SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD AJUSCO

LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA

SIMETRÍA Y SEMEJANZA MEDIANTE EL TESELADO Y LA SECCIÓN ÁUREA EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA, BASADA EN EL MODELO VAN HIELE

PROPUESTA PEDAGÓGICA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN PEDAGOGÍA

PRESENTA:

AIDA SALCEDO GARRIDO

ASESOR:

ARTURO BAZAN ZURITA

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE, 2014

AGRADECIMIENTOS

Gracias Dios por darme la vida, salud, fuerza, concentración y pasión en este logro de mi vida

Quiero agradecer a todos aquellos que me acompañaron a concluir una meta importante en mi vida, cuyo logro no lo hubiera hecho sin su apoyo. A mi esposo Pascual Puebla Villanueva y mi hija Dorely Puebla Salcedo que estuvieron conmigo en todo momento y que a veces se privaron de mi compañía. Gracias por creer en mí y ser mi más grande inspiración. A ustedes les dedico estos pensamientos:

Para mi esposo Pascual Puebla Villanueva: Lágrimas de amor

Para mostrar un amor sincero
no siempre un abrazo es correcto
para encontrar el secreto
basta una lágrima de sentimiento.

La fuerza del amor
no siempre se haya en la dureza
sino en una lágrima sincera
que despierta el corazón.

Hoy me mostraste tu fortaleza
al acompañarme en mi flaqueza
compartiendo lágrimas de pureza,
por eso te amo, lo digo con firmeza.

Para mi hijo Dorely Puebla Salcedo: Regalo de luz

De muchos angelitos
uno muy bonito bajó del cielo
el aire la engendró y de la tierra nació
el aire la fuerza le dio y la tierra la sabiduría le brindó

Mientras tu mamita
Nerviosa por los regocijos en tu vientre
Sus lágrimas anunciaron tu llegada
Y en mi corazón
Un sentimiento puro y sincero
Para recibirte con amor

Bienvenida hija... agüita de mi vida

A mis padres que estuvieron a mi lado durante toda mi formación educativa, por sus regaños y orientaciones cuando me equivocaba, por su apoyo incondicional y sincero. Gracias Anastasio Salcedo Galicia y Marta Garrido Rodríguez por concederme una segunda oportunidad y continuar con mis estudios, después de una caída que sé que los lastimó mucho. Hoy les digo con orgullo y satisfacción que he cumplido.

Ahora que recuerdo Alma, Ana María, Iram y Omar Salcedo Garrido siempre estuvieron conmigo y quienes en momentos duros me enseñaron y guiaron con sus experiencias o bien para distrajeron y relajaron con sus ocurrencias. Gracias Dios por permitirme ser su hermana.

A la Universidad Pedagógica Nacional por otorgarme un lugar y permitirme estudiar en sus instalaciones. A los docentes que me brindaron sus conocimientos a lo largo de mi preparación académica, en especial, a los profesores del campo de Educación Matemática:

Profa. Gilda Rocha

Prof. Enrique Vega Ramírez

Prof. Arturo Bazán Zurita

Prof. Juan de Dios

Prof. Rodrigo Cambray Núñez

Gracias por su enseñanza, orientación, preocupación por mi preparación académica y sobre todo, por su paciencia. Un especial agradecimiento al profesor Arturo Bazán Zurita quien me apoyó en este último peldaño de la licenciatura.

A los amigos que dejamos de frecuentar y compartir días, en especial a la Doctora Sara Alicia Andrade Narváez, más que una jefa y maestra, una gran amiga y persona que me brindó su amistad sincera y su sabiduría.

Hoy concluyo una etapa, con algunos desvelos y enfermedades, pero he terminado con satisfacción, con orgullo y felicidad. Es una etapa y hay muchos más por superar, no sólo académicos sino también de la vida misma, aún falta prepararme, no me conformaré con este triunfo porque hay muchos más e iré por ellos.

Como profesionista de la educación, no olvidaré mi papel, no podré cambiar al mundo de un día para otro, pero si puedo mejorarlo poco a poco, es una tarea difícil pero no imposible. Como pedagoga me conduciré por la vida con sabiduría, respeto, tolerancia, como lo he aprendido, orientando a los estudiantes por el camino de la rectitud, del razonamiento y de la alegría.

Como especialista en Educación Matemática, difundiré la facilidad y beneficios de estudiar esta ciencia, ¿Cómo? Con los conocimientos que he adquirido en el campo. Pondré en práctica el lema de la Universidad Pedagógica Nacional, “Educar para transformar”. Hoy estoy aquí festejando, mañana estaré transformando.

ÍNDICE

Anexo 1

T*eselaciones, o cómo decorar el baño*

Apéndice A

Revisión de las habilidades por desarrollar en primaria y secundaria

Apéndice B

Los Teselados

Apéndice C

La Sección Áurea

INTRODUCCIÓN

Los artistas que ignoran la geometría, no pueden ser o convertirse en un artista absoluto.
Alberto Durero
El arte es la expresión de los más profundos pensamientos por el camino más sencillo.
Albert Einstein

En los planes y programas de estudio oficiales de la educación secundaria que proporciona Secretaría de Educación Pública (SEP), se propone una formación integral, tratando de enlazar las asignaturas con temas transversales como nutrición o sexualidad, entre otros temas, se sugiere pero no se menciona la conexión de las ciencias. Este trabajo recepcional pretende por medio de una propuesta pedagógica contribuir a la vinculación de las disciplinas además propone un nuevo acercamiento y experiencias en el estudio de las Matemáticas.

La mayoría de las personas tienen una visión limitada y equivocada de las Matemáticas, aceptan que son importantes pero destacan las dificultades de su aprendizaje, soslayando el impacto y relación que tiene esta ciencia en otras disciplinas, con el Arte específicamente.

El logro de la vinculación entre Matemáticas y Arte implica uno de los desafíos para quienes se encargan de diseñar estrategias pedagógicas, en particular para la enseñanza de las Matemáticas. En este trabajo mediante esta vinculación se busca que ir más allá del dominio de contenidos y sensibilizar a los alumnos sobre los beneficios y el gusto de estudiar esta ciencia.

En este trabajo recepcional se expone una propuesta pedagógica, que persigue es ubicar las matemáticas en un ámbito cultural, mostrando la relación existente de ésta con otras ciencias y se orienta a la vinculación entre Arte y Matemáticas, específicamente entre geometría y dibujo.

Esta propuesta sigue los lineamientos de la SEP y del enfoque de Resolución de Problemas y tiene como sustento teórico el Modelo de Van Hiele para plantear actividades. Los contenidos matemáticos que se consideran para lograr la vinculación son simetría y semejanza y los temas artísticos son los Teselados y la Sección Áurea. La propuesta está estructurada por cinco capítulos, un apartado de consideraciones y reflexiones finales. Además se incluyen anexos y apéndices.

En el primer capítulo se presentan dos apartados: Planteamiento, delimitación y justificación del problema y Objetivos de la propuesta. En este se formula y delimita el problema que se pretende abordar, se muestra la vinculación de las Matemáticas con otras asignaturas. También se justifica la pertinencia de la propuesta mediante algunos resultados de pruebas como los Exámenes de Calidad de Logro Educativo (EXCALE) y finalmente se plantean los objetivos.

EL capítulo 2 está constituido por tres apartados: Marco referencial, Marco teórico y Revisión de la literatura. Se hace una revisión de lo que se propone en los planes y programas de estudio de la SEP para el estudio de los contenidos de simetría y semejanza, se expone las teorías Modelo Van Hiele y el Modelo de Vinner, Habilidades de dibujo y aspectos teóricos de los temas artísticos elegidos: Teselados y Sección Áurea

El tercer capítulo consta de los siguientes apartados: Metodología para el análisis del desarrollo de la Habilidad de Dibujo y para la elaboración de las actividades de la propuesta aplicando el modelo de Van Hiele. Se describen, por un lado, la metodología para el análisis de las posibles experiencias geométricas del alumno y, por el otro, el desarrollo de la habilidad de dibujo de primaria y secundaria planteadas en los planes, programas y libros de texto así como el proceso de elaboración de las actividades que se incluyen en la propuesta.

El capítulo cuarto se divide en los apartados sobre las posibles experiencias geométricas en actividades de dibujo de los alumnos de primaria y así como los de secundaria que sirvieron de antecedente para la propuesta. Se presentan los resultados obtenidos del análisis de los planes y programas de estudio así como de los libros de texto y *mi Ayudante*, en relación con el desarrollo de la Habilidad de Dibujo: Representación, Reproducción y Construcción.

El capítulo quinto está conformado por cuatro apartados: Estrategia de trabajo, Actividades propuestas para el tema de teselados, Actividades propuestas para el tema de sección áurea y Algunas sugerencias para evaluar el desempeño de los alumnos. Se presenta la propuesta pedagógica para simetría y semejanza con los temas de Teselados y Sección Áurea. A partir de estos temas artísticos se abordan contenidos matemáticos del paquete curricular que proporciona la SEP.

En la parte final de esta investigación se encuentran las Consideraciones y reflexiones finales sobre la propuesta, así como las referencias bibliográficas que fueron de gran soporte para la elaboración de ésta, los anexos con imágenes de apoyo y los apéndices con el material para el desarrollo de las actividades.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO, DELIMITACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA. OBJETIVOS DE LA PROPUESTA

Capítulo 1. Planteamiento, delimitación y justificación del problema. Objetivos de la propuesta

En este capítulo se delimita el problema en relación con el bajo desempeño en Matemáticas de los alumnos del nivel de secundaria y la vinculación de éstas con otras asignaturas. La justificación tiene en cuenta algunos resultados de pruebas como EXCALE (Exámenes de Calidad de Logro Educativo) y finalmente se plantean los objetivos. El capítulo se constituye por dos apartados; el primero trata sobre el Planteamiento, delimitación y justificación del problema y el segundo de los Objetivos de la propuesta.

1.1. Planteamiento, delimitación y justificación del problema

Actualmente México enfrenta problemas en su educación básica, algunos de ellos: índice bajo de la población estudiantil, analfabetismo, inasistencias, bullyng, aprovechamiento insuficiente en las asignaturas, entre otros. Por ello en este trabajo recepcional se propone diseñar una propuesta pedagógica para atender algunos de estos problemas los que se plantearán, delimitarán y justificarán posteriormente.

La propuesta pedagógica tratará de abordar tres problemas principales: el primero trata sobre el bajo rendimiento de los alumnos en geometría. El segundo sobre la estrecha vinculación de las Matemáticas con otras ramas de conocimiento y el tercero se refiere al modelo que se utilizará para atender los dos primeros problemas.

1.1.1. El desempeño bajo en Matemáticas de los alumnos del nivel de secundaria

En la actualidad está en vigor el Plan de Estudios de Educación Básica 2011, conformado por tres reformas curriculares de los tres niveles: la Reforma de Educación Preescolar de 2004, Reforma de Educación Primaria de 2009 y la Reforma de Educación Secundaria de 2011.

Estas reformas proponen una formación orientada al desarrollo de competencias y centrada en el aprendizaje de los alumnos. Las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes durante los tres niveles de la Educación Básica son:

> • *Competencias para el aprendizaje permanente*. Para su desarrollo se requiere: habilidad lectora, integrarse a la cultura escrita, comunicarse en más de una lengua, habilidades digitales y aprender a aprender.
> • *Competencias para el manejo de la información*. Su desarrollo requiere: identificar lo que se necesita saber; aprender a buscar; identificar, evaluar, seleccionar, organizar y sistematizar información; apropiarse de la información de manera crítica, utilizar y compartir información con sentido ético.
> • *Competencias para el manejo de situaciones*. Para su desarrollo se requiere: enfrentar el riesgo, la incertidumbre, plantear y llevar a buen término procedimientos; administrar el tiempo, propiciar cambios y afrontar los que se presenten; tomar decisiones y asumir sus consecuencias; manejar el fracaso, la frustración y la desilusión; actuar con autonomía en el diseño y desarrollo de proyectos de vida.
> • *Competencias para la convivencia.* Su desarrollo requiere: empatía, relacionarse armónicamente con otros y la naturaleza; ser asertivo; trabajar de manera colaborativa; tomar acuerdos y negociar con otros; crecer con los demás; reconocer y valorar la diversidad social, cultural y lingüística.
> • *Competencias para la vida en sociedad*. Para su desarrollo se requiere: decidir y actuar con juicio crítico frente a los valores y las normas sociales y culturales; proceder a favor de la democracia, la libertad, la paz, el respeto a la legalidad y a los derechos humanos; participar tomando en cuenta las implicaciones sociales del uso de la tecnología; combatir la discriminación y el racismo, y conciencia de pertenencia a su cultura, a su país y al mundo[1].

Para el logro de estas competencias se plantean las siguientes asignaturas: Español, Matemáticas, Ciencias (física, química o biología), Habilidades Digitales y Segunda Lengua: Inglés. También se considera la enseñanza de las Artes. Estas asignaturas sirven para fortalecer en los alumnos campos de formación que la Educación Básica propone, los cuales son:

• Lenguaje y comunicación
• Pensamiento matemático
• Exploración y comprensión del mundo natural y social
• Desarrollo personal y para la convivencia

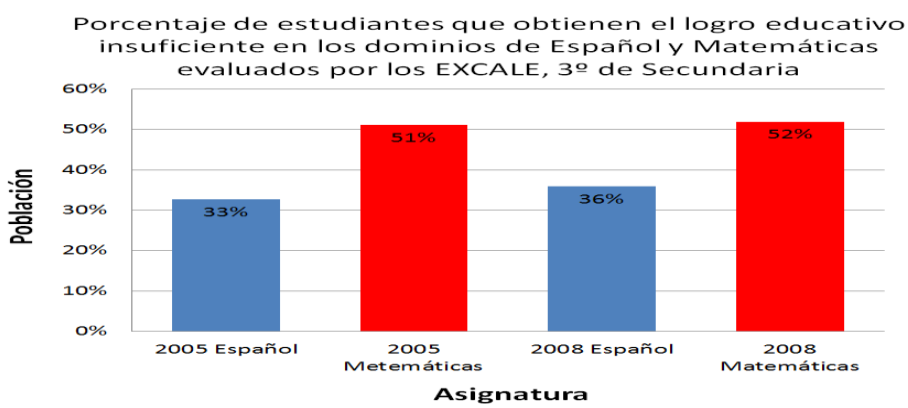
[1] Secretaría de Educación Pública. *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México, SEP: 2011, p. 15

Estos campos formativos y competencias son para cumplir un objetivo general, el cual es:

> …egresar estudiantes que posean competencias para resolver problemas; tomar decisiones; encontrar alternativas; desarrollar productivamente su creatividad; relacionarse de forma proactiva con sus pares y la sociedad; identificar retos y oportunidades en entornos altamente competitivos; reconocer en sus tradiciones valores y oportunidades para enfrentar con mayor éxito los desafíos del presente y el futuro; asumir los valores de la democracia como la base fundamental del Estado laico y la convivencia cívica que reconoce al otro como igual; en el respeto de la ley; el aprecio por la participación, el diálogo, la construcción de acuerdos y la apertura al pensamiento crítico y propositivo.[2]

Para cumplir este objetivo general están las asignaturas y los campos formativos antes mencionados, cada uno tiene un objetivo particular. Para este trabajo sólo analizaremos los correspondientes a la asignatura de Matemáticas y al campo formativo de Pensamiento Matemático y específicamente lo relacionado con la Geometría. También se considerará el campo formativo de Desarrollo Personal y para la Convivencia, en especial lo que se refiere a Expresión y Apreciación Artística.

Español y Matemáticas son las asignaturas que más problemáticas enseñar debido a que en las reformas antes mencionadas se busca dejar atrás lo tradicional y plantear nuevos enfoques para que el alumno deje de ser sólo receptor. A continuación se analiza el aprovechamiento de los estudiantes en Matemáticas con respecto a Español; el aprendizaje de los alumnos aún es insuficiente como se muestra en la siguiente gráfica[3].



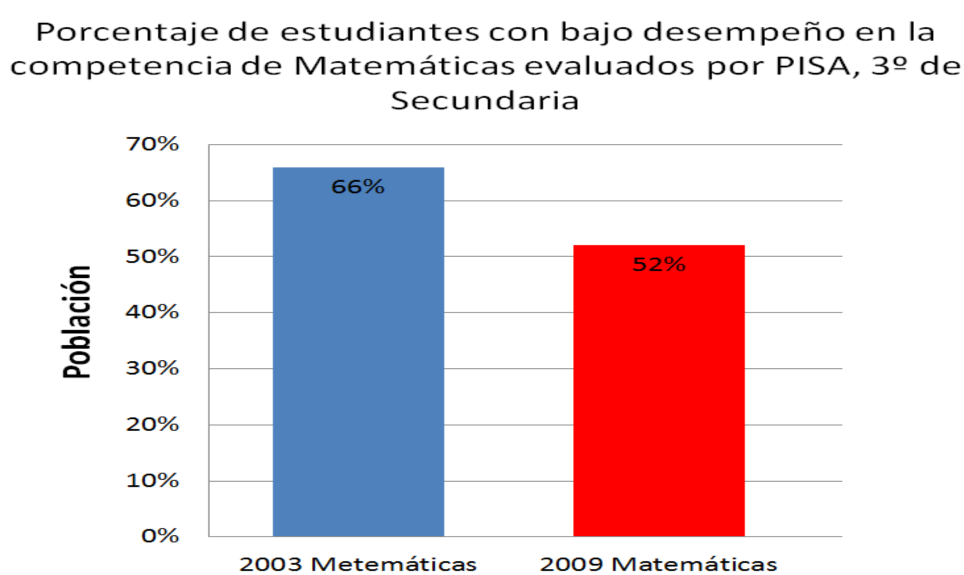
[2] Secretaría de Educación Pública, Op. Cit., p.17

[3] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. *Panorama educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional, 2012 Educación Básica y Media Superior.* México, INEE: 2013, pp. 397-410

Los datos indican el porcentaje de la población de alumnos a nivel nacional de 3º de secundaria con un logro educativo insuficiente en Español y Matemáticas, lo cual significa que los alumnos "presentan carencias importantes en el dominio de los conocimientos, habilidades y destrezas escolares, expresando una limitación para progresar satisfactoriamente en una asignatura"[4].

En Español, el porcentaje del total de la población de alumnos que obtuvieron un logro insuficiente es de 36%, del 2005 al 2008 se incrementó 3% pero no exceden el 40%. Mientras que en matemáticas, el porcentaje es de 52%, del 2005 al 2008 aumentó 1%, a pesar de ser poco, el total de alumnos con este logro es mayor al 50%.

Los datos anteriores señalan que existe un problema especial en el rendimiento académico de las Matemáticas. Reportes de la prueba PISA (por las siglas en inglés del nombre *Programme for International Student Assessment*), indican que de cada dos niños, uno no sabe resolver por lo menos operaciones básicas. Estadísticamente se está hablando de que el 50% de los niños no sabe matemáticas. De igual manera, los datos del CENEVAL (Centro Nacional de Evaluación) nos indican un bajo rendimiento en esta materia.[5]



[4] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. Op. Cit., pp. 397-410
[5] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. Op. Cit., pp. 427-432

Esta gráfica muestra los resultados de las pruebas PISA que se aplicó en México. Se observa que, en una escala del 0 al 6, más de la mitad de los alumnos obtienen un desempeño por debajo del nivel 1 en la competencia de Matemáticas. Este indicador significa que los alumnos son incapaces de realizar las tareas más elementales. Del 2003 al 2009, el porcentaje del total de la población de alumnos disminuyó de 66% a 52%. Aunque disminuyó 14 puntos, el índice sigue siendo alto.

Para atender el problema anterior, en la enseñanza de las Matemáticas se utiliza el enfoque de resolución de problemas, tratando de invitar al niño a reflexionar, encontrar diferentes formas de resolución de problemas y formular argumentos para la justificación de sus resultados[6]. Se divide en ejes temáticos: Sentido numérico, Pensamiento algebraico; Geometría y Manejo de la información. Esta propuesta se centrará en el eje temático de Geometría

La Geometría que se enseña en preescolar son temas básicos como el reconocimiento de algunas figuras y cuerpos. En primaria se estudia en los 6 años de manera muy general figuras y cuerpos, la mayoría de los casos hacen referencia a cálculos de perímetros, áreas y volúmenes. En secundaria, este eje cambia al nombre de "Forma, espacio y medida" y se trabajan los temas con más amplitud y profundidad, los objetivos que se propone este eje son proporcionar a los alumnos:

- Una experiencia geométrica que les ayude a comprender, describir y representar el entorno y el mundo en el que viven.
- Una serie de conocimientos que les será útiles para resolver problemas de la vida cotidiana y acceder al estudio de otras materias y disciplinas.
- Una iniciación al pensamiento deductivo.[7]

Los contenidos que se desglosan para cubrir estos objetivos se enlistan a continuación:

[6] Secretaría de Educación Pública. *Programa de Estudios 2006 de Educación básica. Secundaria de Matemáticas*. México, SEP:2006, p. 11
[7] Ídem

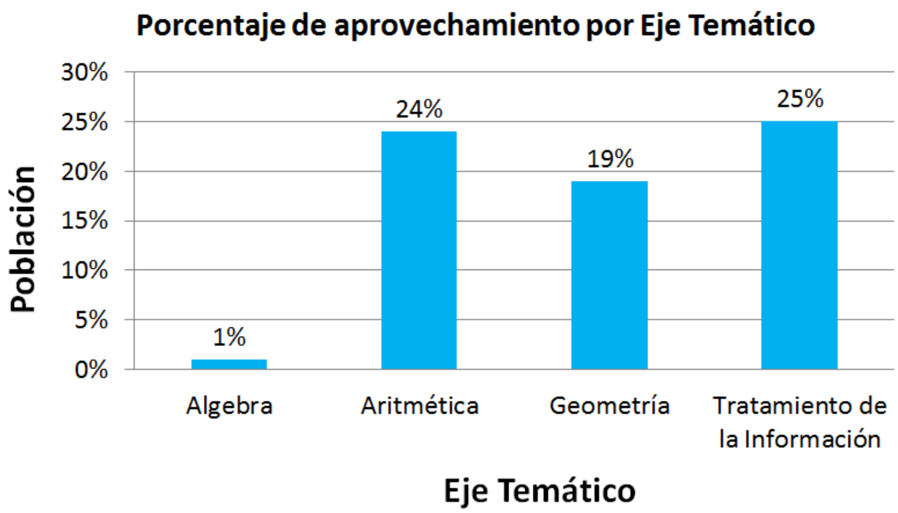
- Trazos y construcciones geométricos (reconocimiento de propiedades y características de figuras geométricas).
- Conocimiento y uso efectivo de los diferentes instrumentos de medida (cálculo de perímetros, áreas, volúmenes y capacidades).
- Simetrías de figuras.
- Conocimiento, manipulación y representación plana de los sólidos comunes (desarrollo de la imaginación espacial).
- Teorema de Pitágoras.
- Semejanza.[8]

A diferencia de la primaria, en la secundaria los temas vistos con respecto a la Geometría son más amplios y específicos, sin embargo, tanto los objetivos como los temas quedan cortos con lo que esta disciplina puede ofrecerles. La Geometría, más que una rama de las Matemáticas, es una forma de pensar, un conjunto de conocimientos que no pueden ser reducidos a simples acciones de calcular perímetro y volúmenes o solo reconocer figuras geométricas.

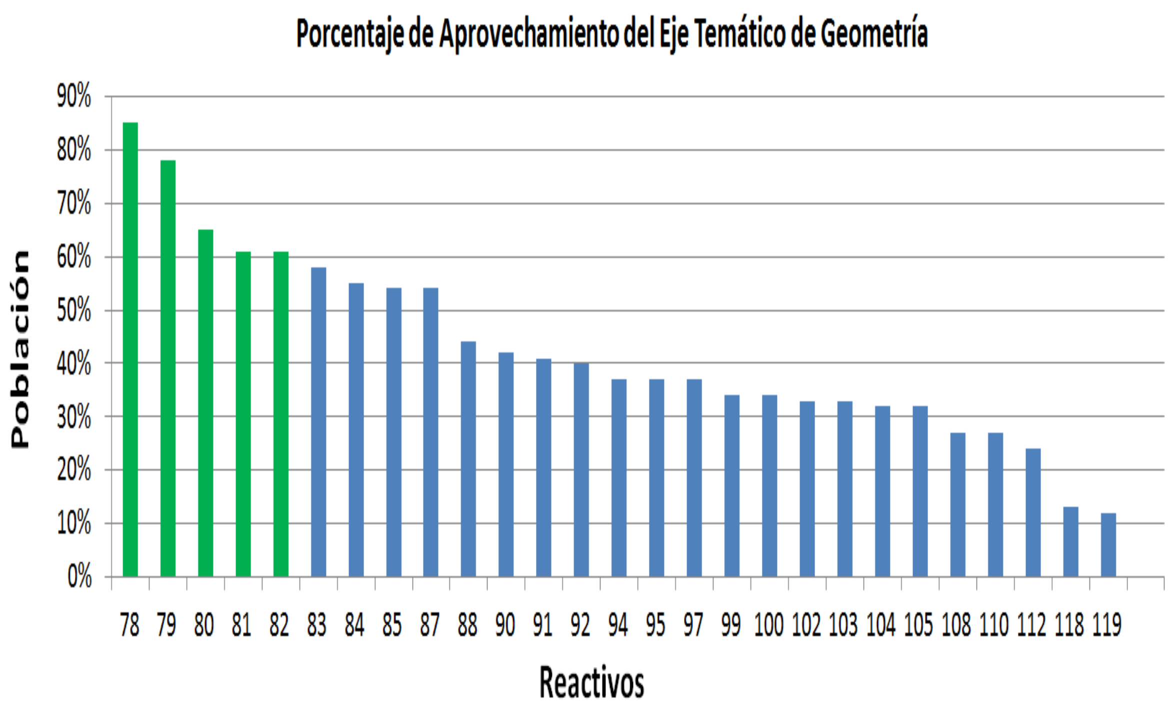
En otras palabras, la Geometría es una disciplina que puede desarrollar la capacidad de razonamiento y el interés por las matemáticas, el cual es uno de los estándares de PISA, Actitud hacia el estudio de la matemática, que sin duda se empobrece en la enseñanza tradicional, porque el profesor tiene la verdad absoluta y la imparte a sus alumnos.[9]

De acuerdo con la información proporcionada por el INEE (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación), los aciertos que obtuvieron los alumnos en geometría en EXCALE 2005 de tercero de secundaria son bajos con respecto a otros ejes temáticos de las Matemáticas. Varios de los alumnos contestan incorrectamente en temas de geometría, pues sólo el 19% de ellos tienen buen aprovechamiento. Sólo el eje temático de Álgebra está por debajo con 1%[10].

[8] Secretaría de Educación Pública. Op. Cit., p. 11
[9] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. *PISA en el aula: matemáticas*. México, INEE:2008, p. 78
[10] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. *Explorador EXCALE.* En línea, consultado el 23-09-2011 en http://www.inee.edu.mx/explorador/nuestraDificultad.php



En la siguiente gráfica se observa cómo de 27 reactivos del Eje Temático de Geometría, el 50% de la población de alumnos contestaron incorrectamente en 22 de ellos. El 60% apenas en 3 de ellos y el 75% en sólo 2 de ellos. Las barras de color verde pertenecen a los reactivos en que el porcentaje del total de alumnos fue mayor al 50% y los azules por debajo de ese porcentaje[11].

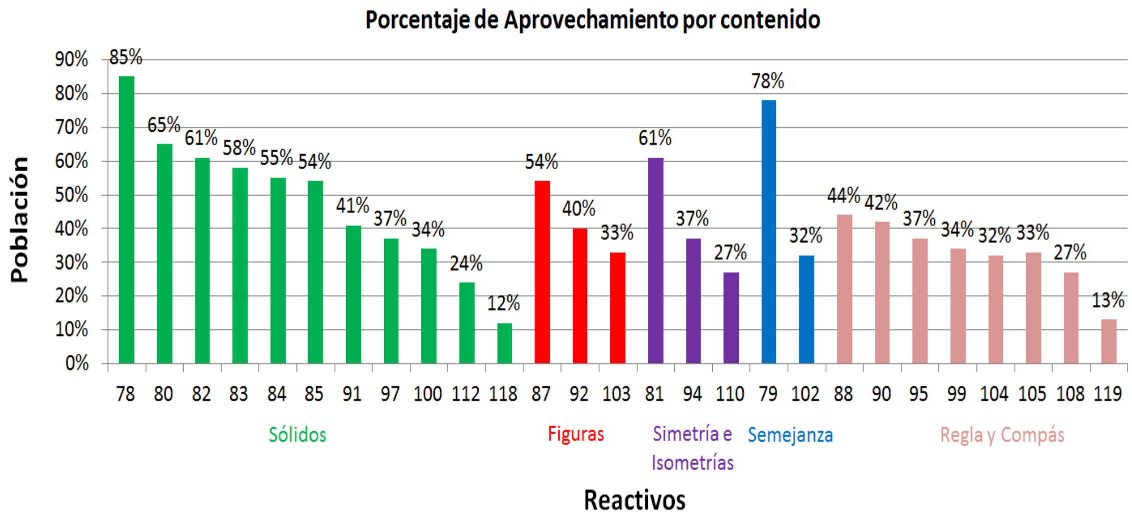


[11] García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero. "La Geometría y sus resultados en los Excale" en *La enseñanza de la Geometría*, México, Coordinación editorial Miguel A. Aguilar R y Teresa Ramírez Vadillo: 2008, pp. 97-120

Nombre del reactivo

78	Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros
79	Identificar semejanzas entre sólidos
80	Imaginar giros de sólidos
81	Identificar figuras simétricas con respecto a una recta
82	Imaginar e identificar las caras de un sólido formado por otros sólidos
83	Identificar las vistas laterales y frontales de sólido
84	Identificar la pirámide que corresponde a un desarrollo plano
85	Determinas las secciones planas que se forman al cortar un cono
87	Reconocer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º
88	Identificar las instrucciones para la construcción de polígonos regulares
90	Identificar las instrucciones para la construcción de cuadriláteros
91	Identifica características de poliedros después de realizar un corte con un plano
92	Aplicar propiedades de los ángulos inscritos en una semicircunferencia
94	Identificar las características simétricas de figuras
95	Reconocer instrucciones para la construcción de un círculo
97	Determinar las secciones planas que se forman al cortar un cubo
99	Identificar las instrucciones para trazar una perpendicular a un segmento por uno de sus extremos
100	Identificar diferencias entre sólidos
102	Aplicar el Teorema de Tales
103	Aplicar propiedades de ángulo central e inscrito en una circunferencia
104	Identificar las instrucciones para la construcción de la tangente a una circunferencia por un punto exterior a ella
105	Identificar las instrucciones para la construcción de triángulos equiláteros
108	Identificar las instrucciones para la construcción de la tangente a una circunferencia por un punto sobre ella
110	Reconocer los resultados de realizar dos reflexiones consecutivas respecto a dos rectas
112	Determinar las secciones planas que se forman al cortar una pirámide
118	Identifica el poliedro que corresponde con un desarrollo plano
119	Identificar las instrucciones para trazar una paralela a una recta por un punto dado

Los alumnos tienen buen aprovechamiento aproximadamente en una quinta parte del total de reactivos y un desempeño bajo en cuatro quintos. Esto indica que el conocimiento geométrico de la gran mayoría de los alumnos es insuficiente de acuerdo con EXCALE. En la gráfica siguiente, los reactivos se agruparon por contenido del Eje Temático de Geometría[12].



[12] García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero. Op. Cit., pp. 97-120

Las barras de color verde son los reactivos que corresponden a los sólidos, de rojo a las figuras, de morado a la simetría e isometrías, de azul a semejanza y de rosa a construcciones con regla y compás. Los contenidos de sólidos y construcciones con regla y compás son los que tienen más reactivos, mientras que las figuras, simetría e isometrías y semejanza tienen menos.

Entre estos contenidos, la simetría, la cual es la correspondencia entre dos puntos del plano o del espacio situados a uno y otro lado del centro, eje o plano[13], y la semejanza, que es la relación existente en las dimensiones entre dos o más figuras o cuerpos, y[14], tienen niveles de aprovechamiento más bajos que otros.

Ambos contenidos tienen un reactivo en que el total de la población de alumnos rebasa el 50% de aprovechamiento, sin embargo estos reactivos no tienen mucha complejidad en su resolución. Mientras el reactivo sea un poco más complejo, el nivel de aprovechamiento disminuye.

En simetría, por ejemplo, se encuentra un reactivo en el que el total de la población de alumnos con buen aprovechamiento fue del 61% contra dos de 27% y 37%. En semejanza un reactivo de 78% contra uno de 32%. También es notable observar que el total de la población de estudiantes que obtuvieron niveles de aprovechamiento suficiente está por debajo de 50% en todos los reactivos de construcciones con regla y compás.

1.1.2. Vinculación de las Matemáticas con otras áreas de conocimiento

Otro de los problemas que enfrenta la educación secundaria corresponde a la articulación de los contenidos de una o más asignaturas. Se ha planteado la multidisciplinariedad e interdisciplinariedad[15] en el currículum, pero al parecer aún no se ha logrado pues en los programas y planes de estudio las asignaturas aparecen separadas y cada una con su campo de estudio, estándares y objetivos.

[13] Manteca Aguirre, Esteban, coord. *Libro para el maestro. Matemáticas, secundaria*. México, SEP:2004, p.74

[14] Ibídem, p. 70

[15] La *multidisciplinariedad* se diferencia de la interdisciplinariedad debido a la relación que comparten las disciplinas. En una relación multidisciplinar, esta cooperación puede ser mutua y acumulativa pero no interactiva, mientras la interdisciplinariedad mezcla las prácticas y suposiciones de las disciplinas implicadas. Es decir, la interdisciplinariedad supone un mayor grado de integración entre las disciplinas.

Otra forma en la que se ha intentado hacer una vinculación entre asignaturas es por medio de temas transversales. Estos temas hacen referencia a contextos de la vida cotidiana que pueden analizarse en diferentes asignaturas aunque no estén relacionadas, por ejemplo, hablar de sexualidad en Matemáticas.

En México, por ejemplo, se emplean los temas transversales. El *Plan de Estudios 2011 de Educación Básica* propone incorporar temas de relevancia social en cada uno de los niveles y grados. Estos temas son: atención a la diversidad, equidad de género, educación para la salud, educación sexual, educación ambiental, educación financiera, educación del consumidor, prevención de la violencia escolar, educación para la paz y derechos humanos, educación vial.

Sin embargo esta vinculación entre asignaturas es más difícil para las Matemáticas; a veces los propios contenidos y ejes matemáticos no se logran relacionar. La mayoría de los temas se dictan como clases desconectadas de la vida cotidiana y como consecuencia los alumnos no imaginan la utilidad que tienen las matemáticas en su formación.

De acuerdo con Hitt una de las principales dificultades en la enseñanza de las matemáticas se debe a la no existencia de la integración de la matemática en otras áreas de conocimiento, lo cual impide a los estudiantes procesen los algoritmos necesarios y requeridos en función de un objetivo: desarrollar el razonamiento geométrico vinculándolo con otras áreas de conocimiento para que los alumnos encuentren una utilidad para aprender matemáticas[16].

En otros países se pretende que la Geometría sea más que una disciplina de las Matemáticas. Sé busca la vinculación de ésta con la Aritmética y con el Álgebra. En la Educación Básica, en México, se ha logrado vincular los objetivos de la enseñanza del eje Manejo de la información de Matemáticas con otras asignaturas, pero consiste en investigar algún concepto o momento de la historia.

Esta vinculación de las Matemáticas con otras asignaturas es muy pobre, no sólo en nuestro sistema educativo, pues sólo se plantea buscar información sobre algo; por ejemplo, en otros países se pretende vincular la geometría con el arte, pero

[16] Hitt, F. “Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum” en *Educación Matemática,* vol. 10. Mexico: Grupo Editorial Iberoamericana:1998, pp. 23-45

sólo se pide investigar qué es un mosaico, observar varios ejemplos y encontrar las características de un mosaico, pero no llegan al análisis matemático.

Por otro lado, existe una concepción y valoración del arte muy limitada y hasta errónea, la mayoría de la población considera al arte como una actividad no redituable y concebida para diletantes, sin valor productivo y del cual podríamos prescindir; en el mejor de los casos se valora al arte como algo ornamental.

Esto ha provocado una idea del ser humano dividido en sus diversos componentes (razón y emociones) y en consecuencia una idea estrecha de su inteligencia, centrada en el pensamiento lógico racional. Por lo que la educación se ha enfocado en el desarrollo de conocimientos separados: ciencia por un lado y arte por el otro; dejando de lado otras capacidades que conforman también la inteligencia del ser humano.

Hace más de 50 años atrás, Charles Percy Snow ya lo había anunciado. En 1956, Snow expone en una conferencia esta división del pensamiento que se presenta en la sociedad, una división conformada; por un lado personas, dedicadas al arte (intelectuales) y por el otro lado, los físicos y matemáticos (científicos). Él lo llamó como separación de las dos culturas, ambos grupos tienen una imagen errónea uno del otro, provocando en ellos actitudes diferentes.

Como consecuencia de lo anterior, los programas de estudio oscilan entre lo formativo y lo expresivo. Cómo se dijo, relacionar las Matemáticas con otras asignaturas es difícil. Al tratar de enseñar artes para que los alumnos se expresen, se hace de forma separada, las artes por un lado y las asignaturas por otro.

El ser humano tiene que trabajar mucho para poder lograr la vinculación entre Matemáticas y Arte. Muchos estudiantes y profesionistas no alcanzamos a llegar a una creatividad libre por este conflicto ciencia vs arte que impide la elaboración o manejo de emociones que nos acompañan siempre en la toma de decisiones al abordar un problema o elaborar nuevos conocimientos.[17]

Por ello parte importante de esta propuesta es la introducción del Arte, que además de proporcionar una herramienta para analizar los contenidos de construcciones con regla y compás, simetría y semejanza, es un conocimiento

[17] Ortega Guzmán, Myrna. "Educación artística en el primer ciclo de la escuela primaria: expresión o copia". Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, México, UPN: 2005

básico para el desarrollo del ser humano. Sin embargo sólo me centraré en el dibujo porque es más cotidiano y sencillo de abordar para los alumnos, ellos constantemente dibujan e incluso hacen grafitis para expresar su pensamiento.

Una forma de usar el Arte como herramienta y vincularla con otras asignaturas y en especial con las Matemáticas es por medio de los teselados y la sección áurea. Los teselados son creaciones artísticas en donde un patrón se repite un infinito de veces para cubrir un espacio y las figuras no se interponen ni dejan huecos entre patrón y patrón. Pero detrás de cada elaboración de un teselado hay una teoría matemática y entre más complejo esté el modelo o patrón, mas Matemáticas hay.

La sección áurea también es conocida, entre otras expresiones, como proporción dorada. Desde el nombre se indica su sentido matemático y tiene como base el número divino, un número especial y único. La proporción divina, otro de sus nombres, es base para muchas creaciones de arte, no sólo pinturas sino también esculturas y hasta construcciones de edificios y monumentos.

El Arte, entre otras formas de conocimiento, favorece el desarrollo de la creatividad y la imaginación, y de alguna forma el que beneficia más, por ello en esta propuesta la tomo como herramienta para que junto con la Geometría impulsen el progreso de las habilidades que ambos campos de conocimientos brindan.

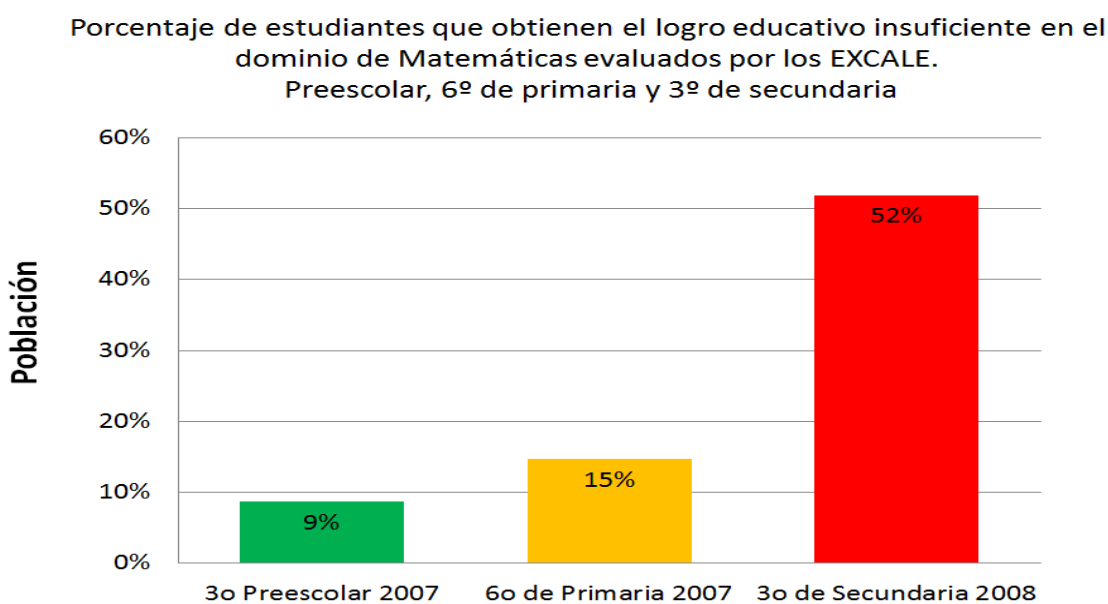
Se pretende que con el análisis de algunas obras de arte, los estudiantes logren comprender los conceptos geométricos antes mencionados, así mismo fortalecer otros contenidos como álgebra, construcciones con regla y compás, propiedades de figuras y cuerpos, entre otros, imaginar creativamente las formas de su entorno fortaleciendo su imaginación espacial, desarrollar e incrementar su sensibilidad ante el mundo, descubrir y construir sus propias posibilidades imaginativas.

Una pregunta importante en este trabajo es ¿por qué tercero de secundaria? porque los alumnos en este grado tienen los conocimientos previos sobre construcciones con regla y compás, simetría y semejanza y se estudian con más profundidad de los contenidos que se escogieron. Además el porcentaje del total de alumnos con niveles de aprovechamiento suficiente se reducen en pruebas como PISA y EXCALE.

1.1.3. *El modelo*

Los alumnos de secundaria se encuentran en un periodo de transición tanto biológico, como social y psicológico, en este último aspecto en lo que se refiere al aprendizaje de las Matemáticas, se comienza el carácter formal del razonamiento y lenguaje matemático, así como el proceso de abstracción. Posiblemente este desarrollo de un pensamiento informal a formal sea un factor del bajo rendimiento de los alumnos de secundaria en esta asignatura.

En la gráfica siguiente se muestra cómo la población de alumnos de tercero de secundaria obtiene un logro de aprovechamiento insuficiente mayor que en primaria y preescolar. En preescolar el 9% tiene un logro educativo insuficiente mientras que en primaria un 15 %.[18]



En tercero de secundaria, el razonamiento matemático se ve mermado por varios factores. Algunos de ellos se deben a las actitudes negativas que tienen algunos alumnos y maestros o la confianza en la tecnología computarizada que dan respuestas inmediatas, facilitando el trabajo pero se pierde la capacidad de razonar el procedimiento.[19]

[18] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. Op. Cit., pp. 397-410

[19] Markarian, Roberto. *La dimensión humana de la matemática*. México: Correo del maestro y Ediciones la Vasija: 2003, pp.17-22

Otro factor que afecta la pérdida de la apreciación e interés de los alumnos por las Matemáticas se debe, en cierta parte, a que algunos docentes por no explicar en un sentido general la importancia de la misma[20] o por porque la enseñanza de esta disciplina se ha caracterizado por ser rígida y tradicionalista[21]. Actualmente se emplea el enfoque de resolución de problemas donde el docente implementa nuevas estrategias y prácticas pedagógicas.

Es necesaria la introducción de un modelo pedagógico que permita el aprendizaje y desarrollo del razonamiento matemático del estudiante. Que nos muestre el tipo de razonamiento en el que se encuentre y también indique cómo lograr que adquiera el conocimiento. Dicho modelo es el Van Hiele, un modelo reciente que plantea niveles y fases de aprendizaje para diseñar actividades de todo tipo para una enseñanza adecuada que facilite el paso de un nivel de razonamiento a otro.

En otros términos, el problema se reduce a la siguiente pregunta ¿cómo mejorar el aprovechamiento insuficiente en geometría obtenido por los alumnos de tercer grado de secundaria mediante un modelo que permita establecer una secuencia y logre vincular las matemáticas con otros campos de conocimiento y que además se ajuste con el enfoque planteado por la SEP?

En respuesta al problema mencionado, elaboro la siguiente propuesta pedagógica con base en el modelo Van Hiele, siguiendo los planteamientos del enfoque resolución de problemas. Sin embargo debo aclarar que sólo tomaré en cuenta los tres primeros niveles de dicho modelo.

1.1.4. Justificación de la propuesta

Algunas preguntas del lector pueden ser por qué se escogió este problema y no otros, por qué Matemáticas y no Español o Historia. Para justificar el problema que se eligió se planteará las siguientes preguntas, por qué geometría y no otro eje temático, por qué el arte y no otra ciencia y por qué el modelo Van Hiele y no otro modelo. A continuación se responden estas cuestiones.

[20] Markarian, Roberto, Op. Cit., pp.17-22
[21] Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. Op. Cit., p. 78.

¿Por qué geometría y no otro eje temático? La razón de elaborar una propuesta pedagógica no sólo es por los niveles de razonamiento insuficiente que obtienen los alumnos de secundaria en México, sino porque esta asignatura promueve grandes habilidades al estudiante.

El estudio de la geometría es importante no sólo para cubrir el programa de Matemáticas, sino porque, por un lado, estamos inmersos en un ambiente espacial teniendo contacto con objetos y acontecimientos, la geometría es la matematización de este espacio en el que nos encontramos.[22]

Por otro lado, favorece en los alumnos el desarrollo de habilidades visuales, habilidades de dibujo, habilidades de comunicación, habilidades lógicas o de razonamiento y habilidades de aplicación y transferencia. Algunos avances en la ciencia y en el arte, se debe a que la geometría suscita en el estudiante el desarrollo de las habilidades antes mencionadas, pues cada una de ellas permiten:

- La habilidad visual desarrolla es un proceso cognitivo que se basa en el uso de elementos visuales o espaciales para resolver problemas o probar propiedades. Permite el desarrollo de dos habilidades: la captación de representaciones visuales externas y el procesamiento de imágenes mentales.
- La habilidad de dibujo está relacionado con el desarrollo de las habilidades de representación, reproducción y construcción de objetos geométricos para la resolución de problemas.
- La habilidad de comunicación se refiere a la capacidad de leer, escuchar, entender, definir, comunicar e interpretar información, ya sea de forma oral, escrita o gráfica. Esta habilidad está muy relacionada con el proceso de argumentación, el cual va más allá de la comunicación, pues en este caso no solo informa sino que tiene que demostrar que su procedimiento así como sus resultados son verídicos y correctos.
- La habilidad de lógica o de razonamiento permite al niño abstraer, hacer conjeturas, justificarlas y demostrarlas. Permite al alumno plantear contraejemplos y profundizar la argumentación. Además de que fortalece la deducción e inducción en los estudiantes.
- Finalmente la habilidad de aplicación y transferencia desarrolla en el aprendiz la capacidad o habilidad de aplicar lo aprendido no sólo a otros contextos de las matemáticas sino al mundo físico en general, es decir a otras ciencias o disciplinas.[23]

[22] Freudenthal, Hans. "Mayor Problems in Mathematics Education" Educational *Studios in Mathematics*. Trad. Alejandro López Yáñez. Vol. 12, No. 2, 1981, p. 8

[23] Bressan , Ana, Beatriz Bogisic y Karina Crego. *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Buenos Aires: Novedades Educativas, 2000. pp. 9-17

Cuando se logra el desarrollo de estas habilidades se puede decir que la enseñanza de la geometría ha cumplido con su valor formativo, ya que en la actualidad se piensa que la geometría sólo tiene que ver con la medición o cálculo de áreas y perímetros, cuando en realidad nos ofrece mucho más.

Como se mencionó anteriormente, la propuesta utilizará el dibujo como herramienta para el aprendizaje de algunos conceptos geométricos, por lo cual conviene aclarar que de todas las habilidades que se desarrollan con el estudio de la Geometría sólo se tomará la habilidad de dibujo para comprender claramente la relación existente entre Matemáticas y Arte.

La habilidad de dibujo sirve no sólo para "evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino también son medios de estudio de propiedades geométricas, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento"[24] y favorecer el desarrollo de habilidades en el niño como:

Representación: Consiste en visualizar un objeto desde diferentes puntos de vista y con distintos procedimientos.

Reproducción: Los alumnos copian en igual o distinto tamaño los objetos a representar.

Construcción. Radica en elaborar un objeto con sus propios conocimientos y herramientas de forma oral, escrita o gráfica.

Además los alumnos tienen conocimientos insuficientes en el 80% en contenidos de geometría. Tienen un mal desempeño en temas de construcción aunque tienen buen desempeño en situaciones de simetría. Esto indica que los alumnos tienen desarrollado sólo la habilidad visual pero no pueden aplicarlos a otras situaciones problemáticas. Ejemplo de lo anterior se muestra en el siguiente reactivo:[25]

[24] Bressan , Ana; Beatriz Bogisic y Karina Crego. Op. Cit., p. 41

[25] Todos los reactivos que se utilizaron para justificar esta propuesta así como las gráficas del porcentaje de aprovechamiento de los alumnos en éstos, se obtuvieron de Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. *Explorador EXCALE.* En línea, consultado el 23-09-2011 en http://www.inee.edu.mx/explorador/nuestraDificultad.php

Indica qué figura se construye al seguir las instrucciones que se enlistan a continuación.

a) Traza una circunferencia C_1 con centro en *O*.
b) Ubica el punto *P* exterior a C_1.
c) Traza el segmento *PO*.
d) Determina el punto medio *A* de *PO*.
e) Traza una circunferencia C_2 con centro en *A* que pase por *P* y *O*
f) Llamemos *T* y T^1 a los puntos donde C2 corta a C1, traza la recta que pase por *P* y *T*.

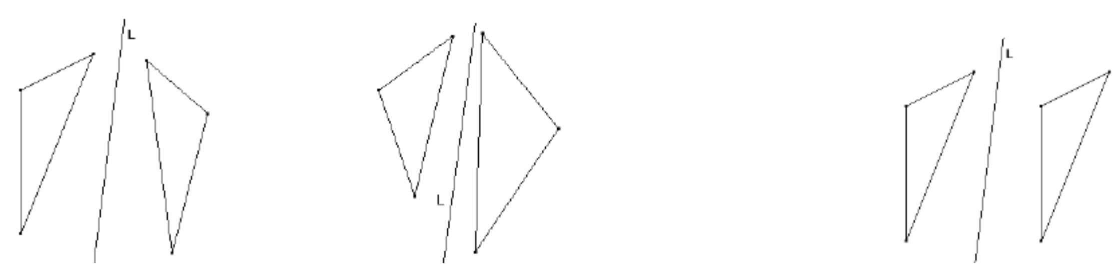
A) Se construye una recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto localizado sobre la circunferencia.
B) Se construye una bisectriz de un ángulo inscrito a la circunferencia
C) Se construye una recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto exterior a la circunferencia.
D) Se localizan los puntos *T* y T^1 donde se intersectan dos circunferencias.

EXCALE reportó este reactivo como problemático para los alumnos. Se trata de seguir instrucciones para construir una figura. Si bien no lograron imaginar cuál es el producto de las instrucciones, pudieron haber hecho los trazos para llegar a la construcción final. Las habilidades de dibujo así como de comunicación no están bien desarrolladas.

¿Por qué el contenido de simetría? No existe mucho problema con este contenido, pues a nivel nacional, según los reportes de EXCALE 2008, la población de alumnos están por arriba del 70% siempre y cuando sólo se trate de identificar que figuras son simétricas (habilidad visual) como lo muestra el siguiente reactivo.

Observa cada figura. ¿Cual de las siguientes figuras **es simétrica** con respecto a la recta L?

A* **B** **C** **D**



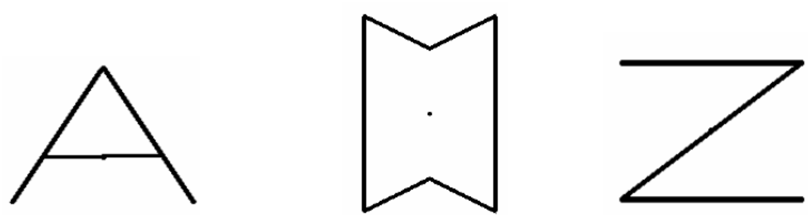
Pero como se puede observar, son figuras y ejercicios tradicionales, no hay mayor complicación. Sin embargo, el problema se dificulta cuando ya no se trata solo identificar qué figuras son simétricas sino de identificar las características simétricas de una figura, como se muestra en el siguiente reactivo.

Lee las siguientes afirmaciones:

a. Tiene un solo un eje de simetría, pero no tiene simetría central.
b. Tiene dos ejes de simetría y además simetría central.
c. No tiene ejes de simetría pero si tiene simetría central.
d. Tiene un eje de simetría y simetría central
e. Tiene dos ejes de simetría pero no tiene simetría central
f. No tiene ejes de simetría, ni simetría central.

Observa las siguientes figuras

I II III

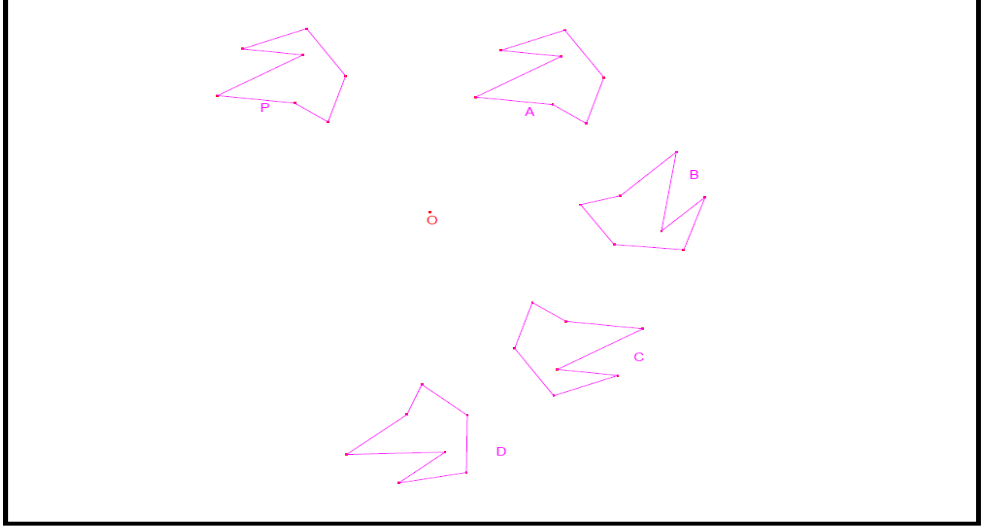


De acuerdo con las afirmaciones y las figuras, ¿cuál afirmación le corresponde a cada una de las figuras?

A) a I, b II, c III *
B) d I, e II, f III
C) a I, d II, f III
D) f I, d II, e III

El problema se agrava más cuando se trata de identificar el simétrico de una figura con respecto a un punto y no a una recta. El resultado de los alumnos que se muestra en los reportes de EXCALE 2008, está por debajo del 40% a nivel nacional, como se muestra en el siguiente reactivo.

¿Cuál de las figuras *A, B, C* o *D* representa al simétrico del polígono *P* respecto al punto *O*?



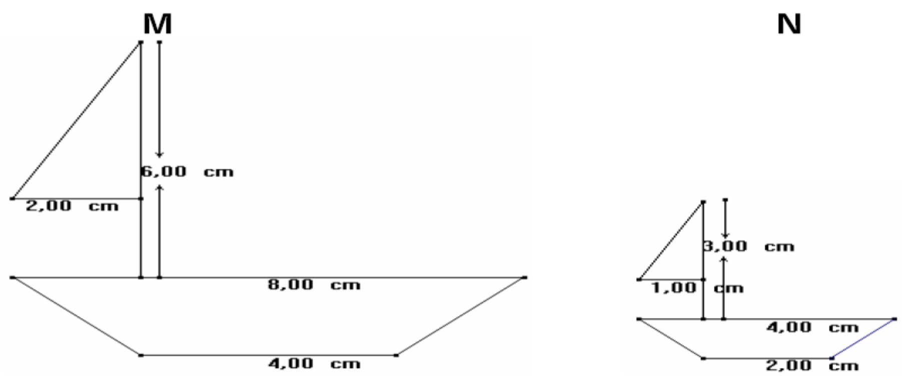
¿Por qué semejanza? En la siguiente tabla se muestra cómo apenas el 23% de la población de alumnos a nivel nacional tienen un aprendizaje satisfactorio sobre escala, un contenido de la Geometría en tercero de secundaria, que para comprenderlo es necesario primero estudiar semejanza, lo cual implica que si en escala los alumnos andan bajos es porque quizás aún no han comprendido el concepto de semejanza.

Eje de contenido: Geometría
Contenido: Resolver problemas que implican identificar escalas entre figuras
(NOTA: Para poder ver los archivos requiere un programa lector de PDF. Descargue uno de los que se muestran a continuación: Acrobat, Foxit)

Modalidad o estrato	Porcentaje de aciertos	¿Qué evalúa?	¿Cómo evalúa?
• Total Nacional	23%		
• Secundarias Privadas	29%		
• Telesecundarias	27%		
• Secundarias Técnicas	22%		
• Secundarias Generales	21%		

El reactivo correspondiente a escala es el siguiente.

Observa las dos figuras.
La figura N se dibujó aplicando una escala a partir de la figura M.



¿Cuál es la escala que se aplicó?

A) 1 : 2
B) 2 : 1
C) 1 : 3
D) 8 : 4

Otro contenido en que los alumnos también tienen problemas es en las construcciones con regla y compás. Incluso tienen dificultades al tratar de seguir las instrucciones como se muestra en la siguiente tabla de EXCALE en donde se señala que sólo el 35% de la población estudiantil contestó correctamente.

Eje de contenido: Geometría
Contenido: Identificar las instrucciones para la construcción de polígonos regulares
(NOTA: Para poder ver los archivos requiere un programa lector de PDF. Descargue uno de los que se muestran a continuación: Acrobat, Foxit)

Modalidad o estrato	Porcentaje de aciertos	¿Qué evalúa?	¿Cómo evalúa?
• Total Nacional	35%		
• Total Nacional	35%		
• Secundarias Privadas	46%		
• Telesecundarias	35%		
• Secundarias Generales	35%		
• Secundarias Técnicas	33%		

El reactivo sobre construcciones con regla y compás es el siguiente, donde un gran número de alumnos eligieron como respuesta el inciso D

Indica qué figura se construye al seguir las instrucciones que se enlistan a continuación.

a) Traza una circunferencia C_1 con centro en O.
b) Ubica el punto P exterior a C_1.
c) Traza el segmento PO.
d) Determina el punto medio A de PO.
e) Traza una circunferencia C_2 con centro en A que pase por P y O
f) Llamemos T y T^1 a los puntos donde C2 corta a C1, traza la recta que pase por P y T.

A) Se construye una recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto localizado sobre la circunferencia.
B) Se construye una bisectriz de un ángulo inscrito a la circunferencia
C) Se construye una recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto exterior a la circunferencia.
D) Se localizan los puntos T y T^1 donde se intersectan dos circunferencias.

Estos son los fundamentos por las cuales mi propuesta pedagógica se basa en la geometría. Como se mencionó anteriormente, también pretendo vincularla con otras ramas del conocimiento y en especial con el arte y hacer un acercamiento distinto. Por lo que ahora corresponde a dar respuesta a la segunda pregunta ¿Por qué el arte y no otra rama de conocimiento?

Parto de la hipótesis de que si se tratara en las escuelas el tema de geometría por medio del arte se promovería un aprendizaje vital y creativo en los alumnos, porque la geometría desarrolla habilidades como el saber ver y el saber interpretar, lo cual permite que el alumno identifique y reconozca figuras, formas, relaciones y propiedades tanto de dos como de tres dimensiones[26] y estudiarla además por medio del arte se hará este conocimiento sensible y creativo.

Los contenidos artísticos que pretendo utilizar son los teselados y la sección áurea. Existen muchos trabajos de cómo realizar teselados, los alumnos pueden tener acceso a ellos desde internet hasta pisando un suelo adoquinado, además estos resultan muy llamativos y hasta complicados con contenido geométrico significativo en su elaboración.

[26] Manteca Aguirre, Esteban. Op. Cit., p.75

Pero los teselados no son sólo vistosos, sino que son figuras cotidianas en la vida de cualquier ser humano. Los podemos ver en obras como en la decoración de un baño, también están en los pisos de las grandes explanadas o plazas y en el tapizado de un cuarto o en una alfombra, los estudiantes tienen acceso a ellos sin necesidad de ir a un museo, una casa lujosa.

La sección áurea también es una experiencia cotidiana para las personas aunque no lo aprecien al instante. Los mismos alumnos están inmersos en este tema, por ejemplo al utilizar su credencial de la escuela; por lo regular, todas las credenciales de las escuelas, así como las tarjetas de crédito, de teléfono y hasta algunos celulares y calculadoras están en composición áurea.

