



Secretaría de Educación Pública
Universidad Pedagógica Nacional

Unidad UPN 251

**La psicogénesis de los números fraccionarios
en la escuela primaria**

Roberto Alfonso Mendoza Santos



T E S I S

PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Licenciado en Educación Básica

Culiacán, Sin., 1988

DICTAMEN DEL TRABAJO PARA TITULACION

Culiacán, Sinaloa a 28 de septiembre de 1988.

C.PROFR. ROBERTO ALFONSO MENDOZA SANTOS,
P r e s e n t e.

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo, intitulado: LA PSICOGENESIS DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS EN LA ESCUELA PRIMARIA, opción Tesis a propuesta del asesor C. LIC. ROGELIO HUMBERTO ELIZALDE BELTRAN, manifestó a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y se le autoriza a presentar su examen profesional.

A t e n t a m e n t e


PROFR. JOSE ANTONIO MERCADO MACHADO
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION
DE LA UNIDAD UPN.



S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD
CULIACAN

16-10-92 H&L

INDICE

| | Pág. |
|---|------|
| INTRODUCCION | 1 |
| 1. LA TEORIA PSICOGENETICA | 3 |
| 1.1. Procesos | 6 |
| 1.2. Etapas del desarrollo cognitivo | 7 |
| 1.3. Factores | 11 |
| 2. EL ORIGEN DEL CONOCIMIENTO DE LA NOCION DE - NUMERO FRACCIONARIO | 16 |
| 2.1. El proceso del conocimiento de la noción de número | 16 |
| 2.2. El proceso del conocimiento de la noción de número fraccionario | 22 |
| 2.2.1. Pensamiento del niño sobre fraccio- nes | 24 |
| 2.2.2. La fracción como número, como co-- ciente y como operador | 32 |
| 2.2.3. Tabla de fracciones y la recta nu- mérica | 36 |
| 3. RECOMENDACIONES PARA TRABAJAR CON NUMEROS FRAC- CIONARIOS | 41 |
| 3.1. La educación matemática sobre fracciones . | 42 |
| 3.2. Alternativas para trabajar el concepto de fracción | 47 |
| CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS | 54 |
| BIBLIOGRAFIA | 56 |
| GLOSARIO | 58 |

INTRODUCCION

La importancia del conocimiento matemático en la vida del hombre, resulta cierta al ocupar un lugar permanente en toda actividad que realiza en su vida cotidiana. Dicho conocimiento lo ayuda a desarrollar su pensamiento lógico, mejora su habilidad para descubrir características, discrimina elementos al clasificar y ordenar, lo hace pensar ordenadamente y es una herramienta valiosa y necesaria para el niño de educación primaria al plantear y resolver diferentes situaciones en términos aritméticos, geométricos y probabilísticos.

Aprender matemáticas se ha visto como un problema, debido a las dificultades que se presentan al tratar de entender la operación por aplicar. En el caso de las fracciones, su enseñanza se realiza en la actualidad con la finalidad de ejercitar y mecanizar en forma memorística los conocimientos elaborados por otros. De esto se deduce que las dificultades que presentan los niños para la adquisición del conocimiento del número fraccionario se presenta por lo general debido a que el docente no atiende los procedimientos y mecanismos de razonamiento que distinguen al niño de 7 a 12 años para la construcción del conocimiento; ocasionándole como consecuencia el olvido y la apatía por éstas.

Lo anterior ha motivado la realización de una investigación a través de la teoría psicogenética y la pedagogía operativa que permita explicitar a nivel conceptual los momentos que ha de desarrollar el niño para construir el conocimiento de la noción de fracción.

El presente trabajo es una investigación documental conformada por tres capítulos: En el primero se presenta la teoría psicogenética como fundamentación teórica del por qué hay que conocer los mecanismos mentales del niño; el segundo capítulo, describe los procesos que sigue el niño en la construcción del conocimiento del concepto de número y número fraccionario; el tercero, contiene algunas alternativas a través de las cuales orientan al alumno hacia el conocimiento, el cual es construido al interactuar con los objetos.

Esta investigación pretende influir en la formación de un nuevo modelo educativo que conceptualice al docente en una doble dimensión; como conocedor tanto de los contenidos programáticos, como de los procesos mentales que realiza el alumno para la construcción del conocimiento, que conlleve a su formación reflexiva y participativa.

1. LA TEORIA PSICOGENETICA

A la teoría de Jean Piaget, se le ha llamado psicogenética, por ser una teoría evolucionista que trata de: Conocer al niño comprendiendo la formación de los mecanismos mentales; - que se perfeccionen los métodos educativos, para llegar a entender al hombre, partiendo de un análisis de su desarrollo al hacer una interpretación genética tanto en el plano de la inteligencia, de las operaciones lógicas, de las nociones de número, espacio y tiempo, como en la percepción.

Tiende a la elaboración de una epistemología que se ubica como una disciplina filosófica que estudia los fundamentos, métodos y lenguaje del conocimiento científico.

Esta teoría está fundamentada en que el organismo hereda un programa genético, vinculado a todo el proceso de desarrollo del cuerpo (embriogénesis), en particular al desarrollo del sistema nervioso y de las funciones mentales (percepción, comparación, concreción y generalización), el cual aporta en forma gradual el equipo biológico que se necesita para que el niño construya una estructura interna de todo lo que lo rodea.

La teoría de Piaget también es cognitiva porque se refiere más a la estructura explicando cómo trabaja la mente y ocupándose de la comprensión de la conducta.

Cognitiva concierne al proceso del conocimiento, a la forma de cómo va evolucionando el pensamiento infantil explicando

el intercambio entre el mundo exterior y el sujeto.

El conocimiento ha significado en lo fundamental: Comprensión de lo que existe, del universo, del pensamiento, del intercambio verbal de la relación entre el ser humano y la realidad. Estos dos últimos términos son básicos del proceso del conocimiento.

Para el sujeto, el conocimiento significa entender lo que está sucediendo al estar intercambiando impresiones con todo - aquello que tiene a su alrededor.

El planteamiento de que el conocimiento no procede solo - del sujeto, tampoco del objeto, sino de la interacción entre - el sujeto y el objeto corresponde a la epistemología genética.

Significa que el conocimiento no es extraído del ambiente por el sujeto, ni procreado en la mente del sujeto, ni surge - al madurar dicho sujeto sino que es construido por él a través de la interacción de sus estructuras mentales con el exterior; siendo por todo esto una teoría interaccionista.

A la teoría psicogenética se le considera constructivista porque postula que el conocimiento se va construyendo, que es el producto de una elaboración constante y progresiva que surge de la interacción entre el individuo y el objeto y de las - experiencias con su medio ambiente. Es decir que el niño al ponerse en relación con el objeto, interactúa para modificar su estructura en otra estructura.

Con lo anterior la epistemología genética es una teoría -

interaccionista y constructivista con su método la psicogénesis.

El sujeto para conocer al objeto debe actuar sobre él, - transformándolo, de tal forma que lo desplace, conecte, combine, separe y lo vuelva a unir. Esta acción modificadora permite que siempre el sujeto y el objeto estén fusionados.

En la interacción entre sujeto y objeto se utiliza desde las acciones más elementales del período sensoriomotriz (como jalar, empujar, encoger, estirar, etc.) hasta las acciones intelectuales (como: Ordenar, agrupar, etc.) ya que dicho conocimiento surge de las transformaciones.

El conocimiento objetivo no es adquirido por un simple - registro de información externa, sino que se origina en la interacción entre el sujeto y el objeto, derivándose de ésta la construcción que es la consecuencia de la interacción, implicando dos actividades: Una de ellas referida a coordinar las acciones y la otra que permite introducir inter-relaciones - entre los objetos, de esto se deduce que dicho conocimiento - objetivo está siempre dependiendo de las estructuras de las - acciones y el resultado de una construcción origina una es---trutura, la cual no esta dada en los objetos, pues dependen de la acción, ni están dadas en el sujeto, ya que éste debe - aprender a coordinar sus acciones. Significa que el niño en - su desarrollo intelectual va pasando por un proceso de elaboración donde las nociones más evolucionadas las construye partiendo de las más elementales. Por ejemplo en la formación - del conjunto de los números fraccionarios se iniciará de la -

noción de número natural.

1.1. Procesos

Para construir el conocimiento se necesitan tres procesos: Asimilación, acomodación y adaptación.

La asimilación consiste en que al actuar el sujeto sobre el ambiente, construye del mismo, un modelo. Es la incorporación de los elementos del ambiente al pensamiento del sujeto.

Asimilar es la integración de los datos externos a la estructura interna cognitiva

La acomodación consiste en un ajuste que tiene que hacer el sujeto en su estructura sobre una situación, la cual al modificarse se origina otra estructura. El sujeto modifica estructuras ya existentes, para aceptar e incorporar la nueva experiencia, es decir obliga al niño a ir más allá de su entendimiento, sometiénolo a situaciones nuevas.

La adaptación es un equilibrio entre el integrar un dato exterior en una estructura y el cambio sistemático de ella en otra. Es una función biológica donde las funciones no varían en el desarrollo del niño, únicamente las estructuras. La producción del conocimiento es un proceso progresivo de equilibrio entre la asimilación y la acomodación para dar origen a la adaptación, por lo que el conocimiento es un proceso constructivo de adaptación. El cual consiste en asimilar lo real-

a estructuras de transformación elaboradas por la inteligencia.

Estos procesos, son muy importantes en la comprensión de fracciones, donde el niño tiene que usarlos al incorporar nuevas experiencias a su estructura mental (conjunto de conocimientos que posee), para hacer un reajuste de la misma y llegar a transformarla con la relación que haga de los medios utilizados y el fin logrado.

1.2. Etapas del desarrollo cognitivo

El niño en su desarrollo cognitivo atraviesa por diferentes etapas, es decir cambia conforme va creciendo, tanto en su organismo como en su pensamiento; clasificadas según Piaget en cuatro: La sensoriomotriz (0 a 2 años), la preoperacional -- (2 a 6 años), la de las operaciones concretas (7 a 12 años) y la de las operaciones formales (12 años en adelante).

Período sensoriomotriz: en los primeros meses de vida - del infante, el mundo que le rodea es cambiante, no hay permanencia. Decimos que hay permanencia del objeto, - cuando el niño comienza a buscarlo. Cuando empieza a an ticipar los resultados de sus acciones. Por ejemplo: - con un empujón tirará la pelota desde su silla al suelo y después se asomará a contemplarla. Así adquiere la no ción elemental de causalidad y se le desarrollan sus - conceptos espaciales.(1)

En esta etapa el niño realiza actividades que son perceptuales y motrices, al mismo tiempo adquiere las siguientes nociones: elaboración del concepto de objeto permanente, la de-

causalidad que le sirve para anticipar resultados de sus acciones y la de traslación que le sirve para relacionar actividades en las que participan los sentidos y movimientos al buscar y localizar objetos que él movió, desarrollándose su conocimiento práctico.

