:

> *Nosotros también decimos que es igual, porque así como con nueve pequeños de a nueve se forma una vara. También con quince pequeños de a quince se forma una vara y también con diecinueve pequeños de diecinueve se forma una vara.*

A continuación la docente dijo:

> *Muy bien Bryan, entonces lo que tú quieres dar a entender es que si tengo el mismo número de pequeños en los que fue dividida la vara, siempre tendré una vara.*

El alumno contestó: *"Sí maestra". "Perfecto Bryan",* comentó la profesora.

Posteriormente, la docente solicitó a Leonardo que pasara a escribir el signo correspondiente entre las dos notaciones, quedando el primer ejercicio de la siguiente manera:

$$1.\ \frac{15}{15} = \frac{19}{19}$$

"Quince pequeños de a quince es igual que diecinueve pequeños de diecinueve", explicó la docente.

Cuando Leonardo terminó de escribir el signo de igual entre las notaciones, la docente se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Quién quiere dar la respuesta del ejercicio número dos?"* Ningún alumno dio señal de querer contestar, así que la profesora se dirigió nuevamente al grupo para cuestionar: *"¿Por qué se les dificultó contestar el ejercicio dos?"*. Fanny respondió: *"Es un ejercicio que no se parece a ninguno que hemos hecho"*. La maestra explicó:

> *No me había percatado de eso Fanny, pero bueno voy a tener más cuidado al momento de seleccionar los ejercicios.*

Rafael comentó: *"La verdad no le entendimos".* La maestra se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Algún otro comentario con respecto a qué es más grande, si treinta y un pequeños de a treinta o diecinueve pequeños de a dieciocho?"* Los alumnos contestaron que no. Así que la profesora dijo: *"Yo les voy a dar algunas pistas y ustedes van a darle solución al ejercicio".*

Los alumnos ya estaban entusiasmados en escuchar a la docente, así que la profesora dijo: *"Si a treinta y un pequeños de a treinta le quitan uno ¿cuántos pequeños de a treinta quedarían?"* Inmediatamente Ángel contestó: *"Quedarían treinta pequeños de a treinta"*. *"Muy bien Ángel. Y con treinta pequeños de a treinta ¿qué formo?". Preguntó la docente*. El alumno contestó: *"Pues una vara maestra".*

La profesora continuó diciendo:

> *Si hacemos lo mismo con diecinueve pequeños de dieciocho, le quitamos uno. ¿Cuántos pequeños de a dieciocho nos quedarían?*

Daniela respondió: *"Dieciocho pequeños de dieciocho y con ello hacemos una vara". "Muy bien Daniela",* comentó la maestra y continuó diciendo:

> *Ya sabemos que en cada una de las notaciones hay más de una vara, así que ahora se tendría que analizar cuál es más grande, si un pequeño de a treinta o un pequeño de a dieciocho, que es lo que tienen de más cada notación.*

No terminó de decir lo anterior la maestra, cuando Bryan interrumpió para decir lo siguiente:

> *Ya entendí maestra. Es algo similar a lo que hicimos anteriormente, solo que ahora es ver cuál tiene más que una vara y para eso hay que saber cuál es más grande, si un pequeño de a treinta o un pequeño de a dieciocho.*

"Exactamente Bryan", dijo la maestra. Rafael levantó la mano y dijo: *"Yo sé cuál es más grande".* La profesora comentó: *"Adelante Rafael, comenta a tus compañeros y a mí, quién es más grande"*. El alumno contestó:

> *Un pequeño de a dieciocho es más grande que un pequeño de a treinta, entonces diecinueve pequeños de a dieciocho es más grande que treinta y un pequeños de a treinta*.

La profesora le preguntó al estudiante: *"¿Estás seguro de eso Rafael?".* El alumno sin ningún problema comentó que sí estaba seguro. *"Muy buena respuesta Rafael"*, dijo la docente. A continuación la profesora se dirigió al grupo para preguntar si estaban de acuerdo con Rafael, a lo que algunos niños comentaron: "Sí, es lo que estaba pensando". Posteriormente la maestra invitó a Rafael para que escribiera el signo correspondiente entre las dos notaciones, quedando de la siguiente manera.

$$2.\text{-}\ \frac{31}{30} < \frac{19}{18}$$

Cuando Rafael terminó de escribir el signo menor qué (<) entre las notaciones, la docente solicitó que diera lectura a las notaciones. Rafael dijo lo siguiente: *"Treinta y un pequeños de a treinta es menor que diecinueve pequeños de a dieciocho". "Muy bien Rafael y gracias",* comentó la profesora.

Cuando Rafael terminó de dar lectura, Ángel inmediatamente levantó la mano para solicitar que se le diera la oportunidad de dar respuesta al tercer ejercicio. La maestra no tuvo ningún problema y dio la palabra al alumno para que contestara. Ángel dijo lo siguiente: *"Este ejercicio es algo similar a lo que hicimos anteriormente, a cada notación le falta uno para formar la vara".* La maestra interrumpió para decir, *"Muy bien Ángel,* estoy de acuerdo contigo". El alumno continuó diciendo: *"Pero un pequeño de a cuarenta es más pequeño que un pequeño de a quince".* El alumno hizo una pausa y preguntó, *"¿Voy bien verdad?"* La maestra comentó: *"Sí Ángel, un pequeño de a cuarenta es más pequeño que un pequeño de a quince. ¿Verdad niños?"* preguntó la docente al resto del grupo. Ellos contestaron afirmativamente.

Ya con más confianza continuó diciendo Ángel:

> *Entonces, como habíamos dicho antes, el más pequeño le falta menos para formar una vara y el que es más grande le falta más para llegar a una vara.*

La profesora volvió a interrumpir para decir con mucho entusiasmo, *"Muy bien Ángel, vas muy bien".* Finalmente el estudiante dijo: *"Entonces en mi equipo decimos que treinta y nueve pequeños de a cuarenta es más grande que catorce pequeños de a quince". "Excelente comentario Ángel, hicieron un buen trabajo"*, comentó la docente. También se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Están de acuerdo con el equipo de Ángel?"* La mayoría de los estudiantes contestaron que sí.

La maestra dijo:

> *Yo estoy totalmente de acuerdo con ustedes, equipo de Ángel, porque al momento de que a la notación le falta menos para formar una vara, pues lógicamente es más, que a la que le falta más, que es lo que pasó con treinta y nueve pequeños de cuarenta y catorce pequeños de a quince.*

La docente reiteró, *"Excelente comentario equipo de Ángel".*

Posteriormente, la maestra solicitó a Ángel que colocara el símbolo que correspondía entre las dos notaciones, el alumno con entusiasmo caminó hacia el pizarrón para colocar el símbolo, quedando de la siguiente manera:

$$3.\text{-}\ \frac{39}{40} > \frac{14}{15}$$

La profesora dio lectura a las notaciones de la siguiente manera:

> *El trabajo del equipo de Ángel quedaría así, treinta y nueve pequeños de a cuarenta es mayor que catorce pequeños de a quince.*

Después de que la docente dio lectura a la notación anterior, pasó al cuarto ejercicio. La pregunta que hizo la profesora sobre el ejercicio fue la siguiente:

> *Del ejercicio número cuatro, ¿cuál es más grande, ocho pequeños de a cuatro o veintisiete pequeños de a diez?*

Paulina levantó la mano y dijo: *"Nosotros creemos que el más grande es veintisiete pequeño de a diez".* La maestra cuestionó a la alumna, *"¿Qué les hace pensar eso Paulina?"* La estudiante contestó: *"Porque son veintisiete y el otro solo son ocho". "Muy bien Paulina"*, dijo la maestra. *"¿Alguien del equipo que quiera decir algo más?"*

Ningún integrante del equipo quiso hablar, así que la maestra se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Están de acuerdo con el equipo de Paulina?"* Axel levantó la mano y dijo: *"Sí estoy de acuerdo, solo que no puedo explicarlo".* La maestra comentó al alumno: *"Está bien si no es posible explicarlo. No te preocupes en un momento estoy segura que podrás hacerlo".*

Desde que los alumnos comenzaron a resolver este ejercicio, en el interior de los equipos la maestra se dio cuenta que les causó conflicto. Tanto el equipo de Paulina como el de Axel habían dado la respuesta correcta, pero lo que no habían hecho era dar una explicación aceptable, así que la maestra, invitó a que los estudiantes usaran su plantilla para contestar la siguiente pregunta: *"¿Cuántos pequeños de a cuatro necesito para construir una vara?"* La mayoría de los alumnos contestaron que cuatro pequeños. La maestra continuó preguntando: *"Si tengo ocho pequeños de a cuatro, ¿Cuántas varas podré formar?"* Inmediatamente los estudiantes contestaron: *"Dos varas".* La maestra continuó diciendo:

