UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS POR ALUMNOS DE TERCER GRADO

INFORME DE INVESTIGACIÓN EMPÍRICA

PRESENTA:

KARLA EUGENIA PADILLA MASSIEU.

ASESORA:

DRA. SILVIA ALATORRE FRENK

MÉXICO D.F. AGOSTO 2015

AGRADECIMIENTOS

Dios

Por darme el apoyo incondicional de mi familia y por ser un ejemplo que me alentó para cumplir con mí meta. Por escucharme siempre y darme la fe y fuerza para seguir adelante en este hermoso camino que elegí.

Profesora Silvia Alatorre

Desde el inicio hasta el final de este camino usted estuvo dispuesta a ayudarme, a pesar de las dificultades que se presentaron. Su disposición de enseñarme con paciencia y diligencia a corregir mis errores me permitieron obtener este gran logro.

Victor

Mi esposo y mi amigo en este camino. Por escucharme siempre en todo momento y valorar mí esfuerzo y animarme a cerrar una etapa más de mi vida. Por estar conmigo y encontrar siempre los medios para concluir esta meta.

Mathias

Por cambiar mi vida y ser parte de mi motivación y enseñarme que el esfuerzo diario te hace mejor. Tus sonrisas y detalles que has tenido conmigo me han permitido terminar y sentirme aún más orgullosa por ser madre.

Mamá

Por tu apoyo incondicional, porque siempre creíste en mi a pesar de los momentos difíciles que pude pasar y que ni yo misma me entendía, el amor y la paciencia de una mamá para perseverar siempre y de ver realizar mi meta es lo que me alentó a terminar. Por enseñarme que el estudio te permite progresar.

Hermana

Siempre me recordaste que a pesar de los momentos que yo pudiera pasar, siempre tenía que existir una prioridad en la que pudiera sentirme satisfecha y orgullosa. Por escucharme y por ser mi hermana que siempre está ahí.

ÍNDICE

ÍNDICE DE CUADROS, GRÁFICAS Y TABLAS

CUADROS

TABLAS

GRÁFICAS

1. INTRODUCCIÓN

Los alumnos de educación primaria desarrollan habilidades matemáticas que les permiten enfrentarse con éxito a problemas con estructura aditiva por medio de una metodología didáctica, al estar basada en situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos para poder efectuar el proceso de resolución (Polya 1945/1989).

En la resolución de distintos tipos de problemas matemáticos es relevante para el alumno comprender, interpretar y razonar acerca del uso de estrategias compuestas de procedimientos y técnicas que utilizan de acuerdo a los conocimientos previos que poseen. El alumno requiere del dominio de habilidades en el qué y el cómo resolver el problema, para de esta manera hacer uso de sus propios recursos en el contexto escolar y ejecutar las estrategias con éxito.

Este trabajo pretende identificar las estrategias aplicadas por alumnos de 3er grado en la resolución de problemas aditivos.

Para llegar a este objetivo se analiza la **importancia de las matemáticas** en la educación, al indicar lo que implica resolver un problema en donde el alumno aprende conceptos y utiliza tanto sus experiencias como sus conocimientos previos; en conjunto éstos son elementos que ayudan a buscar estrategias al alumno. Es relevante la definición de **"problema"** desde distintas perspectivas al concepto, (Lester, 1983); desde el punto de vista cognitivo un problema es: causarle al alumno un obstáculo, es decir que efectúe un proceso cognitivo que le permita comprender y analizar la estrategia a realizar para llegar a la resolución del problema. Se estudian también diversos **tipos de problemas aritméticos aditivos** (Vergnaud, 1991; Puig y Cerdán, 1995) como cambio, combinación, comparación e igualación. Estos problemas tienen características como la siguiente estructura semántica, lugar de la incógnita y cantidad de etapas que hay que pasar para resolverlo; entre todas estas clases se llega a una gran diversidad de problemas. Los alumnos enfrentan los tipos y las características de los problemas ya sea en el contexto escolar o en la vida cotidiana; como consecuencia el **proceso de resolución** (Polya, 1945/1989) es distinto en cada alumno. Es deseable conocer qué pasos sigue el alumno en la resolución, desde comprender el problema en cuanto al contexto, tipo de problema, operaciones a realizar, y dominio de las técnicas a utilizar para los distintos tipos de problemas; hasta concebir un plan, ejecutarlo y verificar si la solución responde a lo que se le pregunta. Se analiza una parte del proceso de resolución para conocer los procedimientos (Pozo y Postigo, 1994) y los **errores** (Bermejo y Rodríguez, 1998) que el alumno realiza, pues se pueden encontrar distintos procedimientos y técnicas que ayudan o perjudican en la solución del problema. Algunos de éstos ya se conocen con un nombre y características específicas, pues en las investigaciones se encuentran frecuentemente, pero debido a los distintos procedimientos formales e informales que ejecutan los alumnos todavía existen procedimientos y errores sin analizar. Cabe mencionar que en esta resolución influyen ciertos **factores** (Schoenfeld, 1992) como los relativos al problema (en donde se plantea cómo están compuestos los problemas), los relativos al contexto (lo que se refiere a si el lugar en el que realiza la tarea el alumno le beneficia o no) y los relativos al alumno (donde se agrupan los conocimientos base, la reflexión y la actitud que tiene ante la tarea).

Los elementos que se presentaron fueron la base para realizar los cinco capítulos de este documento: en el primero se encuentra el planteamiento del problema, que refiere a los distintos procedimientos formales e informales para elegir y ejecutar la operación y la estrategia; en el segundo se exponen los diversos referentes teórico-conceptuales, desde la importancia del aprendizaje de las matemáticas hasta los factores que se deben tomar en cuenta el momento que al alumno se le presenta un problema; en el tercero se plantea el método que siguió esta investigación; en el cuarto los resultados y análisis de los procedimientos y errores que se encontraron; y en el último se plantean conclusiones y algunas propuestas didácticas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una de las principales asignaturas a las que se le debe prestar mayor atención es matemáticas. Es conocido que tanto en las evaluaciones nacionales (como Enlace) como en las internacionales (como PISA), los estudiantes mexicanos muestran resultados insuficientes. Por ejemplo, el estado que guarda el Sistema Educativo Nacional de acuerdo a los resultados de la prueba Evaluación del Logro Académico en Centros Escolares (Enlace-2012), es que más de la mitad de los estudiantes de primaria que cursan de 3° a 6° y más del 70% de los de secundaria registran niveles insuficientes y elementales en asignaturas como matemáticas, español y ciencias (Periódico “La Prensa”, agosto, 2012).

En primaria los alumnos aprenden en la escuela el conocimiento formal sobre el procedimiento de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) para poder resolver diferentes problemas que correspondan al grado escolar en el que se encuentre el alumno. Pero también el alumno de manera informal descubre procedimientos que le ayudan a encontrar las soluciones de la operación. Estos procedimientos formales e informales al ejecutarse en ocasiones podrían llevar a diversos errores de representación y de ejecución de las operaciones.

Es importante que el alumno conozca y ejecute el procedimiento de dichas operaciones, pero no es suficiente este conocimiento para resolver problemas aditivos, porque, en el momento en que se le presenta un problema al alumno, éste se enfrenta a un obstáculo y debe encontrar la solución. Es entonces cuando él comienza un proceso de resolución, poniendo a prueba conceptos, procedimientos, reglas y técnicas que le van a ayudar elegir la estrategia que se adecue a lo que el problema pide.

Durante este proceso de resolución los alumnos identifican ciertas características de los problemas que los pueden llevar a cometer errores, como, en este caso, la elección del procedimiento para representación y ejecución del problema o de la operación.

Este es el momento en que la ejecución y representación de los procedimientos formales e informales es relevante, porque se pueden cometer diversos errores; es por esto que el análisis de éstas sirve para conocer cómo y por qué el alumno eligió el procedimiento e identificar y dar posibles soluciones a los errores que se cometen.

1.1. Justificación

El resolver problemas ayuda al alumno a recurrir a sus recursos conceptuales y procedimentales para poder elegir la estrategia adecuada y finalmente ejecutarla.

Las razones por las que los alumnos cometen errores en la resolución de problemas, podrían ser por tres factores: problema, alumno y contexto. En este caso se estudiaron diversas variables en el factor problema.

El problema para los alumnos debe ser un obstáculo con el fin de que ellos mismos puedan comprender, identificar la incógnita y analizar de acuerdo al conocimiento previo que tienen cuál es la solución. De acuerdo a su conocimiento será su bagaje de estrategias con las que podrá encontrar distintas soluciones al problema.

La ejecución y la representación de las operaciones de suma o resta, son esenciales en el conocimiento de cada alumno. Los alumnos logran aprender a utilizar dichas operaciones como consecuencia de elegir el procedimiento adecuado que les ayude a resolver el problema.

La ejecución de un procedimiento de resolución es un proceso complejo; aquí hemos analizado solamente algunos de sus elementos: la elección y la representación. En el caso de la representación es posible comprender que es aquí en donde existen más obstáculos para los alumnos, y algunos de los errores de representación permiten conocer cómo piensan los alumnos.

Los procedimientos que los alumnos utilicen en cada problema tal vez sean iguales al observarlas en una hoja, pero el proceso de resolución que cada alumno ejecutó para escoger ese procedimiento es distinto debido al conocimiento que tienen.

1.2. Pregunta de Investigación

¿Cuáles son las principales estrategias que los alumnos de 3er grado de primaria utilizan en la resolución de problemas aditivos?

1.3. Objetivos

Objetivo general

Identificar las estrategias que utilizan los alumnos de 3° grado de primaria en el proceso de resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva.

Objetivos específicos

- Aplicar a una muestra de alumnos de 3° grado de primaria un cuestionario para la resolución de problemas aritméticos aditivos,
- Analizar las respuestas a ese cuestionario con el fin de conocer las estrategias aplicadas en la resolución de dichos problemas.

2. REFERENTES TEÓRICO – CONCEPTUALES

Este capítulo contiene ocho secciones. La primera explica la importancia de las matemáticas en la educación, al ser primordial para que los alumnos puedan solucionar situaciones tanto escolares como cotidianas gracias a la adquisición del conocimiento y desarrollo de habilidades.

En la segunda sección se explica la resolución de problemas y se encuentra la definición de problema desde distintas perspectivas, hasta llegar a la matemática se encuentran los componentes esenciales que debe contener un problema matemático. Así mismo, se habla de dos tipos de problema: multiplicativos y aditivos.

La tercera sección se dedica a un análisis de los problemas aditivos desde dos perspectivas que permiten conocer las distintas características de cada uno de ellos.

En la cuarta sección se conoce el proceso de resolución de problemas que deben realizar los alumnos en el momento en que se les presenta el problema matemático, esto es comprender el problema, planear, ejecutar lo que se realizará y revisar si se responde a lo que se pregunta.

En la quinta sección se explican los factores que influyen en la resolución, contexto, problema y el propio alumno; este último se desarrolla desde dos perspectivas.

En la sexta sección se explica lo que se refiere a las características de las estrategias y de qué manera se diferencian de las técnicas, junto con ello las distintas estrategias que los alumnos utilizan en los problemas aditivos.

En la séptima sección se explican los errores que se han encontrado que los alumnos cometen en la aplicación de las distintas estrategias de adición y sustracción.

En la octava sección se explica de acuerdo a los planes y programas del 2011 de México cuáles son las cualidades que se esperan que los alumnos de tercer grado de primaria adquieran en la asignatura de matemáticas.

2.1. Las matemáticas en la educación

Las matemáticas constituyen una de las actividades más antiguas, comunes, frecuentes y necesarias, son un elemento que siempre está presente en la historia de la humanidad (Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra, 1998).

Es por esta razón que Alsina et al. (1998) añaden que actualmente es necesario un conocimiento matemático básico, que permita ser aplicado en situaciones cotidianas, laborales y científicas. Esto no se logrará sin una comprensión de este conocimiento, por lo tanto lo que se valora actualmente es la capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos en la vida diaria. Siendo una necesidad que las matemáticas formen parte de la educación básica obligatoria (preescolar, primaria, secundaria y bachillerato).

Para Kilpatrick y Gómez (1995), las matemáticas permiten aprender y comprender lo real bajo los aspectos cuantitativos y cualitativos y sirven como lenguaje para comunicar ideas a los demás. Para estos autores la meta de las matemáticas es ayudar al alumno a desarrollar su pensamiento lógico convergente, conjuntamente con el pensamiento libre, creativo, autónomo y divergente.

Para poder desarrollar los objetivos generales de la educación obligatoria se debe tomar en cuenta el aporte del alumno, es decir los alumnos llegan con ideas previas y conocimientos informales matemáticos. Se puede desarrollar una educación efectiva sólo si se relacionan los conocimientos previos con los formales. (Polya, 1945/1989; Bruer, 1995)

Pero Bruer (1995) afirma una realidad y es que muchos alumnos no saben por qué funcionan los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela, ni para qué sirven, pues finalizan su escolaridad dominando algunas habilidades de cálculo necesarias para resolver ejercicios matemáticos pero carecen de la comprensión matemática de mayor nivel que les ayudará a aplicar sus habilidades en situaciones nuevas.

Así, la resolución de problemas es relevante porque, es un método por el cual se favorecen las estructuras conceptuales, ya que demanda conocimientos previos, conceptos, experiencias y de igual forma crea conflictos cognitivos que movilizan a los alumnos a buscar estrategias que les permitan llegar a la solución (Polya, 1945/1989).

Es relevante mencionar que las matemáticas son indispensables en la formación académica de cada alumno, pues es donde desarrollan habilidades como comprensión y análisis que van ayudar a resolver situaciones de distinta índole.

En México, la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria destaca la importancia de la formación de habilidades que permitan la resolución de problemas a través de situaciones prácticas, generando nuevos procedimientos que permitan conceptualizar aprendizajes con mayor significado (SEP, 2011).

2.2. La resolución de problemas en matemáticas

Gaulin (2001) refiere que la resolución de problemas sigue siendo un tema actual y tiene gran importancia en la educación de las matemáticas.

Si bien el autor enfatiza que es un tema antiguo, en donde también menciona que es un tema reciente en los currícula escolares. Cita como claro ejemplo de esto el libro de Polya: "Cómo plantear y resolver problemas", publicado en 1945, el cual fue traducido a otros idiomas en los años 60 ,70 y 80, es decir fue publicado hace más de medio siglo.

Gaulin (2001) recupera el modelo de Polya, quien describe que "hacer matemáticas es resolver problemas", así para dar una buena idea de las matemáticas a los alumnos, no solamente ejercicios porque sólo fortalecen los procedimientos que se llevan a cabo en éstos y no causan obstáculos en los alumnos; hay que darles problemas que impliquen buscar, reflexionar e investigar cómo resolver los obstáculos que se encuentren.

Ruiz (citado por Calvo, 2008) menciona que la resolución de problemas debería enseñarse al mismo tiempo que las operaciones, en lugar de enseñarla por separado, ya que considera que si las operaciones no están ligadas en un contexto real, al alumno se le dificulta hacer esa conexión entre lo abstracto (operaciones) y lo real (problemas).

Es así como la resolución de problemas ayuda a los alumnos a poner en práctica el conocimiento de las operaciones aritméticas porque su objetivo es fortalecer los conocimientos obtenidos en el aula, al plantear problemas en un contexto donde puedan comprender, y generar procesos que les permitan encontrar una solución.

Por lo anterior, para Labarrere (1987) la función que desempeñan los problemas matemáticos es incrementar el desarrollo intelectual del alumno y específicamente sobre la formación de su pensamiento. Es decir que adquiera procedimientos heurísticos o informales que le ayuden para proceder en la resolución de problemas.

Orton (1990) menciona que la resolución de problemas se concibe normalmente como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva. El alumno podrá resolver un problema de acuerdo a los conocimientos que posea, el saber por qué se realiza esa operación y cómo es que facilita la solución del problema.

Gaulin (2001) concluye que hay mucho que hacer sobre la resolución de problemas. Este autor señala tres evidencias que refuerzan en la actualidad la importancia de este tema:

- Socio-constructivismo. Promueve intercambio de argumentos y encuentra soluciones.
- Cada joven va a enfrentarse a situaciones cada vez más complejas, en dónde las matemáticas son relevantes, ya que en durante la formación académica aprenden a resolver problemas.
- En México se tiene actualmente un currículo que refiere al desarrollo de las capacidades y habilidades que los alumnos van a adquirir, en este caso en la resolución de problemas. Existe gran diversidad de países en este momento donde se están redefiniendo los currículos escolares, por medio de competencias, o bien el desarrollo de capacidades.
- La resolución de problemas es aprender a enfrentarse a situaciones nuevas.

Finalmente Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) menciona que para la resolución de problemas también se debe de tomar en cuenta los recursos del alumno es decir, los conocimientos previos tanto formales como informales que posee como son los conceptos, fórmulas, algoritmos y en general, todas las nociones que se consideren necesarias saber para enfrentarse a un determinado problema.

Es así como la resolución de problemas, de acuerdo a los autores mencionados constituye no sólo un área de estudio en sí misma sino también un procedimiento de enseñanza-aprendizaje aplicable a todas las áreas.

Definición de problema

Actualmente, se tiende a delimitar el significado de problema en la enseñanza de las matemáticas desde distintos puntos de vista: el psicológico (el sujeto que aborda el problema y los procesos mentales implicados en su resolución), el curricular (el papel que juegan los problemas en la enseñanza de las matemáticas), el matemático (cómo está plantead un problema) y el didáctico (la forma en la que se enseña a resolver problemas) (Kilpatrick, 1995).

En Educación Matemática, la palabra "problema" abarca un amplio abanico que va desde la distinción entre ejercicio y problema de Labarrere (1987) pasando por la "situación- alumno- entorno", de Charnay (1994) hasta la idea de problema como "pensar matemáticamente", de Schoenfeld (1989).

No obstante las diferentes definiciones, se puede partir de una ya clásica: "Problema es una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución" (Lester,1983 y Ferrer (citado en Podall, 1996)).

La diferencia de la definición que refiere Ferrer (citado en Podall, 1996), es que el alumno no dispone de un algoritmo conocido para resolverlo.

Los problemas deben promover que el alumno recupere y utilice lo que sabe de las matemáticas para solucionarlos, sin ser obvio el procedimiento para lograrlo, ni la respuesta; finalmente, aunque en los primeros intentos parezca imposible de resolver, el alumno debe entender que eso no significa que no puede solucionarse.