La anterior concepción, sobre las características que surgen en la etapa sensoriomotriz, se refieren principalmente a la acción como productora de conocimiento, al relacionarse el sujeto con el objeto, utilizando los órganos de los sentidos para mover, localizar y buscar la causa de el por qué cambian de lugar los objetos al moverlos con alguna parte de su cuerpo y que al modificar las acciones se origina el pensamiento, el cual expresa tan pronto maneja la palabra, al final de esta etapa e inicio de la siguiente.

La etapa preoperacional que también se le conoce como período del pensamiento representativo y prelógico, en el cual el niño descubre que algunos objetos pueden sustituir a otros,

El pensamiento infantil ya no está sujeto a acciones externas y se interioriza. Las representaciones internas proporcionan el vehículo de más movilidad para su creciente inteligencia. Las formas de representación interna que emergen simultáneamente al principio de este período son: la imitación, el juego simbólico, la imagen mental y un rápido desarrollo del lenguaje hablado.(2)

Esta etapa preoperacional se caracteriza porque el pensamiento del niño es: representacional (evoca por medio de una imagen simbólica, el objeto ausente); imitativo (cualquier -

acción que vea es capaz de repetirla); egocéntrico (únicamente toma en cuenta su punto de vista).

Operación es una acción interiorizada que modifica el - objeto de conocimiento y son las estructuras operacionales las que constituyen la base del conocimiento, la realidad psicológica natural en términos de la cual debemos entender el desarrollo del conocimiento y el problema central del desarrollo es, comprender la forma---ción, elaboración, organización y funcionamiento de estas estructuras.(3)

Operar es pues conocer un objeto actuando, modificando, - transformando, separando, uniendo, para que el sujeto se capacite y llegue a construir nuevas estructuras internas. Significa que el niño resuelve problemas concretos, para los cuales, - utiliza una organización directa de datos inmediatos, estando su pensamiento ligado a la realidad.

A esta etapa también se le llama.

Del pensamiento lógico concreto: aquí el niño se hace más capaz de mostrar el pensamiento lógico ante los objetos físicos. Una facultad recién adquirida de reversibilidad le permite invertir mentalmente una acción - que antes solo había llevado a cabo físicamente. Es capaz de retener dos o más variables al estudiar los objetos. Es cada vez más consciente de la opinión de otros, surgen las operaciones matemáticas: clasifica---ción, seriación, correspondencia, construcción de la idea de número.(4)

Lo anterior implica que el niño desarrolla su pensamiento limitándolo a cosas concretas, a la realidad física, que piensa antes de actuar, participa en los juegos con reglamento y con

la coordinación de los puntos de vista se inicia la construcción de la lógica y, por manejar operaciones de clasificación, seriación y correspondencia para lograr el concepto de números llamado a este período la edad de la razón.

El período de las operaciones formales o hipotético deductivas está caracterizado.

Por la habilidad para pensar más allá de la realidad concreta sobre ideas abstractas (por ejemplo, proporciones y conceptos de 2º. orden). El niño de pensamiento formal tiene la capacidad de manejar a nivel lógico enunciados verbales y proposiciones en vez de objetos concretos. Es capaz de entender plenamente y apreciar las abstracciones simbólicas del álgebra y la crítica literaria. A menudo se ve involucrado en discusiones espontáneas sobre filosofía, religión y moral - abordando conceptos abstractos como el de justicia y libertad.(5)

El niño reflexiona independientemente del objeto y lo reemplaza con proposiciones desligándolo de lo real para formular teorías. También es capaz de manejar muchas variables, realizar experimentos y dirigir discusiones en forma reflexiva sobre situaciones abstractas. Hace uso de la hipótesis, el experimento y la deducción esto le permite razonar de lo particular a lo general y viceversa. El pensamiento formal en el sujeto se caracteriza por hacer sus razonamientos construyendo operaciones por medio de proposiciones, siempre partiendo de algo abstracto como lo es la aproximación de lo que cree que será el resultado (hipótesis).

La teoría psicogenética con sus investigaciones, ha llega

do a demostrar que el desarrollo intelectual va evolucionando gradualmente y atraviesa por las etapas antes mencionadas, cuyos límites no son rígidos sino que le permiten a los niños - construir cierto tipo y grado de conocimiento según su nivel - de desarrollo.

1.3. Factores

Para explicar el paso de una estructura a otra, se necesita que se den los cuatro factores que son: la maduración, la - experiencia de los efectos del ambiente físico, la transmisión social y la equilibración.

El factor " maduración es: el resultado de factores hereditarios. El resultado de aprendizajes de experiencias. El que está referido al crecimiento orgánico y el proceso de diferenciación funcional de la célula nerviosa ".(6)

Significa que con la maduración el niño va construyendo - estructuras y superándolas, a medida que va creciendo y desarrollándose su sistema nervioso en cuanto a funciones mentales concierne.

Cuantos más años tenga un niño más probable es que tenga un mayor número de estructuras mentales que actúan en forma organizada. El sistema nervioso controla las capacidades disponibles en un momento dado y no alcanza su madurez total sino hasta que cumple 15 o 16 años.(7)

Existe una relación entre la edad cronológica y la canti-

dad de estructuras modificadas por el niño y organizadas por el sistema nervioso.

La maduración es continuación de la embriogénesis, toma parte en cada transformación que se da durante el desarrollo del niño pero es insuficiente por sí sola, existen las mismas etapas en los niños de diferente nacionalidad pero retrasadas. (esta variación de edad, muestra que este factor no lo explica todo. Dicha maduración es la que está presente en cada transformación de cada estructura en otra que se da internamente en el paso constructivo que va de las sencillas a las complejas, es decir va superando contradicciones para dar lugar a nuevos niveles de estructuración.

El segundo factor es la experiencia de los efectos del ambiente físico.

La experiencia de objetos de realidad física es un factor básico en el desarrollo de estructuras cognoscitivas. La noción de conservación de la sustancia es una necesidad lógica ya que entiende que cuando ocurre una transformación algo debe conservarse. La experiencia física consiste en actuar sobre objetos y derivar algún conocimiento respecto de los objetos por medio de la abstracción de objetos, pero existe un segundo tipo de experiencia lógico-matemática, en la que el conocimiento no se deriva de los objetos sino de las acciones que se efectúen sobre los objetos. (8)

La experiencia de objetos de realidad física es la suma de interacciones entre objetos y personas, entre ellas están las acciones que el sujeto realiza sobre los objetos al manipularlos y ser capaz de abstraerlos. Con la percepción se inicia la construcción de la noción de conservación de la sustancia -

al observar cambios del objeto y ver que existe algo que se conserva.

Son las acciones del sujeto las que permiten la construcción de estructuras del pensamiento y la coordinación total - de ellas conducen a las estructuras lógico-matemáticas de tal manera que, cuando se han construido las operaciones por el sujeto, la experiencia física ya no es necesaria porque la coordinación de acciones se da por sí misma con la deducción- (interiorizar acciones sin necesidad de objetos) y con la construcción de estructuras abstractas.

Según Ed Labinowicz en su obra introducción a Piaget p.- 43 y 44 menciona al respecto que cuanta más experiencia tenga un niño con objetos físicos de su medio ambiente, más probable es que desarrolle un conocimiento apropiado de ellos, pudiendo obtener conocimiento físico directamente a partir de la percepción de los objetos (identifica propiedades físicas) y deriva conocimiento lógico no de los objetos mismos sino de su manipulación y de la estructuración interna de su acción.

Lo anterior significa que hay dos tipos de experiencia: - la física, que permite al sujeto conocer el objeto cuando lo manipula y describe sus características; la lógica-matemática, que hace que el niño descubra por sí mismo con su propia actividad ciertas propiedades de su accionar con los objetos.

El tercer factor llamado de la transmisión social, " es cuando el niño puede recibir información valiosa (vía lenguaje, educación) dirigida por un adulto, siempre y cuando po--

sea la estructura que lo capacite para asimilar esta información ".(9)

El niño en su desarrollo recibe variada información vía - lenguaje o educativa, pero únicamente le será útil aquella que su nivel estructural pueda comprender. A este factor también - se le conoce como interacción social, el cual consiste en todas aquellas actuaciones que el sujeto realiza con sus padres, hermanos, compañeros, profesores, etc., obteniendo más opiniones que le ayudarán a pensar, Son estas interacciones las que le proporcionan información respecto a nombres y usos de los - objetos, costumbres, etc., constituyendo el conocimiento social.

Corresponde a la interacción social o transmisión un papel importante dentro del desarrollo del paso de una estructura a otra, por medio de las opiniones de los demás, el niño - llegará a construir estructuras de respeto, reflexión, discusión y puestas en común.

El cuarto factor es la equilibración, el cual sirve como coordinador de los otros factores, involucrándolos en la interacción entre el pensamiento del sujeto y la realidad. " La actividad del niño no solo le descubre nuevos problemas, iniciando con ello el desequilibrio, sino que también actúa como solución, logrando un nivel superior de equilibrio ".(10)

El niño al estarse desarrollando se enfrenta a conflictos e incompatibilidades que se le presentan en la realidad y que tendrá que superar y resolver para llegar a un equilibrio.

Es un proceso activo mediante el cual una persona reacciona a modificaciones en su modo de pensar - por un sistema de compensaciones; es cuando el sujeto se enfrenta con una molestia externa, reacciona con objeto de compensar llevándolo a la reversibilidad operacional donde una transformación en una dirección es compensada por una transformación en la otra dirección.(11)

La equilibración permite al niño que cada vez que se enfrenta a dificultades externas, reacciones con una autorregulación, tratando de compensar para llegar al equilibrio.

En esta forma, se ha intentado dar una explicación general sobre los fundamentos, el lenguaje y el método de la teoría psicogenética, que determina con sus principios que el niño pasa por etapas en su desarrollo. En virtud de ello, es fundamental propiciarle cuestionamientos para hacerlo llegar a la construcción por sí mismo de estructuras de conocimiento, con esto será más descubridor, reflexivo, creativo, crítico, etc., cuyo perfil se notará en la participación como niño, alumno y hombre de la sociedad.