> *“Con las pistas que les acabo de dar y con ayuda de la planilla profesional, yo considero que ya podrán contestar el ejercicio. Me gustaría que lo hiciera el equipo de Paulina”.*

Después de unos minutos, Paulina levantó la mano y dijo:

> *Sí dimos la respuesta correcta. Pero lo que no dije es que con ocho pequeños de a cuatro se forman dos varas solamente y con veintisiete pequeños de a diez formamos más de dos varas, por eso es más grande.*

La alumna continuó argumentando: *“Creo que teníamos la idea, pero no estábamos seguros”.* Inmediatamente Axel levantó la mano para decir: *“No sabía que se podían hacer varias varas y no se me hubiera ocurrido”.* La maestra comentó: *“No te preocupes, ahora ya lo sabes que con varios pequeños puedes formar una, dos o más varas”.*

Posteriormente la maestra invitó a Paulina para que colocara el símbolo correspondiente. La estudiante pasó al pizarrón y escribió el símbolo, quedando de la siguiente manera:

$$4.\text{-}\ \frac{8}{4} < \frac{27}{10}$$

Para finalizar la resolución de los cinco ejercicios, la maestra se dirigió al grupo para decir: *“Nos falta contestar el último ejercicio”.* Inmediatamente Axel levantó la mano y dijo: *“Nosotros queremos contestarlo”.* La maestra comentó, *“Está bien Axel no hay problema”*. El alumno preguntó a la maestra: *“¿Podemos utilizar la plantilla para asegurar nuestra respuesta?”* La maestra contestó: *“Claro. Adelante Axel”.*

Después de unos minutos, Axel levantó la mano y dijo: *“Siete pequeños de a seis es más grande que tres pequeños de a cuatro”.* Inmediatamente la profesora preguntó, *“¿Que los hace estar tan seguros de eso Axel?”.* El alumno argumentó:

> *Porque con seis pequeños de a seis hacemos una vara y con tres pequeños de a cuatro no formamos ni una, nos faltaría. Aparte tenemos siete pequeños de a seis y con eso formamos una vara y nos sobra uno, por eso es más grande.*

Después de la intervención de Axel, la profesora comentó:

> *Lo que tú quieres dar a entender es que con siete pequeños de a seis se forma más de una vara y con tres pequeños de a cuatro no formas ni una vara.*

Posteriormente la docente se dirigió al grupo para preguntar: *“¿Están de acuerdo?”* Los alumnos al observarlo en la planilla y con el argumento de su compañero, confirmaron que sí estaban de acuerdo. La docente agradeció la participación del equipo de Axel y fue él, el alumno asignado para escribir el signo correspondiente entre las dos notaciones, quedando de la siguiente manera:

$$5.\text{-}\ \frac{7}{6} > \frac{3}{4}$$

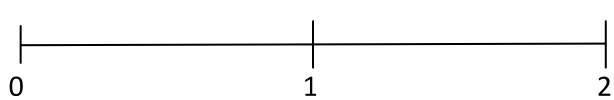
Después de que Axel escribió el símbolo entre las dos notaciones, la maestra solicitó que se diera lectura al ejercicio, los estudiantes lo hicieron en coro diciendo lo siguiente: *“Siete pequeños de a seis es mayor que tres pequeños de a cuatro”. “Muy bien niños, son ustedes muy amables”,* comentó la docente.

5.18.4. Fracciones en la recta numérica

Después de que se dio lectura al último ejercicio, la maestra se dirigió al pizarrón para trazar una línea. A continuación se dirigió al grupo para preguntar: *“¿Qué se imaginan que es?”,* señalando la línea que había trazado. La respuesta de los estudiantes fue: *“Es una línea”.* La maestra reiteró: *“Tienen que mirar con ojos de niños observadores”.* Pero no hubo respuesta de los estudiantes, así que la maestra comentó lo siguiente:

> *Muy bien, en vista de que ustedes no pueden decirme qué es lo que yo dibujé, se los voy a comentar. Sí es una recta, pero es una recta mágica que representa en este caso dos varas.*

Posteriormente la maestra se dirigió al pizarrón para incluir marcas y números en la línea. Colocó en un primer momento el número cero, posteriormente dijo, *“Hasta aquí representaré una vara”* y colocó el numero uno. Por último escribió el numero dos y comentó, hasta aquí llegará mi segunda vara. Posteriormente la docente se dirigió al grupo para preguntar lo siguiente: *“¿Se imaginan para qué me va a servir esta representación?”* Braulio explicó: *“Va a escribir números”*. La maestra contestó: *“Muy buena respuesta Braulio”.* Y continuó diciendo, *“Braulio lo adivinó, son números que ustedes han trabajado y los vamos a colocar en esta recta mágica que representa cierta cantidad de varas”.* La maestra se refirió a la recta que había trazado en el pizarrón, misma que se muestra a continuación.



La maestra se dirigió al grupo y dijo lo siguiente:

> *Si quisiera colocar la notación cinco pequeños de a tres en la recta mágica que acabo de trazar, aproximadamente, ¿por dónde podría colocar la notación en la recta?*

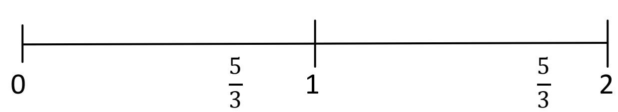
Después de la pregunta que hizo la profesora, ningún estudiante respondió. De manera que comentó lo siguiente:

> *Sé que están pensando su respuesta. ¿Qué les parece si les doy unos minutos para que piensen y posteriormente alguien de ustedes pasa al pizarrón a colocar la notación? ¿Les parece?*

Los estudiantes un poco confundidos comentaron, que sí estaban de acuerdo y la docente procedió a dar unos minutos para que pensaran su respuesta.

Después de unos minutos, la profesora invitó a Adriana a que colocará la notación donde ella creía que debiera estar. La estudiante sin ningún problema, se dirigió al pizarrón y colocó la notación de cinco pequeños de a tres antes de una vara o un entero.

Después de que esto pasó, la maestra se dirigió al grupo para preguntar: *"¿Están de acuerdo con Adriana?"* Bryan levantó la mano para decir: *"Yo no estoy de acuerdo con Adriana".* La maestra se dirigió al estudiante para preguntarle: *"¿Por qué no estás de acuerdo con tu compañera?"* Bryan respondió, *"Lo que pasa maestra es que cinco pequeños de a tres hacen más de una vara".* La maestra continuó cuestionando al estudiante. *"¿Entonces tú dónde colocarías cinco pequeños de a tres?"* Y continuó diciendo la docente: *"¿Qué te parece si pasas a colocar la notación donde tú consideres?".* El estudiante se dirigió al pizarrón para escribir la notación. La recta quedó de la siguiente manera:



La representación de cinco pequeños de a tres ($\frac{5}{3}$), que se encuentra antes de una vara, fue la representación que escribió Adriana y la que se encuentra antes de dos varas, fue la representación que escribió Bryan. Después de que el estudiante escribió la representación en la recta, la maestra se dirigió al grupo, "*¿Hay otra respuesta aparte de la de Adriana y Bryan?".* Los alumnos contestaron que no, así que la maestra comentó que tenían que elegir la respuesta correcta. El resto del grupo, optó por seleccionar la respuesta de Bryan, ya que coincidieron en que cinco pequeños de a tres era más que una vara y casi dos. Después de la decisión que tomó el grupo, la representación quedó de la siguiente manera:

Para que los alumnos comprendieran la forma adecuada de ubicar fracciones en la recta numérica, la docente consideró necesario seguir trabajando tres ejercicios más, ya que a algunos alumnos, como Adriana, mostraron dificultad para la ubicación de las fracciones en la recta numérica.

Los ejercicios que la maestra propuso, fueron los siguientes:

$$\frac{23}{11} \qquad \frac{18}{5} \qquad \frac{13}{3}$$

Después de escribir los ejercicios en el pizarrón, la docente solicitó a los estudiantes que los resolvieran en el interior del equipo y posteriormente algunos de ellos pasarían al pizarrón a explicar su respuesta. Otra de las indicaciones que dio la docente fue que cada uno de los equipos construiría las rectas y éstas deberían coincidir con la notación que tenían que representar.

A continuación de las indicaciones, los estudiantes comenzaron a dar solución a los ejercicios. La maestra comenzó a observar el trabajo que realizaba cada equipo y en ocasiones daba algunas sugerencias para lograr la solución. La profesora se percató que la mayoría de los estudiantes optaron primero por saber cuántas varas se formaban en cada una de las notaciones y posteriormente elaboraban la recta para colocar la notación.