Por otro lado Puig y Cerdán (1995) definen problema como una situación que implica un objetivo o propósito que se debe perseguir en el que existen obstáculos, por ello se requiere deliberación.

Así mismo Luceño (1999) menciona que un problema es "toda situación en la que haya un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo". La transformación de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema.

Para Mayer (1986) un problema debe tener ciertas características:

- *Datos*: el problema tiene en un primer momento determinadas condiciones, objetos, pedazos de información, etc., que están presentes al comienzo del trabajo del problema, es decir son elementos que informan de forma implícita y explícita lo que se tiene que resolver.
- *Objetivos:* el estado deseado o terminal del problema, por lo que el pensamiento deberá transformar el problema desde el estado inicial dado al estado terminal; es a través de procesos el alumno transformará los datos del problema en respuestas.
- *Obstáculos:* el que piensa tiene a su disposición algunas vías para modificar el estado dado [...] del problema, es decir lo transforma. Sin embargo todavía no sabe qué operaciones puede utilizar para llegar a la solución

Schoenfeld (1989), menciona que un problema matemático es una tarea:

a) En la cual el alumno está involucrado e interesado y desea obtener una resolución.
b) Para la cual no dispone de un medio matemático accesible para lograr esa resolución.

De esta manera el alumno ha de efectuar un proceso cognitivo que implica comprender, planear y ejecutar un plan. Es así como los problemas son un medio que le permiten construir un significado más claro de lo que realiza, y no solamente, resolver éste como un ejercicio.

A partir de un análisis del desarrollo psicogenético, Labarrere (1987) propone que desde el punto de vista psicológico, un problema es intransferible, es decir no se puede pasar de una persona a otra, directa y automáticamente. Por una serie de razones, lo que para una persona puede ser un problema, puede no serlo para otra. El planteamiento o surgimiento de un verdadero problema implica que el alumno no tiene acceso a la respuesta sólo a través de su memoria, sino que está obligado a pensar, a razonar, para encontrar los conocimientos necesarios que conducen a la respuesta.

De igual forma, manifiesta Charnay (1994), un problema puede verse como una terna: situación-alumno-entorno; el problema se da sólo si el alumno percibe una dificultad; en ese sentido lo que es un problema para un alumno no necesariamente lo es para otro.

A partir de las definiciones que se han presentado este trabajo se basa en la siguiente definición, un problema es una situación que tiene obstáculos y que requiere del conocimiento previo, comprensión, y análisis del alumno para encontrar la solución.

Es importante mencionar que existen problemas situacionales y verbales los primeros que se plantean al alumno en cualquier momento sin necesidad de tenerlos escritos y los segundos que son los verbales se plantean en forma de enunciado, en estos últimos se centró la investigación.

Componentes del problema matemático.

Se considera que los problemas matemáticos poseen componentes que permiten que el enunciado pueda comprenderse y se puedan identificar sus principales características. Nesher (citada en Puig y Cerdán, 1995) distingue en su modelo de análisis tres componentes: las estructuras sintáctica, lógica y semántica, que a continuación se describen.

- Estructura sintáctica

Los problemas están constituidos por enunciados y éstos por palabras, entre las que se distinguen dos tipos. El primer tipo consiste en las palabras que desempeñan algún papel en la elección de la operación: se refiere a que estas palabras son importantes para establecer una relación entre la incógnita y los datos. A éstas se le llaman palabras clave, y constituyen un conjunto heterogéneo de palabras que se pueden dividir en tres grupos.

- Palabras propias de la terminología matemática, por lo tanto con significado preciso en el contexto matemático (añadir, doblar, substraer entre otras). Por ejemplo: *Juan divide sus 8 canicas entre Pedro y Javier ¿Cuántas le da a cada uno?*

- Palabras conectivas como los verbos, cuyo significado en el contexto del problema suele ser suficiente para decidir la operación a realizar. Por ejemplo: *Juan tenía 5 canicas, ganó 3 canicas. ¿Cuántas tiene ahora?*
- Palabras o grupos de palabras que expresan relaciones. Por ejemplo: *Juan tiene un hermano y una hermana. Su hermana tiene 15 años y su hermano es 5 años más joven que ella. ¿Qué edad tiene su hermano?*

En el segundo tipo se encuentran las palabras que no desempeñan papel alguno en la elección de la operación; sólo conectan el enunciado del problema con la realidad o delimitan el contexto del problema.

- Estructura lógica

La estructura lógica tiene que ver con la relación entre los datos. Un problema de una etapa [1] de adición o sustracción que esté bien formulado, contiene, implícita o explícitamente, tres datos: dos en la parte informativa y una tercera en la pregunta del problema; es en este sentido que Vergnaud (1991) menciona las relaciones "ternarias". La estructura lógica depende de las caracterizaciones de estos datos y dependerá del campo semántico.

Ejemplos*: En un estanque hay 3 patos y 7 ranas. ¿Cuántos animales hay en total?* La estructura lógica está presente de forma explícita, ya que su estructura sintáctica se corresponde casi totalmente con ella, y los predicados pueden enunciarse fácilmente.

Juan tiene 7 canicas. Pedro tiene 3 más que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
La estructura lógica no aparece de forma explícita ya que las relaciones lógicas no se establecen entre los objetos (canicas), sino entre las cantidades de objetos que pertenecen a Juan y a Pedro.

[1] Ver el siguiente apartado (Tipos de problema)

Estructura semántica

Refiere a la lingüística. El contenido semántico puede ser analizado por partes atendiendo a los diversos modos de codificar lingüísticamente las relaciones lógicas entre las tres proposiciones básicas del problema, o también es posible efectuar un análisis global de la estructura del problema que permite comprender los procesos utilizados por los alumnos para resolver los problemas.

Es así como diferentes investigadores clasifican los problemas aritméticos y se da lugar a la existencia de distintos tipos de problemas con base en la componente semántica.
Ejemplo: Análisis por partes diferentes tipos de palabras como: argumentos, adjetivos pronombres etc. Un análisis global del texto refiere a problemas tipo cambio, combinación, comparación e igualación

Tipos de problemas

Los problemas aritméticos son aquellos que en su enunciado presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una o varias cantidades o a sus relaciones y que necesitan la realización de operaciones aritméticas para su resolución. Los problemas aritméticos escolares se han clasificado conforme a su estructura semántica, según Puig y Cerdán (1995), en dos grandes grupos, los aditivos (adición y sustracción) y los multiplicativos (multiplicación y división).Ver el cuadro 1.

<table>
<tr><th colspan="3">Tipos de Problema</th></tr>
<tr><td>Estructura Semántica</td><td>Operación aritmética</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aditiva</td><td>Adición</td><td rowspan="2">• Cambio
• Combinación
• Comparación
• Igualación</td></tr>
<tr><td>Sustracción</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Multiplicativa</td><td>Multiplicación</td><td rowspan="2">• Isomorfismos de medidas
• Comparación multiplicativa
• Producto de medidas</td></tr>
<tr><td>División</td></tr>
</table>

Cuadro 1. Tipos de problemas según Puig y Cerdán (1995).

Por otra parte Castro et al. (1992) consideran una diferencia en los problemas aritmeticos y los clasifican en simples y compuestos. Para poder identificar a qué tipo de problema corresponde cada uno, se debe partir de la información que se proporciona en el enunciado. Ver el cuadro 2.

*Problemas de una etapa***.** Son aquellos que contienen una relación entre dos datos numéricos, en función de la cual el alumno partirá para la resolución del problema. Para ello sólo se necesita una operación aritmética para la resolución del problema. A este tipo de problemas también se les puede denominar problemas simples.

Problemas de dos etapas. En este tipo de problemas se da más de una relación entre los datos del problema y por consiguiente, se necesita más de una operación. Por lo cual, se dice que se trata de un problema compuesto, ya que para la resolución de este tipo de problemas se necesita de más de una operación. Realizando las combinaciones de las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) de dos en dos, se obtienen 16 parejas de operaciones como se muestra en el cuadro 2.

Tipos de Problemas	Descripción
Problemas de una etapa	Uso de una operación para obtener su solución
Problemas de dos etapas	Se necesita más de una operación para llegar a la solución (+,+), (+,-), (+, x), (+, /), (-,+), (-,-), (-, x), (-, /) (x,-),(x,-), (x ,x), (x, /), (/,+), (/,-), (/,x), (/,/)

Cuadro 2. Tipos de problemas según Castro et al. (1992)

Para varios autores (Vergnaud 1991, Puig y Cerdán 1995, Castro et al, 1997, Vicente et al, 2008), la clasificación de los problemas aritméticos es diversa, hay problemas de una etapa o más de una etapa y problemas de estructura semántica aditiva o multiplicativa.

A continuación se expone una breve explicación de cada uno de ellos y algunos ejemplos, que ilustran los diferentes tipos de problemas aritméticos.

2.3. Tipos de problemas aditivos

Clasificación según Vergnaud

Vergnaud (1991) toma en cuenta las relaciones aditivas para la clasificación de los problemas aditivos. Según él las relaciones aditivas son relaciones ternarias que pueden encadenarse de diversas maneras y ofrecer una gran variedad de estructuras aditivas (números naturales y relativos). Los números naturales representan las medidas de conjuntos de objetos aislables y los números relativos representan las transformaciones que experimentan estas medidas.

Relaciones aditivas	
Primera categoría	dos medidas se componen para dar lugar a una medida
Segunda categoría	una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida
Tercera categoría	una relación une dos medidas
Cuarta categoría	dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación
Quinta categoría	una transformación opera sobre una relación para dar lugar a un estado relativo
Sexta categoría	dos relaciones se componen para dar lugar a un estado relativo.

Cuadro 3. Relaciones aditivas según Vergnaud (1991).

La complejidad de los problemas de tipo aditivo varía en función, no sólo de las diferentes categorías de relaciones aditivas, sino también en función de las distintas clases de problemas que se pueden plantear para cada categoría. Así, cada una de las categorías de relaciones aditivas da lugar a los tipos de problemas que se muestran en cuadro 3; a continuación se describen con más detalle y se ilustran con algunos ejemplos.

- Primera categoría

1) Conocidas las dos medidas elementales, encontrar la compuesta.

- *Hay 4 adultos y 5 niños sentados a la mesa ¿Cuántas personas hay en total?*

2) Conocidas la medida compuesta y una de las elementales, encontrar la otra.

- *Un agricultor tiene 56 hectáreas de tierra, de las cuales 17 son de bosque y monte, el resto es cultivable ¿Qué área cultivable tiene a su disposición?*

- Segunda categoría

Se pueden distinguir seis grandes clases de problemas de esta categoría:

1) La transformación es positiva

2) La transformación es negativa
3) La pregunta se refiere al estado final
4) La pregunta se refiere a la transformación
5) La pregunta se refiere al estado inicial

Ejemplos:

Transformación positiva	Pregunta estado final	Pregunta estado inicial	Pregunta en la transformación
	Laura tiene 5 figuritas ganó 6. ¿Cuántos tiene ahora?	*Laura ganó 6 figuritas. Ahora tiene 11. ¿Cuántas tenía antes de jugar?*	*Laura tiene 6 figuritas. Después de jugar se quedó con 11. ¿Cuántas ganó?*
Transformación negativa	*Laura tenía 6 figuritas. Perdió 3. ¿Cuántas tiene ahora?*	*Laura perdió 3 figuritas. Ahora tiene 6. ¿Cuántas tenía antes de jugar?*	*Laura tenía 6 figuritas; después de jugar se quedó con 3. ¿Cuántas perdió jugando?*

Cuadro 4. Ejemplos de la segunda categoría de Vergnaud (1991)

- Tercera categoría

Relación entre dos medidas

- *Pedro tiene 10 dulces y Jaime tiene 4 dulces menos. ¿Cuántos dulces tiene Pedro más que Juan?*

- Cuarta categoría

1) Si se conocen las dos transformaciones elementales, encontrar la compuesta

- *Juan jugó 2 partidos de canicas. En el primero ganó 16 canicas .En el segundo ganó 9¿Qué sucedió a fin de cuentas?*

2) Si se conocen la transformación compuesta y una de las elementales, encontrar la otra

- *Juan jugó 2 partidos de canicas .En el primero ganó 16 canicas. A fin de cuentas ganó 25 ¿Qué sucedió en el segundo partido?*

- Quinta categoría

En esta categoría una transformación opera sobre una relación para dar lugar a un estado relativo. Se vuelven a encontrar las clases de problemas de la segunda categoría, con subclases más numerosas debido a las diversas posibilidades que existen por el signo y el valor absoluto.

- *Juan tiene 2 canicas más que Pedro. Después de un juego, cada quien gana 3 canicas. ¿Cuántas canicas más que Pedro tiene ahora Juan?*

- Sexta categoría

En esta categoría dos estados relativos se componen en un estado relativo; se vuelven a encontrar el tipo de clases de la primera categoría, con numerosas subclases.

- *Juan tiene 2 canicas más que Pedro y Pedro tiene 3 canicas más que Luis. ¿Cuántas canicas más que Luis tiene Juan?*

Clasificación según Carpenter & Moser y Puig & Cerdán

A partir de esta clasificación de Vergnaud, diferentes autores han realizado distintas clasificaciones respecto a la del autor citado. Así, Puig y Cerdán (1995) y Heller y Greeno (1978, citados en Vicente, Orrantia y Verchaffel, 2008) agrupan los problemas aditivos en problemas de cambio, combinación y comparación. Vicente et al. (2008) y Carpenter y Moser (1984, citados en Puig y Cerdán, 1995) consideran una categoría más que es la de igualación. A continuación se exponen las cuatro categorías.

- Problemas de cambio

Son los que parten de una cantidad inicial, sobre la que se realiza un cambio, como es añadir o quitar dando como resultado una cantidad final (Heller y Greeno, 1978, citados en Vicente et al., 2008).

Así mismo para Puig y Cerdán (1995) las relaciones lógicas aditivas se encuentran en una secuencia temporal de sucesos; en estos problemas se pueden distinguir tres momentos diferentes en los que se describe cómo una cantidad inicial es sometida a una acción directa que la modifica. Se considera que la acción a la que se somete la cantidad inicial puede aumentar o disminuir a ésta y que dos de las cantidades deben estar contenidas en la parte informativa del problema, mientras que la otra cantidad es la incógnita.

- *Juan tiene 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas ¿Cuántas canicas tiene ahora?*

- *Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas; ahora tiene 5 canicas ¿Cuántas canicas perdió?*

- Problemas de combinación

En este tipo de problemas se presenta una relación entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos; es decir que el problema parte de dos cantidades o partes que se combinan entre sí para dar lugar a una nueva cantidad total (Heller y Greeno, 1978, citados en Vicente et al, 2008). Se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte-parte todo. La relación entre las proposiciones está dada por sustantivos, adjetivos y localizaciones (Puig y Cerdán ,1995).

- *Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?*

- *Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?*

- Problemas de comparación

En este tipo de problemas se le plantean a los alumnos situaciones comparativas, donde se presentan dos cantidades, una cantidad se compara con la otra de manera que como resultado de esta comparación se obtiene una tercera (Heller y Greeno, 1978, citados en Vicente et al; 2008).

En los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades, las cantidades presentes se denominan cantidades de referencia, comparada y diferencia; la cantidad comparada aparece a la izquierda de la expresión "más que" o "menos que", y la cantidad de referencia a su derecha (Puig y Cerdán, 1995).

- *Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?*
- *Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?*

- Problemas de igualación

En su enunciado este tipo de problemas supone una situación de cambio insertada en otra más general de comparación, de manera que el conjunto de diferencia se formule en términos de la cantidad que hay que añadir o quitar a la primera para que sea igual a la segunda. Son problemas que plantean acciones para lograr que una cantidad sea igual a otra.

Dicho de otro modo, una de las cantidades debe modificarse o se modifica creciendo o disminuyendo, para ser igual a la otra cantidad.

Para Carpenter y Moser (1984, citados por Puig y Cerdán, 1995) estos problemas se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por medio del comparativo de igualdad, *"*tanto como".

- *Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 6 canicas ¿Cuántas canicas se le tienen que dar a Pedro para que tenga las mismas que Juan?*

- *Pedro tiene 5 canicas. Si a Juan le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?*

Las clasificaciones anteriores de los problemas aritméticos de una etapa con estructura aditiva, han sido establecidas por diferentes autores a través de distintas investigaciones experimentales, el mismo criterio semántico puede extenderse a algunos problemas de más de una etapa.

Comparación entre ambas clasificaciones

A continuación se realiza una comparación entre las clasificaciones de los problemas aditivos que realiza Vergnaud (1991) que refiere a las relaciones aditivas y la estructura semántica descritas por Carpenter y Moser (1984) y por Heller y Greeno (1978) (respectivamente citados en Puig y Cerdán (1995) y en Vicente et al; 2008). Dado que estos últimos autores trabajan solamente con problemas de una etapa, sólo se consideran aquí las primeras tres categorías de Vergnaud.

Relaciones aditivas por Vergnaud	*Estructura semántica por Carpenter y Moser y por Heller y Greeno*
Primera categoría (composición)	Combinación
Segunda categoría(transformación)	Cambio
Tercera categoría (relación)	Comparación / Igualación

Cuadro 5. Comparación de las clasificaciones sobre tipos de problemas

Según ambas clasificaciones, los problemas están compuestos por datos, objetivos y obstáculos. La diferencia se encuentra en el contexto en el que se plantean los datos del problema, esto es de manera estática o dinámica.

Por lo tanto, las variables de un problema matemático pueden ser descritas de la siguiente manera:

Un problema matemático aditivo puede ser resuelto por una o más operaciones; esto es dependiendo de la relación que exista entre los datos, puede ser de 1 o 2 etapas como lo mencionan Castro et al. (1992). De esta manera se distinguen los tipos de problemas de acuerdo a las clasificaciones anteriormente mencionadas.

Un problema siempre contendrá la parte informativa y la pregunta, es decir los datos y la incógnita. El lugar donde se encuentre la incógnita, según refiere Vergnaud (1991), da lugar a una variedad de subclases en los tipos de problemas, lo que permite analizar el proceso de resolución e identificar los posibles errores que pueden cometer los alumnos en la resolución de problemas.

Por otra parte para Mayer (1986) lo que necesita el alumno para resolver un problema es aplicar el conocimiento: lingüístico, semántico, esquemático, operativo y estratégico (descritos en el siguiente apartado).

2.4. Proceso de resolución de problemas.

Para Callejo (1998), la resolución de problemas matemáticos es una actividad altamente formativa por los tipos de razonamiento, los tipos de conocimiento y las destrezas que se ponen en práctica.