Citas bibliográficas del capítulo 1

- (1) Hayne W. Reese, et. al., Psicología experimental infantil Ed. Trillas, México, D.F. 1980. p. 563.
- (2) Labinowicz, Ed., Introducción a Piaget, pensamiento . aprendizaje enseñanza. ed. única, Ed. Fondo educativo interamericano, E.U.A. 1980, p. 86.
- (3) Universidad Pedagógica Nacional, El niño: aprendizaje y - desarrollo. Ed. U.P.N. México, D.F. 1985. p. 12.
- (4) Labinowicz, Ed., op. cit. p. 86.
- (5) Id.
- (6) Universidad Pedagógica Nacional, Pedagogía revista de la- U.P.N. vol. 1 N° 1, México. 1984, p. 65.
- (7) Labinowicz, Ed., op. cit. p. 42.
- (8) Universidad Pedagógica Nacional, El niño: aprendizaje y - desarrollo, op. cit. p. 16.
- (9) Ibid., p. 20.
- (10) Labinowicz, Ed., op. cit. p. 46.
- (11) Universidad Pedagógica Nacional, El niño: aprendizaje y - desarrollo, op. cit. p. 22.

2. EL ORIGEN DEL CONOCIMIENTO DE LA NOCION DE NUMERO FRACCIONARIO

Este capítulo hace referencia al proceso gradual que presenta el niño para elaborar la estructura que lo capacita para comprender la noción de número fraccionario, de tal manera que primeramente necesita construir la noción de número, misma que se fundamentará teóricamente con generalidades sobre el origen de su conocimiento, recordando que esta noción se construye se gún la teoría psicogenética en la etapa de las operaciones con cretas, que aproximadamente abarca de los 7 a los 12 años, y - corresponde a niños en edad escolar del nivel primario.

2.1. El proceso del conocimiento de la noción de número

Para que el niño llegue a construir el concepto de número necesita la noción de la conservación ya que su pensamiento, a medida que tiende a la organización de un sistema de nociones, introduce cierta permanencia en sus opiniones. Aún más, a partir de la percepción del objeto tan esencial para que se dé el objeto permanente, quien a la vez supone la elaboración de una verdadera conservación que es sin duda el más primitivo de los principios de dicha conservación.

La construcción de todo conocimiento implica que el niño- sea capaz de retener un objeto en su mente para darse una ex-- plicación que cuando se cambia la forma a un objeto por ejem-- plo, existe algo en ese objeto que no varía.

Para que se dé la conservación de la cantidad el niño --

pasa por tres etapas que son: la primera etapa es ausencia de la conservación, la cual es perceptiva; aquí al niño se le presentan por ejemplo dos recipientes con agua al mismo nivel y - uno de ellos se vacía en otros tres recipientes, entonces, se le pregunta ¿ En dónde hay más líquido, en el recipiente que quedó o en los recipientes en los que se vació ? aquí el niño - contesta que en los tres recipientes hay más cantidad de líquido.

La segunda etapa de la conservación de la cantidad es la - que constituye un período de transición y elaboración, cuya característica principal es que el niño afirma que hay la misma - cantidad en los recipientes del ejemplo anterior, cuando haya - pequeñas diferencias de nivel, pero basta que observe grandes - diferencias de nivel para que no crea en la conservación. Aquí se presentan dos situaciones: cuando cree que hay más líquido - y cuando cree que hay menos, asombrándose que sus contestaciones se contradicen.

Esta etapa permite al niño que a veces conteste que hay - la misma cantidad al presentársele débiles diferencias de nivel, y en creer en la no conservación cuando existen marcadas - diferencias, es decir se ubica en contestaciones intermedias.

La tercera etapa llamada de la conservación necesaria, - donde el sujeto postula de primera intención la conservación - de las cantidades en cada una de las transformaciones que se - efectuaron en el objeto.

El niño no necesita ya reflexionar para asegurarse de la - conservación de las cantidades totales, dicha seguridad se de-

be a la invariabilidad del conjunto, resulta de un juicio de identificación en forma global, que no poseía y que estaba siendo estorbado por factores perceptivos, tanto en la primera etapa de ausencia como en la segunda de transición. Si se resume esta etapa de una manera general se constata que estas particiones numéricas e igualaciones de diferencias se constituyen porque el niño se vuelve capaz de manejar las operaciones inversas al darle un carácter operatorio a dichas transformaciones. Aquí se expresa la reversibilidad propia de toda operación lógica y matemática ya que no es otra cosa que la transformación en una dirección compensada por una transformación - en la otra dirección y es la que permite concebir igualaciones y descomposiciones.

En esta fase de la conservación de la cantidad, el pensamiento del niño no duda al contestar que la cantidad es la misma en el ejemplo de los recipientes con líquido al responder - que no se ha agregado ni quitado nada. Todo esto lo hace porque ya coordina las relaciones.

Toda percepción y todo juicio concreto atribuyen en efecto, cualidades a objetos, pero no pueden aprehender estas cualidades sin relacionar las unas con las otras. Estas relaciones en si podrían dividirse en dos clases: las relaciones simétricas que expresan las semejanzas y las relaciones asimétricas que expresan las - diferencias.(1)

Las similitudes entre cualidades corresponden a la clasificación, mientras que las diferencias asimétricas implican el más y el menos marcando el comienzo de la cuantificación, por ejemplo: dados dos objetos A y B establecer que " A es más lar

go que B " o que " A es menos largo que B ", aquí es donde está el germen de la cantidad.

Significa que hay dos relaciones que hacen posible la noción de la cantidad: una que hace que cuando el niño interactúa sobre los objetos sea capaz de agruparlos de acuerdo a -- cierto criterio propio, que se denominará clasificación que atiende semejanzas y la otra que hace referencia a las diferencias ya sea en orden ascendente o descendente a la cual se le llama seriación.

Recitar los nombres de los números en ausencia de objetos reales es una actividad sin sentido. Un número es -- algo más que un nombre. Un número expresa una relación. Las relaciones no existen en los objetos reales. Son -- abstracciones; un escalón sacado de la realidad física. Las relaciones son construcciones de la mente impuestas sobre los objetos.(2)

El niño que repite en forma verbal los números sin relación con objetos significa que no ha construido el concepto de número debido a que no hay conservación de la cantidad y no -- coordina relaciones.

Concepto de número es el resultado de la síntesis de la operación de clasificación y seriación: un número es la clase formada por todos los conjuntos que tienen la misma propiedad numérica y que ocupa un rango en una serie, serie considerada a partir también de la propiedad numérica. De allí que la clasificación y la seriación se -- fusionen en el concepto de número.(3)

Cuando un niño interactúa sobre varios conjuntos, agrupán

dolos por similitudes, diferencias y establece un orden ascendente o descendente de acuerdo a una misma propiedad se afirma que ha construido el concepto de número.

La clasificación es una operación lógica fundamental - en el desarrollo del pensamiento no se reduce a su relación con el concepto de número, interviene en la -- construcción de todos los conceptos que constituyen - nuestra estructura intelectual. Clasificar es juntar - por semejanzas y separar por diferencias.(4)

La clasificación significa, centrar la atención sobre similitudes, que al hacerla, se está separando de las que no tengan semejanzas. Se hace notar que al clasificar se toma en -- cuenta a la par de las semejanzas y diferencias otros dos tipos de relaciones: la pertenencia y la inclusión.

La pertenencia es la relación que se establece entre - cada elemento y la clase de la que forma parte. Está - fundada en la semejanza. La inclusión es la relación - que se establece entre cada subclase y la clase de la que forma parte, nos permite determinar que la clase - es mayor, tiene más elementos que la subclase.(5)

Se emplea la clasificación también al pensar en un número, ya que se toman en cuenta las semejanzas cuando se agrupan en el caso del número tres todos los conjuntos que tienen tres elementos, y las diferencias cuando se están separando de todos los conjuntos que no contengan tres elementos. Es decir -- que, en el caso de clasificar números no se buscan semejanzas entre los elementos de los conjuntos sino semejanzas entre los

conjuntos; así es como se forman las clases de números que no son aislados sino que forman parte de un sistema jerárquico en el cual la relación de inclusión permite que cada clase incluye a las que son inferiores y a la vez ella misma está incluida o es una subclase de las que son superiores, de tal manera que la clase tres, por ejemplo, incluye a la de dos, a la de uno ... y está incluida o es subclase a la vez de las clases cuatro, cinco ...

La mayoría de los niños en edad escolar obtienen la agilidad mental para coordinar la relación entre " algunos " " todos " es decir ya no tienen dificultad para tomar la idea de que en todos los elementos de un grupo puede haber algunos elementos que pertenezcan a otro grupo.

" Seriar es establecer relaciones entre elementos que son diferentes en algún aspecto y ordenar esas diferencias ".(6) - Por ejemplo si se desea seriar niños cuya estatura es diferente, se ordenan del más bajo al más alto o del más alto al más bajo. Dicha seriación contiene a las propiedades de transitividad y de reciprocidad. En la primera se establece una relación que transita de un primer elemento hasta un tercer elemento mediante la deducción de la propiedad transitiva; por ejemplo: - si A es más bajo que B y B es más bajo que C, entonces A es más bajo que C.

La reciprocidad consiste en la relación entre dos elementos que se comparan de tal manera que, al invertir dicha relación se convierte en recíproca. Por ejemplo: si se compara B -

con C con la relación " bajo " se enuncia " B es más bajo que - C " y si se invierte, es decir C con B, se expresa " C es menos bajo que B ".

La transitividad y la reciprocidad son propiedades que hacen al niño ser más lógico en sus acciones, por medio del manejo de proposiciones llega a conclusiones con la primera y con la segunda al manejo de relaciones inversas, es decir, la reversibilidad.

El niño para establecer la equivalencia numérica hace uso de la operación de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Comparar dos cantidades es poner en proporción sus dimensiones (ordinalidad) o bien poner sus elementos en correspondencia término a término (cardinalidad). Dicha correspondencia es la operación a través de la cual se establece una relación de uno a uno entre los elementos de dos o más conjuntos a fin de compararlos cuantitativamente. Se observa cómo en el caso del número, las operaciones de clasificación y de seriación se fusionan a través de la operación de correspondencia.-
(7)

El niño al agrupar conjuntos relacionando sus elementos -- al colocarlos en forma biunívoca y en forma ascendente o descendente está comparándolos para construir por medio del valor cardinal y ordinal de los conjuntos si son equivalentes y así construir el concepto de número.

2.2. El proceso del conocimiento de la noción de número fraccionario

El niño en su desarrollo intelectual está constantemente -- frente al verdadero problema que es la creación de nuevas es--

estructuras, que se forman gradualmente de la más simple a la - más compleja llamándosele génesis, en la cual una transforma-- ción equivale a la construcción posible de estructuras menta-- les y la resultante que el sujeto interioriza en cada paso del proceso donde el sujeto interactúa con el objeto se le llama - estructura interna asimiladora, que según Piaget partió de una inicial para ir creando otra más amplia, por ejemplo, una vez que el niño ha construido el concepto de número seguirá con el descubrimiento de los números naturales, después los enteros y luego con los números fraccionarios.

La continuación de esta parte trata de una reseña (*) que se refiere al proceso que se desarrolla en el pensamiento del niño escolar para construir la estructura que lo capacita para comprender el concepto de número fraccionario.