Después de unos diez minutos aproximadamente, la profesora observó que la totalidad del grupo había terminado y solicitó al equipo de Adriana que explicará su procedimiento de resolución, ya que la profesora había observado su trabajo y logró ver un procedimiento muy significativo.

Cuando Adriana estuvo lista para dar a conocer el trabajo de su equipo, ella comentó lo siguiente:

> *Para saber cuántas varas se formaban con veintitrés pequeños de a once hicimos esto: una vara es igual a once pequeños de a once, dos varas es igual a veinte dos pequeños de a once.*

Cuando Adriana terminó de dar su explicación, la maestra, invitó a la estudiante a que lo escribiera en el pizarrón, quedando de la siguiente manera:

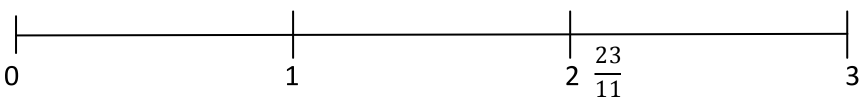
1 vara $=$ 11 pequeños de a once

2 varas $=22$ pequeños de a once

Después de escribir lo anterior, la alumna dijo:

> *Si tenemos veintitrés pequeños de a once, entonces formaremos dos varas y nos sobraría un pequeño de a once, entonces tenemos que construir una recta con tres varas, para que quepa lo que vamos a poner.*

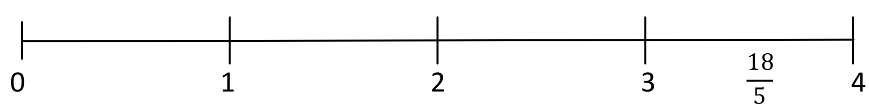
Posteriormente la alumna construyó una línea, donde se representaban tres varas para colocar la notación de veintitrés pequeños de a once, como se muestra en la siguiente recta numérica:



Cuando Adriana terminó de dar la explicación del ejercicio, el resto de los equipos coincidió con la respuesta, así como con la explicación.

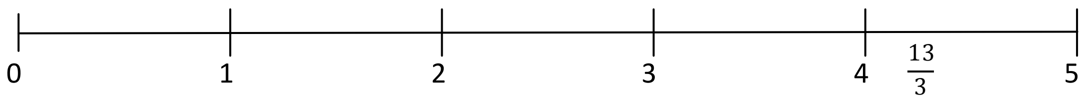
Después de que el equipo de Adriana concluyó su trabajo, la maestra le solicitó al equipo de Braulio que pasara a explicar su trabajo. El alumno comentó que ellos sólo habían pensando, que para una vara necesitaban cinco pequeños de a cinco, dos varas necesitaban diez pequeños de a cinco, para tres varas necesitaban quince pequeños y sobraban tres pequeños, que no alcanzaban a formar otra vara. Tomando en cuenta lo anterior, los estudiantes concluyeron que necesitaban una línea con más de tres varas, es decir, de cuatro varas.

Después de su explicación, el alumno trazó la línea, donde representaba cuatro varas y posteriormente colocó la notación.



Cuando Braulio terminó de comentar el trabajo de su equipo, tocó el turno al equipo de Melanie. El primero en participar fue Rafael. Él comentó que ellos fueron construyendo la recta, pensando que entre el cero y el uno había tres pequeños de a tres, entre el uno y el dos había otros tres pequeños de a tres, entre el dos y el tres había otros tres pequeños de a tres, entre el tres y el cuatro había otros tres pequeños. Entonces el equipo de Rafael y Melanie concluyeron que con cuatro varas tenían doce pequeños de a tres, pero necesitaban colocar trece pequeños de a tres, así que necesitaban aumentar otra vara para poder colocar trece pequeños de a tres.

A continuación de que terminó de dar la explicación Rafael, Melanie construyó la recta y escribió la notación como se muestra a continuación:



A continuación, la profesora tomó la palabra y dijo:

> *Nunca se me hubiera ocurrido lo que ustedes hicieron. Es sorprendente, ya que al mismo tiempo que construyen la recta están pensando cuántos pequeños de a tres tienen, cuántos necesitan y cuántos les hacen falta. Son tres cosas que ustedes fueron pensando al mismo tiempo, para poder resolver el ejercicio.*

La maestra continuó diciendo: *"Agradezco el gran esfuerzo que realizaron cada uno de ustedes para dar solución a los ejercicios, así como su valiosa participación".* Y continuó diciendo: *"Para cerrar este valioso trabajo, me gustaría que cada uno de ustedes eligiera el procedimiento que les parece más favorable para ubicar alguna notación en una recta".* La mayoría de los estudiantes comentó que el procedimiento que les pareció más adecuado fue el que hizo el equipo de Adriana, ya que así no podían equivocarse. La profesora explicó que respetaba su decisión y que estaba de acuerdo con ellos.

Con este comentario la profesora dio por terminada la sesión. La docente concluyó lo siguiente: Los estudiantes lograron establecer la relación de orden entre dos pequeños de diferente tamaño (un pequeño de a *n* con un pequeño de a *n*). De lo anterior se percató la maestra cuando Kevin dijo:

> *Es bien fácil maestra, el más grande es el pequeño de a cuatro, porque solo se repite cuatro veces en la vara y el pequeño de a ciento se tendría que repetir cien veces y tendría que ser más pequeño.*

Otra cosa muy importante que concluyó la profesora es que los alumnos pensaban en la vara como el entero y sabían que ese entero se construye por once pequeños de a once o cinco pequeños de a cinco o tres pequeños de a tres o *n* pequeños de a *n.* También la docente concluyó que los estudiantes comprendieron que para poder tener trece pequeños de a tres se necesitan varias varas o enteros.

Otra de las conclusiones a la cual llegó la profesora es que los alumnos lograron dar respuesta acertada a la comparación de dos notaciones menores o mayores que una vara, después de que hubo un análisis y reflexión a nivel grupal con la utilización de la planilla. Es decir, es muy importante la puesta en común a nivel grupal y más aún cuando hay dos respuestas diferentes.

La profesora también concluyó que el recurso de la planilla profesional, que se siguió utilizando en esta sesión, fue pieza clave para que los estudiantes lograran resolver y argumentar sus respuestas.

También la maestra concluyó que los estudiantes adoptaron sin ningún problema la representación formal de las fracciones, sin dejar a un lado la esencia del trabajo realizado durante el desarrollo de la propuesta, es decir, los alumnos continuaron hasta el final considerando a $\frac{7}{6}$ como siete pequeños de a seis. Por último, se concluyó que los signos $<$, $>$ o $=$ (menor que, mayor que o igual a), sirvieron de manera óptima para establecer la relación de orden entre dos notaciones.

CAPÍTULO VI. EVALUACIÓN FINAL

Al finalizar el experimento de enseñanza, se le aplicó al grupo una prueba final (ver Anexo 4), la cual fue dividida en tres secciones: duplicación directa y mitad inversa, ubicación de notaciones mayores que uno en la recta numérica, y relación de orden entre notaciones de fracciones en el contexto de desigualdad. A continuación se presenta el análisis de esta evaluación final, el cual se realiza en dos dimensiones. En la primera dimensión se dan a conocer los resultados del grupo completo en las tres secciones en que fue dividida la prueba. Se describen cada uno de los reactivos, así como el porcentaje de alumnos que contestaron correctamente cada uno de ellos.

En la segunda dimensión se analizan las respuestas por alumno, identificando dos grupos (A y B), de acuerdo a las respuestas dadas en cada uno de los 28 reactivos.

6.1. Primera dimensión

La prueba final escrita fue contestada por los 20 estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza. Entre ellos estuvo el alumno que dejó en blanco la prueba diagnóstica. En esta ocasión respondió el examen con el apoyo de la profesora.

El objetivo esencial de la docente de guiar la prueba final (ver Anexo 4) a este estudiante fue para indagar en él los aprendizajes adquiridos como resultado de la propuesta. Se tuvo que llevar a cabo de esta manera porque el alumno al recibir la prueba final no hacía por contestarla, como el resto de sus compañeros. Lo profesora había visto el gran avance que tuvo el niño durante el trabajo de la propuesta, así que tomó la decisión de trabajar con él de manera personalizada para dar respuesta a la prueba. A continuación se detalla en qué consistió el apoyo que le dio la docente a este alumno.

6.1.1. Duplicación

Los reactivos de la primera sección y el número y porcentaje de respuestas correctas se muestran en la Tabla 18 y en el anexo 4 se encuentra la prueba final escrita que se aplico a los estudiantes.

Tabla 18. Reactivos y porcentajes de respuestas correctas de la primera sección de la prueba final.