Puig y Cerdán (1995) mencionan que el proceso de resolución de problemas es la actividad mental desplegada por el alumno, desde el momento en que se le presenta un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea.

Para Mayer (1986) los tipos de conocimiento que son importantes para la comprensión y resolución de problemas matemáticos son:

- Conocimiento lingüístico: es el conocimiento de la lengua en que está redactado el problema, como reconocer las palabras.
- Conocimiento semántico: conocimiento del contexto en el que está planteado el problema a fin de evitar errores en el significado de las palabras y a la vez conocer el contexto en el que se plantean los datos.
- Conocimiento operativo: permite saber cómo llevar a cabo las secuencias de las operaciones.
- Conocimiento estratégico: que permite dominar los procedimientos y técnicas que componen a éste, para manejar los diferentes tipos de conocimientos disponibles para resolver un problema.

De acuerdo con lo anterior, en el proceso de la resolución de problemas matemáticos, el primer paso que se debe realizar es traducir las palabras del problema a una representación interna que puede ser desde las palabras de un problema narrado hasta una ecuación. El segundo paso consiste en aplicar las reglas de la aritmética a la representación interna, es decir, pasar de la ecuación al valor numérico del dato desconocido.

Si la resolución de problemas es una exigencia cognitiva imprescindible para el aprendizaje de las matemáticas (SEP, 2011), uno de los aspectos que podrían ayudarle al alumno es el modelo resolutor de Polya, (1945/1989) porque le va a brindar herramientas para encontrar la solución. En su modelo, establece las necesidades para aprender a resolver problemas. Para el autor el principal objetivo es ayudar a que el alumno adquiera la mayor experiencia en la tarea de resolución de problemas.

Polya (1945/1989) menciona que el proceso de resolución de problemas tiene cuatro etapas, descritas a continuación:

1. *Comprender el problema*. Se refiere a entender la pregunta, es decir identificar la incógnita, datos y condiciones que varían de acuerdo con el tema abordado y su nivel de dificultad, implicando entender tanto el texto como la situación que presenta el problema.
2. *Concebir un plan*. Poder encontrar la idea de la solución y un plan, es decir saber el procedimiento a realizar una vez comprendida la situación planteada y teniendo claro a lo que se quiere llegar. Éste es el momento de planificar acciones que lleven al alumno hacia la solución.
3. *Ejecutar un plan*. Comprobar cada uno de los pasos; es el momento en el que los alumnos implementan sus propias estrategias o heurísticas para llegar a la solución; es poner en práctica todas las acciones planificadas.
4. *Visión retrospectiva*. En esta etapa se verifica el resultado obtenido, para comprobar si éste es la respuesta correcta al problema planteado, además de reflexionar cuáles fueron las vías utilizadas para llegar a la solución.

Bransford y Stein (1984, citados por Luceño, 1999) refieren un método donde proponen, a diferencia de Polya (1945/1989), cinco fases para la resolución de problemas:

1. Identificación de que un problema existe y cuál es el problema
2. Definición y representación del problema
3. Exploración de distintas estrategias
4. Actuación de estrategia seleccionada
5. Logros, observación y evaluación de los resultados

Maza (1991) recupera el método de Polya (1945/1989), y diferencia dos procesos en la fase de comprensión: análisis y representación del problema. Además extiende la fase de visión retrospectiva, es decir si lo realizado en cada fase es correcto y le ayuda a resolver la siguiente fase.

1. Análisis del problema, lo que implica analizar y descomponer la información del enunciado.
2. Representación del problema, relacionando los elementos del problema.
3. Planificación, eligiendo la estrategia para su solución
4. Ejecución, aplicación de la estrategia adecuada, revisión constante de tal aplicación.
5. Generalización, enlazándolo con algún proceso que le permita resolver a futuro problemas similares.

Diferencias en el Proceso de Resolución		
Polya (1945/1989)	*Bransford y Stein (1984)*	*Maza (1991)*
Comprender el problema.	Identificación del problema y cuál es el problema.	Analizar el problema y descomponer la información.
Concebir un plan.	Definición, representación del problema y exploración de distintos procedimientos.	Representación del problema y planificación del procedimiento.
Ejecutar un plan.	Actuación del procedimiento seleccionado.	Ejecución del procedimiento y revisión constante de la aplicación.
Visión retrospectiva.	Logros, observación y evaluación de los resultados.	Generalizar para aplicación de procesos en otros problemas similares.

Cuadro 6.Diferencias en el proceso de resolución

Como se puede apreciar, las propuestas de Bransford y Stein (1984 citados por Luceño, 1999) y Maza (1991) contemplan cinco fases, pero contienen implícitamente la parte medular del modelo Polya (1945/1989): comprender el problema, concebir un plan, ejecutar un plan y verificar la solución. Sin embargo Luceño (1999) considera que este modelo hay que ampliarlo para profundizar en el significado de cada paso y en el qué hacer para alcanzar la meta en cada caso, determinando y desarrollando un procedimiento generalizado para la resolución de problemas.

En este trabajo se considera que el modelo de resolución de problemas requiere de comprensión, concebir un plan, ejecutarlo y visión retrospectiva. Cada uno de los pasos del modelo requiere de un análisis y revisión constante que va a depender del conocimiento previo del alumno.

En el siguiente apartado se describirán los factores que intervienen en el proceso de la resolución de problemas.

2.5. Factores que intervienen en la resolución de problemas matemáticos.

Diversos factores intervienen en la resolución de problemas. Judías y Rodríguez (2007) los clasifican en los siguientes tres bloques: relativos al problema, contexto y al alumno. Aquí se definirán brevemente los dos primeros y se hará un análisis más exhaustivo del tercero.

- RELATIVOS AL PROBLEMA MATEMÁTICO

Dentro de este bloque para los autores existen dos factores: el lenguaje en el que se presenta el enunciado y el tipo de problemas a resolver. Los que ya se trataron en el apartado de problemas aditivos

- RELATIVOS AL CONTEXTO

Se considera que los alumnos se comporten de manera diferente según perciban la meta de la situación en la que se hallan, por lo que el contexto influye en el aprendizaje de los alumnos, por ello se debe tomar en cuenta:

a) Los conceptos y procedimientos matemáticos están inmersos en el contexto sociocultural donde se enseñan y se aprenden.
b) Debe modificarse la metodología didáctica para que tenga lugar la generalización de los conocimientos matemáticos que se enseñan en la escuela a los problemas que los alumnos afrontan fuera de ella.
c) Influye sobre la evaluación de los aprendizajes matemáticos pues obliga a ampliar el objeto de la evaluación para poder dar cuenta de los conocimientos y procedimientos matemáticos que el alumno adquiere en contextos informales.

- RELATIVOS AL ALUMNO QUE RESUELVE UN PROBLEMA

Factores relativos al alumno: la visión de Schoenfeld

Dentro de este bloque Schoenfeld (1992) menciona cuatro factores importantes que clasifica de la siguiente manera: conocimiento base, heurísticos, metacognición y componentes afectivos. A continuación se describen estos factores por otros autores.

- Conocimiento base

Dentro de esta dimensión se engloba tanto los conocimientos base que posee el individuo, como el acceso que tiene a ellos y cómo los utiliza. En el conocimiento base se incluyen los conocimientos formales e informales sobre hechos, definiciones y procedimientos matemáticos; estos juegan un papel crucial en la fase de representación del problema, pero no sólo intervienen en esta fase. Es decir, en la fase de identificación del problema (primera fase del método Polya de1945) se encontrarían implicados los conocimientos lingüísticos y semánticos (Mayer, 1986).

- Heurístico

Para De Corte (1993), los heurísticos son estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y transformación del problema, carentes de contenido matemático específico; no aseguran llegar a la solución, pero aumentan las posibilidades de alcanzarla.

Dentro de esta dimensión conocer un heurístico implica saber cuándo hay que usarlo, cómo se relaciona con los otros heurísticos, saber todas sus variantes y sus aplicaciones y saber qué puede esperarse de éste (Puig y Cerdán, 1995).

- Metacognición

Es la capacidad para hacer conscientes los conocimientos y habilidades que posee el alumno. Implica una cierta habilidad para planificar estrategias, producirla información y hacerla consciente, reflejar y evaluar la propia productividad del pensamiento. Es una característica clave del pensamiento formal, y por lo tanto, un elemento esencial para el aprendizaje de las matemáticas.

Presseisen (citado por Beltrán, Bermejo, Prieto y Vence, 2000) mencionan dos componentes metacognitivos:

- *Control de la tarea.* Se refiere a las habilidades de organización y secuenciación del trabajo, detección y corrección de errores; en su conjunto estas habilidades permiten una mayor precisión del pensamiento.
- *Selección y uso de estrategias*. Se consideran las siguientes habilidades: atención, relación de lo conocido con lo desconocido, comprobación y corrección de errores.

En el metaconocimiento se menciona a la autoevaluación que hace el individuo de sus propias capacidades y limitaciones respecto a la resolución de problemas.

Los procesos de autorregulación de la cognición aplicados a la resolución de problemas serían los responsables de las distintas decisiones que toma el alumno en el transcurso de la resolución y que tienen que ver con la comprensión del problema, planificación de un plan, ejecución de éste y visión retrospectiva (Polya, 1945/1989).Es mediante la resolución de problemas que se desarrollan estas habilidades meta cognitivas.

- Componentes afectivos

Los componentes afectivos parten desde el contexto. Cuando se refiere a éste, se trata del microcontexto que supone la situación de aprendizaje, así como al macrocontexto conformado por distintas influencias sociales. Es así como el contexto juega un papel importante en la formación y mantenimiento de las creencias, emociones y actitudes (Mandler 1989, citado por Judías y Rodríguez, 2007).

Las *creencias* con respecto a la resolución de problemas refieren al conocimiento subjetivo que tiene el alumno acerca de las matemáticas; las creencias pueden influir tanto en la motivación con la que los estudiantes se enfrentan a las matemáticas, como en el rendimiento, e incluso en la elección de las estrategias de resolución que se aplican (Mayer, 1986).

Se mencionan a las *actitudes* como predisposiciones aprendidas que llevan a los alumnos a actuar de una forma determinada ante personas y situaciones específicas, en este caso ante las matemáticas (Quiles, 1993; citado por Judías y Rodríguez, 2007)

Las *emociones* se refieren a las reacciones que tienen los individuos cuando se enfrentan ante una tarea matemática. Los alumnos, cuando no saben la respuesta la buscan y no les importa si tiene lógica o no (Mcleod 1992 citado en Judías y Rodríguez, 2007).

Factores relativos al alumno: la visión de Podall y Comellas

Desde otra perspectiva, Podall y Comellas (1996) describen que los factores relativos al alumno cuando resuelve un problema son los siguientes:

- Capacidad cognitiva

Refieren a los conocimientos base (como lo mencionan Judías y Rodríguez, 2007) ya que son una serie de disposiciones y recursos adquiridos que permiten realizar una tarea dada en determinado momento.

- Actitud

Las matemáticas y la resolución de problemas forman parte de los diferentes niveles educativos y, prácticamente, en todos los entornos sociales y culturales, siendo la materia escolar más rechazada por la complejidad de su aprendizaje y por la necesidad de implicarse para lograr introducir mecanismos y procesos.

- Habilidades básicas.

Conjunto de aptitudes básicas que se desarrollan durante la educación: sentido numérico, pensamiento algebraico, forma, espacio y medida manejo de la información desde las primeras etapas de la escolaridad y a lo largo de toda la educación obligatoria.(SEP, 2011)

Comparación de las dos visiones

A continuación se realiza una comparación entre los factores de acuerdo a la clasificación de los autores.

Shoenfeld (1992)	Podall y Comellas (1996)
• Metacognición • Heurísticos • Conocimiento base • Componentes afectivos (creencias, actitudes, emociones)	• Capacidad cognitiva • Habilidades básicas • Actitud

Cuadro 7. Factores relativos al alumno que intervienen en la resolución de un problema matemático

Los autores mencionados anteriormente muestran la importancia de los factores relativos al alumno, pues son elementos que ayudan o dificultan la resolución del problema. Coinciden en que el conocimiento que posea el alumno tanto formal como informal es importante para la resolución del problema, y en que la actitud que se tenga ante el problema influye en esta resolución. Como se ilustra en el cuadro anterior la metacognición y heurísticos y las habilidades básicas son parte del conocimiento base y se desarrollan a medida que se resuelven problemas; los cuatro en conjunto se relacionan pues son parte esencial de la representación del problema. Los procedimientos que el alumno planifica o bien ejecuta sistemáticamente son procesos que provienen del conocimiento formal e informal del alumno al resolver un problema.

La eficiencia en la solución de un problema no depende de la disposición de estrategias o habilidades generales y transferibles, válidas para cualquiera, sino más bien de los conocimientos específicos, útiles para solucionar ese problema (Pérez y Pozo, 1994).

El primer supuesto de los estudios sobre la solución de problema por expertos y novatos es que las habilidades y estrategias de solución de problemas son específicas de un determinado dominio y, por tanto, difícilmente transferibles de un área a otra.

Las cuatro fases de Polya sólo proporcionarían las reglas formales del "buen pensar”: no asegurarían una eficaz solución de problemas sino van acompañadas de un conocimiento contextual específico. Es aquí en donde la eficiencia permite que el alumno ejecute todos los recursos que conoce y entonces tener la capacidad para alcanzar el objetivo que es el poder resolver el problema.

El enfoque de expertos/novatos asume que no difieren en sus capacidades generales de procesamiento, sino en su formación específica. Por consiguiente, el entrenamiento en solución de problemas no debe apoyarse tanto en el desarrollo de capacidades generales como en proporcionar al alumno conocimiento específico de dominio.

Las diferencias en conocimientos específicos entre expertos y novatos, debidas no sólo a un incremento cuantitativo de la información específica disponible en la memoria, sino también a una reestructuración de esa información que da lugar a nuevas y más estructuras conceptuales, pueden llegar a compensar otras limitaciones en el procesamiento de información (Pérez y Pozo, 1994)

La resolución de problemas se considera como un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor, pues consiste en un conjunto de actividades mentales y conductuales que se deberán desarrollar durante toda la vida. Esto implica el fortalecimiento de factores de naturaleza cognoscitiva, afectiva, estratégica y motivacional (Figueroa, 2006).

2.6. Estrategias de resolución de problemas

Caracterización

Monereo (1998) define a una estrategia como una serie de acciones para alcanzar un propósito de aprendizaje. Las estrategias pueden ser flexibles, con la característica de adaptación a las necesidades del contexto en que se trabaje.

Por su parte, Figueroa (2006) afirma que las estrategias en resolución de problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los alumnos, para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos en metas y obtener una solución.

De esta manera las estrategias en resolución de problemas son un conjunto de acciones o procedimientos que se aplican de modo intencional y deliberado a una tarea y que no podrían reducirse a tareas automatizadas. Dentro de los procedimientos que los alumnos pueden adquirir para resolver problemas, algunos consisten en técnicas y rutinas que deben automatizar (Pozo y Postigo, 1994).

Anderson (1983) atribuye a los conocimientos procedimentales algunas características que identificarían el uso de estrategias por parte de los alumnos son las siguientes:

a) La aplicación de las estrategias requiere de planificacion y control de la ejecución y que estén relacionadas con el metaconocimiento o conocimiento sobre los propios procesos psicológicos.

b) Las estrategias implican un uso selectivo de los recursos y capacidades disponibles. Para que el alumno pueda utilizar cualquier estrategia debe disponer de recursos alternativos, entre los cuales decide utilizar, en función de las demandas de la tarea de aprendizaje que se le presenta, aquellos que cree óptimos.
c) Las estrategias se constituyen de otros elementos más simples, técnicas o destrezas. El uso eficaz de una estrategia depende del dominio de las técnicas que la componen, por ejemplo cuando se utiliza una técnica matemática del tipo de la regla de tres como un recurso dentro de una estrategia de resolución de problemas aritméticos.

Atribuir estas características, mencionadas por Anderson (1983), a las estrategias de solución de problemas permite reconocer su estrecha vinculación con otros contenidos, no sólo procedimentales sino también conceptuales.

El dominio de las estrategias posibilita al alumno planificar y organizar sus propios procedimientos en la resolucion de problemas, llamados técnicas, destrezas o algoritmos. En la aplicación de una estrategia a una tarea concreta es esencial el conocimiento conceptual específico relacionado con la tarea. (Pozo y Postigo, 1994).

Tipos de estrategias aditivas

Campistrous y Rizo (1999) realizaron un estudio de caso con el objetivo de “aislar” las estrategias que se utilizan los alumnos al momento de resolver problemas matemáticos. Clasificaron el uso de las mismas en dos categorías: reflexivas e irreflexivas.

> *Estrategias reflexivas.* Implican un proceso de análisis previo, sobre si se podía haber llegado a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.
>
> *Estrategias irreflexivas.* Responden a un proceder automatizado, sin realizar un análisis previo.

Las estrategias mencionadas se clasifican de acuerdo a los significados y procedimientos asumidos en la resolución de problemas aditivos por los alumnos en:

- *Buscar las palabras clav*e indican qué operación utilizar: consiste en asociar a determinadas palabras el significado de operaciones aritméticas, las cuales se interpretan como sinónimos de las diferentes operaciones de cálculo. En ocasiones este procedimiento puede ayudar al alumno a saber qué operación realizar, pero la certeza de esto puede variar.
- *Procedimiento rutinario asociado a un indicador textual*: se caracteriza por reconocer ciertos indicadores en el texto lo cual permite asociarlos a un grupo de problemas que se resuelven utilizando un algoritmo específico. En esta ocasión este procedimiento se analizó con base en la ejecución de la multiplicación o división, siendo la operación que se estaba revisando en clase (tercero de primaria).
- *Tanteo:* consiste en buscar la solución del problema aplicando la técnica de ensayo y error, la cual expresa que se deben escoger los valores de manera arbitraria, que guardan una estrecha relación con la solución del problema, analizando si satisfacen las condiciones que se imponen hasta encontrar la solución, y posteriormente verificar si otros valores del dominio cumplen también con la solución.
- *Operar con los números dados en el texto*: consiste en ubicar los números que se plantean en el problema y posteriormente operar con éstos sin importar si el resultado satisface o no a la pregunta.