El niño es capaz de desarrollar infinidad de procedimientos al tener la necesidad de resolver un problema concreto sobre fracciones que se le presenta en la realidad ya que el - aprendizaje empieza con el reconocimiento de ese problema (de sequilibrio según Piaget). Es indiscutible que muchos de dichos procedimientos son erróneos, pero esos errores infantiles cometidos al tratar de resolverlo, constituyen en realidad los pasos naturales para el conocimiento de los números fraccionarios que al confrontarlos con el mundo real los irá enrique--- ciendo y por ende actualizándolos. De ahí que sea necesario - que se ayude al niño propiciando situaciones para que los cons--- truya por sí mismo y así llegue a nuevas y mejores soluciones.

* López Carretero, Asunción, ¿ Porqué y cómo enseñar fraccio
nes ?, Cuadernos de pedagogía, Ediciones y Distribuciones-
Universitarias, S.A., Ed. Fontalba, S.A. Barcelona, 1987. p.106.

Cabe preguntar ¿ Qué leyes rigen la comparación del número fraccionario ? . Enseñar fracciones como una de las múltiples actividades del profesor al hacer que el alumno solo compruebe el resultado a diferencia de una de las actividades del niño que es la de aprender fracciones quien por medio de la lógica de sus propias acciones es el que descubre las leyes de construcción. El profesor al utilizar en el salón de clases algunos materiales como: objetos, ilustraciones, dibujos, etc., de apoyo en la enseñanza de fracciones los convierte en fuente de información manteniendo el esquema de la demostración de los conocimientos, donde el alumno lo único que hace es traducir los razonamientos matemáticos y no construirlos.

La educación matemática en cuanto a las fracciones se refiere, se orienta hacia las contestaciones de las siguientes preguntas ¿Cuál es la significación epistemológica del concepto fracción ? , ¿ Cómo construye el niño este concepto ? y -- ¿Cuál es la utilidad para el alumno ? . La exposición de algunos datos sobre la construcción espontánea de este concepto, fundamenta su validez en la práctica docente donde para la Psicología genética el niño es un sujeto cognoscente, activo, interrogador, verificador, comprobador y explorador de la realidad, tal que sus nociones espontáneas son todas aquellas adquisiciones que conquista en su proceso evolutivo al margen de una intención deliberada y consciente del adulto.

2.2.1. Pensamiento del niño sobre fracciones

Para la búsqueda de las ideas que el niño tiene sobre el concepto fracción, basta enfrentarlo a un problema práctico cuya característica sea de repartición y que lo trate de resol--

ver por medio de fracciones, invitándolo a manipular objetos - que habrá de distribuir en partes iguales entre varios niños, - pensando con anticipación sobre cómo lo hará, realizándolo en forma práctica, para después representar en forma simbólica - comunicándola a sus compañeros. La primera parte de lo anterior referente a la partición, corresponde a cada uno de los - diferentes niveles o momentos que el niño desarrolla para llegar a la elaboración del concepto fracción.

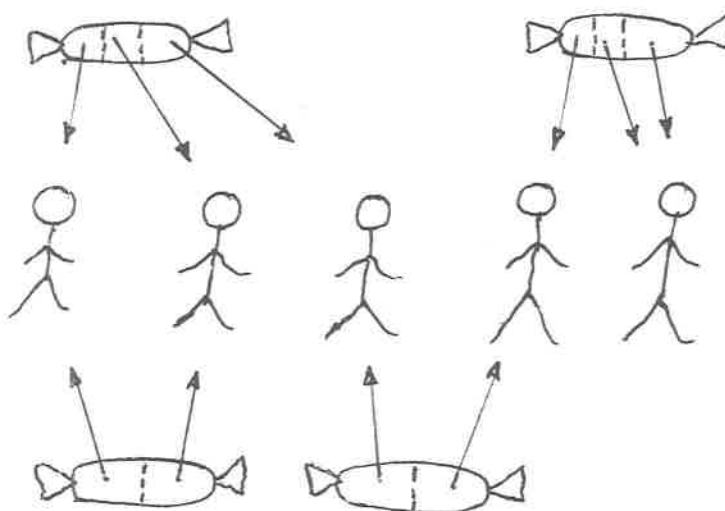
El adulto considera que es un razonamiento demasiado simple la repartición de partes iguales al fraccionar el entero y establecer que hay equivalencia entre ellos. En cambio para el pensamiento del niño quien ha de construir por si mismo estas relaciones, no lo es.

Al resolver un problema se observan las dificultades y - los avances en el proceso de construcción que están agrupados en tres momentos: un primer momento se caracteriza por una pérdida de la equivalencia de las partes al fraccionar la unidad. Esta dificultad se debe a la imposibilidad de coordinar el número de partes que se han de obtener de cada unidad, con el número total de partes que se precisan para repartir. Se trata - de una doble correspondencia, entre la fracción y el entero y entre el número total de partes y el que ha de dar a cada uno. Frente a este obstáculo surgen dos actitudes: la no equivalencia entre las partes y las partes son equivalentes pero no la correspondencia.

En la primera actitud, existe una ausencia de equivalencia al hacer la partición del objeto, pues parte el entero sin tomar en cuenta el tamaño, ya que únicamente se fija en la can

tividad de partes que necesita repartir. Ejemplificándola cuando se presenta al alumno la problemática a repartir: cuatro dulces entre cinco niños. Primero divide tres dulces por la mitad y a cada niño le da una parte, del dulce y la mitad que le queda, parte el dulce en tres pedazos y al de la mitad lo subdivide en dos partes, así tiene cinco partes que no son equivalentes, dándole un trozo a cada uno. Se hace notar, que el niño se basa en el número de veces que reparte a cada niño, sin percatarse que no hay equivalencia entre las partes que da a cada uno. Como se puede apreciar en la siguiente figura.

Fig. 1 Ausencia de equivalencia

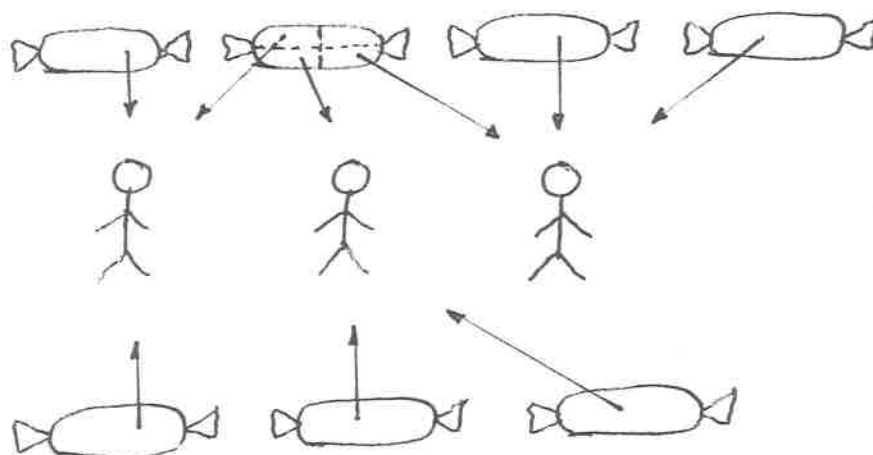


Fuente: López Carretero Asunción, ¿ Por qué y cómo enseñar - fracciones ? p. 45.

La segunda actitud referente a las partes son equivalentes pero no la correspondencia entre las partes de cada uno de los niños. Se presenta cuando el niño trata de repartir siete dulces entre tres niños, procediendo de la siguiente manera: - da dos dulces a cada niño y el sobrante lo divide en cuatro -

partes repartiendo una parte a cada uno y expresa que la otra-cuarta parte sobra. Como se ilustra en la siguiente figura.

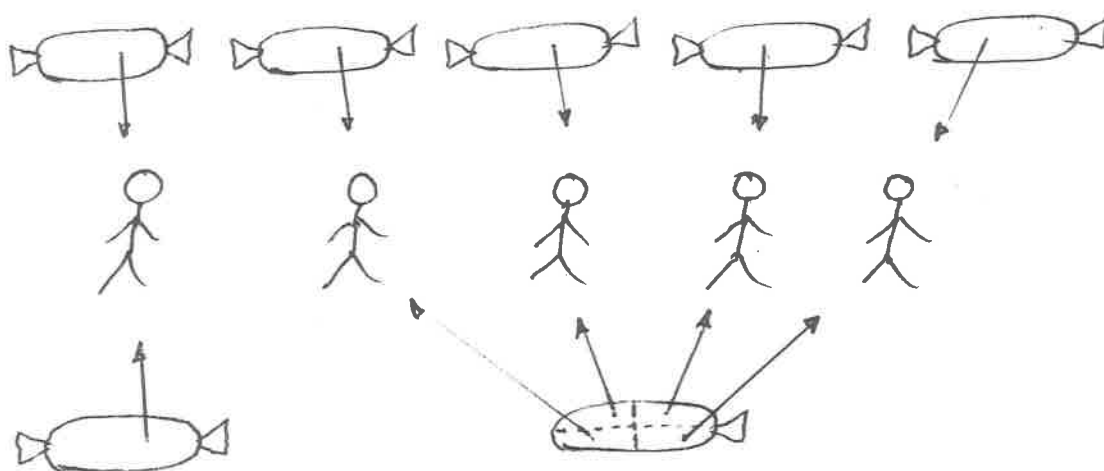
Fig. 2 Partes equivalentes pero no la correspondencia



Fuente: López Carretero Asunción, op. cit. p. 46.

Otros problemas los resuelve repartíéndolos en forma desigual para los niños, por ejemplo al repartir siete dulces entre cinco niños: da un dulce entero a cada uno, divide un dulce en cuatro partes y da una cuarta parte a cuatro niños y el dulce sobrante se lo da al quinto niño. Como se ilustra en la siguiente figura.