Abordar los contenidos geométricos mediante el arte permitirá desarrollar algunas de las ventajas de estudiar geometría como *cultivar* la inteligencia, *descubrir* las propias posibilidades creativas, *fomentar* una sensibilidad hacia lo bello, *agudizar* la visión del mundo que nos rodea, *gozar* de sus aplicaciones prácticas y *desarrollar* su imaginación espacial[27]

¿Por qué el modelo Van Hiele y no otro modelo? Porque se trata de un modelo con la interpretación de los niveles de razonamiento de la didáctica actual. Plantea niveles y fases de aprendizaje para una enseñanza adecuada que facilita el paso de un nivel a otro. Es un modelo que acepta lo errores de los alumnos y los utiliza para plantear nuevas actividades que hagan ver a los estudiantes sus fallas.

Es un modelo constructivista y se diferencia al modelo de Piaget porque no sólo establece niveles de razonamiento sino que nos dice cómo hacer pasar a un alumno de un nivel a otro. También reconoce que un estudiante puede estar en varios niveles al mismo tiempo. Por ejemplo un estudiante en figuras geométricas puede estar en el nivel más alto mientras que en simetría en el más bajo.

En la actualidad el modelo de Van Hiele es uno de los marcos referenciales más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría. También es muy factible para evaluar el aprovechamiento de aprendizaje de los alumnos. No solo nos indica los pasos y las pautas para la enseñanza, sino que es flexible para acoplarse a enfoques, que en este caso es Resolución de Problemas.

[27] García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero. Op. Cit., pp. 30-68

Añadiré una pregunta más ¿qué hace aceptable mí propuesta? A mi parecer por tres razones, la primera porque trata de atender uno de los problemas en la enseñanza de las matemáticas mediante un nuevo acercamiento: por el arte.
En segundo término porque los temas artísticos escogidos aluden a la vida cotidiana de los alumnos. Es decir, los alumnos visitan lugares y se desplazan por espacios donde los pisos y algunas decoraciones son teselados o construcciones en composición áurea, aunque no se percaten de que en esos suelos y edificaciones hay obras de arte y matemáticas implícitas.
Y en tercer lugar, porque aplico el modelo Van Hiele. En los planes y programas de estudio se plantean actividades aisladas para cada bloque, pero no se plantea cómo y en qué orden enseñar. Por lo que propongo que el modelo Van Hiele esté presente en el currículum de la Educación Secundaria.

1.2. Objetivos de la propuesta

El objetivo general es:

Elaborar una propuesta pedagógica aplicando el modelo de Van Hiele para el estudio de construcciones con regla y compás, simetría y semejanza, vinculando estos contenidos geométricos con el Arte mediante teselado y la sección áurea
Mi objetivo general sugiere el cumplimiento de otros objetivos particulares como:

- Analizar los programas y planes de estudio oficiales para localizar y analizar la enseñanza de los contenidos de construcciones con regla y compás, simetría y semejanza.
- Analizar cómo se desarrolla la habilidad de Dibujo en Primaria y Secundaria.
- Aplicar del modelo Van Hiele a los contenidos geométricos antes mencionados.
- Estudiar los temas de Teselado y Sección Áurea

Estos objetivos contribuirán a estudiar contenidos geométricos como un conjunto de conocimientos vinculados no solo con otros temas de matemáticas, sino con otras ciencias como el Arte e Historia. Además se desarrollaran otras habilidades como la de visualización, de razonamiento, de comunicación y de aplicación. También se tratará de que los alumnos construyan sus propios modelos y no permanezcan en la reproducción.

CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL, MARCO TEÓRICO Y REVISIÓN DE LA LITERATURA

Capítulo 2. Marco referencial, Marco teórico y Revisión de la literatura

Para plantear una propuesta pedagógica no sólo se requiere conocer el problema educativo que se pretende atender, sino también indagar qué es lo que se propone sobre los temas y contenidos elegidos en los planes y programas de estudio, qué se ha hecho para mejorar la enseñanza y la teoría base que la sustenta . El siguiente capítulo está constituido por tres apartados: Marco referencial, Marco teórico y Revisión de la literatura

2.1. Marco referencial

En este apartado se estudian y se problematizan los planteamientos sobre la enseñanza de las Matemáticas, en especial los contenidos geométricos de construcciones con regla y compás, simetría y semejanza, así como los artísticos de acuerdo con los programas, planes, materiales de apoyo y libros de texto de Matemáticas vigentes; se tiene como propósito analizar:

– El enfoque, los propósitos y contenidos que conforman la enseñanza de matemáticas en secundaria.

– La forma en que se plantea la manera de estudiar los temas de construcción con regla y compás, simetría y semejanza en la educación secundaria actual.

– El enfoque, los propósitos y contenidos que conforman la enseñanza del arte en secundaria.

A continuación se desglosa cada uno de los objetivos de este apartado.

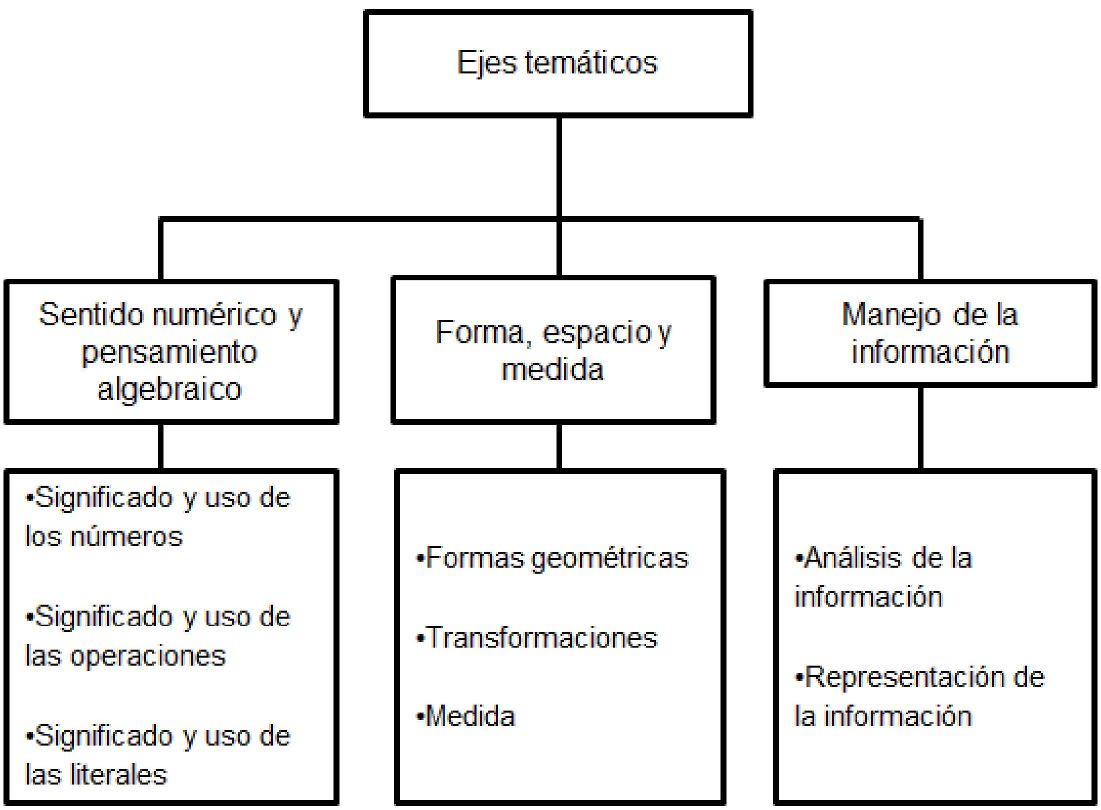
2.1.1. La Geometría en secundaria

Las Matemáticas es una asignatura que estudiamos desde preescolar hasta la universidad e incluso más allá de un posgrado. También las utilizamos durante toda la vida aun si no cursamos una carrera que implique su uso diario. Desde un ingeniero hasta las amas de casa las utilizan, de aquí la importancia de aprenderlas.

En la Educación Básica en México, la enseñanza de las Matemáticas se agrupa en ejes temáticos los cuales siguen una secuencia desde preescolar hasta secundaria. Esta organización obedece a las siguientes competencias matemáticas:

1) Resolver problemas de manera autónoma
2) Comunicar información matemática
3) Validar procedimientos y resultados
4) Mejorar técnicas eficientemente[28]

Se pretende desarrollar estas competencias matemáticas cuyo agrupamiento en ejes y contenidos en secundaria es el siguiente:



Como se dijo anteriormente, Geometría y Eje Forma, espacio y medida son lo mismo, sin embargo para esta propuesta utilizaremos el término Geometría, como la disciplina que tiene los siguientes objetivos en los planes de estudio:

[28] Secretaría de Educación Pública. Op. Cit., p. 75

- Exploración de características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.
- La generación de condiciones para que los alumnos ingresen a un trabajo con características deductivas.
- La justificación de las fórmulas que se utilizan para el cálculo geométrico.[29]

Estos objetivos ayudan al alumno a cumplir con los siguientes estándares:

- Resolver problemas que implican construir círculos y polígonos regulares con base en información diversa y usar las relaciones entre sus puntos y rectas notables.
- Utilizar regla y compás para realizar diversos trazos como alturas de triángulos, mediatrices, rotaciones, simetrías, etc.
- Resolver problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia y la semejanza de diversos polígonos.
- Calcular cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas de perímetros, área y volumen.
- Determinar la medida de diversos elementos del círculo.
- Aplicar el Teorema de Tales y las razones trigonométricas.[30]

El enfoque que se propone en los programas oficiales para la enseñanza de las Matemáticas es la de Resolución de Problemas. El planteamiento central consiste en "llevar a las aulas actividades que […] inviten a reflexionar y encontrar diferentes formas de resolución a problemas y formulaciones de argumentos para la justificación de sus resultados."[31]

Los problemas pueden aplicarse desde tres perspectivas: juego, acertijos y aplicaciones. El primero utiliza el elemento lúdico para la enseñanza. El segundo tiene que ver con encontrar una solución dada de antemano o desconocida. Finalmente el tercero implica el uso de contenidos matemáticos para resolver o comprender dentro y fuera de las matemáticas.[32]

La propuesta que se pretende elaborar sigue los lineamientos del enfoque antes mencionado, en especial en la perspectiva de aplicaciones, pues se trata de

[29] Secretaría de Educación Pública. Op. Cit., p. 10
[30] Ibídem, p. 13
[31] Ibídem, p. 75
[32] Mancera Eduardo. *Saber matemáticas es saber resolver problemas*. México: Iberoamérica, 2000, p. xvii

aprovechar el conocimiento geométrico para realizar un dibujo pero, a su vez, se requiere que el estudiante conozca obras de arte para el estudio de algunos temas de geometría. A continuación se analiza cómo se enseñan los contenidos de construcciones con regla y compás, simetría y semejanza.

2.1.1.1. Las construcciones con Regla y Compás en Secundaria

Las construcciones con regla y compás se estudian sólo en el primer grado de secundaria. Son un contenido independiente de la medida y sólo se utiliza una regla sin graduación y el compás. Los objetivos y conceptos que se estudian con este contenido son los que se muestran a continuación:

Construcciones Con Regla y Compás

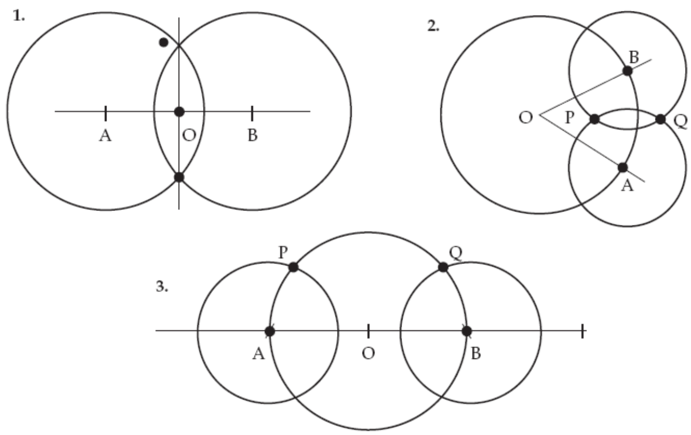
- Construcciones de triángulos y cuadriláteros
- Construcciones de alturas, medianas, mediatrices y bisectrices

Los problemas geométricos de construcción forman parte esencial de la geometría en los programas y planes de estudio, debido al potencial para desarrollar formas de hacer Matemáticas. Se utiliza la regla y el compás para trazar rectas, circunferencias y semicircunferencias y por medio de ellas construir figuras, bisectar ángulos, etc.

Las construcciones con regla y compás es el contenido que más visiblemente se relaciona con la habilidad de dibujo. Sin embargo, en muchas ocasiones el trabajo en el aula solo se limita a trazar sin analizar las construcciones, ejemplo de ello lo tenemos en el siguiente ejercicio:[33]

[33] Secretaria de Educación Pública. *Libro para el Maestro de Matemáticas en Secundaria 1 a 3*. México: SEP, 2006, p. 65

> Puede comenzarse con problemas sencillos, donde se exploten las propiedades de simetría de algunas figuras para que los alumnos se acostumbren y practiquen las construcciones básicas. Así, las siguientes figuras podrán servir como punto de partida para el trazo de mediatrices, perpendiculares, bisectrices y paralelas.



Se comienza con trazos sencillos, aunque el ejercicio anterior pertenece al *Libro para el Maestro de Matemáticas en Secundaria* 2006 y no a los programas vigentes. En el actual no se dan recomendaciones sobre cómo abordar el contenido de construcciones con regla y compás a pesar de ser uno de los objetivos generales de la enseñanza de la geometría.

2.1.1.2. La Simetría en secundaria

La simetría se estudia en segundo y tercer año de secundaria. Los objetivos y conceptos sobre este contenido son los que se muestran en el siguiente diagrama:

- Simetría
  - Segundo Año
    - Concepto y propiedades de la simetría axial
    - Clasificación de figuras utilizando la simetría axial
  - Tercer Año
    - Traslación y rotación de figuras: propiedades
    - Diseños que combinan la simetría axial y central, la traslación y rotación de figuras.

Para el estudio de la simetría se requiere que los alumnos dominen el uso de regla y compás, así como los conceptos básicos de cantidad, magnitud, medida de magnitud. Polya menciona que en ocasiones no podemos resolver un problema porque posiblemente hay conceptos más sencillos que aún no comprendemos y que es necesario regresar a estos. [34] En efecto para estudiar simetría se requiere aprender otros conocimientos matemáticos menos complejos.

Sin embargo, en el programa oficial, primero se estudian los números naturales, decimales y fraccionarios, después álgebra y tablas de estadísticas, y sólo al final de un bloque el tema de simetría. El uso de regla y compás, segmentos o figuras geométricas no están presentes. Posiblemente se da por hecho que en primaria se abordan estos temas o se estudian a la par con simetría.

La SEP proporciona además del *Programa de Estudios 2011 de Educación básica Secundaria. Matemáticas* otros dos documentos, la *Fundamentación del Programa de Matemáticas* y el *Libro para el Maestro de Matemáticas en Secundaria*. Estas obras parecen seguir la secuencia que Polya plantea, empezar con conceptos simples hasta llegar a conceptos más complejos

En el Libro para el Maestro… se plantea la construcción de polígonos, mediatrices y bisectrices que suponen el uso de la regla y el compás, aunque no se especifique. Algunos libros de texto de primero de secundaria también siguen esta secuencia, se estudia uno o dos conceptos sobre construcciones con regla y compás antes de simetría axial.

Es importante destacar que en los libros que se utilizaban antes de la reforma educativa actual es que en estos no sólo se estudiaba primero el uso de regla y compás, sino que se iniciaba desde la descripción de cada elemento del juego de geometría con gráficos muy descriptivos, incluso se utilizaban antes los instrumentos graduados y después sin graduación.

De acuerdo con el enfoque de resolución de problemas, para el contenido de simetría axial se pide a los alumnos que realicen trazos con ciertas características y después el docente debe plantear una serie de preguntas como por ejemplo si es simétrico un punto *x* respecto de una recta trazada *y*.

---

[34] G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas: 1965, p. 19

En algunos casos existe un intento por considerar el dibujo como una herramienta pero no se concreta, sólo sirve para ilustrar; por ejemplo, se coloca una imagen de un pato en el agua y el reflejo se toma como la otra figura simétrica, se pide al alumno dibujar el reflejo, sin embargo sólo realiza la copia del dibujo, después se dicta el concepto de simetría axial y se concluye el tema con ejercicios similares.

2.1.1.3. Semejanza en secundaria

La semejanza se estudia en tercero de secundaria, los objetivos y conceptos que se pretenden para este contenido son los siguientes:

Semejanza

- •Semejanza de figuras.
- •Criterios de semejanza de triángulos y su aplicación para resolver problemas.
- •Estudio del Teorema de Tales.
- •Concepto y propiedades de la homotecia

Para estudiar la semejanza se requiere tener conocimientos de proporcionalidad. Es necesario para el aprendizaje de esta última conocer conceptos básicos de medida, longitud y otros.

También se trabaja con el enfoque de resolución de problemas, además se trata de vincular el tema con los otros ejes. Para lograr esta vinculación, la mayoría de los ejercicios propuestos en los materiales de apoyo citados se encuentra de la siguiente manera:

- Si una vela de 25 cm. de altura dura encendida 50 horas ¿Cuánto tiempo duraría encendida otra vela del mismo grosor de 12 cm. de altura?
- Tres amigos obtienen un premio de $ 1000.00 en la lotería ¿Cómo deben repartírselos según lo que gastó cada uno si uno de ellos puso $12.00, el otro $ 8.00 y el tercero $15.00?
- Una fotografía se reduce con una escala de ½ y en seguida se reduce nuevamente con una escala de ¼ ¿Cuál es la reducción total que sufre la fotografía original?

Se busca que el alumno adquiera y favorezca la habilidad de comprensión del factor constante de proporcionalidad en situaciones específicas[35], pero no va más allá de multiplicar y dividir números enteros, fraccionarios o decimales. En los materiales se concluye el tema con una serie de ejercicios semejantes a los anteriores y se plantea la regla de tres, la cual funciona como el puente para el contenido de porcentajes.

En la resolución de los problemas se toman en cuenta valores como amistad y equidad,[36] pero siguen siendo problemas de mecanización que implica sólo resolver paso a paso, no hay un análisis como tal y, desde mi punto de vista, no existe estimulación por ser un reto diferente. Carecen del uso del Arte para motivar y dar la lección, el cual se enseña por separado a manera de una asignatura diferente como se expone a continuación.

2.1.2. El Arte en Educación Secundaria

La asignatura de Expresión y Apreciación Artísticas pertenece al campo formativo Desarrollo personal y para la Convivencia. Su objetivo es:

> […] potenciar en los niños la sensibilidad, la iniciativa, la curiosidad, la espontaneidad, la imaginación, el gusto estético y la creatividad, para que expresen sus sentimientos mediante el arte y experimenten sensaciones de logro; progresen en sus habilidades motoras y las fortalezcan al utilizar materiales, herramientas y recursos diversos; desarrollen las habilidades perceptivas como resultado de lo que observan, escuchan, palpan, bailan y expresan a partir del arte; reconozcan que otros tienen diferentes puntos de vista y formas de expresarse, aprendiendo a valorar la diversidad.[37]

Como se observa, el Arte queda reducido sólo a una forma de expresarse, no es considerado como una herramienta o medio para la enseñanza de una asignatura y mucho menos como un campo de conocimiento, aunque se sugiere una vinculación con diferentes áreas del saber pero no con Matemáticas, a pesar de que esta ha sido base para muchas obras de arte, sobre todo la Geometría, como se menciona en lo siguiente:

[35] Secretaría de Educación Pública. Op. Cit., p. 30
[36] Ídem
[37] Secretaría de Educación Pública. *Plan de estudios 2011. Educación Básica.* México:SEP, 2011, pp. 26-37

> Los campos formativos de educación prescolar “Desarrollo personal y social” y “Expresión y apreciación artística” tienen vínculos formativos con las asignaturas Ciencias Naturales, Historia y Geografía, aunque por criterios de esquematización se encuentran ubicadas como antecedentes de las asignaturas Formación Cívica y Ética, Educación Física y Educación Artística, con las cuales también mantienen estrecha vinculación.[38]

En secundaria, los objetivos de la asignatura *Expresión y Apreciación Artística* son muy semejantes de los de primaria, la única diferencia es que en secundaria se “busca que los alumnos amplíen sus conocimientos en una disciplina artística y la practiquen habitualmente mediante la apropiación de técnicas y procesos que les permitan expresarse artísticamente”[39].

Las disciplinas artísticas que se enseñan son: en primaria, música, expresión corporal y danza; en secundaria, danza, artes visuales y teatro, las cuales siguen viéndose de forma separada de otras materias, se sugiere la vinculación, faltaría ver si en la práctica se lleva a cabo.

Se ha intentado introducir el dibujo en otras áreas de conocimiento, pero carecen de finalidad artística, es decir, son trazos que generalmente se utilizan para resolver un problema matemático o ejemplificar un proceso biológico. Los intentos se inclinan en lados diferentes, por una parte se pretende introducir el dibujo pero desligado de las matemáticas, por la otra, se realizan trazos que se utilizan por ende en matemáticas y sin finalidad artística. Sin embargo hay que destacar que existe una tentativa por vincularlos.

2.2. Marco teórico

Este apartado presenta la teoría que respalda esta propuesta pedagógica, los temas artísticos que se utilizarán para el estudio de algunos contenidos geométricos y la habilidad de dibujo que se desarrolla mediante el estudio de la geometría. El propósito de este apartado es exponer: El modelo Van Hiele, Los teselados, La sección dorada y La geometría y la Habilidad de Dibujo

[38]Secretaría de Educación Pública. Op. Cit., pp. 26-37
[39] Ídem

2.2.1. El modelo Van hiele

En los años cincuenta, los esposos holandeses Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele, ambos profesores de geometría, trabajaron y diseñaron un modelo para explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico y cómo se puede inducir al alumno a mejorar este razonamiento.

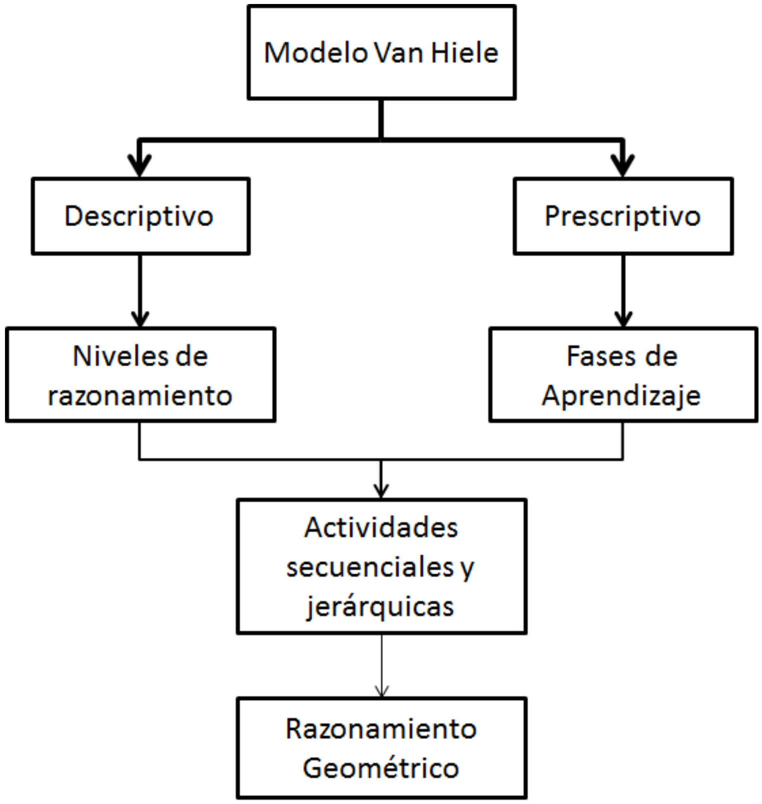
El modelo Van Hiele se basa en los estudios de Piaget, la diferencia radica que en el Modelo Van Hiele se orienta sólo a geometría y propone cómo pasar de un nivel de razonamiento a otro. Se establecen niveles graduados y se admite que algunos niños pueden desarrollar niveles mucho antes que otros, o que el nivel de razonamiento de un niño no es igual en todos los conceptos, en uno puede estar muy avanzado pero en otros puede estar en el primer nivel.

El modelo Van Hiele toma en cuenta la actuación del profesor, argumentando que, en lugar de tachar el procedimiento y respuestas de los alumnos, se debería considerar que el error forma parte del aprendizaje y que además puede deberse a dos posibles causas: una, no se tiene el concepto bien definido; y otra, los alumnos se dejen guiar por las imágenes.[40]

Parte fundamental del modelo son sus componentes importantes, el descriptivo y el instructivo. La idea principal del descriptivo es que durante el proceso del aprendizaje geométrico se pasa por ciertos niveles de razonamiento secuenciales y ordenados los cuales no se pueden excluir uno del otro.

El componente instructivo se refiere a fases de aprendizaje para fomentar el desarrollo del razonamiento geométrico y que a su vez dan paso a otro nivel. El modelo Van Hiele se puede resumir en el siguiente esquema:

[40] Jaime, Adela y Ángel Gutiérrez. "Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria" en Tecné, Episteme y Didaxis, núm. 32, segundo semestre 2012, pp. 55-70



El modelo consiste en cinco niveles de razonamiento con cinco fases cada nivel. Los niveles hacen referencia a la forma de razonar de los estudiantes al intentar explicar (descriptivo), y las fases a las pautas y organización de la enseñanza para lograr dichos niveles de razonamiento (prescriptivo). En algunos casos el modelo se inicia en un nivel 1, otros desde el nivel 0, en esta propuesta se considerará la segunda opción.

2.2.1.1. Propiedades del modelo

Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de niveles de razonamiento, pero como se mencionó anteriormente, hay alumnos que en algunos conceptos están en el nivel más alto mientras que en otros están en el nivel más bajo.

Especifidad de lenguaje: Cada nivel tiene un lenguaje propio, por ejemplo, demostración no significa lo mismo en un nivel que en otro. Es importante aclarar esto, porque el alumno puede llegar a confundirse por el uso avanzado del lenguaje matemático en el nivel 0.

Jerarquía: El paso es gradual, sin embargo, es diferente del modelo de Piaget ya que a veces se desarrollan simultáneamente.

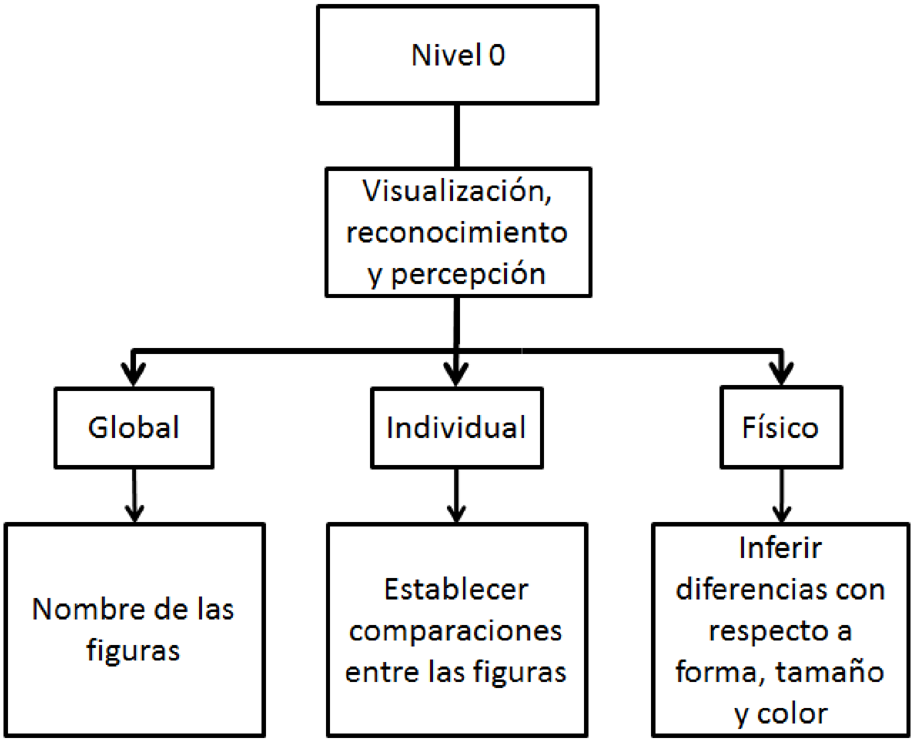
Globalidad o localidad: El nivel de razonamiento puede variar dependiendo del concepto.

Instrucción: La adquisición del razonamiento no es biológica, depende del contexto y experiencia en el que se desarrolle al alumno.

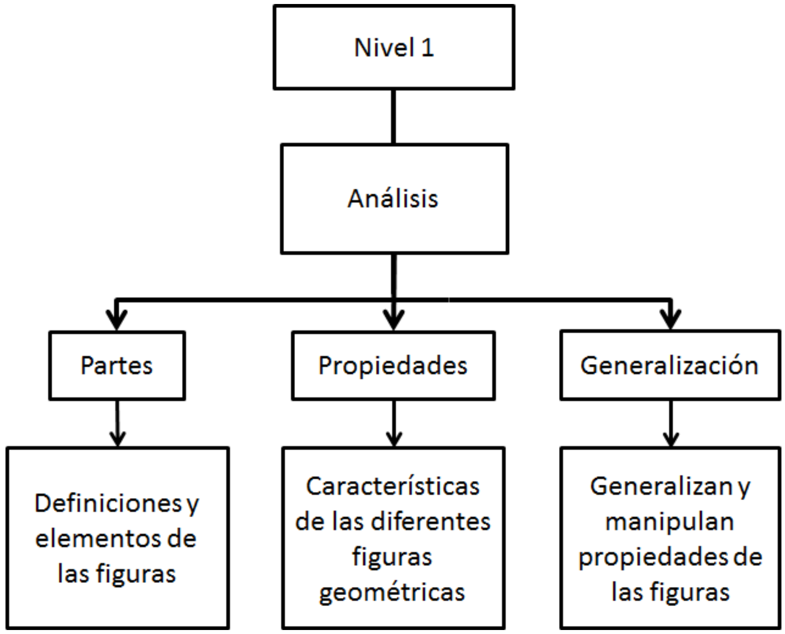
2.2.1.2. *Niveles de razonamiento*

Nivel 0: Visualización, reconocimiento y percepción. La consideración de los conceptos es global, no se tienen en cuenta los elementos ni las propiedades, la primera apreciación que se lleva cabo para su identificación tiene lugar mediante una visión de conjunto.[41] Es la forma usual del razonamiento de los niños. Algunas de las consecuencias es que pueden asignar atributos que no son característicos del concepto que se está tomando en cuenta, hay una apreciación individualizada de las figuras y no hay justificaciones que incluyan propiedades fundamentales puesto que se basan en la percepción visual, objetos reales o solo se menciona el concepto.

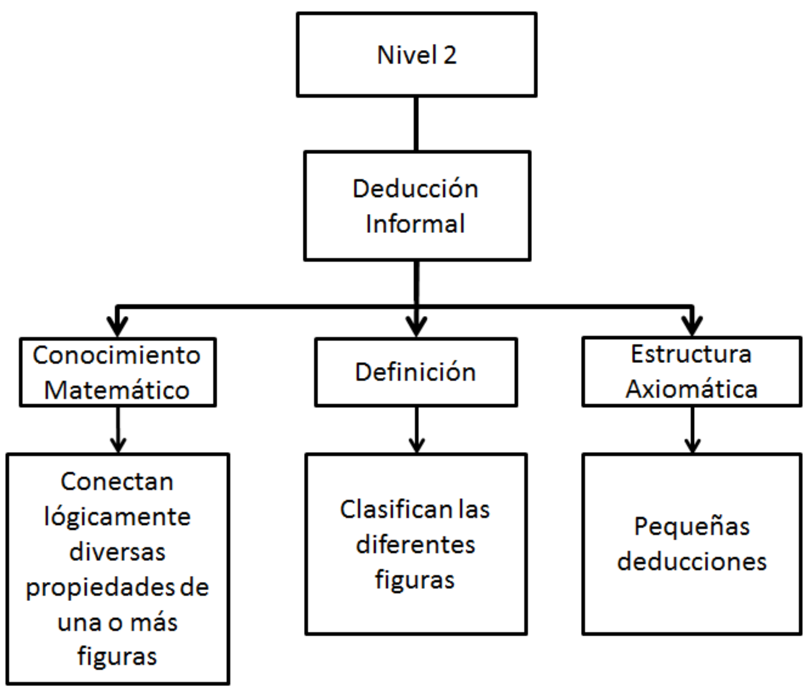
[41] Jaime Pastor, Adela. *Aportaciones a la interpretación y aplicación al Modelo Van Hiele. Enseñanza de las isometrías. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis para obtener el grado de doctor, Valencia, 1993, p. 1-14



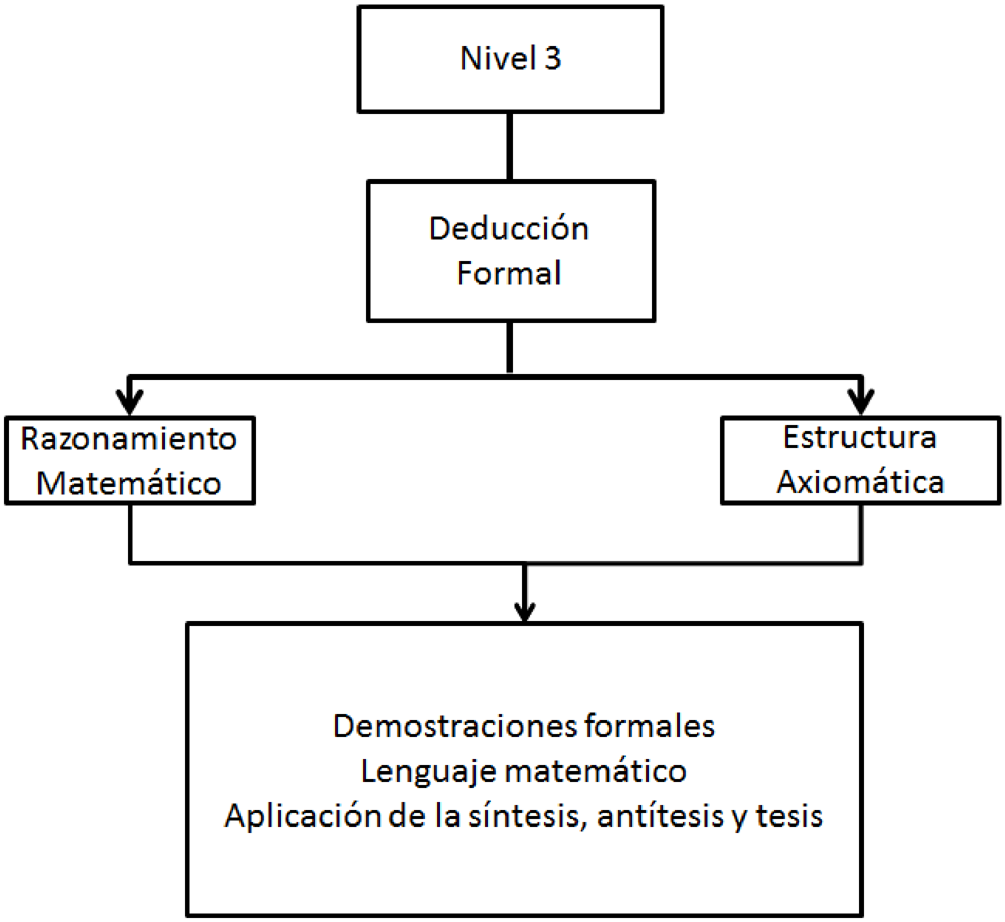
Nivel 1: Análisis. Los alumnos entienden y manejan los conceptos a través de los elementos. Identifican y generalizan las propiedades y características del concepto aunque aún no establecen las relaciones entre ellos. Se incluye el descubrimiento y generalización a partir de la observación de casos particulares. Al tratar de definir incluyen y/o se omiten propiedades pero no se dan cuenta de lo imprescindible.



Nivel 2: Deducción informal. Los alumnos establecen relaciones entre propiedades. Hacen demostraciones a partir de la experimentación. Son capaces de reproducir una demostración formal no compleja entendiendo la conexión entre una situación y la que sigue. Comprenden y utilizan las definiciones necesarias y suficientes para entender un concepto. Aceptan definiciones nuevas de conceptos ya conocidos y los comprenden pero aun no utilizan clasificaciones exclusivas.

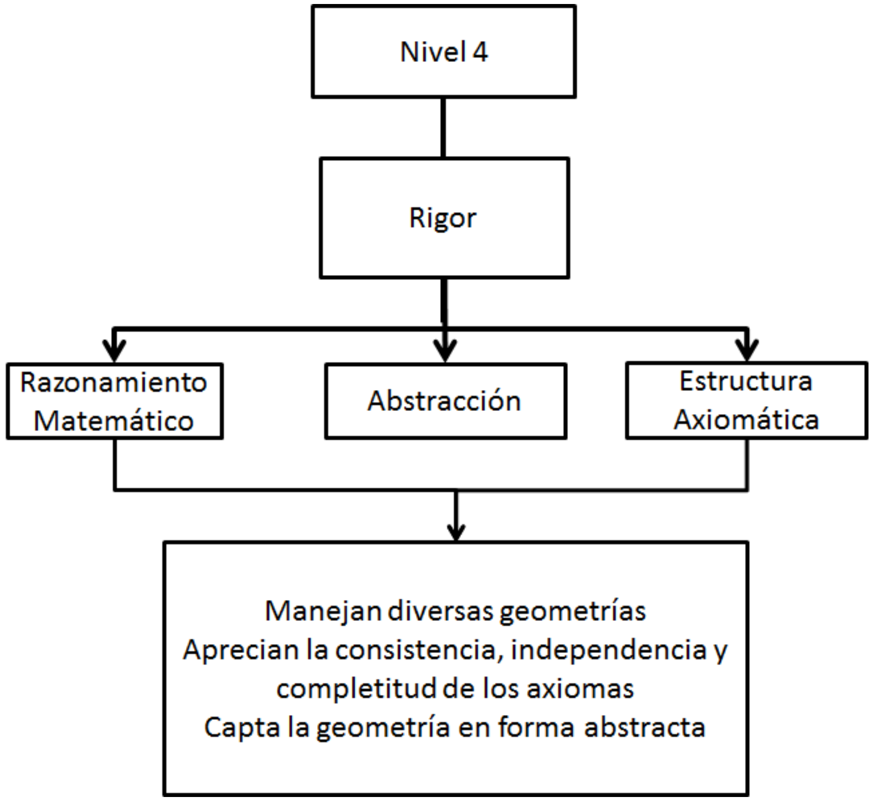


Nivel 3: Deducción formal. Los alumnos entienden y utilizan el engranaje existente con el mundo matemático y conocen algunas primeras propiedades. Manejan la aplicación estricta y correcta de las propiedades. Efectúan demostraciones encadenando diversas implicaciones que van desde la hipótesis hasta la tesis. Hacen equivalencias y pueden admitir y demostrar si dos o más conjuntos de características y/ propiedades corresponden al mismo concepto.



Nivel 4: Rigor. Los alumnos tienen la posibilidad de estudiar diversas geometrías procedentes de diferentes sistemas axiomáticos. Se puede decir que solo se desarrolla en estudiantes de universidad con capacidad y preparación en geometría. Se dice que este último nivel, por su grado de abstracción, deber ser considerado en una categoría aparte.[42]

[42] Jaime Pastor, Adela. Op. Cit., pp. 1-14



Cada nivel de razonamiento está estrictamente vinculado y se apoya en el anterior. Las actividades de cada nivel deben estar orientadas a hacer consciente al alumno de la habilidad implícita que se requiere, la relación entre cada etapa desarrolla las siguientes competencias[43]:

a) Incompetencia inconsciente: el estudiante se siente excitado por resolver el problema, pero como no lo ha hecho antes, no sabe qué es lo que necesita aprender.

b) Incompetencia consciente: al ver el fracaso en la resolución del problema, se da cuenta de que hay cosas que no sabe.

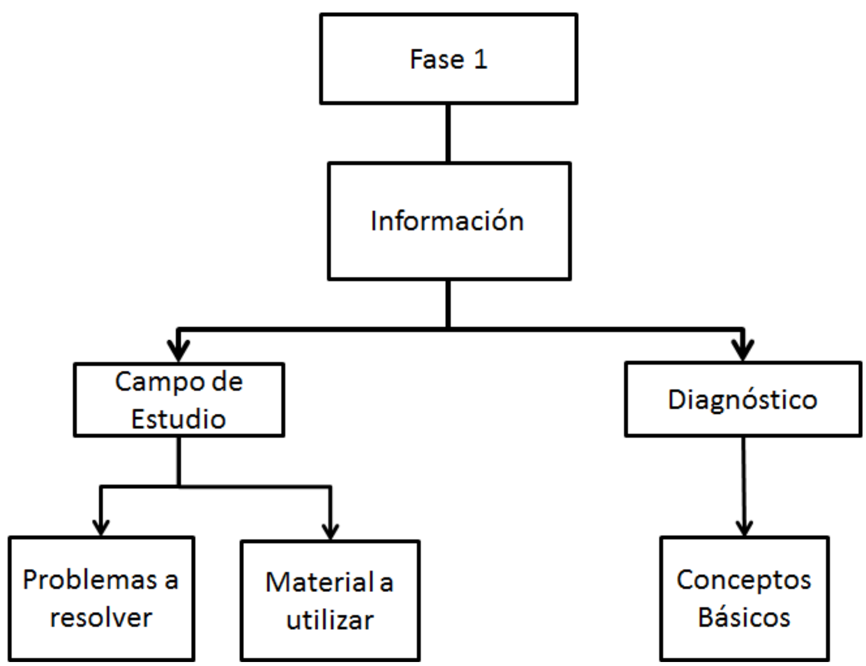
c) Competencia consciente: por medio del ensayo y error se corrigen los errores, observa qué es lo que hizo que causó el error:

d) Competencia inconsciente: ya no piensa en lo que hace, tiene el conocimiento necesario y automáticamente lo utiliza para resolver el problema.

[43] Pérez O. Claudia J. y María Eugenia Ruiz. "Estrategia lúdicas aplicando el modelo Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría". Tesis de Licenciatura en Humanidades y Educación, Mérida, Universidad de los Andes: 2010

2.2.1.3. *Fases del modelo*

Fase 1: Información. En esta fase se obtiene información recíproca alumno-profesor, el profesor averigua qué saben los estudiantes del tema y su forma de razonar. El escolar por su parte asimila el concepto que va a aprender.
Se trata de una fase de contacto, el profesor debe informar a los alumnos de qué se trata el tema, presentar el material, el tipo de problemas que se plantearán. Los alumnos por su parte aprenderán a utilizar el material y los conocimientos básicos que deben empezar a trabajar.
Las experiencias extraescolares de los alumnos no deben despreciarse, al contrario, pueden servir como motivación. Esta fase permite dirigir la atención de los alumnos y conocer el tipo de trabajo que realizarán. A su vez el profesor descubre en qué nivel de razonamiento se encuentran así como qué saben sobre el tema.

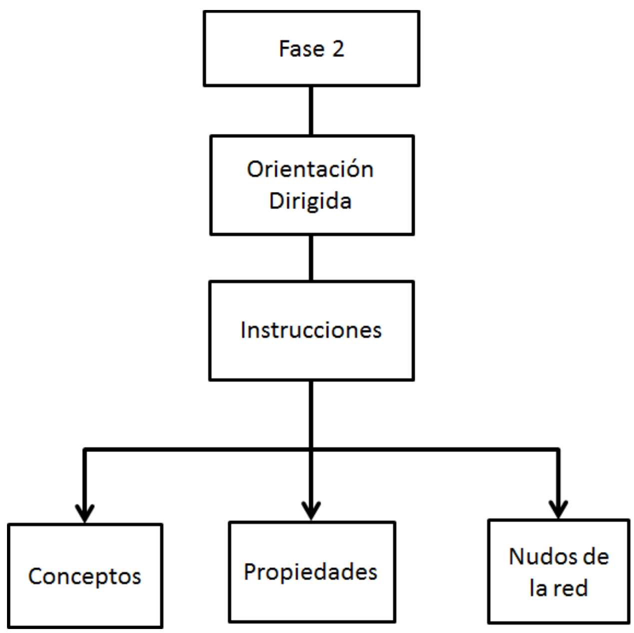


Fase 2: Orientación dirigida. El profesor dirige a los alumnos hacia el descubrimiento. Es una de las fases más potentes para la adquisición de los niveles de razonamiento. Esta dirección consiste en planificar las actividades de acuerdo con el nivel que se pretende que los alumnos requieran.

Los alumnos exploran el campo de estudio por medio del material proporcionado y descubren, comprenden y aprenden conceptos, propiedades, figuras, etc., en esta fase se construyen los elementos básicos para el siguiente nivel.

Los estudiantes tienen conocimientos previos, pero por sí solos no pueden lograr un aprendizaje eficaz. Por ello es importante que durante una etapa sean dirigidos por el docente para un mejor resultado en el tiempo previsto. El trabajo que vayan a realizar debe estar organizado en actividades seleccionadas, adecuadas y progresivas.

En esta fase los alumnos descubren los nudos de red, es decir las relaciones entre las propiedades de un mismo concepto. Por ejemplo, triángulo equilátero, cuadrado y pentágono regular son polígonos regulares porque todos tienen una misma característica: lados iguales.

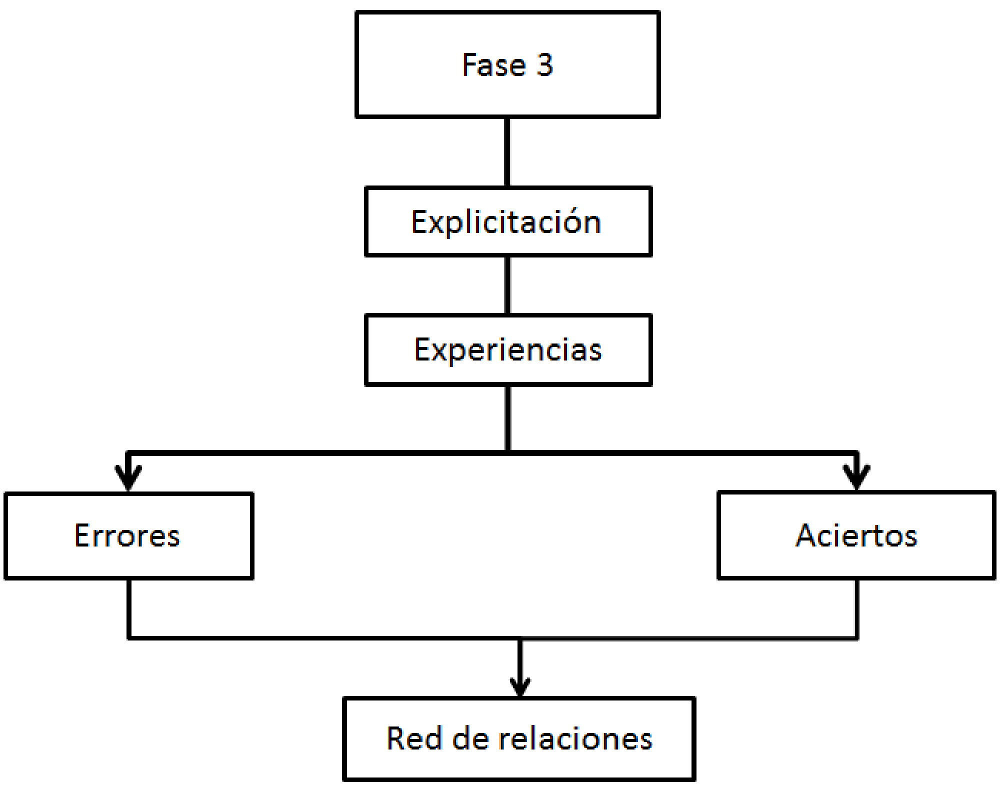


Fase 3: Explicitación. En esta fase se trata que los alumnos tomen conciencia de las características y propiedades aprendidas. También se trata de que ellos adquieran un vocabulario de acuerdo con el nivel de razonamiento. Los estudiantes pueden expresarse de forma oral y textual, intercambiar sus experiencias, las irregularidades que observaron, cómo resolvieron las actividades, etc. Es importante la diversidad de ideas pues permite un diálogo y análisis más detallado y una nueva red de relaciones.

No es recomendable exigir a los alumnos la manipulación del vocabulario correcto pero sí se siguiere que comiencen a utilizarlo y conocerlo. Pueden manejar ambos, el usual para ellos y el matemático, siempre y cuando sepan que significan lo mismo y que el matemático es la forma adecuada de mencionar las propiedades, conceptos o características. No se trata de adquirir conocimientos nuevos sino de repasar y analizar lo que se hizo en la fase anterior.

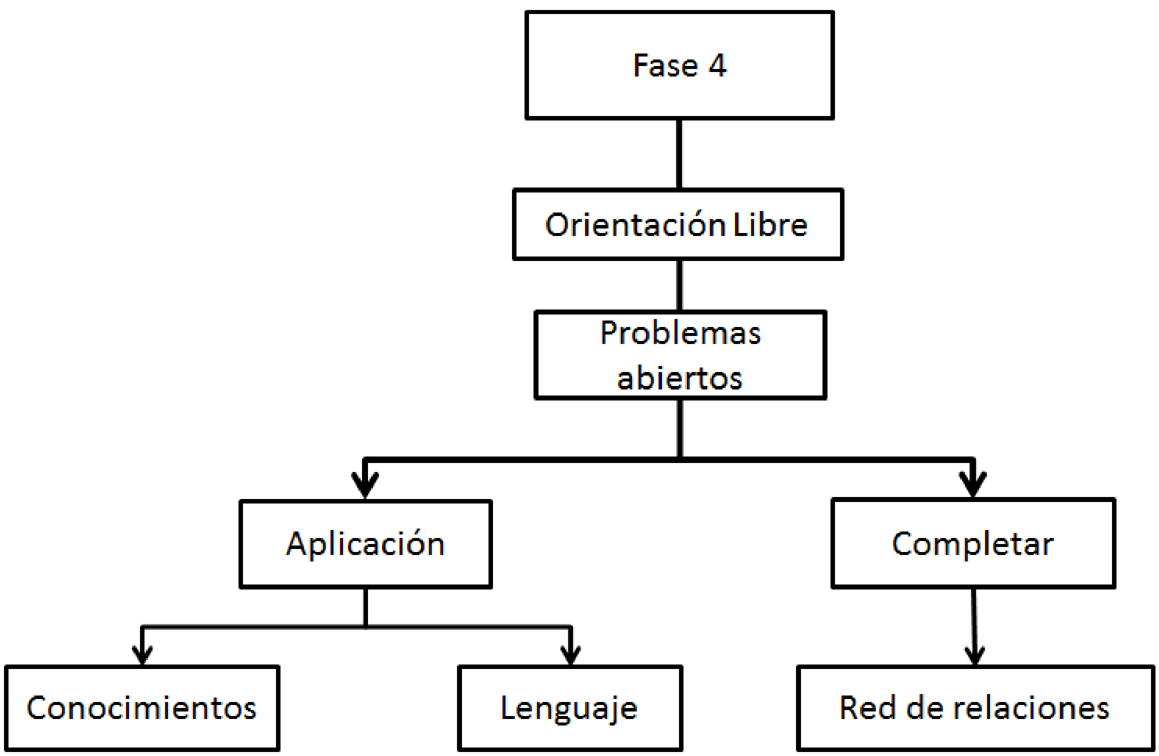
En esta fase no sólo se hacen nodos de red sino red de relaciones, se guía al alumno para que su conocimiento sea más amplio y profundo. Por ejemplo siguiendo con las figuras, ahora se da cuenta de la existencia de otras con el número de lados iguales pero distintas dimensiones como el triángulo isósceles y triángulo recto, así como otra forma de clasificarlos por medio de los ángulos.

La red de relaciones no se refiere a un mismo concepto, pues también se trata de relacionarlo con otros, por ejemplo con el área y volumen. Se busca que los alumnos descubran la relación entre un triángulo y un cuadrilátero, que pasa con las áreas de estas figuras, y si las volvemos en cuerpos, que pasa con sus volúmenes.



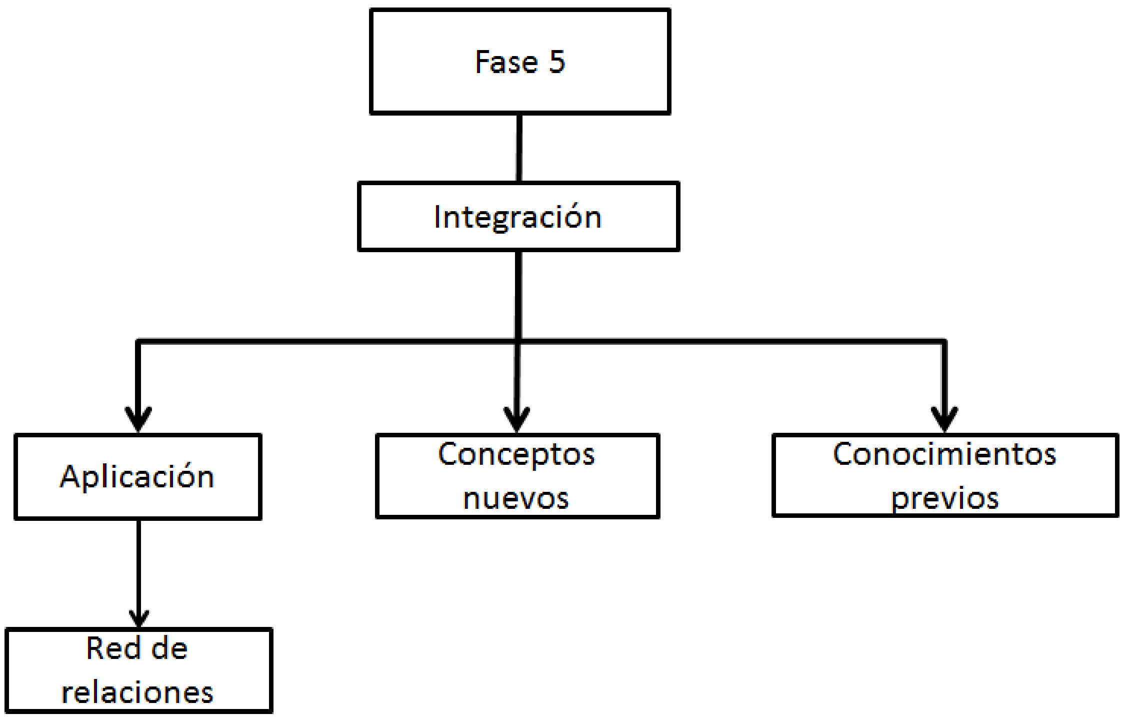
Fase 4: Orientación libre. Los alumnos llegan a una consolidación de los conceptos. Se trata de que el alumno realice actividades nuevas con los conocimientos que se adquieren previamente.

Los alumnos aplican lo aprendido en situaciones diferentes, tanto de conocimientos como de lenguaje, tienen conocimientos del campo de estudio pero aún deben perfeccionarlo. El docente debe plantear nuevos ejercicios con diferentes tipos de solución, en algunos casos con algún indicio de cómo proceder. Las actividades deben ser novedosas, no de aplicación, es decir, donde el alumno solo tenga que aplicar un procedimiento antes visto. Esta fase permite completar las relaciones de red del nivel anterior así como establecer relaciones más complejas e importantes.



Fase 5: Integración. Es la última fase en la cual se busca establecer y completar la red de relaciones de un concepto con el objetivo de este nivel. Se recomiendan resúmenes y memorización de los resultados fundamentales.

A lo largo de las demás fases, los alumnos han adquirido conocimientos que ignoraban o de los cuales no tenían conciencia, pero deben adquirir una visión general de estos mismos así como de los métodos que tienen a su disposición. El docente debe cuidar de no introducir violentamente conocimientos nuevos, sino acumular, comparar y combinar cosas que ya conocen y si es posible con otros campos de conocimiento.



Como se dijo anteriormente, el modelo Van Hiele ha influido y se ha aplicado en la elaboración de muchos trabajos, sin embargo, en esta propuesta no solo se aplica a contenidos geométricos, sino que también se estudian a partir del Arte como herramienta. En algunas propuestas se utiliza el mosaico como ejemplos de isometrías, pero no hay un análisis matemático profundo. En seguida se expone parte del mundo del teselado que se utilizará como herramienta para estudiar simetría e isometrías.

2.2.2. Teselados

El arte de recubrir un espacio mediante figuras es tan antiguo como la civilización. En la actualidad, muros y ventanas de grandes construcciones están decorados con diversos recubrimientos. Por ejemplo alguno de estas son la Pirámide de Louvre en Francia y la Alhambra de Granada en España.

En Matemáticas, la actividad de recubrir un espacio se llama teselar. Un teselado es la pavimentación de una superficie mediante un patrón de figuras denominadas teselas[44] que cumple con dos requisitos: 1) No existen huecos entre las teselas, y 2) Las teselas no se sobreponen

Los teselados también se han empleado en obras de arte. El autor más conocido que ha realizado recubrimientos de espacios es el holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Este artista realizó varios teselados con las formas de lagartos, ángeles y demonios, las palomas, entre muchos otros. A continuación se describen tres tipos de teselados, dos de figuras geométricas y una de formas diversas.

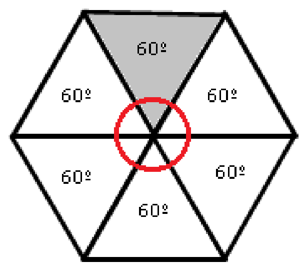
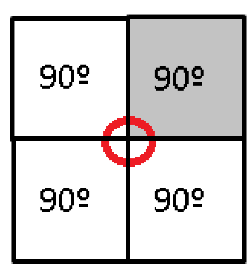
2.2.2.1. Teselados de polígonos regulares

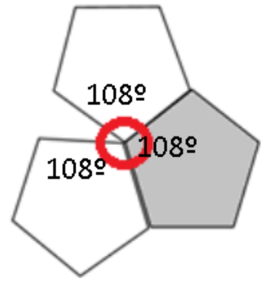
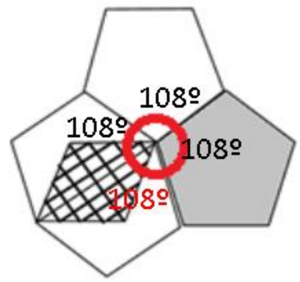
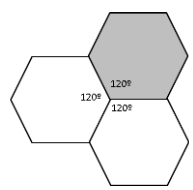
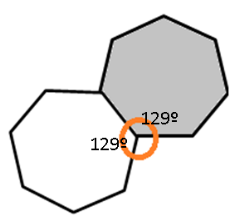
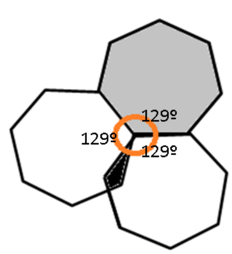
Un polígono regular es una figura cerrada de líneas rectas, estas líneas que conforman los lados del polígono y los ángulos formados por estos son todos iguales. El triángulo equilátero es el primer polígono regular y la Pirámide de Louvre es un ejemplo claro en donde se utiliza un teselado de este polígono regular.

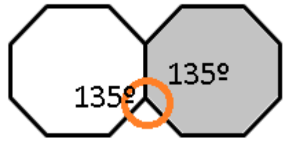
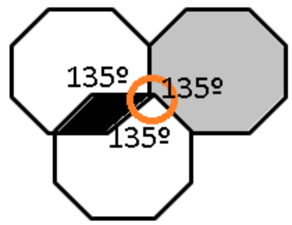
Para elaborar un teselado con polígonos regulares se requiere que todos los ángulos interiores que concurran en un vértice en común, sean múltiplo 360º, es decir, un ángulo perigonal o ángulo de vuelta completa. Los únicos polígonos regulares que cumplen con este requisito son: triángulo equilátero, cuadrado y hexágono.

[44] Tesela es cada una de las pieza que conforman un teselado

La medida de los ángulos de estos tres polígonos son divisores de 360, por ello se puede teselar. Con los otros polígonos regulares no ocurre lo mismo, en algunos casos hace falta o sobra abertura de grados que impida la formación de huecos entre polígono y polígono, o bien provoca la sobreposisión. A continuación se muestra gráfica y algebraicamente cada caso.

Figura	Presentación Gráfica
Triángulo 60º ángulo interior	60º x 6 = 360º 
Cuadrado 90º ángulo interior	90º x 4 = 360º 

Pentágono Regular 108º ángulo interior	108º x 3 = 324º  108º x 4 = 432º 
Hexágono Regular 120º ángulo interior	120º x 3 = 360º 
Heptágono Regular 129º ángulo interior	129º x 2 = 250º  129º x 3 = 387º 

Octágono Regular 135º ángulo interior	135º x 2 = 270º  135º x 3 = 405º 

En este cuadro se confirma matemáticamente que sólo el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono son los únicos polígonos que recubren un espacio por sí mismo. Una forma de generalizar este procedimiento es de la siguiente manera.