- *Usar números razonables*: consiste en adivinar el resultado del problema seleccionando un número que se piensa es altamente probable como solución y se prueba si es la solución.
- *Identificar los significados de las operaciones en el texto del problema*: consiste en analizar la situación planteada en el problema para identificar las operaciones necesarias que resuelven el problema; esta estrategia requiere de mucha comprensión lectora y de un buen análisis del problema, que muchas veces es necesario reformular para utilizar precisamente las operaciones que correspondan al planteamiento descrito.

A continuación se describe la clasificación de las estrategias para la resolución de problemas aditivos que realizan Carpenter y Moser (1984, citados por Bermejo, 1999)

En investigaciones realizadas sobre las operaciones aritméticas básicas, expresan que los alumnos, antes de recibir la enseñanza formal sobre algoritmos, construyen por sí mismos, un amplio abanico de estrategias. Por ejemplo Carpenter y Moser (1984, citados por Bermejo, 1999), a partir de un estudio realizado con alumnos de cómo resuelven problemas aditivos (suma y resta), distinguen las siguientes estrategias que son utilizadas para encontrar el resultado, denominándolas como se muestra en el cuadro 8.

Categorías	*Estrategias de adición*	*Estrategias de sustracción*
Modelado directo	• contar todo	• quitar de • quitar hasta • emparejamiento
Conteo	• contar a partir del primer sumando • contar a partir del sumando mayor	• contar hacia atrás
Hechos numéricos	• Reglas	• Reglas

Cuadro 8. Clasificación de estrategias aditivas.

Estrategias para la adición

- Modelado directo: es la estrategia más simple que se caracteriza por representar ambos o uno de los sumandos mediante objetos o dedos.

- Contar todos. Consiste en contar el conjunto resultante comenzando por el uno una vez han sido representadas las cantidades mediante objetos o dedos.

- Conteo: Se distingue por la presencia de este procedimiento, como elemento esencial y por la ausencia de modelado directo.

- Contar a partir del primer sumando se comienza la secuencia de conteo a partir del primer conjunto, añadiendo a continuación el segundo, de modo que la respuesta consiste en el último numeral empleado.

- Contar a partir del sumando mayor el procedimiento es similar al mencionado anteriormente, pero ahora el conteo comienza a partir del sumando mayor.

- Hechos numéricos: reglas que se refieren a procedimientos en los que el alumno compone y descompone números para hallar la suma total.

Estrategias de sustracción

- Modelado directo: representa al minuendo y/o sustraendo con los dedos u objetos.

- Quitar de: se separa del total la otra cantidad y se obtiene la solución por recuento de lo que queda.

- Quitar hasta: se separa del total lo que hace falta separar para que quede la otra cantidad, y se obtiene la solución por recuento de lo que se ha separado.

- Emparejamiento: esta consiste en el apareamiento sobre un modelo físico de las cantidades, y el recuento posterior de la parte que queda sin pareja.

- Conteo: se caracteriza porque no hay representación de la operación con dedos u objetos.
- Contar hacia atrás se refiere a contar desde el número mayor hasta que se llega al número menor, contando los numerales emitidos durante el conteo hacia atrás para encontrarla respuesta.
- Hechos numéricos: reglas que se refieren a procedimientos en los que el alumno compone y descompone números para hallar la suma total.

2.7. Errores frecuentes entre los alumnos

Para Kilpatrick (1995) un error se produce cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática; esta respuesta es errónea, la solución proporcionada es un error en relación a la cuestión planteada. Para el autor los errores de los alumnos al resolver problemas no son casuales, ya que en algunos casos están basados en experiencias, conocimientos previos y también en preconceptos. En otros casos presentan patrones, o regularidades en sus equivocaciones, atribuibles a concepciones erróneas o simplemente distracciones. Muchas veces los alumnos no son siquiera capaces de brindar una respuesta.

Godino, Batanero y Font (2003), se refieren al error cuando la respuesta que da el alumno no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. Además señalan que “si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos conceptuales y procedimentales”.

Para Bermejo; Lago; y Rodríguez (1998) los errores que suelen cometer los alumnos juntamente con las estrategias utilizadas constituyen datos altamente informativos para conocer los procesos cognitivos que siguen los alumnos en la resolución de problemas aditivos. Los errores varían fundamentalmente en función del nivel de escolaridad. En los problemas matemáticos, y en particular en los problemas aditivos, existen dos grandes categorías de errores: errores de ejecución y errores de representación.

Errores de ejecución

Los errores de ejecución se originan cuando al resolver la operación aritmética adecuada, el alumno comete una equivocación. Estos errores se deben tanto a una carencia de conocimiento sintáctico como a un desconocimiento de los aspectos semánticos, de modo que resulta imprescindible la integración de ambos tipos de conocimiento en el aprendizaje de las operaciones aditivas. En la suma o resta los errores semánticos y sintácticos se pueden caracterizar como sigue:

- *Errores semánticos*: hacen referencia a conceptos básicos implicados en la ejecución del algoritmo, por ejemplo a la comprensión del valor posicional de los números (por ejemplo, diferenciar unidades, decenas y centenas, o que las llevadas en la columna de las centenas no tienen un valor de 1 sino de 100).

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 152 \\ +\ 280 \\ \hline 330 \end{array}$$

Incorrecto

$$\begin{array}{r} 2\ \ \ \ \ \ \\ \cancel{1}52 \\ +\ 280 \\ \hline 430 \end{array}$$

Correcto

- *Errores sintácticos*: desconocimiento de una regla aditiva. Se debe proceder columna por columna y consignar un sólo digito en cada columna y no dos; además, en el algoritmo tradicional se comienza por la columna de la derecha.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 28 \\ \hline 313 \end{array}$$

Incorrecto

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 28 \\ \hline 43 \end{array}$$

Correcto

Errores de representación

Los errores de representación surgen cuando el alumno construye una representación inapropiada del problema a partir del texto; los más relevantes son: repetir una de las cantidades propuestas en el problema, inventar la respuesta y seleccionar una operación inadecuada. Se describen a continuación.

- Repetir una de las cantidades propuestas del problema

Se observa frecuentemente en los diversos tipos de problemas aunque especialmente en los problemas aditivos, tales como comparación, cambio y combinación (Puig y Cerdán, 1995 y Heller y Greeno, 1978, citados en Vicente et al; 2008).

Problema de comparación. Por ejemplo, ante un problema como

- Mario tiene 9 globos más que Javier ¿Cuántos globos tiene Mario?,

  El error de repetir consiste en dar como respuesta 9. Mayer (1986) apunta que esta representación se produce porque el alumno interpreta la proposición de relación (*Mario tiene 9 globos más que Javier*) como una proposición de asignación: el alumno entiende que debe asignarle a Mario la cantidad que dice el problema.

Problemas de cambio. En un problema como

- María tiene algunos lápices. Isabel le da 5. Ahora María tiene 17 lápices. ¿Cuántos lápices tenía María al principio?,

  Los errores surgen sobre todo porque los alumnos se muestran incapaces de representar los conjuntos de partida y cambio separadamente (5, 17 y 5 + 17).

Problemas de combinación. Al presentarse un problema del tipo

- Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene también algunas manzanas. Pedro y Ana tienen juntos 9 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?,

  Riley y otros (citados por Bermejo et al, 1998) atribuyen los errores a una falta de comprensión de la relación parte-todo. Es decir los alumnos que no disponen de este esquema interpretan cada frase del problema separadamente, sin llegar a inferir las relaciones existentes entre los conjuntos.

- Inventar la respuesta.

  Suele aparecer cuando el alumno no comprende el problema.

- Selección de una operación inadecuada.

Consiste en aplicar la forma canónica A+B =?, cuando en el problema la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Este error que se encuentra presente en las cuatro categorías de problemas, puede tener tres causas.

1) Los alumnos no aprecian la información temporal contenida en el texto.
2) Los alumnos no entienden la proposición comparativa que determina el otro sumando, como ocurre por ejemplo en los problemas de comparación.
3) Los alumnos no entienden la indefinición relativa a uno de los sumandos y le asignan la cantidad que figura a continuación en el enunciado del problema como en el ejemplo:

- Pedro tiene algunos caramelos. María le da 4. Ahora Pedro tiene 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía Pedro al principio?

A continuación se presentan los tipos de errores que se presentan en los 4 tipos de problemas aditivos

Tipos de errores en los problemas aditivos (Bermejo, Lago y Rodríguez,1998).	
Errores ejecución	Errores de representación
• Semánticos • Sintácticos	• Repetir una de las cantidades • Inventar la respuesta • Seleccionar operación inadecuada

Cuadro 9. Tipos de errores en los problemas aditivos.

2.8. Plan y programa de estudio en México, 2011

En el Plan y Programa de estudio 2011 (SEP) refiere la importancia de las matemáticas en la educación básica, así como las competencias y habilidades a desarrollar por el alumno.

En México la perspectiva que se presenta en el Plan y Programa de estudio 2011 (SEP) considera en educación básica a las matemáticas como el conocimiento y uso de lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición. A lo largo de esta educación se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica: formular y validar conjeturas, plantearse nuevas preguntas, comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución, buscar argumentos para validar procedimientos y resultados, encontrar diferentes formas de resolver los problemas y manejar técnicas de manera eficiente.

Para Perrenoud (1999, citado por la SEP, 2009), en la educación primaria se pretende que el alumno manifieste competencias que generen la puesta en práctica de conocimientos, habilidades, actitudes y valores, para el logro de propósitos en contextos y situaciones diversas; de ahí surge el concepto de movilizar conocimientos.

Dado que este trabajo se centrará en los niños de tercer año, a continuación se mencionará específicamente lo que respecta a ese grado. Al término de 3° de Primaria la SEP pretende que los estudiantes sepan resolver problemas aditivos con diferente estructura, utilizando los algoritmos convencionales.

Los contenidos a revisar de acuerdo con el Plan y Programa de Estudios (2011), se dividen en cuatro ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; Manejo de la información; y Actitud hacia el estudio de las matemáticas.

A continuación se describe el eje temático pensamiento algebraico y sentido numérico, que tiene cinco componentes de éste último tales: significado del número, capacidades numéricas, tamaño de los números, operaciones y referentes para los números y cantidades para ese grado.

SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO	
Durante este periodo el eje incluye los siguientes temas:	El Alumno :
1.1 Números y sistemas de numeración.	1.1.1 Lee, escribe y compara números naturales de hasta cuatro cifras.
1.2 Problemas aditivos.	1.2.1. Resuelve problemas que impliquen sumar o restar números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.
1.3 Problemas multiplicativos.	1.3.1. Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números naturales utilizando procedimientos informales.

El logro de un “buen sentido numérico” implica la adquisición de destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los números, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas.

De acuerdo con el Plan y los Programas de estudios (SEP, 2011) la formación matemática antes descrita permite a los alumnos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana. Esto se lleva a cabo por medio de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la Educación Básica.

Es de gran importancia la solución de problemas, ya que debe construirse en el entendido de que existen diversos procedimientos posibles y hay que usar al menos uno. Para resolver la situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, mismos que le permiten *entrar* en la situación, pero el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en una nueva situación.

Por ello el planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.

3. MÉTODO

En este capítulo se describe el tipo de estudio, el escenario y el procedimiento. Después se describe el instrumento a utilizar: se diseñaron 48 problemas con resolución suma o resta, a partir de las categorías propuestas por los referentes teóricos, de los cuales se eligieron cuatro por determinadas características, que se explican en el apartado 3.4. En el último apartado del capítulo se describe la metodología que se utilizó para el análisis, incluyendo las categorías utilizadas para clasificar las respuestas de los alumnos.

3.1. Tipo de estudio

Para alcanzar los propósitos de la presente investigación se empleó un estudio de tipo exploratorio para conocer las estrategias de resolución de problemas aritméticos aditivos que utilizan 30 alumnos de 3° grado de primaria.

3.2. Escenario

Escuela pública, de nivel socioeconómico medio bajo, del Estado de México de nombre "Lázaro Cárdenas", ubicada en Av. Tecamachalco s/n, Colonia San Miguel Tecamachalco, Localidad Naucalpan de Juárez, turno matutino. Se seleccionó a un grupo de 3°grado de primaria compuesto por 30 alumnos.

3.3. Procedimiento

El presente trabajo se efectuó en cuatro fases:

1) En la primera fase se diseñó un instrumento adecuado (ver el apartado 3.4).
2) En la segunda fase se seleccionó un grupo de 3°grado de primaria.
3) En la tercera fase se aplicó el instrumento a los alumnos para que ellos resolvieran los problemas que contiene.
4) Una vez obtenidos los resultados, se identificaron y analizaron las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de problemas aritméticos aditivos, de acuerdo con lo señalado en el marco teórico (ver el apartado 3.5).

3.4. Instrumento

En el momento en que al alumno se le presenta un problema es porque le va a permitir pensar y razonar acerca de la resolución de éste, así como aplicar los distintos tipos de conocimiento base que posee, tales como lingüístico, semántico, esquemático, operativo y esquemático. Estos desempeñan un papel importante, pues cada alumno tiene un proceso distinto en el desarrollo de estos conocimientos.

Se aplicó el instrumento en una sola sesión, el tiempo que se utilizó fue el que el docente dispuso durante su clase, siendo éste de 30 minutos; el instrumento fue aplicado por la autora del proyecto.

El instrumento fue el cuestionario compuesto por cuatro problemas aritméticos con estructura aditiva. Como indagación original se han diseñado diversos problemas en contextos relacionados con la cotidianidad de los alumnos que cursan 3° de primaria y que corresponden a las distintas categorías de problemas de acuerdo con los referentes teóricos conceptuales expuestos en el capítulo anterior:

a) Tipo de problema, de acuerdo a la estructura semántica que proponen Puig y Cerdán(1995) y Heller y Greeno (1978, citados por Vicente et al; 2008):
    - cambio,
    - combinación,
    - comparación,
    - igualación.

b) Lugar de la incógnita: De acuerdo a la clasificación de relaciones aditivas que realiza Vergnaud (1991) el lugar donde se encuentre la incógnita se refiere a la diversidad de problemas de un mismo tipo (cambio, combinación, comparación e igualación)

De acuerdo con el lugar en donde se encuentra la incógnita (x), hay las siguientes posibilidades:

▪ "a+b=x",		▪ 3 + 2 = ?
▪ "a–b=x",		▪ 3 – 2 = ?
▪ "a+x=c",	Ejemplo	▪ 3 + 5 = ?
▪ "a–x=c",		▪ 3 – 1 = ?
▪ "x+b=c",		▪ 5 + 2 = ?
▪ "x–b=c"		▪ 5 – 2 = ?

c) Problemas de "llevar" y de "no llevar". De acuerdo con el programa para 3er grado, los alumnos ya pueden realizar operaciones aditivas hasta con cuatro cifras utilizando algoritmos tradicionales, con transformaciones ("llevando") o sin ellas (SEP, 2011). En principio, los alumnos pueden realizar suma o resta convencional sin transformación y suma o resta con transformación, siendo que se lleve un número para continuar realizando la operación. Como es conocido que es más fácil realizar las operaciones sin transformaciones que con ellas, se consideraron las siguientes posibilidades:

- Problemas que implican operaciones sin transformaciones
- Problemas que implican operaciones con transformaciones

d) Etapas: De acuerdo a la clasificación que realiza Castro et al; (1992), hay problemas de una etapa, es decir una relación entre los dos datos, o de dos etapas. Dado que no se pueden cubrir todas las combinaciones de tipos de problema por estructura y dificultad, en esta investigación se decidió trabajar con

- Problemas de una etapa

e) Contexto: Las situaciones problemáticas deben despertar el interés de los alumnos. Esta es una característica importante pues de esta manera permite que el alumno pueda comprender las palabras que contiene el problema, y establecer relación entre los datos; además de esta manera en el análisis se podrán identificar los procesos utilizados por los alumnos en el momento de su resolución.

Se diseñaron entonces 48 problemas en contextos familiares para los niños: uno por cada tipo de problema (4), lugar de la incógnita (6), y transformaciones (2). Estos problemas se encuentran en el Anexo 1 de esta tesis.

De los problemas diseñados, se eligieron cuatro para conformar el instrumento. Los cuatro problemas aritméticos aditivos tienen las siguientes características:

Problema 1

Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?

De acuerdo a la clasificación realizada por Puig y Cerdán (1995) y Heller y Greeno (1978, citados por Vicente et al; 2008) este problema es de tipo cambio, en el que se realiza una acción a la cantidad dada. Este tipo de problema es de una etapa, es decir que sólo existe una relación es decir, entre dos datos. La incógnita se encuentra planteada en el problema de esta manera: "$a + b = x$", es decir $9 + 7 = x$. En este lugar donde se encuentra la incógnita se le pregunta por la transformación de la cantidad, al presentárseles los dos datos de manera continua en el problema. El motivo de elección del lugar de la incógnita en este tipo de problema es porque el alumno podrá identificar de manera eficaz la relación que existe entre los dos datos al preguntarle por el resultado final. La operación a realizar es una suma convencional, sin llevar, en la que el alumno podrá obtener resultado por diversos procedimientos aprendidos en la escuela o casa.

Problema 2

Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?

De acuerdo a la clasificación realizada por Puig y Cerdán (1995) y Heller y Greeno (1978, citados por Vicente, 2008) este problema es de tipo combinación, una relación entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos. Este tipo de problema es de una etapa, es decir que sólo existe una relación entre dos datos. La incógnita se encuentra planteada en el problema de esta manera "$a + x = c$" es decir, $14 + x = 23$. El lugar de la incógnita está en uno de los dos sumandos. El problema se eligió por el tipo de operación a realizar: es suma con sumando desconocido con llevar en la que el alumno tiene que realizar una comparación entre las cifras para poder obtener el resultado.

Problema 3

Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?

De acuerdo a la clasificación realizada por Puig y Cerdán (1995) y Heller y Greeno (1978, citados por Vicente et al; 2008) este problema es de tipo comparación en la que existe una relación estática. Este tipo de problema es de una etapa, es decir que sólo existe una relación entre dos datos. La incógnita planteada en el problema de esta manera "a - b = x" es decir, 17 – 4 = x El lugar de la incógnita permitirá al alumno comprender el problema y razonar sobre el procedimiento a realizar para obtener el resultado que se le pregunta. El tipo de operación a realizar es resta convencional.