Fig. 3 Partes equivalentes pero no la correspondencia



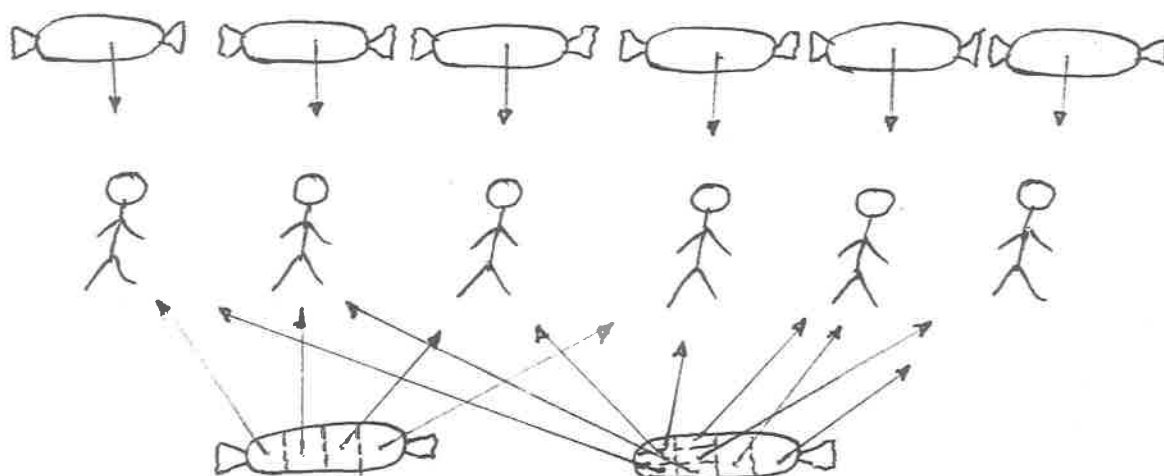
Fuente: López Carretero Asunción, op. cit. p. 46.

Este primer nivel de comprensión de la fracción, que se ubica aproximadamente entre los siete u ocho años y se caracteriza porque el niño se da cuenta que realiza dos acciones al tratar de resolver el problema: la partición del entero y la repartición de sus partes.

Con todo lo anterior el alumno da a conocer los tropiezos que se le presentan, al tratar de fraccionar el entero, al conservar la igualdad de sus partes y al trabajar con problemas que se refieren a la repartición de unidades y de las partes fraccionadas entre niños.

El segundo nivel que concierne a que las equivalencias se conservan en el fraccionamiento del entero, pero con el uso prioritario de la fracción unitaria, significa que cada unidad se partirá por separado utilizando el método de la duplicación en la partición como algunas equivalencias entre $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ surgiendo en este momento la utilización de procedimientos aditivos al repartir en particiones sucesivas sustituyen a una anticipación del total de partes que necesita para su distribución por ejemplo el niño explica la manera de repartir 8 dulces entre 6 niños: da un dulce a cada niño y fracciona los dos restantes en cuartos dándole una cuarta parte a cada niño, como le quedan dos cuartos subdivide en tres partes uno de ellos dándole a tres niños y con el otro cuarto hace la misma operación, Como se ilustra en la siguiente figura.

Fig. 4 La equivalencia se conserva



Fuente: López Carretero Asunción, op. cit. p. 47.

Es en este momento cuando los niños comienzan a descomponer y a componer las partes de la unidad, estableciendo la equivalencia entre las fracciones, al descubrir que si el número de las partes es mayor, entonces el tamaño de las mismas es menor, así como, la relación inversa de que si el número de partes es menor entonces el tamaño de ellas es más grande; también relaciona el número de partes que corresponden a cada niño (numerador) con el número total de partes de el entero (denominador). Otra regularidad es que compara en forma correcta algunas fracciones con la unidad como numerador $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ así como con numerador y denominador diferentes. Por ejemplo para contestar a ¿ Quién come más cantidad de pan de dos personas, una que toma $\frac{3}{4}$ partes de una pieza o la que come $\frac{4}{5}$ partes de la otra pieza de igual tamaño?, el niño dibuja las piezas y efectúa la partición, fijándose que una de las personas come tres partes de las cuatro que tiene la pieza y la otra come cuatro de las cinco partes que tiene la pieza, -

después de observar sus dibujos con sus partes iluminadas por él, responde en forma interpretativa: come más el que toma - cuatro partes de las cinco que tiene porque le queda sin comerse un trozo menor, como se puede apreciar en la siguiente-figura.

Fig. 5 Comparación de $3/4$ y $4/5$



Fuente: personal.

El segundo nivel de los 9 a 10 años aproximadamente - es cuando el niño ya puede combinar esas operaciones- de partición y reunión. Se debe apoyar siempre en ope- raciones concretas, es la etapa en que comprende la - noción de fracción equivalente.(8)

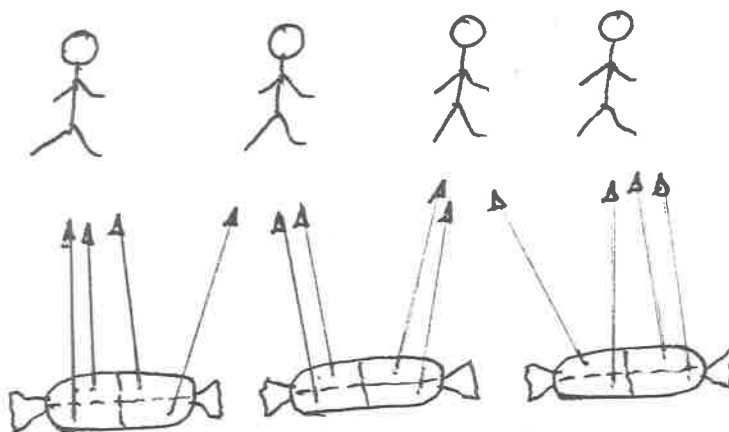
Con lo expresado en este segundo momento es como se cons- tituye en él, los cimientos donde construirá el niño la frac- ción relación.

El tercer momento hace descubrir los procedimientos de - tipo multiplicativo, tanto en la relación entre el entero y - sus partes, como entre el conjunto de estos y las partes pro- porcionales de la repartición.

El niño usa el método de anticipación global del número - de partes que se necesitan, multiplicando el número de elemen-

tos que tiene que repartir por el número de niños y por supuesto que aplica la correspondencia en la partición del entero - por ejemplo para repartir 3 dulces entre 4 niños: multiplica - el número de elementos (dulces) que va a repartir por el número de niños y expresa 3×4 son 12, debo partir los dulces - de tal manera que tenga 12 partes, entonces partiré cada dulce para que a cada niño le corresponda 3 partes de las cuatro de cada dulce, como puede verse en la siguiente figura.

Fig. 6 Estrategia multiplicativa con correspondencia y equivalencia



Fuente: López Carretero, Asunción, op. cit. p.48

Este tercer nivel " caracterizado generalmente por el comienzo del pensamiento formal, permite la comparación de dos - fracciones extraídas de enteros diferentes. La edad media de - operación es de 11 a 12 años ".(9)

Aquí se inicia la comprensión de la fracción relación al- descubrir que el concepto $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ etc. no es asimilable a mag- nitudes absolutas, ya que puede representar diferentes cantida

des aunque exprese la misma relación y viceversa. Por ejemplo: la mitad contiene la misma cantidad que dos cuartos, así como la mitad se expresa con diferentes cantidades $1/2$, $.5$, $2/4$.

Es también el inicio de la construcción de la proporcionalidad simple que se puede representar por medio de fracciones y del descubrimiento de lo que significa la constante de proporcionalidad.

Los niños construyen la noción de racional poco a poco en forma diferente según su desarrollo. Al expresar que " una fracción es una relación (razón) entre dos cantidades; el término fracción puede designar en general todas las representaciones posibles de un número racional ".(10)

Esto fué posible porque él descubrió que es una comparación de dos cantidades por cociente: una que significa las partes que repartirá (numerador) y la otra que es el total de partes iguales en que partirá el entero (denominador).

2.2.2. La fracción como número, como cociente y como operador.

Cuando se utiliza la fracción como número expresa un proceso descriptivo, por ejemplo en la proposición " la mitad de los alumnos son niñas ", esta situación ilustra un carácter estático, pues representa un estado fraccionario, una cantidad, una porción de un objeto o de un conjunto de ellos de la misma especie.

Como parte de un entero hace comprender mejor el sentido de la fracción, al niño le causa una sensación interesante --

cuando descubre la regularidad sobre el denominador, que significa dividir la unidad primero en partes iguales y el numerador lo encuentra con una segunda operación que consiste en agrupar, escoger, tomar, iluminar, etc., un cierto número de partes.

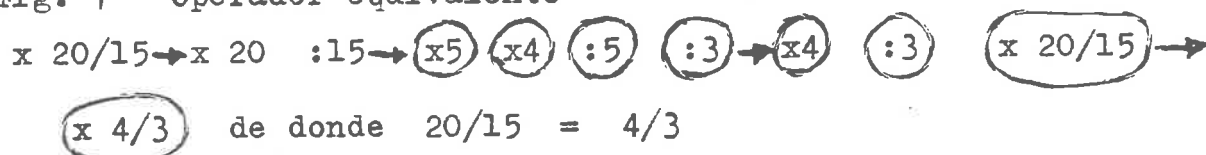
La noción de fracción la ve más en forma constante a partir de un fraccionamiento de objetos (pan, pastel, círculos, refrescos, dulces, etc.) que la partición de un conjunto de objetos similares. Para ambas maneras de efectuar las particiones, hacen que el niño ponga en juego las mismas operaciones lógicas (agrupación, equivalencia, correspondencia).

La fracción como un cociente, es otra de sus formas de presentación, la cual es a menudo empleada por el niño sin percatarse de ello. La fracción como cociente representa el resultado de la operación de la repartición, por ejemplo, cuando se desea distribuir 5 dulces entre 4 niños, escogerá $5/4$ de dulce para cada niño: le da un dulce entero a cada niño y del dulce sobrante lo parte en cuatro partes dándole una cuarta parte a cada uno de los niños, ha repartido $1 \frac{1}{4}$ que es igual a $5/4$, esta forma de escribir es igual a $5 \div 4$, siendo el resultado de esa operación, descubriendo mentalmente que el numerador no es otra cosa que el dividendo y el denominador es el divisor.

Lo anterior representa una división de cuya repartición no sobran partes, en cambio al distribuirse por ejemplo: 15 dulces entre 7 niños resulta: 2 dulces y sobra 1, representa a una división no exacta, pero es una respuesta buena así como que diga que resulta $15/7$.

La fracción como operador es la tercera presentación de la fracción que representa una transformación de una cantidad en otra, como se puede apreciar en la siguiente figura.

Fig. 7 Operador equivalente



Fuente: Secretaría de Educación Pública, Material informativo de apoyo de la Lic.de Educ.Especial Contenidos de aprendizaje III. p.43.

Estas fracciones se emplean como operadores que se identifican para que las trabaje las máquinas, porque corresponden a un lenguaje con una orden, una operación, que se permite por medio de sus operadores pasar de una cantidad inicial a otra final.

La regla que daría a la máquina o función o el operador es $x \ 6$: precedido de lo que se desea, para explicar el ejemplo presentado próximo anterior, es que se desea un operador equivalente a $20/15$ contemplando dos operaciones, la de multiplicar y la de división, de tal forma que, operar 20 entre 15 equivale a descomponer o partir el 20 en dos cantidades o partes que son $x \ 5 \ x \ 4$, así como el $: \ 15$ también, en $: \ 5 \ : \ 3$ procurando tener operadores iguales para que den la unidad en nuestro caso $x \ 5 \ : \ 5$, resultan unidad y el final es $x \ 4 \ : \ 3$, de tal manera que $x \ 20/15$ corresponde a $x \ 4/3$ por lo que $20/15 = 4/3$ que son equivalentes. Este proceso es pues una sucesión de las dos operaciones de multiplicar y dividir que están expresadas por el numerador y denominador respectivamente.