$\beta * \Omega = 360^{o}$ o bien $360 / \beta = \Omega$

Donde

360º es la constante que se busca obtener para poder teselar

β es el ángulo interior del polígono

Ω es el número de vértices que se unen en un mismo punto del teselado

2.2.2.2. Teselados de polígonos irregulares.

En el apartado anterior se mostró cómo se puede teselar sólo con tres tipos de polígono regular. Sin embargo ¿qué pasaría si alguien quiere teselar con otro tipo de polígonos, por ejemplo, un pentágono? Este tipo de teselado también se puede hacer, siempre y cuando estos polígonos sean irregulares. A continuación se muestran algunos ejemplos.

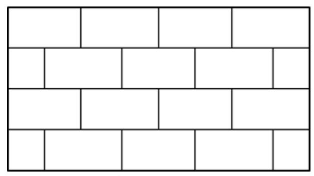


Figura 1

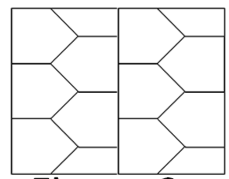


Figura 2

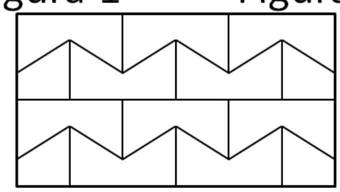
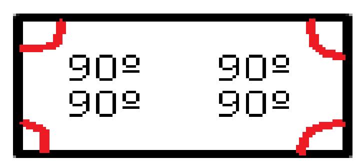


Figura 3

Estos teselados se pueden realizar porque la tesela cumple con el requisito de que alguno o algunos de sus ángulos internos son divisores de 360º. En seguida se analizan las teselas de los teselados anteriores.

Figura 1. Este teselado está compuesto por rectángulos, polígonos conformados por dos pares de lados paralelos, dos largos y dos cortos. Otra característica es que sus ángulos internos miden 90º y noventa es divisor de 360º, por eso con el rectángulo también se puede teselar.



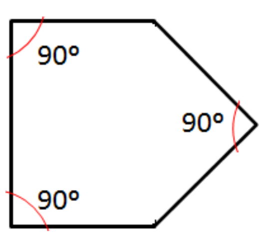
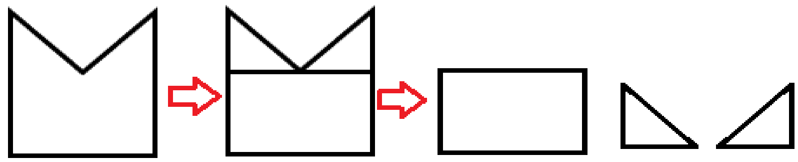


Figura 2. Se trata de un teselado de pentágonos, pero tiene características especiales: tres de sus ángulos son de 90º (noventa es divisor de 360º)

Figura 3. Es otro pentágono, pero éste puede descomponerse en las siguientes figuras.



En el pentágono se pueden observar tres figuras, un rectángulo y dos triángulos. Ambas figuras pueden teselar un espacio por sí mismo. El pentágono tiene un ángulo interior de 90º (noventa divisor de 360º) y dos de 45º (cuarenta y cinco es también divisor de 360º). Se puede decir que se logra teselar con casi cualquier polígono, siempre y cuando uno o más de sus ángulos interiores sean divisores de 360º. Además todos los triángulos y cuadriláteros por sí mismo teselan un plano.

2.2.2.3. Escher y los teselados de formas diversas.

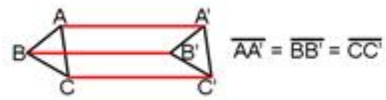
Hasta ahora se han mostrado teselados de figuras geométricas pero no son las únicas formas de teselar un espacio. Escher realizó teselados de formas muy diversas, en realidad este tipo de recubrimientos no son muy difíciles de hacer, sólo se requiere aplicar algunos principios matemáticos como simetría e isometrías

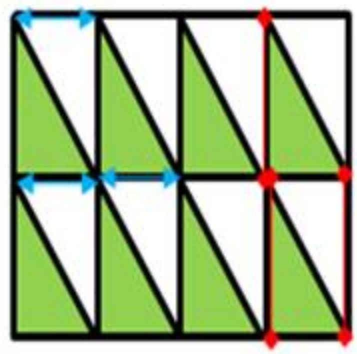
La simetría no sólo es un concepto matemático sino un principio universal de organización y formación de la naturaleza. Para esta propuesta sólo tomaremos la definición matemática, la cual hace alusión a cualquier movimiento rígido del plano que hace coincidir todos los puntos de la figura con otros puntos de la misma figura.[45]

Estas transformaciones pueden ser de tres tipos, traslación, rotación y reflexión.

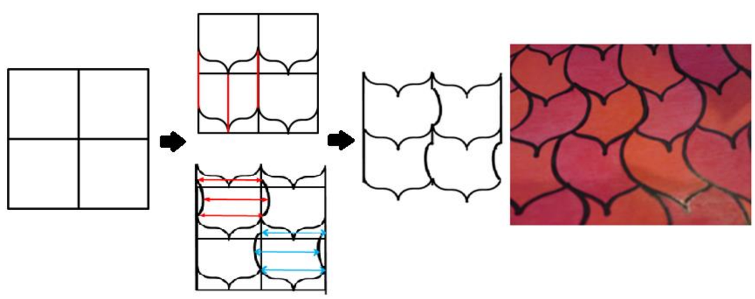
Traslación. Es un movimiento en el que todos los puntos del plano se mueven en la misma dirección y a la misma distancia.

[45]Godino, Juan D. y Ruiz, Francisco (2002). "transformaciones geométricas. Simetría y semejanza" en *Geometría y su didáctica para maestros*. En línea: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

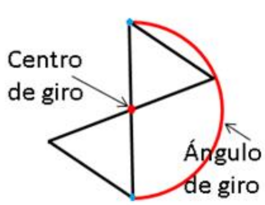


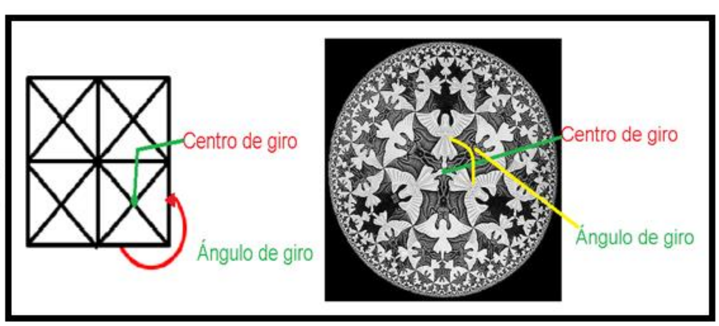


Este mismo concepto se aplica en la construcción de un teselado. El cuadrado, por ejemplo, es un polígono que por sí mismo tesela. Se hace una deformación al lado vertical derecho y esa misma deformación se traslada al siguiente. Después se hace otra modificación al lado horizontal superior del cuadrado y se traslada igualmente al lado opuesto. Finalmente se borra las líneas originarias del cuadrado y se deja sólo las modificaciones obteniendo el siguiente teselado:

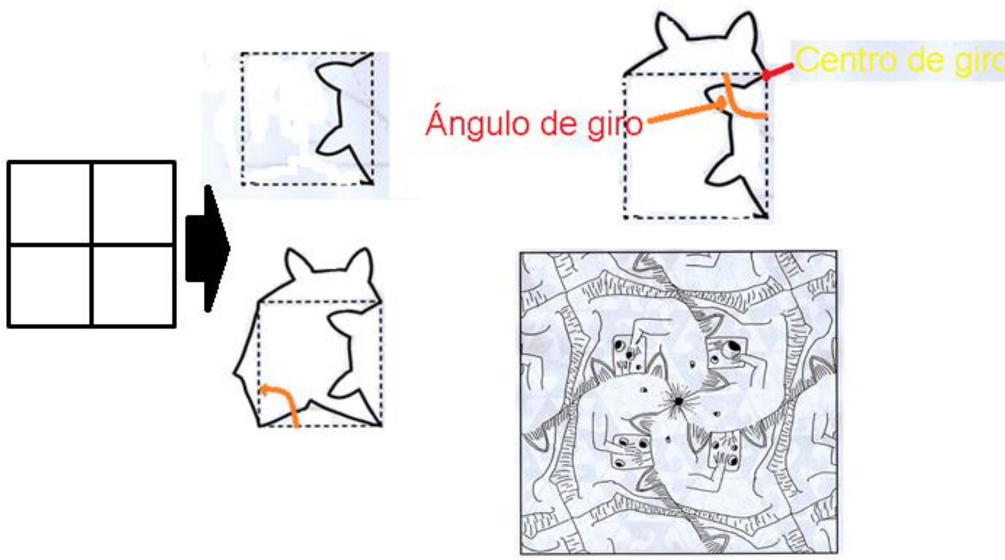


Rotación. Movimiento que consiste en girar todos los puntos del plano alrededor de un punto fijo (centro de giro). El ángulo formado por ese giro se llama ángulo de giro.

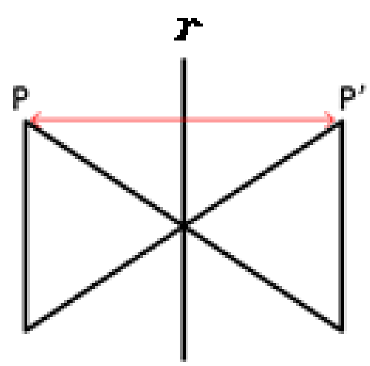




Cuando este movimiento se aplica en la construcción de teselados se tiene lo siguiente. A partir de un teselado de cuadrados, se hace la deformación al lado vertical derecho y se rota esa deformación, en este caso en un ángulo de 90º. Se hace lo mismo con los lados que faltan por deformar. Finalmente se hace los detalles y el teselado queda como el siguiente.



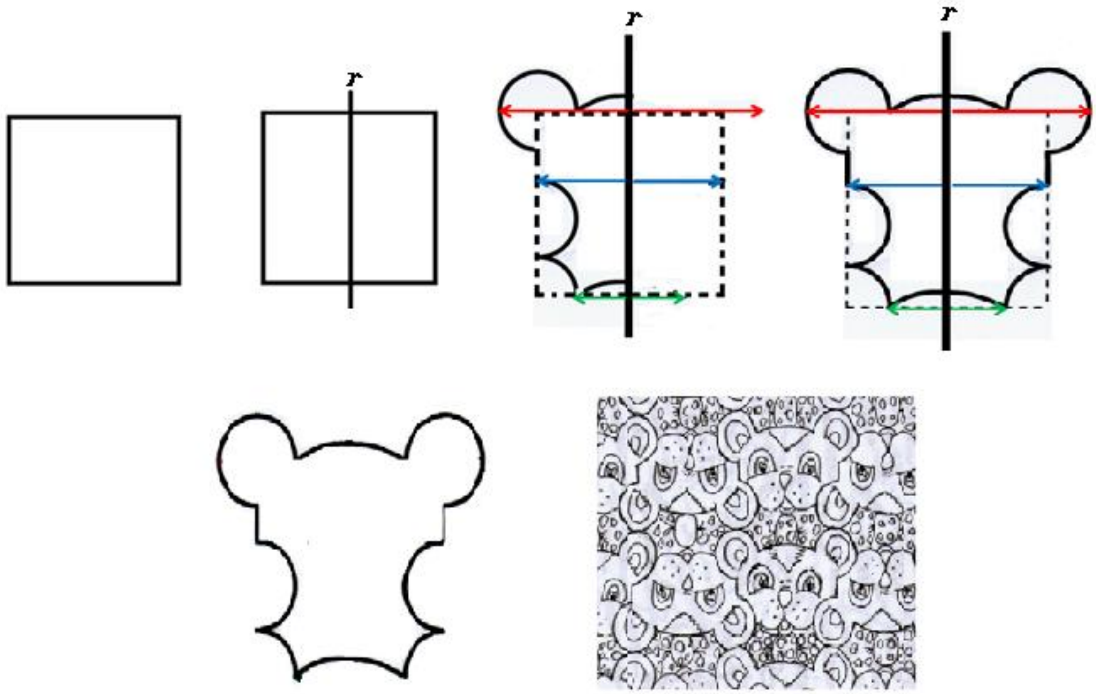
Reflexión. Es el movimiento que se produce fijando una recta ***r*** del plano y hallando para cada punto P otro punto P’ de tal manera que la recta ***r*** es la mediatriz del segmento PP’ y ***r*** es perpendicular a PP’.



Al aplicar este concepto en la elaboración de teselados, las construcciones son las siguientes. A partir de un cuadrado, se dibuja el eje de simetría y la denominamos ***r***. Del lado izquierdo del eje de simetría se deforma el cuadrado en la figura que se quiere realizar.

Posteriormente, se traza la misma deformación del lado derecho, con la misma figura, con las mismas medidas y distancias al eje de simetría, es decir, se hace la reflexión de la deformación del lado izquierdo del cuadrado inicial.

Después se borra las líneas secundarias: el cuadrado inicial, el eje de simetría y las flechas que se usaron para medir las distancias y se dibuja los detalles de la figura que se formó.[46]



Hasta aquí se ha expuesto el tema de teselados que se usará para estudiar el contenido de simetría e isometrías. Para el contenido de construcciones con regla y compás no se tiene un tema en especial, pues de antemano en simetría y semejanza es necesario este contenido, no solo para dibujar sino también para analizar y justificar. En semejanza se utilizará el tema de sección áurea el cual se explica en seguida.

[46]Es recomendable consultar libros sobre las temáticas de teselados y transformaciones isométricas, entre ellos: Hidalgo Solís, Laura (2007). *Mosaicos*. México: UNAM, 2007

2.2.3. Sección Áurea

Número de oro, razón o proporción divina, sección áurea o dorada, cualquier nombre que reciba este número siempre se hablará de un valor en especial: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$, una constante que se encuentra en cualquier parte, tanto en nuestras construcciones como en la naturaleza misma. Incluso las medidas del cuerpo humano.

¿Cómo surge el concepto de número divino? Fue el franciscano y matemático italiano Fray Luca Bartolomeo de Paccioli (1445-1517) quien nombró este número como divino debido a 5 razones:[47]

1) <<Es uno y nada más que uno>> esto lo compara con la divinidad de Dios, teniendo en cuenta que solo existe uno.
2) Destaca la similitud entre la definición de la proporción áurea, el cual comprende tres longitudes y la existencia de la Santísima Trinidad.
3) La incompresibilidad de Dios se asemeja al número áureo ya que este es irracional y por lo tanto es incomprensible como Dios.
4) La omnipresencia y la invariabilidad de Dios es muy similar al valor del número de oro, pues su valor siempre es el mismo y está presente en la naturaleza, en las construcciones y en nosotros mismos.
5) Con la creencia de que Dios creó todo el cosmos a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro, con la proporción áurea se crea el dodecaedro.

Este número ha sido y es base para muchas creaciones, los templos atenienses, la escultura de Atenea, el Partenón, entre otros, fueron construidos con los principios de este número. Aún en la actualidad está presente en las construcciones de edificios.

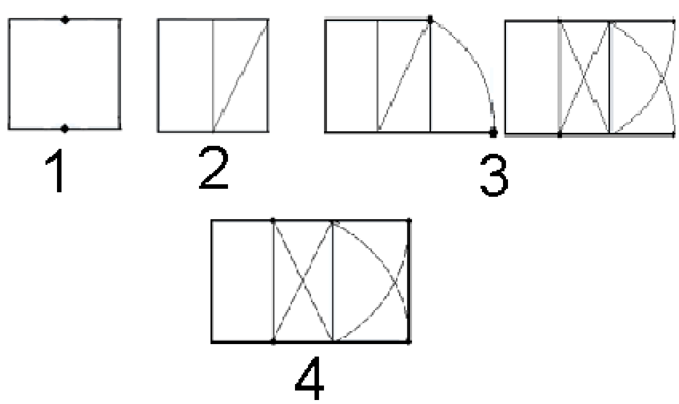
[47] Livio, Mario. *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo*. 3er ed. Barcelona: Ariel, 2006, p. 149

2.2.3.1. El rectángulo áureo, el pentágono y otras figuras doradas

Durante la Época Clásica en los siglos IV y V antes de Cristo, los griegos buscaban cómo construir algo tan armónico y bello en las proporciones de las partes como la naturaleza misma. Tras una búsqueda de esas características encontraron y construyeron un rectángulo en particular: *el rectángulo áureo*.

La relación entre las medidas de los dos lados diferentes del rectángulo áureo es *phi*, un número irracional con un valor aproximado a 1.618, pero no basta decir cómo es un rectángulo áureo, sino construirlo y demostrarlo matemáticamente.

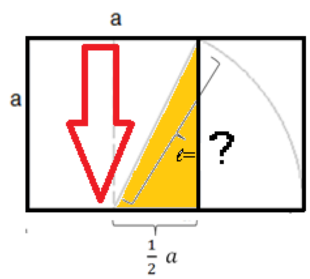
1. Partiendo de un cuadrado, se marcan los puntos medios de los lados. En este caso se marcaron los puntos medios del lado superior e inferior.
2. Después, desde el vértice superior derecho se traza una diagonal al punto medio del lado horizontal inferior
3. Se traslada esa diagonal al lado horizontal inferior, después se hace el mismo procedimiento al lado superior
4. Se unen las dos extensiones y así se construye un rectángulo áureo



Para demostrar que realmente se trata de un rectángulo áureo llamaremos a los lados del cuadrado inicial α, además de tener en cuenta que

$$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 = \phi$$

El rectágulo áureo se construyó a partir de una diagonal con origen en el punto medio del lado inferior al vertice superior derecho, el cual se trasladó al lado inferior, por lo tanto necesitamos saber cuánto mide esa diagonal para encontrar el valor total del lado más largo del rectágulo áureo. Como se observa, esta diagonal forma un triángulo rectágulo, por lo que podemos encontrar la medida de esa diagonal aplicando del Teorema de Pitágoras



Entonces tenemos que el cateto largo mide α ya que es el lado del cuadrado inicial, el cateto corto mide ½ α pues es la mitad del lado del cuadrado, solo faltaría encontrar la hipotenusa que es la diagonal, por ahora le colocaremos $\boldsymbol{\ell}$. Recordando el Teorema de Pitágoras tenemos lo siguiente:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Donde "c" representa a "ℓ"

$$l^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

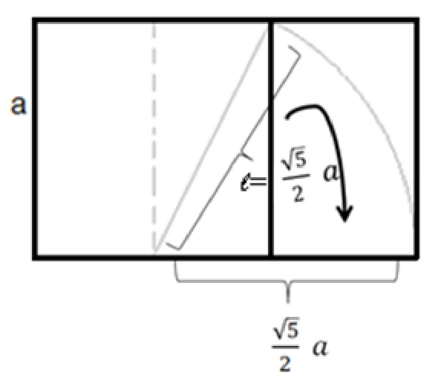
$$l^2 = a^2 + \frac{1}{4}\,a^2$$

$$l^2 = 1a^2 + \frac{1}{4}\,a^2$$

$$l^2 = \frac{4}{4}a^2 + \frac{1}{4}\,a^2$$

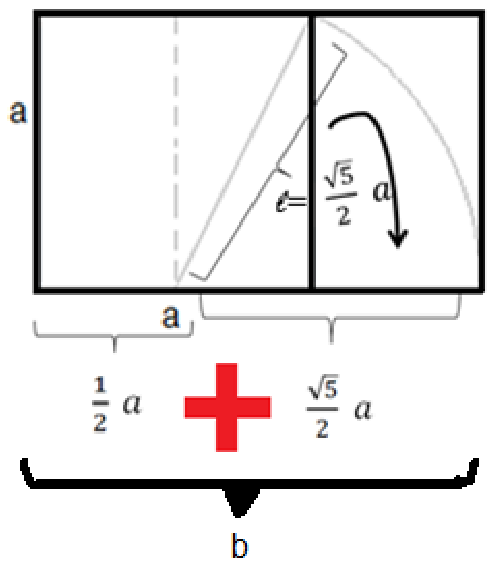
$$l^2 = \frac{5}{4}\,a^2$$

$$l = \sqrt{\frac{5}{4}\,a^2}$$



$l = \frac{\sqrt{5}}{2}\,a$ Medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se formó con la diagonal.

Ahora bien, esta medida se le suma ½ α, ya que la diagonal que se trasladó al lado inferior del cuadrado se hizo desde el punto medio



$$b = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}\,a$$

$$b = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a$$

Tenemos que la altura es igual a "α" y la base es igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\alpha$

Por lo tanto: $\frac{b}{a} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ya que

Donde:

α = α

b = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\alpha$

Sustituimos:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Y tambien $\frac{b+a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o sea ϕ dado que

$$\frac{b+a}{b} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a + a}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}$$

$$\frac{b+a}{b} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a} + \frac{a}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}$$

$$\frac{b+a}{b} = \cancel{\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}} + \frac{a}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a}$$

$$\frac{b+a}{b} = + \frac{\cancel{a}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\cancel{a}}$$

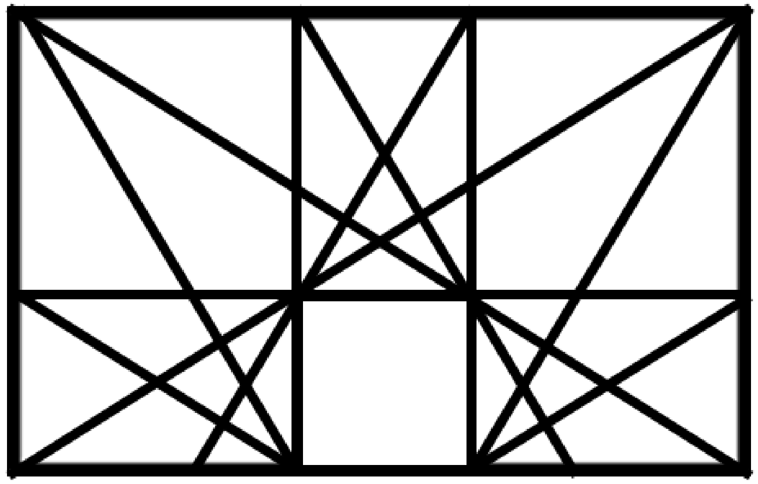
$$\frac{b+a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

De esta manera queda justificada las proporciones del rectángulo áureo, pero éste también es bello por otras características. De acuerdo con artistas y arquitectos, los rectángulos se pueden clasificar en dos tipos: estáticos y dinámicos. Los estáticos son aquellos que la razón entre sus lados son fracciones racionales como ½ mientras que en los dinámicos son fracciones irracionales cómo √2, y ϕ es un número irracional, por lo tanto el rectángulo áureo es un rectángulo dinámico.[48]

La diferencia entre un rectángulo estático y uno dinámico es que el segundo produce una serie de razones visualmente agradables de las superficies cuando se subdividen. Para subdividir los rectángulos se pulsan las diagonales de las esquinas opuestas y se construye una red de líneas perpendiculares y paralelas a los lados de las diagonales. El resultado en un rectángulo áureo puede ser como el siguiente:

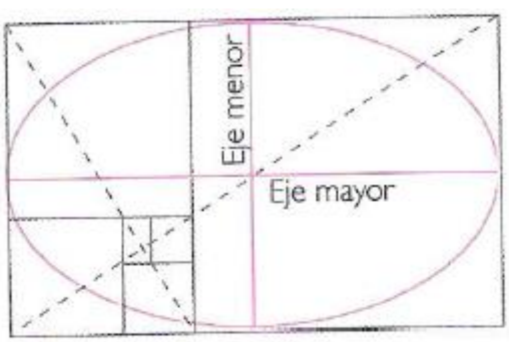
---

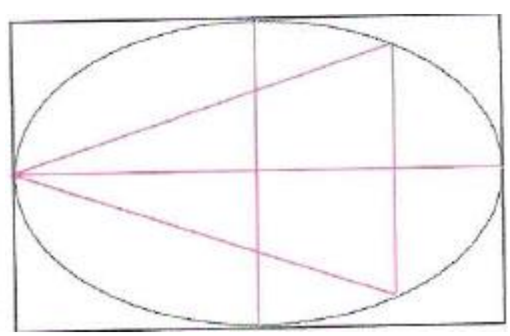
[48] Elam, Kimberly. *Geometría del diseño: estudio en proporción y composición*. trad. De Javier Alejandro Barrientos y Olivares, México: Trillas, 2003, pp. 31-42



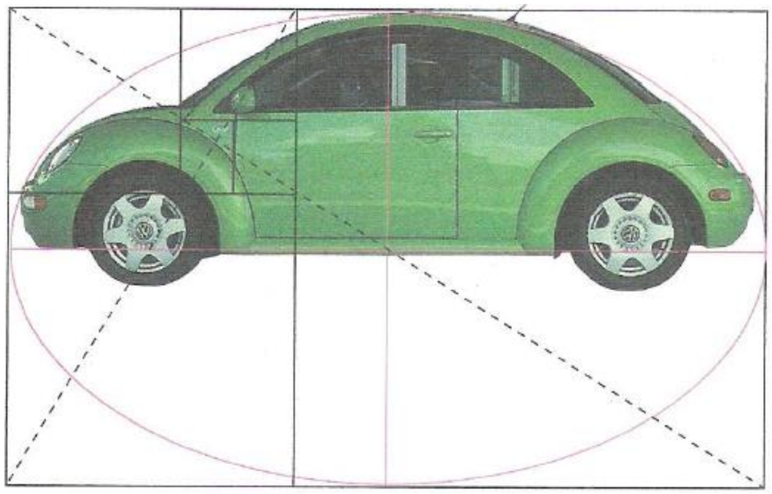
No es la única figura que contiene inmerso a *phi*, en el pentágono y la estrella pentagonal también está presente, los cuales “subtienden esquematicamente la morfogía de los organismos”[49], ambas figuras han sido base para muchas construcciones. Tambien se puede encontrar a ϕ en las proporciones de un triangulo y una elipse.

El triangulo de sección dorada lo podemos contruir a partir de un pentágono, en cuyas propiedades está inscrita la sección dorada. La elipse de sección dorada se contruye a partir del rectágulo dorado, el cual debe estar inscrito. La elipse ha sido parte fundamental para el diseño de muchos objetos, entre estos el famoso Beatle de la Volkswagen.





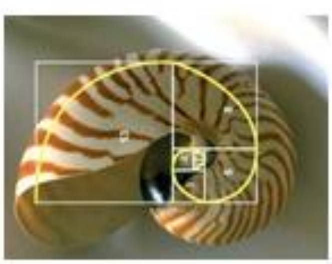
[49] Livio, Mario. Op. Cit., p. 152

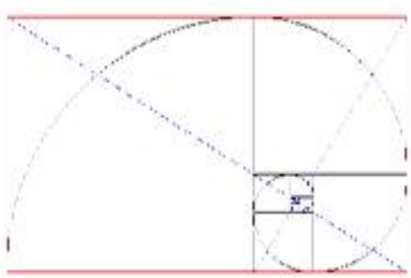


2.2.3.2. *Leonardo Da Vinci, el número de oro y la naturaleza*

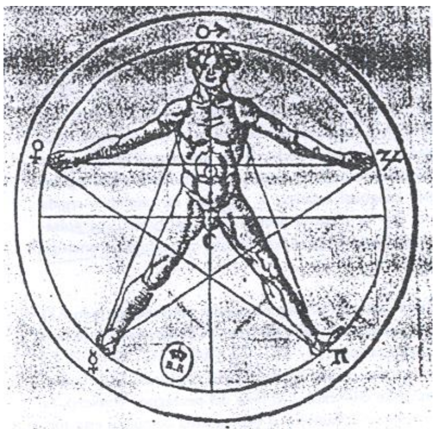
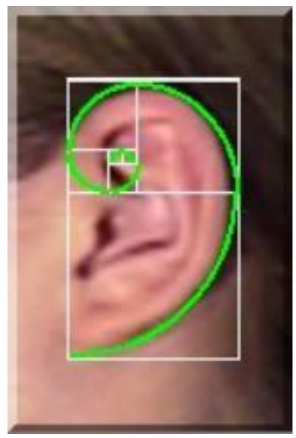
En el apartado anterior se mencionó que el número de oro está inmerso en el pentágono y en la estrella pentagonal, figuras que subtienden a la morfología de los seres vivos, como se observa en los siguientes organismos.

Otra forma de detectar este número es por medio del espiral que se forma en un rectángulo áureo, como se observa a continuación:





No es la única forma de encontrar este número en la naturaleza. Fibonacci analizando la reproducción de los conejos, descubrió una estrecha vinculación entre esta y *phi*. Es increíble ver cómo ϕ está inmerso en la naturaleza, pero más sorprendente es notar que este número está presente en nosotros, en nuestro cuerpo. El italiano Leonardo Da Vinci (1452-1519) nos lo muestra de forma general en su obra pictórica Vitrubio u Hombre Virtuoso.


Sin embargo es necesario mencionar que hay escritos según los cuales los antiguos griegos no realizaban sus construcciones con base en la sección áurea o que Leonardo Da Vinci pintara conforme a esta composición, que realmente es un mito que ϕ esté presente en estas estructuras y pinturas[50].

Pommershein destaca cuatro mitos: 1) El rectángulo dorado no es el rectángulo más estéticamente placentero; el rectángulo dorado no es perfecto 2) La razón dorada no ha sido usada en la arquitectura desde la antigüedad; 3) muchos trabajos famosos de arte, incluso los de Leonardo da Vinci, no están hechos con base en la razón dorada; y 4) La razón dorada no está presente en el cuerpo humano y en la naturaleza.[51]

Mito o no, las construcciones y pinturas tienen un principio de composición que parte de la sección áurea y esta noción puede resultar motivadora para que los estudiantes se interesen en los temas geométricos.

---

[50] Pommershein, James E., Marks, Tim K. y Flapan, Erica L. (2010). *Number Theory. A lively introducction with Profs, Applicatios, and* Stores EUA, Jhon Wiley & Sons, Inc.:2010, pp. 67-83

[51] Idem

2.2.4. La geometría y la habilidad de dibujo

Parte del objetivo general de esta propuesta es vincular el arte con las Matemáticas y en especial con la geometría. La forma más viable de hacerlo es por medio de las habilidades que se desarrollan al estudiar geometría, principalmente la de dibujo. Como se mencionó en el capítulo anterior esta habilidad favorece la capacidad de evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, también brinda herramientas para estudiar propiedades geométricas.

La habilidad de dibujo se relaciona mucho con las construcciones con regla y compás pues, por un lado las actividades de trazos promueven la capacidad de análisis de los mismos y por el otro sirven para visualizar gráficamente lo que se ha realizado.

El dibujo, como Arte, es la "representación de un objeto [real o imaginario] por medio de líneas que limitan sus formas y contornos […] el arte de representar gráficamente sobre una superficie plana de dos dimensiones objetos que, por lo regular, tienen tres."[52] La diferencia entre el dibujo y la pintura, es que el primero se limita a líneas, trazos, sombras, luces y el segundo se trata de una estructura de masas de colores.

Desde épocas remotas, cuando el ser humano era nómada, el dibujo era un medio para representar su realidad. Se trazaba, desde entonces, imágenes rústicas de animales y de ellos mismos, pero a pesar de ser sólo líneas, en algunos casos, estos eran proporcionales al tamaño original. Por ejemplo se entendía que un mamut era más grande que ellos, pero que un tigre era más o menos de su altura y como tal los dibujaban.

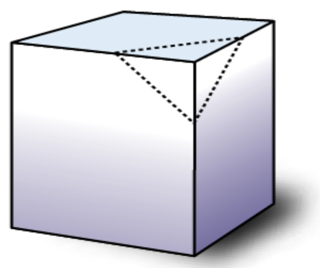
La habilidad de dibujo constituye parte de cualquier ciencia, la cual permite el empleo del dibujo para ilustrar un determinado tema. Por ejemplo, en biología se utiliza para esquematizar el proceso alimentación de una planta o para indicar sus partes. En física para tratar de mostrar cómo cada elemento de una formula interviene en un fenómeno. Y en matemáticas para los trazos que se hacen en geometría.

[52] Velandia, Lluvia. *Historia del arte*, en línea: http://www.monografias.com/trabajos13/histarte/histarte.shtml, visitado el 16-mayo-2011

Pero en geometría, la habilidad de dibujo brinda otras capacidades además de la creatividad que nos permiten resolver problemas de la vida cotidiana y que sirven no sólo para "evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino también son medios de estudio de propiedades geométricas, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento."[53] Favorecen el desarrollo en el estudiante de habilidades de representación, reproducción y construcción.

Representación: Consiste en visualizar un objeto desde diferentes puntos de vista y con distintos procedimientos. Algunas actividades para el desarrollo de esta habilidad son como las siguientes.

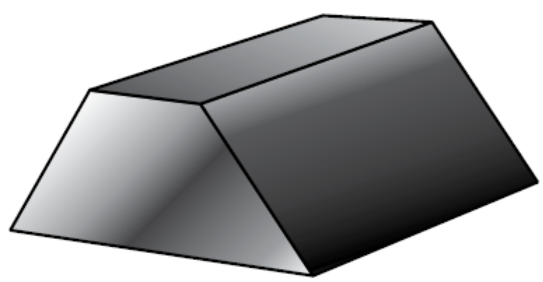
Observa la representación del siguiente poliedro. Determina el número de vértices (V) y el número de aristas (A) que tendrá el poliedro que se obtiene al hacer un corte con un plano a través de la zona punteada.



A) A= 15; V= 11
B) A= 12; V= 7
C) A= 15; V= 10
D) A= 12; V= 8

¿Cuántos vértices tiene?

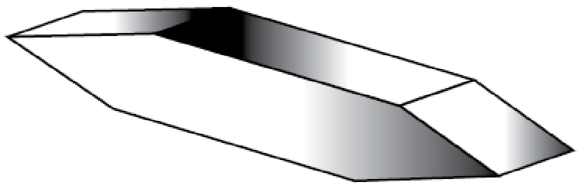
A) 8 vértices
B) 7 vértices
C) 9 vértices
D) 12 vértices



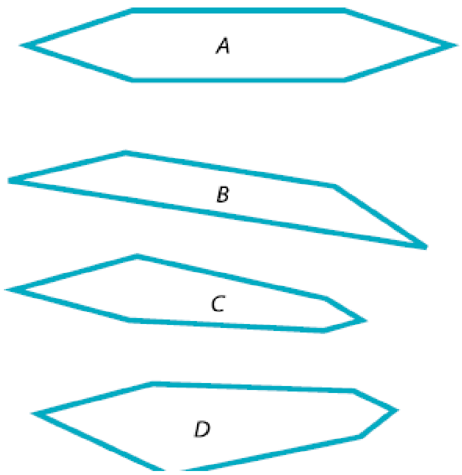
En ambos ejercicios se trata de que el alumno visualice la figura más allá de lo que ve plasmado. Es decir, el estudiante debe imaginar el cuerpo completo de la imagen plana. El ejercicio de abajo es contrario a los dos primeros pues en este sólo debe imaginar una parte de la imagen del cuerpo geométrico.

[53] Bressan, Ana María, Bogisic, Batriz y Crego Karina. *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Buenos Aires: Novedades Educativas, 2000. p. 41

Observa el siguiente cuerpo geométrico

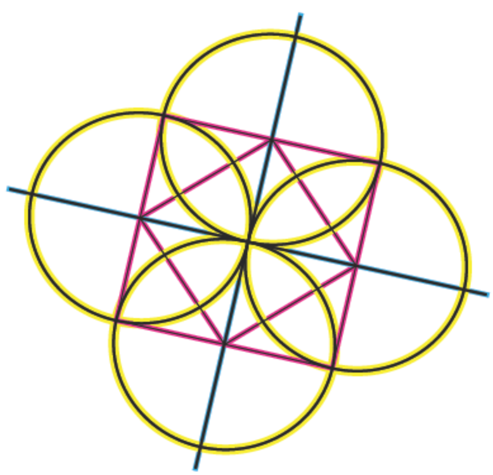


¿Cuál es la base con la cual se puede hacer este cuerpo?



Reproducción: Los alumnos copian en igual o distinto tamaño los objetos que quiere representar. Ejercicios para esta habilidad son como el siguiente:

1. Utilice sus instrumentos geométricos para reproducir la siguiente figura (puede ser del tamaño que desee):



Construcción. Radica en que el alumno elabora un objeto con sus propios conocimientos y herramientas de forma oral, escrita o gráfica. Actividades para esta habilidad pueden ser las siguientes.

7. *Triángulos imposibles*. Utilice sus instrumentos geométricos para construir, en cada caso, un triángulo que cumpla con las medidas indicadas y descubra cuáles medidas no permiten obtener triángulos.

a) Lados:

5 cm, 6 cm, 8 cm	*2 cm, 2 cm, 4 cm*
7 cm, 3 cm, 2 cm	*9 cm, 6 cm, 8 cm*

b) Ángulos:

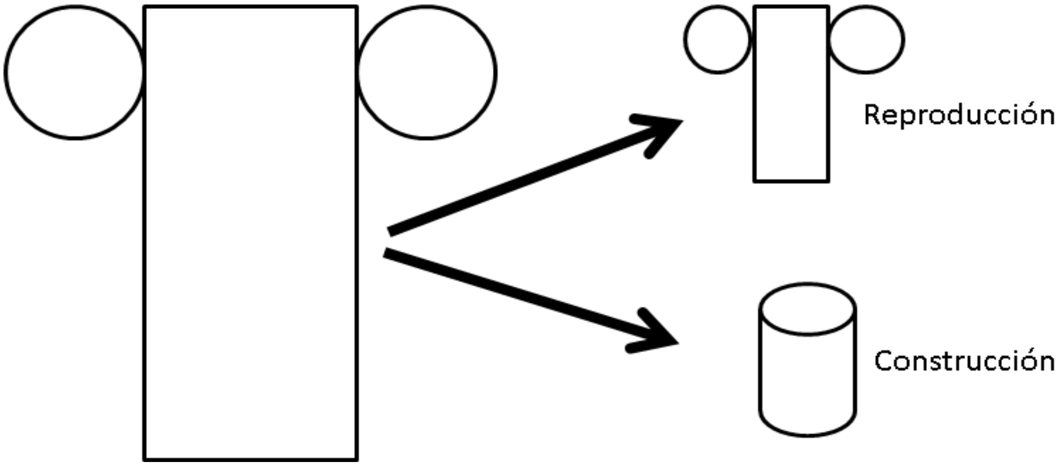
60°, 80°, 40°	*90°, 50°, 40°*
10°, 20°, 60°	*25°, 40°, 30°*

Las actividades para desarrollar las habilidades de dibujo pueden ser muy sencillas o muy complejas. Una representación sencilla podría ser solo el clasificar figuras de acuerdo a su definición, imaginar una figura en diferentes perspectivas puede ser un nivel medio y en el alto el imaginar la forma desarrollada de un cuerpo complejo como el dodecaedro.

En cuanto a la reproducción, también se pueden identificar tres niveles. En un nivel sencillo sería la de modelar con un pedazo de plastilina un cuerpo ya dado, en el nivel medio calcar o recortar una figura, y en el complejo reproducir una figura o cuerpo dado al doble, a la mitad u otra medida diferente de la original.

En construcción se pueden clasificar los niveles como en los siguientes ejemplos. En el simple, construir un cuerpo o figura a partir de ciertas medidas o un modelo ya dado. En el medio, construir todos los cuerpos o figuras posibles a partir de ciertas propiedades. En el complejo, elaborar un cuerpo o figura a partir de sólo oír la representación, o bien, combinar muchas figuras y cuerpos geométricos para construir otro.

También podemos encontrar niveles intermedios, por ejemplo al pedir reproducir un cuerpo geométrico a partir de su forma desarrollada, si bien es cierto que por lo general el niño suele sólo calcar la figura, también es cierto que el niño lleva a cabo la construcción del cuerpo, aunque las medidas y el diseño ya estén dados. Se trata de una construcción simple pero una reproducción compleja que el niño no puede hacer más que la copia de la imagen. Por ejemplo:



2.3. Revisión de la Literatura

En este apartado se estudian los trabajos que se ha hecho en México y otros países para mejorar la enseñanza de la geometría, también se analizan los errores que comenten los alumnos al realizar ejercicios sobre los contenidos de construcciones con regla y compás, simetría y semejanza. Finalmente se revisan los modelos y enfoques que se han utilizado. Los objetivos son exponer:

- La enseñanza de la geometría y las habilidades que se desarrollan
- Errores en construcciones con regla y compás
- Errores en simetría
- Errores en semejanza
- Enfoques y modelos para enseñar geometría

2.3.1. La enseñanza de la Geometría y las habilidades que se desarrollan

En las últimas décadas los especialistas en Educación Matemática han tratado de seleccionar mejor el contenido matemático que debe enseñarse. En un inicio la enseñanza de las Matemáticas era tradicional y la mayoría de las clases era teoría y aplicación. La instrucción se inclinaba más a la aritmética y a la resolución de ecuaciones mientras que la geometría quedaba en segundo plano.

Más adelante, a finales de los cincuenta, se llevó a cabo en Europa el Coloquio de Royaumunt, en donde se defendían las matemáticas modernas con el lema de Euclides Abajo. Se pretendía desaparecer completamente la enseñanza de la geometría argumentando que solo consistía en dibujar y se favorecía la introducción de la Teoría de Conjuntos y Álgebra.

Tiempo después, Freudenthal propone de nuevo el estudio de la geometría, pero ésta nuevamente sólo se basaba en la euclidiana, dejando de lado otras características de suma importancia. Se argumentaba que la geometría no podía ser suprimida pero tampoco podía enseñarse sólo eso.

Al inicio de los años ochenta, se empieza a reducir la Teoría de Conjuntos y se comienza a reaparecer contenidos geométricos. Se argumentaba que la geometría permite introducir al alumno al campo de nuevas ideas, liberar la imaginación e intuición y abrir nuevas perspectivas. Por lo tanto no era necesario eliminar la geometría sino cambiar su enseñanza.

Con el tiempo se empezó a valorar la geometría no solo como un eje temático de las Matemáticas, sino como un modo de pensar. Entre los argumentos para respaldar lo anterior se mencionaban los siguientes postulados:

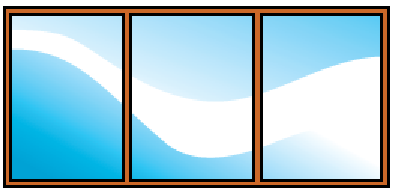
- La geometría debe ser una ayuda para comprender el mundo exterior
- La representación axiomática de la enseñanza de la geometría no es posible en la enseñanza media
- Hay que educar en la solución de los problemas geométricos
- El aprendizaje no siempre opera de forma lineal, a veces opera en pasos

A pesar de la riqueza formativa que se desarrolla en los alumnos con el estudio de la geometría, a finales de los ochenta, los contenidos geométricos nuevamente fueron desfavorecidos y para remediar esta situación se sugirió estudiarla a lo largo de todo el año escolar y se recomendaron actividades para no caer en casos extremos de una Geometría axiomática,[54] por ello la enseñanza de la geometría no tiene mucha tradición en México.

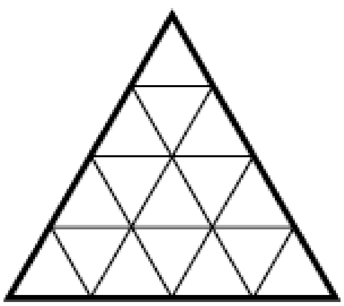
[54] Lerner, Delia. *La Matemática en la Escuela. Aquí y ahora.* Aique. Buenos Aires, 1997, p. 31

Algunos investigadores han incursionado en el valor de enseñar geometría exponiendo su utilidad y las habilidades que se desarrollan: visuales, comunicación, dibujo, lógicas y aplicación. Bressan menciona que cualquier aprendizaje significativo de la geometría involucra a varias de estas habilidades, y con base en ello propone actividades como las siguientes.

Habilidad visual: Trabaje su habilidad visual contando el número de rectángulos de la siguiente ventana. ¡Cuidado, son más de 4!

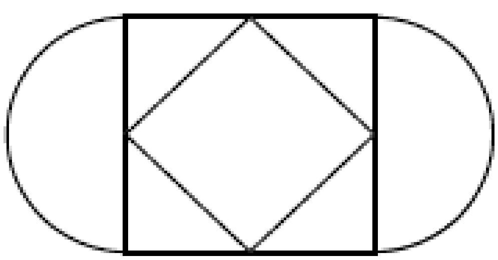


¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura? ¡Cuidado, son más de 17!



Desarrollar la habilidad de visualización ayuda a que los estudiantes tengan menos dificultades al estructurar lo que observan, encontrar una posible solución de un problema y describir propiedades de alguna figura.

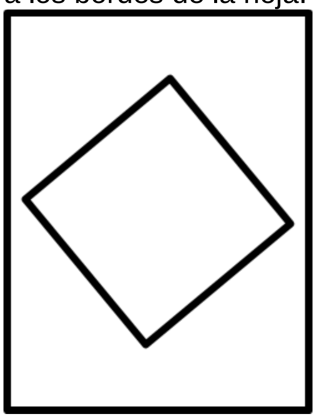
Habilidad de comunicación: Trabaje su habilidad de comunicación; escriba un mensaje para que alguien pueda reproducir la siguiente figura.



Entregue el mensaje a un compañero y pídale que siga las instrucciones; al final comparen las figuras.

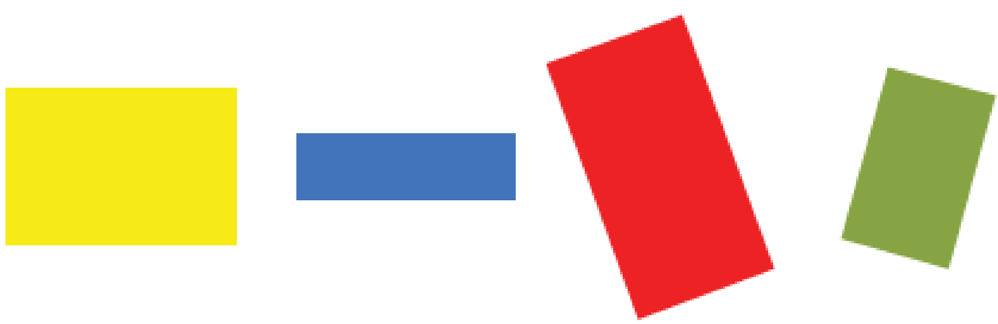
Esta habilidad no se trata de hablar por hablar sino de convencer. El estudiante utiliza el lenguaje geométrico adecuado para formar una cadena de argumentos que muestren la veracidad de su propuesta. Al introducir la simbología se debe de hacer cuidadosamente para que no represente un obstáculo en la compresión de los alumnos.

Habilidad de dibujo: Trabaje sus habilidades de dibujo utilizando sus instrumentos geométricos para trazar, en una hoja blanca, un cuadrado cuyos lados no sean paralelos a los bordes de la hoja. Observa el ejemplo.

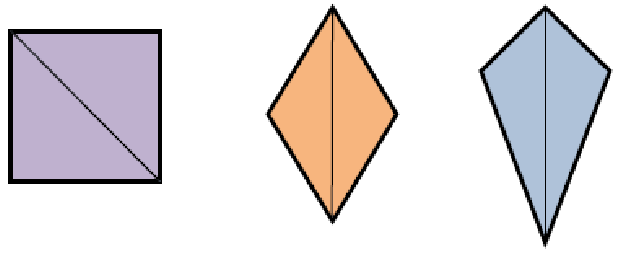


Las actividades de construcción ejercen en los alumnos la necesidad de utilizar sus instrumentos geométricos, desarrollar conjuntamente muchas habilidades de la Geometría y también son propicias para que construyan nuevos conocimientos.

Habilidad de lógica o de razonamiento: Juanito observa los siguientes rectángulos y deduce: las figuras con dos lados cortos y dos largos son rectángulos. ¿Es correcta su deducción?, ¿por qué? ¿Qué otras figuras tienen dos lados largos y dos cortos y no son rectángulos?

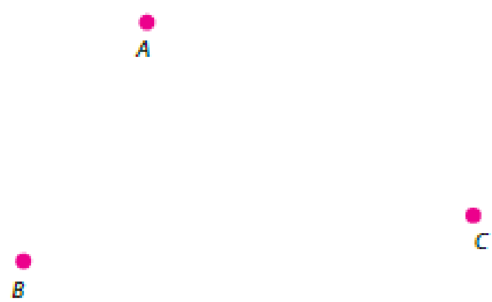


Lety traza un eje de simetría a cada una de las siguientes figuras. Al analizarlas deduce que: si un segmento divide a una figura en dos triángulos iguales, entonces el segmento es eje de simetría de la figura. ¿La deducción de Lety es correcta? Argumente su respuesta.



La geometría se ha caracterizado por ser deductiva y las habilidades lógicas o de razonamiento permiten al alumno desarrollar la capacidad de abstracción, de hacer conjeturas, justificarlas demostrando su veracidad o falsedad, es decir hacer deducciones lógicas.

Habilidad de aplicación: Trabaje sus habilidades de aplicación: Los puntos representan tres unidades habitacionales:



Se va a construir un centro comercial y se desea que esté a la misma distancia de las tres unidades. Identifique con un punto el lugar donde se tendría que construir el centro comercial. Haga la construcción en su cuaderno.

Estas habilidades de aplicación son para que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido a otros contextos, dentro de la misma Geometría y situaciones del mundo físico o de otras disciplinas.

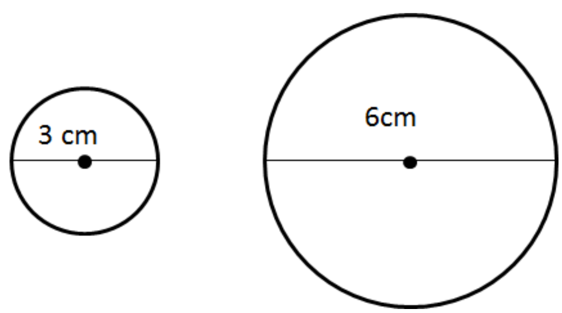
Cuando un alumno es capaz de aplicar el conocimiento aprendido a problemas nuevos es cuando él realmente ha comprendido el contenido. Estas habilidades se desarrollan conjuntamente, cuando el docente aplica una actividad en donde los estudiantes van a mostrar una de las habilidades, automáticamente se presentan las otras.

2.3.2. *Errores en construcciones con regla y compás*

Cuando los alumnos estudian construcciones con regla y compás, generalmente se comienza por la descripción y función de estos dos instrumentos, se recomienda que la regla sea sin graduación. Sin embargo los estudiantes cometen errores al aplicar los conocimientos de este contenido lo cual a veces trunca el estudio para otros temas.

Algunos de los errores que cometen los alumnos se producen por no saber utilizar los instrumentos y no poder vincularlos con algunos conceptos geométricos. Por ejemplo, en las circunferencias, el compás sirve para trazarlas, pero el compás está relacionado más con el radio que con el diámetro y algunos estudiantes no llegan a comprender esto.

Cuando se pide a los escolares trazar una circunferencia, por ejemplo de 3 centímetros de diámetro, en lugar de tomar 1.5 en la abertura del compás lo hacen de tres, dibujando así una circunferencia de 6 centímetros y no de 3.[55]



Otro error tiene que ver con la comprensión de términos, pues al darles indicaciones, ya sean escritas u orales, los alumnos no saben seguirlas o al contrario, teniendo la figura no saben describir cuál es el camino para llegar a ella. Podemos ver este error en las pruebas de EXCALE:

[55] García Peña, Silvia y López Escudero Olga Leticia. Op. Cit.,, p. 110-120

A partir del la figura inicial, ¿cuál es la serie de instrucciones con las que se construye el paralelogramo ABEP de la figura final?

FIGURA INICIAL

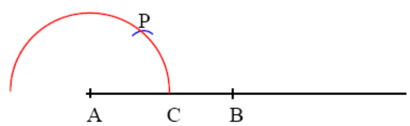
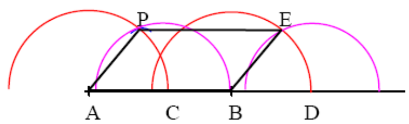


FIGURA FINAL



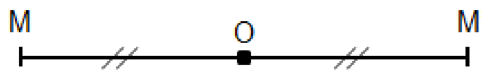
En otras ocasiones el error está en la costumbre, pues no están habituados a utilizar regla sin graduación, así que lo que hacen es copiar exactamente igual una imagen o trazado, ya sea en calca o midiendo las longitudes, sin importar que la sugerencia de la actividad sea que la imagen sea más grande o chica.

2.3.3. Errores en simetría.

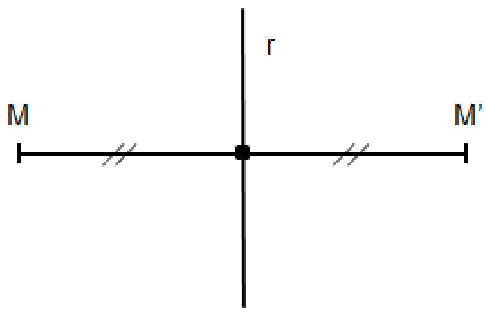
Con sólo observar nuestro entorno natural podemos darnos cuenta de cómo los diseños de la naturaleza son simétricos y es por ello que la encontramos ordenada, bella y perfecta. Sin embargo, la simetría, uno de los conceptos geométricos más antiguos, representa un contenido con algunas dificultades al estudiarla.

El concepto de simetría puede entenderse desde varias perspectivas, tanto como la asociación con la idea de proporcional y bello hasta con una definición precisa y matemática. Pero el terreno más fértil para la simetría es en la geometría. Varios problemas geométricos se resuelven haciendo uso de la simetría.

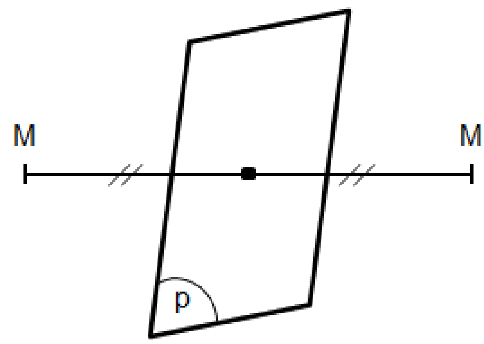
Es importante definir qué es simetría: la simetría es una transformación que, a un punto M, hace corresponder a un punto M', tal que el segmento MM' posee un punto fijo como centro, una recta o un eje fijos como mediatriz o también un plano fijo como plano mediano.[56]



Simetría con respecto a punto



Simetría con respecto a recta



Simetría con respecto a un plano

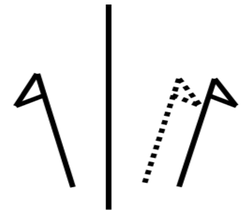
Algunos de los errores que cometen los alumnos en simetría es concebirla de manera limitada. Por ejemplo, generalmente solo idean la simetría como el reflejo de una figura o incluso la llegan a confundir con los ejes simétricos de una figura. No la contemplan como parte de un grupo de transformaciones automórficas.

Es importante que los docentes conozcan las dificultades y errores que cometen los alumnos al interpretar el concepto de simetría para saber qué hacer y ayudar al estudiante a comprender. Al dibujar objetos simétricos aparecen errores típicos generalmente por una falsa o limitada concepción. Jaime y Gutiérrez dividen estos errores en dos grupos:[57]

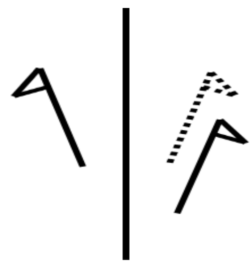
1. Errores por una mala comprensión de la definición de simetría: los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen.

[56] Almaguer, Guadalupe. *Matemáticas 1*, México: Limusa, 2007. p. 36-40
[57] Jaime Pastor, Adela y Gutiérrez Rodríguez, Ángel. *El grupo de las isometrías en el plano*. España: Síntesis, pp. 61-66

a) Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen.

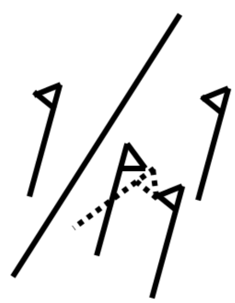


b) Falta de perpendicularidad respecto al eje del segmento que une un punto y su imagen.

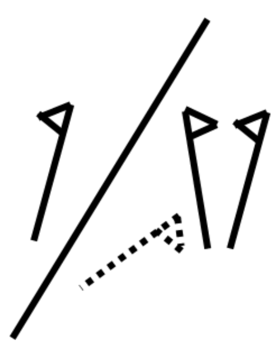


2. Errores por interpretaciones visuales parciales de la simetría. Los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual cuyo origen se debe a los ejemplos prototipos donde los ejes de simetría son verticales u horizontales.

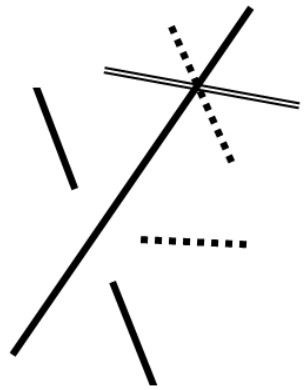
a) Dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque esta no sea paralela al eje.



b) Desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría esté inclinado.



c) Combinaciones de los dos errores anteriores y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica.



En general, la dificultad radica básicamente de la posición del eje de simetría y la posición relativa del eje-objeto cuando no es un punto, es decir, un alumno puede dibujar el simétrico de un punto pero no el simétrico de un segmento y mucho menos de una figura. Existen estrategias para que el alumno comprenda el concepto de simetría, sin embargo no ahondaré en ello ya que es uno de los propósitos de esta propuesta

2.3.4. *Errores en semejanza*

La semejanza es una transformación geométrica que conserva la alineación y los ángulos pero alterando la distancia según un factor proporcional[58]. Al igual que simetría, los alumnos también cometen errores en el concepto de semejanza. Aun no existe una categorización de ellos, pero los podemos clasificar igualmente en dos:[59]

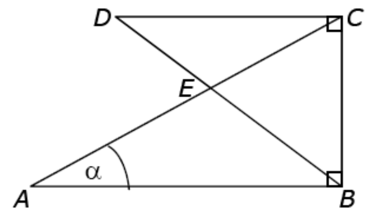
1. Errores por una mala comprensión de la definición de semejanza. Este error se debe a que los alumnos no aplican todos los criterios de semejanza, por ejemplo veamos el siguiente reactivo.

[58] Castrejón, Apolo y Castrejón, Ortos. *Matemáticas 3*, México: SM, 2009, pp. 42-47
[59] Gualdrón Pinto, Élgar y Ángel Gutiérrez Rodríguez. "Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza" en SEIEM, Colombia, 2006, pp. 13

Según la figura 2, ¿cuál(es) de los siguientes pares de triángulos es(son) semejante(s)?

I) □ *ABC* ~ □ *DCB*
II) □ *ABE* ~ □ *CDE*
III) □ *EBA* ~ □ *EBC*

Fig. 2



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) I y II
E) I y III

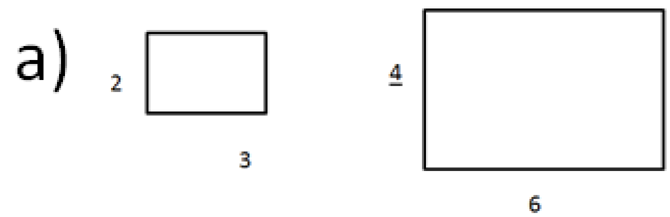
La respuesta correcta es “B”, sin embargo los alumnos llegan a confundir como semejantes los triángulos ABC y DCB porque ambos son triángulos rectángulos y además tienen un cateto común y otro paralelo. Pero no es suficiente con identificar sólo un ángulo, es necesario conocer dos de ellos y el lado conformado por esos éstos.

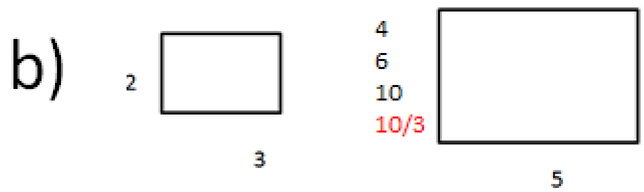
Otro error es cuando consideran semejantes los triángulos EBA y EBC porque tienen un lado común y creen que el segmento EB es bisectriz del ángulo recto, por lo que formaría dos triángulos isósceles semejantes. Pero no se puede afirmar nada con respecto al segmento EB y además para ser semejantes se requiere conocer los tres lados.

2. Errores por interpretaciones visuales parciales de la semejanza. Este tipo de errores son más comunes y se debe a prototipos de ejemplos como se muestra a continuación.

Los alumnos responden correctamente problemas de semejanza cuando el factor proporcional es un múltiplo pero cuando el factor cambia se comete el error. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio se pide encontrar la medida de lado corto del rectángulo en la primera actividad, 6 es múltiplo de 3, automáticamente los estudiantes reconocen que el rectángulo está duplicado y que el factor proporcional es 2, y si 3x2=6, entonces el lado corto mide 4 puesto que es el resultado de 2x2.