No. De reactivo	**Reactivo**	**Porcentaje de respuestas correctas**
1	Mateo tiene 180 pesos y Juan tiene el doble. ¿Cuánto dinero tiene Juan?	95 % (N=19)
2	Emilio tiene 400 pesos y tiene la mitad que Alberto. ¿Cuánto tiene Alberto?	85 % (N=17)
3	12 paletas cuestan 60 pesos. ¿Cuánto cuestan 24 paletas?	95 % (N=19)

Con los resultados de la Tabla 18, se concluye que aunque no hubo un dominio total del grupo en cuanto al doble de un número entero y su mitad, si aumentó de manera muy considerable la cantidad de alumnos que contestaron correctamente los reactivos, a diferencia a la prueba diagnóstica aplicada al inicio de la propuesta. En la prueba diagnóstica se les pidió que contestaran lo siguiente: Juan tiene 1000 pesos y tiene el doble que Roberto ¿Cuánto tiene Roberto?[23] Y solo el 20 % del grupo contestó correctamente. Una consigna similar se dio en la prueba final con el primer reactivo que se muestra en la tabla, pero ahora sólo un alumno no contestó correctamente.

[3] Una vez concluido el análisis, este problema es más fácil y la comparación no es justa.

6.1.2. Fracciones en la recta numérica

En la segunda sección se solicitó que ubicaran las siguientes fracciones en la recta numérica, $\frac{16}{11}$ $\frac{10}{3}$ $\frac{15}{5}$

Las pruebas escritas nos dan una idea de qué conocimientos tienen los alumnos y cuáles faltan por reafirmar. En esta sección considero que los alumnos que contestaron incorrectamente estos reactivos, no es que no supieran o no hubieran comprendido, de hecho el único alumno que no contestó correctamente el reactivo cuatro, fue el que en la prueba diagnóstica obtuvo un alto puntaje, además de que durante la propuesta tuvo excelentes participaciones. Con esto puedo pensar que los alumnos que contestaron erróneamente estos reactivos, fue por algún descuido y no por falta de comprensión.

Tabla 19. Reactivos y porcentajes de respuestas de los reactivos 4, 5 y 6.

No. De reactivo	**Reactivo**	**Porcentaje de respuestas correctas**
4	$\frac{16}{11}$	95 % (19 alumnos)
5	$\frac{10}{3}$	85 % (17 alumnos)
6	$\frac{15}{5}$	90 % (18 alumnos)

6.1.3. Relación de orden entre notaciones

En la tercera sección se les pidió a los alumnos que colocaran el signo mayor que $>$, menor que $<$ o igual $=$ según correspondiera. Es importante explicar que el significado de los signos se trabajó desde la aplicación de la prueba diagnóstica con números naturales, así como durante la propuesta de aprendizaje con notaciones fraccionarias.

Las notaciones que se les pidió a los estudiantes que compararan y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 20.

Como se puede observar en la Tabla 20, del reactivo siete al reactivo quince se planteó establecer la relación de orden entre dos pequeños de diferente tamaño. También se puede ver que la totalidad del grupo no logra contestar correctamente estos nueve reactivos.

Tomando en cuenta estos resultados y los obtenidos en la prueba diagnóstica, puedo pensar que hubo un avance muy notable en la comprensión de estas ideas, aunque la totalidad del grupo no haya contestado acertadamente.

En la prueba diagnóstica se observó que menos de la mitad del grupo podía resolver este tipo de reactivos, mientras que en esta prueba final, solo cuatro alumnos de los veinte no logró contestar todos correctamente. Pero hay otra cosa muy importante que logran contestar acertadamente todos los alumnos en otros reactivos, que a mi parecer tienen un grado de dificultad alto a diferencia de las pequeños unitarios.

Por ejemplo, el reactivo 18 ($\frac{400}{3}$ vs $\frac{3}{400}$), los estudiantes tienen que analizar cuidadosamente cada una de las notaciones para determinar qué signo colocar entre ellas y logran hacerlo correctamente. En este reactivo los alumnos tuvieron que haber comprendido que con $\frac{400}{3}$ forman muchas varas y con $\frac{3}{400}$ no forman ni una vara.

Otro de los reactivos que la totalidad del grupo logra contestar fue el reactivo 20 y que desde mi perspectiva también tiene un grado de dificultad más alto que una fracción unitaria. En el ejercicio los alumnos comprendieron que $\frac{50}{100}$ es menor que $\frac{49}{13}$, porque con $\frac{50}{100}$ no se logra formar una vara y con $\frac{49}{13}$ pueden formar más de una vara.

Con lo anterior y con el trabajo que se realizó durante la aplicación de la propuesta de aprendizaje, puedo pensar que los estudiantes que no logran contestar correctamente algunos reactivos de esta tercera sección, fue porque faltó que tuvieran más cuidado al momento de dar respuesta al ejercicio, no porque no contaran con los elementos conceptuales para hacerlo.

Tabla 20. Reactivos y porcentajes de respuestas de los reactivos 7 al 28 de la prueba final.

No. de reactivo	Reactivo	Porcentaje de respuestas correctas
7	$\frac{1}{12}$ vs $\frac{1}{4}$	100% (20 alumnos)
8	$\frac{1}{7}$ vs $\frac{1}{8}$	95 % (19 alumnos)
9	$\frac{1}{113}$ vs $\frac{1}{8}$	100 % (20 alumnos)
10	$\frac{1}{115}$ vs $\frac{1}{108}$	100 % (20 alumnos)
11	$\frac{1}{5}$ vs $\frac{1}{3}$	95 % (19 alumnos)
12	$\frac{1}{6}$ vs $\frac{1}{9}$	100 % (20 alumnos)
13	$\frac{1}{400}$ vs $\frac{1}{4}$	100 % (20 alumnos)
14	$\frac{1}{90}$ vs $\frac{1}{80}$	100% (20 alumnos)
15	$\frac{1}{199}$ vs $\frac{1}{200}$	90 % (18 alumnos)
16	$\frac{3}{3}$ vs $\frac{7}{6}$	75 % (15 alumnos)
17	$\frac{4}{3}$ vs $\frac{48}{50}$	95 % (19 alumnos)
18	$\frac{400}{3}$ vs $\frac{3}{400}$	100% (20 alumnos)
19	$\frac{11}{12}$ vs $\frac{12}{11}$	80 % (16 alumnos)
20	$\frac{50}{100}$ vs $\frac{49}{13}$	100 % (20 alumnos)
21	$\frac{6}{5}$ vs $\frac{8}{9}$	85 % (17 alumnos)
22	$\frac{6}{6}$ vs $\frac{5}{4}$	95 % (19 alumnos)
23	$\frac{2}{2}$ vs $\frac{11}{12}$	100 % (20 alumnos)
24	$\frac{6}{7}$ vs $\frac{13}{10}$	80 % (16 alumnos)
25	$\frac{2}{3}$ vs $\frac{13}{4}$	85 % (17 alumnos)
26	$\frac{11}{5}$ vs $\frac{11}{6}$	95 % (19 alumnos)
27	$\frac{4}{3}$ vs $\frac{4}{30}$	95 % (19 alumnos)
28	$\frac{3}{4}$ vs $\frac{5}{6}$	75 % (15 alumnos)

6.2. Segunda dimensión

En la segunda dimensión se clasifica a los 20 alumnos en dos grupos(A y B).

6.2.1. Grupo A

El Grupo A, el de mejor desempeño, estuvo conformado por 18 estudiantes de los 20 que participaron en la instrumentación de la propuesta de aprendizaje. La mayoría de los estudiantes contestaron correctamente la primera parte de la prueba final; es decir, reconocieron la duplicación y el cálculo de mitad en una situación problemática.

En la segunda sección de la prueba un estudiante de los dieciocho no ubicó la notación $\frac{16}{11}$ donde correspondía, pero sí lo hizo en los dos ejercicios restantes. Asimismo una alumna escribió la notación $\frac{10}{3}$ dos veces en la recta numérica, en una de ellas sí ubicó correctamente. Lo anterior hace suponer que primero escribió la notación en el lugar equivocado, después se dio cuenta y la escribió en el lugar correcto, olvidando borrar la primera. También esta misma alumna contestó erróneamente el reactivo seis de la prueba, donde se le solicitó que escribiera la notación $\frac{15}{5}$ en la recta numérica. La estudiante ubicó la notación casi en el lugar que le correspondía. Con lo anterior deduzco que solo le faltó a la estudiante una poca de ayuda y precisión para lograr contestar correctamente,

La mayoría del Grupo A logró entender que para ubicar $\frac{10}{3}$ es necesario hacerlo después de tres varas. Así como también comprendieron que para ubicar correctamente $\frac{15}{5}$ es necesario hacerlo donde indica tres varas en la recta numérica.