Esta presentación de la fracción como operador hace que - el calcular fracciones se reduzca a una operación con números enteros. Mismos que son utilizados como la comparación de dos cantidades en forma de cociente, originando lo que se llama razón, la cual se puede presentar de diferentes formas, por ejem plo: repartir tres dulces entre dos personas, el niño reparte un dulce a cada persona y el dulce restante lo divide en dos - mitades dándole una de ellas a cada persona, el resultado fué $3/2$, otras formas son: ($3:2$), ($3, 2$), 1.5. Otra interpre tación verbal es que parte cada dulce en mitades y reparte pri mero una mitad a cada quien después otra mitad a cada persona - y por último da la mitad a cada cual, el resultado fué que da tres mitades, $3/2$ a cada sujeto.

Pero la forma en que se abordan algunos casos de rela- ciones puede provocar confusión. Por ejemplo al enun- ciar: 2 canicas blancas por 3 negras ($2/3$), las cani- cas son negras en la razón de 3 por 2 ($3/2$), las $2/5$ de las canicas son blancas ($2/5$), las $3/5$ de las cani- cas son negras ($3/5$), tengo canicas blancas y negras - en la proporción de 2 a 3 ($2:3$).(11)

Se hace hincapié en la forma de enunciar verbal o por es- crito la relación, el niño se confunde en lo que se está infor- mando como elemento conocido y no encuentra lo que se busca - porque ¿ Cómo puede entender el niño que una misma situación - que se compara con elementos y conjuntos o subconjuntos con o- tros subconjuntos también se haga con la misma presentación - que es la fracción ?.

Se le presenta al niño una sola interpretación de relación de cantidades, de tal forma que no se confunda sino que el enunciado de la expresión esté claro para favorecer esa sucesión natural de resolver el problema. Por ejemplo; tengo una bolsa de dulces y la reparto entre Juan y María en la relación de 1 a 3, otro ejemplo, las $\frac{3}{4}$ partes de mis canicas son rojas, tengo 12, entonces ?

2.2.3. La tabla de fracciones y la recta numérica

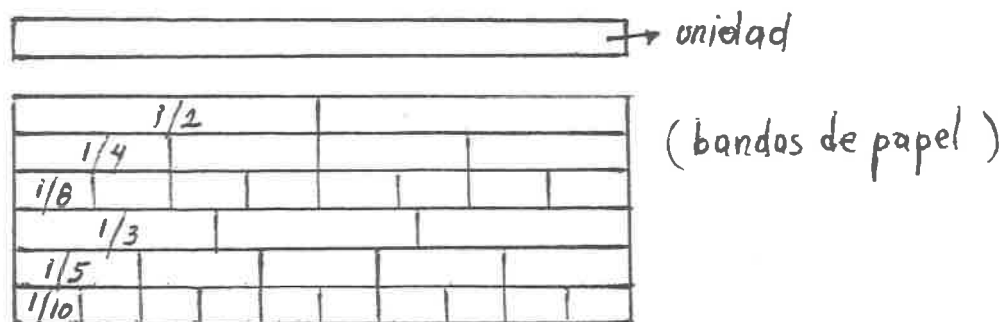
El niño comprende perfectamente que diferentes fracciones pueden representar una misma cantidad o una misma situación real y que cuando esto sucede es que las fracciones son equivalentes. Pero esta equivalencia de dos o más racionales la tiene que construir partiendo de una manipulación, una constatación o la visualice identificándola, la que se origina de una unidad que se eligió con anticipación.

Para ello se tiene que " La tabla de fracciones puede servir para encontrar fracciones equivalentes y permite pasar de la manipulación de material a una primera forma de simbolismo".

(12)

El niño al construir por sí mismo la tabla de fracciones eligiendo una unidad e ir haciendo particiones, tal que al ordenarlas quedará una figura que le despejará muchas situaciones que le presentaban dificultades. Dicha tabla es:

Fig. 8 Tabla de fracciones



Fuente: Secretaría de Educación Pública, Proposiciones de enseñanza de fracciones. p. 48.

La tabla de fracciones tiene una limitante que es la unidad la cual se hace menos extensa sin embargo es conveniente para el niño porque por medio de ella: comprende la noción de fracción ($2/4$ corresponde a dos partes sobre cuatro de la unidad que se eligió), también en forma concreta llega a la relación de orden entre dos fracciones ($1/2$, $1/5$) y lo hace comprender lo útil de las fracciones al resolver problemas por medio de la operatividad.

La tabla de fracciones no es extensa pero si se le agregan otras unidades se tendría algo semejante a la recta numérica.

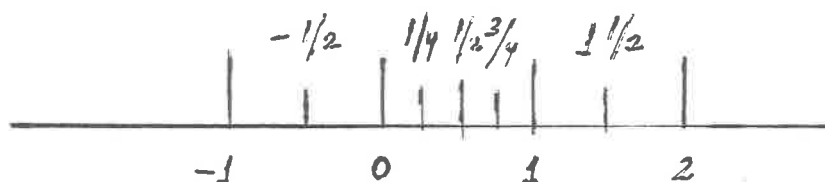
Las fracciones que se emplean más están comprendidas entre el intervalo de cero y uno ($0, 1$), con la recta numérica se exploran situaciones que permiten usar fracciones que rebasan a la unidad y así el niño se da cuenta del carácter ilimitado del conjunto de los números racionales y es la recta numérica un buen procedimiento para asegurar dicha extensión.

Pero para un niño ¿ Qué puede representar la recta numérica desde el punto de vista conceptual ? él logra hacer la correspondencia biunívoca entre el conjunto de números naturales (N) y el conjunto de puntos de la recta numérica, pero ¿ Podrá construir la correspondencia entre el conjunto de números racionales (Q) y el de los puntos sobre la recta ?

Si todos están de acuerdo que 1 es la distancia entre el 0 y el 1, entonces $1/2$ es la mitad de esa distancia, esto es fácil de entender y de hecho el niño lo construye pero ¿ Qué puede significar sin ninguna relación $1/2$ en su mente ?.

La recta numérica se usa sin exageración ya que el niño haya estructurado una idea válida sobre lo que es fracción, utilizarla como un tema que favorezca el aprendizaje de tipo intuitivo, ya que permite comparar las fracciones con facilidad que la pueda construir colocando una unidad sobre ella para localizar los segmentos que representen al conjunto de los números naturales y el de los enteros, así mismo marcar las particiones en esas unidades y descubrir el conjunto de los números racionales, pero hay que tener en cuenta que dividir con exactitud un segmento de recta en partes iguales, no es fácil de lograr, como puede observarse en la figura siguiente:

Fig. 9 Racionales en la recta numérica



Fuente: personal.

Otras situaciones en las que se utiliza la fracción es en el porcentaje que es una categoría particular de razones donde la base de comparación es 100. Todos los problemas que se resuelven empleando el porcentaje, podrían ser tratados como una búsqueda de fracciones equivalentes. También se usa en la probabilidad ya que puede expresarse con una fracción de la forma $\frac{a}{b}$. Se expresa que en el porcentaje se usa la fracción porque él se representa también en la forma de a/b donde $b = 100$ y a la vez se puede utilizar el recurso de transformar las fracciones a notación decimal.

Comprender el número fraccionario como una clase de equivalencia exige una gran capacidad de abstracción, que se da más allá del intervalo de la edad escolar, por lo tanto, se tiene que desarrollar la noción de fracción primero sin que se recurra a la abstracción de número racional.

Piaget menciona que las relaciones que construye el niño sobre el concepto de número fraccionario no pueden ser enseñadas en forma verbal ya que dicho número no es solo el nombre de una porción, sino una relación que está incluida en un orden, representa la cantidad de partes que se repartirán de un total de particiones de la unidad.

Las relaciones numéricas son coordinadas en forma interna y los nombres y los símbolos sirven para recordarlas.

Cuando el niño crea la relación, es debido a que ha manipulado los objetos y ha elaborado la estructura interna de sus acciones. Aquí radica una verdadera noción de fracción que implicó el ingenio del niño y la construcción activa de las relaciones por medio de su propia actividad.

Citas bibliográficas del capítulo 2

- (1) Piaget, Jean; y Alina Szeminska, Génesis del número en - el niño; Buenos Aires 1982 ; Tr. Sara Vassallo, ed. 6, Ed. Guadalupe. p. 27.
- (2) Labinowicz, Ed., Introducción a Piaget pensamiento aprendizaje enseñanza, ed. única, Ed. Fondo educativo interamericano , E.U.A. 1980. p. 97, 99.
- (3) Universidad Pedagógica Nacional, Concepto de número, construcción espontánea y consecuencias pedagógicas.(anexo 1) México, D.F. 1983. p. 3.
- (4) Id.
- (5) Ibid. p. 6, 7.
- (6) Ibid. p. 8.
- (7) Ibid. p. 14.
- (8) Secretaría de Educación Pública, material informativo de- apoyo de la Lic. Educ. Especial contenidos de aprendizaje III, México, 1987. p. 45.
- (9) Id.
- (10) Ibid. p. 44.
- (11) Ibid. p. 47.
- (12) Ibid. p. 50.

3. RECOMENDACIONES PARA TRABAJAR CON NUMEROS FRACCIONARIOS

En este capítulo, se presentan dos situaciones respecto a la didáctica de las fracciones en cuanto al concepto se refiere: la narración sobre la educación matemática en las escuelas, comparándola con el enfoque del aprendizaje con carácter psicogenético y algunas actividades que se sugieren para que al realizarlas tanto alumnos como maestros, tomen conciencia de su papel en el medio ambiente del cual forman parte, de tal forma que para cumplir con su rol tan difícil como desesperante, rompan con la estructura de enseñanza tradicional ya establecida y que se ha estado realizando como si fuera la única: la transmisión de conocimientos. Para empezar con la aplicación de la nueva propuesta por medio de consignas llevar al alumno a que vaya construyendo su propio conocimiento al coordinar sus acciones, ampliando y generalizando y así llegar a la elaboración de la noción de fracción.

Si se quiere que dicha transmisión escolar proporcione un equilibrio entre el niño y la sociedad, para que éste sea un miembro activo de ella, se ha de diseñar una escuela que esté abierta a todos los progresos, para que permita al niño desarrollar sus capacidades intelectuales provocando fenómenos de la realidad.

En la medida en que se utilice la experimentación, se va logrando que los niños sean cuestionados, de tal modo de contrarrestar su pasividad y la aplicación de conocimientos que ellos no han elaborado por considerarlos impropios.