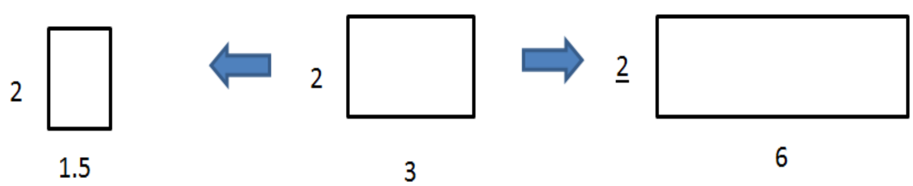
1.- Encuentra la medida de los lados del rectángulo

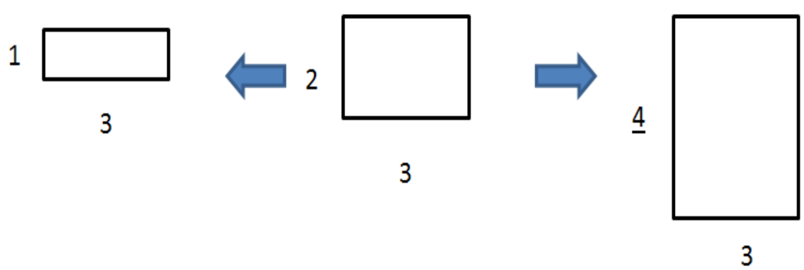




En la segunda actividad, el 5 no es múltiplo de 3, confunde a los alumnos, los cuales comenten el error al resolver de las siguientes maneras; a) obtienen el factor proporcional restando el 3 del 5 y el resultado le suman 2, o viceversa, restan el 2 del 5 y el resultado le suman 3, y b) suman los tres lados 5+3+2 en lugar de multiplicar 5x2 y el producto dividirlo entre 3.

Los alumnos cometen muchos errores que generalmente se debe a los prototipos de ejemplos. Otro error, un poco más ingenuo que el anterior, se efectúa cuando al pedirles que dibujen otra figura semejante, ya sea más grande o más chica, lo que hacen es reducir sólo algunos de sus lados, como se muestra a continuación:





2.3.5. *Enfoque y modelos para enseñar Geometría*

El enfoque general que se propone en México para la enseñanza de las matemáticas es la de resolución de problemas. Se sugiere plantear actividades de dificultad media, en el sentido de que no sean un obstáculo para aprender pero tampoco muy sencillas con la que quizá no se aprenda nada. Para resolver un problema se procura que el alumno utilice sus conocimientos previos[60] con el fin de ir vinculando un tema con otro.

El enfoque plantea que los problemas deben ser interesantes, novedosos, bien articulados para que el razonamiento del niño se vuelva ágil. El objetivo de este enfoque es abrir un camino para un cambio de ambiente[61] en el que ya no se trabaje de manera vertical, donde regularmente es el docente quien tiene la palabra y sabiduría.

El desarrollo del razonamiento, la capacidad de análisis, síntesis e inteligencia están vinculados a la resolución de problemas.[62] Por medio de este enfoque se puede relacionar las matemáticas con las múltiples ramas de la ciencia. Además, el resolver problemas no solo es una tarea de matemáticos y científicos, sino de cualquier persona.

Pero entonces ¿qué es un problema? Se puede decir que es una situación que nos hace pensar y que a veces tiene más de una solución. No se puede saber la manera inmediata de proceder por lo tanto se requiere poner en juego todas nuestras capacidades y conocimientos. Los problemas permiten despertar nuestros dispositivos mentales como la búsqueda de analogías, simulaciones, transformación del enunciado, entre otros.[63]

Los problemas pueden aplicarse desde tres perspectivas: juego, acertijos y aplicaciones. El primero se vale del elemento lúdico para la enseñanza. El segundo tiene que ver con encontrar una solución a partir de indicios. Finalmente

[60] Secretaria de Educación Pública. Op. Cit., p. 12
[61] Ídem
[62] Mancera, Eduardo. Op. Cit., p. xiv
[63] Ibídem, pp. xvi y xvii

el tercero implica el uso de contenidos matemáticos para resolver o comprender dentro y fuera de la disciplina.[64]

Investigadores de la Educación Matemática han diseñado modelos teóricos que identifican y organizan la enseñanza y aprendizaje de la geometría con el fin de facilitar el trabajo de los docentes. En geometría destacan dos, el modelo de Vinner y el modelo Van Hiele.

El modelo de Vinner es más específico que el de Van Hiele y propone cómo prevenir o corregir los errores durante el aprendizaje. Expone que el aprendizaje de los alumnos se da gráficamente por medio de ejemplos, lo que él denomina como "imagen del concepto". En la enseñanza de las matemáticas el docente suele poner mayor énfasis en las definiciones que en los ejemplos. De acuerdo con Vinner, son los ejemplos los que impactan más y producen un efecto mental más duradero en los alumnos.[65]

Cuando escuchamos o leemos algo nuevo en forma de concepto que nos evoca representaciones visuales, experiencias o impresiones pasadas se debe a un buen ejemplo que se dio anteriormente, es decir, la imagen del concepto. Cuando el ejemplo o la imagen del concepto es correcto permite al alumno discernir sin errores las propiedades relevantes de una definición.

De acuerdo con Vinner, es necesario dar pautas concretas en la adquisición del conocimiento. Para ello es necesario poner varios ejemplos y contraejemplos. Es decir, no quedarse con el prototipo de ejemplo ya que esto provoca en los alumnos un aprendizaje limitado y no puede compararlos con casos nuevos.

El modelo Van Hiele es el marco más usado y efectivo para organizar la enseñanza de la geometría en los diferentes niveles educativos. Propone que el aprendizaje de los alumnos se da cuando éstos han acumulado la cantidad suficiente de experiencias adecuadas. No obstante, a veces esas experiencias no suelen ser suficientes para un desarrollo completo, por lo que es necesario

---

[64] Mancera Eduardo. Op. Cit., p. xvii

[65] Jaime, Adela y Gutiérrez, Ángel. "Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria" en Tecné, Episteme y Didaxis, núm. 32, segundo semestre 2012, pp. 55-70

proporcionar prácticas adicionales y este modelo plantea niveles y fases para esas experiencias.[66]

El Modelo Van Hiele se ha utilizado en varios países, en España Adela Jaime y Ángel Gutiérrez son defensores de esta modelo. En Venezuela se han hecho tesis[67] sobre cómo enseñar geometría por medio de actividades lúdicas utilizando el modelo de Van Hiele. Sin embargo, en estos trabajos hay dos factores faltantes, primero, que están desvinculados de los programas de estudio y segundo utilizan estrategias comunes como las actividades lúdicas y no el arte.

En el *Programa de estudio 2011, guía para el maestro…* se plantean planes de clase, tres sobre el eje Manejo de la Información, uno sobre Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico y uno más sobre Forma, Medida y Espacio. Estas planeaciones tienen un seguimiento que llaman momentos, algunos llegan hasta el momento 7.

Las planeaciones no siguen el modelo Van Hiele pues proponen más de cinco momentos aunque si siguen una jerarquía. En el ejemplo que pertenece a Forma, Medida y Espacio o Geometría es de segundo año, se plantean 6 momentos para enseñar el contenido de ángulos. Está presente implícitamente el estudio de algunas construcciones simples con regla y compás, como se muestra en la siguiente imagen[68]:

Indicaciones: **Traza la diagonal AC en el cuadrado (Figura 6) y recorta el cuadrado por la diagonal, cuidando no recortar el trozo de cartulina que rodea al vértice A para que puedas fijar la nueva figura en la base de fomi. ¿Cuál es la nueva figura que obtienes al recortar?**

[66] Jaime, Adela y Gutiérrez, Ángel, Op. Cit., pp. 55-70
[67] Claudia J. Pérez o. y María Eugenia Ruiz. Op. Cit.
[68] Secretaría de Educación Pública. Op. Cit., p. 132

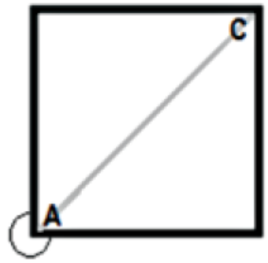


Figura 6

A pesar de que ya se han hecho trabajos sobre el modelo Van Hiele, la propuesta que se elabora en este trabajo recepcional es innovadora pues contiene dos aspectos importantes; 1) no es una propuesta extracurricular, sigue los planteamientos de los planes y programas de estudio de la SEP, y 2) se está utilizando el arte como estrategia para lograr una vinculación de las matemáticas con otros campos de conocimientos.

Es importante aclarar que en esta propuesta no se pretende que los estudiantes aprendan sólo arte o bien que aprendan geometría para dibujar. El propósito es que los alumnos observen la vinculación entre ambas, que presten atención al espacio en el que se desenvuelven desde otra perspectiva, y en la medida que sea posible, mejorar el desempeño de los alumnos en Matemáticas y desarrollar placer por estudiarlas.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Capítulo 3. Metodología

En el presente capítulo se describe la metodología para el análisis de las experiencias geométricas del alumno y el desarrollo de la habilidad de dibujo en primaria y secundaria así como para la elaboración de las actividades que se incluyen en la propuesta. Se constituye por los siguientes apartados: Metodología para el análisis del desarrollo de la Habilidad de Dibujo y Metodología para la elaboración de las actividades de la propuesta aplicando el modelo de Van Hiele

3.1. Metodología para el análisis de las experiencias geométricas de los alumnos y del desarrollo de la Habilidad de Dibujo

En este apartado se expone la metodología para el análisis de la habilidad de Dibujo en la primaria y secundaria, dicho análisis ha permitido la construcción de las actividades de la propuesta porque la del dibujo es la habilidad más relacionada con el arte y sirve como antecedente para conocer qué saben los alumnos sobre construcciones con regla y compás.

Por lo tanto, antes de presentar la propuesta, se hizo el análisis de cómo se pretende desarrollar en primaria y secundaria, la habilidad de dibujo por medio del contenido matemático antes mencionado y que es la base para el estudio de simetría y semejanza.

Para el análisis se tomó como referente las sub-habilidades que se desarrollan de acuerdo con Ana Bressan: representación, reproducción y construcción, las cuales se definieron en el capítulo anterior. Sin embargo para este analisis fueron insuficientes estas clasificaciones debido a la dificultad de las actividades, por lo que se subdividieron en simple, media, compleja e intermedia.

Por ejemplo, no es lo mismo imaginar un cubo de diferentes tamaños (representación simple) que imaginar su forma desarrollada (representación compleja). También es diferente construir un cubo (construcción simple) de un dodecaedro (construcción compleja).

También se establecieron niveles intermedios entre representación-reproducción, reproducción-construcción o representación-construcción. Esto se debe a que algunas de las reproducciones suelen ser muy complejas y a su vez una construcción puede ser muy simple, por lo que una habilidad puede estar entre una reproducción y una construcción. Para esta propuesta se elaboró y se aplicó las clasificaciones simple, media y compleja.

Después de establecer los niveles de cada habilidad, se creó la siguiente simbología para poder elaborar gráficas que mostraran el desarrollo de las habilidades antes mencionadas. No se tomaron en cuenta los casos intermedios debido a su dificultad de comprensión.

Símbolo	Significado	Símbolo	Significado
1	Representación simple		
1.3	Representación media		
1.6	Representación compleja	1º	Primer año de primaria
2	Reproducción simple	2º	Segundo año de primaria
2.3	Reproducción media	3º	Tercer año de primaria
2.6	Reproducción compleja	4º	Cuarto año de primaria
3	Construcción simple	5º	Quinto año de primaria
3,3	Construcción media	6º	Sexto año de primaria
3.6	Construcción compleja		

Se analizaron las actividades planteadas en relación con las construcciones con regla y compás en los programas de estudio y libros de texto gratuito. De 1º a 6º grados de primaria, se estudió el Eje Temático de Geometría y de 1º a 3º grados de secundaria se examinó el Eje Temático de Forma, medida y espacio. El resultado que se obtuvo se registró en una tabla como la siguiente.

Grado______ Nivel Escolar____

Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Tarea			

3.2. Metodología para la elaboración de las actividades de la propuesta aplicando el Modelo Van Hiele

La revisión documental; por una parte de teorías pedagógicas como la del Modelo Van Hiele y la de Vinner, y por otra las razones para estudiar geometría y la vinculación entre arte y matemáticas; así como las personalidades de Escher y Leonardo Da Vinci también constituyen la base para la elaboración de las actividades de esta propuesta.

Para diseñar las actividades de la propuesta, se tomó primero como punto de partida los niveles y fases del Modelo Van Hiele. Se analizaron las actividades y recomendaciones planteadas para los contenidos de simetría y semejanza en los libros de Matemáticas y el paquete curricular proporcionado por la SEP.

Posteriormente, en algunos casos se reubicaron las actividades de los programas en cada uno de los niveles y fases planteados por el modelo Van Hiele, en otros casos se plantearon tareas nuevas. Se propusieron tareas para cada nivel de acuerdo con los siguientes objetivos y actividades:

Nivel 0: Caracterizar y clasificar

Nivel 1: Comparar y reproducir

Nivel 2: Construir y definir

Como se mencionó al principio, sólo se tomaron en cuenta los tres primeros niveles del Modelo Van Hiele debido a la complejidad de los temas y el nivel educativo elegido. Además, la propuesta se estructuró para alumnos de 3er grado de secundaria puesto que en este nivel se estudian los contenidos de simetría y semejanza.

Se proponen los temas de Teselado y Sección Áurea para estudiar los contenidos de simetría y semejanza, conocer la vinculación entre arte y matemáticas y para repasar contenidos como las construcciones con regla y compás, figuras geométricas, proporción, etc. Estos temas artísticos no son vistos en secundaria, por lo que resultará atractivo para los estudiantes por su carácter novedoso y creativo.

Posteriormente, las actividades que se proponen y que responden a objetivos y niveles de razonamiento, se han desglosado en cada una de las cinco fases planteadas por el modelo Van Hiele. Se establecieron los conocimientos previos, los contenidos que se revisarán y los recursos materiales para cada tema.

Primero se estableció los objetivos generales y específicos del tema. Para los recursos materiales se buscaron aquellos más accesibles tanto para el docente como para el alumno, también se sugieren opciones en caso de no contar ellos así mismo se indicó el modo de trabajar, ya sea individual, en equipo o grupal.

Durante la elaboración y reubicación de actividades para cada fase se mencionan sugerencias, no sólo para los materiales sino para las posibles respuestas de los alumnos y dificultades que se podrían presentar, así como actividades para prevenir posibles dudas o ayudar a los alumnos sin darles directamente la respuesta.

Para las actividades se consideraron obras de arte de acuerdo con el tema y contenidos matemáticos a estudiar. En Teselados y simetría se escogieron obras de Escher mientras que para el tema de Sección Áurea y semejanza se eligieron algunos obras de Leonardo Da Vinci. Las actividades y sugerencias se presentan en el capítulo 5.

Se consideró la duración de una clase de la asignatura de Matemáticas en la secundaria para evitar la interrupción de alguna actividad o de un nivel de razonamiento. Además la propuesta se aplicó a dos grupos de alumnos de diferente generación de la Universidad Pedagógica Nacional de 8º semestre del campo Educación Matemática de la Licenciatura de Pedagogía. A continuación se muestra la estructura de la propuesta

Cuestión problemática	Los teselados		
Tarea	Nivel 0 Polígonos regulares	Nivel 1 Polígonos irregulares	Nivel 2 Formas diversas
Tareas específicas	Teselado con un tipo de polígono	Teselados con pentágonos	Teselados con gatos
Concepto del teselado aprendido	1ra característica del teselado: no dejar huecos ni sobreponerlas	El ángulo como elemento central de una figura	Teselados de Echer
	2da característica del teselado: repetición de una sólo figura	Teselados de figuras diversas	
	Sólo con 3 tipos de polígonos regulares se puede teselar		
Concepto geométrico aprendido	Polígonos regulares convexos y cóncavos	El ángulo	Simetría axial y con respecto a un punto
		La triangulación para encontrar el ángulo interno	Traslación, rotación y reflexión

Cuestión problemática	Sección áurea		
Tarea	Nivel 0 Sección áurea en el arte	Nivel 1 Sección áurea en la naturaleza	Nivel 2 Sección áurea en el cuerpo humano
Tareas específicas	Elegir rectángulos	Observar las flores y estrellas de mar	Analizar el rostro de la Gioconda
Concepto de la sección áurea aprendido	Rectángulo dorado	Pentágono y estrella de cinco picos	Elipse y triángulo dorado
Concepto geométrico aprendido	Construcciones con regla y compás	Semejanza	Criterios de semejanza
	Figuras geométricas: el rectángulo	Construcciones con regla y compás	

CAPÍTULO 4. ANTECEDENTES DE LA PROPUESTA. LA PRESENCIA DE LA HABILIDAD DE DIBUJO EN PLANES Y PROGRAMAS.

Capítulo 4. Antecedentes de la propuesta. La presencia de la habilidad de dibujo en planes y programas.

En seguida se presentan los resultados que se obtuvieron del análisis del desarrollo de la habilidad de Dibujo: representación, reproducción y construcción en primaria y secundaria. Este capítulo se divide en los siguientes apartados: Experiencias geométricas de los alumnos en primaria y Experiencias geométricas de los alumnos en secundaria

4.1. Revisión de las habilidades por desarrollar y Experiencias geométricas de los alumnos en primaria

Se consultó y se tuvo como apoyo la página http://miayudante.upn.mx para la revisión y análisis de las habilidades por desarrollar en primaria. *Mi ayudante* es un auxiliar didáctico de matemáticas para el maestro de primaria elaborado por la Universidad Pedagógica Nacional, con base en los libros de texto.

En los libros de texto de primero a tercer grado de primaria no se especifican los instrumentos geométricos para la realización de las tareas de trazado. Solo al final del libro de tercer grado, en la lección 48 se solicita el empleo del compás y la regla sin graduación.

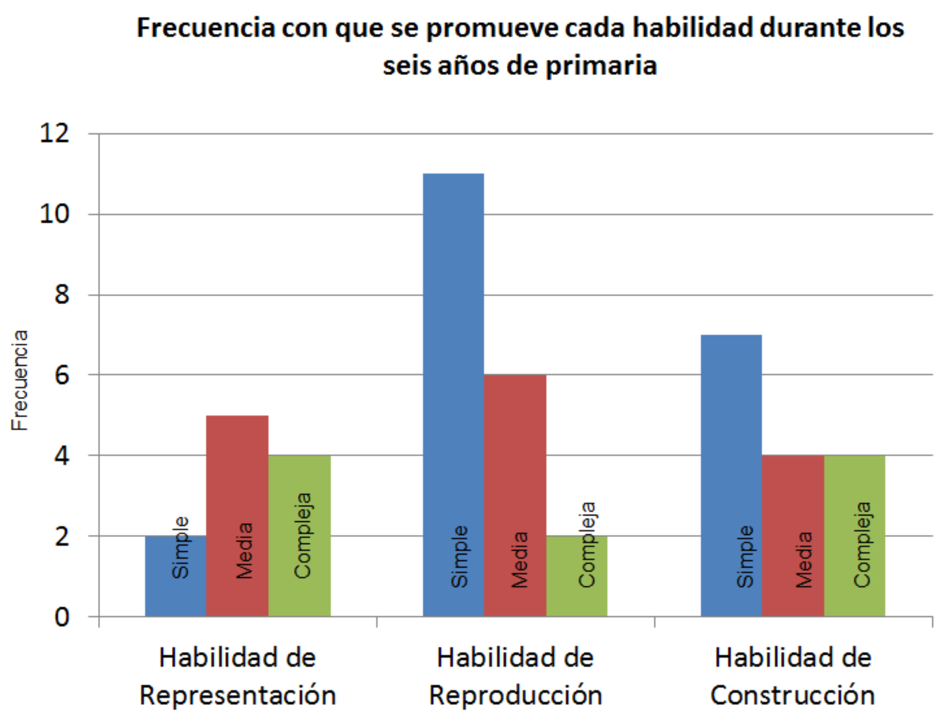
A partir de cuarto se utiliza la regla con graduación y en la lección 49 de este grado se utilizan las escuadras, el compás y el transportador. Es importante destacar que durante los seis años de primaria, las actividades planteadas y los instrumentos utilizados promueven más el desarrollo de la reproducción figuras a mano alzada o libre.

En primero son 128 lecciones, dos de ellas se enfocan al fomento de la habilidad antes mencionada. En segundo son 117 lecciones y en uno de ellas se propone la práctica de dicha habilidad. En tercero son 89 lecciones y seis de ellas con orientaciones para desarrollar de la misma habilidad. En cuarto hay 91 lecciones, ocho de ellas se enfocan al fomento de la Habilidad de Dibujo. En quinto, 87 lecciones y en tres de ellas se propone la práctica de esta habilidad. En sexto son 87 lecciones y tres de ellas con orientaciones para desarrollar la habilidad.

La revisión detallada de las habilidades que se pretende desarrollar en cada grado se presenta en el Apéndice A “Revisión de las habilidades por desarrollar en primaria y secundaria”. Esta revisión puede ser de mucha utilidad para los docentes, pues de esta manera puede guiarse de cómo preparar su clase conforme al libro de texto, ya que se presenta una forma resumida y clara.

4.1.1. Resultado y análisis de las habilidades por desarrollar en primaria

Las habilidades de dibujo se fomentan a partir de la primaria, periodo cuando los alumnos comienzan a estudiar formalmente geometría. Con el fin de averiguar y confirmar el estudio de éstas, se analizaron los libros de texto de 1º a 6º de este nivel educativo. A partir del análisis de los libros de primaria se elaboró la siguiente gráfica que presenta las habilidades a desarrollar.



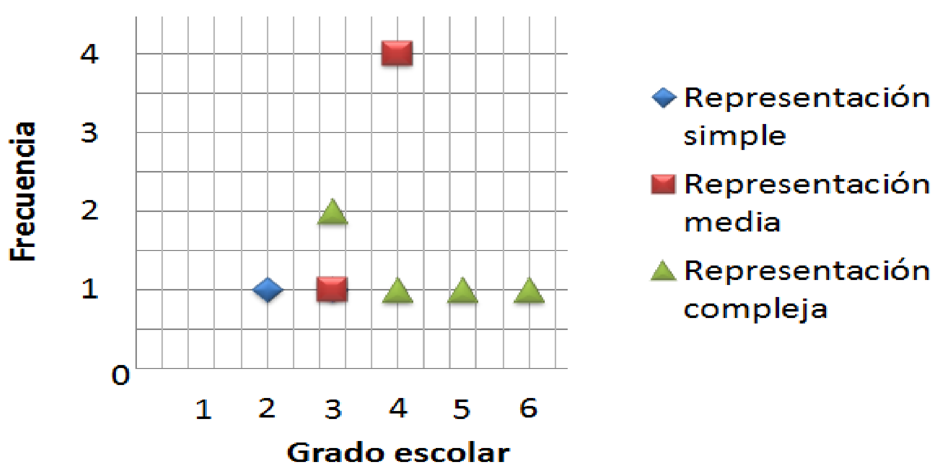
Como se puede observar, la frecuencia de la habilidad *Reproducción simple* es la mayor (11 veces), lo cual indica que el desarrollo de ésta es la que predomina en la primaria, posteriormente le siguen la *Construcción simple* (7 veces) y la

Reproducción media (6 veces). En general, las sub-habilidades de *Dibujo* se desarrollan de forma desequilibrada, pues se da más prioridad a unas sobre otras. La mayoría de las actividades trata de calcar las imágenes. En ocasiones se pretende que el alumno construya, pero el ejercicio propuesto es difícil de realizar con lo que se ha aprendido. Por ejemplo, en la lección 48 de tercer grado, se enseña a medir y trazar con regla y compás, pero en los ejercicios puestos se pide reproducir rectas de distinto tamaño y al final se pide construir una estrella.

Faltaría ver lo que realmente se enseña en las aulas, el libro es una guía, el docente puede tomar referencias y apoyarse en él, o bien estructurar completamente la clase a partir de éste. A continuación, utilizando la misma simbología anterior, se muestra el fomento individual de estas habilidades de primero a sexto año de primaria:

Desarrollo de la Habilidad de Representación

Habilidad	Representación		
Grado	1 Simple	1.3 Media	1.6 Compleja
1º	0	0	0
2º	1	0	0
3º	1	1	2
4º	0	4	1
5º	0	0	1
6º	0	0	1

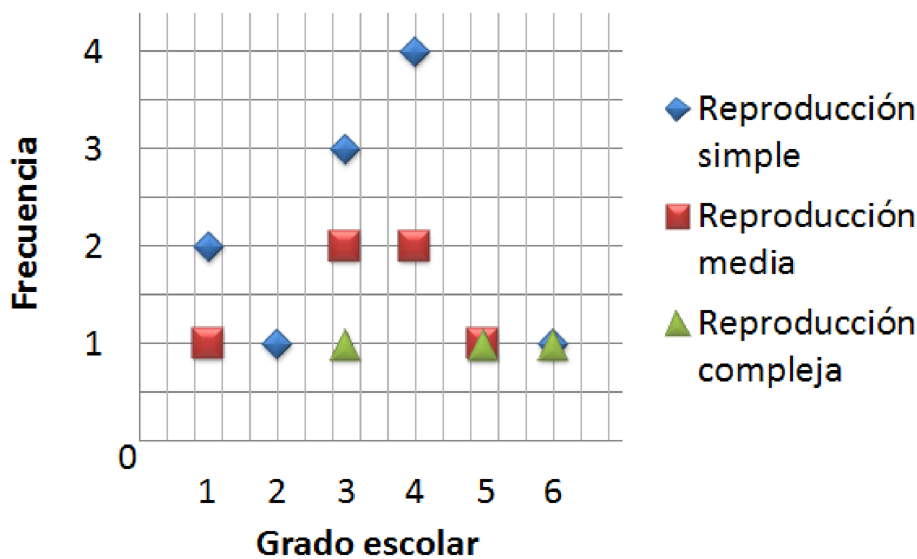


La forma en que se pretende desarrollar la *Habilidad de Representación* no es uniforme, en la gráfica anterior se puede observar que la *Representación Media* es la menos constante, esta se utiliza sólo en tercero y cuarto grados, en los posteriores hay un declive pues no se promueve, en consecuencia se deja trunca el desarrollo de la Habilidad de Dibujo.

En la *Representación Simple* y la *Representación Compleja*, no se muestra un desfase tan evidente como en la *Representación Media*. Sin embargo, ambas presentan una caída a partir de 4º año, incluso tanto la habilidad *Representación Simple* como la *Representación Media* no se desarrollan en 5º y 6º mientras que la *Representación Compleja* si, aunque muy poco.

Desarrollo de la Habilidad de Reproducción

Habilidad	Reproducción		
	2	2.3	2.6
Grado	simple	media	compleja
1º	2	1	0
2º	1	0	0
3º	3	2	1
4º	4	2	0
5º	0	1	0
6º	1	0	1

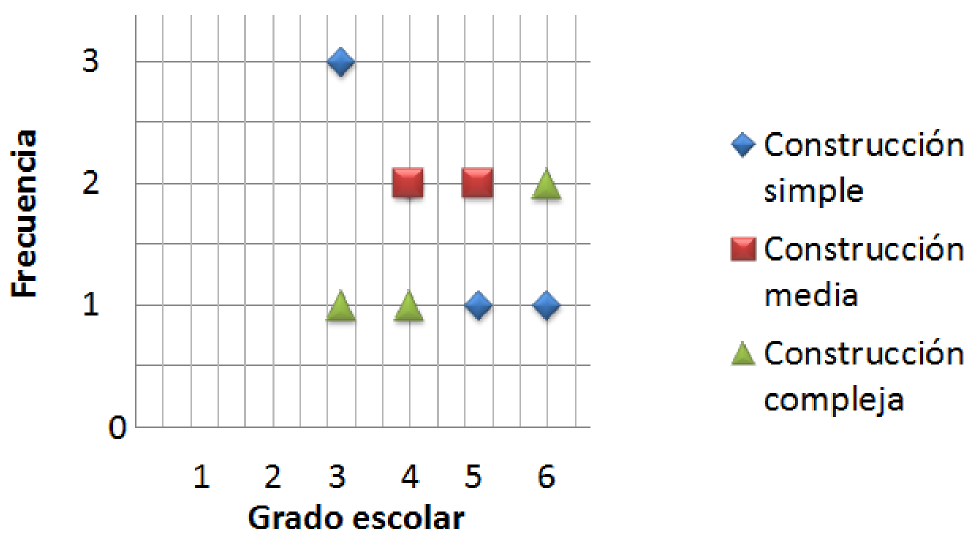


La habilidad de *Reproducción* es la que más se promueve en la primaria, se muestra un poco más de uniformidad y también presenta un declive en los dos últimos años, sobre todo la *Reproducción Simple*, se trabaja durante los seis años. Es evidente cómo en 4º y 5º grados decae. El desarrollo de 1º a 4º es más o menos progresivo, en 5º no se trabaja, y en 6º se aborda un poco esta habilidad.

La *Reproducción Compleja* es la que menos se trabaja, sólo en dos sesiones durante los seis años en la primaria, en tercero y en sexto. En este caso se puede decir que no hay declive pero tampoco hay continuidad. La *Reproducción Media*, tiene el declive más notorio. En 5º grado la *Reproducción Simple* cae pero en 6º se vuelve a retomar. La *Reproducción Media*, que se trabaja en 1º, en 2º no, en 3º nuevamente se trata, en 4º y en 5º muy poco y en 6º no se práctica.

Desarrollo de la Habilidad de Construcción

Habilidad	Construcción		
Grado	3	3.3	3.6
	simple	media	compleja
1º	0	0	0
2º	0	0	0
3º	3	0	1
4º	2	2	1
5º	1	2	0
6º	1	0	2



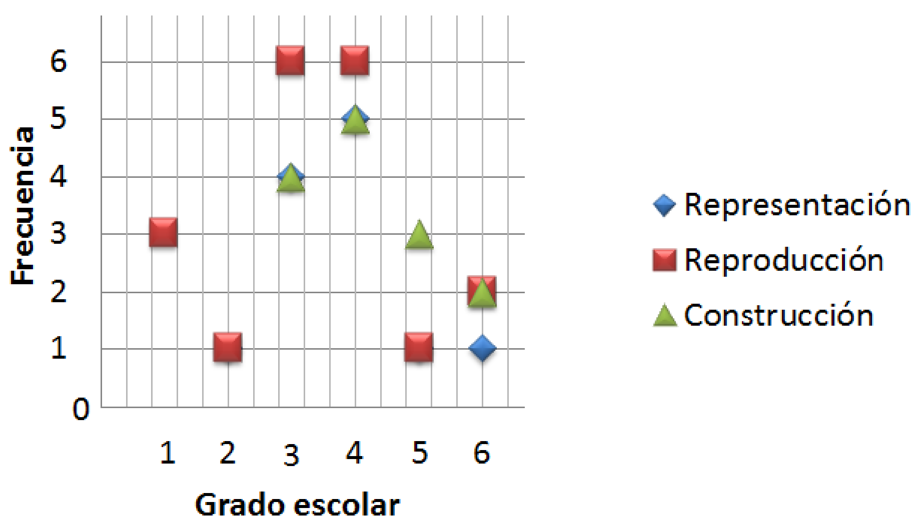
El desarrollo de la habilidad de *Construcción* es el menos equilibrado, con más declives y la menos practicada junto con la habilidad de *Representación*. La *Construcción Simple* se comienza a trabajar hasta 3º, a deferencia de las demás habilidades, se trabaja mucho, sin embargo en 4º año no se promueve, en 5º y 6º mantienen un equilibrio, pero después de la suspensión en 4º la cual ya ha afectado al alumno.

La *Construcción Media* sólo se trabaja en 4º y 5º de forma equilibrada, pero en 6º no se fomenta y ello representa un atraso. Mientras que la *Construcción Compleja* muestra un progreso, pero en 5º no se trata. En 6º sí se trabaja con mayor fuerza.

Sin duda, las habilidades menos trabajadas son la de *Construcción* y *Representación* mientras que la *Reproducción* es la que más se aborda, aunque también tiene varios declives de un año a otro. A continuación se presenta una gráfica en donde se muestra el fomento de cada habilidad con respecto a las otras.

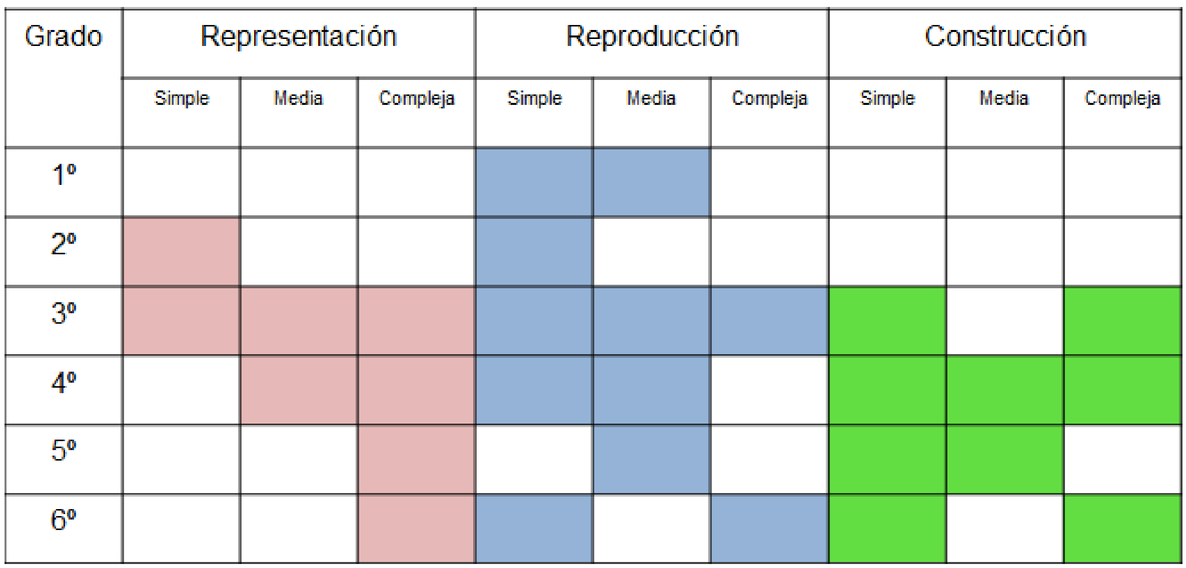
Desarrollo de las Habilidades

Grado	Representación	Reproducción	Construcción
1º	0	3	0
2º	1	1	0
3º	4	6	4
4º	5	6	5
5º	1	1	3
6º	1	2	3



La gráfica muestra que las tres habilidades tienen desfases en los dos últimos años, mientras que en 3º y 4º año se promueve más frecuente. De igual forma, las tres habilidades muestran un progreso de 2º a 3º y una caída de 4º a 5º. La habilidad *Reproducción* muestra mayor progreso de 2º a 3º y la *Representación* y *Construcción* tiene un progreso semejante. En lo que respecta a la secuencia de cómo se van estudiando estas habilidades de Dibujo, se observa lo siguiente.

Secuencialidad del estudio de las habilidades en primaria



El color rosa simboliza la *Habilidad de Representación*, en este caso podemos observar una secuencia uniforme y gradual, pues se comienza desde representaciones simples en segundo año y representaciones complejas en sexto.

La secuencia del estudio de la *Habilidad de Reproducción*, el color azul, es más uniforme, la reproducción simple y media se estudia casi en todos los grados. Pero es la menos gradual, pues hay algunos saltos como en sexto, se estudian reproducciones simples y complejas, pero no la Reproducción media y ésta es importante para el puente entre lo simple y lo complejo.

Finalmente, la secuencialidad del estudio de la *Habilidad de Construcción*, color verde, también es un poco más uniforme, presenta las mismas características de la de reproducción. Se empieza a estudiar desde tercero de primaria. Es importante destacar que las tres habilidades están más presentes entre tercero y cuarto grados.

4.2. Revisión de las habilidades por desarrollar y Experiencias geométricas de los alumnos en secundaria

Para la revisión y análisis de los cambios de las habilidades por desarrollar en secundaria se consultó la siguiente bibliografía:

Almaguer, Guadalupe (2007). *Matemáticas 1*, México: Limusa, pág. 7-227
Briseño, Luis y et. Al. (2008). *Matemáticas 2*, México: Santillana, pág. 3-333
Castrejón, Apolo y Castrejón, Ortos (2009). *Matemáticas 3*, México: SM 7-247

Estos libros se utilizaron en el ciclo escolar 2010-2011 en la Escuela Secundaria Altepecalli, núm. 82 para trabajadores. Cabe recordar que el contenido de las tablas se basan en los libros de texto vigentes pero se añade los rubros "Instrumentos" y "Habilidad por desarrollar" los cuales dan sustento a la propuesta que se presenta en este trabajo recepcional.

En relación con los instrumentos que se utilizarán, se pide el uso estricto del juego de geometría y otros objetos como tarjetas, clips, hilos, entre otros que puedan servir como instrumentos para trazar. Al igual que en primaria, los trazos que realizan son de figuras planas, se utiliza muy poco la representación de cuerpo geométricos.

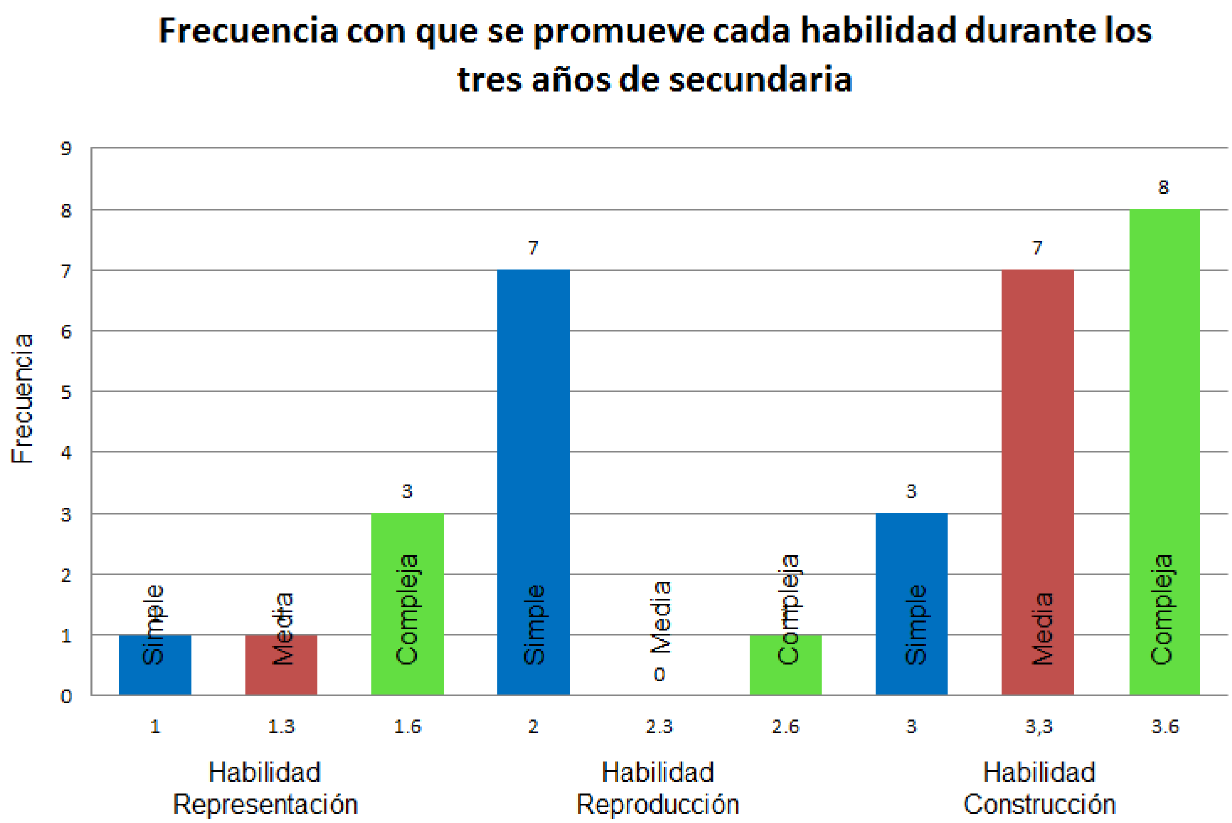
Otro dato importante es el número de lecciones, en los cuales se promueven la Habilidad de dibujo. En primero son 38 lecciones, cuatro de ellas se enfocan al fomento de la habilidad antes mencionada. En segundo son 24 lecciones y en seis de ellas se propone la práctica de dicha habilidad. En tercero son 14 lecciones y cuatro de ellas con orientaciones para desarrollar de la misma habilidad.

La revisión detallada de las habilidades que se pretenden desarrollar en secundaria, así como los instrumentos y lecciones utilizadas, se presenta en el apéndice A "Revisión de las habilidades por desarrollar en primaria y secundaria". De manera general, la habilidad que se pretende desarrollar más es la de Construcción.

4.2.1. Resultado y análisis de las habilidades desarrolladas en secundaria

En secundaria se pretende que el alumno ya esté más preparado para el manejo de las habilidades que conforman la Habilidad de Dibujo, sin embargo, como se vio en el apartado anterior, en primaria el fomento del desarrollo de éstas no es proporcional debido a las desfases en el tratamiento de los temas.

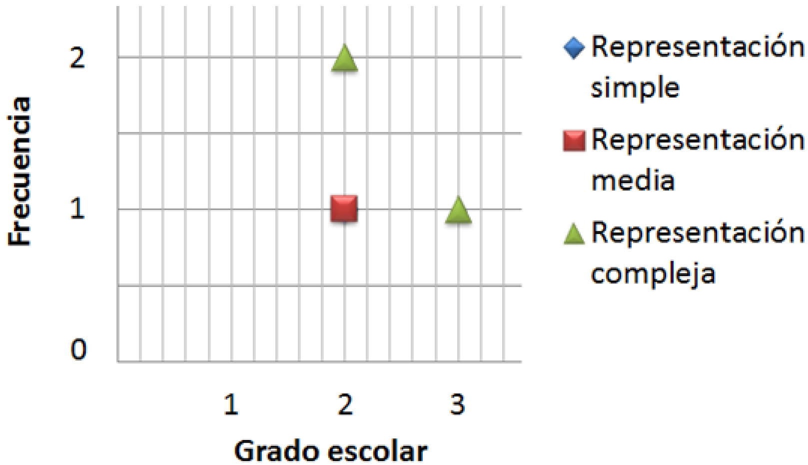
Con el mismo propósito de ver cómo se promueve el desarrollo y cambian estas habilidades en la secundaria, se revisaron los libros de los tres grados de secundaria, los resultados son los siguientes:



A diferencia de la primaria, en secundaria el énfasis se da en la *Habilidad de Construcción*. Se puede decir que a partir de una revisión general, existe un progreso de esta habilidad, sin embargo aún falta analizarla aisladamente de las demás habilidades, los resultados son los siguientes:

Desarrollo de la Habilidad de Representación

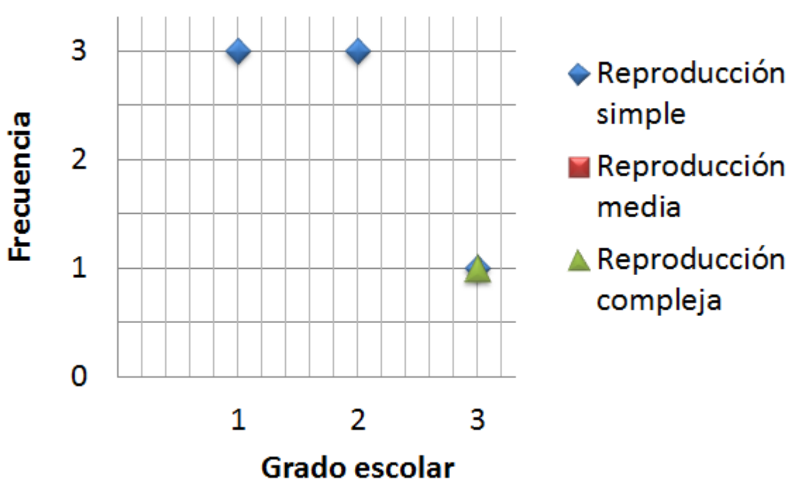
Habilidad de Representación			
Grado	1 simple	1.3 media	1.6 compleja
1º	0	0	0
2º	1	1	2
3º	0	0	1



La *habilidad de Representación* muestra muy poco progreso, de las tres habilidades es la más baja, sólo en segundo año se promueve esta habilidad. En primero no se aborda ninguno de los subniveles.

Desarrollo de la Habilidad de Reproducción

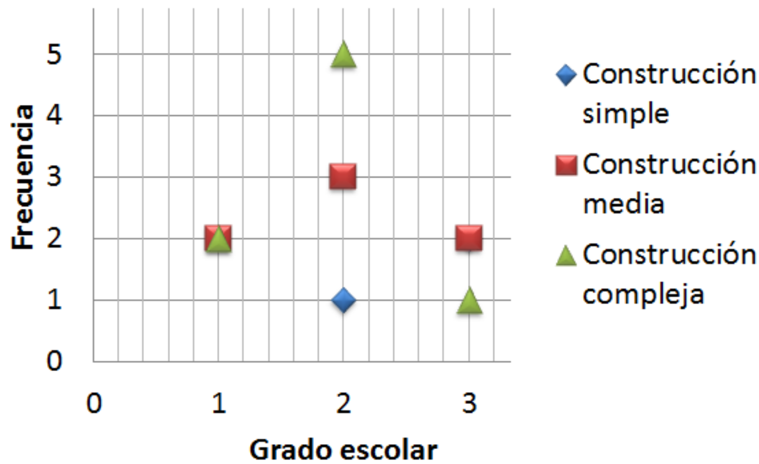
Habilidad de Reproducción			
Grado	2 simple	2.3 media	2.6 compleja
1º	3	0	0
2º	3	0	0
3º	1	0	1



La *Habilidad de Reproducción* también muestra un retroceso. La *Reproducción* Media no se estudia en ningún grado y la *Reproducción Compleja* escasamente se estudia en tercer grado. La *Reproducción Simple*, a pesar de ser aplicada tanto como la Construcción, en tercer grado presenta una caída.

Desarrollo de la Habilidad de Construcción

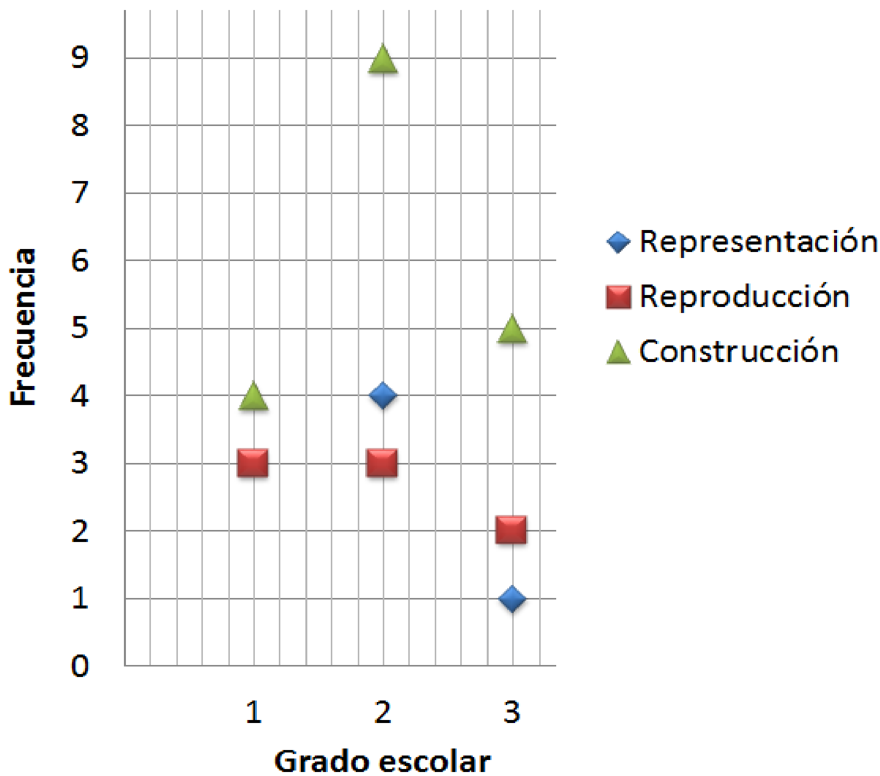
Habilidad de Construcción			
Grado	3 simple	3.3 media	3.6 Compleja
1º	0	2	2
2º	1	3	5
3º	2	2	1



En la secundaria el hincapié se da en la *Habilidad de Construcción*. Existe un ligero progreso de los tres niveles de esta habilidad en segundo año. La *Construcción Compleja* es la que presenta mayor progreso, aunque en tercero baja mucho en comparación con el del segundo grado, incluso en primer grado hay mayor énfasis. A continuación se presenta una gráfica en donde se muestra el desarrollo de cada habilidad con respecto a las otras.

Desarrollo de las Habilidades

Grado	Representación	Reproducción	Construcción
1º	0	3	4
2º	4	3	9
3º	1	2	5



Con esta gráfica se muestra cómo las habilidades que componen a la *Habilidad de Dibujo* tienen una caída al final de la secundaria. Tanto la habilidad de *Representación* como *Construcción* tienen un desfase más notorio, mientras que la habilidad de *Reproducción* tiene una caída ligera puesto que se mantiene en 1º y 2º grado y en tercero sólo baja un punto. En lo que respecta a la secuencia de cómo se van estudiando estas habilidades de Dibujo, se observa lo siguiente.

Secuencialidad del estudio de las habilidades en secundaria

Grado	Representación			Reproducción			Construcción		
	Simple	Media	Compleja	Simple	Media	Compleja	Simple	Media	Compleja
1º									
2º									
3º									

La secuencialidad de las habilidades en secundaria varía un poco a la de primaria. La *Habilidad de Representación* sigue siendo gradual, pero se estudia a partir de segundo año. La de *Reproducción* se estudia desde primero, pero se enfoca más a la simple y no hay una secuencia como tal, pues en tercer grado nuevamente hay un salto de reproducción media a reproducción compleja. La construcción parecer ser que es la más gradual y uniforme.

Como muestran los resultados, las construcciones con regla y compás y la *Habilidad de Dibujo* están presentes durante los 9 años de primaria y secundaria. En primaria es más notorio que en secundaria, se encuentran explícitamente este contenido y esta habilidad en los objetivos, recomendaciones y actividades de los libros de texto, programa y planes de estudio.

En secundaria las construcciones con regla y compás no son tan claras, se encuentran en los objetivos de los planes y programas de estudio, pero no hay actividades exclusivas para este contenido, sin embargo en las actividades de mediatrices, bisectrices u otras rectas, las construcciones están presentes.

La habilidad más desarrollada durante los 9 años de primaria y secundaria es la de *Reproducción*, ésta es muy útil para poder realizar los teselados y algunas actividades de la sección dorada, lo cual indica que los conocimientos previos de los estudiantes son suficientes para que el alumno realice las actividades de esta propuesta,

Con esta propuesta se pretende que el alumno participe en la adquisición de los conocimientos, por lo tanto se opone a las prácticas de la educación tradicional como la memorización y reproducción de algoritmos sin analizarlos y justificarlos, por ello se utiliza el modelo de Van Hiele en esta propuesta, para que el alumno avance paso a paso, desde reforzar sus conocimientos en el nivel 0 hasta poder analizarlos y justificarlos en el nivel 2.

CAPÍTULO 5: SIMETRÍA Y SEMEJANZA MEDIANTE EL TESELADO Y LA SECCIÓN ÁUREA EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA. (PROPUESTA PEDAGÓGICA BASADA EN EL MODELO VAN HIELE)

Capítulo 5. Simetría y semejanza mediante el teselado y la sección áurea en tercer grado de secundaria. (Propuesta pedagógica basada en el modelo van hiele)

En este capítulo se presenta la propuesta pedagógica para simetría y semejanza con los temas de Teselados y Sección Áurea. Se trata de que a partir de estos temas artísticos se estudien contenidos matemáticos del paquete curricular que proporciona la SEP. El capítulo está constituido por los siguientes apartados: Estrategia metodológica, Actividades propuestas para el tema de teselados, Actividades propuestas para el tema de sección áurea y Evaluación de los temas

5.1. Estrategia de trabajo

En esta propuesta pedagógica se sugiere el trabajo en equipo para la realización de tareas. El trabajo en equipo fomenta la cooperación entre alumnos para cumplir los objetivos propuestos, tanto académicos como personales y sociales; es decir, se ayudan unos a otros para conseguir sus metas, se preguntan y resuelven dudas entre ellos y lo que haga uno en particular repercute sobre los demás.

Los alumnos no solo aprenden porque el profesor les enseña, sino también por la interacción que se produce entre ellos, tanto lo que ha aprendido de los contenidos como a trabajar juntos, es decir, este último se convierte en un contenido escolar más.

En el área de Matemáticas, la enseñanza no solo se basa en la memorización de algoritmos, sino en la reflexión sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas. El grupo permite la confrontación de puntos de vista y opiniones, ayuda a relativizar la perspectiva propia y conduce al logro de una objetividad creciente.

La cooperación aporta a la educación:

a) Como estrategia para el desarrollo cognitivo, favorece procesos intrapersonales de asimilación a partir de situaciones de coordinación y acciones que requieren la comunicación entre las personas que participan en el trabajo.

b) Como metodología, para la interacción, dar o recibir ayuda no mejora el aprendizaje, es la necesidad consciente de comunicar las ideas propias y la de esforzarse en comprender las demás e integrarlas.

c) Como organización, el trabajo favorece hábitos meta-cognitivos, como la conciencia de sí mismo y conocimientos propios, y de autoevaluación.

d) Como factor de socialización, favorece el ejercicio de hábitos sociales y posibilita la creación de conciencia social como la integración, la autonomía de juicio moral y ético.

La mejor ayuda que puede proporcionar el docente al alumno debe ser en forma natural, ponerse en su lugar, ver desde el punto de vista del alumno, tratar de comprender lo que le pasa por la mente y plantear una pregunta o indicar algún camino que pudiese ocurrírsele al propio estudiante.

El maestro puede hacer la misma pregunta e indicar el mismo camino una y otra vez, puede cambiar el vocabulario y hacer la misma pregunta en diferentes formas. El propósito de estas preguntas es concentrar la atención del alumno sobre la incógnita. Preguntas y sugerencias tienen el mismo fin, tienden a provocar la misma operación intelectual.

5.2. Actividades propuestas para el tema de teselados

El tema de los teselados es poco considerado en la escuela para el estudio de contenidos matemáticos. Se utiliza en el tema de mosaicos pero se reduce como un contenido para practicar las construcciones con regla y compás, de forma mecanizada y sin analizar la construcción matemática presente en ellos. Este apartado se organiza con los siguientes puntos: Conocimientos previos, Recursos materiales para el tema, Objetivos del tema y actividades propuestas.

5.2.1. Conocimientos previos

- Figuras geométricas y sus propiedades
- Álgebra
- Construcciones con regla y compás
- Tipos de ángulos (agudo, recto, obtuso, llano, perigonal)
- Ejes de simetría

5.2.2. Recursos materiales para el tema

- Material de apoyo para realizar actividades
- Proyector para la presentación de ejemplos de teselados, en caso de no contar con proyector, pueden ser imágenes en papel de ejemplos de teselados
- Juego de geometría
- Papel cebolla para ilustrar los ejes de simetría axial en los teselado
- Papel grueso o resistente: catoncillo, cartulina, foamy, entre otros
- Colores, no son necesarios pero se recomienda para un trabajo más colorido y creativo
- Los materiales de uso cotidiano: pizarrón, gises de colores o marcadores, lápiz, etc.

5.2.3. Objetivos del tema y Actividades propuestas

Objetivo: Estudiar el contenido de “simetría” y “transformaciones isométricas” para desarrollar las habilidades de Representación, Reproducción y Construcción por medio del análisis matemático de los teselados y lograr una vinculación entre arte y matemáticas.

Los estudiantes:

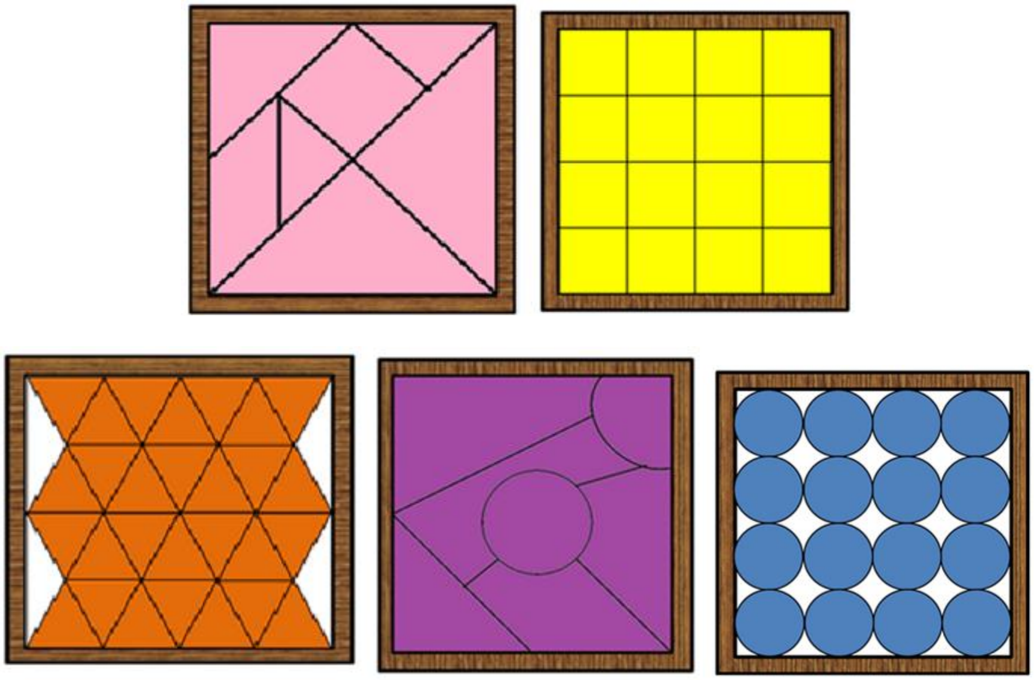
- Estudiarán los contenidos geométricos de simetría e isometrías
- Conocerán varios ejemplos de teselados de figuras geométricas
- Conocerán teselados de formas, por ejemplo de animales, personas o cosas
- Conocerán las obras de arte de varias épocas en donde el teselado es un recurso y atractivo visual de algunas obras
- Identificarán y caracterizarán las propiedades de los teselados

Dado que se pretende elaborar una propuesta desde el modelo Van Hiele, se consideran los niveles y fases de dicho modelo.

PRIMERA SESIÓN Nivel 0: visualización y reconocimiento. Razonamiento y visión global de los teselados
Objetivo del nivel 0: <u>Caracterizar</u> y <u>clasificar</u> formas geométricas mediante prototipos visuales. Los alumnos: - Identificarán las características observables de un teselado - Reconocerán la importancia del arte - Descubrirán los teselados con polígonos regulares

En el nivel 0 se recapitula el contenido de figuras geométricas, por ello una de las actividades es identificarlas. Por medio de esta actividad los alumnos encontrarán las características visuales de un teselado, para lo cual se siguiere que el docente lleve el material siguiente.

El material que se presenta es manipulable y sencillo de elaborar, consta de figuras regulares e irregulares de foamy, cartoncillo o cartulina. Si el docente no cuenta con el material, puede dejar como tarea a los alumnos realizar las siguientes plantillas y en la clase intercambiarlas.



Como se muestra, son 5 formas de rellenar un espacio: dos de ellas pertenecen a teselados, una de cuadrados y otro de triángulos, otro a un tangrama, uno más de figuras irregulares, y finalmente una de círculos, esto con el fin de diferenciar entre teselados y otros tipos de recubrimientos. De preferencia utilizar los colores marcados para identificar cada recubrimiento.

Dependiendo de la cantidad de material que se posee y de la cantidad de alumnos, el docente decidirá si los alumnos trabajarán en equipo o individualmente. Como en la mayoría de las secundarias los grupos son numerosos y los recursos pocos, es recomendable trabajar en equipo.

Cómo las plantillas son de sólo cinco formas diferentes, estas se pueden repetir dos o tres veces, por ejemplo, si se repiten tres veces cada material se contará con 15 juegos. Dependiendo de los juegos que se tengan se formarán el número de equipos, en este caso, si son 15 juegos, 15 equipos de tres o cuatro personas, según el número de alumnos.

Otra opción, para trabajar la primera fase del tema de teselados, es modificar el tamaño de las plantillas para que cada equipo tenga una diferente. Las dimensiones se aumentarían, pues como el material pequeño dificultaría la actividad, o bien, se puede hacer otras plantillas pero estas no deben ser muy complicadas para que facilite el trabajo y no ocupar más tiempo de lo necesario.

Fase 1: INFORMACIÓN

ACTIVIDAD 1: El objetivo es que el alumno observe cómo con algunas figuras no se puede cubrir un espacio. El docente debe proporcionar el material y pedir a los alumnos que recubran el primer cuadro con éste. Pedirá dibujar el resultado en los siguientes cuadritos. Al final de la actividad el maestro preguntará al grupo si se pudo rellenar el cuadro con todas las figuras, de esta manera cada equipo expondrá sus resultados.

Cuando cada equipo o alumno tenga sus plantillas, el docente dará las siguientes instrucciones: las reglas son recubrir los espacios sin dejar huecos y sin sobreponer las figuras. En esta fase el docente debe sólo considerar el vocabulario cotidiano, como cubrir o rellenar en lugar de teselar o figuras en lugar de polígonos. La actividad es la siguiente: *Sigue las instrucciones de tu maestro, cubre un cuadrado con las plantillas que se proporcionó y dibuja en los siguientes cuadros cómo quedó cubierto.*

¿Se pudo rellenar el espacio con todas las figuras?