En la tercera sección algunos estudiantes del Grupo A tuvieron error en ciertos reactivos de la prueba. Dos alumnos tuvieron errores en las desigualdades,

$\frac{4}{3}$ vs $\frac{48}{50}$ y $\frac{3}{4}$ vs $\frac{5}{6}$. También tres alumnos de este grupo tuvieron error en el ejercicio de $\frac{3}{4}$ vs $\frac{5}{6}$. Probablemente supusieron que tres cuartos es más grande que cinco pequeños de a seis, pensando que los pequeños de a cuatro son más grandes que los pequeños de a seis, pero no se consideraron la cantidad de pequeños de a cuatro, ni en la cantidad de pequeños de a seis que se tenían. Otro de los reactivos en que tuvieron error dos de los estudiantes del Grupo A en esa misma suposición, fue el siguiente: $\frac{3}{3}$ vs $\frac{7}{6}$. Considero que pasó lo mismo que el ejercicio anterior, ya que no se percataron que con tres pequeños de a tres se forma un entero y con siete pequeños de a seis se forma más de una vara.

De acuerdo con el análisis de la prueba se puede decir que la mayoría de este grupo logró comprender la desigualdad de fracciones unitarias, propias e impropias, ya que consiguieron contestar correctamente la mayoría de los reactivos de la tercera parte de la evaluación final, colocando los signos signo mayor que, menor que e igual donde correspondía. Además, surgió algo muy interesante a partir de los resultados de la prueba. En este grupo, en la tercera sección de la evaluación, se nota una fuerte orientación hacia el orden inverso de las fracciones unitarias: mientras más grande es el número en el denominador, menos grande es la fracción; o, mientras más veces cabe el pequeño en la vara, menos grande es. Solo faltó que se analizaran adecuadamente el numerador, es decir, la cantidad de cuartos o de sextos.

El alumno que durante la prueba recibió apoyo personalizado de la maestra fue ubicado en este Grupo A. A continuación se detalla cómo fue el apoyo que le dio la profesora.

Para la primera parte de la evaluación la profesora solicitó que el alumno diera lectura a cada uno de los reactivos y ella hacía énfasis en las palabras clave como doble y mitad. En el primer reactivo se le solicitó al alumno lo siguiente: Mateo tiene 180 pesos y Juan tiene el doble. ¿Cuánto dinero tiene Juan? La palabra que enfatizó la docente fue doble, después de esto el alumno llevó a cabo una suma para dar su resultado.

En el segundo reactivo se le solicitó que diera respuesta a lo siguiente: Emilio tiene 400 pesos y tiene la mitad que Alberto. La maestra enfatizó la palabra mitad y el alumno no necesitó de alguna operación simplemente escribió el resultado. El tercer reactivo es el siguiente: 12 paletas cuestan 60 pesos. ¿Cuánto cuestan 24 paletas? Después de dar lectura tanto el alumno como la docente al ejercicio, el niño se dio cuenta que veinticuatro era el doble de doce, por tal motivo el costo de las veinticuatro paletas tenía que ser el doble del costo de las doce paletas. El estudiante simplemente escribió la respuesta, no necesitó de operaciones.

En la segunda parte de la prueba final se le solicitó al estudiante que colocara las siguientes fracciones en la recta numérica, las fracciones fueron las siguientes: $\frac{16}{11}$, $\frac{10}{3}$ y $\frac{15}{5}$. La profesora hizo las siguientes preguntas, para orientar al estudiante lo que tenía que hacer. La primera pregunta fue: *"¿Si tengo dieciséis pequeños de a once cuantas varas formaré?"* La segunda pregunta fue: *"¿Será más de una vara o menos de una vara?"*. El alumno contestó de manera verbal lo siguiente: *"Con dieciséis pequeños de a once se forma más de una vara"*. Después de que el alumno daba una respuesta correcta la profesora aplaudía su esfuerzo y seguía cuestionando. La maestra continuaba preguntando *"¿Cuántos pequeños de a once necesito para formar una vara?"* El alumno se quedó callado y después de un momento contestó *"Pues once, maestra".* Ya que la maestra notaba confianza en el alumno para contestar al ejercicio, le solicitaba que colocara la fracción en la recta numérica donde él creyera conveniente.

La estrategia anterior la profesora la utilizó para que el alumno diera respuesta a los reactivos cinco y seis, que se le solicitó colocar las fracciones $\frac{10}{3}$ y $\frac{15}{5}$ en la recta numérica.

En la tercera parte de la prueba final, donde se le pidió al estudiante que comparará fracciones, la docente utilizó el material manipulado durante el trabajo de la propuesta de aprendizaje. Este material fue: La vara, el pequeño de a dos, el pequeño de a tres, el pequeño de a cuatro, el pequeño de a seis y la hoja de profesional. Cuando el alumno junto con la maestra contestaban la tercera parte de la prueba, la docente se percató que los reactivos que le presentaron más dificultad al estudiante, en la tercera parte de la prueba, fueron los siguientes: reactivo 10 ($\frac{1}{115}$ vs $\frac{1}{108}$), reactivo 14 ($\frac{1}{90}$ vs $\frac{1}{80}$) y reactivo 15 ($\frac{1}{199}$ vs $\frac{1}{200}$).

Para orientar al estudiante en el reactivo 10, la maestra llevó a cabo lo siguiente: Primero hizo que el alumno comprendiera cuál de los dos denominadores era el más grande y cuál más pequeño. Posteriormente le recordó al niño qué pasaba si un pequeño era más grande, si se repetía más o menos veces en la vara y qué pasaba si el pequeño era más pequeño. Para hacerlo real, la docente puso el ejemplo del pequeño de a dos con el pequeño de a cuatro, ya que era un material que tenía físicamente el alumno. Solicitó al alumno tomar la vara y el pequeño de a dos y le preguntó *"¿Cuántas veces se repite el pequeño de a dos en la vara?"* El alumno inmediatamente contestó: *"Dos veces".* Posteriormente la maestra le solicitó que tomara el pequeño de a cuatro y le preguntó ¿Cuántas veces se repite el pequeño de a cuatro en la vara? El estudiante contestó: *"Cuatro veces"*. Después que el alumno dio respuesta, la maestra preguntó: *"¿Quién es más grande el pequeño de a dos o el pequeño de a cuatro?"* El alumno inmediatamente contestó que el pequeño de a dos era el más grande. Cuando el alumno terminó de comentar su respuesta, la maestra dijo: *"Con lo que tú me acabas de decir puedo concluir que entre más grande sea mi pequeño menos veces se va a repetir en la vara como lo que pasa con el pequeño de a dos y entre más pequeño sea mi pequeño, más veces se repetirá en la vara".* Inmediatamente que la maestra terminó de decir su conclusión el alumno comentó: *"Esto ya la había dicho uno de mis compañeros".* El comentario de la docente fue: *"Tienes razón, no me había percatado de esto, sin querer dije palabras de tu compañero".*

Después de la estrategia anterior, la maestra invitó al estudiante que escribiera los signos mayor que $>$, menor que $<$ o igual a $=$ según correspondiera. Tomando en cuenta lo que se trabajó anteriormente, sus comentarios, y la conclusión a la cual se había llegado. En algunos momentos de la prueba la profesora recordaba al estudiante lo visto durante el trabajo de la propuesta, como por ejemplo, cómo eran los pasos de una persona qué medía el ancho del salón y medía tres pasos y cómo eran los pasos de una persona que medía veinte pasos, lo anterior para que el alumno tuviera claro que entre más grande es el pequeño menos veces se repite en el entero y entre más pequeño es más veces se repite.

A continuación de que el alumno había terminado de escribir los signos mayor que$>$, menor que $<$ o igual $=$ según correspondiera en las desigualdades de fracciones unitarias que eran los reactivos del siete al quince, se dio pasó a contestar del reactivo 16 al 28. En todo momento la maestra cuestionaba al alumno y él daba sus respuestas o algún otro comentario. Uno de los comentarios muy significativos que hizo el alumno fue cuando tocó el turno de dar respuesta al reactivo 18 ($\frac{400}{3}$ vs $\frac{3}{400}$) La profesora preguntó *"¿Quién crees que es más grande, cuatrocientos pequeños de a tres o tres pequeños de a cuatrocientos?".* Inmediatamente el alumno dijo: *"Con cuatrocientos pequeños de a tres hacemos muchas varas y con tres pequeños de a cuatrocientos no hacemos ninguna".* La maestra de manera irónica preguntó entonces: *"¿Quién es más grande?".* El alumno dijo: *"Pues cuatrocientos pequeños de a tres"* e inmediatamente escribió el signo correspondiente.

Continuando con la descripción de la evaluación final, en la primera sección de la prueba se indagó sobre los conocimientos de los alumnos sobre la duplicación directa e inversa, así. En la segunda sección se evidenciaron los aprendizajes de las fracciones impropias, ubicándolas en la recta numérica. Y en la tercera sección se comprobaron los conocimientos formales de desigualdad de fracciones.