3.1. La educación matemática sobre fracciones

El procedimiento tradicional de la enseñanza de las fracciones propone realizar materialmente la partición de objetos, correspondiendo a una fase objetiva en la que el maestro presenta un objeto geométrico (pastel, dulce semi-sólido, pan, manzana, una hoja de papel, etc.) y a la vista de los alumnos realiza su fraccionamiento en cierto número de partes iguales, tales que al reunirlos, de nuevo el objeto se ha reconstruido.

Para el profesor resulta fácil esta demostración partitiva porque puede sobreponer las partes para que el alumno vea que son iguales; después pasa a dibujar en el pizarrón la representación imaginada del objeto (entero) y sus partes, dibuja otras figuras más dividiéndolas en partes las cuales ilumina, mencionándoles el nombre de cada parte, correspondiendo estas actividades a la fase gráfica, en la cual el maestro lo hace todo y el alumno repite el ejercicio en su cuaderno.

La fase siguiente es la simbólica o convencional, aquí el maestro le muestra que una mitad del dibujo se escribe mediante el símbolo $1/2$ y que las dos terceras partes se anotan $2/3$, dándoles una explicación de transmisión sobre el numerador y el denominador, así como su respectiva definición mismas que el alumno solo repite en forma verbal y fiel que para él no tiene sentido, cuando ve que el profesor escribe $1/2 = 1/2$ o que $1/2 + 1/2 = 2/2$, después lo hace visualizar que una mitad del dibujo es igual a dos cuartos iluminados de otro dibujo por lo que, $1/2 = 2/4$ llamándole a estos símbolos numéricos que representan la equivalencia.

Finalmente les da recetas o reglas de cálculo que los -- hará entrar a la fase de la mecanización o ejercitación, que -- también le llama aplicación. Aquí es donde el maestro se da -- cuenta realmente y se asombra del por qué algunos de sus alumnos no entienden ni siquiera la fase donde se iluminan partes -- de un entero, escudándose en causas como: el desinterés, la no atención, la falta de inteligencia del alumno, que las fracciones son abstractas, que están fuera de la realidad, etc. pero -- esta manera tradicionalista de enseñar las fracciones por el -- maestro, donde lo que realiza constantemente frente a sus alumnos tiene poca relación con la manera de cómo aprenden, implicando que ignoren por completo el significado del concepto -- fracción.

Actualmente en la enseñanza de la matemática en la educación primaria se sigue el mismo molde de la tradicional, misma que como forma de trabajo conduce a un bloqueo del desarrollo -- cognoscitivo del niño, es decir, que en el cumplimiento de sus -- objetivos se contradice a las observaciones realizadas por -- Piaget sobre el cómo los alumnos desarrollan paso a paso el -- concepto fracción, surgiendo por dicha circunstancialidad, la -- psicopedagogía de la matemática, quien centra su estudio en el procedimiento que el alumno emplea para elaborar los conoci-- mientos matemáticos, plantea la relación entre psicología y la enseñanza; la primera se ocupa de los métodos, procesos de -- aprendizaje, mecanismos mentales, identificación de dificultades y la segunda se refiere a la forma de producir conocimientos matemáticos por medio de la reflexión. Así pues, la psico-- pedagogía se interesa por estudiar los estados sucesivos de la construcción del pensamiento lógico -- matemático.

Toda concepción pedagógica es solidaria a una teoría del aprendizaje, que en el caso de la teoría psicogenética de Piaget coloca al niño en un primer plano, con su propia organización, es el sujeto quien dirige su propio aprendizaje al utilizar sus mecanismos de regulación, compensación, etc.

El docente con esta teoría conoce muy bien los procesos de aprendizaje y su evolución, remitiéndose a los hechos y a las interpretaciones de la psicología genética.

El aprendizaje constituye un proceso en el que cada persona avanza a un ritmo natural propio, requiriendo tiempo para ello.

Los profesores manifiestan que un alumno va bien en sus estudios por el simple hecho de que sabe resolver mecánicamente una adición, multiplicación, ilumina partes, de un entero, escribir el símbolo de fracciones, etc., sin percatarse que no son capaces de resolver un problema real, que implique el uso de operaciones o la interpretación de su enunciado porque la escuela prepara al alumno para que resuelva problemas nada más para la escuela, aunque el niño construye su propio sistema de razonamiento operatorio junto al de la escuela para poder resolver problemas fuera de ella.

Existe en la actualidad una prisa en enseñar al alumno a que utilice signos aritméticos, antes de que él construya la noción de su significado, conduciendo a una identificación entre términos vacíos de contenido al observar una confusión en los maestros, muy a menudo entre las nociones matemáticas elementales y su representación.

El conocimiento de la psicología infantil se ha modificado con los aportes de la teoría psicogenética, con las ideas - claras sobre cómo aprende el niño, qué es el niño; Piaget ha - demostrado que el niño es un ser activo que en función de sus - propias características intelectuales analiza las propiedades - de los fenómenos al estar en contacto con el mundo exterior, - elabora estrategias mentales, busca el equilibrio entre él y - su medio, desarrolla conceptos intelectuales cada vez más am-- plios, pues es un sujeto pensante que seguido se pregunta y - formula anticipaciones que le crean la necesidad de desarro-- llar nuevas capacidades intelectuales.

Significa el desarrollo intelectual del niño un proceso - de reestructuración del conocimiento, resultando una nueva for- ma de pensar y estructurar las cosas, un nuevo modo que le da comprensión y satisfacción, es decir un nuevo estado de equili- brio.

El conocimiento y la inteligencia no se generan en forma- espontánea ni por la maduración del niño sino que los dos se - construyen por las acciones que él realiza con los objetos, y- las relaciones que es capaz de hacer entre los hechos observa- dos y la reflexión de ellos.

El aprendizaje se va a dar cuando el niño reconstruya o - reinvente las leyes que rigen al objeto de conocimiento, esto- es que exprese el procedimiento que siguió para llegar a un re- sultado, que no dependieron de las situaciones externas sino - de sus características de internalización.

La principal meta de la educación es crear hombres -

capaces de hacer cosas nuevas y no simplemente repetir lo que han hecho otras generaciones. Hombres creadores, inventores y descubridores. La segunda meta es formar mentes que puedan ser críticas, que pueda verificar y no aceptar todo lo que se ofrece.(1)

Piaget menciona con su máxima de que todo cuanto se enseña al niño se le prohíbe que lo invente.

Inventar es recorrer mentalmente con elementos conocidos y desconocidos para llegar a un resultado.

Comprender es llegar a un nuevo conocimiento por medio de un proceso constructivo.

La teoría psicogenética aplicada a la educación matemática, implica recorrer con los mecanismos mentales un proceso que se dirija a la forma como el alumno construye la noción de fracción y que para esto recibe apoyo de la pedagogía operatoria que trata sobre el aprendizaje y la generalización.

Consiste en desarrollar la capacidad operatoria del individuo que le conduce a descubrir el conocimiento como una necesidad de dar respuestas a los problemas que plantea la realidad y que provoca la escuela para satisfacer las necesidades reales, sociales e intelectuales de los alumnos.(2)

La capacidad operatoria del niño se refiere a la elaboración de un conjunto de procedimientos que realiza para hacer posible la solución, llevándolo a aprender a aprender y a enseñarse a pensar.

3.2. Alternativas para trabajar el concepto de fracción

En esta parte del capítulo se presentan algunas de las al
ternativas que se sugieren para trabajar con el concepto de nú
mero fraccionario.

Se expresa que durante el desarrollo de la génesis de la-
fracción, la repartición de objetos entre niños determinó una-
actividad de carácter intelectual con la que surgió la rela---
ción entre el número entero y sus respectivas partes, la compo-
sición de sus partes y su equivalencia.

Los tres datos son: la repartición, la relación y la equi-
valencia, se determinaron por el procedimiento del descubrimien-
to por el escolar. Con estos elementos conocidos que correspon-
den a la composición del número racional, son vías para traba-
jarlo tanto en el modo de enseñar como en el aprender con una-
nueva forma que es la de la teoría psicogenética y con la peda-
gogía operatoria.

Al nivel de las operaciones concretas corresponde una di-
dáctica de la misma naturaleza, el aprendizaje necesariamente-
ocupa a la actividad para tener significado, y que se complete
todo el proceso de interiorización.

Es mejor enseñar menos cantidad de conocimientos para fa-
vorecer el desarrollo de los mecanismos mentales que constitu-
yen a la inteligencia, es decir, estimular el proceso de madura-
ción preparándolo a aprender.

Los procesos de equilibración entre ideas, predicciones y

resultados, ya sea sintetizados y ordenados en la exploración o experimentados alguna vez en la vida real, es lo que constituye la base de un aprendizaje verdadero.

En una exploración, lo que parece estar claro no se puede dar como supuesto en relación con el aprendizaje infantil, porque los conceptos se desarrollan en forma lenta, de tal manera que no se debe dar como que ya se enseñó el concepto matemático de la fracción, porque un niño tenía dicho conocimiento en otro momento que se supuso estable.

Para la experimentación, se lleva al niño hacia una participación activa en el proceso de aprendizaje, dándole prioridad al aprender descubriendo, se le presentan problemas como un desafío a su inteligencia para que los resuelva al plantear conjeturas o anticipaciones a posibles soluciones y después - probar la validez de sus resultados.

Se hace notar las contestaciones que Piaget hizo sobre algunos cuestionamientos respecto a si la enseñanza con el enfoque psicogenético permite al niño ser el maestro de su propio comportamiento y si dicha enseñanza le da más libertad de desarrollo individual. A esto responde:

Si, pero es importante que los maestros propongan a los niños materiales, situaciones y ocasiones que les permitan progresar. No se trata de dejar a los niños hacer todo lo que quieran. Se trata de ponerlos frente a situaciones que se plantean nuevos problemas que se encadenan unos con otros. Es necesario saber dirigirlos, dejándolos en libertad.(3)

Lo anterior significa que el profesor no debe decirle a sus alumnos, por ejemplo, abran su libro en tal página y re-suélvana, después él revisa y pasa a otra actividad, esto es una interpretación falsa sobre lo que Piaget llama construcción de su propio conocimiento, sino que el profesor debe propiciar situaciones para que junto con ellos, accionar provocando discusiones, y en la medida que se autocorrijan progresen y lleguen a la construcción de su conocimiento.

Para la enseñanza del concepto fracción, el proceso que se sigue de modo espontáneo establece la coordinación de acciones y operaciones que se realizan mental o realmente por el niño, el cual lo irá ampliando y generalizando.