Con esta actividad se pretende introducir a los alumnos al tema de teselados, la cual consiste en rellenar un espacio con las figuras que se proporcionaron anteriormente. Cuando hayan terminado, contestarán grupalmente la pregunta *¿Se pudo rellenar el espacio con todas las figuras?*

Se espera que la mayoría de los equipos contesté que si, sin embargo, los equipos a los que les tocaron los círculos, su respuesta será negativa, pues en este caso no se puede rellenar el espacio, ya que entre figura y figura quedan huecos, aun sobreponiéndolas.

Posiblemente algunos alumnos hayan hecho anteriormente el recubrimiento pero sin reflexionar sobre sus propiedades matemáticas, el docente indicará que un teselado es el recubrimiento de un espacio. En algunos casos, el alumno puede tener problemas al recubrir un espacio, por ello se recomienda que las plantillas no sean muy complicadas, pero en caso de seguir el problema, se recomienda que interactúen y se apoyen en los alumnos que ya hayan hecho el recubrimiento.

Como se observa, la actividad que se propone en esta fase sirve de apertura para que entre alumnos y docente se introduzcan al mundo del teselado. No sólo se recubrirá un espacio, sino que al final de la actividad el docente dará a conocer los propósitos del tema.

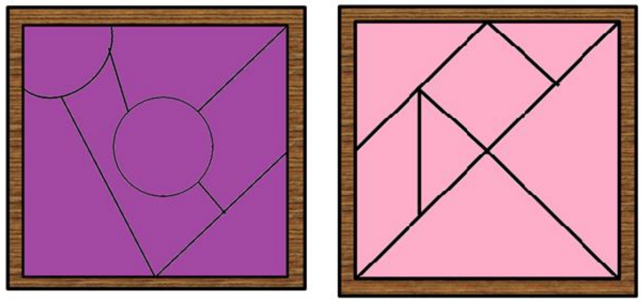
Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD 2: El objetivo de esta fase es que los alumnos observen e identifiquen los polígonos regulares, diferenciar un teselado de un recubrimiento así como conocer la primera característica fundamental del teselado, la cual es: no dejar huecos entre figura y figura o no sobreponerlas.

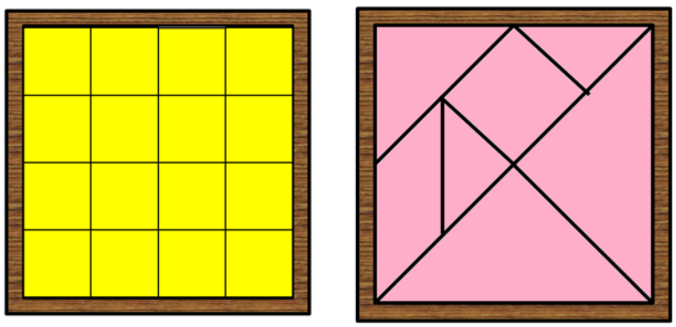
El docente preguntará cuál es la diferencia entre un recubrimiento y otro, cuál es la diferencia entre las cuatro plantillas que sí rellenan un espacio como se muestra a continuación.

Encuentra las diferencias o similitudes entre los recubrimientos

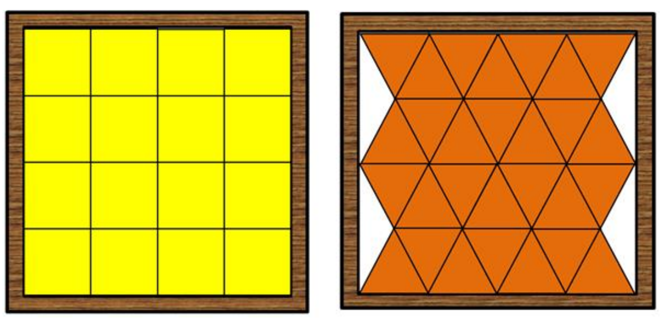
¿Qué diferencia o similitudes hay entre estos dos recubrimientos?



Ahora entre estos ¿Cuál es la diferencia o similitud?



¿Qué observas en estos dos recubrimientos?



Probablemente los alumnos observen que están totalmente cubiertos, pero que dos están conformados por figuras geométricas exactamente iguales mientras que en otros son distintas. *Como se puede apreciar, el docente da las indicaciones directamente. No hay preguntas sueltas ni abiertas, son específicas para que el alumno, por medio de esta actividad dirigida, conozca una de las características fundamentales de un teselado.*

Si el estudiante no está en condiciones de realizar la actividad, el maestro debe mantenerle por lo menos la ilusión del trabajo personal, para lo cual debe ayudar al alumno discretamente, sin imponérselo. Durante toda la sesión el docente debe fomentar el trabajo en equipo abiertamente y participar con los equipos, no para tachar el error sino más bien para buscar otras opciones.

Fase 3: EXPLICITACIÓN

ACTIVIDA 3: El objetivo de la actividad es que los alumnos reflexionen sobre el aprendizaje obtenido de las actividades anteriores y con ello lleguen a los conceptos de polígonos regulares, a la segunda caracterización de los teselados, la cual es que las figuras que recubren el espacio es sólo una, pero que se repite muchas veces.

Otro objetivo importante de esta actividad es que los alumnos empiecen a manipular el vocabulario matemático, por ello en la última pregunta *¿qué es un recubrimiento o teselado y qué características tiene?”* se utilizan ambas palabras: recubrimiento y teselado. La actividad es la siguiente:

A partir de las actividades anteriores contesta las siguientes preguntas
¿Cómo se llaman las figuras geométricas de color amarillo y anaranjado que recubrieron los espacios?
Utiliza una figura de cada recubrimiento y mide los lados, los ángulos interiores, el ángulo central y define: ¿qué es un polígono?
¿Qué es un recubrimiento o teselado y qué características tiene?

Entre las respuestas dadas por los alumnos estará que el teselado es el recubrimiento de un espacio con figuras idénticas sin dejar huecos ni espacios. Al finalizar con la última pregunta se puede proyectar o proporcionar a los alumnos imágenes de teselados, pero sólo de cuadrados y triángulos. Por ejemplo la Pirámide de Louvre en Francia para que observen cómo el teselado está presente en construcciones.

Con esta última actividad el alumno reconocerá las matemáticas que hay en la creación de arte arquitectónico. *Nótese que, con esta actividad, el alumno no sólo reflexiona qué es lo que hizo y qué es un teselado sino que llega a un primer acercamiento a la vinculación entre arte y matemáticas.*

Fase 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD 4: El objetivo de esta fase es estudiar algunas características de los polígonos regulares, convexos y cóncavos, además de fomentar el desarrollo de la habilidad de Reproducción y Construcción. El docente pedirá a cada integrante del equipo que construya un polígono, que conteste las dos primeras preguntas conforme a su figura y que al final comenten las repuestas con su equipo. La actividad es la siguiente:

Utiliza tu juego de geometría para construir cuatro polígonos en foamy o cartón, recórtalos y contesta las preguntas.

¿Cuántos lados tienen los polígonos?

¿Cuánto miden los ángulos de los polígonos?

¿Cuántos tipos de polígonos encontraste? Menciónalos

¿Qué características tienen los polígonos?

Mientras lo hacen, el docente dibujará otros polígonos cóncavos en el pizarrón. Cuando note que ya hayan terminado, ellos comentarán los resultados, después les pedirá que se fijen en las figuras que él dibujo y que mencionen las diferencias con las de ellos. Con esto actividad los alumnos contestaran las dos últimas preguntas.

Es importante destacar que, como se trata de la fase de orientación libre, las preguntas son abiertas y generales, hay poca orientación por parte del docente para que el alumno descubra por sí mismo las características y propiedades de los polígonos.

Fase 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD 5: El objetivo de esta fase es que el alumno reflexione sobre cómo se puede recubrir un espacio con otras figuras que no sean un triángulo o un cuadrado. La actividad de esta fase es para tarea. *¿Se podrá cubrir o teselar un espacio con cualquier polígono regular? ¿Por qué sí o por qué no?*

El estudiante puede intuir que sí se puede cubrir un espacio con otros polígonos regulares, pero la respuesta la encontrará en la siguiente clase. Con esto se concluirá el nivel 0 y la primera sesión, se dejará como tarea traer los polígonos que se trazaron.

Como se puede apreciar, esta actividad no solo es el cierre del primer nivel de razonamiento, sino que es el puente para que el alumno busque otra forma de teselar un espacio. Además, con la pregunta ¿Se podrá cubrir o teselar un espacio con cualquier polígono regular?, se están introduciendo términos matemáticos como: teselar, polígono regular, etc.

SEGUNDA SESIÓN Nivel 1: Análisis. Descubrimiento de los elementos y propiedades matemáticos de los teselados por medio de la experimentación
Objetivos del nivel 1: <u>Comparar</u> y <u>reproducir</u> formas geométricas simples mediante las propiedades de los componentes.

Los alumnos:

- Descubrirán la importancia de los ángulos como un elemento central de una figura
- Valorarán y reconocerán la relevancia de las matemáticas en el análisis y creación de teselados
- Descubrirán teselados con polígonos irregulares

Fase 1: INFORMACIÓN

ACTIVIDAD 5: El objetivo de esta actividad es que los alumnos descubran con qué polígonos regulares se puede teselar así como desarrollar la habilidad de representación al pedirles que imaginen cómo quedaría un teselado con otra figura. La actividad de esta fase es la que se dejó como tarea en la sesión pasada *¿Se podrá cubrir o teselar un espacio con cualquier polígono regular? ¿Por qué sí o por qué no?*

Posiblemente la respuesta de los alumnos sea afirmativa, puesto que anteriormente se pudo teselar con el cuadrado y el triángulo equilátero, ambos polígonos regulares.

El docente pedirá a los alumnos que utilicen sus demás polígonos para teselar un espacio. Debe procurar introducir el término teselado en lugar de recubrimiento. Al final de la actividad el maestro les preguntará qué pasó con sus teselados, que si se pudo teselar con todos los polígonos regulares.

Como se dijo anteriormente, esta actividad es el puente para que el alumno imagine otras formas de teselar, así como la introducción del lenguaje matemático. Pero también es la actividad que sirve para que el docente se informe de qué es lo que ha aprendido el estudiante, y para que éste aplique lo que ha aprendido.

Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD 6: El objetivo es que los alumnos utilicen la triangulación para encontrar la medida de los ángulos interiores del polígono regular y caracterizar cada uno de ellos. La tabla debe estar incompleta para que los alumnos llenen los espacios vacíos. Una de las columnas no tiene título, se pedirá a los escolares que no pongan nada en esta parte ya que ésta se ocupará más adelante. La actividad es la siguiente:

Utiliza los polígonos regulares que construiste, recubre un espacio y completa la siguiente tabla con tu maestro:

Polígono	Número de lados	Ángulo interior		Se puede teselar
Triángulo	3	60º		Sí
	4			
	5			No
		120º		
Heptágono				
Octágono				
Decágono	10			

¿Qué pasó con los polígonos, se puede utilizar cualquier polígono para teselar un espacio?

Menciona los polígonos con los cuales si se puede teselar

Menciona los polígonos con los cuales no se puede teselar

Posiblemente una de las dificultades que tengan los alumnos sea encontrar la medida exacta de los ángulos interiores de cada polígono. Para ayudarlos el docente puede proceder de dos maneras, dependiendo de cómo hayan trazado sus polígonos.

En caso de haber sido por medio de la circunferencia entre el número de lados del polígono que se desea trazar, es decir 360º/n obteniendo como cociente el ángulo central. El docente hará notar que, como los polígonos son regulares, entonces está conformado por triángulos isósceles y que teniendo el ángulo que es diferente, se puede obtener los otros dos, los cuales son exactamente iguales.

El pentágono, por ejemplo, 360º / 5 = 72º, por lo tanto el ángulo central es de 72º, se conoce ya un ángulo, lo único que se hace es restar 72º de 180º y dividirlo entre dos, entonces tenemos (180º - 72º) / 2 = 54º y este es la medida de los otros dos ángulos. Para encontrar el ángulo interior del pentágono, se suman los ángulos que lo conforman.

Otra forma de encontrar la medida de los ángulos interiores es por medio de la triangulación. Para ello se hace lo siguiente: tomando como ejemplo el pentágono, se pregunta cuantos triángulos se pueden formar en el pentágono por medio de las diagonales. En este caso son 3.

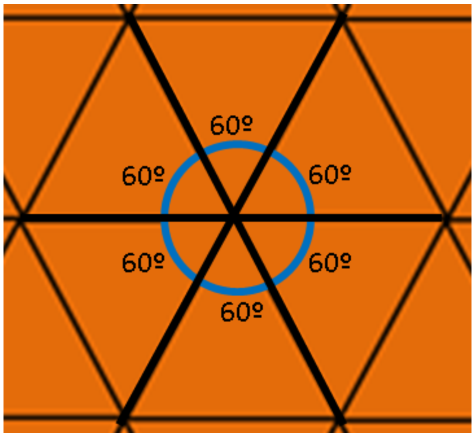
Después, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos interiores de los triángulos es 180º, se multiplica eso por el número de triángulos que se pueden formar (180º) (3) = 540º. Finalmente el resultado se divide entre el número de lados del polígono, el cual es 5 porque se trata de un pentágono, 540º / 5 = 108º y éste es la medida del ángulo interior del pentágono.

Véase como la actividad requiere de una orientación directa, el docente ayuda al alumno a encontrar la medida de los ángulos de cada polígono al darles el ejemplo del pentágono, ayuda a completar la tabla y a descubrir con cuáles polígonos regulares se puede teselar.

Fase 3: EXPLICITACIÓN

ACTIVIDAD 7: El objetivo de esta actividad es que el alumno descubra la relación entre la medida del ángulo interior y la creación de un teselado así como elaborar una caracterización de un teselado de polígonos regulares. Para ellos se analizará el triángulo, como de antemano se sabe que todos los polígonos que se utilizaron son regulares y además se ha llenado una tabla con las medidas de los ángulos interiores, los alumnos saben que la medida del ángulo interior del triángulo es 60º. La actividad es la siguiente

Observa y analiza la siguiente imagen



Lee las siguientes afirmaciones de algunos alumnos, comenta con cuáles estás de acuerdo y realiza con tus compañeros una conclusión.

Alma: el teselado es un recubrimiento
Pedro: en un teselado no hay huecos entre las figuras
Blanca: un teselado puede hacerse de polígonos como cuadrados y triángulos
Benito: se puede teselar con el hexágono porque su ángulo interior es múltiplo de 360º.

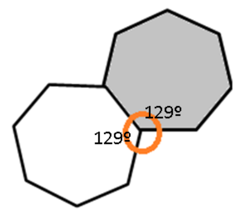
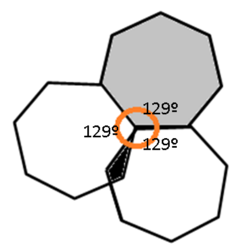
Se pedir a los alumnos que observen cuantos triángulos están unidos en un mismo punto, se mencionará que este punto se llama vértice. En este caso son 6, después se pide que ese número se multiplique por 60º, el cual es la medida del ángulo interior obteniendo como producto 360º, es decir un ángulo perigonal y preguntará: *¿Qué relación guarda la medida del ángulo interior de un polígono regular y un teselado?*

El segundo ejercicio de la actividad tiene como objetivo que el alumno haga un análisis para describir un teselado con los elementos que hasta ahora han estudiado, como por ejemplo con qué polígonos regulares se puede teselar, la relación existente entre la medida de los ángulos interiores y la teselación, etc. *Como se puede percibir, con esta actividad el alumno encuentra y se explica así* *mismo la relación entre un teselado y el ángulo como elemento de un polígono regular.*

Fase 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD 8: El objetivo de esta fase es para que el alumno elabore ecuaciones simples para encontrar que la suma de los ángulos interiores en un mismo vértice debe ser 360º y demostrar algebraica y gráficamente la relación entre el teselado y la medida de los ángulos interiores de un polígono. La actividad es la siguiente: *Coloca “Suma de ángulos” en la columna que no tiene nombre de la tabla anterior y completa la siguiente.*

Figura	Representación gráfica
Triángulo 60º ángulo interior	
	108º x 3 = 324º
	108º x 4 = 432º

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Como se observa, los alumnos no sólo están vinculando el Arte y las Matemáticas sino también geometría y álgebra. Por ejemplo, en el cuadro “ángulo interior” llevará a establecer algunas ecuaciones simples para obtener la medida de los ángulos interiores y con ello saber si se puede teselar o no. Algunas de ellas pueden ser las siguientes:

$$360^{o} / n = \alpha$$

Donde

360^{o} representan los grados totales de una circunferencia

n representa el número de lados del polígono que se quiere formar

y α es la medida del ángulo central

$$180^{o} - \alpha = \beta$$

Donde

180^{o} es la suma de los ángulos interiores de los triángulos isósceles que se forman en el polígono

α es el ángulo central del polígono

y β es la medida del ángulo interior del polígono

$$\beta * \Omega = 360^{o} \quad \text{o bien} \quad 360 / \beta$$

Donde

360^{o} es la constante que se busca obtener para poder teselar

β es el ángulo interior del polígono

Ω es el número de vértices que se unen en un mismo punto del teselado

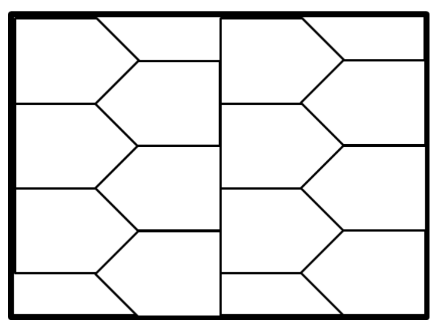
Obsérvese que el ejercicio ACTIVIDAD 8: Coloca “Suma de ángulos” en la columna que no tiene nombre de la tabla anterior y completa la siguiente sólo tiene dos indicaciones abiertas y tres indicios para que el alumno los resuelva con los conocimientos adquiridos, ya que éste se trata de la fase orientación libre. Las fórmulas se pueden dar al final pero es recomendable que el alumno las descubra por sí mismo.

Fase 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD 8: El objetivo de esta actividad es que el alumno imagine otra forma de teselar que no sea un polígono regular convexo así como desarrollar su habilidad de Representación. Se proyectará o se repartirán hojas con ejemplos de teselados conformado por este tipo de polígonos. Se dejará como tarea traer hojas de papel albanene o papel cebolla. La actividad es la siguiente: *¿Es posible teselar un espacio con otro tipo de polígono?*

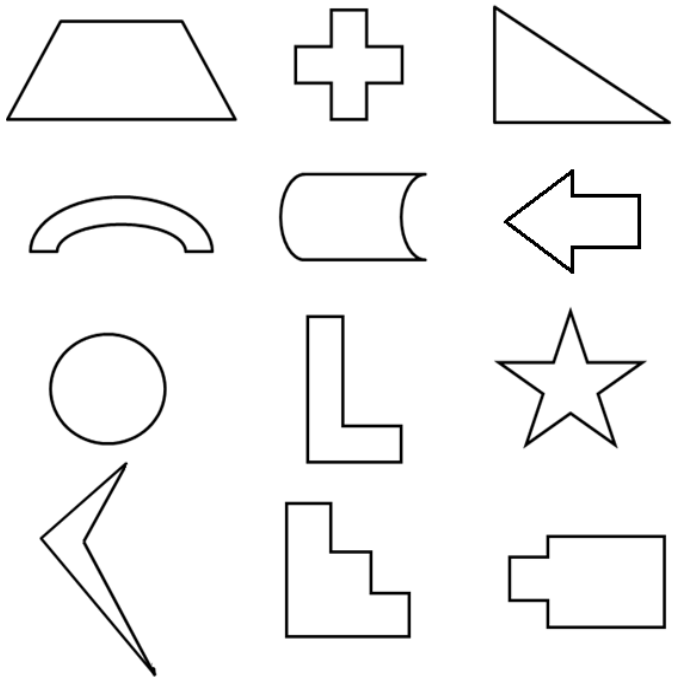
¿Es posible teselar un espacio con otro tipo pentágono? ¿Cómo sería ese pentágono? ilustra y justifica tu respuesta

Observa el siguiente teselado de polígonos



¿Por qué sí funciona la teselación con este tipo de polígono?

ACTIVIDAD 9: El objetivo de esta actividad es que los alumnos justifiquen, por medio de la medida de los ángulos, con qué polígonos irregulares se puede teselar. La actividad es la siguiente: *¿Con cuál de los siguientes polígonos se puede teselar? Justifica tu respuesta*



Es importante destacar cómo la actividad de esta fase funciona como cierre del segundo nivel de razonamiento y como liga para descubrir teselados de polígonos irregulares y el repaso para el estudio de este tipo de polígonos.

TERCERA SESIÓN

Nivel 2: Deducción informal. Promover la búsqueda de patrones y regularidades, hacer conjeturas y argumentar sobre la validez de los razonamientos sobre las relaciones y propiedades detectadas

Objetivo del nivel 2: Construir y definir conceptos semi-complejos de tipos de formas geométricas.

Los alumnos:

- Conocerán teselados de Escher
- Identificarán la simetría en los teselados
- Analizarán las isometrías en los teselados
- Desarmarán los teselados de formas diversas (personas, animales o cosas) para encontrar el polígono que los originó
- Elaborarán sus teselados

Fase 1: INFORMACIÓN

ACTIVIDAD 10: El objetivo de esta actividad es que los alumnos estudien eje de simetría y simetría axial. Se pedirá a los alumnos que calquen con el papel albanene el contorno del mosaico de la actividad 10. Se recortará, se doblará a la mitad y el doblés que resulte se tomará como eje de simetría. A partir de este ejercicio se puede incitar a los alumnos para que conceptualicen eje de simetría, el cual puede ser: *línea imaginaria que al dividir una forma cualquiera, lo hace en dos partes, y cuyos puntos simétricos son equidistantes a dicho eje.* La actividad es la siguiente: *Observa el siguiente mosaico y contesta las preguntas*

Se pedirá a los alumnos que marquen con color rojo el eje de simetría, después dibujarán las palomas. Se pedirá nueva mente doblar el papel y se preguntará ¿Cómo son las palomas con respecto al eje de simetría? Se espera que contesten que son iguales pero que están en lados opuestos

¿Qué son los ejes de simetría?

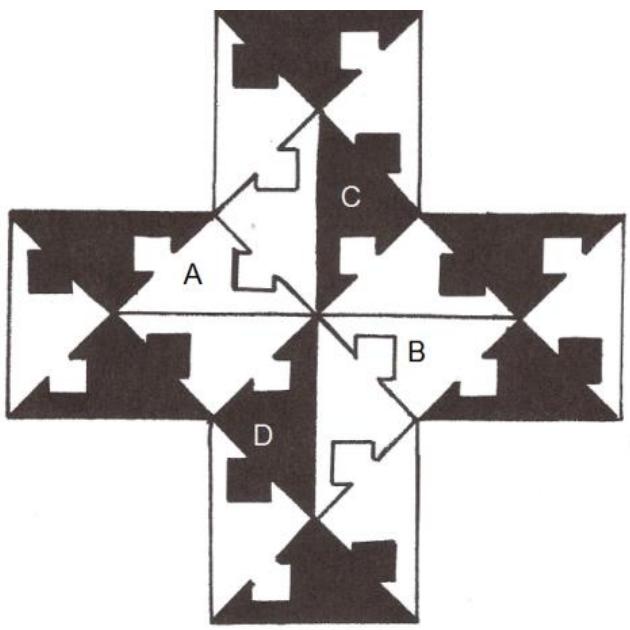
¿Cómo son las palomas con respecto al eje de simetría que se trazó?

¿Cómo son las flores con respecto al eje de simetría que se trazó?

Con esta actividad y con los conocimientos de primaria se pedirá un posible concepto de simetría, el cual puede ser el siguiente: *se refiere a, que cuando un cuerpo es cortado a la mitad, las dos partes resultantes son exactamente iguales, es decir son simétricas… Dos puntos son simétricos respecto a una recta si se encuentran a igual distancia del eje de simetría.*

ACTIVIDAD 11: el objetivo de esta actividad es que los alumnos realicen un concepto sobre simetría con respecto a un punto el cual puede ser: *Una simetría central es una transformación en que a cada punto del plano se le asocia otro punto del plano llamado imagen y debe cumplir con las siguientes condiciones: a) El punto y su imagen están a igual distancia de un punto llamado centro de simetría, y b) El punto, su imagen y el centro de simetría pertenecen a una misma recta.*

Con otro papel albanene se calcará el teselado en forma de cruz, lo recortarán y lo doblarán en cuatro partes de tal forma que coincidan las figuras con las letras A, B, C y D. La actividad es la siguiente: *Observa el siguiente teselado y contesta:*



¿Cómo son las figuras blancas A y B?

¿Cómo son las figuras negras C y D?

¿Qué es simetría con respecto a un punto?

Se recordará que se puede teselar sólo con tres tipos de polígonos regulares pero también con otro tipo de polígonos, siempre y cuando mantengan ciertas propiedades, como la medida de alguno(s) de sus ángulos internos sea múltiplo de 360º. Después se proyectará o se repartirán hojas con los teselados de Escher para que los alumnos observen que también se puede teselar con formas diversas.

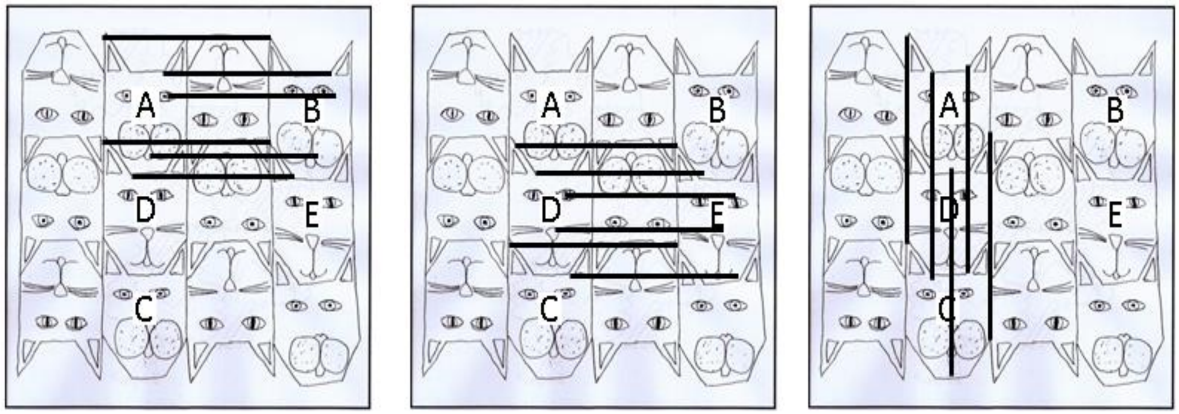
En este nivel, los alumnos ya conocen algunas propiedades de los teselados, tanto de polígonos regulares como irregulares. Se mencionará que hay otro concepto matemático en la elaboración de teselados y se preguntará cuál creen que sea. Posiblemente no sepan la respuesta, por lo tanto se les indicará que también está presente la simetría y las trasformaciones isométricas.

Como se advierte, las actividades de esta fase son, por un lado, para que el docente verifique qué es lo que han aprendido los alumnos sobre el tema de teselados así como qué saben de simetría, y por otro lado, para que el estudiante se dé una idea del contenido matemático que va a estudiar: transformaciones isométricas.

Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD 11: El objetivo de esta actividad es que los alumnos descubran los teselados de formas diversas, analicen y estudien las isometrías encontradas en los teselados: traslación, rotación y reflexión. El primer ejercicio es para que desarrollar su habilidad de Representación al imaginar otras formas de teselar. La actividad es la siguiente: *¿Crees que con los polígonos sea la única forma de teselar un espacio? ¿Podrás teselar con figuras de gatos? ¿Por qué? Inténtalo*

Si el alumno no puede realizar el ejercicio, se pasará al siguiente ejercicio el cual es: *Observa los siguientes teselados y contesta lo que se te pide.* Éste servirá para estudiar la traslación. Con ayuda de paralelas del mismo tamaño, los alumnos observarán los movimientos horizontales o verticales, como se muestra a continuación.



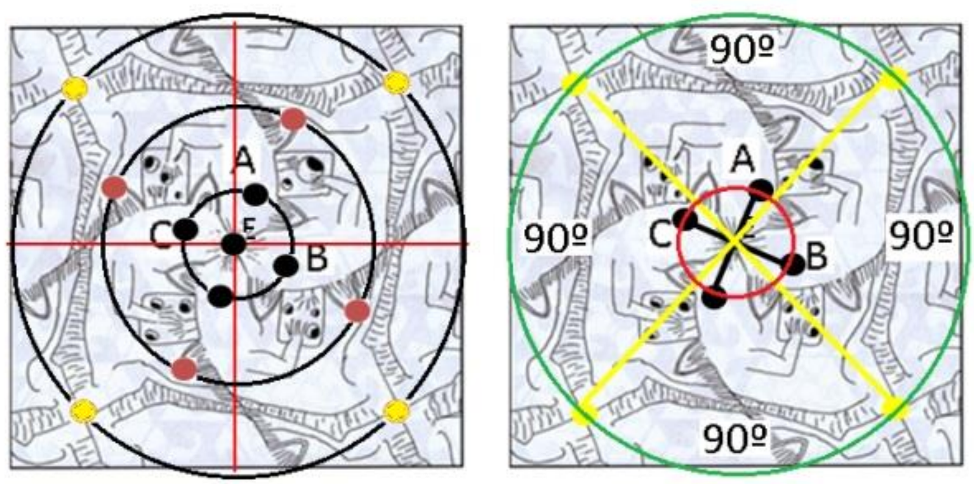
¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela B?

¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela C?

¿Cómo es la tesela D con respecto a la tesela E?

¿Qué movimientos se realizaron o se requieren para lograr las posiciones que se mencionan?

Para el segundo ejercicio, los alumnos trazarán ejes como en el plano cartesiano para que conozcan el concepto de rotación. Con estos trazos podrán ver que los segmentos de un punto a otro son idénticos, que están dentro de una misma circunferencia y que existe un punto fijo, que en este caso es la nariz del ratón. Verán que los movimientos que se requirieron son giros.

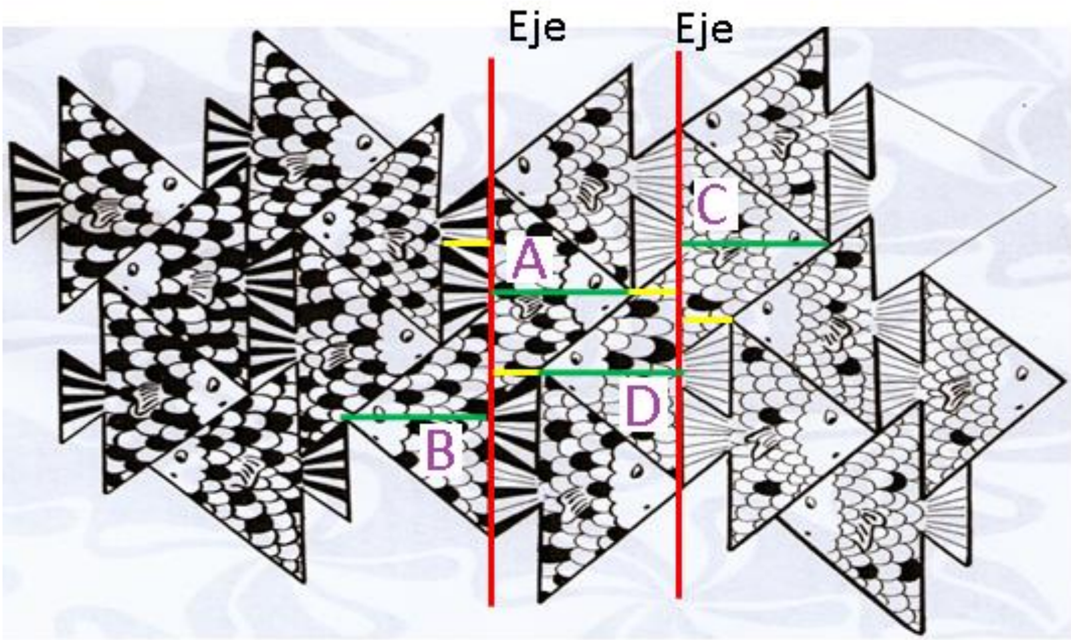


¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela B?

¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela C?

¿Qué movimientos se realizaron o se requieren para lograr las posiciones que se mencionan?

Para el concepto de reflexión se utilizará otro teselado de Escher. Por medio de las rectas que los alumnos dibujarán, como se muestra en la imagen inferior, se darán cuenta que los segmentos del mismo color, son exactamente iguales con respecto al eje que se trazó pero que una figura está volteada y no girada como en el caso del teselado anterior.



¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela B?
¿Cómo es la tesela C con respecto a la tesela D?
¿Qué movimientos se realizaron o se requieren para lograr las posiciones que se mencionan?

Nótese que en estas actividades el docente indica todos los pasos y trazos que debe realizar el alumno para que conozca los movimientos. Cundon hayan terminado se les indicará que estos movimientos se conocen como transformaciones isométricas de traslación, rotación y reflexión.

Fase 3: EXPLICITACIÓN

ACTIVIDAD 12: El objetivo de esta actividad es que los alumnos descubran y caractericen las transformaciones isométricas de traslación, rotación y reflexión, que apliquen lo aprendido, utilizando otros ejemplos de teselados, esperando que los alumnos usen las palabras adecuadas. Los ejercicios de la actividad son los siguientes: *A partir de las actividades anteriores caracteriza las trasformaciones isométricas que realizaste*

Traslación: ____

____

Rotación: ____

____

Reflexión: ____

____

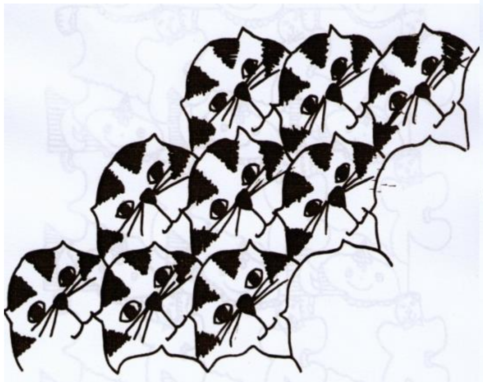
Estas caracterizaciones pueden ser cómo las siguientes:

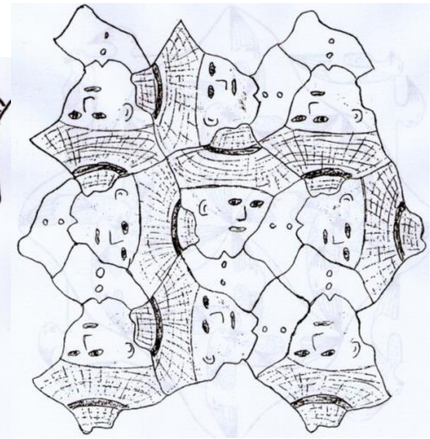
Traslación: transformación que sufre una figura en sí misma en donde los segmentos que unen un punto con su imagen son todos paralelos y de sentido y longitud iguales.

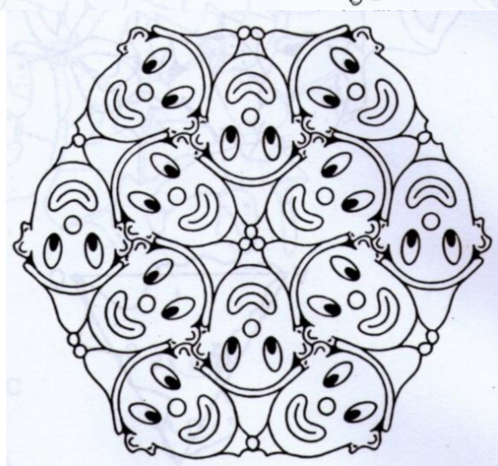
Rotación: transformación que sufre una figura en sí misma en donde existe un punto fijo, que puede ser denominado centro E, los puntos idénticos de las imágenes son puntos de una circunferencia cuyo centro es E y los radios correspondientes de esos puntos con el centro E son idénticos y determinan el mismo ángulo.

Reflexión: transformación que sufre una figura en donde hay una recta de puntos fijos llamada eje de reflexión que bisecta y es perpendicular a los segmentos que coinciden en cada vértice o punto idéntico de la imagen reflejada.

Después los alumnos harán ejercicios similares para encontrar las transformaciones isométricas, el ejercicio es el siguiente: *Localiza las traslaciones, rotaciones y reflexiones en los siguientes teselados*





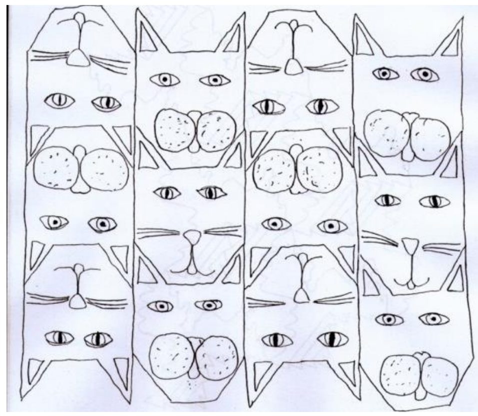


Como se observa, las actividades de esta fase están diseñadas para que el alumno reflexione sobre los trazos que realizó y así llegar a las definiciones de traslación, rotación y reflexión, además repasa lo aprendido localizando estos movimientos en otros teselados.

Fase 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD 13: El objetivo de esta actividad es que los alumnos apliquen lo aprendido y analicen las isometrías en la elaboración de teselados. Para ello se utilizará papel albanene y el teselado de los gatos. Se pedirá que los alumnos calquen con el papel albanene el contorno de los gatos y hagan sus anotaciones de las características observadas.

Se preguntará cómo son las figuras y qué relación existe entre el semitrapecio que forman las orejas de un gato y el cuello de gato siguiente. Se espera que los alumnos observen que el semitrapecio que forma las orejas se compensa con el semitrapecio del cuello del siguiente gato. A partir de esta observación se solicitará al alumno que busque cuál es ese polígono original. La actividad es la siguiente: *Calca el contorno de los gatos y contesta las siguientes preguntas*

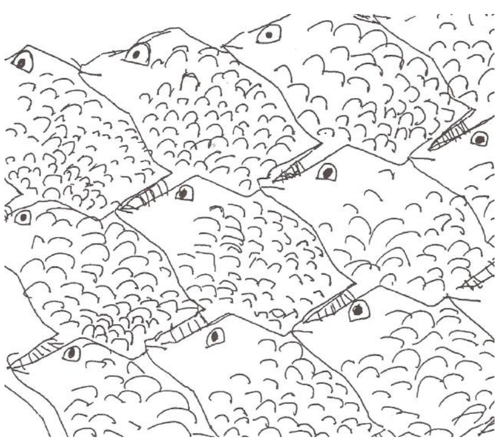


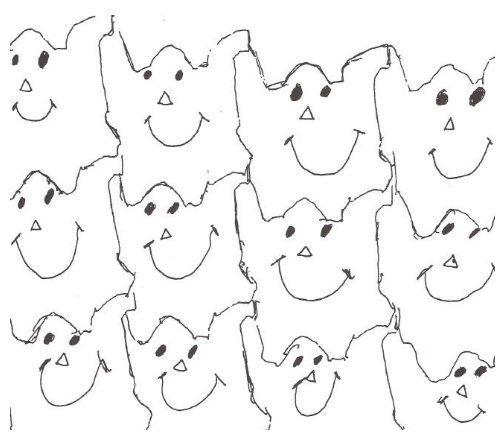
¿Qué características observas?

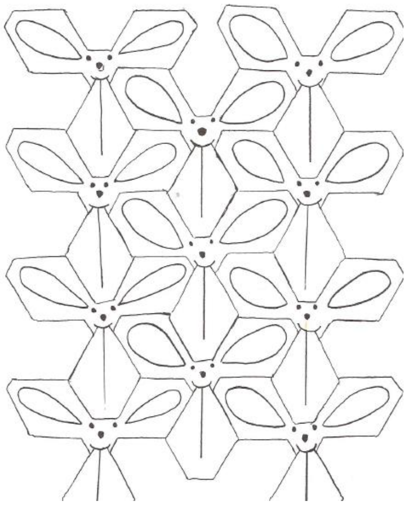
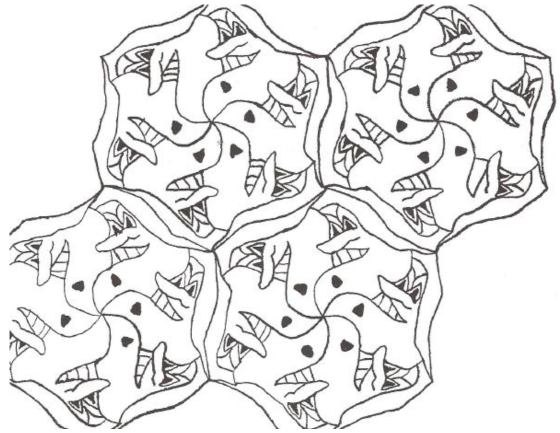
¿Qué relación existe entre el semitrapecio que forman las orejas de un gato y el cuello del gato inferior o superior?

¿Cuál es el polígono original con que se elaboró el gato? Ilustra los pasos que crees que se realizaron en la elaboración del teselado de gatos

ACTIVIDAD 14: Esta actividad será para que los alumnos encuentren el polígono que dio origen a la tesela de otros recubrimientos. Estos pueden ser en donde se utilice no solo traslaciones sino también rotaciones y reflexiones, para ellos sólo se preguntará: *¿cuál es el polígono original de cada teselado? Dibújalo*

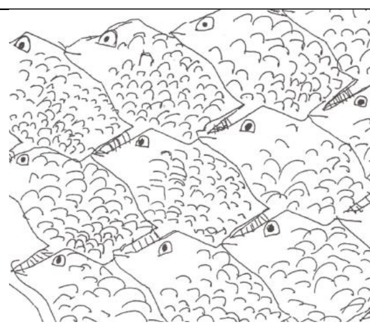
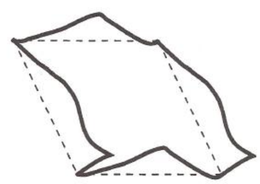
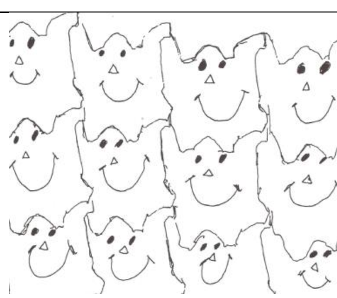
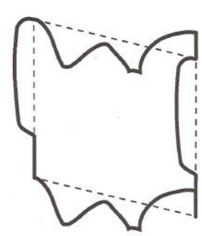


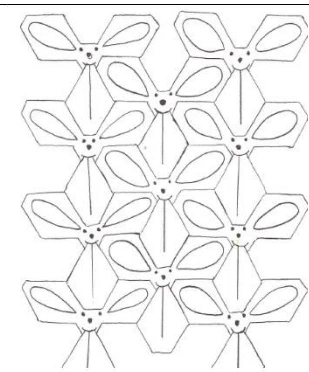
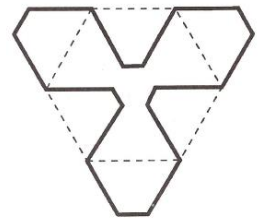
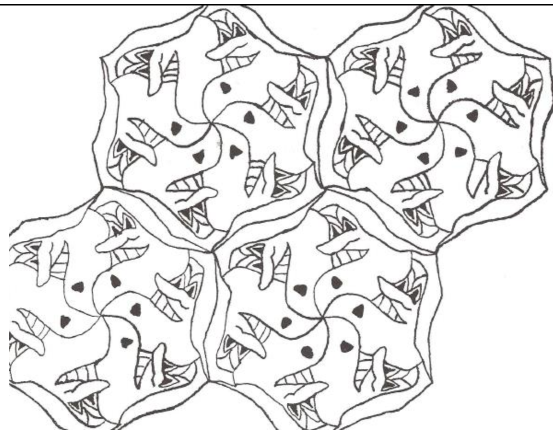


Pudiste encontrar el polígono original. Comparte con tus compañeros y maestro tus resultados

Después de que hayan terminado los alumnos, se repartirán los mismos teselados junto con el polígono que lo originó para corroborar sus respuestas o bien para observar que existen otras formas de realizar el mismo teselado, en caso de que hayan encontrado otra vía.

Como se aprecia, las actividades de esta fase requieren de escasa orientación, de hecho sólo en el primer ejercicio se dan instrucciones cortas e indicios para que el alumno descubra el polígono que originó el teselado.

Fase 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD 15: El objetivo de esta actividad es que los alumnos elaboren su teselado aplicando todo lo que ha aprendido durante las sesiones así como que vinculen las Matemáticas con el Arte y conozcan a Escher y sus obras. Se les invitará a que revisen las siguientes páginas web, la actividad es la siguiente: *Investiga quién fue Escher y visita las siguientes páginas web:*

http://www.mcescher.nl

http://www.mcescher.com

http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-back.htm

http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/

Se proyectarán más imágenes de Escher, monumentos decorados con teselaciones, imágenes de teselados en la naturaleza y se analizará el texto *Teselaciones, o cómo decorar el baño,* de Juan Manuel Ruisánchez Serra[69]. El ejercicio es el siguiente: *Analiza el siguiente texto y comenta con tus compañeros qué otros elementos matemáticos encuentras en los teselados*

Con lo aprendido, elabora tu teselado y expón a tus compañeros los pasos, las simetrías e isometrías que llevaste a cabo para construirlo

Para concluir el tema, se recomienda que los alumnos visiten las páginas web que se recomendaron y además se les pedirá que elaboren su propio teselado aplicando, justificando y exponiendo todo lo aprendido.

Obsérvese que la actividad de esta fase es para cerrar el nivel de razonamiento al estudiar los contenidos geométricos de simetría y transformaciones isométricas, y el tema de Teselados al conocer más a fondo a Escher y sus obras pictóricas. Además se exige una integración de conocimientos al pedir construir un teselado aplicando todo lo que se ha aprendido así como conocer otras características y propiedades de los teselados.

---

[69] Ruisánchez Serra, Juan Manuel. "Teselaciones, o cómo decorar el baño". *Correo del Maestro*, Año 3, Núm. 26, 1998, pp. 20-37

5.3. Actividades propuestas para el tema de Sección Áurea

El tema de Sección Áurea es desconocido en la escuela, sin embargo no se puede negar su estrecha vinculación con las matemáticas. Se relaciona con los contenidos: semejanza, proporcionalidad y construcciones con regla y compás. Este apartado se organiza con los siguientes puntos: Conocimientos previos, Material utilizado para el tema y Objetivos del tema y actividades para el docente

5.2.1. Conocimientos previos

- Figuras geométricas y sus propiedades
- Algebra
- Uso de la regla y compás
- Recursos recomendados para el tema

5.3.2. Material utilizado para el tema

- Proyector o cartulinas con imágenes en donde se aplica la sección áurea.
- Juego de geometría.
- Papel grueso o resistente como catoncillo, papel cascaron, entre otros
- Colores, no son necesarios, pero se recomienda para un trabajo más creativo
- Tachuelas
- Tarjetas de teléfono, celulares y otros objetos rectangulares
- Los materiales de uso cotidiano: pizarrón, gises de colores o marcadores, lápiz, etc.

Dado que se pretende elaborar una propuesta desde el modelo Van Hiele, se consideran los niveles y fases de dicho modelo:

5.3.3. Objetivos del tema y actividades para el docente

Objetivos del tema: Estudiar el contenido de “semejanza” y “proporcionalidad” para el desarrollo de las habilidades de Representación, Reproducción y Construcción por medio del estudio de la sección áurea.

Los estudiantes:

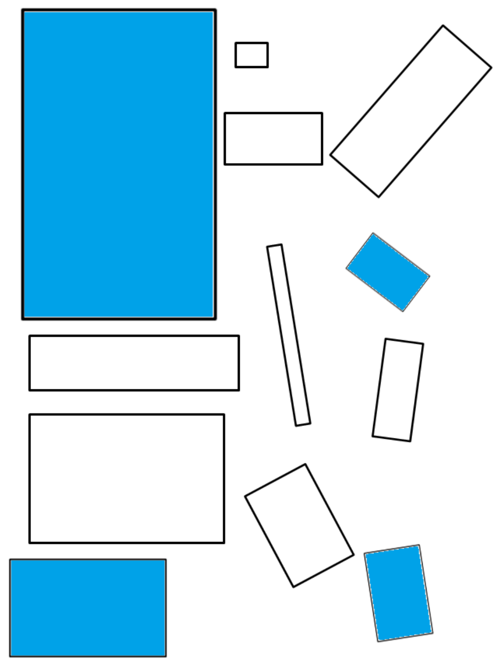
- Conocerán varios obras de arte en donde la sección áurea está presente
- Descubrirán el valor de phi
- Estudiarán los contenidos geométricos de semejanza y proporcionalidad
- Identificarán y caracterizarán las propiedades de los rectángulos áureos
- Aplicarán la sección áurea en fotografías

PRIMERA SESIÓN Nivel 0: Visualización y reconocimiento. Razonamiento y visión global de la Sección Áurea
Objetivos del nivel 0: <u>Caracterizar</u> y <u>clasificar</u> formas geométricas mediante prototipos visuales. Los estudiantes - Observarán las obras de arte de varias épocas en donde está presente la sección áurea - Observarán e identificarán el rectángulo áureo en pinturas y esculturas - Descubrirán el valor de phi

Fase 1: INFORMACIÓN

ACTIVIDAD 1: El objetivo de esta actividad es que los alumnos escojan un rectángulo áureo. En esta fase de reconocimiento se plantea un ejercicio en el cual el docente proporcionará a los alumnos un conjunto de rectángulos, 4 serán áureos y otros 6 u 8 serán de distintas formas: largos, angostos, etc., todos los rectángulos estarán en diferentes posiciones: inclinados, parados, costados, etc.

Observa los siguientes rectángulos, escoge y colorea tres de ellos



Como se observa, cuatro de ellos están sombreados, para que el docente identifique los rectángulos áureos, se espera que los alumnos escojan por lo menos tres de ellos. A los alumnos se entregará los rectángulos sin color, enumeración o letras, ya que estas marcas pueden influir en la elección de los estudiantes.

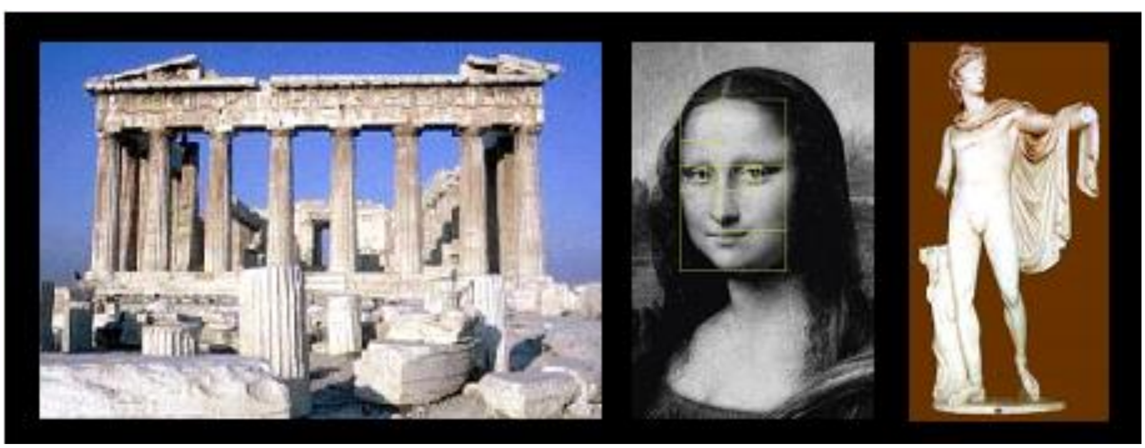
La influencia puede ser que el número lo asocien con alguna fecha en especial o que la letra lo relacionen con su nombre. Por ello es recomendable que los rectángulos estén vacíos. Cuando los hayan escogido, colocarán señales para identificar los rectángulos y hacer estadísticas. El registro se puede hacer en un cuadro como el que sigue.

¿Qué rectángulo fue escogido más veces?

Rectángulo	Veces elegidas	Cantidad en número
1…a… etc.	x x x x	4
2… b… etc.		0
3… c… etc.	x x	2
4… d… etc.		0

Posteriormente se hará el conteo de las frecuencias y se preguntará *¿Por qué creen que ese o esos rectángulos fueron escogidos más veces?* Se espera que todos o la mayoría hayan escogido por lo menos un rectángulo áureo. Con esta tendencia se iniciará formalmente la clase, pues a partir de ella se preguntará a los alumnos por qué escogieron ese rectángulo o rectángulos en especial.

Posiblemente entre las respuestas de los alumnos se exprese que simplemente les gustó más. En seguida se les preguntará si conocen o han escuchado hablar sobre la proporción, sección o razón áurea, divina o de oro. Es natural que no lo hayan escuchado, pues como se mencionó en la introducción, el tema no se incluye en los planes y programas de estudio. Sin embargo con esta actividad el docente hará una breve exposición sobre cómo desde tiempos remotos el ser humano ha tenido una inclinación por la perfección y que esta la encontró en la sección dorada, entre otras manifestaciones y se pedirá que *Observen las siguientes imágenes*



Se les mencionará que aún en la actualidad varias de las construcciones están hechas con base en este principio de la sección áurea, para lo cual el docente ya habrá investigado sobre este tema para estar mejor informado. Durante esta explicación se pasarán diapositivas o se repartirán dibujos, en donde el rectángulo áureo es base para varias obras de arte.

Nótese que la actividad está diseñada para que el alumno se introduzca al tema de sección áurea y para que el profesor averigüe qué es lo que sabe, no del tema sino de los contenidos geométricos que lo lleven a la comprensión del mismo. Por ello, el objetivo inicial es que reconozca y clasifiquen las formas, de esta manera no sólo comienza a conocer la sección áurea sino a reforzar temas como figuras geométricas.

Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD 2: El objetivo de esta fase es que los alumnos descubran el valor de *phi*, conozcan el concepto de sección dorada y construyan un rectángulo áureo. En el primer ejercicio es: *Construye un rectángulo con medidas enteras, divídelo en cuadrados y mide el largo y ancho del rectángulo que quedó. Sigue las instrucciones de tu maestro*.

Por medio de la división en cuadrados de un rectángulo grande, de preferencia del tamaño de una hoja carta o el de su cuaderno se acercarán al valor de *phi*. El rectángulo deberá ser de medidas cerradas para evitar que al final quede un cuadrado en lugar de un rectángulo.

Posteriormente se pide que dividan el lado largo entre el lado corto (largo/ancho) comenzando por el rectángulo original. Supongamos que las medidas son: b=17 y h=15

$\frac{17}{15}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{9}{2}$ Y así sucesivamente

¿A qué valor llegaste?

¿Cuánto vale phi?

Con esta actividad los alumnos se aproximan al valor de phi el cual es

$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ *= 1.618*

Después se les repartirá hojas con na breve historia del número áureo, también se exhibirá el video *Donald en el país de las matemáticas*. Este video se tomará como punto de partida para la obtención de un rectángulo áureo, una tarea investigación y se preguntará *¿Qué es la sección dorada? Construye un rectángulo áureo, sigue las instrucciones de tu maestro.*

Para la obtención de un rectángulo se preguntará ¿Cómo se puede obtener un rectángulo áureo? Se les indicará los pasos para elaborar un rectángulo áureo. En esta parte se refuerza el uso de regla y compás. Además se pueden desarrollar las tres habilidades: Reproducción, al ir copiando lo que el docente indica y hace en el pizarrón, Representación y Construcción al escuchar sólo las indicaciones.

Una forma de construir un rectángulo áureo se encuentra en el capítulo 2[70]. *Obsérvese cómo en esta actividad el docente es quien debe dar todas las indicaciones, pues hay que recordar que este ejercicio es de la fase orientación dirigida.*

Fase 3: EXPLICACIÓN

ACTIVIDAD 3: El objetivo de esta actividad es que los alumnos descubran su preferencia por el rectángulo áureo y que observen que muchas personas gustan de éste. En el primer ejercicio *es: Indica de los rectángulos que se entregaron anteriormente, ¿cuáles son áureos? De los rectángulos que se escogieron más*

[70] Supra, p. 61

¿Cuántos son áureos?, los alumnos trabajarán con el conjunto de rectángulos que se les proporcionó al inicio, utilizarán el procedimiento anterior para justificar cuál rectángulo es áureo y cuál no lo es, el docente puede elaborar otro conjunto de rectángulos.
Posteriormente, se les entregará y preguntará: *Observa la gráfica y comenta con tus compañeros y maestro*

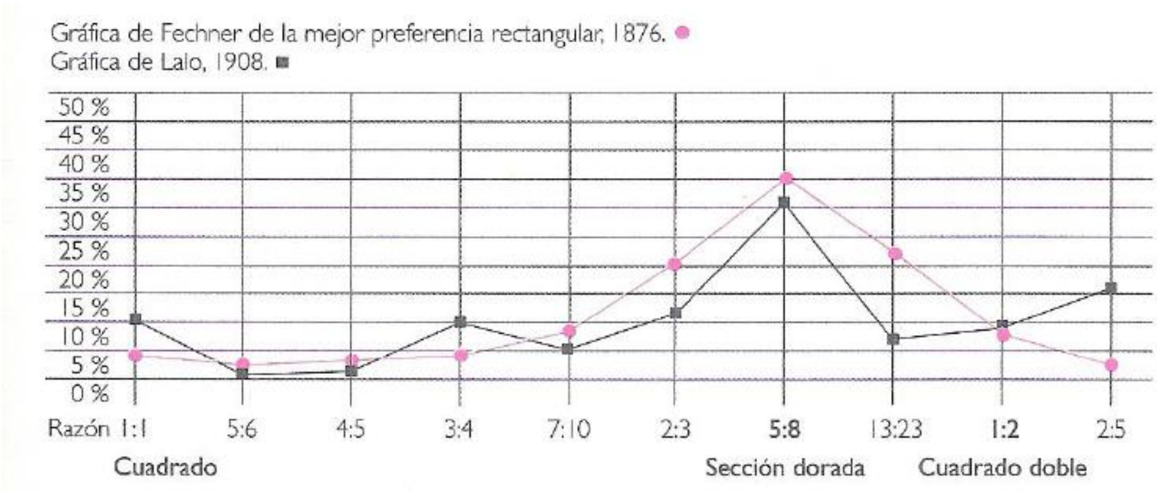
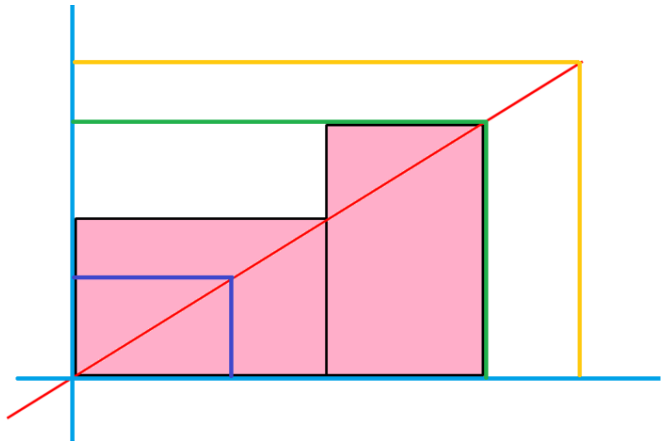


Fig. 1.1. Comparación gráfica de la preferencia rectangular.

Como se observa la actividad está diseñada para que el alumno reflexione sobre lo que hizo en la actividad anterior, por ello se pide que repita los pasos pero ahora con los rectángulos con los que trabajó al inicio.

Fase 4 ORIENTACION LIBRE.

ACTIVIDAD 4: El objetivo de esta actividad es que los alumnos estudien el concepto de semejanza de figuras y proporcionalidad, el cual es el objetivo principal del tema. Se pedirá a los alumnos trazar un rectángulo áureo, el que ellos quieran. Después se preguntará: *A partir de este rectángulo áureo ¿Cómo puedo conseguir otros?*
Ellos deben descubrir cómo construir otros a partir del que hicieron. En caso de no poder solucionar el problema, se les puede dar la siguiente pista: *Si este rectángulo lo trazamos en el plano cartesiano, ¿cómo construiríamos otro?*



Es importante destacar que el maestro dejará que sus alumnos trabajen abiertamente, puesto que se trata de la fase orientación libre, sólo se pide trazar un rectángulo áureo y a partir de éste construir otro y sólo se da un indicio en caso de que el alumno no pueda llegar a la construcción.

Fase 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD 5: El objetivo de esta actividad es que los alumnos descubran las características visuales de un rectángulo áureo. En esta fase los estudiantes explicarán porque funciona este procedimiento y observarán la semejanza entre la razón de los lados de los rectángulos aplicando el Teorema de Tales. La actividad es la siguiente:

Comenta con tu maestro lo siguiente: "para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que existen entre la mayor y el todo".[71]

¿Qué observas en la gráfica?

¿Cómo son los rectángulos rositas?

¿Cómo son los demás rectángulos?

¿Pasará con todos los rectángulos? Intenta dibujarlo

¿Por qué crees que pasa esto?