6.2.2. Grupo B

El Grupo B, el que tuvo el desempeño menos favorable, se conformó por dos niños de los veinte que participaron en la prueba. Este grupo se caracterizó en tener varios errores en la tercera sección de la prueba.

Uno de los dos alumnos de este grupo sólo logró contestar correctamente un reactivo de los tres de la primera sección. El otro estudiante sí logró contestar correctamente los tres primeros reactivos de esta sección.

En la segunda sección de la prueba, los dos alumnos de este grupo lograron colocar la fracción $\frac{16}{11}$ correctamente en la recta numérica. En el reactivo cinco, que es donde se les solicitó colocar $\frac{10}{3}$ en la recta numérica, un alumno de los dos lo hizo de manera errónea, colocando la fracción entre cuatro enteros y cinco enteros. En el reactivo seis se les solicitó colocar la fracción $\frac{15}{5}$. Un alumnos de los dos no logró hacerlo correctamente, escribió la fracción en dos enteros, cuando debió de hacerlo en tres enteros.

Con lo anterior puedo suponer una cosa muy importante con estos dos alumnos, que es necesario continuar trabajando más sobre el tema de fracciones impropias hasta asegurarnos que han comprendido el contenido. Con el trabajo realizado durante la propuesta de aprendizaje y sus resultados de la prueba final, puedo conjeturar que estos dos estudiantes, ya sabían que las fracciones impropias representan más de un entero y que entre más veces se repita el pequeño en la vara más pequeño va a ser y entre menos veces se repita más grande va a ser, solo faltaría que su comprensión fuera más sólida en los diferentes temas de fracciones para que acertaran en colocar la fracción en la recta numérica.

En la tercera sección de la prueba, los dos alumnos clasificados en este grupo lograron contestar correctamente la mayoría de los reactivos de desigualdades de fracciones unitarias. Solo un alumno tuvo un error en el ejercicio $\frac{1}{7}$ vs $\frac{1}{8}$. El otro estudiante tuvo error en los ejercicios $\frac{1}{5}$ vs $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{199}$ vs $\frac{1}{200}$. En las desigualdades con fracciones propias e impropias tuvieron más errores. Un alumno tuvo cinco errores y otro estudiante seis errores. Con las respuestas de estos alumnos puedo conjeturar que están en proceso de lograr entender las desigualdades de fracciones unitarias, propias e impropias.

Tal vez estos dos estudiantes, del Grupo B, no alcanzaron el nivel del resto de sus compañeros, pero lo que sí es cierto es que hubo un gran avance en ellos, si se compara con respecto a sus conocimientos previos que tenían antes de iniciar el experimento de enseñanza.

Al analizar los resultados de la evaluación diagnóstica estos dos alumnos fueron clasificados como alumnos que tenían poco conocimiento del sistema decimal, ya que perecía que no tenían claro los números de dos cifras. En el momento que se les solicitó en uno de los reactivos de la evaluación diagnóstica, que escribieran el antecesor de 40 uno de los estudiantes escribió que el antecesor era 49, situación que es incorrecta. En otro reactivo se les pidió que escribieran el antecesor del número 889 y un estudiante del grupo B escribió 788, respuesta que es incorrecta. También los estudiantes tenían poca noción de la duplicidad directa e indirecta, así como en el tema de proporcionalidad, ya que no contestaron correctamente lo que se les solicitó. Otro de los temas que pareciera que no tenían claro los estudiantes del Grupo B fue el de fracciones en el contexto de magnitud y el de desigualdades. En este último tema ambos estudiantes no lograron establecer la igualdad entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$. Así como tampoco logran contestar correctamente la desigualdad entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{2}$.

En la prueba final, los dos alumnos del Grupo B, pareciera que logran reconocer que las fracciones impropias van después del uno y también comprendieron las fracciones unitarias sin problema.

En general, se nota un avance muy significativo de todo el grupo respecto a la evaluación realizada antes del experimento de enseñanza. Como se muestra en los resultados, la totalidad del grupo parece haber comprendido la relación de orden inverso de las fracciones unitarias. Además, la gran mayoría de los alumnos desarrollaron la capacidad de juzgar, con relativa facilidad, el tamaño que representa una fracción como siendo menor qué, mayor qué o igual a uno o varios enteros.

CONCLUSIONES

Como recordará el lector, en el Capítulo I menciono que durante mi práctica docente, me percaté que los alumnos no lograban comprender los diferentes temas que marca el Programa de Estudio de la SEP, particularmente los contenidos de fracciones en quinto grado. También refiero en este Capítulo que en la elaboración de esta tesis me di cuenta que este problema no solo pasaba en mis salones de clases, sino que es un problema que se tiene a nivel nacional, por los resultados que presentan las evaluaciones nacionales e internacionales.

Asimismo señalé que a pesar de que había asistido de manera constante a cursos que la SEP ofertaba y ponía en práctica algunas estrategias de enseñanza durante el trabajo con los alumnos, no lograba tener buenos resultados, para que mis estudiantes comprendieran los diferentes temas de fracciones. Después de haber cursado la Maestría en Desarrollo Educativo y haber elaborado la presente tesis, puedo concluir que para que se pueda tener exitosas consecuencias en cuanto al aprendizaje de los alumnos, en este caso sobre los diferentes temas de fracciones, primero que nada se tiene que determinar y delimitar cuál es la problemática en cuanto al contenido y en el grupo de alumnos.

Ya que se tenga determinado y delimitado el problema, se debe proceder a reconocer cuáles son esos conceptos matemáticos con los que cuentan los estudiantes. Desde mi experiencia como docente y como estudiante de la Maestría, concluyo que un buen diagnóstico es un punto de partida para poder tener óptimos resultados en los aprendizajes de los estudiantes, ya que con él se podrá tener un panorama de lo que los alumnos han comprendido o no tienen claro.

Este diagnóstico inicial debe ser diseñado tomando como referencia los objetivos principales de lo que se pretende que los estudiantes comprendan. Por ejemplo, en la prueba diagnóstica escrita, que se diseñó al inició de la propuesta de aprendizaje, tres reactivos de la cuarta sección consistieron en identificar las nociones fraccionarias en el contexto de la medición, para indagar qué era lo que los alumnos comprendían sobre el contenido, ya que era uno de los grandes propósitos que se trabajarían en la propuesta de aprendizaje. Es decir, la evaluación diagnóstica debe ir relacionada con la problemática que se tiene y lo que se pretende lograr con los alumnos.

Otro de los aspectos que considero es primordial para que los alumnos comprendan los diferentes contenidos, es el papel que debe tener el docente antes, durante y después del proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de los momentos básicos es el del diagnóstico. En este período es necesario que el docente lleve a cabo buenas conjeturas, que le ayudaran a proceder de la mejor manera y tener éxito en el aprendizaje de los alumnos. Para esto es primordial que el maestro tenga una mirada profesional, para poder observar adecuadamente lo que los alumnos quieren transmitir en sus diferentes respuestas o procedimientos.

Después de tener claro qué es lo que tienen comprendido y qué no saben los estudiantes, el profesor debe planear su primera sesión de trabajo, delineada por un primer objetivo de aprendizaje que pretenda lograr lo primordial, para lograr que los alumnos, más adelante, comprendan contenidos más complejos. Nombrar nuestro propósito de la sesión como objetivo de aprendizaje es en el sentido de que el avance o falta de entendimiento por parte de los estudiantes debe ser el eje rector para continuar con un segundo objetivo o modificar y reestructurar este primer objetivo.

Otra de las cosas que concluyo en esta investigación es que durante el trabajo con los alumnos, el maestro, debe valerse de recursos factibles para poder lograr involucrar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Uno de los recursos, que por mi experiencia en el diseño y la instrumentación de la propuesta de aprendizaje y que facilita el que los estudiantes se involucren en una sesión de clases, es la contextualización. Esas reseñas que ayudan a los niños a imaginar un mundo de fantasía y realidad, pero al mismo tiempo los encaminan al aprendizaje.

Otros recursos que apoyan al aprendizaje de los estudiantes son los siguientes: las reglas que se establecen en los diferentes momentos de la sesión de clase, como puede ser al momento de dar la palabra a ese alumno que no tiene la habilidad para hablar, lo haga teniendo la atención y respeto de sus compañeros. El que el profesor se conduzca con respeto y atención hacia los alumnos para ayudarles a organizar sus argumentos, para hacerlos válidos. Otra de las cosas que debe promover el docente es la confianza a los estudiantes para poder expresarse.