Problema 4

Raquel ha completado la colección de 57 tazos de AngryBirds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

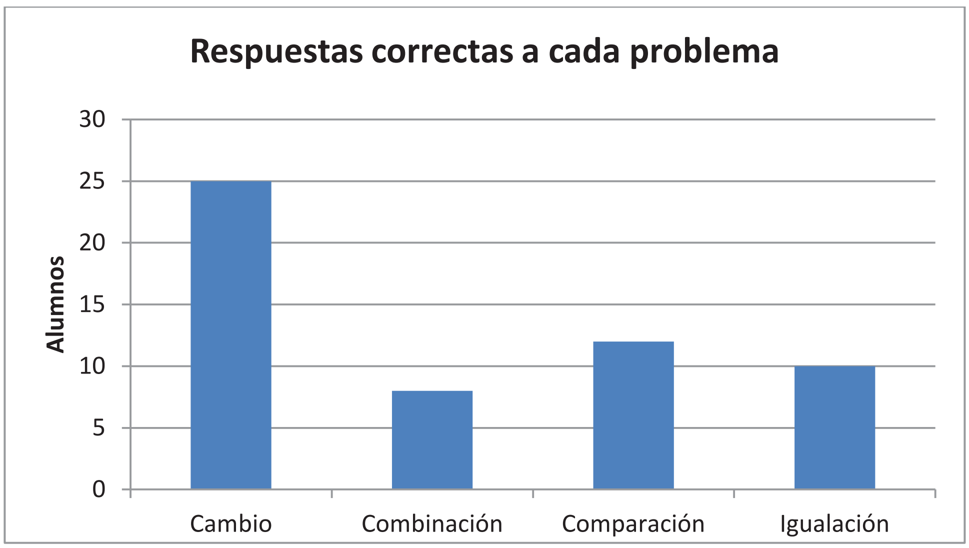
De acuerdo a la clasificación realizada por Puig y Cerdán (1995) y Heller y Greeno (1978, citados por Vicente et al; 2008) es de tipo igualación, en el que existe una relación estática entre dos medidas. Este tipo de problema es de una etapa, es decir que sólo existe una relación entre dos datos. La incógnita se encuentra planteada en el problema de esta manera "a – b = x es decir, 57 – 8 = x El lugar de la incógnita en este tipo de problema permitirá al alumno razonar sobre el procedimiento a realizar para igualar la otra cantidad y obtener el resultado que se le pregunta. El tipo de operación a realizar es una resta convencional con llevar.

El instrumento conformado por esos problemas se encuentra en el Anexo 2.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se analizan los resultados que obtuvieron en el instrumento los alumnos. Se procede con dos miradas que se retroalimentan: una de carácter cuantitativo y otra de carácter cualitativo.

La primera mirada es cuantitativa: se obtiene la cantidad de respuestas correctas en cada problema, lo que permite tener un panorama general de la dificultad que tuvieron los alumnos en cada problema



Gráfica 1. Respuestas correctas de cada problema

En esta gráfica se muestra la cantidad de alumnos que obtuvieron la respuesta correcta en cada problema, lo que permite interpretar la dificultad en la resolución del problema. El **problema 1** "cambio", es el más sencillo pues 83% de los alumnos obtuvieron la respuesta correcta mientras que el **problema 2** "combinación", fue el más difícil porque sólo 27% obtuvo la respuesta correcta.

Cabe señalar que el alumno que resuelve un problema se enfrenta a él, identifica qué procedimiento le sirve para resolverlo y finalmente lo ejecuta. Pueden ocurrir cuatro casos:

Identificación del procedimiento	Ejecución del procedimiento	Resultado
Correcta	Correcta	Correcto
Correcta	Incorrecta	Incorrecto
Incorrecta	Correcta	Incorrecto
Incorrecta	Incorrecta	Incorrecto

Tabla 1. Cuatro casos de respuestas en el instrumento.

Al identificar el resultado, en el caso de que sea correcto se puede inferir que tanto la identificación del procedimiento como su ejecución fueron correctos, pero no necesariamente qué procesos cognitivos llevaron a la correcta identificación del procedimiento a aplicar. Cuando el resultado es incorrecto se puede en algunos casos, deducir si se trata de una identificación correcta con ejecución incorrecta, o si la identificación fue incorrecta.

Cabe entonces preguntarse qué estrategias correctas ejecutaron los alumnos para dar respuestas correctas y, en el caso de las incorrectas, qué tipos de errores cometieron:esto conforma una mirada cualitativa. Así, como el énfasis se encuentra en las estrategias utilizadas, se analiza el procedimiento que el alumno utilizó. Esto permite inferir los posibles motivos por los que se utilizó la estrategia con mayor y menor frecuencia. Finalmente se presenta un análisis de los aciertos, en donde se encuentra relación con el conocimiento que puede tener el alumno.

Cabe aclarar que las categorías de Carpenter y Moser (1998) no se eligen porque sus características son globales, y no permiten tener claridad en la diversidad de procedimientos que pueden llevar a cabo los alumnos. Para estudiar estos procesos se considera que las categorías propuestas por Campistrous y Rizo (1999) permiten llegar mejor al análisis deseado; aunque el procedimiento de categorización no puede ser idéntico dado que los autores mencionados entrevistaron a los alumnos y eso fue imposible en esta investigación. Por ello, se definieron categorías basadas conceptualmente en estos autores, pero apoyadas no en la evidencia de una entrevista sino en la que los alumnos dejaron en la hoja que se les proporcionó; se logró así una equivalencia, mostrada en la tabla siguiente.

	Procedimientos utilizados en este trabajo y sus características (basadas en la evidencia plasmada en el papel)		Procedimientos de Campistrous y Rizo (1999) [CR], complementadas por la caracterización de ciertos errores según Bermejo (1999) [B], y su caracterización.	
RESULTADO CORRECTO	Con apoyo	Utiliza dibujos y texto adicionales a la operación.	Identificación de significados [CR]	Se comprende y analiza cada parte del enunciado para ejecutar la operación correcta.
	Después de intento incorrecto	Realiza dos veces la operación para obtener la respuesta correcta.	Tanteo [CR]	Ensayo y error
	Sin operaciones	Utiliza las cantidades del problema, efectúa la operación y obtiene mentalmente la respuesta.	Procedimiento no identificado	
	Con operaciones	Realiza de manera escrita la operación con los números que le proporciona el problema.	Procedimiento no identificado	
RESULTADO INCORRECTO	Procedimiento correcto con resultado incorrecto	La operación a realizar es correcta, pero la respuesta de ésta es incorrecta.	Operaciones con números dados [CR]. Corresponde también a "error de ejecución" [B]	Identificar los números del problema y operar con ellos
	Suma datos	La operación realizada es incorrecta, debido a palabras clave como "y" en dos de los problemas.	Búsqueda de palabras clave [CR]. Corresponde también a "error de representación" [B]	Asociar el significado de las operaciones a ciertas palabras
	Multiplica o divide	Es un procedimiento nuevo que se ha aprendido y debido a la frecuencia con que se utiliza en el salón de clases se ocupa en el problema.	Procedimiento rutinario [CR]. Corresponde también a "error de representación" [B]	Reconocer los indicadores en el texto (en este caso, en el contexto escolar actual)
	Repite dato	Una de las cantidades en el problema es la misma.	Procedimiento no identificado	
	Otros	La operación es incorrecta y la respuesta es incoherente con la operación realizada.	Procedimiento no identificado	

Tabla 2. Procedimientos y características de los resultados obtenidos.

Como se puede observar en la tabla, hay cuatro celdas marcadas como "procedimiento no identificado" por Campistrous y Rizo. Se trata de procedimientos en donde sólo se encuentra la operación planteada o su resultado; en ocasiones sin encontrar explicación a la operación ejecutada. Se trata, en la categorización utilizada en este trabajo, de dos casos de respuestas correctas

- Con operaciones
- Sin operaciones

Y dos de respuestas incorrectas:

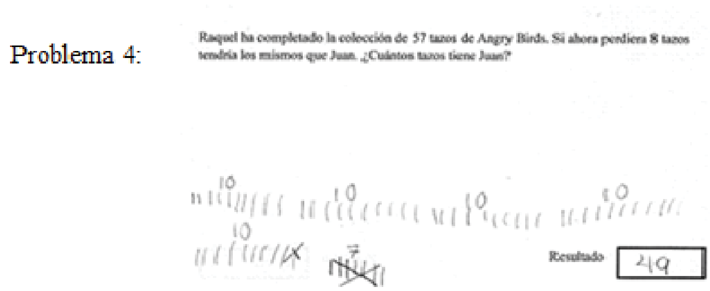
- Repite datos
- Otros

Se encuentran en esta clasificación porque a pesar de que el alumno ejecutó correcta o incorrectamente la operación de forma escrita o mentalmente, no se tuvo evidencia de qué estrategia utilizó para comprender y analizar el problema, al identificar y ejecutar la operación.

A continuación se presentan ejemplos que corresponden a las nueve categorías.

RESULTADOS CORRECTOS

Con apoyo



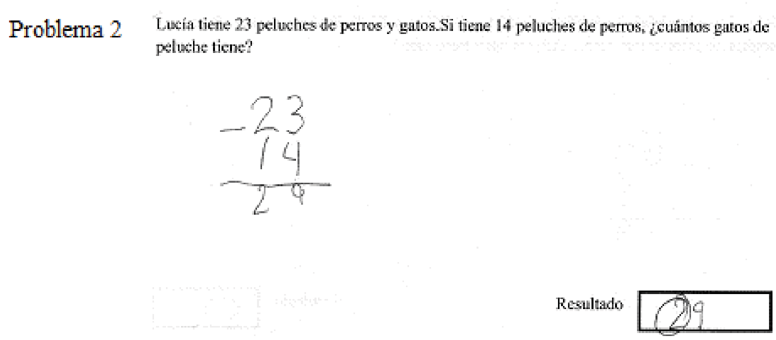
Problema 4: Raquel ha completado la colección de 57 tazos de Angry Birds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

10 10 10 10

10

Resultado 49

Después de intento incorrecto

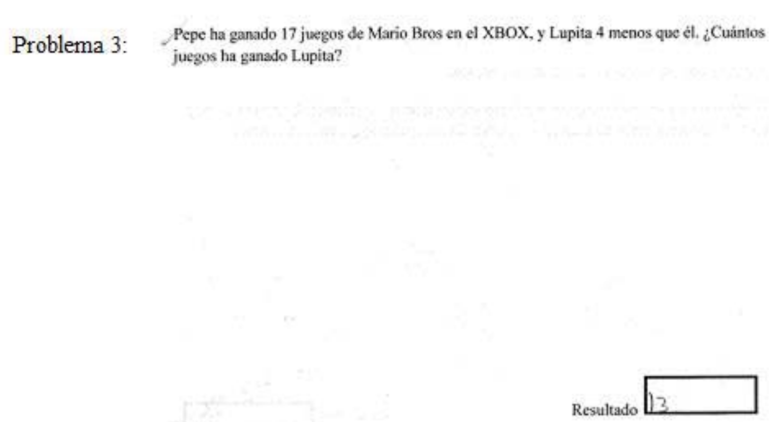


Problema 2 Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?

$$\begin{array}{r} 23 \\ -\ 14 \\ \hline 29 \end{array}$$

Resultado 29

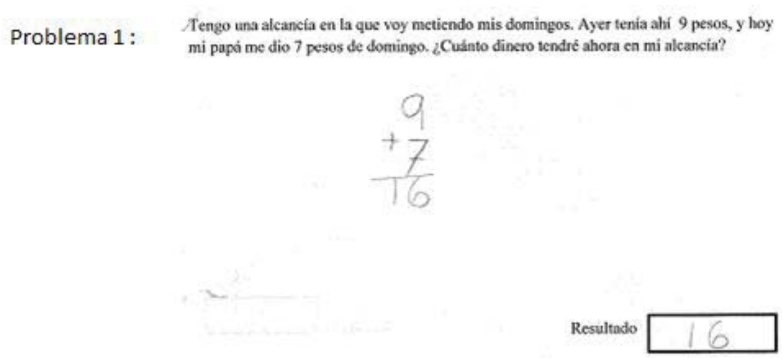
Sin operaciones



Problema 3: Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?

Resultado 13

Con operaciones

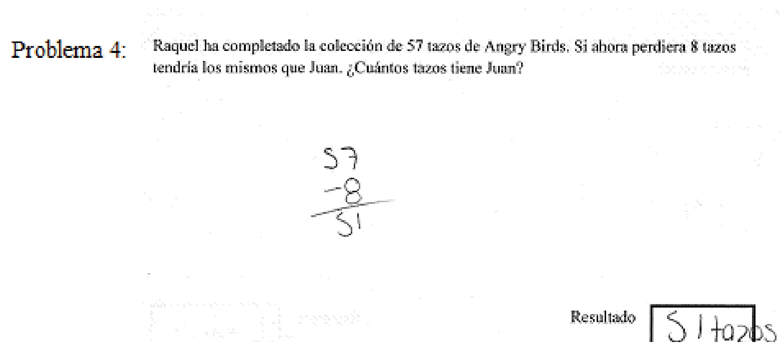

Problema 1 : Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?

$$\begin{array}{r} 9 \\ +7 \\ \hline 16 \end{array}$$

Resultado 16

RESULTADOS INCORRECTOS

Procedimiento correcto con resultado incorrecto

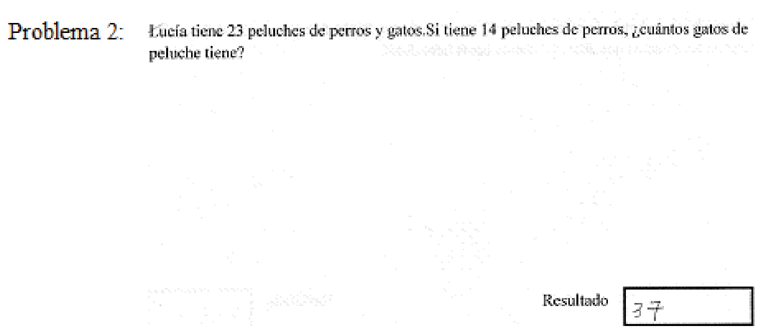

Problema 4: Raquel ha completado la colección de 57 tazos de Angry Birds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

$$\begin{array}{r} 57 \\ -8 \\ \hline 51 \end{array}$$

Resultado 51 tazos

El problema efectivamente se resuelve con una resta pero el resultado de ésta es incorrecto.

Suma datos


Problema 2: Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?

Resultado 37

Multiplica o divide

Problema 1: Tengo una alcancia en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenia ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 7 \\ \hline 63 \end{array}$$

Resultado $\boxed{63}$

Repite dato

Problema 3 : Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?

Resultado $\boxed{4}$

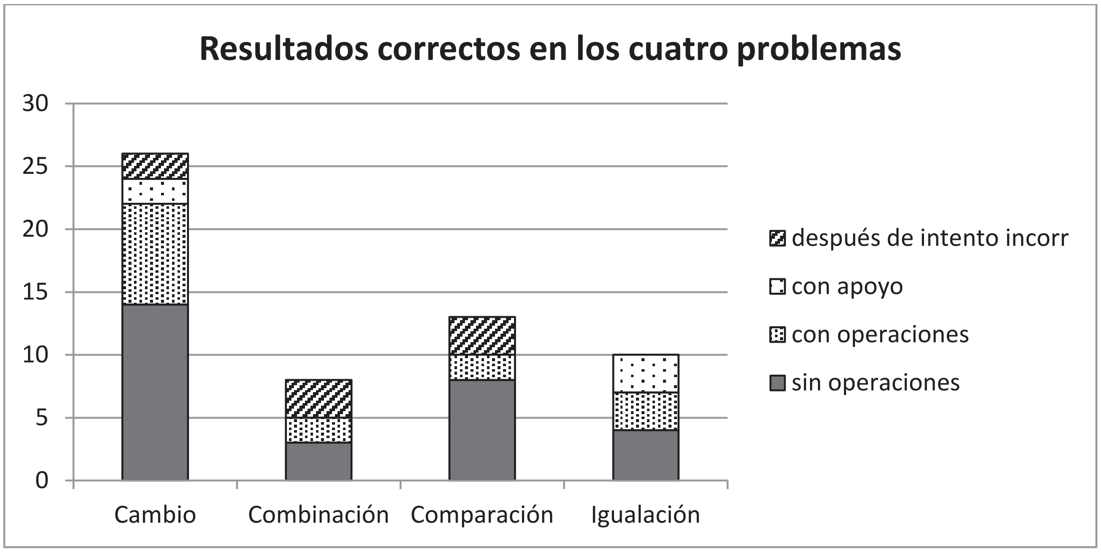
Otros

Problema 4: Raquel ha completado la colección de 57 tazos de Angry Birds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

Resultado: tien tazos 215

No se alcanza a distinguir pero, el alumno realiza la operación como una resta y escribe 215, no se encontró explicación de dicho resultado.

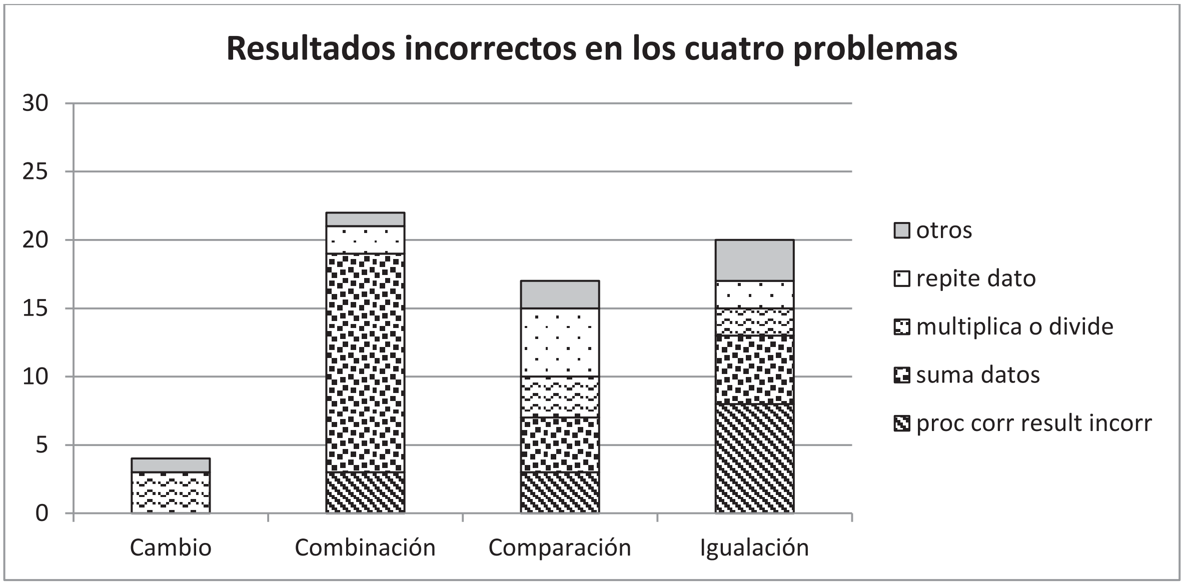
Ahora se presentan las siguientes gráficas que describen la frecuencia con la que los alumnos utilizaron cada uno de los procedimientos descritos arriba; por separado se muestran las que corresponden a respuestas correctas e incorrectas en los problemas.