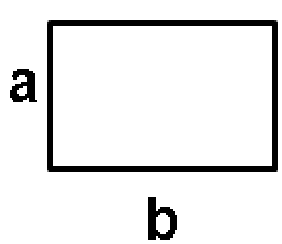
[71] Camacho Machin, Matias y Agustín Morales González. "Algunas características del currículum de geometría en la enseñanza obligatoria. Sugerencias didacticas" en *Revta. Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, núm. 21, sep./dic. 1994, pp. 83-94

Esta actividad es para cerrar el nivel de razonamiento; como se puede percibir, el alumno reflexiona sobre algunas características del rectángulo áureo, utiliza el Teorema de Tales y estudia el concepto de semejanza. Además descubre y conoce la definición de la sección áurea.

<table>
<tr><td>SEGUNDA SESIÓN
Nivel 1: Análisis. Descubrir experimentalmente las propiedades de la sección áurea destacando la semejanza y proporcionalidad</td></tr>
<tr><td>Objetivos del nivel 1: <u>Comparar</u> y <u>reproducir</u> formas geométricas simples mediante las propiedades de los componentes. Los alumnos:
- Descubrirán de la relevancia de las propiedades de la sección áurea
- Justificarán algebraicamente la sección áurea
- Compararán la sección áurea en la naturaleza</td></tr>
</table>

Fase 1: INFORMACION

ACTIVIDAD 6: El objetivo de esta actividad es estudiar el concepto de proporcionalidad. Se sugiere que el docente explique la característica fundamental de un rectángulo áureo la cual es que entre sus lados la razón proporcional siempre va ser ϕ (*phi*). La actividad es la siguiente: *La relación que guarda entre los lados un rectángulo áureo siempre será* $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ *= 1.618, este número es denominado phi o número de oro. Investiga por qué se llama número de oro.*



$$\frac{b}{a} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{b+a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Se comentará que por esta relación es “bonito” y armonioso, puesto que la razón entre sus lados siempre va a ser 1.618, aun si le sumamos al lado más largo el lado corto. Se puede utilizar el ejercicio de la fase 4 del nivel 0 para comprobar de manera gráfica lo anterior y hacerlo más comprensible a los alumnos.
Nótese que la actividad puede dejarse como tarea, pues es el puente y el inicio para el 2do nivel de razonamiento en el cual el alumno se informa de las razones del por qué phi es conocido como el número divino, a su vez el docente averigua qué saben sobre el contenido de semejanza al recordar el ejercicio de la fase 4 del nivel 0.

Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

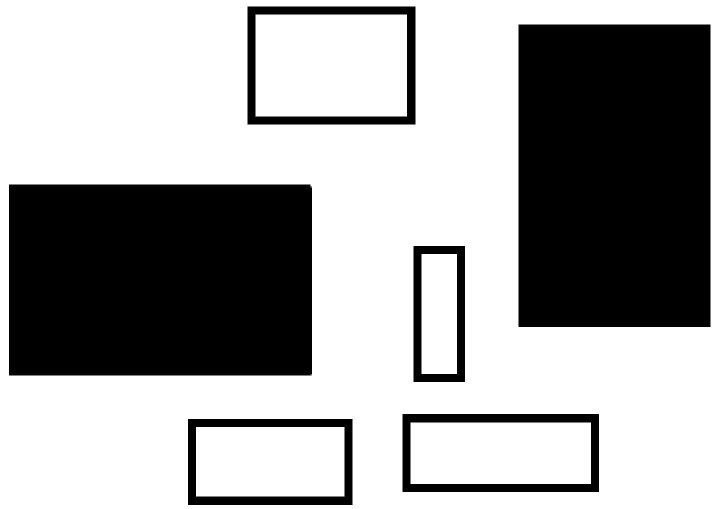
ACTIVIDAD 7: El objetivo de esta actividad es demostrar la razón dorada en un rectángulo áureo. En esta fase los alumnos practicarán álgebra y aplicarán el Teorema de Pitágoras para demostrar la propiedad de la razón áurea. Se pedirá que trabajen en el rectángulo áureo que contruyeron a partir de un cuadrado.
El docente puede ir dirigiéndolos o sólo darles las instrucciones por escrito y practicar la habilidad de representación. La actividad es la siguiente: *Construye un rectángulo áureo y comprueba la afirmación anterior. Sigue las instrucciones de tu maestro.* Los pasos para justificar la sección áurea aparecen en el capítulo 2.[72]
Sin embargo se aclara que como se trabajará con el rectángulo que construyeron en el nivel anterior y estos son de distintos tamaños, entonces se generalizarán las medidas, todos los cuadrados medirán α por lado. *Como se puede apreciar, la actividad requiere de la orientación directa del docente para que el alumno conozca la justificación algebraica de un rectángulo áureo.*

Fase 3: EXPLICITACIÓN

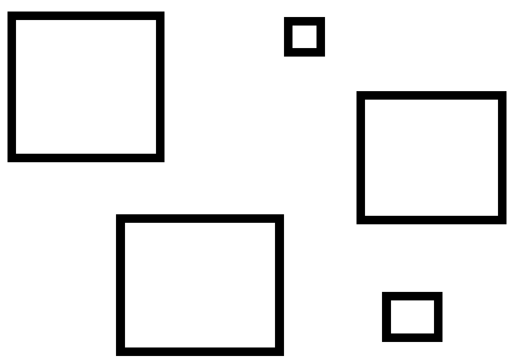
ACTIVIDAD 8: El objetivo de esta actividad es que el alumno refuerce sus conocimientos sobre las proporciones de un rectángulo áureo. La actividad es:

[72] Supra, pp. 62-63

Observa los siguientes rectángulos, mide sus lados ¿cuál de ellos es áureo? Cuando los alumnos terminen la primera actividad, el docente les indicará cuál es rectángulo áureo que son los siguientes:



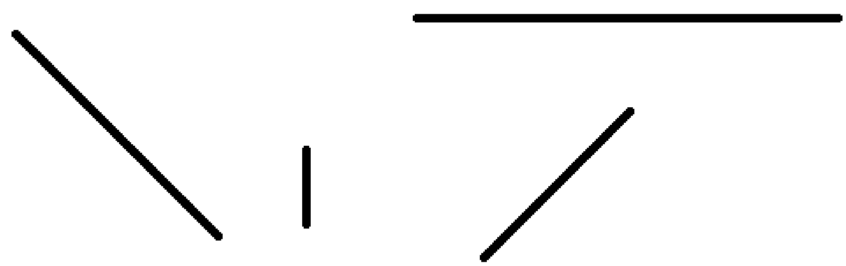
Después se les pedirá construir rectángulos áureos a partir de cuadriláteros.



Véase como esta actividad está diseñada para que el alumno reflexione sobre el valor de phi con algunos aspectos de la naturaleza, además reflexione también sobre la vinculación del primer ejercicio de la Fase 2 con éste.

Fase 4: ORIENTACIÓN LIBRE

ACTIVIDAD 9: El objetivo de esta actividad es que el alumno aplique sus conocimientos y que encuentre la sección dorada de un segmento y para que construya un compás áureo, de esta forma desarrollará su habilidad de construcción. El primer ejercicio es: *Encuentra la sección áurea de los siguientes segmentos*



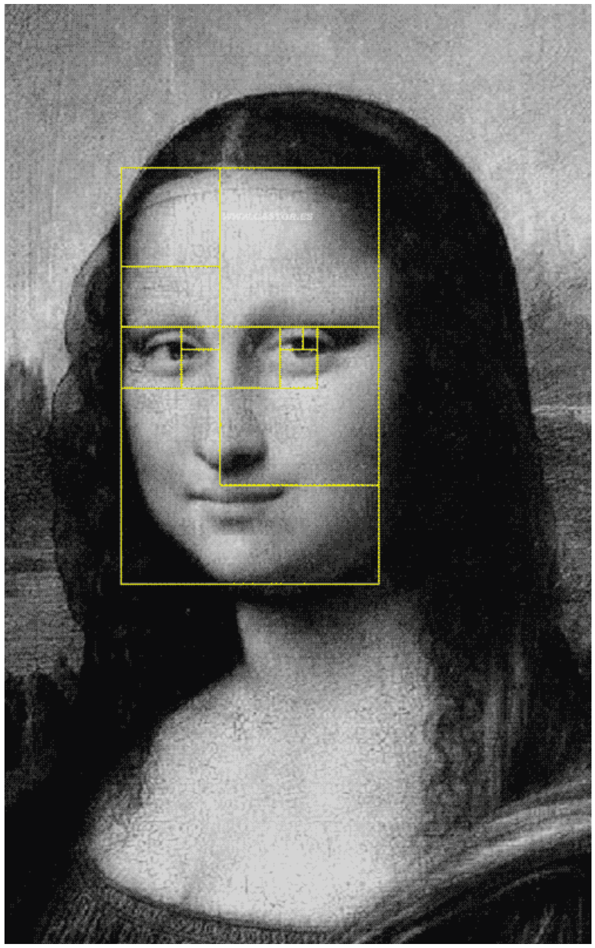
En el segundo ejercicio se le repartirá a cada alumno una tachuela y dos tiras de cartoncillo o papel cascarón aproximadamente de 2 centímetro de ancho y entre 10 a 30 centímetros de largo Cada alumno debe tener dos tiras de igual tamaño pero diferentes del de otros compañeros. El ejercicio es: *Con el material que te proporcione tu maestro elabora un compás áureo*

Se les pedirá a los alumnos que encuentren el sector áureo de sus tiras y que en ese punto coloquen la tachuela de modo que puedan unirse y formar compás. *Como se observa, las tareas de esta actividad son abiertas puesto que se trata de la orientación libre, el docente se limitará a solo leer las indicaciones de la actividad y a proporcionarles el material.*

Fase 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD 10: El objetivo de esta actividad es que el alumno reconozca la importancia de las Matemáticas en el Arte. Esta fase es sencilla y sólo requiere que observe, compare y compruebe con su compás áureo la presencia de *phi* y la semejanza entre el rostro humano y en el cuadro de *Gioconda* y así poder concluir sobre la noción de semejanza, la cual puede ser: *la semejanza es una transformación geométrica que conserva la alineación y los ángulos pero alterando la distancia según un factor proporcional*

La actividad es: *Mide con tu compás áureo partes de tu rostro o el de tu compañero, como la oreja o la boca, escribe tus observaciones. Después observa la figura del cuadro Gioconda o Mona Lisa de Leonardo da Vinci y comenta con tus compañeros y maestro.*



Con lo que hasta ahora has visto, trata de describir que es semejanza:

Para finalizar este nivel, se proyectarán imágenes de la naturaleza en donde la sección áurea está presente. Puede ser proyección o imágenes en cartulinas u hojas, dependiendo de los recursos con los que se cuente.

Como se puede percibir, esta actividad es para que el alumno integre sus conocimientos al utilizar su compás áureo y se advierte una aproximación al concepto de semejanza. La actividad es el cierre del 1er nivel de razonamiento pero también sirve para vincular el arte con las Matemáticas.

TERCERA SESIÓN Nivel 2: Deducción informal. Promover la búsqueda de patrones y regularidades, hacer conjeturas y argumentar sobre la validez de los razonamientos sobre las relaciones y propiedades detectadas
Objetivo del nivel 2: <u>Construir</u> y <u>definir</u> conceptos semi-complejos de tipos de formas geométricas. Los alumnos: - Aplicarán los criterios de Proporcionalidad y Semejanza - Conocerán la relación existente entre los pentágonos y otras figuras con la sección áurea - Observarán y confirmarán la proporción divina en el cuerpo humano - Construirán rectángulos dinámicos

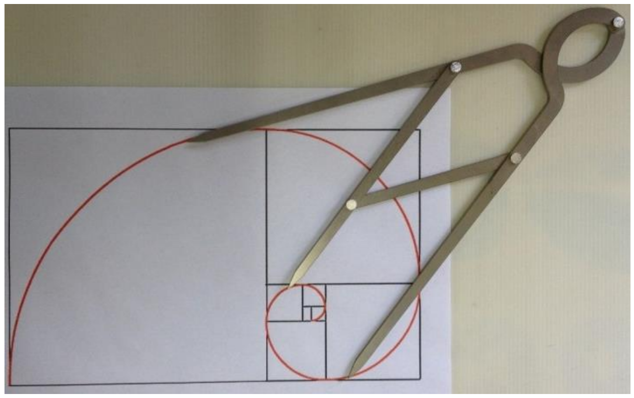
Fase 1: INFORMACIÓN

ACTIVIDAD 11. El propósito es que los alumnos conozcan un poco de la vida de Leonardo y Lucca Paccioli, vincular más el Arte con las Matemáticas y apliquen los aprendido en la elaboración de su compás áureo para explicar otros modelos de compás, los ejercicios son los siguientes:

Consigue tarjetas de teléfono, credenciales, calculadoras, celulares, entre otros objetos rectangulares, mídelos con tu compás áureo y describe que observas ¿son semejantes? ¿Por qué?

Investiga que es semejanza y quien fue Leonardo Da Vince y Lucca Paccioli

Observa el siguiente compás áureo ¿cómo lo construirías?



Como se puede ver los alumnos se informan sobre estas personalidades y repasan el concepto de semejanza.

Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

ACTIVIDAD 12: El objetivo de la actividad es que los estudiantes construyan un pentágono y que observen cómo este es la estructura morfológica de muchos seres vivos. El docente les indicará cómo construir un pentágono regular inscrito. Si los alumnos no llevan transportador, con el cual suelen trazar sus figuras inscritas, se puede construir sólo con regla y compás. Una forma de hacerlo es de la siguiente manera:

1) Trazamos la paralela al eje Y que pasa por B y le llamamos r. A la intersección del eje X y Y la denominamos A;

2) Se traza la mediatriz del segmento AB obteniendo el punto O como corte con el eje X;

3) Trazamos la circunferencia de centro B y radio AB, digamos $C1$;

4) Obtenemos el punto M como corte de $C1$ con la recta r;

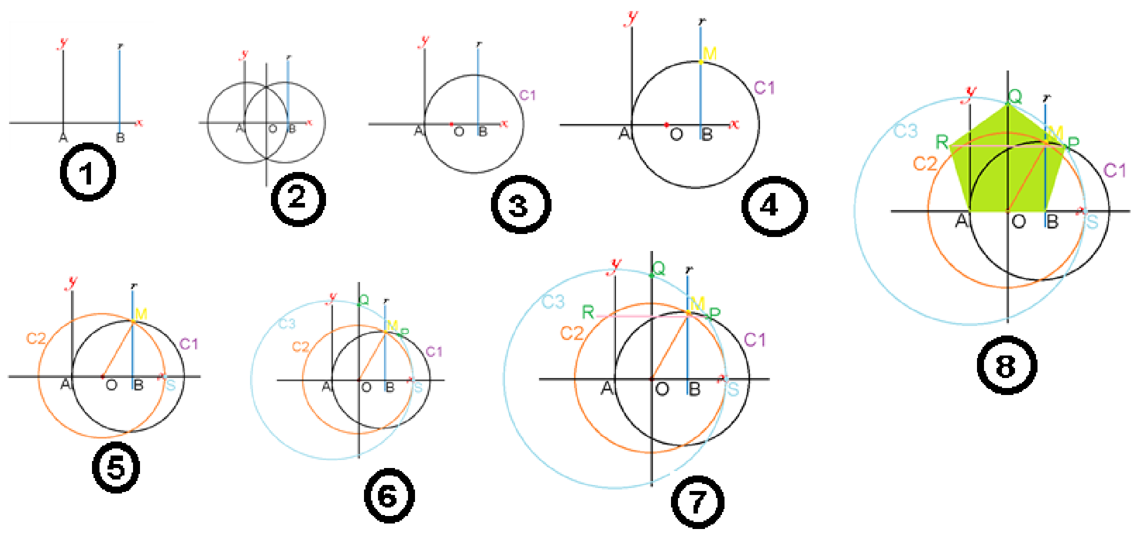
5) Con centro en O trazamos la circunferencia de radio OM, le llamamos $C2$, obteniendo el punto S de corte con el eje X.

6) Trazamos ahora la circunferencia de centro A y radio AS, le llamamos $C3$. Obtenemos el punto P al cortar con $C1$ y el punto Q como corte con la mediatriz del segmento AB;

7) Para obtener el vértice que nos falta, R, simplemente construimos el punto simétrico a P respecto de la mediatriz del segmento AB;

8) Uniendo los puntos A, B, P, Q y R obtenemos el pentágono regular.

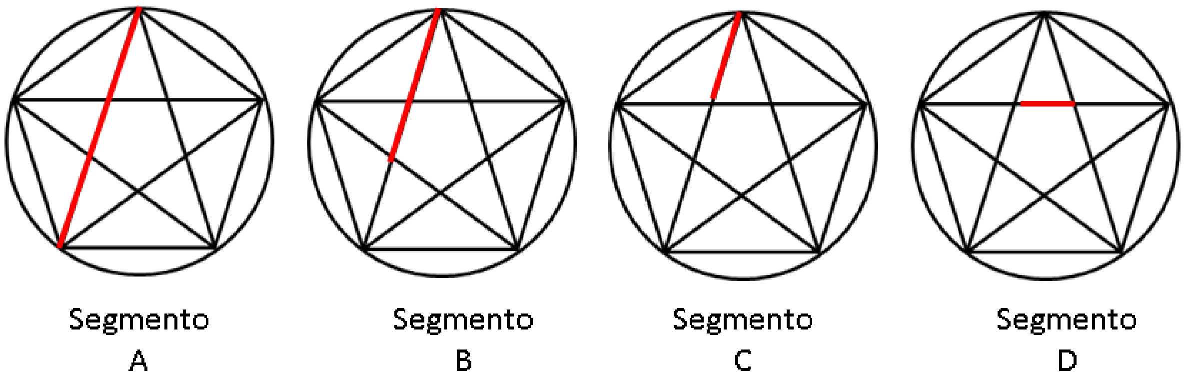
Construye un pentágono regular inscrito. Sigue las indicaciones de tu maestro.



Después se les indicará: *Observa las siguientes imágenes, en qué son semejantes al pentágono*

Cuando se haya terminado el pentágono se pedirá que tracen sus diagonales hasta formar una estrella y a partir de ello se medirá los segmentos marcados para finalizar con las preguntas. En esta fase los alumnos conocerán como la sección áurea está presente en las construcciones, en obras de arte y hasta en la naturaleza. Además desarrollarán la habilidad de representación al ir escuchando y reproduciendo las indicaciones de su maestro.

El ejercicio es: Traza la estrella que se forma con el pentágono y mide los segmentos que se enmarcan.



Nótese que nuevamente el docente da todas las instrucciones para trazar el pentágono ya que esta fase es la de orientación dirigida.

Fase 3: EXPLICITACIÓN

ACTIVIDAD 12: El objetivo de esta actividad es que los alumnos observen la sección dorada en el pentágono y la estrella de cinco picos. En esta fase el docente pedirá al alumno que explique qué es lo que sucede al efectuar las operaciones que se piden y cómo se relaciona con la sección áurea.

Divide la medida del Segmento A entre la medida del Segmento B; la medida del segmento B entre la medida del Segmento C; la medida del segmento C entre la medida del Segmento D; que sumen las medidas de los Segmentos C y D y que lo dividan entre la medida del Segmento C. ¿Qué observas?

Finalmente se pedirá cómo se relaciona la música con las matemáticas de acuerdo con los segmentos antes mencionados, para ello se recordará el video de *Donald en el mundo de la matemáticas*, si es necesario se volverá a ver, pero sólo en la parte donde utilizan los segmentos para la elaboración de notas musicales. El ejercicio es: *Mira el video Donald en el mundo de las matemáticas, puedes hacerlo por internet, y contesta.*

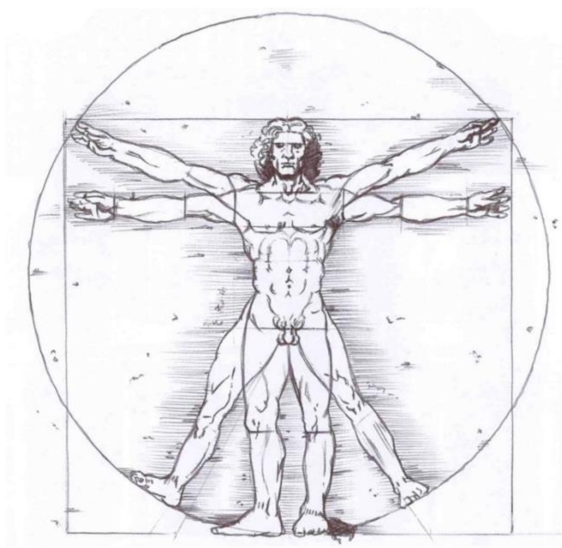
¿Quiénes eran los pitagóricos?

¿Cómo lograron hacer música los pitagóricos?

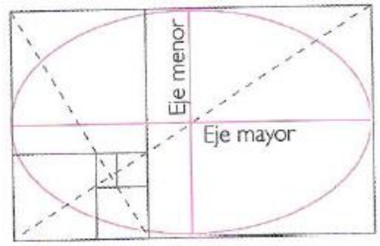
Has una breve reseña del video.
En esta actividad se puede percibir la reflexión que se pretende estimular en los alumnos para que relacione la estrella de cinco picos con la sección áurea.

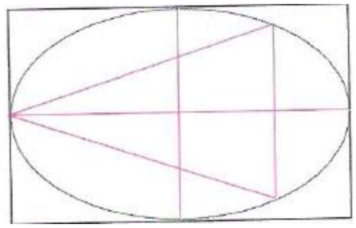
Fase 4: ORIENTACIÓN LIBRE

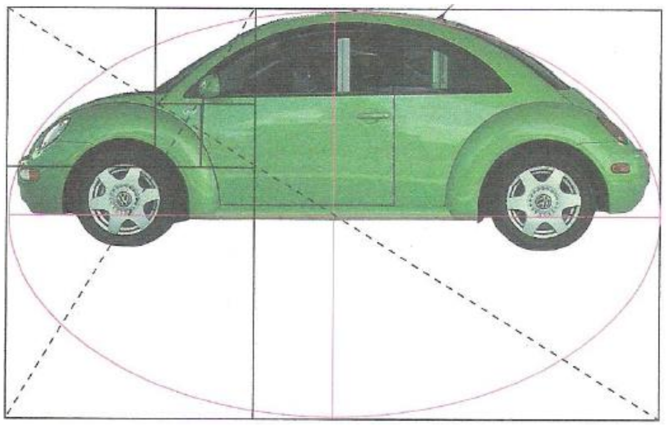
ACTIVIDAD 13: El objetivo de esta actividad es que los alumnos observen y descubran cómo la sección áurea está presente en nuestro cuerpo y en los diseños de algunos objetos modernos así como conocer las criterios de semejanza en triángulos.
El docente repartirá el *Canon* de Leonardo da Vinci y se pedirá que tracen un pentágono y la estrella en el círculo donde está la figura humana. El ejercicio es: *Traza un pentágono y la estrella en el círculo donde está la figura humana.*



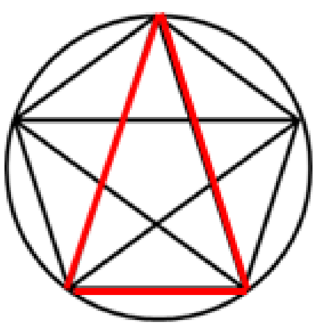
¿Qué observas?
Después se pedirá al alumno que construya una elipse y un triángulo con dimensiones áureas. Una vez que hayan construido lo que se pidió se le dará la imagen del automóvil Beatle, una de perfil y otra frontal. Se solicitará al estudiante que relacione las imágenes con sus construcciones justificando su respuesta. El ejercicio es el siguiente: *Construye una elipse y un triángulo con dimensiones áureas*. *Qué observas con tus construcciones y el automóvil Beatle de la Volkswagen ¿son semejantes? ¿Por qué?*



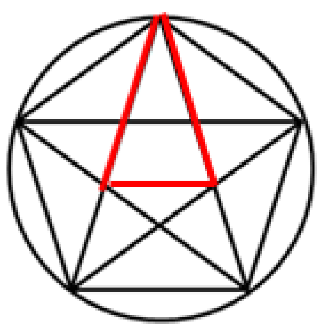




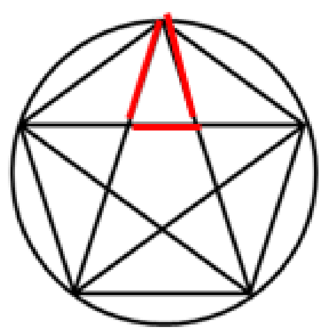
Finalmente, se pedirá al alumno trabajar con el triángulo dorado que se trazó y con los triángulos que se forman en el pentágono, con el fin de que conozcan los criterios de semejanza y manejen el vocabulario. Para ello se aplicará la siguiente actividad: *Compara el triángulo dorado que trazaste con los siguientes triángulos que se forman en el pentágono y contesta las preguntas.*



TRIÁNGULO
A



TRIÁNGULO
B



TRIÁNGULO
C

Uno de los objetivos de la última actividad de esta fase es que los alumnos conozcan matemáticamente el concepto de semejanza, para ello se preguntará *Como son los triángulos,* esperando que contesten que son semejantes, después se preguntará: cuándo son semejantes dos a más figuras, para que ellos puedan llegar al siguiente teorema: *Dos o más figuras son* ***semejantes*** *si sus* ***ángulos*** *respectivos son iguales y sus* ***lados*** *respectivos son proporcionales*. Otro de los objetivos es que conozcan los criterios de semejanza, para lo cual se preguntará: *Justifica por qué son semejantes.*

Se pedirá que midan todos los ángulos de los triángulos y así concluir *Criterio 1: Dos o más triángulos son semejantes si sus ángulos iguales.*

Después se pedirá medir los lados de cada triángulo, posteriormente dividirán el lado del triángulo más grande entre el lado correspondiente de otro y así concluir *Criterio 2: Dos triángulos son semejantes si tiene los lados proporcionales.*

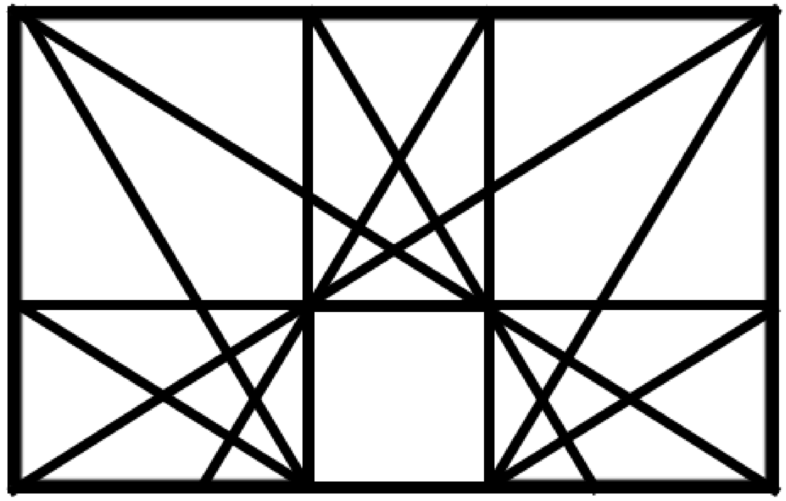
Con los ejercicios anteriores los alumnos pueden concluir *Criterio 3: Dos a más triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.*

Es importante destacar cómo las actividades son abiertas para que el docente no los dirija totalmente y el alumno descubra la relación entre la sección áurea y nuestro cuerpo así como en algunas construcciones humanas.

Fase 5: INTEGRACIÓN

ACTIVIDAD 14: El objetivo de esta actividad es vincular aún más las Matemáticas con el Arte y relacionar la geometría con la papiroflexia. Se desarrollará la habilidad de construcción al pedir al alumno intentar dibujar el rostro de una persona o el suyo. La indicación es: *Intenta dibujar un rostro humano como el del cuadro Mona Lisa de Leonardo Da Vinci. Utiliza el rectángulo dorado.*

Después se mencionará que para los artistas existen dos tipos de rectángulos, los dinámicos y los estáticos. Se mostrará un ejemplo de como el rectángulo dorado nos ofrece un rectángulo. El ejercicio es: *Existen dos tipos de rectángulos, los dinámicos y los estáticos. Investiga a que se refiere cada uno. El rectángulo áureo nos ofrece distintos rectángulos dinámicos, uno de ellos es el siguiente:*



Construye otros

Se dejará de tarea elaborar con color otros rectágulos dorados y dinámicos en cartulina. Tambien se pedirá construir un rectángulo áureo por medio del doblado de papel justificando su respuesta. El ejercicio es: *¿Cómo conseguirías un rectángulo áureo por medio del doblado del papel? Dibuja los pasos que realizarías.*

A partir de este rectángulo construye otros.

Visita las siguientes páginas web:

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/goldensection.html

http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos

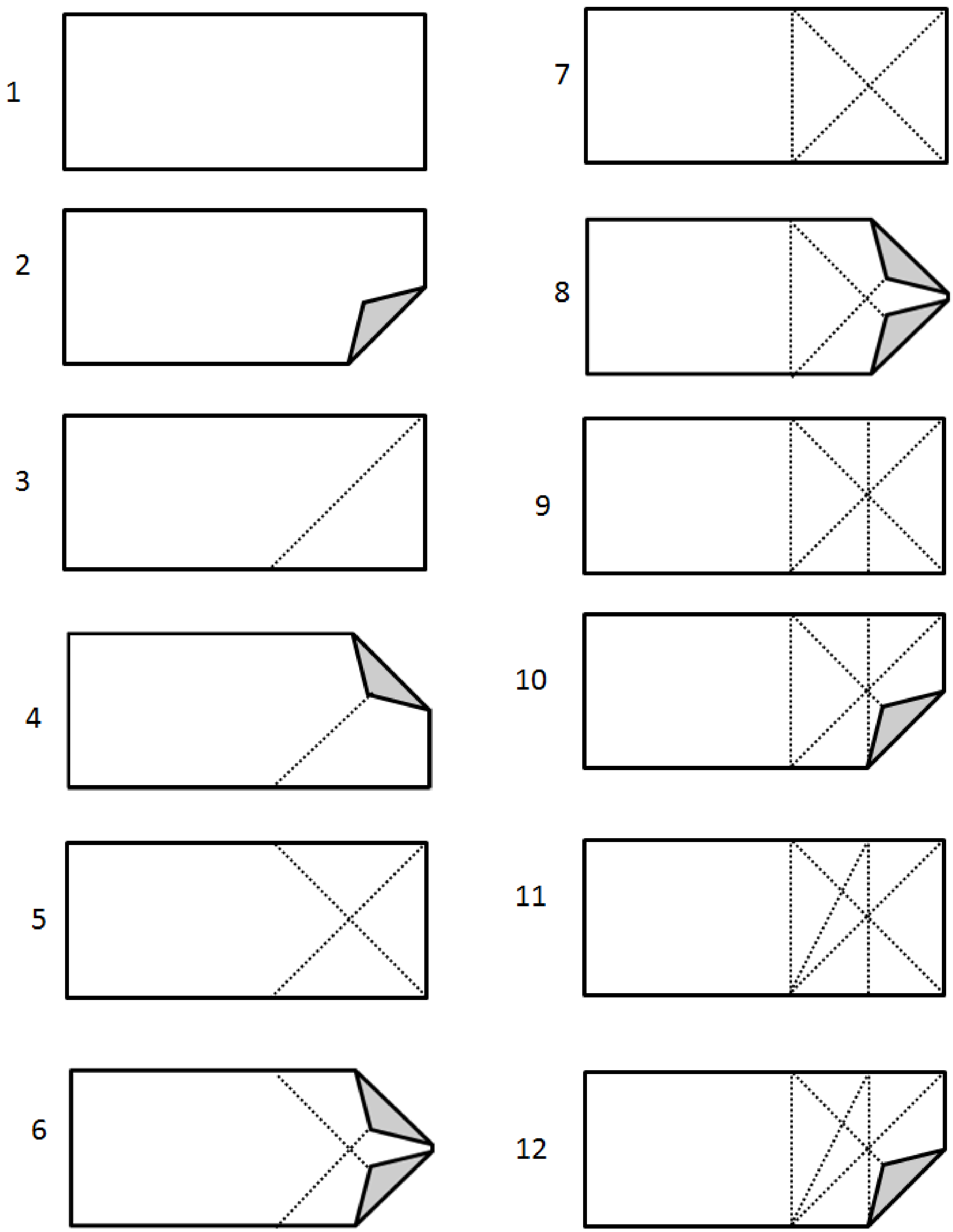
http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea1.htm

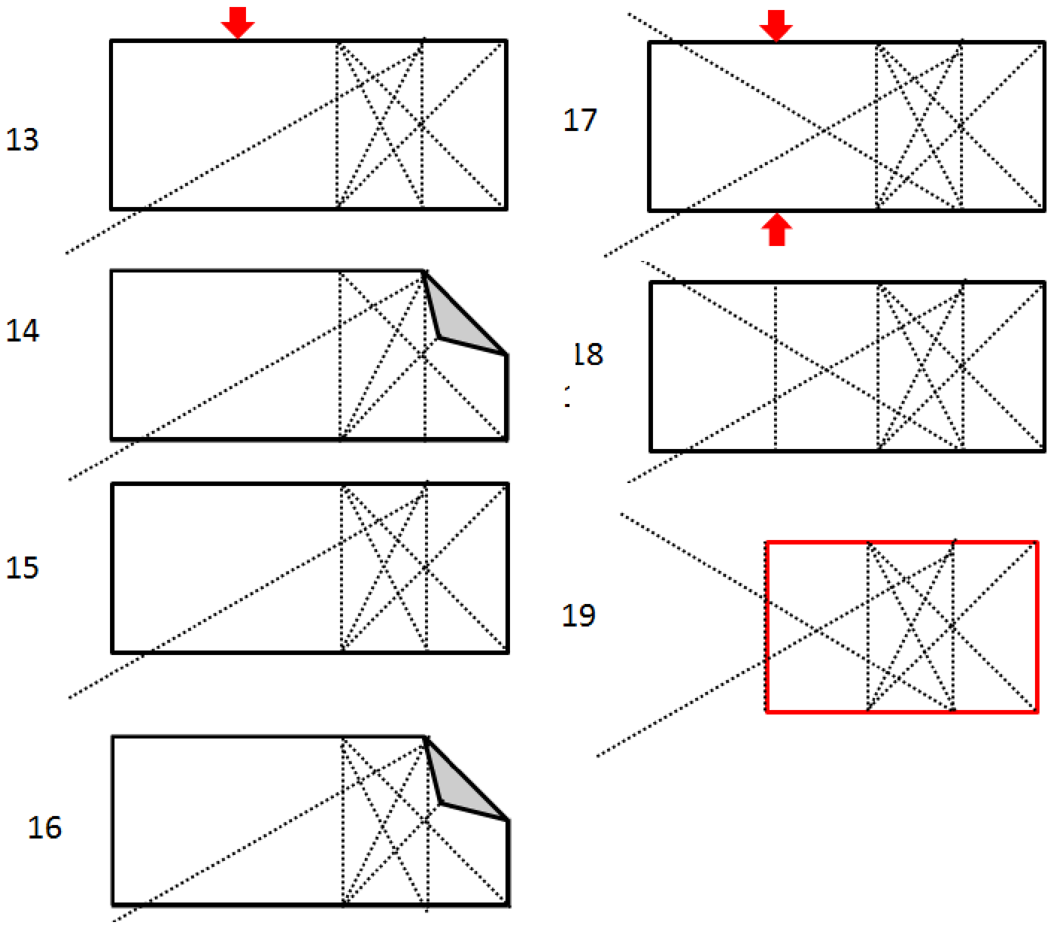
http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea3.htm

http://www.carmenes.org/

Nótese una vez más cómo con estas actividades el alumno integra y aplica sus conocimientos al dibujar un rostro y rectángulos dinámicos. No se debe olvidar cómo la actividad final cierra no sólo el nivel de razonamiento sino el tema de sección áurea en general y además sirve para vincular éste con otros temas interesantes como la papiroflexia.

La sección áurea en papiroflexia





5.4. Sugerencia para evaluar el desempeño de los alumnos

En la tarea del docente siempre está presente la evaluación, pero ésta no debe ser considerada sólo como un papel o un castigo que limite las posibilidades del estudiante, sino cómo un proceso e instrumento de investigación para que el docente tome decisiones sobre los datos obtenidos y el alumno analice su juicio. Para esta propuesta se presentan tres tipos de evaluación: inicial, formativa y sumativa, los cuales explicaré a continuación.

Evaluación inicial. El objetivo de ésta es obtener un diagnóstico sobre el tipo y el grado de conocimiento que tienen los alumnos acerca de las atenciones fundamentales para empezar una temática. Se tienen consideradas las múltiples tareas que el docente realiza, sin embargo esta evaluación no se puede soslayar y para ello se propone la Fase 1: INFORMACIÓN del nivel de razonamiento 0 de cada tema.

Como se dijo antes, la Fase 1 del modelo de Van Hiele es la de Información, por lo tanto dentro de ésta, está implícita la evaluación inicial y no hay problema para su aplicación. En teselados, la actividad de cubrir un espacio con el material proporcionado es la evaluación inicial, pues el alumno busca la forma de recubrir, pero si ya lo había hecho antes entonces sabrá cómo hacerlo, de esta manera el profesor confirmará sus predicciones y hará su diagnóstico.

Para el tema de sección áurea, la actividad de escoger qué rectángulos le gusta más representa la evaluación inicial. Se parte de la idea de que el alumno desconoce esta temática, sin embargo, si alguno de ellos contesta que escogió el rectángulo por estar en composición áurea, es señal de que la materia no le es indiferente y es un dato positivo para el diagnóstico.

Los posibles estándares que el profesor ha de observar para la evaluación inicial son los siguientes:

- Posible reconocimiento del tema
- Reconocimiento de figuras geométricas
- Actitudes frente a la resolución de problema

Evaluación formativa. Su función principal es ajustar el tipo de ayuda que el profesor proporcionará de acuerdo con las necesidades de cada alumno. Una fuente importante es la revisión del cuaderno así como los trabajos hechos en clase. También es recomendable tener una charla informal y breve con el alumno.

A partir de la Fase 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA del nivel de razonamiento 0 y durante los demás niveles, las actividades propuestas están diseñadas para facilitar la observación del avance del alumno en cada nivel. Tanto en teselados como en sección áurea las tareas son progresivas pues siguen el fundamento del modelo Van Hiele y sugiere un estudio más profundo sobre los conceptos construcción con regla y compás, simetría y semejanza.

Las actividades en ambos temas tienen como resultado evidencias físicas, no sólo están plasmadas en el cuaderno de trabajo sino también implican el uso de los instrumentos y conceptos geométricos. Los posibles estándares para esta evaluación son los siguientes:

- Cuaderno
- Material de apoyo
- Hábitos de trabajo y actitud positiva hacia las matemáticas
- Construcción de conceptos
- Avances, dificultades y errores.
- Vinculación entre Matemáticas y Arte

Evaluación sumativa. También es conocida como evaluación final de acreditación y de calificación. Se realiza al final del desarrollo del tema y conceptos aprendidos, sirve para que el docente se informe sobre en qué medida el alumno ha adquirido los conocimientos.

Esta evaluación final no siempre es sinónimo de examen, hay otras formas de evaluar, esta propuesta sugiere la Fase 5: INTEGRACIÓN del nivel de razonamiento 2, es decir la actividad final, la cual, en ambos temas, consiste en realizar un trabajo: en el tema de teselado, elaborar y exponer uno con su explicación y justificación de cómo se llevó a cabo.

En sección áurea, se preponen tres tareas: 1) dibujar un rostro teniendo como base el rectángulo áureo, tratando de imitar al que Leonardo Da Vinci pintó en su cuadro *Gioconda*, 2) construir un rectángulo áureo con doblado de papel, y 3) trazar rectángulos áureos dinámicos. Además de estas actividades, se sugiere tener presente los siguientes estándares, el docente puede agregar más:

- Atiende y muestra interés por el trabajo en clase
- Tiene ilusión por aprender y se divierte con la tarea
- Contrasta sus opiniones con los demás
- Lleva el trabajo al día y valora el trabajo bien hecho
- Sabe trabajar autónomamente y en equipo
- No se perciben bloqueos por hipermotivación, ansiedad o fracaso

Otro elemento para evaluar es el trabajo propio del docente y el tratamiento de la temática, sin embargo, a veces por falta de tiempo, éstos no se pueden realizar, pero no debe descartarse. Se propone entonces una reflexión sobre los siguientes aspectos: a) empleo de recursos, b) interés promovido, c) dificultad de las tareas, d) estructura del trabajo y d) conclusión de la temática, etc.

Asimismo es recomendable evaluar el trabajo docente a través de una interacción con el alumno, pues quién mejor que ellos para evaluar al profesor. Esta evaluación puede hacerse por medio de una charla informal y grupal preguntando a los estudiantes si les gustaron las actividades, qué opinan sobre el tema, qué les parecieron las actividades, entre otras preguntas.

CONSIDERACIONES Y REFLEXIONES FINALES

Como pedagoga me interesa que al estudiante se le proporcione una educación integral, es decir, que constantemente esté en procesos formativos, vincule e integre sus saberes y sea competente para actuar en cualquier tipo de situación. Esto implica, entre otros programas de formación, la elaboración de propuestas y estrategias para que el alumno relacione todos sus conocimientos y adquiera la conciencia de su papel en la sociedad.

Sin embargo, elaborar propuestas y estrategias es una tarea difícil. En este trabajo recepcional una de las complicaciones implicó el rompimiento de una de las formas de pensar de la sociedad, incluso el propio. Se Intentó cambiar la idea de que el sujeto tiene que inclinarse en el estudio de solo una ciencia o de un arte, idea que aún prevalece.

Ese fue mi primer obstáculo para el diseño de la propuesta, aunque hay pensadores que lo han señalado, por ejemplo Snow. Este pensamiento ha permeado en los programas y planes de estudio. Es cierto que se habla de una educación integral, de interdisciplinariedad y multidisciplinariedad, se busca introducir temas transversales, sin embargo los objetivos y contenidos de cada asignatura indican que existe aún esta separación de conocimientos.

Con esta propuesta pretendo una multidisciplinariedad pues se busca el desarrollo de habilidades de dos diferentes campos: Matemáticas y Arte, pero también una interdisciplinariedad. La multidisciplinariedad no servirá a menos que se logre conectar los saberes de dichos campos. En este sentido, no sólo relaciono dos conocimientos que generalmente se consideran opuestos sino que los utilizo de manera integrada.

Mi interés por lograr relacionar dos conocimientos y pensamientos nació de la admiración que me provocaron algunas obras de arte. Obras artísticas en cuya elaboración hay principios matemáticos. Como receptora de la belleza y el complejo matemático y conociendo a sus autores fue como surgió esta propuesta.

A partir de esta experiencia intensa nació el sentimiento de que por medio del Arte el estudiante se interese por estudiar matemáticas. Este es el objetivo principal de mi propuesta, que el escolar estudie matemáticas por medio de temas y obras artísticas, que conozca Arte sin tener que asistir a una clase exclusivamente de éste o a talleres y lecturas extraescolares, como los planes y programas de estudio que la SEP plantea.

Los temas artísticos que se relacionaran con contenidos matemáticos fue relativamente fácil de encontrar. Existen trabajos sobre los temas de sección áurea y teselado. Sin embargo el problema consistió en diseñar las actividades, pues el contenido matemático es tratado en diversas textos, especialmente dirigidos a alumnos de medio superior, pero sin atender la dimensión didáctica.

Fue un trabajo arduo pues no sólo consistió en proponer actividades, implicó desde reconocer y respetar los lineamientos de la SEP y la validez y eficacia del enfoque Resolución de Problemas, escoger los temas artísticos, buscar cómo y con qué temas matemáticos puede relacionarse, y estudiar la teoría pertinente que fundamentara la propuesta.

También se analizaron los libros de textos que se utilizan en los niveles de primaria y secundaria, con el propósito de conocer qué es lo que supuestamente saben los alumnos con respecto a construcciones con regla y compás. Los resultados mostraron que los alumnos no pueden construir con sólo escuchar o leer las instrucciones, aunque no hay que soslayar que si usan regla y compás para trazar una figura modelo ya hecho, es decir, se fomenta más el copiado o reproducción.

La reproducción que se fomenta en los alumnos no es un obstáculo para aprender, ésta permite comenzar a pensar en los elementos que constituyen a las figuras, es decir, son las primeras interacciones cuando se trata de ir más allá del reconocimiento. El quehacer matemático está en validar esa reproducción. Pero considero que el estudiante no se estanque en reproducir sino avanzar a un siguiente tipo de habilidad como el de la construcción.

Ahora bien, no se trató de proponer e implementar sólo actividades, sino en cómo guiar paso a paso al alumno no solo a descubrir y reproducir sino a construir el conocimiento. Como se mencionó anteriormente, hay trabajos donde se vincula el Arte y las Matemáticas, pero generalmente son lecturas extracurriculares que los docentes pueden hacer, pero algunos se limitan abordar el contenido y no consideran la dimensión didáctica.

La teoría que fundamenta esta propuesta es el Modelo Van Hiele. Elaborar y replantear las actividades para cada nivel de razonamiento y para cada fase del modelo no fue sencillo, sobre todo con respecto a las fases finales. Estas actividades no sólo son de dificultades superiores a las de otras fases, sino que a su vez son el puente para el nivel siguiente.

Hay investigadores como Adela Jaime y Ángel Gutiérrez que han trabajado y aplicado el modelo Van Hiele para la enseñanza de la geometría. Pero no han incursionado en cómo utilizar el Arte en este modelo. Sus aportaciones son muy fructíferas y la incorporación del Arte lo enriquece porque no sólo se enseñan contenidos geométricos sino que se vincula estos dos campos de conocimiento y se ofrece una idea y experiencia nueva que va más allá de cálculos y trazos mecanizados.

Esto implicó un trabajo de constante replanteamiento ya que se intentaba conectar tres factores: utilización del Arte como herramienta, aplicación del Modelo Van Hiele y seguimiento de los lineamientos de la SEP. Se ha tenido especial cuidado en trabajar de manera simultánea estos tres elementos pues la intención es elaborar una propuesta que no eluda los planteamientos de la SEP y quede sólo como un anexo a los programas oficiales.

Al final de cada tema se indican páginas web que el docente compartirá con sus alumnos y puedan observar el mundo del Teselado y la Sección Áurea para que no se queden sólo con imágenes impresas y sin color. Existe la posibilidad de que el docente no cuente con los recursos tecnológicos necesarios o que el alumno no pueda avanzar en sus conocimientos por eso se establecieron opciones para ambos casos.

Si en el trascurso de las actividades y sesiones las dificultades de los alumnos persisten, se sugiere que el docente aplique ejercicios similares y que además contesten los reactivos de los libros de texto sobre los contenidos geométricos en cuestión, pues no se debe olvidar que la propuesta está basada en los programas y planes de la SEP.

Para evaluar tanto el aprendizaje de los alumnos como el trabajo docente y de la propuesta misma, se proporcionaron sugerencias y posibles estándares que el maestro debe considerar para cada tema, estos se encuentran al final del capítulo quinto de este trabajo recepcional. No se trata de aplicar un examen sino de procurar que el alumno tenga una experiencia diferente y argumente la validez de sus razonamientos.

No garantizo que los alumnos desarrollen completamente el razonamiento matemático que pretendo en ellos, pues cada alumno es, piensa y aprende diferente, sin embargo sí garantizo un acercamiento diferente, agradable y creativo para que los estudiantes se motiven a estudiar algunos contenidos matemáticos y que vinculen y utilicen dos tipos de conocimiento.

Es importante reconocer que esta propuesta cuenta con limitaciones, entre ellas el no abarcar todos los contenidos matemáticos que se pueden estudiar con estos temas artísticos, como por ejemplo algunos contenidos del Eje Temático Manejo de la Información, para subsanar esto, la propuesta es abierta para que el docente decida ampliarlo o aplicar sólo lo sugerido. Lo que es importante destacar es que se incluyó lo mínimo que el docente debe saber para poner en práctica esta propuesta.

Otras limitaciones son, por un lado, el tiempo requerido para la aplicación de la propuesta. Se considera que la duración para cada nivel de razonamiento sea la de una clase, aunque no se puso en práctica en alumnos de secundaria y puede variar la duración. Se aplicó a estudiantes de educación superior cuyos conocimientos son superiores y se obtuvieron los resultados esperados. La propuesta puede utilizarse no solo para alumnos de secundaria, puede modificarse para alumnos de media superior, superior incluso de primaria y preescolar.

Por otro lado, poner en práctica la propuesta requiere una capacitación para el docente, pues a pesar de tener los conocimientos involucra, entre otros factores, el rompimiento de su forma de pensar y de su actitud ante el saber matemático así como del rol en clase. Una recomendación para que se adentren a esta propuesta es por medio de cursos, talleres o un diplomado de actualización docente. De esta manera reflexionará y tomará conciencia de lo que encierra una enseñanza multidisciplinaria e interdisciplinaria y además contará con más herramientas para la vinculación entre asignaturas y proporcionar una formación integral al estudiante.

Pero la dificultad no sólo consistirá en la resistencia de los docentes, sino en el tiempo del que disponen para la comprensión tanto de los temas artísticos como la interpretación del modelo Van Hiele para un tema específico. Recordemos que la interpretación del tratamiento de temas fue uno de los problemas con el enfoque de Resolución de Problemas. Actualmente hay programas de formación docente, como Carrera Magisterial, los cuales indican que el profesor requiere tomar cursos, uno de ellos sería una opción para plantear y capacitar a los maestros sobre esta propuesta.

Para la enseñanza no existe una receta o un camino establecido en pasos, pero sí se puede elaborar propuestas pedagógicas para que los alumnos puedan aprovechar al máximo la formación que sus docentes les brindan. Con esta propuesta me adhiero a la preocupación por los niveles obtenidos en Matemáticas y espero contribuir al fortalecimiento de una educación multidisciplinar e interdisciplinar.

Relacionar el Arte y las Matemáticas no es difícil, con esta propuesta pedagógica presento mi intento.

BIBLIOGRAFÍA

ALARCÓN BORTOLUSSI, Jesús, *coord.* *Fundamentación del programa de matemáticas*. México: SEP, 2006.

ALMAGUER, Guadalupe. *Matemáticas 1*, México: Limusa, 2007.

ÁVILA, Block y Carbajal. *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: proceso de enseñanza y aprendizaje.* Coord. Ángel. México: Mc Graw Hill, 2005.

BRESSAN, Ana María, Batriz Bogisic y Karina Crego. *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. Buenos Aires: Novedades Educativas, 2000.

BRISEÑO, Luis y et. Al. *Matemáticas 2*, México: Santillana, 2008.

CASTREJÓN, Apolo y Castrejón, Ortos. *Matemáticas 3*, México: SM, 2009.

COLLETTE, Jean-Paul. *Historia de las Matemáticas I*. México: Siglo Veintiuno, 1986.

COMISIÓN DE TITULACIÓN DE LA LICENCIATURA EN PEDAGOGÍA. *Licenciatura en pedagogía: lineamientos para la titulación*. México: UPN, 1989.

CORNELIS ESCHER, Maurits. *Estampas y dibujos. Introducción y comentarios de M. C. Escher.* Trad. Felix Treumund. Berlin: Benedikt Pekín: Taschen, 1989

CORNELIS ESCHER, Maurits. *M. C. I*. Trad. Hisako Ishihara. Pekín: Taschen, 1960.

ELAM, KIMBERLY *Geometría del diseño: estudio en proporción y composición.* trad. De Javier Alejandro Barrientos y Olivares. México: Trillas, 2003.

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM. *León Battista Alberti. De la pintura.* México: UNAM, 1996.

FERNÁNDEZ, Héctor. “Registro de las huellas” en *Manual para elaborar investigaciones monográficas en Educación.* México: Limusa-UPN, 2008.

FREUDENTHAL, Hans. “Mayor Problems in Mathematics Education” *Educational Studies in Mathematics*. Trad. Alejandro López Yáñes. Vol. 12, No. 2, 1981.

G. Polya. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas: 1965, p. 19

GARCÍA Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero. *La enseñanza de la Geometría*, México-Coordinación editorial: Miguel A. Aguilar R y Teresa Ramírez Vadillo, 2008.

GONZÁLEZ Kreysa, Ana Mercedes. *Historia general del arte*. Tomo 1, San José: EUNED, 1990.

GUALDRÓN PINTO, Élgar y Ángel Gutiérrez Rodríguez. ”Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza” en SEIEM, Colombia, 2006.

GUTIERREZ R. Ángel y Adela Jaime P. “¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría?” en *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* Bogotá, Iberoamérica: 1995.

HIDALGO SOLÍS, Laura. *Temas de matemáticas para bachillerato. Mosaicos*. México: UNAM, 2007.

HITT, F. “Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum” en *Educación Matemática,* vol. 10. Mexico: Grupo Editorial Iberoamericana:1998.

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EVALUACIÓN EDUCATIVA. *Panorama educativo de México. Indicadores del Sistema Educativo Nacional, 2012 Educación Básica y Media Superior.* México, INEE: 2013.

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EVALUACIÓN EDUCATIVA. *PISA en el aula: matemáticas*. México, INEE:2008.

IZQUIERDO ROCHA, Pilar. *Guía del estudiante: más actual mexicana*. Coord. Jaime Borneo Tarre, Tomo 4, ciencias exactas. Madrid: NIESA, 1993.

JAIME, Adela y Ángel Gutiérrez. “Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria” en Tecné, Episteme y Didaxis, núm. 32, segundo semestre 2012.

JAIME PASTOR, Adela. *Aportaciones a la interpretación y aplicación al Modelo Van Hiele. Enseñanza de las isometrías. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis para obtener el grado de doctor, Valencia, 1993.

JAIME PASTOR, Adela y Gutiérrez Rodríguez, Ángel. *El grupo de las isometrías en el plano*. España: Síntesis.

LERNER, Delia. *La Matemática en la Escuela. Aquí y ahora.* Aique. Buenos Aires, 1997.

LIVIO, Mario. *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo*. 3er ed. Barcelona: Ariel, 2006.

MANCERA, Eduardo. *Saber matemáticas es saber resolver problemas*. México: Iberoamérica, 2000.

MANTECA AGUIRRE, Esteban, coord. *Libro para el maestro. Matemáticas, secundaria*. México: SEP, 2006.

MARKARIAN, Roberto. *La dimensión humana de la matemática*. México: Correo del maestro y Ediciones la Vasija: 2003.

NASSIF, Ricardo. *Pedagogía General*. Buenos Aires: Kapelusz, 1984.

ORTEGA GUZMÁN, Myrna. "Educación artística en el primer ciclo de la escuela primaria: expresión o copia". Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, México, UPN: 2005.

PÉREZ O. Claudia J. y María Eugenia Ruiz. "Estrategia lúdicas aplicando el modelo Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría". Tesis de Licenciatura en Humanidades y Educación, Mérida, Universidad de los Andes: 2010

POMMERSHEIN, James E., Marks, Tim K. y Flapan, Erica L. (2010). *Number Theory. A lively introducction with Profs, Applicatios, and* Stores. EUA, Jhon Wiley & Sons, Inc., 2010.

RUISÁNCHEZ SERRA, Juan Manuel. "Teselaciones, o cómo decorar el baño" *Correo del Maestro*, Año 3, Núm. 26, 1998.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. *Fundamentación de la asignatura de Matemáticas. Secundaria 1 a 3*. México: SEP, 2006.

SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. *Libro para el Maestro de Matemáticas en Secundaria 1 a 3*. México: SEP, 2006.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA*. Plan de Estudios 2006 de Educación básica. Secundaria de Matemáticas*. México: SEP, 2006.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. *Plan de Estudios 2011. Educación Básica.* México*:* SEP, 2011.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. *Programas de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP, 2011

T. BAGNI, Giorgio y D'Amore. *Leonardo y la matemática*. Bogotá: Magisterio, 2007.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. *Reglamento General para la Titulación Profesional de Licenciatura de la Universidad Pedagógica Nacional*. México: UPN, 1989.

Páginas de internet

- Godino, Juan. *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. En línea, consultado el 17-09-13 en:

http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf
- Godino, Juan D. y Francisco Ruiz. "Transformaciones geométricas. Simetría y semejanza" en *Geometría y su didáctica para maestros*, 2002. En línea: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/
- http://www.mcescher.nl
- http://www.mcescher.com
- http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-back.htm
- http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/
- http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/goldensection.html
- http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos
- http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea1.htm
- http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea3.htm
- http://www.carmenes.org/
- Instituto Nacional para la Evaluación Educativa. *Explorador EXCALE.* En línea: http://www.inee.edu.mx/explorador/nuestraDificultad.php
- Velandia, Lluvia. *Historia del arte*, en línea:

http://www.monografias.com/trabajos13/histarte/histarte.shtml

ANEXO 1

Teselaciones o cómo decorar el baño[73]

[73] Ruisánchez Serra, Juan Manuel. "Teselaciones, o cómo decorar el baño". *Correo del Maestro*, Año 3, Núm. 26, 1998, pp. 20-37

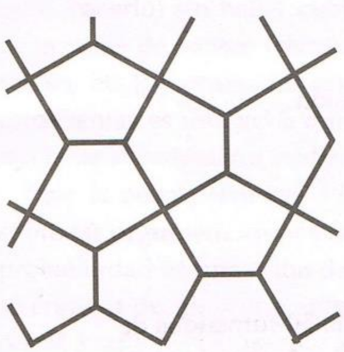
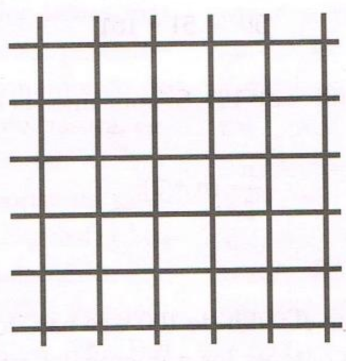
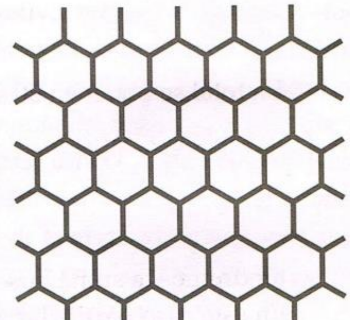
Teselaciones, o cómo decorar el baño*

Juan Manuel Ruisánchez Serra

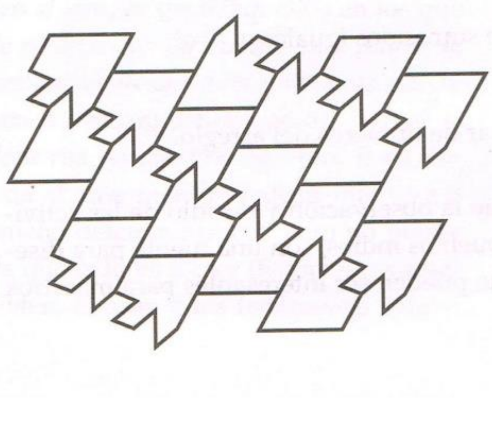
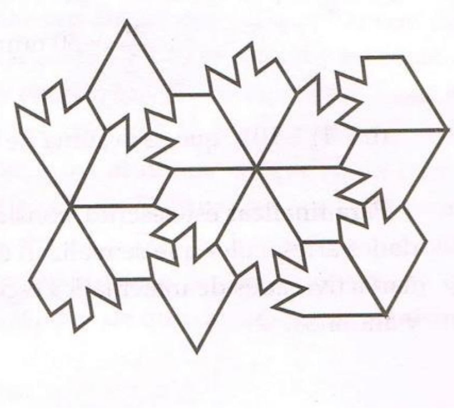
Ésta, como casi todas las historias, es una historia del mundo. Sólo que esta historia es viejísima, pero viejísima en serio, de cuando el mundo era sólo una idea y de cuando sólo existía un mundo matemático.

Quizás se pregunten qué tiene que ver eso con la decoración de los baños, pero no se desesperen que luego lo descubrirán.

Yo era un *teselador*, pero no me gustaba el nombre de mi oficio, así que todos me conocían como el *decorador de planos infinitos*. Sí, hay una leve diferencia entre *teselador* y *decorador de planos infinitos*: el primero, lo único que tiene que hacer es encontrar figuras con las que se pueda cubrir un plano infinito sin que las figuras se amontonen y sin que queden huecos en el plano; el segundo, además de eso, busca que las figuras sean bonitas o interesantes. Por ejemplo, un *teselador* haría estas teselaciones:

mientras que un decorador haría éstas:

Aparte de *teseladores*, en aquel mundo había otros oficios: pulidores y reparadores de esferas, mecánicos electronuméricos y cosas por el estilo; pero no crean, desde entonces ya había contadores públicos y abogados, de esos no nos salvábamos.

Era un mundo divertido. Y aunque a muchas personas les sorprende saber que en el mundo de la matemática había muchísimos chismes y rumores, así era. De hecho, esta historia se trata de un rumor que circulaba por todas partes: un poderosísimo ente, Don Dios, estaba planeando crear el *Universo* y el Demonio electo de la matemática quería darle algunas sugerencias. También se decía que, como todos los entes poderosísimos de entonces, Don Dios no aceptaba fácilmente las sugerencias de los demás, así que el Demonio tenía un plan. Y aquí es donde yo entro en escena.

Una mañana, mientras trabajaba tranquilamente en mi taller, recibí esta carta:

> *Queridísimo señor:*
>
> *Supongo que habrá escuchado el extendido rumor sobre la creación del* ***Universo****. Ruego a usted se ponga a mi servicio para llevar a cabo un plan.*
>
> *Necesito su ayuda y la de su noble oficio; sírvase visitarme mañana en mi palacio y traiga con usted un catálogo de su trabajo. Mi plan le será informado a usted personalmente.*
>
> *Atentamente*
>
> *DM*

Tal como indicaba la carta, me presenté en el majestuoso palacio a la mañana siguiente con mi *Catálogo de planos*. La verdad es que no entendía para qué necesitaría un *teselador* para su plan, pero preferí esperar a ver (no estaba seguro de que el Demonio estuviera al tanto de aquello de *diseñador*).