Tomar los errores de los alumnos como una oportunidad de aprendizaje, es otro recurso que sirve para lograr en los estudiantes un buen aprendizaje. Y uno de los recursos primordiales, desde mi punto de vista, son los recursos didácticos que ayudan a que los niños generalicen los conceptos matemáticos.

Uno de los aspectos que fue fundamental en el éxito de la propuesta de aprendizaje y que llegamos a la conclusión que es esencial en el proceso de aprendizaje de los alumnos, fue la evaluación continua. Es decir, en todo momento de las sesiones de trabajo con los alumnos es necesario llevar a cabo una evaluación de qué están entendiendo y cómo lo están haciendo.

Para concluir este trabajo, me gustaría hacer una reflexión referente a los diferentes objetivos logrados con el grupo de estudiantes de quinto grado en los diferentes contenidos de fracciones.

Como ya lo mencioné en el Capítulo II, se trabajó con alumnos de una escuela primaria pública vespertina que se encuentra ubicada al poniente de la Ciudad de México. También mencioné que las condiciones familiares y económicas son poco favorables, y que también tenían muchos rezagos académicos.

Otra de las dificultades que presentaba el grupo fue que algunos niños no tenían la seguridad de hablar ante sus compañeros, a pesar de dirigirle directamente la pregunta. Todo lo anterior presentó una complejidad y un reto para el trabajo que llevó a cabo la docente en la implementación de la propuesta de aprendizaje. La complejidad se generó cuando la docente se enfrentó a un grupo de alumnos que tienen una combinación de ideas, pocos aprendizajes, estilos y costumbres poco académicos adquieren dentro y fuera del ámbito escolar. El reto se dio cuando se tuvo que trabajar con las dificultades y áreas de oportunidad que presentaban los alumnos, para lograr que ellos comprendieran una parte esencial del concepto de fracción.

Con el trabajo arduo que se hizo se puede concluir que a pesar de las diferentes dificultades que presentaron los estudiantes sí se pudo lograr hacer matemáticas en esta aula.

Es importante mencionar que el anterior objetivo se logró después de transcurridas dieciocho sesiones de trabajo en las que los alumnos adquirieron de manera colaborativa nociones del concepto de fracción matemáticos relativamente generalizados, en cuanto a diferentes temas de fracciones.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 1-20.

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática, Número especial, 25 años*, 270-287.

Cortina, J. L., Visnovska, J., y Zúñiga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: Supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 79-99.

Cortina, J. L., y Zúñiga, C. (2008). La comparación relativa de tamaños: Un punto de partida alternativo y viable para la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 20*(2), 5-23.

Cortina, J. L., Zúñiga, C., y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones (Equipartition as a didactical obstacle in fraction instruction). *Educación Matemática, 25*(2), 7-29.

Davydov, V. V. (1969/1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13*(1), 13-64.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Kluwer.

Gravemeijer, K., y Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products* (pp. 45-85). New York: Routledge.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (21 de septiembre 2015). *Explorador Excale.* http://www.inee.edu.mx/explorador. México, D. F.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2015). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea). Resultados nacionales 2015, 6º de primaria y 3º de secundaria, lenguaje y comunicación, y matemáticas*.

Retrieved from México, D. F.: http://www.inee.edu.mx/index.php/resultados-nacionales-2015

Maya, F. (2011). *El razonamiento multiplicativo en jóvenes universitarios del área económico administrativa.* (Tesis Doctoral), Universidad Pedagógica Nacional, Mexico, D. F.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all (versíon traducida al español)*. Reston, Virginia.

Secretaría de Educación Pública. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación Básica.* . México, D. F.

Secretaría de Educación Pública. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado*. México D.F.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Desafíos matemáticos. Quinto grado*. México D.F.

Anexo 1. Prueba Diagnóstica.

Nombre del alumno (a) ____

Grado y grupo _________________________ Fecha ___________________________

INSTRUCCIONES I. Escribe el antecesor y sucesor de cada uno de los siguientes números.

1.- ______________ 40 ______________

2.- ______________ 70 ______________

3.- ______________ 300 ______________

4.- ______________ 920 ______________

5.- ______________ 889 ______________

6.- ______________ 4000 ______________

7.- ______________ 5800 ______________

8.- ______________ 3030 ______________

9.- ______________ 9009 ______________

INSTRUCCIONES II. Escribe como se leen las siguientes cantidades.

10.- 805 ____

11.- 920 ____

12.- 40404 ____

INSTRUCCIONES III. Resuelve lo siguiente.

13.- Pepe tiene 50 pesos y Juan tiene el doble. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

14.- Juan tiene 1000 pesos y tiene lo doble que Roberto. ¿Cuánto tiene Roberto?

15.- Para hacer dos pasteles, Juan utilizó 8 huevos, ¿Cuántos huevos necesita para hacer 10 pasteles?

Explica lo que hiciste.

16.- 8 paletas cuestan 24 pesos. ¿Cuánto cuestan 10 paletas?

17.- Este tanque tarda 3 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.

18.- Este tanque tarda 2 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.

19.- Este tanque tarda 4 horas en llenarse, indica donde estaría el agua después de una hora de llenado.

INSTRUCCIONES IV. Escribe el signo mayor que >, menor que < o igual a = según corresponda.

20.- $\frac{1}{4}$ ____________________ $\frac{1}{8}$

21.- $\frac{1}{7}$ ____________________ $\frac{1}{2}$

22.- $\frac{3}{4}$ ____________________ $\frac{3}{8}$

23.- $\frac{4}{5}$ ____________________ $\frac{5}{12}$

24.- $\frac{5}{4}$ ____________________ $\frac{4}{5}$

25.- $\frac{1}{5}$ ____________________ $\frac{1}{9}$

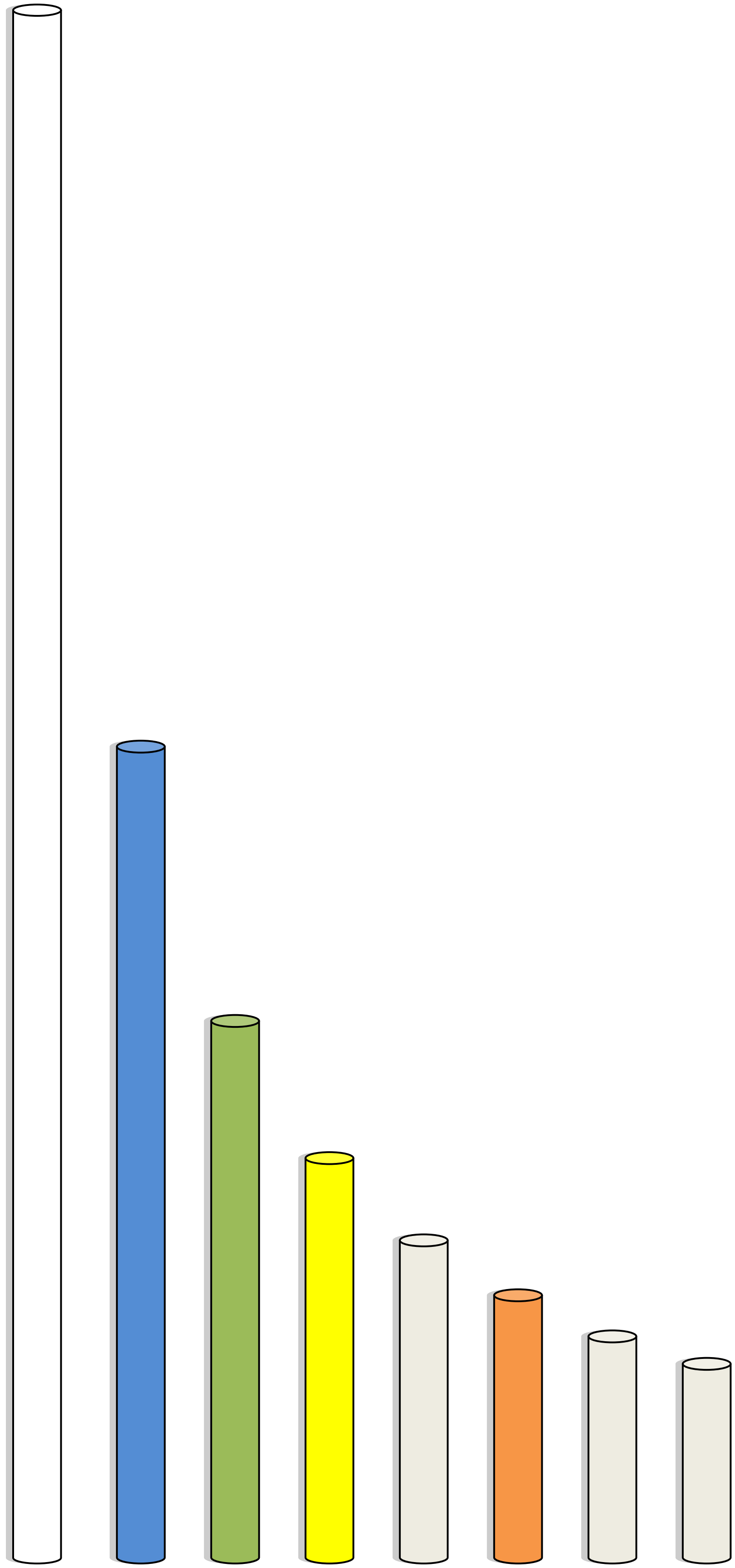
26.- $\frac{1}{12}$ ____________________ $\frac{1}{125}$