Gráfica 2. Resultados correctos en los cuatro problemas

En esta gráfica se aprecia que cuando respondieron correctamente la categoría más común entre los alumnos, en los cuatro problemas fue "sin operaciones" (97% de las respuestas correctas fueron de este estilo), mientras que lo menos utilizado fueron los apoyos (sólo 17% de las respuestas correctas están en este caso).

Se puede decir que la el procedimiento "sin operaciones" representa la comprensión y el análisis del alumno para ejecutar la operación correcta. Por otra parte, el hecho de que la categoría de uso de apoyos solamente se haya presentado en los problemas 1 y 4, que son respectivamente de suma y resta convencionales, puede indicar que a los alumnos les resulta más fácil interpretar en forma gráfica los problemas que les son familiares.



Gráfica 3. Resultados incorrectos en los cuatro problemas

La gráfica 3 muestra qué tipo de errores cometieron los alumnos cuando dieron respuestas incorrectas. La mayor parte de las veces sumaron datos cuando no era lo que debían hacer (83% de las respuestas incorrectas son de este estilo), y en segundo lugar se encuentran los casos en los que el alumno intenta realizar la operación correcta pero se equivoca en la aplicación del algoritmo (47 % de las incorrecciones se deben a esto).

Los errores principales que cometieron los alumnos fueron de representación del problema y ejecución de la operación. Éstos podrían haber sido consecuencia de los datos estáticos o dinámicos de cada problema, ya que esto puede dificultar el proceso de resolución, es decir comprensión, análisis y ejecución de la estrategia correcta.

A continuación se realiza el análisis problema por problema. Se explica el tipo de problema y las características que éste tiene, la distribución de las respuestas correctas e incorrectas y finalmente se plantean hipótesis sobre los procesos internos que llevaron a cometer distintos errores en el problema.

4.1. Análisis de los cuatro problemas

En este apartado se realizará un análisis de los procedimientos que realizaron los alumnos, describiéndolos en cada problema y analizando las causas de los posibles errores.

Problema 1

Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?

De acuerdo a la clasificación realizada por Puig y Cerdán (1995) y Heller y Greeno (1978, citados por Vicente, 2008), este problema se caracteriza por lo siguiente:

Tipo de problema	Cambio
Nº de etapas	1
Lugar de la incógnita	$a + b = x$.
Tipo de operación	Suma convencional.
Problemas de llevar o no llevar	Sin llevar

Respuestas correctas	Resultados correctos	
26 alumnos	Sin operaciones	14
	Con operaciones	8
	Con apoyo	2
	Después de intento incorrecto	2

Respuestas incorrectas	Resultados incorrectos	
4 alumnos	Multiplica o divide	3
	Otros	1

Tabla 3. Respuestas y resultados correctos e incorrectos en el problema 1.

En este problema el lugar de la incógnita y el contexto del problema son elementos que ayudan al alumno a comprender lo que se pide. Se pregunta por el resultado de un cambio en una operación de tipo convencional, lo que facilita dos procesos: la identificación de la operación a realizar y la ejecución de la operación "sin llevar". El contexto es familiar para ellos, pues reciben dinero por ejemplo para comprar comida en la escuela: este tipo de problemas el alumno los conoce porque son los que se plantean con frecuencia en escuela y casa.

Todo esto permitió que se ejecutaran diversos procedimientos aprendidos tanto en la escuela como en casa, tales como: sin operaciones, con operaciones y con apoyo. Cabe observar que los dos alumnos que llegaron a la respuesta correcta después de un intento incorrecto habían cometido un error de ejecución (suma con resultado incorrecto) pero percibieron que existía un error y lo corrigieron.

Sin embargo existen alumnos que ocupan procedimientos que los llevan a obtener un resultado incorrecto tales como multiplicar o dividir u otros. De acuerdo a lo que mencionan Bermejo y Rodríguez (1999), los errores que se cometieron son de ejecución y de representación.

Multiplica o divide. Se refiere a un error de representación, debido a que se seleccionó una operación inadecuada. Esto se debe al significado que le dio el alumno al problema; le es difícil encontrar la relación que tienen las cantidades. Puede ser que el alumno, al no tener claridad en la relación de los sumandos asoció, la cantidad 7 con los 7 días de la semana en lugar de $7.

Otros. Se refiere tanto a la representación como a la ejecución de la operación; esto se debe a la poca claridad acerca de lo que pide el problema, para así elegir y ejecutar la operación que le dé solución correcta al problema.

En este problema no se presentaron resultados incorrectos como "procedimiento correcto resultado incorrecto" y "repite dato". Una explicación tentativa de ello es que el problema es de tipo "Cambio" y la operación a realizar es convencional y sin llevar. Estos problemas son a los que se enfrentan los alumnos comúnmente, además las cantidades que contiene el problema son de una sola cifra, lo que ayuda a que los alumnos puedan realizar de manera mental o escrita la operación sin dificultad.

<u>Problema 2</u>

Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?

Tipo de problema	Combinación
Nº de Etapas	1
Lugar de la incógnita	<u>a + x = c</u>
Tipo de operación	Suma con sumando desconocido
Problemas de llevar o no llevar	De llevar

Respuestas correctas	Resultados correctos	
8 alumnos	Sin operaciones	3
	Con operaciones	2
	Después de intento incorrecto	3

Respuestas incorrectas	Resultados incorrectos	
22 alumnos	Procedimiento correcto, resultado incorrecto	3
	Suma en vez de resta	16
	Repite dato	2
	Otros	1

Tabla 4. Respuestas y resultados correctos e incorrectos en el problema 2.

En este problema los resultados correctos fueron pocos; dos posibles explicaciones de ello son por el lugar de la incógnita (uno de los sumandos es desconocido) y porque la operaciónes de llevar. Estas caracteristicas del problema causaron dificultad en los alumnos para identificar la operación y ejecutarla correctamente. Esto se refleja también en el hecho de que los 3 alumnos que llegaron a la respuesta correcta después de un intento incorrecto habían sumado datos (ver más adelante: error de representación), pero corrigieron su error.

Procedimiento correcto resultado incorrecto es un error de ejecución. Los alumnos que lo cometen es porque no han aprendido la manera correcta de restar, es decir que desconoce que para resolver la operación se realiza columna por columna y se anota un solo digito en cada columna.

Suma datos es un error de representación, pues el alumno elige una operación inadecuada porque no entendió la relación entre los sumandos. Esto podría ser por la búsqueda de palabras clave como lo es en este problema la palabra"y", de esta manera separaron el enunciado para comprender el problema: el conjunto de los peluches de perros y gatos, y el conjunto de peluches de perros, relacionándolos aditivamente en lugar de encontrar la diferencia entre los conjuntos.

Repite dato. Se refiere a que los alumnos separaron las dos partes del enunciado del problema; es decir, no interpretaron de manera conjunta, y talvez escribieron como respuesta uno de los dos números que se encuentran en el problema para llenar el espacio. Este error puede ocurrir en este tipo de problema como lo mencionan Bermejo y Rodríguez (1998).

El alumno cuya respuesta se catalogó como **Otros** fue porque la comprensión y análisis tanto del problema como del procedimiento de la operación fueron obstáculos para la resolución del problema.

En este problema no hubo respuestas para los procedimientos de resultados incorrectos: "incorrectas con multiplicación o división"; esto podría deberse a que no hubo palabras que indicaran la ejecucion de estas operaciones. Por otra parte, tampoco se presentó la categoría correcta de "con apoyo"; aparentemente no fue de utilidad el utilizar dibujos o texto que les ayudaran a interpretar qué es lo que se pedía en el problema, y esto podría estar relacionado con el hecho de que no se trata ni de una suma ni de una resta convencionales.

Problema 3

Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?

Tipo de problema	Comparación
Nº de Etapas	1
Lugar de la incógnita	a – b = x
Tipo de operación	Resta convencional
Problemas de llevar o no llevar	Sin llevar.

Respuestas correctas	Resultados correctos	
13 alumnos	Sin operaciones	8
	Con operaciones	2
	Después de intento incorrecto	3

Respuestas incorrectas	Resultados incorrectos	
17 alumnos	Procedimiento correcto, resultado incorrecto	3
	Suma datos	4
	Multiplica o divide	3
	Repite dato	5
	Otros	2

Tabla 5. Respuestas y resultados correctos e incorrectos en el problema 3.

En este problema existe una dificultad se trata de comparar cantidades. Esto forma un obstáculo para que los alumnos puedan razonar el significado del problema y encontrar una solución, así como para poner en práctica su conocimiento previo y las estrategias que conocen.

Los resultados incorrectos contienen errores en la representación y la ejecución tales como:

Procedimiento correcto resultado incorrecto es error de ejecución porque la elección de la estrategia es correcta, es decir que los alumnos identificaron la operación, pero al ejecutar el algoritmo confundieron el valor posicional de las cantidades.

Suma datos: este error lo cometen alumnos que no comprendieron lo que se preguntaba en el problema debido a que identificaron como palabra clave "**ganado**". Podría ser que esta palabra significó para los alumnos cuántos juegos ha ganado Pepe.

Repite dato es un indicador de que los alumnos no entendieron el problema y como solución inmediata sólo repiten algún número que el problema presenta. Como se mencionó previamente, Bermejo y Rodríguez (1998), plantean que este error se comete en este tipo de problema.

Para este problema resultan relevantes los errores de representación; los alumnos realizan una operación inadecuada, es decir que no identifican el procedimiento adecuado para dar solución a lo que se pregunta, porque sólo buscan dar solución aún sin comprender el problema. Es interesante observar la gran variedad de estrategias incorrectas utilizadas en este problema; todas las categorías de errores fueron cometidas por uno u otro alumno.

Problema 4

Raquel ha completado la colección de 57 tazos de Angry Birds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

Tipo de problema	Igualación
Nº de Etapas	1
Lugar de la incógnita	a – b = x
Tipo de operación	Resta convencional.
Problemas de llevar o no llevar	Con llevar

Respuestas correctas	Resultados correctos	
10 alumnos	Sin operaciones	4
	Con operaciones	3
	Después de intento incorrecto	3

Respuestas incorrectas	Resultados incorrectos	
20 alumnos	Procedimiento correcto, resultado incorrecto	8
	Suma datos	5
	Multiplica o divide	2
	Repite dato	2
	Otros	3

Tabla 6. Respuestas y resultados correctos e incorrectos en el problema 4.

Como los problemas 2 y 3, éste se caracteriza por tener más respuestas incorrectas que correctas. Las principales dificultades de este problema radican en que igualar una cantidad tiene dificultad si no se comprende el orden de los datos, en que la operación a realizar es llevando, y en que los datos que contiene el problema son dinámicos.

Es relevante entre los errores cometidos en este problema que 8 de las respuestas fueron **procedimiento correcto resultado incorrecto**. Se trata aquí de diversos errores en la ejecución de la resta 57-8.

Por lo demás, los alumnos cometieron diversos errores de representación:

Suma datos es un error de representación porque el alumno, al haber identificado la palabra clave "completado", pudo haber analizado por separado el problema e identificado que tenía que sumar la cantidad final para poder igualar la cantidad inicial.

Multiplica o divide es un error de representación en el que el alumno relaciona incorrectamente los datos.

No fue común que los alumnos comprendieran este problema ni que identificaran correctamente la operación. Cabe señalar que no se presentaron aquí respuestas correctas "después de intento incorrecto". Esto puede ser porque los alumnos invirtieron tiempo en analizar qué es lo que les pedían; es posible que algunos de ellos utilizaran dibujos y otros procedimientos pero que hayan realizado esto en otras hojas porque no se encuentran plasmados en la hoja del problema.

4.2. Análisis general de los problemas

En la siguiente tabla se pueden revisar las dificultades de los cuatro problemas de acuerdo a las características que presenta cada uno de estos. A partir de ella se analizarán las razones por las que los alumnos pudieron haber encontrado dificultad.

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
	Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?	*Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?*	*Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?*	*Raquel ha completado la colección de 57 tazos de AngryBirds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?*
Tipo	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación
Incógnita y Tipo de operación	a + b = x Suma convencional	a + x = c Sumando desconocido	a –b = x Resta convencional	a – b = x Resta convencional
Llevar o no llevar	Sin transformación	Con transformación	Sin transformación	Con transformación

Tabla 7. Resumen de las características y resultados de los cuatro problemas

(Con sombreado gris se marcan los posibles factores de dificultad)

Las características de cada problema ayudan o dificultan el proceso de resolución de cada alumno. Los cuatro tipos de problemas aditivos presentan características diferentes de acuerdo a tipo de problema (Puig y Cerdán, 1995) y lugar de la incógnita (Vergnaud, 1991). Cabe recordar que en este estudio no se analizó el posible factor de dificultad representado por la cantidad de etapas requerida para la solución (Castro et al; 1992), ya que todos los problemas fueron de una etapa.

Como se observa en la tabla, el problema 1 no contiene factores de dificultad, y efectivamente fue el más sencillo para los alumnos pues presenta una operación convencional por el lugar de la incógnita "a + b = x". Es en este tipo de problema en donde la comprensión, análisis del problema y ejecución de la operación "suma" fue correcta. Tal vez con estas características los alumnos tuvieron predisposición en cuanto a la operación a realizar, en los problemas 2, 3 y 4, ya que en ellos se encontraron como procedimiento común "sumar datos", esto puede ser porque no revisaron si el procedimiento utilizado respondió a lo que se preguntaba en el problema.

Es así que las incógnitas y el tipo de problema fueron elementos importantes en los problemas 2, 3 y 4, porque se encontraron diversidad de procedimientos. Se encuentran dificultades como las siguientes:

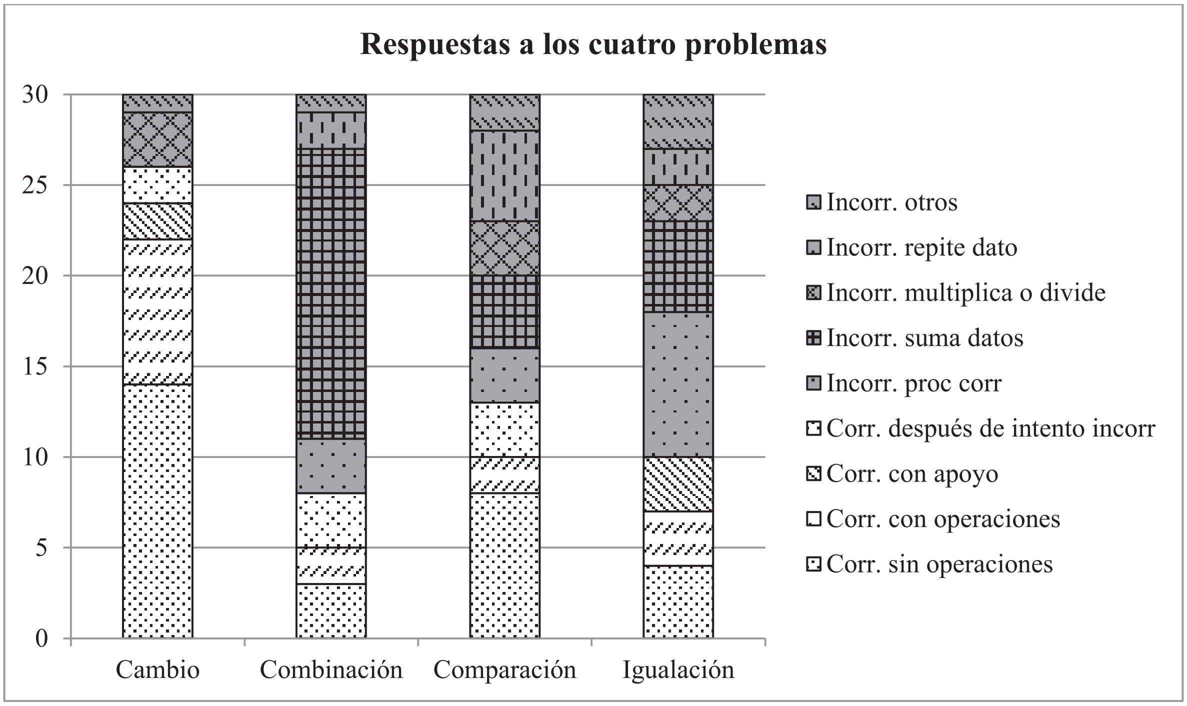
En el problema 2 "combinación" existen dos maneras de plantear la incógnita: "$\underline{a + x = c}$" o "$\underline{x + b = c}$"; en ambos casos es la misma operación (la incógnita es uno de los sumandos). Se debe comprender la relación del conjunto total y la partición del mismo, y se requiere conocer qué datos se tienen que combinar para dar respuesta a lo que pide el problema; uno de ellos es justamente la incógnita. Además hay dificultad en la aplicación de la técnica de llevar. Estas características pueden explicar por qué 4 de 7 procedimientos ejecutados por los alumnos fueron erróneos debido a la dificultad para encontrar relación entre los datos, y a la elección errónea de la operación.

En el problema 3 "comparación" existe la siguiente dificultad: comparar cantidades para encontrar la diferencia. El alumno puede identificar los datos, pero interpretarlos para encontrar qué procedimiento debe utilizar no fue sencillo para los alumnos, porque se encontró que 5 de los 8 procedimientos fueron erróneos. Esto quiere decir que los alumnos utilizaron los recursos que conocían, pero más de la mitad de los que utilizaron fueron aplicaciones erróneas.

En el problema 4 "igualación" el alumno debe analizar e interpretar los datos para encontrar que una cantidad sea igual a otra, de esta manera obtener la diferencia que existe entre las cantidades y ejecutar una operación con la aplicación de la técnica "llevar". Estas dos características del problema tal vez causaron dificultad en los alumnos, pues para analizar los datos pudieron haber planteado la semejanza de las dos cantidades (ejecutar una suma) o bien la diferencia (ejecutar una resta), pues 5 de los 8 procedimientos fueron erróneos. Es decir pocos interpretaron los datos y ejecutaron correctamente el procedimiento.