Fuimos directo a los negocios:

–Me gustaría ver su catálogo.

–Sí, claro. Aquí lo tiene:

(3^6); (4^4); (6^3); $(3^4,6)$; $(3^3,4^2)$; $(3^2, 4, 3, 4)$; $(3, 4, 6, 4)$; $(3, 6, 3, 6)$; $(3, 12^2)$; $(4, 6, 12)$; $(4, 8^2)$…

El Demonio se me quedó viendo con cara de "¿Y bien?"

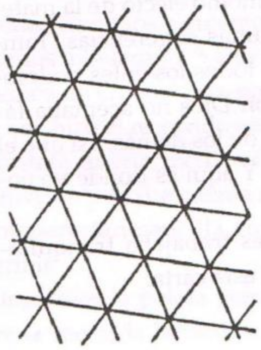
–¿Algún problema?

–Sí, me parece que usted no entiende. Le pedí planos con figuras, no paréntesis con números.

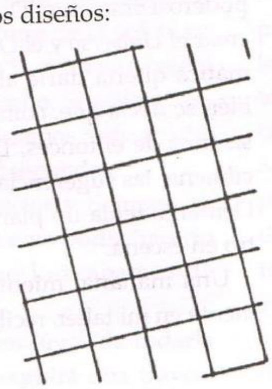
–No, no, no; esos números son tan sólo notación; pensé que ya la conocería.

–El hecho de ser el Demonio electo de la matemática no implica que sepa todo. Yo me dedico a la teoría del caos en funciones contractoras, así que preferiría ver los planos, no la notación.

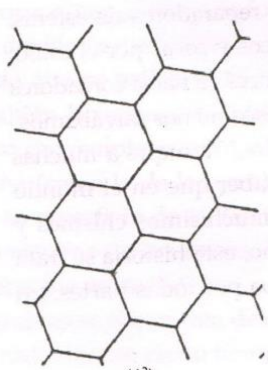
-De acuerdo, aquí están los diseños:



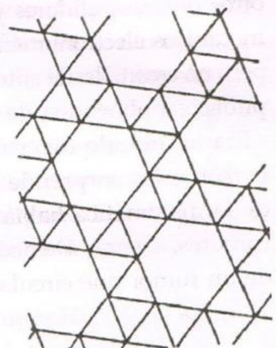
(3^6)



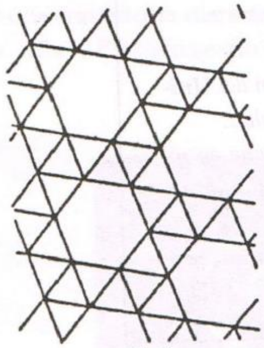
(4^4)



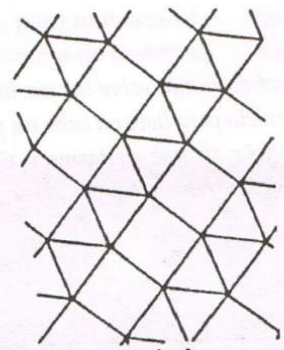
(6^3)



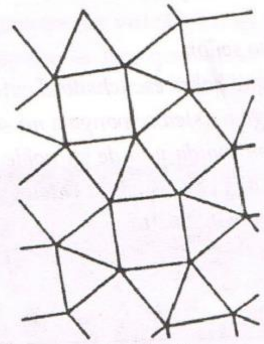
$(3^4 . 6)$



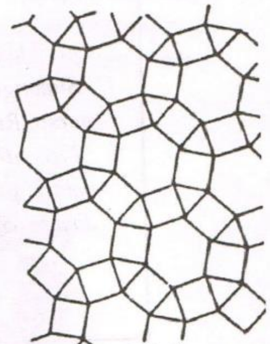
$(3^4 . 6)$



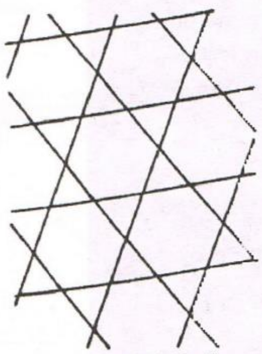
$(3^3 . 4^2)$



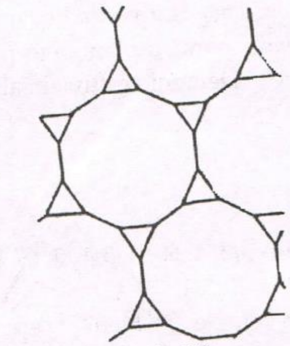
$(3^2 . 4 . 3 . 4)$



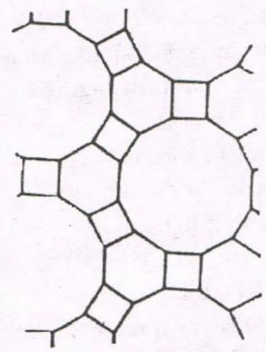
$(3 . 4 . 6 . 4)$



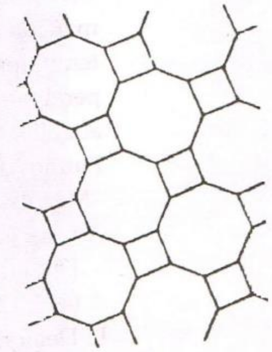
$(3 . 6 . 3 . 6)$



$(3 . 12^2)$



$(4 . 6 . 12)$



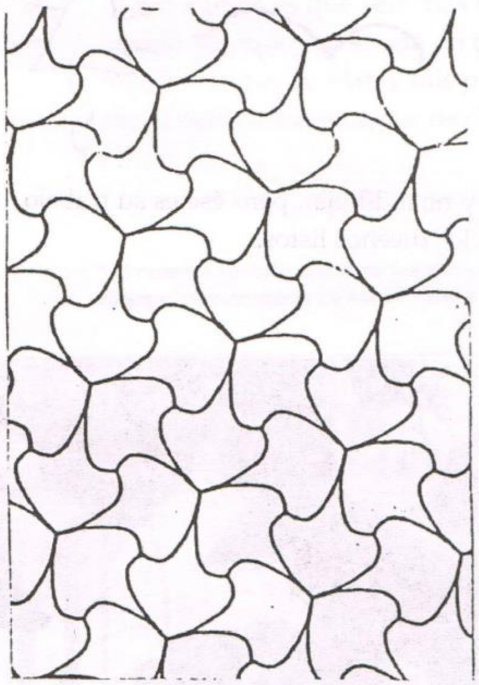
$(4 . 8^2)$

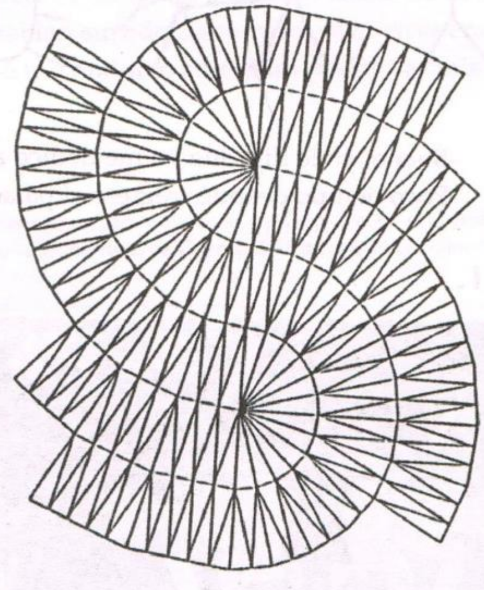
–¿Qué es esto?

–Son los diseños. Por ejemplo, (3^6) quiere decir que en cada vértice hay 6 triángulos; o, en otro ejemplo más complicado (3^2, 4, 3, 4) quiere decir que en cada vértice hay 2 triángulos, 1 cuadrado, 1 triángulo y 1 cuadrado, como se ve en el diseño marcado por (3^2, 4, 3, 4). Es decir, la notación indica cómo se acomodan las figuras alrededor de cada vértice para sumar 360° y que no se amontonen alrededor de ningún vértice, pues, además, todos los vértices son iguales y…

–Sí, sí, sí; eso ya lo vi, pero le dije **planos**, y quería decir planos infinitos, grandotes, inacabables, etcétera, no estos rectangulitos.

-No se enoje y déjeme explicarle: éstas son sólo las muestras, pues cargar los planos completos es muy incómodo y muy poco discreto. Pero no se preocupe, con esos dibujos se pueden llenar planos infinitos, pues todos los vértices son iguales y por lo tanto los dibujos se pueden ir *pegando* uno a otro infinitamente; confíe en mí. ¿Qué le parecen?
-Bueno, ya sabe, aquí todos conocemos los chismes y rumores de los demás y justo por eso lo llamé a usted, porque dicen por ahí que más que teselar los planos su trabajo es decorarlos ¿es verdad?
-Sí, así es, sólo que no sabía que eso es lo que quería. Aquí tengo algunas muestras:



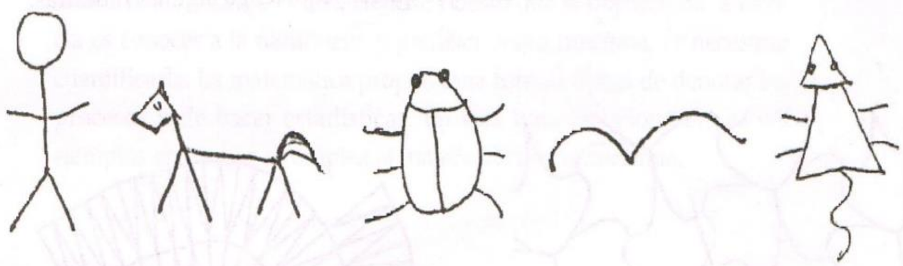


–Estos me gustan más, sobre todo sin tanta suma de ángulos y teorías.
–No crea, estos diseños necesitan más cuidado en la teoría y detrás también hay algunas sumas de ángulos y uso de polígonos; pero eso no importa ¿qué le parecen?
Se quedó pensando un momento y luego me dijo:
–Creo que lo mejor será contarle mi plan, aunque seguro ya habrá oído al respecto. Don Dios quiere crear el *Universo* y quiere incluir unos *seres vivos* en él. Lo que yo quiero es sugerirle la forma de los *seres vivos*. Pero seguro que ha oído del carácter de Don Dios: no acepta sugerencias; así que quiero hacer las sugerencias de un modo subliminal.
–Aún no entiendo qué tengo que hacer yo.

–Mire, yo invitaré a cenar a Don Dios y en la cena incluiré algún purgante o algo parecido para que después tenga que ir varias veces al baño, ¿entiende? Su trabajo será realizar la decoración de mis tres baños. Son cuartos como cualquier otros, sólo que infinitos. Es decir, diseñará 18 planos infinitos: 4 paredes, el techo y el piso de cada baño. El diseño incluirá mis ideas para los *seres vivos*.

–Está bien, pero necesito saber cuáles son sus ideas para los diseños.

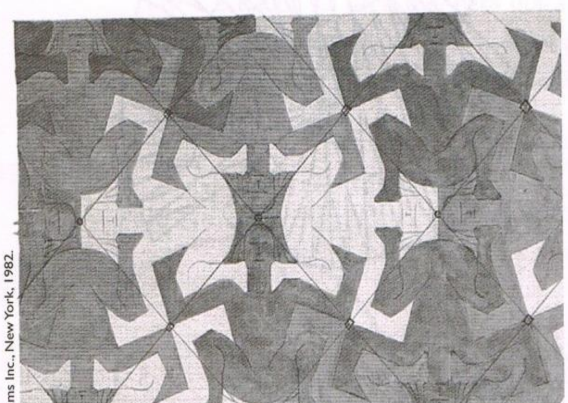
–Claro. Son cosas como éstas:



–Bueno, ya le dije que yo me dedico al caos y no a dibujar, pero ése es su trabajo.

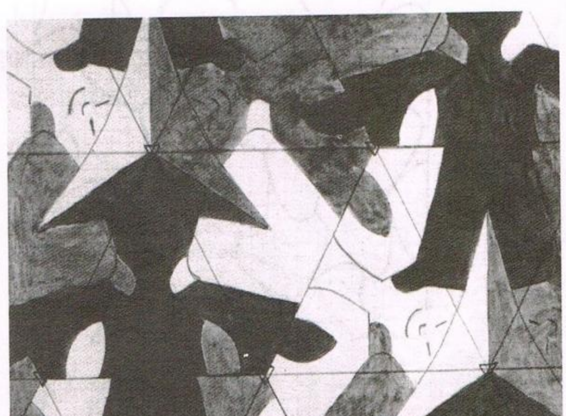
Poco tiempo después regresé al palacio con los diseños listos.

Baño 1.



F.H. Bool, et al. *M.C. Escher, His life and complete work.* H.N. Abrams Inc., New York, 1982.

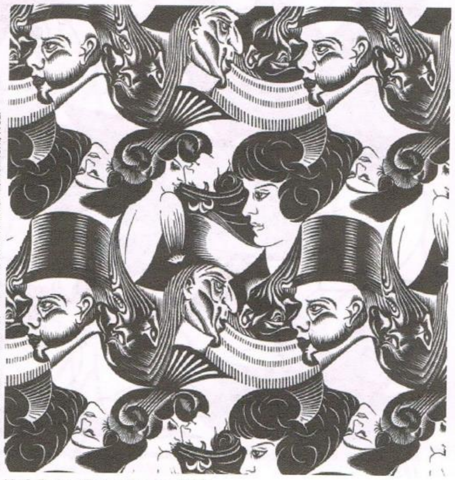
M. C. Escher. Uno de sus primeros estudios sobre la división regular del plano. 1936.



Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher*, H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con figuras humanas. 1936.

Baño 1.

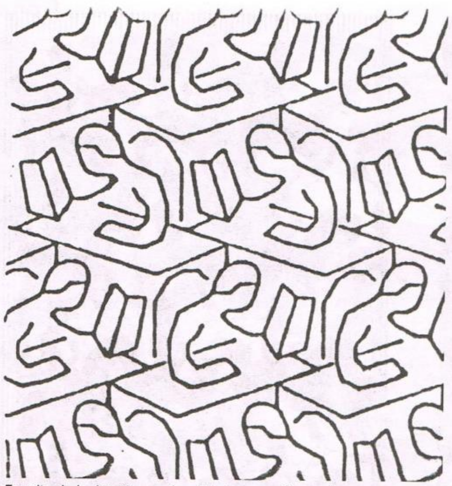


Escher, M.C., Locher, J.L. *The world of M.C. Escher*, H.N.Abrams, Inc., New York, 1982.

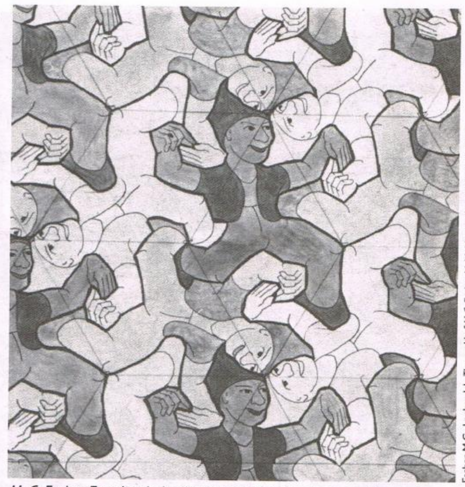
M. C. Escher. Ocho cabezas. 1922.

Escher, M.C., Locher, J.L. *The world of M.C. Escher*, H.N.Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con figuras humanas. 1944.



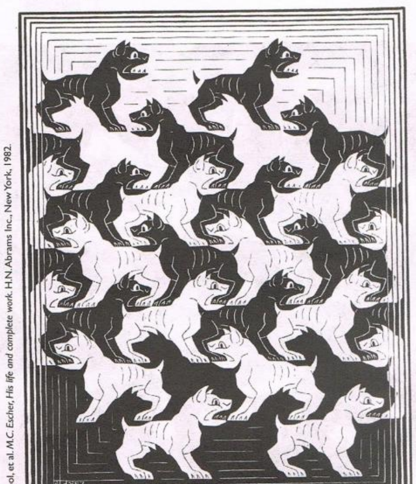
Estudio de la división regular del plano con figuras humanas.



Escher, M.C., Locher, J.L. *The world of M.C. Escher*, H.N.Abrams, Inc., New York, 1982.

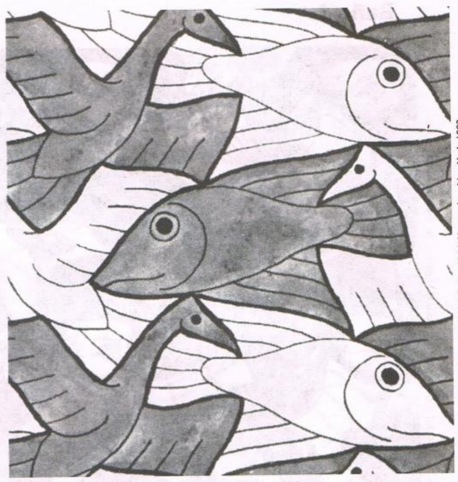
M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con figuras humanas. 1938.

Baño 2.



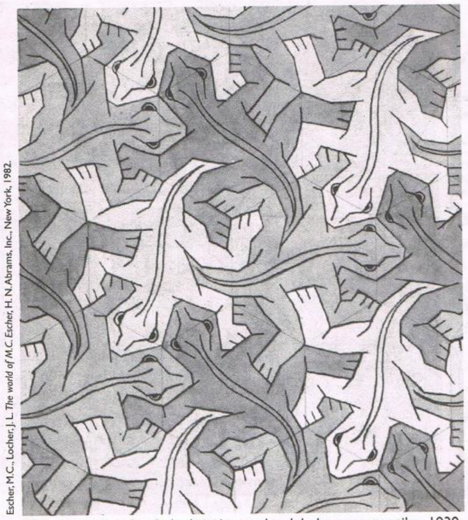
F.H. Bool, et al. *M.C. Escher, His life and complete work.* H.N.Abrams Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. División regular del plano IV. 1957.



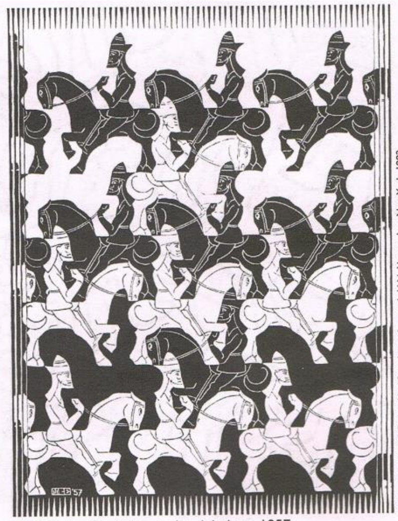
Escher, M.C., Locher, J.L. *The world of M.C. Escher*, H.N.Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con aves y peces. 1938.



Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher.* H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con reptiles. 1939.

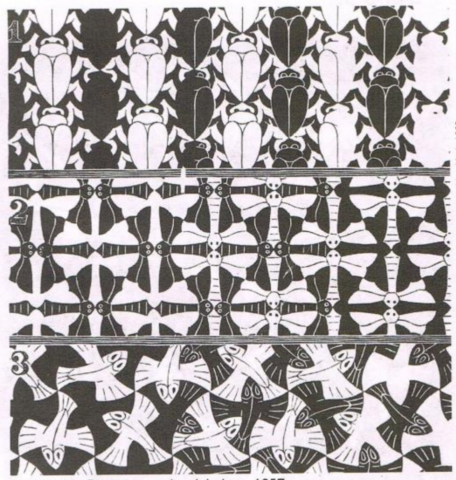


F.H. Bool, et al. *M.C. Escher, His life and complete work.* H.N. Abrams Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. División regular del plano. 1957.

Baño 2.

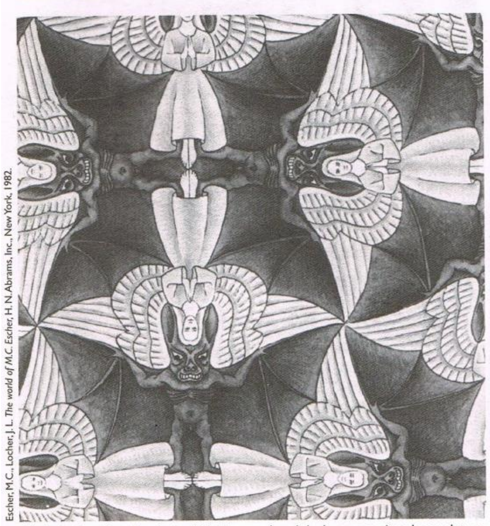
División regular del plano.



Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher.* H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. División regular del plano. 1957.

Baño 3.



Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher.* H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con ángeles y demonios. 1941.

Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher.* H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

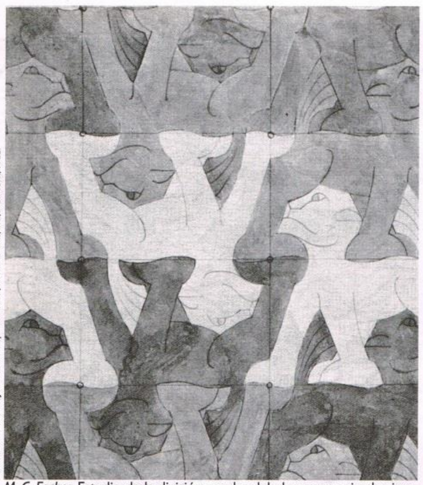
M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con aves. 1938.

Baño 3.

Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher*, H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

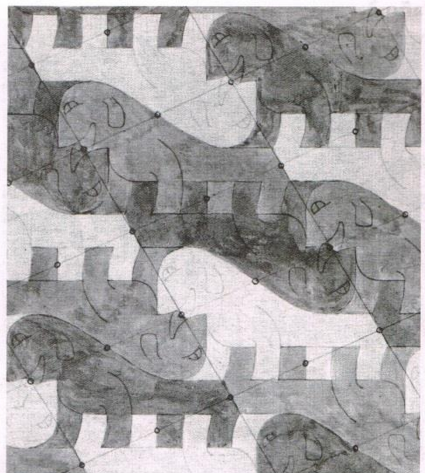
M. C. Escher. Sol y luna. 1948.

División regular del plano.



Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher*, H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con animales imaginarios. 1926.



Escher, M.C., Locher, J. L. *The world of M.C. Escher*, H. N. Abrams, Inc., New York, 1982.

M. C. Escher. Estudio de la división regular del plano con animales imaginarios. 1926.

–Me encantan. ¿Cuándo tendrá los planos completos?
–Los tendré mañana mismo, sólo es cuestión de repetir las mismas imágenes teniendo cuidado de que empalmen bien y llenar el plano con ellas, no hay ningún problema.
–De acuerdo, muchísimas gracias.
–De nada. Espero que su plan funcione.

Al día siguiente llevé los planos terminados y la cena se realizó tres noches después. Cuentan los rumores que Don Dios tuvo que visitar al menos cinco veces cada uno de los baños del palacio y que hubo dos planos que le gustaron especialmente y que por ellos creó tantos *seres vivos* como ésos, pero nunca me dijeron cuáles eran.

Otro rumor es que seis días después de aquella cena, el *Universo* ya había sido creado (aunque eso sí que no me lo creo...). Como el Demonio electo de la matemática vio que su plan y mis planos habían surtido efecto y los *seres vivos* eran como él había planeado, me recompensó trayéndome aquí para poder ver mis creaciones. ◇

* El maestro también encontrará ejercicios con teselaciones, para preescolar y primer año, en el artículo *Las abejas y las matemáticas* de Alejandra Alvarado y Concepción Ruiz, de Correo del Maestro No.2, julio, 1996.

APENDICE A

REVISIÓN DE LAS HABILIDADES POR DESARROLLAR EN PRIMARIA Y SECUNDARIA

PRIMARIA

1o Grado de Primaria

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Cuerpos geométricos	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Identifica figuras semejantes • Copia un cuerpo geométrico	6 Agrupa cuerpos con la misma características	Reproducción Simple
Forma: Patrones de Figuras	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Dibuja algunas figuras de la lección • Copia figuras por medio de una cuadricula • Escoge una figura, lo produce e inventa un modelo en su cuaderno.	28 Formas y colores	Reproducción simple y media

2o Grado de Primaria

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Figuras Planas	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Desdobla una caja, identifica y dibuja las caras que la conforman.	18 ¿Puedes reconocerlos?	Representación Simple Reproducción Simple

3o Grado de Primaria

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Cuerpos geométricos	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Conoce las partes de un cuerpo geométrico (cara, aristas y vértices) • Construye un cuerpo y llena una tabla con el número de vértices, aristas y caras • Conoce el cilindro	6 Cuerpos geométricos	Reproducción Simple Construcción Simple
Forma: Cuerpos geométricos	No se utilizan instrumentos, pues solo se clasifica y se describen los cuerpos	El alumno: • Clasifica cuerpos en pirámides y prismas • Describe algunos cuerpos, entre ellos un cono, un cilindro y una esfera.	7 ¿Iguales o diferentes?	Representación Simple y Media
Forma: Cuerpos geométricos	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Dibuja dos objetos que conozca y que tenga la forma de un prisma y de un cilindro • Describe el cuerpo a uno de sus compañeros para que dibuje el objeto que más le gustó • Describe y dibuja un objeto que se parezca a un prisma y un cilindro.	8 Dibujo y Adivino	Representación Media Reproducción Media

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Figuras Planas	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Calca una serie de figuras para doblarlas y ver si tienen ejes de simetría • Dibuja una figura simétrica y otra no simétrica por medio de cuadrículas	31 Los ejes de simetría	Reproducción Simple Representación Compleja Construcción Simpe
Espacio: Ubicación espacial	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Reproduce en una cuadrícula limpia una figura ya dada en otra cuadricula • Hace una figura que tenga al menos dos ejes de simetría • Realiza un dibujo semejante a los ejercicios anteriores, lo describe a un compañero para que lo dibuje y ver si éste lo realiza igual que el original. • Rellena de cuadritos	32 Cuadriculas Y Figuras	Reproducción Simple Construcción Compleja Representación Simple

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Rectas Y Ángulos	Se pide una regla sin graduación y un compás	El alumno: • Copia unos segmentos de recta sin regla. Conoce cómo los griegos median sólo con un compás y una regla • Traza rectas con el tamaño de algunos objetos que les dan con regla sin graduación. • Realiza una estrella con un segmento dado.	48 Medir con regla y compás de los griegos	Representación Compleja Reproducción Media Y Compleja Construcción Compleja

4o Grado de Primaria

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Cuerpos geométricos	Regla y otros tipos de materiales (plastilina, popotes, etc.)	El alumno: • Construye cuerpos con popotes, plastilina y otros materiales, • Mide la longitud de los popotes los cuales representan las aristas y las esquinas los vértices	6 Construcción de Cuerpos	Reproducción Simple Construcción Media

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Figuras planas	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Reproduce el plano de un cubo • Imagina el cuerpo a partir de una figura	7 ¿Cómo están hechas?	Representación Compleja Reproducción Media
Forma: Cuerpos geométricos	No se especifica los instrumentos geométricos, sólo se dan las tareas. Se piden cajas y tubos de papel higiénico.	El alumno: • Construye de algún objeto, como una casa, un muñeco con cajas (prismas rectangulares), tubos de papel higiénico, entre otros • Describe las figuras y cuerpos geométricos que forman su construcción • Especifica la diferencia entre una figura y un cuerpo	17 ¿Figuras y cuerpos geométricos en la naturaleza?	Representación Simple Construcción Simple
Medida: Unidades	Transportador (Media Luna)	El alumno: • Mide con el trasportador una serie de ángulos con la abertura hacia la derecha Conoce el grado como unidad de medida. • Mide todos los ángulos que encuentre en la letra M. El transportador que se muestra en el libro es el tradicional, el de media luna con sólo 180º.	20 ¿Cuánto mide?	Reproducción Simple

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Figuras Planas	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Contesta la pregunta: qué figura se formaría al reunir 6 triángulos equiláteros con un mismo vértice • Llena una tabla con el número de vértices, lados de una serie de figuras que se le proporciona • Contesta las preguntas sobre cuántos pentágonos hay y qué características tiene triángulo	28 ¿Qué figura es?	Representación Media
Forma: Figuras Planas	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Traza figuras en una red de cuadros. Las figuras deben construirse sobre las líneas y puntos de la red.	29 Redes para Polígonos	Construcción Simple Reproducción Simple
Forma: Figuras Planas	Regla, Escuadra y Compas (Transportador)	El alumno: • Reproduce tres triángulos • Traza un triángulo a partir de la medida de los ángulos • Conoce la clasificación de los triángulos y se plantean preguntas reflexivas • Clasifica triángulos	49 Los Triángulos	Reproducción Media Construcción Compleja Representación Media

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Rectas y Ángulos	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Describe rectas • Conoce las clasificaciones de las rectas paralelas (nunca se intersectan), secantes (se cruzan en un solo punto) y perpendiculares (secantes que se forman por ángulos de 90º). • Traza las rectas primero libremente y después con respecto a una recta dada.	50 Las Rectas	Representación Media Construcción Media

5o Grado de Primaria

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Figuras Planas	Regla y Compás	El alumno: • Traza triángulos con medidas de segmento que se les dan • Describe su procedimiento • Traza y recorta un triángulo (equilátero), lo sobrepone sobre otros dos que están dibujados en su libro, con este ejercicio se explica la congruencia de figuras	Lección 6 Con Regla Y Compás	Representación Media Construcción Simple

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Cuerpos geométricos	No se especifica los instrumentos geométricos, sólo se dan las tareas. Caja y un bote	El alumno: • Dibuja las caras de una caja o un bote para observar cómo está construido • Desarrolla un prisma a partir de un rectángulo con medidas ya dadas • Repasa lo que es arista (bordes que limitan las caras) y vértice (puntos donde se juntan las aristas).	18 Construcción de cuerpos geométricos	Reproducción media Construcción Media
Forma: Figuras Planas	Juego de geometría	El alumno: • Traza las alturas de triángulos (isósceles y escalenos) • Traza la altura de un triángulo escaleno en donde se tiene que recorrer el segmento de la base para poder trazarla • Resuelve ejercicios similares	30 ¿Qué tan alto es el triángulo?	Construcción Media

6o Grado de Primaria

Trazos	Instrumentos	Tarea	Lección	Habilidad por desarrollar
Forma: Figuras Planas	No se especifica, sólo se dan las tareas Tapa-roscas	El alumno: • Juega a la rayuela con tapa-roscas y se pregunta que figura deja la tapa-rosca en el suelo • Marca la circunferencia de una de la tapas para recortarla, se dobla en 4 partes, se especifica el nombre de las líneas que aparecen (diámetro y radios) • Estudia el tema de triángulos inscritos • Reproduce una figura conformada por círculos • Busca la forma de cómo encontrar el centro de una circunferencia y traza un círculo que toque las 4 esquinas de un cuadrado	6 Rayuela Circular	Reproducción compleja Construcción Compleja
Forma: Cuerpos geométricos	No se especifica, sólo se dan las tareas	El alumno: • Realiza prismas a partir de tres figuras ya dadas y las describe • Recorta triángulos y forma pirámides • Conoce las características de los prismas y las pirámides.	15 Construye Pirámides Y Prismas	Representación compleja Construcción Simple
Forma: Figuras Planas	Juego de Geometría	El alumno: • Recorta un circulo, lo dobla y traza la figura que se forma con los dobleces • Traza 5 círculos y dentro de ellos una figura que toque todos sus vértices en la circunferencia	35 Polígonos en el círculo	Reproducción Simple Construcción Compleja

SECUNDARIA

1º Grado de secundaria

<table>
<tr><td>Trazos</td><td>Instrumentos</td><td>Lección</td><td>Habilidad por desarrollar</td></tr>
<tr><td>Eje: Forma, espacio y medida
Tema: transformaciones.
Subtema: movimientos en el espacio</td><td>Regla, escuadra o tarjeta rectangular, compás</td><td>5
Como un reflejo
Construir figuras geométricas respecto de un eje, para analizar y explicitar las propiedades que conservan</td><td>Construcción compleja

Reproducción simple</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">El alumno:
Traza una línea recta a una imagen dada y dibuja su reflejo.
Dobla una hoja por la mitad, dibuja una figura en una de las mitades, remarca con la hoja doblada para observar el otro lado de la mitad de la hoja.
Hace varios ejercicios similares.
Clasifica figuras en simétricas o no con respecto a un eje
Busca ejes de simetría en figuras
Busca el simétrico a partir de un eje y puntos ya dados y contesta la pregunta: ¿Si no tuvieras compás si no un clip, cómo o harías?</td></tr>
<tr><td>Trazos</td><td>Instrumentos</td><td>Lección</td><td>Habilidad por desarrollar</td></tr>
<tr><td>Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Formas geométricas
Subtema: rectas y ángulos</td><td>Clip (compás)
Tarjeta (regla)</td><td>12
Trazando con ingenio
Se utilizan las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo para resolver diversos problemas geométricos.</td><td>Construcción compleja
Reproducción simple</td></tr>
</table>

Tarea	El alumno: • Traza un triángulo con un clip, mide sus lados con una tarjeta y calca uno de sus ángulos para compararlos con lo demás • Conoce la definición: *si los ángulos de un triángulo tienen la misma medida este es un triángulo equiángulo y todo triángulo equilátero es equiángulo*. • Traza la bisectriz de un triángulo y se define como el *rayo que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes*. • Traza las bisectrices de los ángulos de un triángulo y marca la intersección llamando el lugar como incentro del triángulo. • Traza 5 circunferencias diferentes a partir de dos puntos distantes, remarca los centros y traza una recta que pase por los centros de las circunferencias. • Obtiene las mediatriz de un segmento, conoce qué la intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo se le llama circuncentro del triángulo • Resuelve ejercicios para trazar mediatrices y bisectrices		
Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Eje: Forma, espacio y medida Tema: Formas geométricas Subtema: Figuras planas	Papel Regla Compás	13 Formas de diversas formas Construcción de polígonos regulares a partir de distintas informaciones	Construcción media y compleja
Tarea	El alumno: • Utiliza la papiroflexia para la construcción de figuras planas y forma triángulos, hexágonos y octágonos • Contesta preguntas sobre la propiedades de dichas figuras como la medida de los ángulos o qué tipo de triángulos conforman a la figura. • Dibuja figuras y traza las mediatrices de sus lados para observar que el punto de intersección es el centro de un círculo en el cual está inscrito la figura		

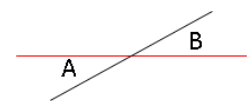
Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Eje: Manejo de la información Tema: Análisis de la información Subtema: relaciones de proporcionalidad	No se especifica, sólo se dan las tareas	15 Dibujando a escala Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante” en diversos contextos utilizando operadores y decimales.	Reproducción media
Tarea	El alumno: • Reproduce una figura en una cuadrícula a mano alzada • Llena tablas para encontrar el valor faltante, completar, observa la escala en que esta la imagen y estudia el proporcionalidad.		

2 Grado de Secundaria, Libro de texto

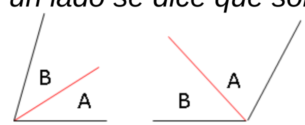
Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Eje: Forma, medida y espacio Tema: Estimar, medir y calcular Formas geométricas Rectas y ángulos	Transportador, regla, compás	Bloque 1 Lección 1 Los ángulos Resolver problemas que impliquen reconocer, estimar y medir ángulos, utilizando el grado como unidad de medida. Determinar mediante construcciones las posiciones relativas de dos rectas en el plano y elaborar definiciones de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. Establecer relaciones entre los ángulos que se forman al cortarse dos rectas en el plano, reconocer ángulos opuestos por el vértice y adyacentes.	Construcción media Y Compleja Reproducción simple

<table>
<tr>
<td>Tarea</td>
<td>
El alumno:

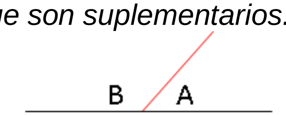
- Construye constelaciones, en un espacio con muchas estrellas, de acuerdo a una historia contada anteriormente sobre cómo antes los navegantes se guiaban
- Mide los ángulos de las constelaciones que construyeron, se dan dos ángulos de la misma medida pero con los rayos diferentes y se pregunta cuál de los dos ángulos es más grande y ordena de menos a mayor una serie de ángulos
- Conoce las definiciones: *El grado es una unidad de medida de los ángulos. Si al formar un ángulo con dos semirrectas pensamos que una de ellas y la otra se mueve, el ángulo correspondiente a una vuelta completa de la semirrecta móvil mide 360º (360 grados). Por otro lado, la mitad de una vuelta corresponde a un ángulo de 180º, llamado ángulo llano. La cuarta parte de una vuelta corresponde a un ángulo de 90º, llamado ángulo recto. El instrumento más utilizado para medir ángulos es el transportador.*
- Traza dos rectas que se cortan e identifica los ángulos iguales, suma ángulos y los compara, con ello conoce las siguientes definiciones: *una pareja de ángulos como A y B de la figura se les conoce como ángulos opuestos por el vértice*



Si dos ángulos A y B comparten el vértice y un lado se dice que son adyacentes



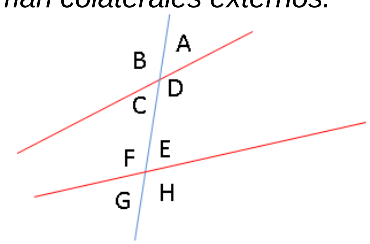
Si dos ángulos A y B suman 180º se dice que son suplementarios.



- Mide ángulos en un plano de las calles, identifica calles paralelas, perpendiculares y aquellas que no sean ni una ni otra y conoce las definiciones: *Si dos rectas en el plano se cortan formando ángulo recto se dice que son perpendiculares; dos rectas que se cortan pero no son perpendiculares son oblicuas; dos rectas que tiene una perpendicular común son paralelas.*
- Traza dos rectas que se corten, con el compás corta los segmentos con igual longitud para formar dos paralelas, mide los ángulos y establece las relaciones entre las rectas y ángulos.
- Traza rectas, solas y dentro de figuras, mide sus ángulos y establece las relaciones entre las rectas, ángulos y puntos específicos.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Trazos</th><th>Instrumentos</th><th>Lección</th><th>Habilidad por desarrollar</th></tr>
<tr><td>Eje: Forma, medida y espacio
Tema:
Estimar, medir y calcular
Formas geométricas
Rectas y ángulos</td><td>Transportador para medir los ángulos
Regla para los trazos</td><td>Bloque 1
Lección 2
El tesoro perdido
Establecer las relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal.
Justificar las relaciones entre las medidas de los ángulos interiores de los triángulos y paralelogramos.</td><td>Construcción media
Y
Compleja
Reproducción simple</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">El alumno:

- Traza dos rectas que se corten y analiza los ángulos que se conforman con los cortes
- Traza dos rectas no paralelas y tres rectas transversales a las anteriores y conoce las siguientes definiciones: *los ángulos que se forman entre dos rectas y una transversal se le acostumbra denominar en términos de las relaciones que guardan entre sí. Por ejemplo los ángulos A y E (o D y H, B y F, C y G) se llaman correspondientes. Los ángulos D y F (o C y E) se llaman alternos internos. Los ángulos A y G (o B y H) se llaman alternos externos. Los ángulos D y E (o C y F) se llaman colaterales internos y los ángulos A y H (o B y G) se llaman colaterales externos.*



- Resuelve ejercicios semejantes al anterior para repasar lo aprendido.
- Construye dos rectas paralelas y dos trasversales a estas, una oblicua y otra perpendicular y conoce las siguientes definiciones: *una figura formada por un par de rectas paralelas y una transversal: los ángulos correspondientes miden los mismo. Los ángulos alternos internos miden lo mismo. Los ángulos alternos externos miden lo mismo. Los ángulos colaterales internos y los colaterales externos son suplementarios. En una figura formada por un par de rectas y una transversal, si ocurre que: los ángulos correspondientes miden lo mismo, o los ángulos alternos internos miden lo mismo, o los ángulos alternos externos miden lo mismo, entonces las dos primeras rectas son paralelas entre sí.*
</td></tr>
</table>

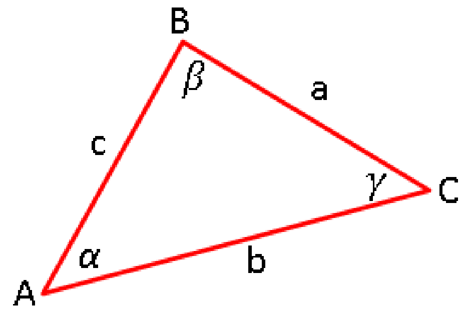
	• Resuelve ejercicios similares buscando la medida de los demás ángulos a partir de uno ya dado • Aplica lo aprendido, busca en una red de cuadriláteros y el tangrama: paralelas y perpendiculares, medida de ángulos, localiza ángulos correspondientes, alternos internos, alternos externos, etc.		
Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Eje 2: Forma, media y espacio. Tema: Formas geométricas Cuerpo geométricos Justificación de fórmulas (Estimar, medir y calcular)	No se especifican, sin embargo por las tareas se utiliza la regla	Bloque 2 Lección 2 Prismas y pirámides Descripción de las características de los cubos, prismas y pirámides, construcción de desarrollos planos de cubos, prismas y pirámides rectas y diferentes vistas de un cuerpo geométrico. Justificación de fórmulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Estimación y cálculo de volumen de cubos, prismas y pirámides rectos. Cálculo de datos desconocidos, dados otros relacionados con las fórmulas de cálculo de volumen. Descubrimiento de las relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides. Realización de conversiones de medidas de volumen y capacidad y analizar la relación entre ellas.	Representación media y compleja Reproducción simple Construcción simple
Tarea	El alumno: Busca la forma desarrollada de cajas. En caso de que no lo logren, se sugiere copiar las figuras y construirlas. Dibuja cuerpos geométricos en otra perspectiva, por ejemplo, como si estuviera viéndolo desde arriba y complementa una tabla con el número de aristas, caras y vértices de cada cuerpo Calcula el volumen de los cuerpos, se coloca arroz, frijoles u otra semilla dentro de la pirámide para observar la relación existente entre los volúmenes de los cuerpos. De esta forma se obtiene la relación del área de la pirámide V= ab/3 Copia 3 veces la forma desarrollada de una pirámide, las armas y forma un cubo con las tres pirámides para comprobar y justificar la fórmula para calcular el volumen de una pirámide.		

<table>
<tr><th>Trazos</th><th>Instrumentos</th><th>Lección</th><th>Habilidad por desarrollar</th></tr>
<tr><td>Eje: Forma, espacio y medida
Temas:
Formas geométricas
Justificación de fórmulas
Figuras planas</td><td>No se especifican, sin embargo las tareas pedidas sugiere el uso de regla</td><td>Bloque 3
Lección 4
Juguemos a los rompecabezas
Establecimiento y justificación de la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier polígono.
Argumentación de las razones por las cuales una figura geométrica sirve como modelo para recubrir un plano</td><td>Construcción compleja</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">El alumno:
• Construye 10 triángulos, los corta para obtener 20, mide sus ángulos internos y con ellos rellena un espacio
• Averigua con cuáles figuras está construido un teselado
• Hace teselados con triángulos y cuadriláteros de cualquier tipo.
• Calcula la suma de los ángulos interiores así como la medida de cada ángulo interior de un polígono regular para llegar a lo siguiente: la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a (n-2) por 180º
• Rellena espacios con octágonos, se sugiere combinarlos con cuadrados y triángulos
• Hace mosaicos con rectángulos, se sugiere algunas deformaciones para elaborar mosaicos con figuras deformes, se da un ejemplo y después se muestran obras de Escher y para que realice sus propios modelos</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Trazos</th><th>Instrumentos</th><th>Lección</th><th>Habilidad por desarrollar</th></tr>
<tr><td>Eje: Forma, medida y espacio
Temas:
Formas geométricas
Figuras planas
Rectas y ángulos</td><td>Regla y compás</td><td>Bloque 4
Lección 2
Triángulos congruentes
Determinación de los criterios de congruencia de triángulos a partir de construcciones con formación determinada</td><td>Construcción compleja</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">

El alumno:

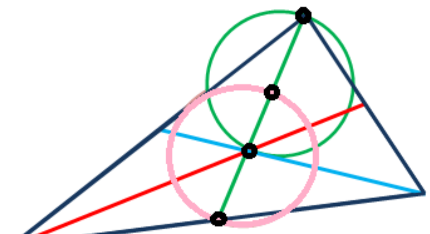
- Traza cuadriláteros distintos utilizando segmentos que proporciona el libro
- Realiza ejercicios similares al anterior pero con tres segmentos y como figura a formar un triángulo
- Trazar con regla y compás un triángulo que contenga dos segmentos distintos ya dados, los recorta y compara con el de sus compañeros y llega a la siguiente definición: *dos figuras geométricas son congruentes si coinciden al superponer una sobre la otra.*
- Traslada un ángulo sin trasportador y utilizando sólo regla y compás, el transportador se utiliza para corroborar datos y resuelve ejercicios similares para fortalecer lo aprendido. Llega a la siguientes afirmaciones: *α es el ángulo opuesto al lado a, comprendido entre los lados b y c, y β y γ son los ángulos adyacentes al lado a*



- Traslada los ángulos de su libro a su cuaderno y forma figuras. Con el ejercicio anterior abordan los criterios de congruencias de triángulos (LLL, ALA, LAL)

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Dibuja un triángulo isósceles, traza la bisectriz del ángulo conformado por los dos lados iguales, resalta sus características y propiedades llegando a la siguiente definición: en todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales, son iguales. En todo triángulo isósceles a la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados iguales divide al tercer en su punto medio.
Traza la mediatriz de un segmento, construye un triángulo en un punto de la mediatriz y partir de ello llega a lo siguiente: la mediatriz de un segmento se puede caracterizar de dos maneras distintas: 1) Como la colección de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, o 2) como la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento.
Resuelve ejercicios similares a los anteriores, argumenta la congruencia de las figuras a partir de segmentos, bisectrices, mediatrices, etc. sobre una figura original.</td></tr>
<tr><td>Trazos</td><td>Instrumentos</td><td>Lección</td><td>Habilidad por desarrollar</td></tr>
<tr><td>Eje: Forma, medida y espacio
Temas:
Formas geométricas
Figuras planas
Rectas y ángulos</td><td>Regla
y
Compás</td><td>Bloque 4
Lección 4
Rectas del triángulo
Las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo</td><td>Construcción media
Reproducción fácil</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">El alumno:
Construye un triángulo rectángulo de cartón y hace un agujero para pasar un cordón y equilibrando a la figura, para ellos se traza los puntos medios de los lados del triángulo y los prolonga hasta que se intersecten con el vértice opuesto
Traza una circunferencia con centro en la intersección de las medianas al lado más cerca, como se muestra a continuación:</td></tr>
</table>



- Conoce la siguiente definición: *Los segmentos de recta que unen a cada vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto de dicho vértice se llaman medianas del triángulo. Las tres medianas se intersecan en un punto llamado baricentro o gravicentro. La distancia de cada vértice al baricentro es igual a 2/3 de la distancia del vértice al punto medio del lado opuesto. Es decir en todo triángulo se cumple que la distancia del baricentro a un vértice es el doble de la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto a ese vértice*.
- Traza las mediatrices de cada lado de un triángulo y de igual forma prolongarlos hasta que se intersecten, se miden las distancias desde los vértices hasta el punto de intersección y concluyen: *Si tres o más rectas se cortan en un punto, se dice que las rectas concurren. Las mediatrices de los tres lados de un triángulo concurren en un punto, llamado circuncentro. Este punto es el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.*
- Traza la bisectriz de cada ángulo del triángulo, se prolonga hasta que las bisectrices se intersecten para llegar a la definición: *Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto llamado incentro del triángulo. El incentro equidista de los tres lados del triángulo.*
- Traza las perpendiculares de los lados de un triángulo, pero que éstos deben intersectarse con el vértice contrario al lado y concluyen: *Las rectas perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por el vértice opuesto a ese lado se llaman alturas del triángulo. A los puntos de intersección de las alturas con el lado se les llama pies de altura. Las de todo triángulo concurren. Al punto de intersección de las alturas se les llama ortocentro*
- Repite el ejercicio con un triángulo en el que la intersección de las alturas este fuera de este
- Resuelve varios ejercicios semejantes al anterior para aplicar lo aprendido

<table>
<tr><th>Trazos</th><th>Instrumentos</th><th>Lección</th><th>Habilidad por desarrollar</th></tr>
<tr><td>Eje: Forma, medida y espacio
Temas: Transformaciones</td><td>Regla y compás</td><td>Bloque 5
Lección 2
De aquí para allá
Determinación de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. Construcción y reconocimiento de diseños que combinen la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.</td><td>Construcción complejas

Reproducción complejas</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">El alumno:
Construye una cenefa a partir de una figura dibujada en una cuadrícula
Copia una flecha en cada vértice de un cuadrilátero, usa la escuadra para las paralelas y el compás para medirlas. Después, une los puntos en donde terminan las flechas para así establecer los puntos de los vértices de la otra figura congruente a la original. Con ello concluyen: Un polígono' es una traslación de otro polígono si los segmentos que unen sus vértices correspondientes son paralelos y miden lo mismo. Si el polígono' es una traslación de otro, entonces ese polígono' y el otro son polígonos congruentes y los lados correspondientes de los dos polígonos son paralelos. Trasladar una figura significa ponerla en otro lugar sin girarla.
Traza las mediatrices de los vértices correspondientes de otras dos figuras, traza un segmento que vaya de un vértice de la figura hasta el vértice correspondiente de la otra y así con los demás vértices, a esos segmentos que los une vértice con vértice se obtienen la mediatriz y se prolonga hasta que se intersecten con las demás mediatrices de la figura, miden las distancias del punto de intersección a cada vértice y su correspondiente comprobando que ambos tiene la misma distancia al punto de intersección. Y con ello conceptualizan: Una figura es la rotación de otra con centro de rotación en O y ángulo de rotación α si los vértices correspondientes de las dos figuras están a la misma distancia de O y si cada uno de los ángulos que se forman al unir cualesquiera dos vértices corresponden con el punto O es igual a α. Si la figura' es una rotación de la otra, entonces estas dos figuras son congruentes.
Traza segmentos que unan un vértice con su correspondiente, obtiene las mediatrices de estos segmentos, las prolonga hasta que se intersecten, mide la distancia entre el punto de intersección y los vértices de la figura y deduce: Una figura' es la reflexión de la otra respecto al punto O si cada uno de los segmentos que une a un vértice de la figura' con el vértice correspondiente de la otra para por O y los vértices correspondientes están a la misma distancia de O. Reflejar una figura respecto a un punto P es lo mismo que rotar la figura 180º alrededor de P.
Resuelve ejercicios de repaso de traslación, rotación y reflexión.
</td></tr>
</table>

3º Grado de Secundaria, Libro de Texto

<table>
<tr><th>Trazos</th><th>Instrumentos</th><th>Lección</th><th>Habilidad por desarrollar</th></tr>
<tr><td>Eje: forma, medida y espacio
Temas:
Cuadriláteros I, II y II
Posición de circunferencias
Rectas y circunferencias I, II, III
Ángulos en la circunferencia I, II, III
Sectores circulares
Coronas y trapecios circulares</td><td>Hojas de papel, regla y compás</td><td>Bloque 1
Lección 2
Circulando por favor
Aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la justificación de propiedades de figuras geométricas.
Resolver problemas que impliquen relacionar ángulos inscritos y centrales de una circunferencia.</td><td>Reproducción compleja
Construcción media
Construcción compleja</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td colspan="3">El alumno:
Traza y recorta círculos, los dobla para ver qué tipo de figuras se forma y como son los ángulos de esa figura
Reproduce dos veces, en hojas de papel o cartulina, una serie de triángulos los une, observa la relación que guardan con respecto a un romboide y llega a la siguiente afirmación: Los paralelogramos son cuadriláteros con dos pares de lados paralelos. Los trapecios con cuadriláteros con dos lados paralelos. Los trapezoides son cuadriláteros sin lados paralelos
Traza las diagonales de una serie de cuadriláteros obteniendo triángulos congruentes
Analiza los ángulos formados por la diagonal de un romboide, observa si son congruentes argumentando por qué lo son o por qué no. Con esto repasan la congruencia de triángulos y de ángulos: Dos ángulos son congruentes si miden lo mismo; dos triángulos son congruentes si *los tres lados correspondientes son congruentes, *dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes, *don ángulos y el lado comprendido entre ellos son congruentes.
Traza las dos diagonales de una serie de cuadriláteros, debe observar si la división queda en 4 triángulos congruentes, en dos pares de triángulos congruentes, o sólo un par de triángulos.</td></tr>
</table>

	• Repasa la circunferencia: *la circunferencia es una figura cerrada que se compone de puntos que se encuentran a la misma distancia de otro llamado centro. El círculo es una figura compuesta por la circunferencia y la superficie que ésta delimita* • Estudia la posición de las circunferencia, para ello se maneja la posición de la Luna con respecto a la Tierra, primero, la Luna está lejos de la Tierra, después cerca, luego sus circunferencias se intersectan, posteriormente está encima de la Tierra y sigue hasta que la Luna este nuevamente alejado pero del lado opuesto. Con esto conceptualiza: *Dos circunferencias son; interiores si una está totalmente contenida en la otra; exteriores si no se tocan y no son interiores; tangentes si se tocan en un solo punto; secante si se tocan en dos puntos, concéntricas si tienen el mismo centro.* • Contesta qué tipo de circunferencias conforman a una figura • Estudia las rectas que se pueden trazar en la circunferencia. Se dan las instrucciones para trazarlas y se da las siguientes definiciones: *una recta es exterior a un circunferencia si no tienen ningún punto en común con esta; es tangente si la toca en un solo punto, ese punto se llama punto de tangencia y es perpendicular al radio; es secante si la toca en dos puntos; cuerda si los extremos de la recta son puntos de la circunferencia.* • Realiza trazos para reforzar lo aprendido. • Estudia los ángulos que hay en una circunferencia. En la circunferencia de un círculo coloca tres puntos. En otra parte del círculo se encuentra una parte sombreada, los ángulos a trazar deben tener como vértice los puntos antes mencionados y de abertura la parte sombreada. Con este ejercicio se definen: *los ángulos inscritos son aquellos que tienen un vértice sobre la circunferencia y los lados son rectas interiores a la circunferencia. Un ángulo central de una circunferencia es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia. Un ángulo inscrito y un ángulo centra pueden abarcar el mismo arco de circunferencia.* • Relación el ángulo inscrito y el ángulo central con el mismo arco, el cual la medida del ángulo inscrito es la mitad del central. Se dejan ejercicios para reforzar lo aprendido y se llega a lo siguiente: *si un ángulo inscrito con el mismo arco de un ángulo central con medida de 180º entonces la medida del ángulo inscrito es de 90º y la figura formada por este es un triángulo rectángulo.* • Obtiene el área de un círculo y el área de algún sector y la medida del ángulo de ese mismo sector. Al final se hacen ejercicios repaso

Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Eje: forma, medida y espacio Temas: Figuras semejantes I, II, III, IV Semejanzas de triángulos I, II, III, IV	Regla Compás Cartulinas u hojas de papel	Bloque 2 Sección 2 Dos juegos semejantes pero diferentes Resuelvan problemas que impliquen utilizar las propiedades de la semejanza en triángulos y en general en cualquier figura	Reproducción sencilla Construcción simple
Tarea	El alumno: • Mide los lados, de imágenes iguales pero en distintos tamaños, para encontrar la escala de la figura original pero no hay trazos • Llena una tabla con las estimaciones de las medidas de los próximos rectángulos que sean semejantes al inicial proporcionándole un rectángulo • Coloca el rectángulo inicial en el plano cartesiano, una de las esquinas debe estar en las coordenadas 0,0 de tal forma que al prolongar la diagonal del rectángulo con inicio en 0,0 pueda verse los demás rectángulos y ver las medidas para comprobar los resultados de la tabla anterior y llega a la siguiente conclusión: *si un rectángulo es una reproducción a escala de otro, entonces se dice que es semejante. Dos rectángulos semejantes guardan una relación de proporcionalidad entre sus lados.* • Resuelve ejercicios semejantes para encontrar el factor de proporcionalidad y concluye: *la escala también se llama razón de semejanza.* • Reproduce a escala una figura, para ello se dan instrucciones que consiste en colocar un punto fuera de la figura. Traza vectores con inicio en el punto y el otro extremo hasta algún vértice o más largo, siempre y cuando el segmento pase por algunos de los vértices de la figura. • Repasa la semejanza de triángulos, para ello se inicia con el trazado de triángulos equiláteros de distintos tamaños, observando que los ángulos internos son siempre iguales sin importar el tamaño • Traza en triángulo a partir de sus ángulos interiores del triángulo, traza otro con las mismas medidas angulares pero distintas medidas en sus lados y observan la semejanza. • Traza triángulos a partir de dos ángulos interiores, con ello comprueba que teniendo sólo dos ángulos, los triángulos resultantes será semejantes por tener dos ángulos		

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="3">iguales, por lo tanto el tercero también, pues éste debe ser el complemento de los 180º que conforman las suma de los ángulos interiores de un triángulo

Traza triángulos a partir de la medida de dos lados, el tercero puede trazarlo a su gusto, con esto observa que los triángulos resultantes no son semejantes y que hace falta conocer las medidas de dos lados y el ángulo conformado por éstos
Resuelve ejercicios de repaso, como calcular la altura de un árbol a partir de otro más pequeño
</td>
</tr>
<tr>
<td>Trazos</td>
<td>Instrumentos</td>
<td>Lección</td>
<td>Habilidad por desarrollar</td>
</tr>
<tr>
<td>Eje: forma, medida y espacio

Temas:
Teorema de Tales I, II, III, IV</td>
<td>Regla

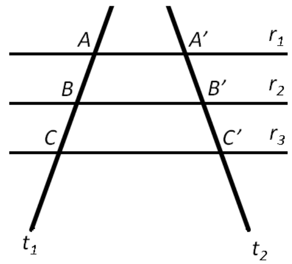
Compás</td>
<td>Bloque 3

Sección 2
Tales segmentos divididos

Resolver problemas geométricos que impliquen el uso del Teorema de Tales</td>
<td>Construcción media</td>
</tr>
<tr>
<td>Tarea</td>
<td colspan="3">El alumno:

Divide segmentos en partes iguales sin medir, después se da la opción de hacerlo en una hoja rayada de tal forma que los renglones sean la base para dividir el segmento
Repasa el tema de semejanza para calcular las medidas de los segmentos. Con ello llega a las siguientes definiciones: Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, a segmentos congruentes sobre una de estas corresponden segmentos congruentes sobre la otra.

r_1, r_2, r_3 son rectas paralelas
t_1 y t_2 son rectas transversales
entonces si $AB \equiv BC$ entonces $A'B' \equiv B'C'$</td>
</tr>
</table>

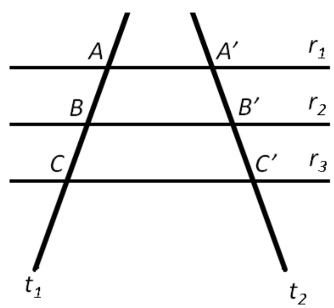


TEOREMA DE TALES

Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, dos segmentos cualesquiera sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes sobre la otra.

r_1, r_2, r_3 son rectas paralelas
t_1 y t_2 son rectas transversales
entonces

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|\mathrm{A'B'}|}{|B'C'|}$$



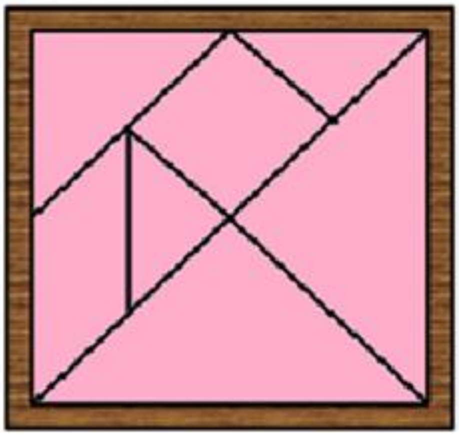
Trazos	Instrumentos	Lección	Habilidad por desarrollar
Eje: forma, medida y espacio Temas: Homotecias III, III, IV	Regla y compás	Bloque 3 Sección 3 La caja negra Conocer las condiciones que generan dos o más figuras homotéticas, así como las propiedades que se conservan y las que cambian	Construcción simple Reproducción compleja
Tarea	El alumno: • Reproduce figuras por medio del método que se enseñó en el bloque 2, sección 2, sobre semejanzas, en el cual a partir de un punto en común se trazan rectas a los vértices de la figura, y reproducir en mayor o menos escala. *La homotecia es una transformación de una figura geométrica en la que, a partir de un punto fijo, se obtiene una figura semejante. El punto fijo se llama centro de homotecia. La razón entre los segmentos que unen el centro de homotecia y los vértices correspondientes de la figuras se llama razón de homotecia. La razón de homotecia es igual que la razón de semejanza entre la figuras.Cuando dos o más homotecias tienen el mismo centro, se trata de una composición de homotecias. La razón de una composición de homotecias es el producto de las razones.* • Resuelve ejercicios de repaso • Conoce la homotecia negativa por medio de dos figuras semejantes, el centro de homotecia es el mismo pero la figura está inversa: *En una homotecia negativa, se obtiene una figura semejante, pero rotada 180º*		

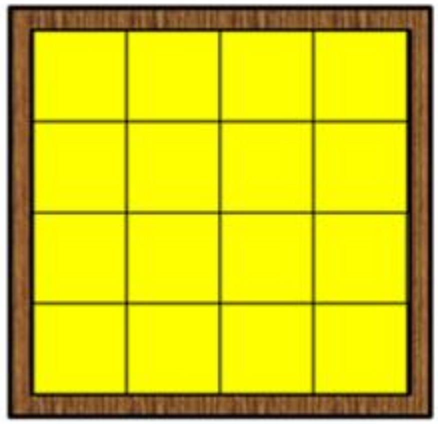
APENDICE B

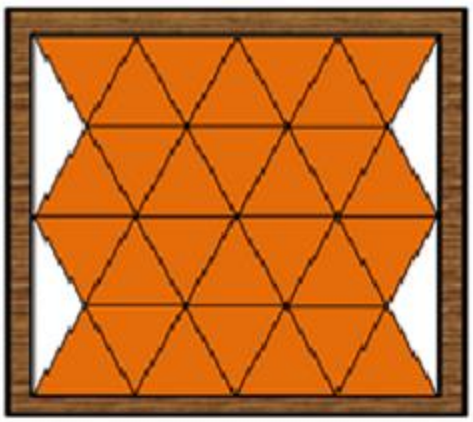
LOS TESELADOS

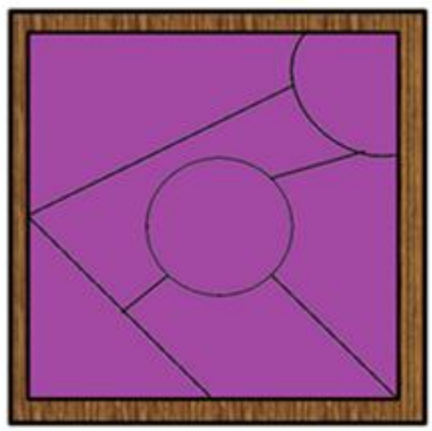
LOS TESELADOS

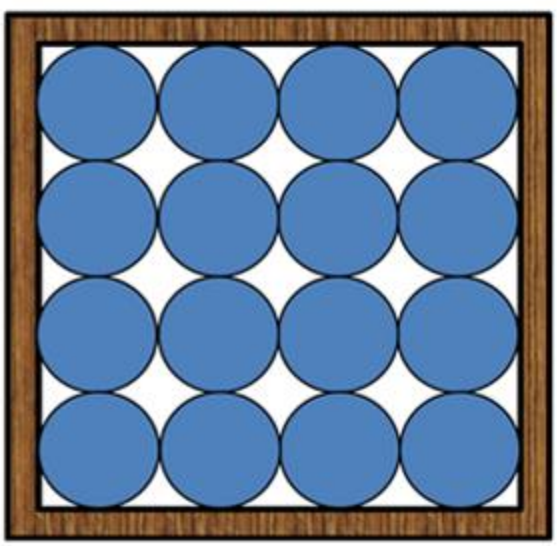
TAREA: Construye las siguientes plantillas en foamy, cartoncillo o cartulina.