Las actividades se proponen para que las realicen los alumnos, con una dirección consciente del maestro respetando la génesis del concepto fracción y la estimulación de la actividad mental de ellos. Se exponen con un punto de vista fundamental basado en propiciar situaciones problemáticas que sean elegidas por los escolares y con el procedimiento heurístico (descubrir) lleguen a construir la noción de fracción.

Se introducen tareas atendiendo a una necesidad que en este caso es la de fraccionar la unidad (entero).

Se trabaja en forma individual, después en equipo, con una tarjeta que lleva un mensaje diferente para cada niño, es recomendable que el profesor elabore primero los mensajes para explorar el grado de tropiezo, después pueden ser inventados por los niños.

- a) Se pide en el mensaje que el niño reparta en el papel un - número de dulces entre un número de niños;
- b) Se realiza el reparto sin que los vean, muestran a los demás niños los dulces que han repartido (enteros y par---tes);
- c) Los demás niños tratan de adivinar la cantidad de dulces - y niños que habían;
- d) Se entabla una discusión sobre la respuesta hasta llegar a la satisfactoria.

Se empieza con problemas de reparticiones sencillas con - la pregunta ¿ Cuánto dulce le das a cada niño ?. A continua---ción se presentan los siguientes ejemplos:

- a) Repartir un dulce entre un niño.
- b) Repartir un dulce entre dos niños.
- c) Repartir un dulce entre tres niños.
- d) Repartir un dulce entre cuatro niños.
- e) Repartir dos dulces entre un niño.
- f) Repartir dos dulces entre dos niños.
- g) Repartir dos dulces entre tres niños.
- h) Repartir dos dulces entre cuatro niños.

- i) Repartir tres dulces entre un niño.
- j) Repartir tres dulces entre dos niños.
- k) Repartir tres dulces entre tres niños.
- l) Repartir tres dulces entre cuatro niños.
- m) Repartir tres dulces entre seis niños.

Las respuestas probables que pudieran dar los niños, pueden corresponder a cualquier momento, esto permitirá al maestro darse cuenta en que nivel de construcción del concepto de fracción se encuentra; para que a partir de allí propiciará situaciones que lo hagan conflictuar en lo que contestó tanto en la partición como en la repartición hasta hacerlo que logre la construcción de la equivalencia con correspondencia por medio de la multiplicación. Todas las particiones como las composiciones, plantean a los niños dificultades a todo el grupo.

El intercambio entre los niños y las participaciones por el maestro, siempre propiciadoras de discusión para que lleguen al resultado, hacen descubrir poco a poco el significado del numerador y del denominador.

Un segundo grupo de actividades se presentan con mayor grado de dificultad consistiendo en mostrar únicamente al cociente, es decir el resultado de la partición que corresponde a cada niño, preguntando ¿ Cuántos niños y dulces habían ?. Como ejemplos se tienen:

- a) Muestra un dulce y una mitad, que son de un niño.
- b) Muestra un dulce y una tercera parte.
- c) Muestra un dulce y una octava parte.
- d) Muestra un dulce y una cuarta parte.

Un tercer grupo de actividades que se proponen consisten en dar mensajes que corresponden a una repartición cuyo resultado siempre dé lo mismo, con la interrogante ¿ cuánto dulce - le das a cada niño ? como ejemplos se presentan:

- a) Reparte tres dulces entre dos niños.
- b) Reparte cinco dulces entre cuatro niños.
- c) Reparte nueve dulces entre seis dulces.

Después de haber partido, discutido y encontrado la respuesta, se hará que clasifiquen al encerrar las situaciones - problemas cuyo resultado dió lo mismo. El profesor debe hacerlos tomar conciencia para que cada alumno llegue a explicar el resultado; después propicia una discusión amplia y finalmente debe hacer que los niños reflexionen al construir y expresar - que si sobra la mitad de dulces que de niños, llevará $1/2$ como parte, como el ejemplo (a) que se reparten tres dulces entre - dos niños, correspondiéndole a cada niño un dulce y la mitad y en el ejemplo (c) que se reparten nueve dulces entre seis niños, correspondiéndole un dulce y la mitad a cada uno. Con esto explicará que la mitad irá junto a la parte entera ($1 \frac{1}{2}$).

Con lo anterior los niños llegan a la concepción de fracción/relación y a la construcción de la equivalencia.

Las recomendaciones didácticas para trabajar la noción de fracción que aquí se han planteado representan una muestra de lo que puede hacer el docente, recordando que la situación problemática debe salir de la realidad con pláticas e intercambio de opiniones sobre cuestionamientos alusivos al problema.

Las diferentes actividades y los beneficios de la iniciativa y la creatividad tanto de profesores como de los alumnos, al abordar el concepto de fracción, parten de los problemas elegidos por los alumnos. Además el docente programa ejercicios lógico-matemáticos que sugieren a los alumnos, los cuales conduzcan al aprendizaje por medio de la psicogénesis de la fracción.

Citas bibliográficas del capítulo 3

- (1) Universidad Pedagógica Nacional., Pedagogía. Revista. vol. 1 # 2 , sept. dic., México, D.F. 1984. p. 13.
- (2) Universidad Pedagógica Nacional, El niño: aprendizaje y de sarrollo. Ed. U.P.N., México, 1985. p. 53.
- (3) Universidad Pedagógica Nacional., Pedagogía. Revista, op. - cit. p. 6, 7.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

La psicogénesis de las fracciones es un proceso gradual - de cómo el niño construye el conocimiento de la noción de fracción, utilizando la abstracción que es una interiorización y - coordinación de acciones y operaciones.

El aprendizaje constructivista es el que se produce por - un respeto a la iniciativa de la actividad intelectual del a-
lumno mediante la cual llega al descubrimiento.

El concepto de fracción es de gran utilidad por propiciar el razonamiento, siendo de gran valor epistemológico y psicoló-
gico, pues es necesario en la reflexión del niño y como esla-
bón de la construcción de la cantidad con valor relativo.

La noción de fracción es construída por el alumno al pro-
piciarle situaciones problemáticas donde las actividades que -
él realiza lo lleven a descubrir la solución de la misma. Esta
implica que el alumno siga los momentos de construcción: ausen-
cia de equivalencia, la equivalencia pero sin correspondencia;
equivalencia con correspondencia, y que descubra el procedi-
miento multiplicativo con equivalencia y correspondencia.

La teoría psicogenética no desarrolla un procedimiento -
explícito de carácter estrictamente pedagógico referente al -
origen del conocimiento de los números fraccionarios. El desa-
rrollo del presente trabajo es un intento por aplicar los su-
puestos teóricos que sustentan la construcción del conocimien-

to según la teoría psicogenética, a la noción del conocimiento de los números fraccionarios.

El docente constituye un elemento clave en la enseñanza.-- Si se habla en este caso de matemáticas y más específicamente de números fraccionarios, es indispensable que el maestro tenga un conocimiento objetivo de lo que son las operaciones con fracciones, pero por otro lado, conozca cuáles son los procesos o mecanismos de razonamiento que caracterizan al niño de 7 a 12 años. Solo mediante lo anterior podrá implementar los recursos y procedimientos didácticos adecuados para la construcción del conocimiento de los números fraccionarios.

Los problemas de partición y repartición son recursos valiosos en la construcción de la noción de fracción.

Las actividades para trabajar cualquier situación problemática referente a fracciones deben organizarse en forma individual, en equipo y grupal. Es insustituible el intercambio de puntos de vista entre los alumnos para que se den las propuestas, discusiones, confrontaciones y puestas en común.



81158

081158

BIBLIOGRAFIA

- BRUN, Jean., Pedagogía de las matemáticas y psicología. Universidad de Ginebra, Suiza, 13. p.
- GUAJARDO Ramos, Eliseo. Paquete del autor Jean Piaget. Ed. U.P. N. México, D.F. 1984. 479 p.
- HAYNE W. Reese, et. al., Psicología experimental infantil. Ed. Trillas. México, D.F. 1980. 570 p.
- LABINOWICZ, Ed. Introducción a Piaget, pensamiento aprendizaje enseñanza., ed. única. Ed. Fondo educativo interamericano - E.U.A. 1980. 307 p.
- LOPEZ Carretero, Asunción. ¿ Por qué y cómo enseñar fracciones ? cuadernos de pedadogía 148. Ed. y distribuciones universitarias, S.A. Barcelona, 49 p.
- PIAGET, Jean y Szeminska Alina, Génesis del número en el niño. Ed. Guadalupe. Tr. Sara Vassallo. ed. 6. Buenos Aires, 1982. 289 p.
- PIAGET, Jean. Seis estudios de psicología. Ed. Seix Barral, S.-A. ed. 6. Barcelona, 1985. 227 p.
- PHILLIPS, John L. Jr. Los orígenes del intelecto según Piaget. Ed. Fontanella. ed. 3. Barcelona, 1977.
- SASTRE Vilarrasa, Genoveva, et. al. La pedagogía operatoria. un enfoque constructivista de la educación. ed. 2. Ed. Lara. - Barcelona, España, 1986, 366 p.
- SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Material informativo de apoyo de la lic. de educ. especial contenidos de aprendizaje III. México, 1987. 88 p.
- SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA. Estrategias pedagógicas para niños de primaria con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. México, 1986. 181 p.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. El niño: aprendizaje y desarrollo. Ed. U.P.N. México, 1985, 253 p.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Pedagogía revista . Ed. U.P.-N. Vol. 1 , # 1, 2. México, 1984.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Concepto de número. Construcción espontánea y consecuencias pedagógicas. Anexo 1, México, D.F. 1983, 91 p.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Antología de matemáticas 1. - ed. 1. Ed. U.P.N. México, D.F. 1979, 376 p.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. Pedagogía: Bases psicológicas ed. 1. Ed. U.P.N. México, D.F. 1982, 420 p.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL. La matemática en la escuela. Antología. ed.1. Ed. U.P.N. México, D.F. 1988, 371 p.

GLOSARIO

1. Abstracción:

Es construir relaciones con las acciones del sujeto sobre el objeto.

2. Aprendizaje:

Acciones que son reacciones del ser humano ante estímulos exteriores e internos en su permanente adaptación al medio.

3. Aprendizaje grupal:

Es una estrategia para manifestar las contradicciones que genera el conocimiento.

Es la ubicación del docente y del alumno como seres sociales integrantes de un grupo para elaborar el conocimiento en sentido crítico y dialógico.

4. Concepto:

Comprensión de la significación de un término.

5. Consigna:

Expresión verbal o escrita que se da a una persona para que entienda qué es lo que se le solicita y decida la manera de hacerlo.

6. Correspondencia:

Es la operación a través de la cual se establece una relación de uno a uno entre los elementos de dos o más conjuntos a fin de compararlos.

7. Enseñanza:

Es cuando el docente propicia situaciones conflictivas al alumno para que juntos lleguen a que éste elabore su propio conocimiento.

8. Entero:

Una unidad, un todo, objeto completo.