27.- $\frac{1}{2}$ ____________________ $\frac{2}{4}$

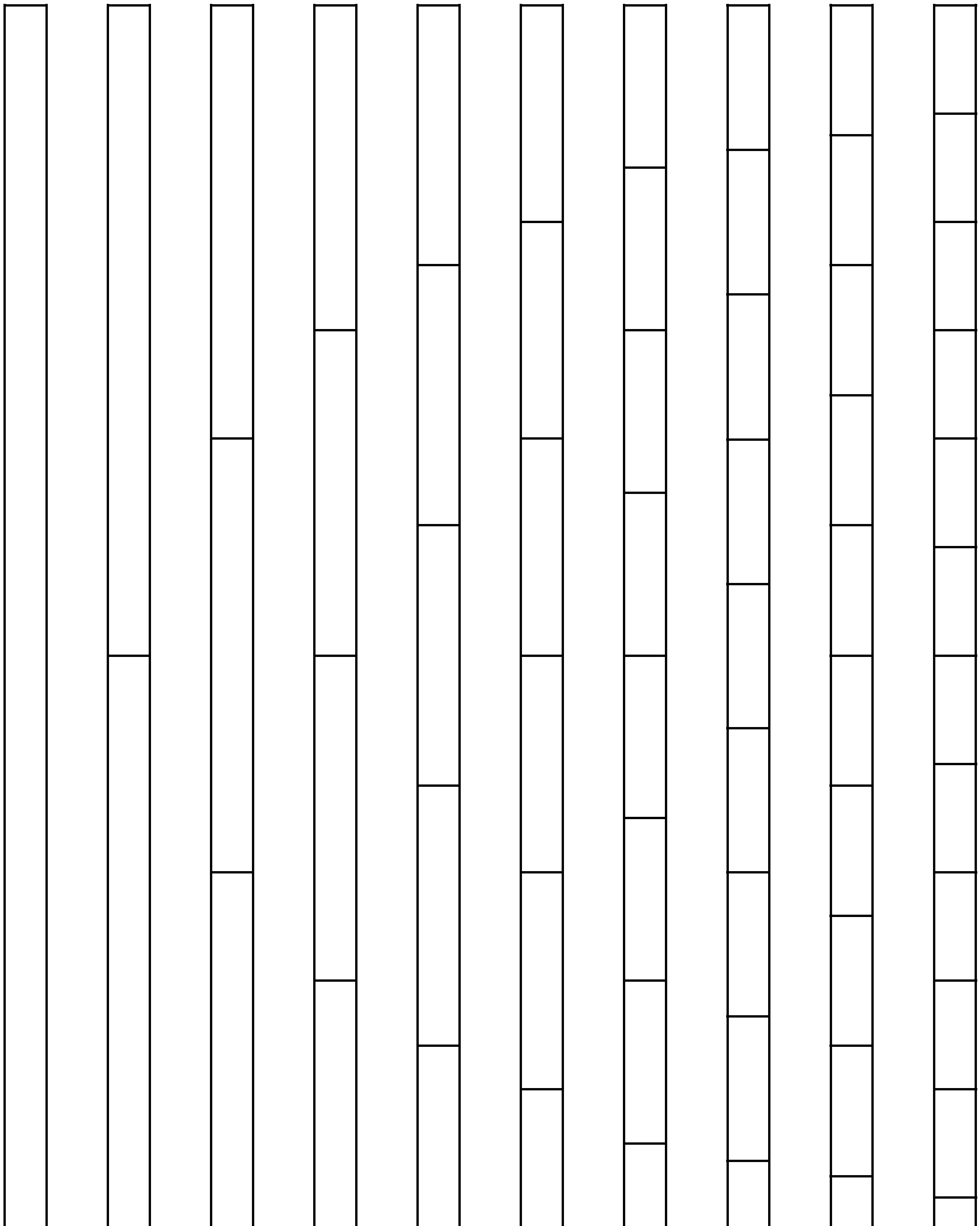
28.- $\frac{2}{9}$ ____________________ $\frac{1}{2}$

29- $\frac{2}{2}$ ____________________ $\frac{3}{3}$

Anexo 2. La vara (tlakotl) y sus pequeños (tlatlapantle)



Anexo 3. Planilla profesional



Anexo 4. Prueba Final.

Nombre del alumno (a) ______________________________________

Grado y grupo ___________________ Fecha __________________

INSTRUCCIONES I. Resuelve lo siguiente.

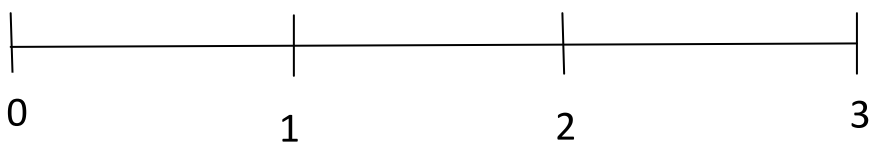
1.- Mateo tiene 180 pesos y Juan tiene el doble. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

2.- Emilio tiene 400 pesos y tiene la mitad que Alberto. ¿Cuánto tiene Alberto?

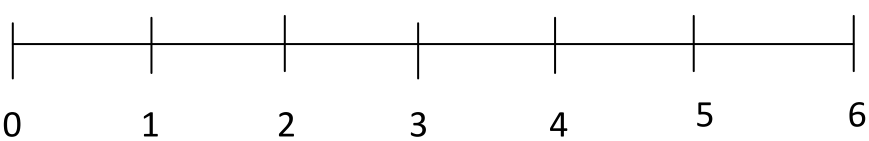
3.- 12 paletas cuestan 60 pesos. ¿Cuánto cuestan 24 paletas?

INSTRUCCIONES II: Ubica las fracciones en la recta numérica donde corresponden.

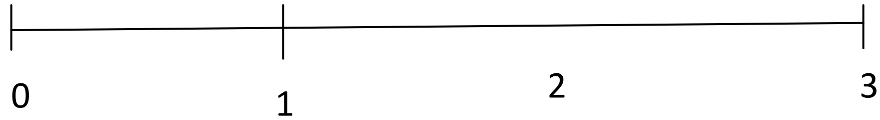
4.- $\frac{16}{11}$



5.- $\frac{10}{3}$



6.- $\frac{15}{5}$



INSTRUCCIONES III. Escribe el signo mayor que >, menor que < o igual = según corresponda.

7.- $\frac{1}{12}$ ______________ $\frac{1}{4}$

8.- $\frac{1}{7}$ ______________ $\frac{1}{8}$

9.- $\frac{1}{113}$ ______________ $\frac{1}{8}$

10.- $\frac{1}{115}$ ______________ $\frac{1}{108}$

11.- $\frac{1}{5}$ ______________ $\frac{1}{3}$

12.- $\frac{1}{6}$ ______________ $\frac{1}{9}$

13.- $\frac{1}{400}$ ______________ $\frac{1}{4}$

14.- $\frac{1}{90}$ ______________ $\frac{1}{80}$

15.- $\frac{1}{999}$ ______________ $\frac{1}{200}$

16.- $\frac{3}{3}$ ______________ $\frac{7}{6}$

17.- $\frac{4}{3}$ ______________ $\frac{48}{50}$

18.- $\frac{400}{3}$ ______________ $\frac{3}{400}$

19.- $\frac{11}{12}$ ______________ $\frac{12}{11}$

20.- $\frac{50}{100}$ ______________ $\frac{49}{13}$

21.- $\frac{6}{5}$ ______________ $\frac{8}{9}$

22.- $\frac{6}{6}$ ______________ $\frac{5}{4}$

23.- $\frac{2}{2}$ ______________ $\frac{11}{12}$

24.- $\frac{6}{7}$ ______________ $\frac{13}{10}$

25.- $\frac{2}{3}$ ______________ $\frac{13}{4}$

26.- $\frac{11}{5}$ ______________ $\frac{11}{6}$

27.- $\frac{4}{3}$ ______________ $\frac{4}{30}$

28.- $\frac{3}{4}$ ______________ $\frac{5}{6}$