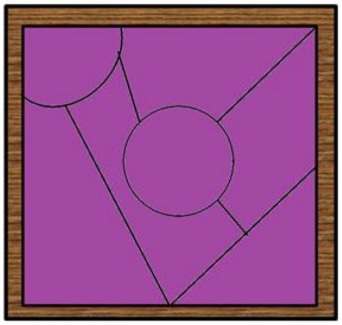
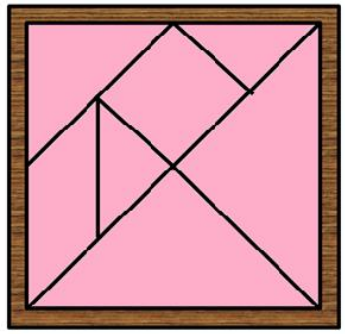
LOS TESELADOS

ACTIVIDAD 1: Sigue las instrucciones de tu maestro, cubre un cuadrado con las plantillas que se proporcionó y dibuja en los siguientes cuadros cómo quedó cubierto.

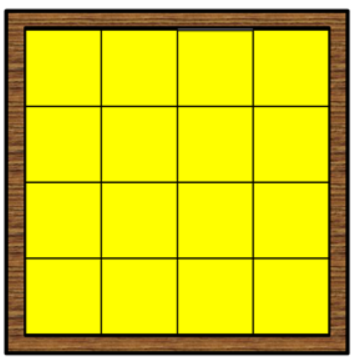
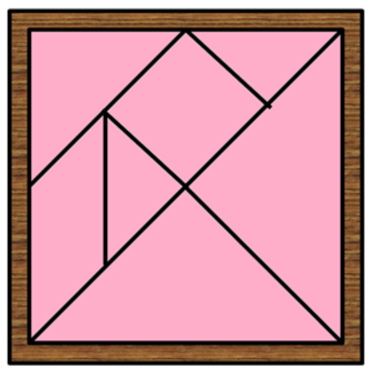
¿Se pudo rellenar el espacio con todas las figuras?

ACTIVIDAD 2: Encuentra las diferencias o similitudes entre los recubrimientos

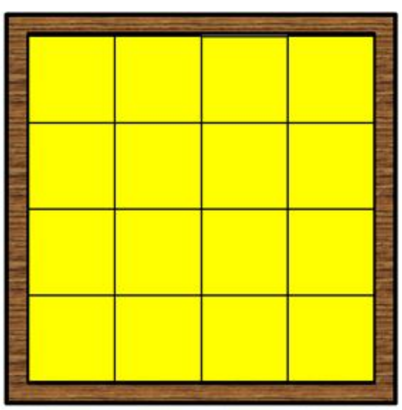
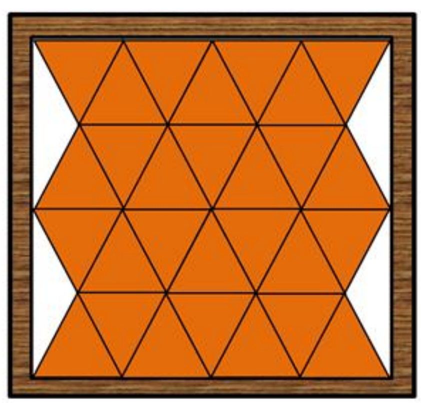
¿Qué diferencia o similitudes hay entre estos dos recubrimientos?

Ahora entre estos ¿Cuál es la diferencia o similitud?

¿Qué observas en estos dos recubrimientos?

ACTIVIDA 3: A partir de las actividades anteriores contesta las siguientes preguntas

¿Cómo se llaman las figuras geométricas de color amarillo y anaranjado que recubrieron los espacios?

Utiliza una figura de cada recubrimiento y mide los lados, los ángulos interiores, el ángulo central y define: ¿qué es un polígono?

¿Qué es un recubrimiento o teselado y qué características tiene?

ACTIVIDAD 4: Utiliza tu juego de geometría para construir cuatro polígonos en foamy o cartón, recórtalos y contesta las preguntas.

¿Cuántos lados tienen los polígonos?

¿Cuánto miden los ángulos de los polígonos?

¿Cuántos tipos de polígonos encontraste? Menciónalos

¿Qué características tienen los polígonos?

ACTIVIDAD 5: ¿Se podrá cubrir o teselar un espacio con cualquier polígono regular? ¿Por qué sí o por qué no?

ACTIVIDAD 6: Utiliza los polígonos regulares que construiste, recubre un espacio y completa la siguiente tabla con tu maestro:

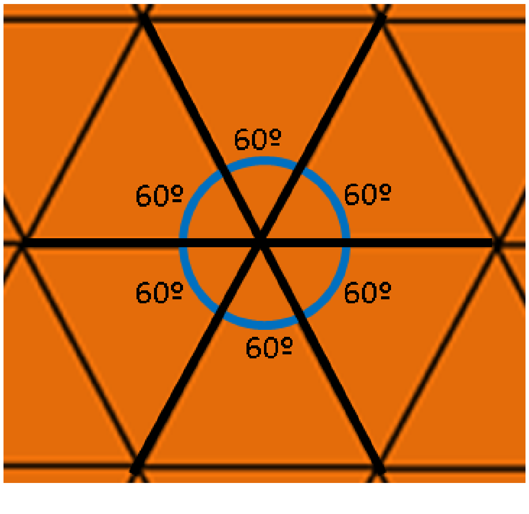
Polígono	Número de lados	Ángulo interior		Se puede teselar
Triángulo	3	60º		sí
	4			
	5			No
		120º		
Heptágono				
Octágono				
Decágono	10			

¿Qué pasó con los polígonos, se puede utilizar cualquier polígono para teselar un espacio?

Menciona los polígonos con los cuales si se puede teselar

Menciona los polígonos con los cuales no se puede teselar

ACTIVIDAD 7: Observa y analiza la siguiente imagen



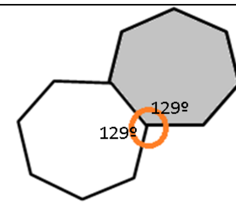
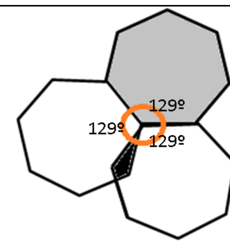
Lee las siguientes afirmaciones de algunos alumnos, comenta con cuáles estás de acuerdo y realiza con tus compañeros una conclusión.

Alma: el teselado es un recubrimiento
Pedro: en un teselado no hay huecos entre las figuras
Blanca: un teselado puede hacerse de polígonos como cuadrados y triángulos
Benito: se puede teselar con el hexágono porque su ángulo interior es múltiplo de 360º.

ACTIVIDAD 8: Coloca “Suma de ángulos” en la columna que no tiene nombre de la tabla anterior y completa la siguiente.

<table>
<tr><th>Figura</th><th>Operaciones</th><th>Presentación gráfica</th></tr>
<tr><td>Triángulo

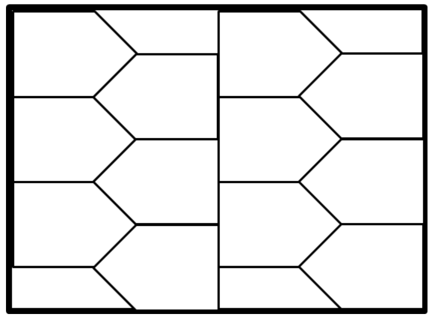
60º ángulo interior</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>108º x 3 = 324º</td><td></td></tr>
<tr><td>108º x 4 = 432º</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

¿Es posible teselar un espacio con otro tipo de polígono?

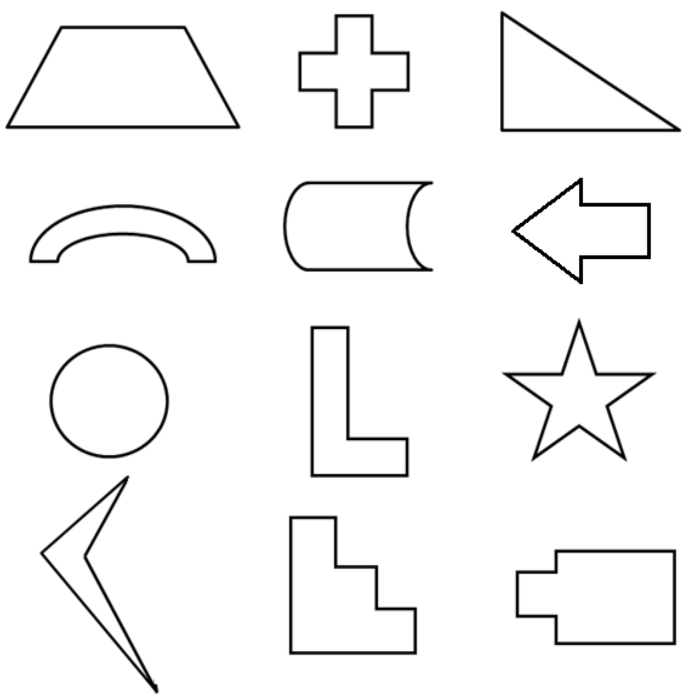
ACTIVIDAD 9¿Es posible teselar un espacio con otro tipo pentágono? ¿Cómo sería ese pentágono? ilustra y justifica tu respuesta

Observa el siguiente teselado de pentágonos

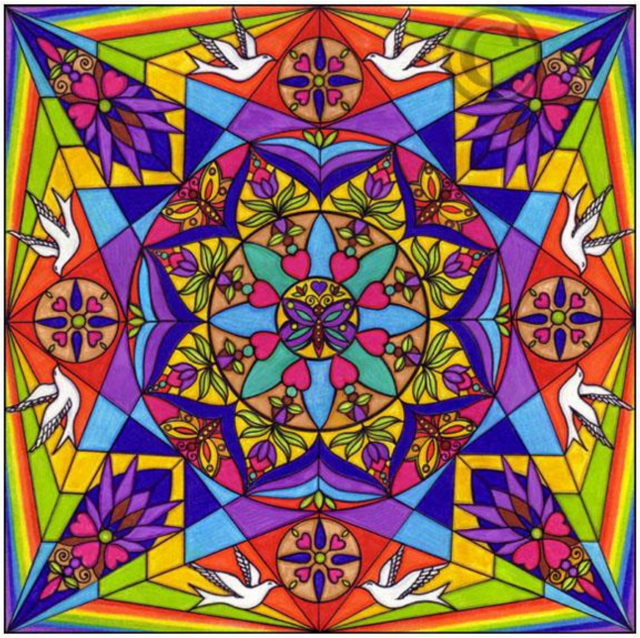


¿Por qué sí funciona la teselación con este tipo de polígono?

ACTIVIDAD 10: ¿Con cuál de los siguientes polígonos se puede teselar? Justifica tu respuesta



ACTIVIDAD 10: Observa el siguiente mosaico y contesta las preguntas

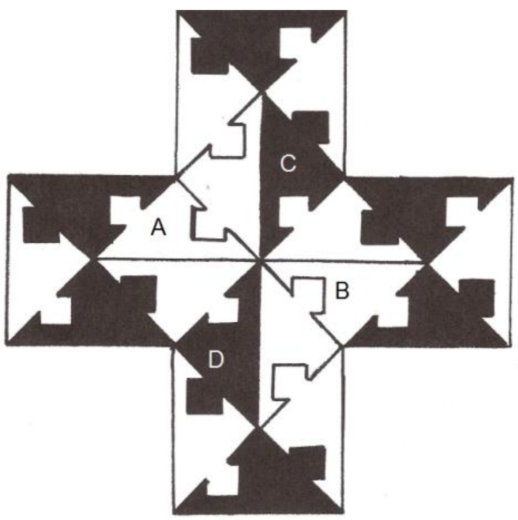


¿Qué son los ejes de simetría?

¿Cómo son las palomas con respecto al eje de simetría que se trazó?

¿Cómo son las flores con respecto al eje de simetría que se trazó?

ACTIVIDAD 11: Observa el siguiente teselado y contesta:



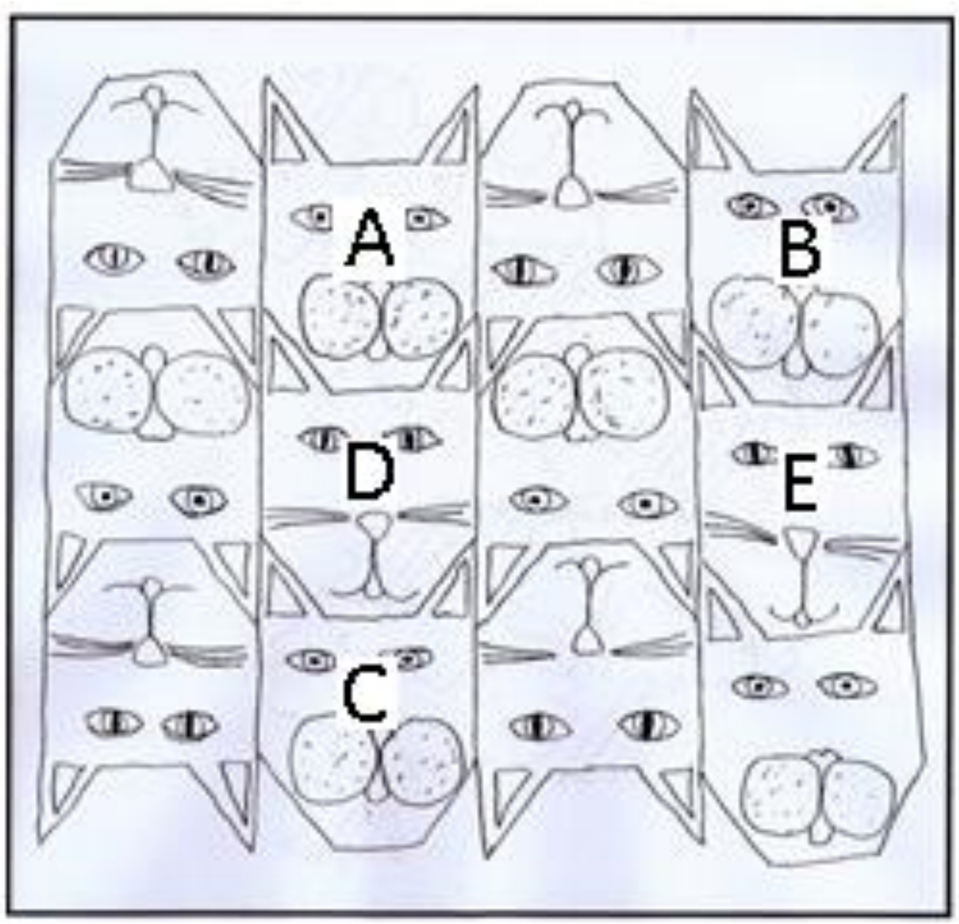
¿Cómo son las figuras A y B?

¿Cómo son las figuras C y D?

¿Qué es simetría con respecto a un punto?

ACTIVIDAD 11: ¿Crees que con los polígonos sea la única forma de teselar un espacio? ¿Podrás teselar con figuras de gatos? ¿Por qué? Inténtalo

Observa los siguientes teselados y contesta lo que se te pide

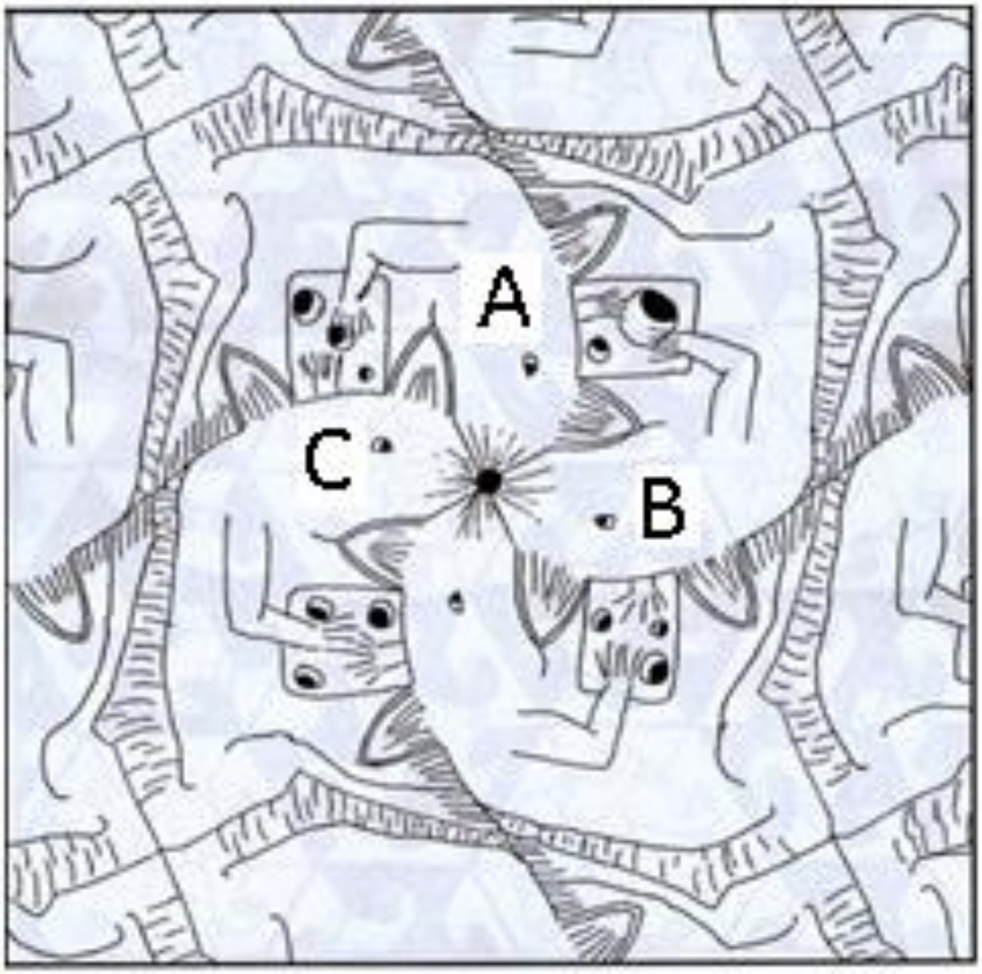


¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela B?

¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela C?

¿Cómo es la tesela D con respecto a la tesela E?

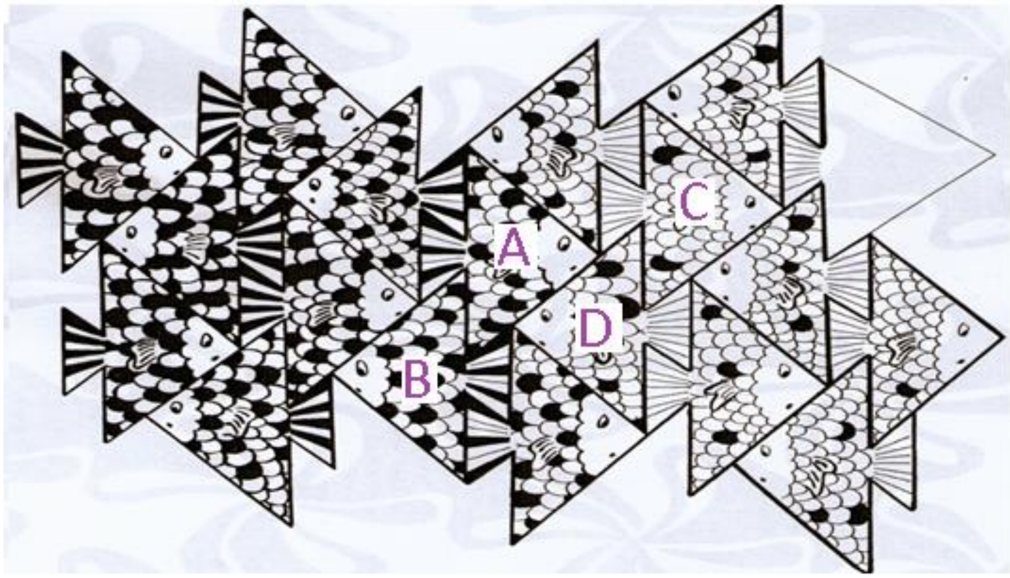
¿Qué movimientos se realizaron o se requieren para lograr las posiciones que se mencionan?



¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela B?

¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela C?

¿Qué movimientos se realizaron o se requieren para lograr las posiciones que se mencionan?



¿Cómo es la tesela A con respecto a la tesela B?

¿Cómo es la tesela C con respecto a la tesela D?

¿Qué movimientos se realizaron o se requieren para lograr las posiciones que se mencionan?

ACTIVIDAD 12: A partir de las actividades anteriores caracteriza las trasformaciones isométricas que realizaste

Traslación: ____

____

____

Rotación: ____

____

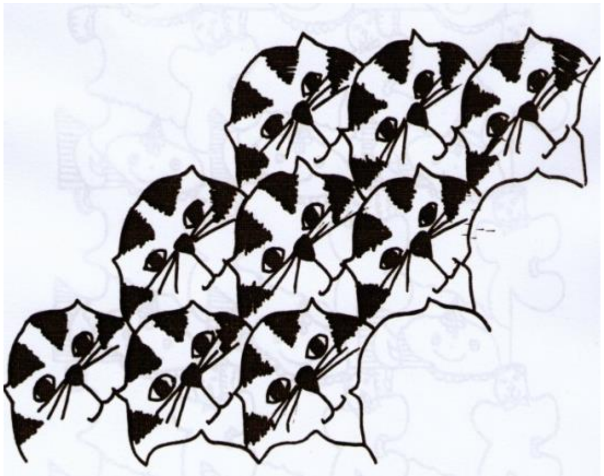
____

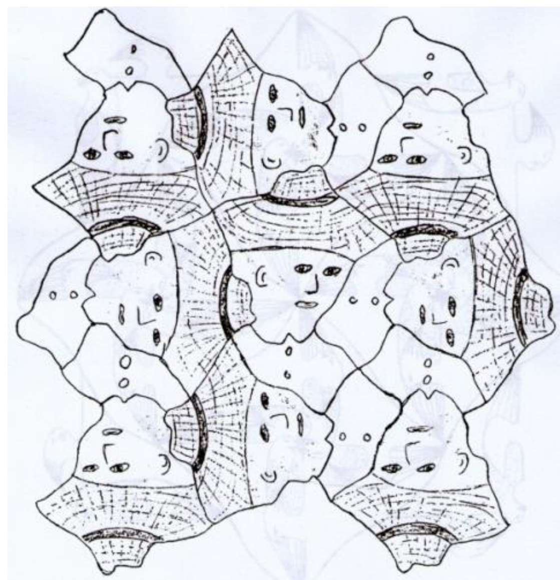
Reflexión: ____

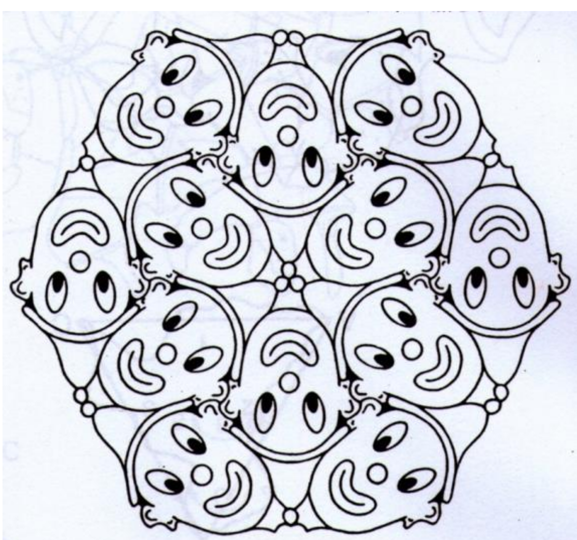
____

____

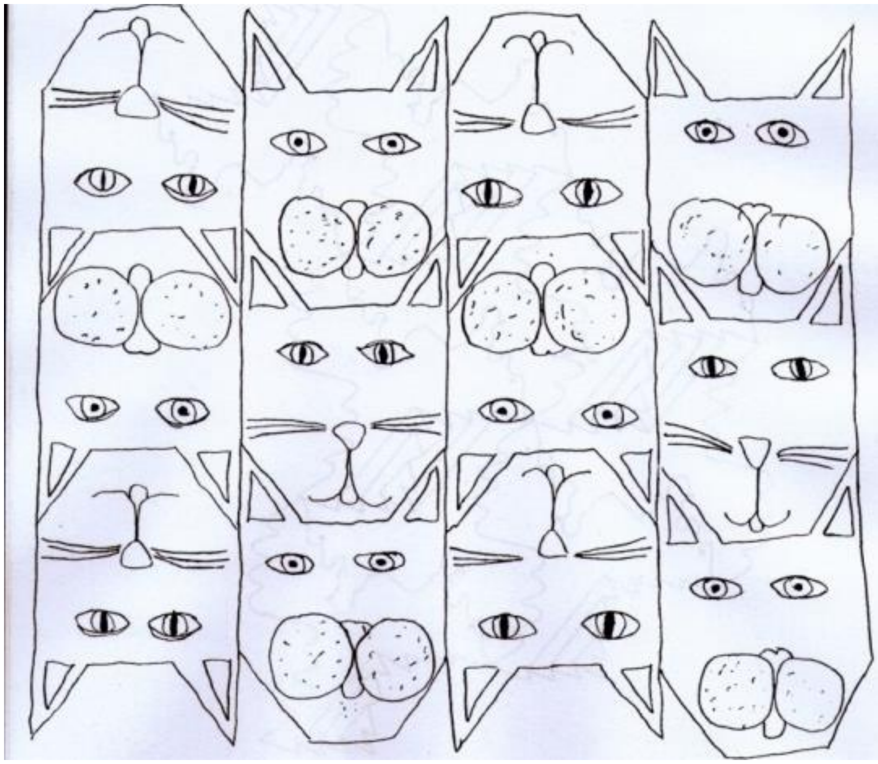
Localiza las traslaciones, rotaciones y reflexiones en los siguientes teselados







ACTIVIDAD 13: Calca el contorno de los gatos y contesta las siguientes preguntas

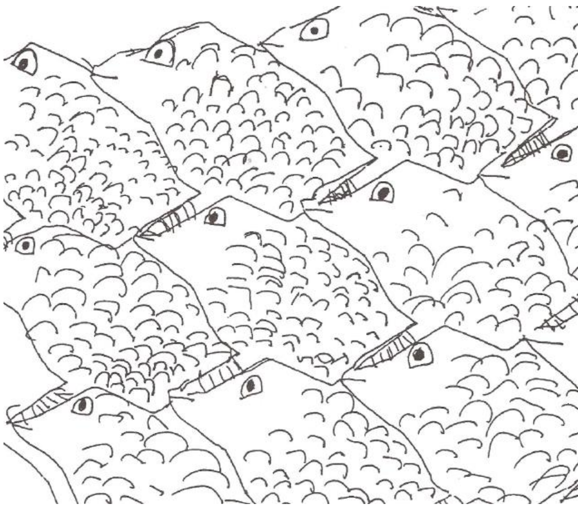


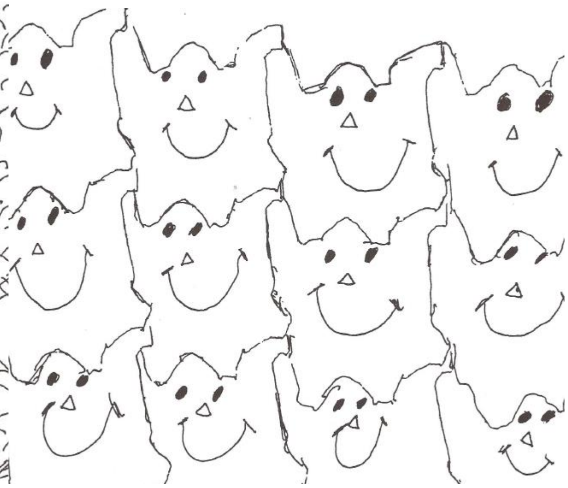
¿Qué características observas?

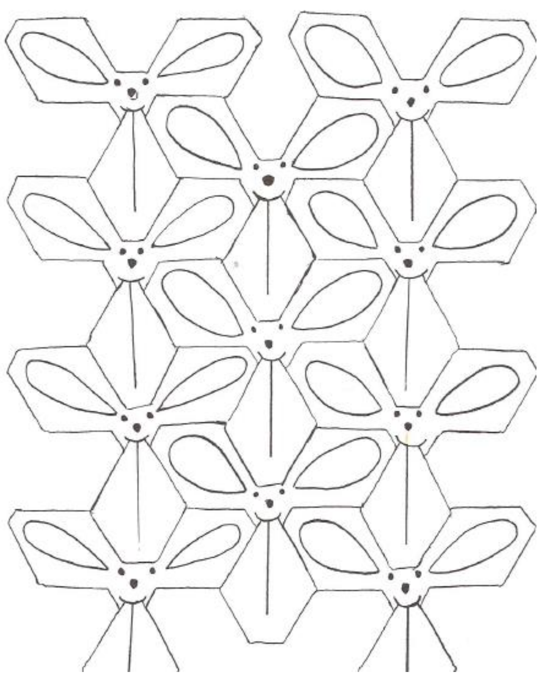
¿Qué relación existe entre el semitrapecio que forman las orejas de un gato y el cuello del gato inferior o superior?

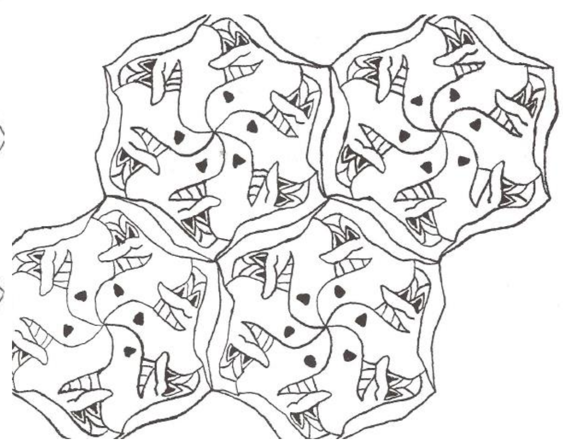
¿Cuál es el polígono original con que se elaboró el gato? Ilustra los pasos que crees que se realizaron en la elaboración del teselado de gatos

ACTIVIDAD 14: ¿Cuál es el polígono original de cada teselado? Dibújalo

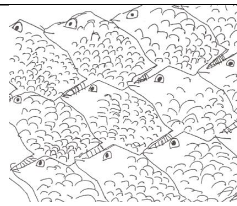
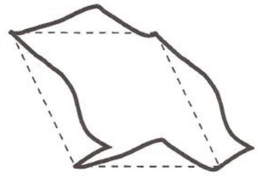
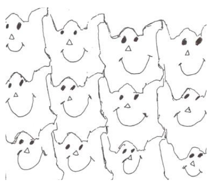
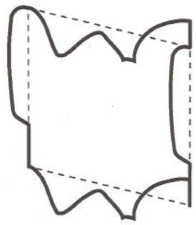
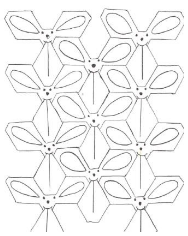
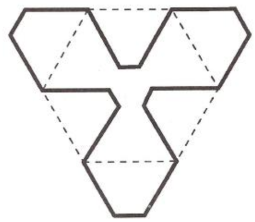
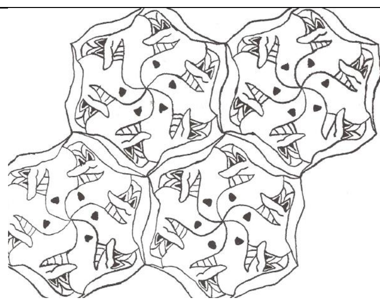








Pudiste encontrar el polígono original. Comparte con tus compañeros y maestro tus resultados

ACTIVIDAD 15: Investiga quién fue Escher y visita las siguientes páginas web:

http://www.mcescher.nl
http://www.mcescher.com
http://www.mcescher.com/Gallery/gallery-back.htm
http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/

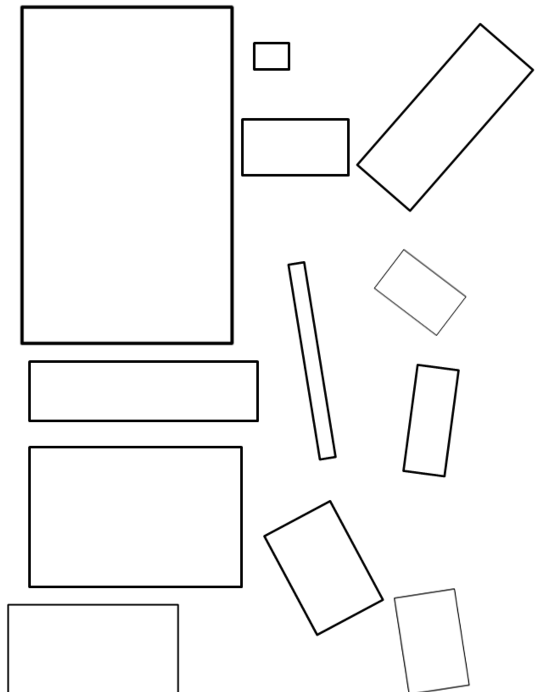
Analiza el siguiente texto y comenta con tus compañeros qué otros elementos matemáticos encuentras en los teselados

APÉNDICE C

LA SECCIÓN ÁUREA

LA SECCIÓN ÁUREA

ACTIVIDAD 1: Observa los siguientes rectángulos, escoge y colorea tres de ellos

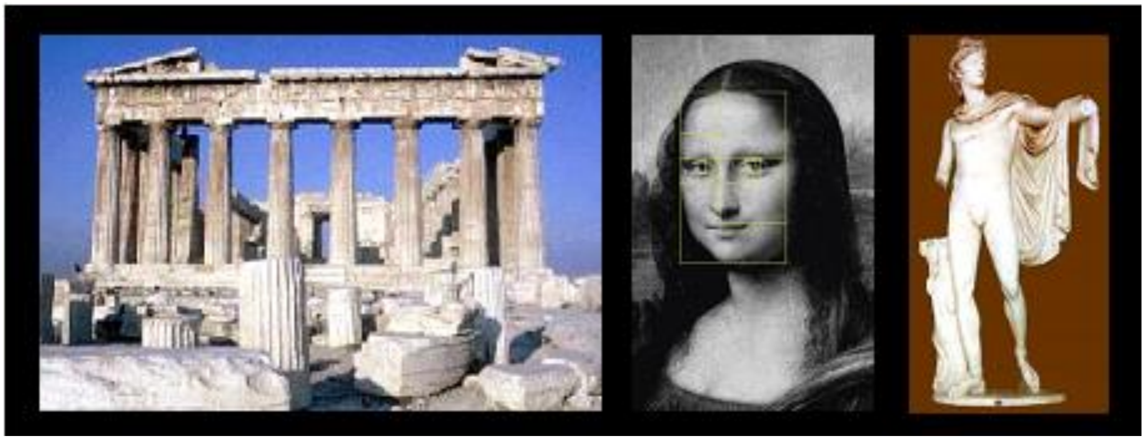


¿Qué rectángulo fue escogido más veces?

Rectángulo	Veces elegidas	Cantidad en número

¿Por qué crees que ese o esos rectángulos fueron escogidos más veces?

Observa las siguientes imágenes



ACTIVIDAD 2: Construye un rectángulo con medidas enteras, divídelo en cuadrados y mide el largo y ancho del rectángulo que quedó. Sigue las instrucciones de tu maestro.

¿A qué valor llegaste?

¿Cuándo vale *phi*?

Mira la película de *Donald en el país de las matemáticas*

¿Qué es la sección dorada?

Construye un rectángulo áureo, sigue las instrucciones de tu maestro.

ACTIVIDAD 3: Indica de los rectángulos que se entregaron anteriormente, ¿cuáles son áureos? De los rectángulos que se escogieron más ¿Cuántos son áureos?

Observa la gráfica y comenta con tus compañeros y maestro

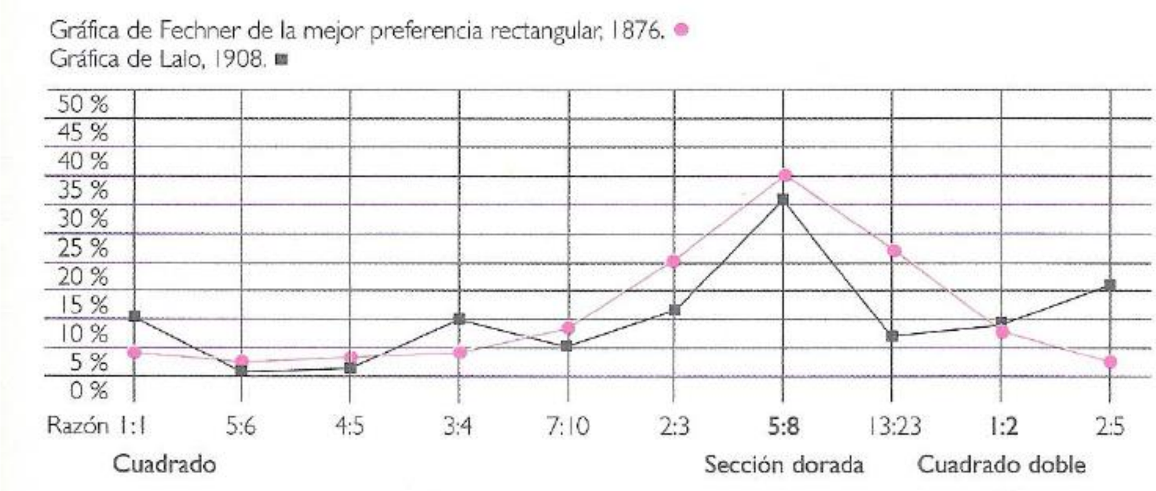
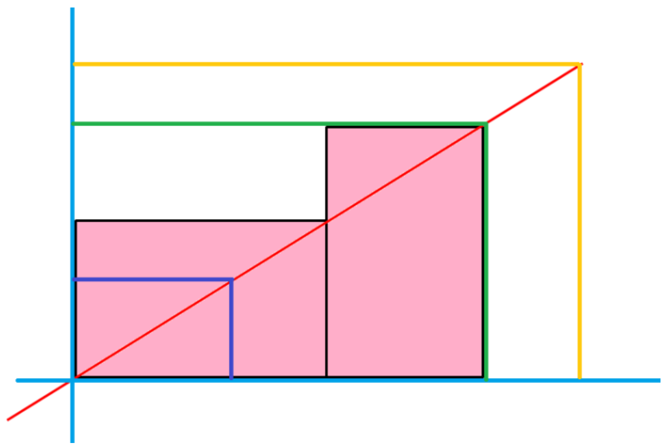


Fig. 1.1. Comparación gráfica de la preferencia rectangular.

ACTIVIDAD 4: Construye un rectángulo áureo ¿cómo puedes construir otro a partir del que hiciste?

Observa la siguiente figura, analiza y comenta con tus compañeros y maestro



ACTIVIDAD 5: Comenta con tu maestro lo siguiente: "*para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que existen entre la mayor y el todo*".[74]

¿Qué observas en la gráfica?

¿Cómo son los rectángulos rositas?

¿Cómo son los demás rectángulos?

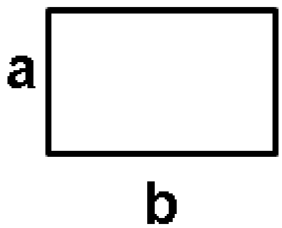
¿Pasará con todos los rectángulos? Intenta dibujarlo

¿Por qué crees que pasa esto?

---

[74] Camacho Machin, Matias y Morales González, Agustín. "Algunas características del currículum de geometría en la enseñanza obligatoria. Sugerencias didacticas" en *Revta. Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, núm. 21, sepbre/decbre 1994, pp. 83-94

ACTIVIDAD 6: La relación que guarda entre los lados un rectángulo áureo siempre será $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ = 1.618, este número es denominado *phi* o número de oro. Investiga por qué se llama número de divino.

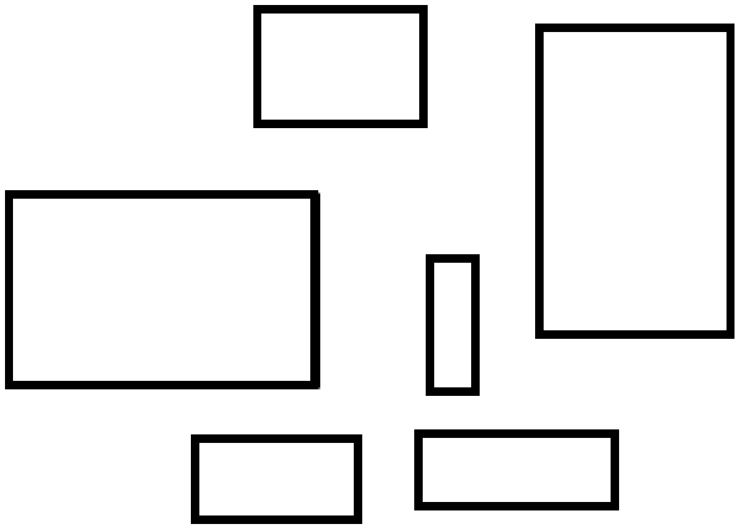


$$\frac{b}{a} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

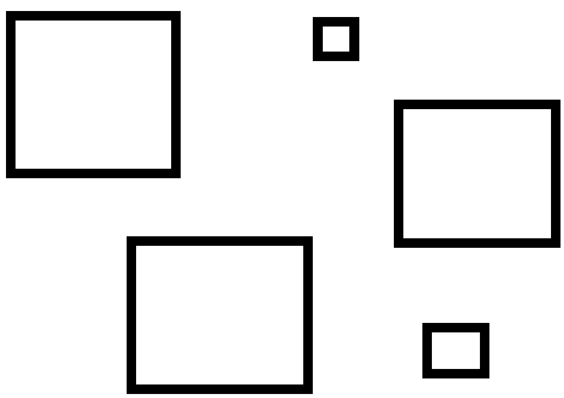
$$\frac{b + a}{b} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ACTIVIDAD 7: Construye un rectángulo áureo y comprueba la afirmación anterior. Sigue las instrucciones de tu maestro

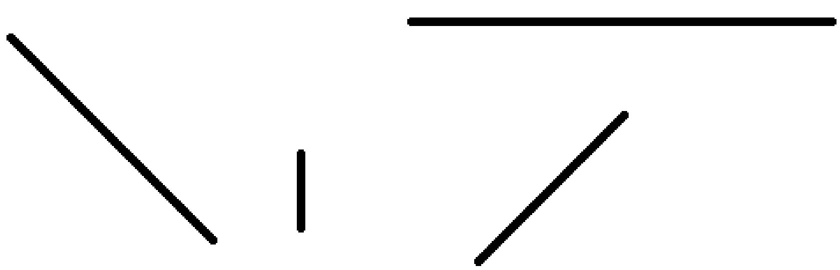
ACTIVIDAD 8: Observa los siguientes rectángulos, mide sus lados ¿cuál de ellos es áureo?



Construye un rectángulo áureo a partir de los siguientes cuadriláteros

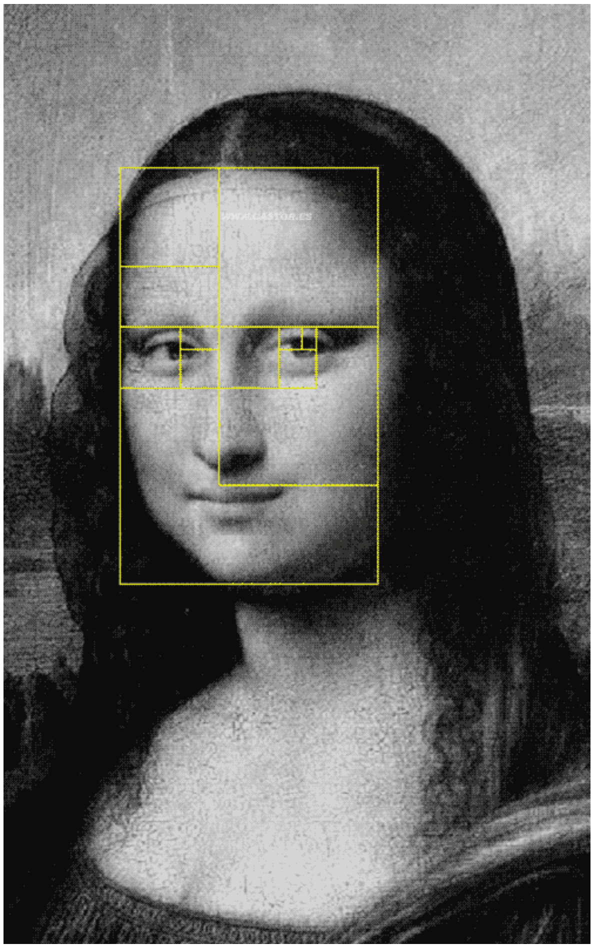


ACTIVIDAD 9: Encuentra la sección áurea de los siguientes segmentos



Con el material que te proporcione tu maestro elabora un compás áureo

ACTIVIDAD 10: Mide con tu compás áureo partes de tu rostro o el de tu compañero, como la oreja o la boca, escribe tus observaciones. Después observa la figura del cuadro *Gioconda* o *Mona Lisa* de Leonardo da Vinci y comenta con tus compañeros y maestro.



Con lo que hasta ahora has visto, trata de describir que es semejanza: _________

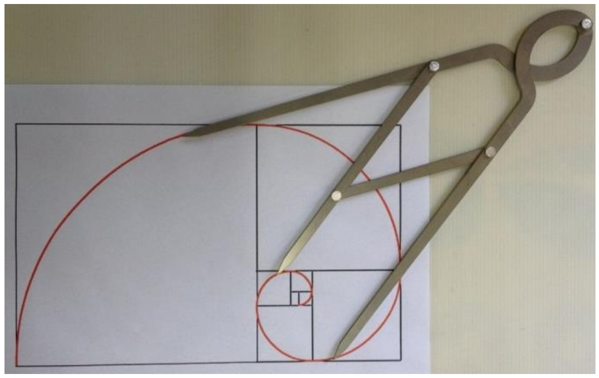
____

____

ACTIVIDAD 11. Consigue tarjetas de teléfono, credenciales, calculadoras, celulares, entre otros objetos rectangulares, mídelos con tu compás áureo y describe que observas ¿son semejantes? ¿Por qué?

Investiga que es semejanza y quien fue Leonardo Da Vince y Lucca Paccioli

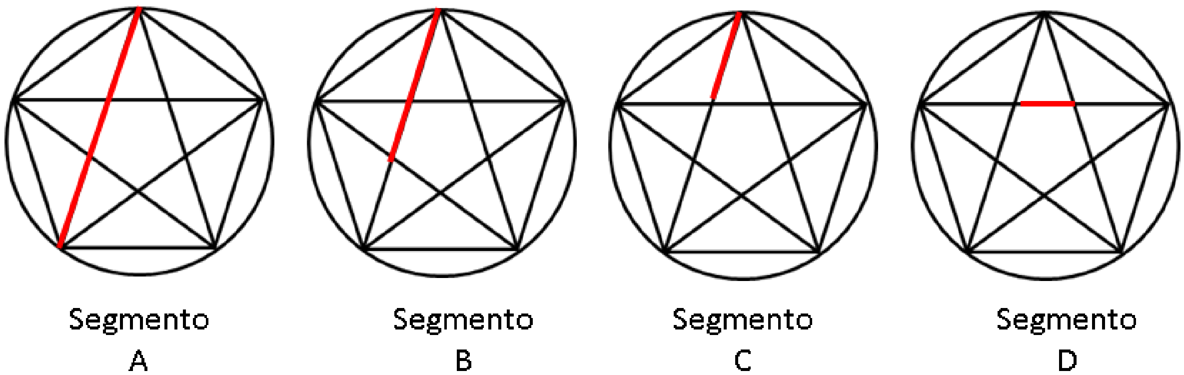
Observa el siguiente compás áureo ¿cómo lo construirías?



ACTIVIDAD 12: Construye un pentágono regular inscrito. Sigue las indicaciones de tu maestro.

Observa las siguientes imágenes, en qué son semejantes al pentágono

Traza la estrella que se forma con el pentágono y mide los segmentos que se enmarcan.



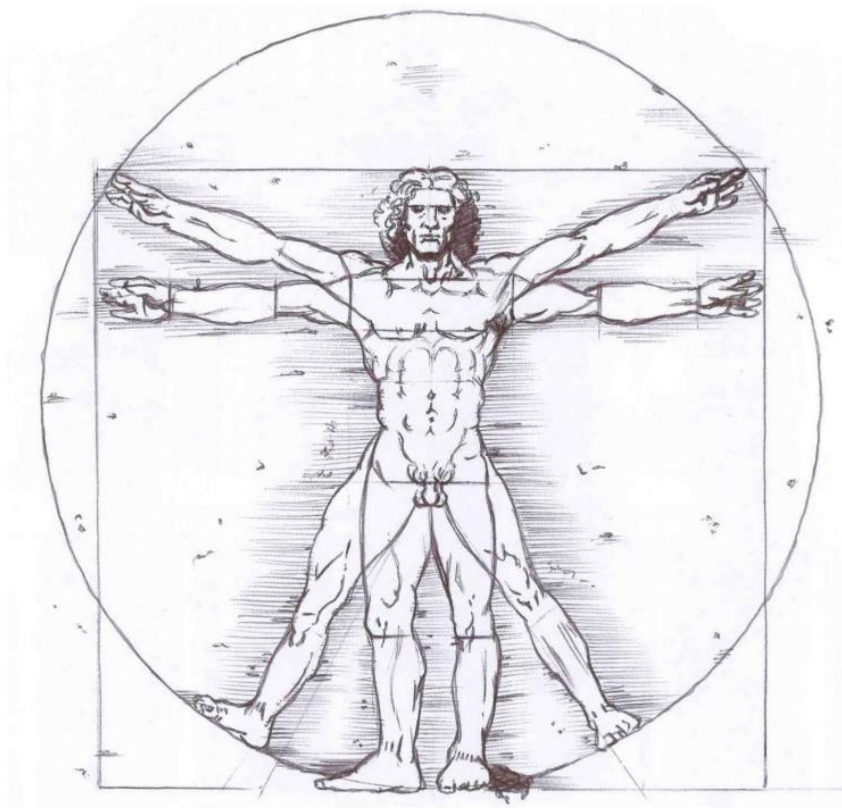
ACTIVIDAD 12: Divide la medida del Segmento A entre la medida del Segmento B; la medida del segmento B entre la medida del Segmento C; la medida del segmento C entre la medida del Segmento D; que sumen las medidas de los Segmentos C y D y que lo dividan entre la medida del Segmento C. ¿Qué observas?

Mira el video *Donald en el mundo de las matemáticas*, puedes hacerlo por internet, y contesta.

¿Quiénes eran los pitagóricos?

¿Cómo lograron hacer música los pitagóricos?

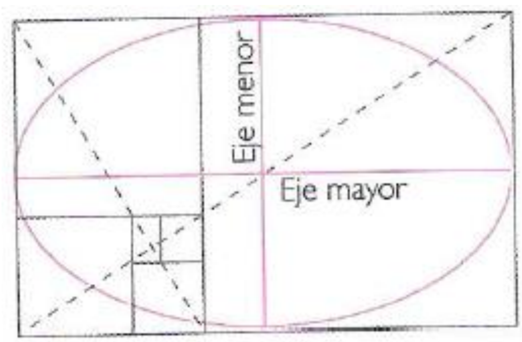
Has una breve reseña del video.
ACTIVIDAD 13: Traza un pentágono y la estrella en el círculo donde está la figura humana.

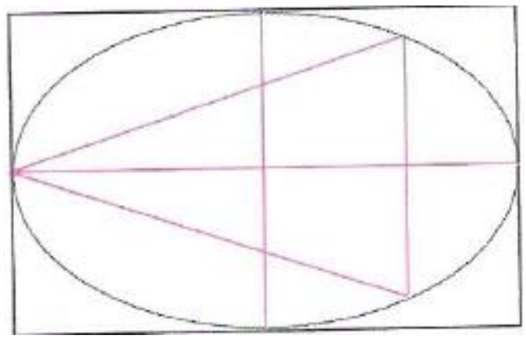


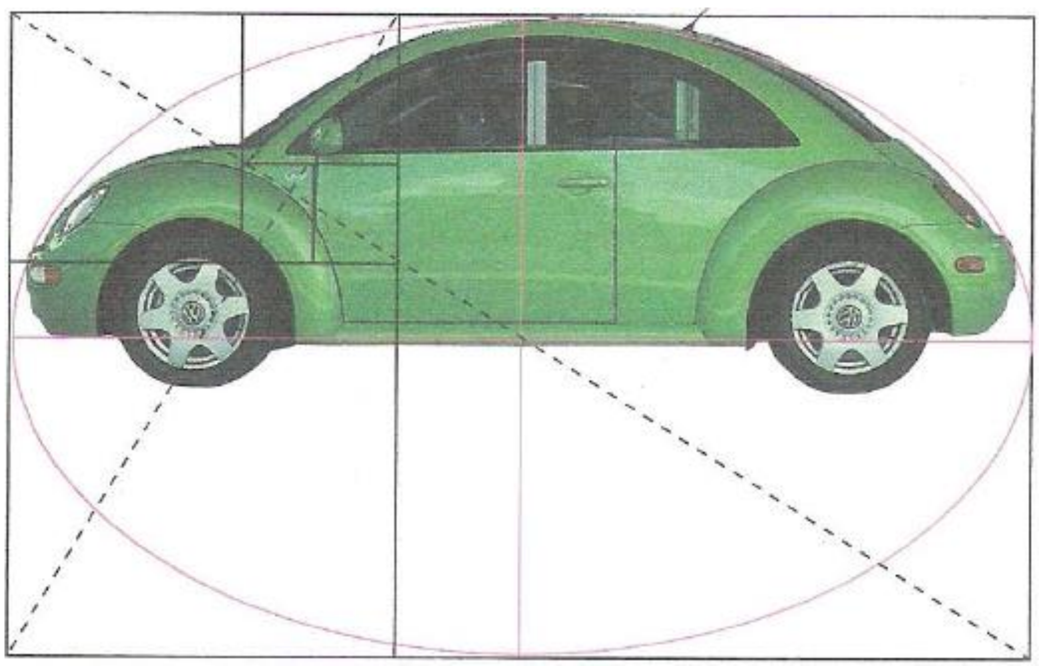
¿Qué observas?

Construye una elipse y un triángulo con dimensiones áureas

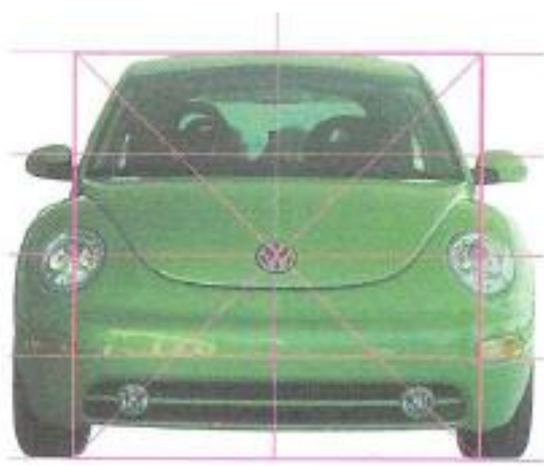
Qué observas con tus construcciones y el automóvil Beatle de la Volkswagen ¿son semejantes? ¿Por qué?



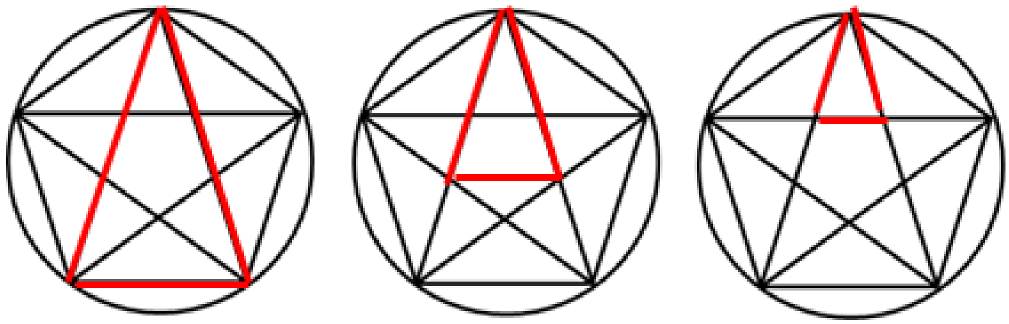




b)



Compara el triángulo dorado que trazaste con los siguientes triángulos que se forman en el pentágono y contesta las preguntas.



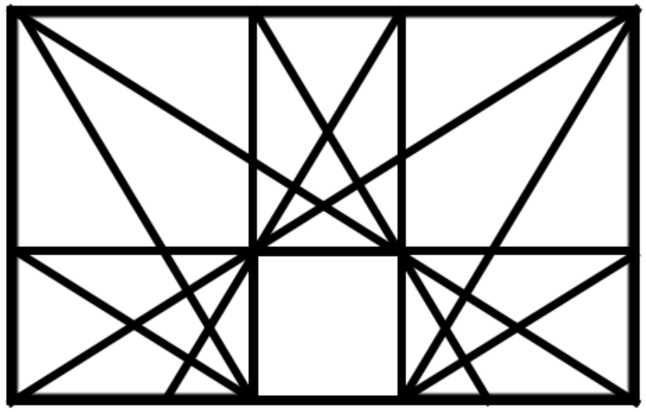
TRIÁNGULO A   TRIÁNGULO B   TRIÁNGULO C

Como son los triángulos

Justifica por qué son semejantes

ACTIVIDAD 14: Intenta dibujar un rostro humano como el del cuadro *Mona Lisa* de Leonardo Da Vinci. Utiliza el rectángulo dorado.

Existen dos tipos de rectángulos, los dinámicos y los estáticos. Investiga a que se refiere cada uno. El rectángulo áureo nos ofrece distintos rectángulos dinámicos, uno de ellos es el siguiente:



Construye otros

¿Cómo conseguirías un rectángulo áureo por medio del doblado del papel? Dibuja los pasos que realizarías.

Visita las siguientes páginas web:

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/proporcionaurea/goldensection.html
http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos
http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea1.htm
http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea3.htm
http://www.carmenes.org/