4.3. Análisis general de las estrategias utilizadas

Con el fin de tener claro cuáles fueron los resultados del instrumento aplicado a los alumnos, se muestra la siguiente gráfica, la cual servirá como punto de referencia para explicar de manera global los procedimientos aplicados por los alumnos.



Gráfica 4. Resultados correctos e incorrectos a los cuatro problemas

Cada alumno tiene conocimientos distintos relacionados con el problema para ejecutar los procedimientos, es así que se compone el proceso de resolución de cada alumno. Debe identificar y entender los datos que son de utilidad para resolver el problema y finalmente razonar sobre cómo dar solución. Es así que los alumnos requieren de recursos alternativos que les ayuden a seleccionar la estrategia más efectiva (Pozo y Postigo, 1994).

En los cuatro problemas, la mayor parte de las respuestas corresponde a procedimientos que son enseñados en la escuela, como realizar la operación por escrito (categoría “con operaciones”) y realizar la operación mentalmente (“sin operaciones”); éstas son en donde se desconoce el proceso de resolución, sólo en texto o dibujo (“con apoyos”) en cualquier problema se puede ejecutar este procedimiento y se puede deducir que el alumno analizó el texto. En cuanto a los procedimientos incorrectos, la mayor parte corresponde a errores de representación porque no comprendieron los datos que contenía el problema, sobre todo "suma datos" y "repite dato", estos errores se deben a la comprensión y elección de la operación, es decir las estrategias no fueron los adecuados para dar solución a los problemas. Los alumnos en este caso utilizan los recursos que conocen y les sirven en ese momento pero no les importa si le dan solución al problema (en particular cuando repiten datos, pero también cuando multiplican porque es la operación que han estado viendo en clase).

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
Correctas	26	8	13	10
Errores de ejecución	3	3	6	10
Errores de representación	1	19	11	10

Tabla 8. Cantidad y tipos de errores que están en las estrategias incorrectas.

En esta tabla se encuentra la frecuencia con la que los alumnos cometieron los errores en cada problema; se clasifican como errores de ejecución o de representación según Bermejo et al; (1998). Es importante destacar que existe mayor dificultad en representar el problema, es decir encontrar la operación que ayude a dar solución a lo que se pregunta.

La mayor parte de los errores de representación están en los procedimientos "suma datos" y "multiplica o divide". Estos ocurrieron porque la identificación de los datos fue correcta, pero el error estuvo en cómo los interpretaron para dar solución al problema. Los errores de representación permiten conocer cómo el alumno entiende el problema. Estos procedimientos que se encontraron muestran que los alumnos necesitan aprender a analizar el problema para poder seleccionar la estrategia más efectiva. Es decir, los alumnos aprenden el procedimiento de las operaciones pero es importante que adquieran el dominio de éstas para saber en qué momento aplicarlas.

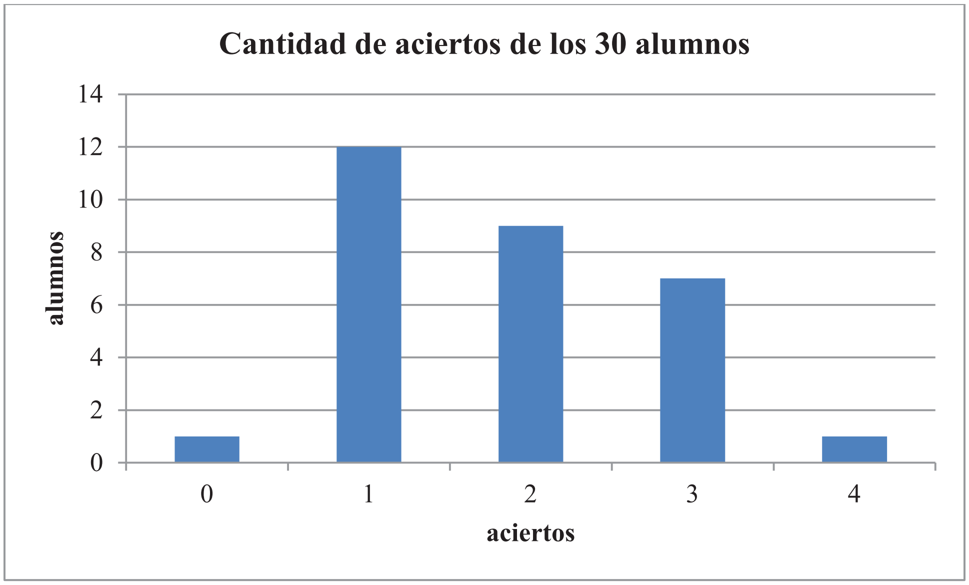
El procedimiento de multiplica o divide es un error de representación pues se encontró en los problemas 1,3 y 4. Los alumnos se encontraban revisando en clase la multiplicación y división, por lo que a modo de hipótesis, se puede pensar que esta situación llevó a los alumnos a ejecutar estas operaciones

Hay dos procedimientos que conviene analizar conjuntamente: el procedimiento para respuestas correctas “después de intento incorrecto” y el procedimiento para respuestas incorrectas “procedimiento correcto con resultado incorrecto”. En ambos casos hay un error de ejecución, lo que hace la diferencia es en la revisión de la operación o su resultado. Llama la atención que estos errores de ejecución fueron más frecuentes en los problemas 2, 3 y 4, donde hay además dificultades en la interpretación del problema y el análisis de los datos. Una posible explicación de este fenómeno sería que en esos problemas es más difícil verificar que el resultado es correcto.

Por último, los procedimientos “otros” y “repite dato” implican dos tipos de errores: de representación y de ejecución, siendo éstas automatizadas, los alumnos no identifican los datos, interpretan el problema y reflexionan sobre la solución. Se les deben prestar importancia, porque el conocimiento que tienen no está siendo el suficiente para dar solución a los problemas a pesar de que sean pocos alumnos,

4.4. Análisis de los alumnos de acuerdo a los aciertos

Se presenta una gráfica en donde se puede apreciar la cantidad de aciertos de los alumnos, que podría explicar los motivos por los que obtuvieron estos resultados y en qué problemas son los que obtuvieron esos aciertos.



Gráfica 5. Cantidad de aciertos obtenidos por los alumnos

Al tener estos datos se tiene una primera vista sobre la dificultad que se presentó, se encuentra que el 40% (12 de los 30 alumnos) obtuvo 1 acierto mientras que solamente 3% (1 de los 30 alumnos) obtuvo 4 aciertos. Esto indica que los alumnos aprenden procedimientos aditivos en escuela y casa, pero en el momento que se les presentan problemas no reconocen qué operación permite encontrar la solución .

A continuación se comentarán los casos extremos (0 y 4 aciertos) y después los intermedios (1, 2 y 3 aciertos).

Como se muestra en la gráfica 5, hubo un alumno que para dar solución a los cuatro problemas, ejecutó procedimientos incorrectos tales como suma datos y un procedimiento no identificado. El alumno al parecer se encuentra con poco conocimiento en áreas que describe Mayer (1986): conocimiento lingüístico, semántico, operativo y estratégico. Estos tipos de conocimientos los aprenden los alumnos de manera paulatina, son los que les ayudan a comprender, analizar y ejecutar la estrategia que les dé solución a lo que se pregunta (pasos descritos por Polya, 1959/1989). Este alumno presentó dificultad en comprender algunos elementos del problema como tipo de problema, etapa, incógnita, contexto y operación a realizar; como consecuencia tuvo errores en la representación de los cuatro problemas y en la ejecución de las operaciones. Para este alumno la comprensión fue el obstáculo principal en los cuatro problemas; sus conocimientos parecen no haber sido suficientes para poder elegir y ejecutar el procedimiento correcto en el problema indicado. Lo que es notable es que, en el momento que se aplicó el instrumento, el docente que impartía la clase predijo que este alumno daría respuesta correcta a los problemas sin tener dificultad, porque en general responde rápidamente. Efectivamente, el alumno dio respuesta a los problemas rápidamente, pero ninguna de sus respuestas fue correcta.

Por otra parte, existió sólo un alumno que resolvió los cuatro problemas correctamente, ejecutando de acuerdo a la clasificación que se tiene en la tabla 1 procedimiento "sin operaciones". Se podría decir que el alumno tiene conocimientos previos y hasta ahora ha aprendido, aplicado y sigue desarrollando los tipos de conocimiento según Mayer (1986), de acuerdo al grado escolar (3° año de primaria), pues la comprensión y el análisis de forma mental que el alumno efectuó fueron correctos. Por desgracia se desconoce el proceso de resolución completo debido a la metodología utilizada.

La siguiente tabla muestra la distribución de los aciertos y en qué problemas se encuentran estos.

0 aciertos	Un acierto		Dos aciertos		Tres aciertos		Cuatro aciertos
N° alumnos **1**	Problema	N° alumnos **12**	Problemas	N° alumnos **9**	Problemas	N° alumnos **7**	N° alumnos **1**
	1	10	1 y 4	3	1, 3 y 4	4	
	2	1	2 y 4	1	1,2 y 3	2	
	3	1	3 y 4	1	1, 2 y 4	1	
	4	0	1 y 2	2			
			1 y 3	2			

Tabla 9. Cantidad de aciertos en los cuatro problemas.

Como se puede apreciar en la tabla 9, el problema 1 fue en donde los alumnos aplicaron su conocimiento previo al ser un contexto conocido y operación convencional: hubo más alumnos cuyo único acierto estuvo en ese problema, y más alumnos con dos y tres aciertos que lo resolvieron correctamente. Estos resultados ratifican el análisis realizado previamente.

Entre los alumnos con dos aciertos, se puede observar que el problema 4 fue relativamente fácil para los alumnos. Tal vez esto sea porque presenta una operación de resta convencional. A pesar de que presenta elementos de dificultad (la igualación en sí lo es, y además implica llevar), les resultó a los alumnos más sencillo comprenderlo de manera operativa que los problemas 2 y 3.

Obtener 3 aciertos quiere decir que los alumnos obtuvieron mejor comprensión estratégica, y operativa para analizar y ejecutar procedimientos más efectivos. En esta tabla se ratifica que el problema más difícil fue el 2 (aparece como único error cometido por los 4 alumnos con aciertos en los problemas 1, 3 y 4) y que los problemas 3 y 4 fueron un poco menos difíciles (respectivamente aparecen como único error cometido por 1 y 2 alumnos"). Esto ratifica que el problema 2 ("combinación") fue el más difícil para los alumnos.

5. CONCLUSIONES

Las matemáticas cumplen su función, en el momento que el alumno aprende a resolver distintos problemas en su vida cotidiana. Los problemas pueden ayudar a los alumnos a buscar, identificar, interpretar y analizar la información que se les presenta, de esta manera es como aumenta el conocimiento del alumno.

Los problemas con estructura aditiva implican cambiar, igualar, comparar y combinar cantidades y se pueden resolver con las operaciones de suma o resta. En algunos casos los alumnos ejecutan procedimientos distintos que en ocasiones los llevaron a cometer errores; para ello se encontraron algunas posibles causas: tipo de problema, lugar de la incógnita y el tipo de operación de llevar o no llevar.

Se hizo presente para los alumnos uno de los componentes del problema (el sintáctico) (Nesher, 1995), pues en tres de los cuatro problemas aditivos plasmados en el instrumento se ubicaron palabras tales como “y”, “completado” y “ganado” que sólo indicaban relaciones entre los datos, pero éstas se convirtieron en dificultad para los alumnos al elegir la estrategia.

Los alumnos identificaron cómo resolver los problemas por las características que presentaban los problemas:

- operación (suma o resta; con o sin llevar)
- lugar de la incógnita (o bien el resultado, o bien uno de los sumandos o sustraendos podía ser desconocido),
- tipo de problema (cambio, combinación, comparación, igualación).

El análisis de los resultados que se obtuvo del instrumento permite conocer que los alumnos ejecutaron estrategias que han aprendido, pero la frecuencia de estrategias erróneas fue mayor a las correctas, debido a las distintas dificultades que presentaron los problemas 2, 3 y 4.

A continuación se hará un análisis según las posibles fuentes de dificultad que tienen estos problemas: la ejecución de las operaciones, el lugar de la incógnita y el tipo de problema.

Ejecución de los algoritmos

En lo que refiere a la operación a ejecutar, los alumnos tuvieron menor dificultad en los problemas 1 y 3, porque se presentaron cantidades simples que no implicaban transformación en el momento de resolver: 9 + 7 y 17 - 4. Es relevante mencionar que a pesar de que el problema 3 tenía otras dificultades como lo es el comparar dos conjuntos, en lo que se refiere a la operación a realizar fue más sencillo para los alumnos que los problemas 4 y 2.

En contraposición con esa facilidad que ofrecían los problemas 1 y 3, en los problemas 4 y 2 para llevar a cabo la resolución correcta de la operación se necesitaba realizar una transformación ("llevar"), esto es: 57 - 8 y 23 – 14. Estas cantidades fueron una dificultad para los alumnos en el momento de ejecutar la operación; es así que se encuentra que el procedimiento "procedimiento correcto con resultado incorrecto", marcada como "errores de ejecución".

Al tener estos datos importantes se puede decir que los alumnos presentan un poco de dificultad en las operaciones de dos cifras cuando para obtener la solución correcta es necesaria una transformación. Una posible interpretación de esto es que los alumnos aún no han comprendido el valor posicional de las cantidades.

Lugar de la incógnita

En los problemas 1, 3 y 4 se tenían problemas convencionales en los que la incógnita se encuentra en el resultado. En ellos destacaron, entre la respuesta correcta la marcada categoría "sin operaciones" por lo que se puede decir que no existió dificultad con la incógnita, ya que el hecho de que sean problemas convencionales permite a los alumnos identificar la operación a realizar. Es en parte por esta razón que los alumnos obtuvieron aciertos con mucha frecuencia en el problema 1; el caso del 4 se vio anteriormente, que a pesar de que tiene la incógnita en el lugar tradicional, involucra otras dificultades (operación con transformación y también el tipo de problema).

Por otro lado para los alumnos fue un obstáculo la incógnita en los problemas 2 en el que ésta no se encontraba en el resultado. De las cinco estrategias erróneas destacaron dos: “repite dato” y “suma datos”. En ambos casos se trata de errores de representación: cabe suponer que a los alumnos les resultó difícil encontrar relación entre los conjuntos, e identificar e interpretar los datos. En particular, el hecho de que el procedimiento “suma datos” se haya ejecutado con frecuencia en los problemas 2 y 3 puede haber sucedido por las palabras clave que identificaron los alumnos, lo que a su vez les ocasionó una interpretación errónea de los datos. Esto permite observar que el identificar la palabra clave no siempre representará la solución que el problema pide.

Con respecto al lugar de la incógnita, se observa que si se les presenta a los alumnos continuamente el problema con la incógnita en el mismo lugar (aunque sea con distintos datos), esto puede limitar al alumno a realizar un proceso de resolución efectivo y ejecutar los distintos procedimientos que conoce.

Tipos de problemas

Cada uno de los problemas planteados corresponde a uno de los cuatro tipos de problemas aditivos: cambiar, comparar, combinar e igualar conjuntos. Los alumnos ejecutan en el momento de que se les presenta el problema procedimientos que no siempre son los correctos, estos pueden ser causados por distintos factores del alumno: afectivo , cognitivo y heurístico, pero hare énfasis en el cognitivo, pues es en este dónde sucede todo el proceso de resolución, es decir en donde el alumno elige entre todo el bagaje de conceptos, procedimientos y técnicas los que le son útiles. Aunque todo este conocimiento se puede enseñar al alumno en la escuela, también lo aprenden en casa y es en este momento donde los alumnos aprenden procedimientos; sin importar estos dos contextos los alumnos encuentran diversos procedimientos y los ejecutan de acuerdo a las características que identifican en los problemas.

Según el tipo de problema, lo que suele ser más sencillo son las acciones de cambiar y de combinar. Efectivamente, el problema 1, que implicaba cambiar la cantidad total, les resultó a los alumnos sencillo de comprender. Sin embargo, aunque por su tipo (combinación) el problema 2 debería haber sido también relativamente fácil, no lo fue; una posible explicación de esta aparente anomalía es que la mayor parte de los errores cometidos, "sumar datos", son atribuibles al lugar en el que se encuentra la incógnita.

Por otra parte, comparar e igualar, como en los problemas 3 y 4, suelen ser más difíciles. Esta aparente dificultad en el problema 3 (comparar encontrando relación entre dos conjuntos), se vio compensada por el hecho de que la operación a ejecutar fue sin transformación, lo que lo hizo más sencillo que los problemas 2 y 4. En cuanto al problema 4, la dificultad de igualar se aumentó a la de la operación con transformación, pero el atenuante de que la incógnita estaba en el lugar convencional lo hizo más fácil que el problema 2.

A partir de estos resultados, podemos afirmar que, aunque el tipo de problema es un factor de relativa facilidad o dificultad de los problemas, no es el más relevante.

Comparación de los factores de dificultad.

Hemos visto que el problema que les resultó más sencillo a los alumnos, el problema 1, contenía tres factores de facilidad: la operación sin transformación, el lugar convencional de la incógnita y el tipo de problema (cambio). Cada uno de los demás problemas contenía sólo uno de esos factores de facilidad: la operación sin transformación en el problema 3, la incógnita en lugar convencional en el problema 4, y el tipo de problema (combinación) en el 2. Esto se manifiesta visiblemente en la cantidad de aciertos de estos problemas: 26 en el problema 1, y con una gran diferencia con respecto a él, respectivamente 13, 10 y 8 aciertos en los problemas 3, 4 y 2.

Las diferencias entre los resultados obtenidos en los problemas 3, 4 y 2 no son tan marcadas como entre ellos y el problema 1, se puede tal vez aventurar que como factor de dificultad lo que más pesa es la necesidad de ejecutar las operaciones con transformación, después el lugar no convencional de la incógnita y finalmente el tipo de problema.

El problema 2 (combinación) fue el único que presentó la incógnita en lugar distinto, lo que permite conocer que ésta diferencia aumento la dificultad en contraste con los demás problemas 1,3 y 4 que también tenían obstáculos para los alumnos.

Los problemas cumplieron su objetivo, ser un obstáculo a vencer para los alumnos, esto fue por las distintas dificultades que contenía cada problema. Es cierto que todos los alumnos dieron solución a los problemas, lo que permitió conocer un poco de Los procedimientos que han aprendido.

El hecho de presentarle al alumno problemas diferentes en cada ocasión permitió ver cómo se enfrentaban a la suma y la resta en diversos contextos y tipos de problema, con la incógnita en distinto lugar y con datos diversos. Los alumnos ejecutaron distintos procesos de resolución; sus aciertos y sobre todo sus errores pudieron ser clasificados en varias categorías.

Los procedimientos son fundamentales para poder dar solución a cualquier problema, pues forman parte del proceso de resolución en cada alumno sin importar sean correctas o incorrectas, porque demuestran su capacidad de reflexión y análisis para identificar datos que son de utilidad para encontrar soluciones. La elección de estas estrategias puede ser por diferentes causas: dificultades del problema y obstáculos que pueda tener cada alumno por comprensión e interpretación de datos.

Como se vio previamente, Judías y Rodríguez (2007) mencionan que en el proceso de resolución de un problema hay factores relativos al problema, al alumno y al contexto sociocultural. En este trabajo se laboró en un solo contexto sociocultural y se analizaron algunos de los factores relativos al problema y algunos de los relativos al alumno. Entre los primeros están, dentro de los problemas aditivos, el tipo, la incógnita y la complejidad de la operación. Entre los segundos se analizaron los procedimientos utilizados; sin embargo, como se mencionó antes, no deben olvidarse otros, como la atención que el alumno le brinde al problema, su contacto previo con problemas similares, etc. Un elemento de suma importancia en la solución de un problema es el análisis que el alumno hace del problema; la única expresión de ese análisis que se ha considerado aquí es el resultado del análisis visto a través de la solución al problema, pero por falta de oportunidad de entrevistas no se vio el proceso mismo de análisis.

Así, como cualquier trabajo de indagación, éste ha tenido acotamientos. Sin embargo, a partir de los resultados obtenidos se pueden extraer conclusiones que pueden ser de interés.

Recomendaciones didácticas

Tanto los procedimientos correctos ejecutados por los alumnos en este estudio como los errores que cometieron son herramientas que permiten dar algunas recomendaciones para que en el trabajo con los alumnos, ellos puedan identificar, analizar y reflexionar sobre el cómo resolver, elegir adecuadamente una estrategia y llevarla a cabo correctamente.

El dominio de los procedimientos permite que los alumnos puedan recurrir a ellas en cuanto las necesiten. La claridad acerca de cómo, cuándo y porqué utilizar determinado procedimiento la aprenderán a medida que se les presenten a los alumnos problemas que impliquen un reto.

En este análisis se encontraron dificultades de distinta índole; el docente puede contribuir a que los alumnos las superen mediante varias alternativas:

<u>Problema 2</u>

Si bien es cierto que sólo se analizó una pequeña parte del proceso de resolución que es la ejecución del procedimiento, se puede recomendar que el alumno preste atención en:

- Comprender el problema: Descomponer la información del enunciado.

En ocasiones el alumno necesita de un ejemplo de manera verbal para poderlo entender, cambiar la información mas no los datos del problema para poder encontrar la relación que tienen los datos o representar los datos con dibujos, a fin de que le ayuden resolver las dudas que tenga del problema y evitar los errores de representación.

Se trata, como se ha visto, de errores en los que el alumno no comprende la relación entre los datos del problema. Este surgió tanto del lugar de la incógnita y del tipo de problema; en ambos casos el alumno tuvo dificultad en seleccionar y ejecutar el procedimiento que le ayudara a encontrar la solución.

Problema 3

Errores de representación son los que sobresalieron en este problema, en donde realizar una operación, sin importar que fuera correcta y tener un resultado plasmado en la hoja.

El combinar datos resultó un obstáculo para los alumnos por lo que se recomienda:

- Representar los datos del problema por medio de dibujos, para que de esta manera pueda encontrar la diferencia entre los conjuntos del problema.
- Verificar si los dibujos le sirvieron para la elección de la operación.
- El resultado de la operación que se eligió, se debe analizar, si éste es coherente con lo que se pide.

En ocasiones el alumno no se fija si el resultado concuerda con lo que pide el problema.

Problema 4

El igualar dos conjuntos fue un obstáculo para los alumnos, tanto en la elección del procedimiento como en su ejecución, por lo que se recomienda:

- Para conocer si los alumnos tienen claridad en el procedimiento de las operaciones con frecuencia realizar cálculo mental y en el cuaderno dejar ejercicios, si es que no entienden alguna parte del procedimiento de la operación, explicar de nuevo.
- El alumno ejemplifica el problema en forma situacional, de esta manera comprenderá que los datos tienen una relación., esto será causa de que el alumno piense en diversas maneras de resolverlo, y que al final lo llevaran a ejecutar la misma operación.

La representación del problema es la parte más importante, pues es en dónde el alumno ejecuta el procedimiento que eligió.

Los problemas y las posibilidades de equivocarse siempre van a existir; lo importante es encontrar en todo momento las alternativas para resolverlos. Todos los elementos de un problema pueden ser distintos obstáculos para los alumnos. A los alumnos se les enseña el mismo concepto, pero cada alumno aprende distinto. Cada alumno tiene conocimiento previo que permite elegir entre su bagaje de procedimientos la más efectiva para él en ese momento.

REFERENCIAS

Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* 1ª ed. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Alsina, C. Burges, C. Fourtuny, J., Giménez, J. y Torra, M. (1998).*Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó.

Anderson, J. (1983).*The architecture of cognition*. Cambridge: Harvard University.

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas; el trabajo de Allan Shoenfeld. *Cuadernos de investigación y Formación en educación matematica*.1-9.

Barrera, E. y Gómez, C. (1999). Las estrategias de enseñanza y evaluación en matemáticas. En Monero, C. y Solé (coords). *El Asesoramiento Psicopedagógico: una perspectiva profesional y constructivista.*Madrid, Alianza Editorial.

Beltrán, J., Bermejo, V., Prieto, M. y Vence, D. (2000).*Intervención Psicopedagógica*. Madrid: Pirámide. Pp. 145-168.

Bermejo, V. (1999).*El niño y la Aritmética*. Barcelona: Paidós.

Bermejo; Lago; y Rodríguez, P. (1998). Desarrollo del pensamiento matemático. En Bermejo, V.*Psicología Evolutiva y de la Educación. Desarrollo cognitivo.* Madrid: Síntesis. *Pp.*379-396

Bruer, J. 1995. *Escuelas para pensar: una ciencia del aprendizaje en el aula.* España, Paidós.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista educación,* 32(1), 123-138.

Callejo, M. (1998).*La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, Narcea.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1999).Estrategias de la resolución de problemas en la escuela. Cuba. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*.

Castro, E., Castro, E., Rico, L.,Gutierrez J.,Torsa A.,Segovia, I.,Gonzalez, E.,Morcillo N., y Fernández, F. (1992). Problemas aditivos de dos dimensiones. *Enseñanza de las ciencias*, 243-253.

Charnay, R.(1994). Aprender por medio de resolución de problemas. En Parra C. y Saiz I.. *Didáctica de las matemáticas*.Argentina: Paidós Educador

D´Amore, B. (2006). Presentación en: *Didáctica de las matemáticas*. Bogotá: cooperativa editorial magisterio.

De Corte, E. (1993). La mejora de las habilidades la resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. A. Beltrán, V. Bermejo, M, D. Prieto y D, Vence. *Intervención Psicopedagógica*. Madrid: Pirámide. Pp. 145-168.

Díaz F. y Hernández (1998) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista*. México: Mc GrawHill.

Figueroa, E. (2006). Estrategias en la resolución de problemas matemáticos. *Educare,* 30 (1).

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales en la resolución de problemas. *Sigma.* 19; 51-63.

Godino, Batanero y Font (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-maestros, 69.

Judías B. y Rodríguez (2007). Dificultades de aprendizaje e intervencion psicopedagogica en la resolucion de problemas matemáticos. *Educación*, 257-286.

Kaplan, R. G. Yamamoto, T. y Gisburg, H. P. (1989). La enseñanza de conceptos matemáticos. En: Resnick L. B. y Klopfer L. E. *Currículo y cognición.* Argentina: Aique

Kipaltrick, J.,Gomez, P., y Rico, L. (1995).*Educación Matemática*. México: Iberoamérica. pp.65-67.

Labarrere, A. (1987). El concepto del problema, principales funciones de lo problemas en la enseñanza de la matemática. En A. F. Labarrere Saturuy, *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solucion de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana: Pueblo y Educación. pp.5-18

Lester, F.K. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving Research. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.*Illinois, USA: Academic Press Inc.

Luceño, J. (1999). Introducción. En *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. Malaga: Aljibe. pp. 11-14.

Maza. C., (1991). Fases en la resolución de un problema aritmético; *Multiplicar y Dividir. A través de la resolución de problemas*, Capítulo V, pp.72- 76. Madrid: Aprendizaje Visor.

Mayer. R. (1986).*Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós

Miranda, A., Fortes, C., y Gil, Ma. D. (2000).*Dificultades del aprendizaje en matemáticas. Un enfoque Evolutivo*. Málaga; Aljibe

Monereo, C. (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje.* Formación del profesorado y Aplicación en la escuela. Barcelona: Grao

Orton, A. (1990).*Didáctica de las matemáticas:cuestiones, teoría y práctica en el aula*.Madrid: Morata

Pérez Echeverría, M. d., & Pozo Municio, J. I. (1994). Aprender a resolver problemas y resolverproblemas para aprender. En J. I. Pozo Municio, & M. Pérez Echeverría, *Lasolución de problemas* (págs. 14-50). México: Santillana.

Periódico "La Prensa" (30 de agosto de 2012. Revela la prueba Enlace insuficiencias en primaria, secundaria y bachillerato. Organización Editorial Mexicana: México

Podall, M. y Comellas M. (1996). *Estrategias de aprendizaje su aplicación en las áreas verbal y las matemáticas*. Barcelona: Laertes

Polya, G. (1945/1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* (15° ed). México. Trillas.

Pozo, I. y Gómez, M.A. (2000). La adquisición de procedimientos: Aprendiendo a Aprender y hacer ciencia. *En Aprender y enseñar ciencia*. Madrid, España: Morata. Pp. 51-83

Pozo, I. y Postigo A. (1994). La solución de problemas como contenido procedimental de la Educación Obligatoria. En: Pozo, I. y Pérez Echeverría, *Solución de Problemas.* Madrid: Santillana. Pp.180-212

Puig, L., y Cerdán, F. (1995). Problemas y problemas aritméticos elementales. En *Problemas Aritméticos Escolares* Madrid: Síntesis. pp. 13-42.

Schoenfeld, A. (1989). La enseñanza del pensamiento y la resolución de problemas. En L. B. Resnick, y L. E. Klopfer, *Currículo y Cognición* (págs. 141-170). Argentina: Aique.

Schoenfeld, A. (1992).Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.) *Handbook of research on Mathematics learning and teaching* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

SEP (2009). *Plan y Programa de Estudios.* México.

SEP (2011). *Plan y Programa de Estudios.* México

Vergnaud, G. (1991). Los problemas de tipo aditivo. En: *El niño,* l*as matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas. pp. 161- 177

Vicente S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). Influencia de conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y aprendizaje*, 4: 463-483.

ANEXO 1

PROBLEMAS DE DIVERSOS TIPOS

Sin llevar				
	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación
a +b= x	**Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?**	En una tienda de supermercado existen 14 trajes de baño para niñas y 12 trajes de baño para niño ¿Cuántos trajes de baño hay en total en la tienda?	Daniel tiene 27 tazos de los Simpson y Pedro 12 tazos más que Daniel. ¿Cuántos tazos de los Simpson tiene Pedro?	En la última misión de "Water, ¿Dónde está mi agua"?, Pablo rellenó 26 patos de agua. Si rellenara 11 patos más, tendría los mismos que Emilia. ¿Cuántos patos rellenó Emilia?
a-b=x	En la fiesta de Alex hay bolsas de dulces, para dárselos a cada uno de sus 19 amigos. Si asisten a la fiesta sólo 12 amigos ¿Cuántas bolsas sobraron? **Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el Xbox, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?**	*No existe	Daniel tiene 18 tazos de los Simpson y Pedro 4 menos que Daniel. ¿Cuántos tazos de los Simpson tiene Pedro?	Juan ha completado la colección de 26 tazos de Angry Birds. Si ahora perdiera 14 tazos, tendría los mismos que tiene Raquel. ¿Cuántos tazos tiene Raquel?

a+x= c	Tenía 8 dulces, y jugando gané algunos, ahora tengo 19.¿Cuántos dulces gané?	Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 11 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?	Pepe ha ganado 15 juegos de Mario Bros en el XBOX. Si Lupita ha ganado 18, ¿cuántos juegos más ha ganado Lupita que Pepe?	Juan ha completado la colección de 26 tazos de AngryBirds y Raquel tiene 14. ¿ tazos tiene que ganar Raquel para que tenga los mismos que Juan?
a-x=c	En la fiesta de Alex hay 19 bolsas de dulces, para dárselos a cada uno de sus amigos. Si sobraron 7 bolsas. ¿Cuántos amigos llegaron?	*No existe	Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros y Lupita 13¿Cuántos menos ha ganado Lupita que Pepe?	Juan ha completado la colección de 26 tazos de AngryBirds y Raquel sólo tiene 14 ¿Cuántos tazos tiene que perder Juan para tener los mismos que Raquel?
x+b=c	Ayer metí b 7 pesos a mi alcancía y después la rompí y vi que había 29 pesos. ¿Cuánto dinero tenía antes de meter los 9 pesos?	Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 5 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?	Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX y ha ganado 4 más que Lupita. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?	Juan ha completado la colección de 26 tazos de AngryBirds y a Raquel le faltan 4. ¿Cuántos tazos tiene Raquel?
x-b=c	Emilia tenía algunos dulces, le dio 3 a María. Ahora le quedan 15 ¿Cuántos dulces tenia Emilia al principio?	*No existe	Lupita ha ganado 13 juegos en el XBOX, que son 4 menos que los que ha ganado Pepe. ¿Cuántos ha ganado Pepe?	Raquel tiene 16 tazos de Angry Birds. Juan tendría que perder 3 para tener los mismos que tiene Raquel. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

Llevando				
	Cambio	Combinación	Comparación	Igualación
a+b= x	Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 15 pesos, y hoy mi papá me dio 9 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?	En una tienda de supermercado existen 38 trajes de baño para niñas y 23 trajes de baño de niño ¿Cuántos trajes de baño hay en total en la tienda?	Daniel tiene 19 tazos de los Simpson y Pedro 15 tazos más que Daniel. ¿Cuántos tazos de los Simpson tiene Pedro?	En la última misión de "Water, ¿Dónde está mi agua"?, Pablo rellenó 19 patos de agua. Si rellenara 6 patos más, tendría los mismos que Emilia. ¿Cuántos patos rellenó Emilia?
a-b=x	En la fiesta de Alex hay bolsas de dulces, para dárselos a cada uno de sus 24 amigos. Si asisten a la fiesta sólo 7 amigos. ¿Cuántas bolsas sobraron?	*No existe	Daniel tiene 21 tazos de los Simpson y Pedro 7 menos que Daniel. ¿Cuántos tazos de los Simpson tiene Pedro?	**Raquel ha completado la colección de 57tazos de AngryBirds. Si ahora perdiera 8 tazos, tendría los mismos que tiene Juan. ¿Cuántos tazos tiene Raquel?**
	Pepe ha ganado 14 juegos de Mario Bros en el XBOX y Lupita 6 menos que él ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?			

a+x= c	Tenía 9 dulces, y jugando gané algunos, ahora tengo 37.¿Cuántos dulces gané?	**Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?**	Pepe ha ganado 14 juegos de Mario Bros en el XBOX. Si Lupita ha ganado 22, ¿cuántos juegos más ha ganado Lupita que Pepe?	Juan ha completado la colección de 57tazos de AngryBirds y Raquel sólo tiene 28 ¿Cuántos tazos tiene que ganar Raquel para tener los mismos que Juan?
a-x=c	En la fiesta de Alex hay 22 bolsas de dulces, para dárselos a cada uno de sus amigos. Si sobraron 7 bolsas. ¿Cuántos amigos llegaron?	*No existe	Pepe ha ganado 23 juegos de Mario Bros y Lupita 17 ¿Cuántos juegos menos ha ganado Lupita que Pepe?	Juan ha completado la colección de 57tazos de AngryBirds y Raquel sólo tiene 28. ¿Cuántos tazos tiene que perder Juan para tener los mismos que Raquel?
x+b=c	Ayer metí 19 pesos en mi alcancía y después que la rompí vi que había 26 pesos. ¿Cuánto dinero había adentro de mi alcancía antes de meter los 19 pesos?	Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de gatos. ¿Cuántos tendrá de perros?	Pepe ha ganado 15 juegos de Mario Bros en el XBOX y ha ganado 6 más que Lupita 21¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?	Juan ha completado la colección de 57 tazos de Angry Birds y a Raquel le faltan 8 ¿Cuántos tazos tiene Raquel?
x-b=c	Emilia tenía algunos dulces, le dio 8 a María. Ahora le quedan 15 ¿Cuántos dulces tenia Emilia al principio?	*No existe	Lupita ha ganado 18 juegos en el XBOX, que son 7 menos que los que ha ganado Pepe. ¿Cuántos ha ganado Pepe?	Raquel tiene 47 tazos de AngryBirds. Juan tendria tendría que perder 9 para tener los mismos que Raquel. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

*Se refiere al tipo de problema combinación, debido a que el problema parte de dos cantidades que se combinan entre sí para dar lugar a una nueva cantidad total. Este tipo de problema sólo podrá ser resuelto por la operación de adición, en donde la incógnita puede encontrarse en los modelos: $a + b = x$, $a + x = c$ y $x + b =$

ANEXO 2

INSTRUMENTO

Nombre ____ Grado _______

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas

Tengo una alcancía en la que voy metiendo mis domingos. Ayer tenía ahí 9 pesos, y hoy mi papá me dio 7 pesos de domingo. ¿Cuánto dinero tendré ahora en mi alcancía?

Resultado $\boxed{}$

Lucía tiene 23 peluches de perros y gatos. Si tiene 14 peluches de perros, ¿cuántos gatos de peluche tiene?

Resultado $\boxed{}$

Pepe ha ganado 17 juegos de Mario Bros en el XBOX, y Lupita 4 menos que él. ¿Cuántos juegos ha ganado Lupita?

Resultado

Raquel ha completado la colección de 57 tazos de AngryBirds. Si ahora perdiera 8 tazos tendría los mismos que Juan. ¿Cuántos tazos tiene Juan?

Resultado