UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARÍA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

Filosofías de intervención pedagógica en el desarrollo profesional de maestros de matemáticas de secundaria: La enseñanza de la generalización de patrones en un marco de innovación pedagógica

Tesis que para obtener el grado de:

Doctor en Educación Presenta:

Rubén Garza Viveros

Tutora:

Dra. Verónica Hoyos Aguilar

México, D.F. **Septiembre de 2014**

ÍNDICE

INTRODUCCION

Desde hace algunos años en el campo de la educación matemática, se han desarrollado esfuerzos de investigación dirigidos a aumentar la comprensión sobre el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, sobre la práctica de enseñar matemáticas y sobre el proceso de aprendizaje del maestro (Giménez, et al., 1996; Llinares, 1996a; 1998; 2003; 2005; Ávila, 2001; Carpenter, 2004; Garza, 2004; Cobb, 2005; Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Sowder, 2007; Peñas, 2008, Ball, et al., 2008). La tesis de investigación sobre estos temas, y que a continuación se presenta, se enmarca específicamente en ésta última línea, la del desarrollo profesional de maestros de matemáticas en servicio, del nivel secundaria.

En particular, se explora e incorpora una nueva mirada sobre el desarrollo profesional del docente de matemáticas en servicio del nivel educativo mencionado, con base en los avances en el campo de la investigación en educación matemática sobre el tema, en atención al reclamo de un mayor acercamiento entre las diversas instituciones que realizan investigación en esta temática y la escuela. Concretamente se propone y somete a prueba con maestros de matemáticas en servicio un modelo de intervención al que se ha denominado *Matriz de Desarrollo Profesional* (*MDP*). El propósito de este esfuerzo es el de contribuir en la construcción de una propuesta de formación continua para los docentes de matemáticas de educación secundaria que favorezca la convivencia y comunicación del investigador o formador y el maestro de matemáticas en servicio en pro del desarrollo profesional del propio docente.

La investigación se llevó a cabo en dos grandes fases, en las cuales el trabajo se desarrolló durante la primera fase en el marco de la filosofía de enseñanza de las matemáticas; y durante la segunda fase se centró en el caso de la enseñanza de la generalización de patrones.

A lo largo de todo el trabajo observacional o de campo participaron 14 maestros de matemáticas pertenecientes a institutos públicos de educación secundaria, ubicadas en la ciudad de México. Todos ellos en servicio. Su participación en la investigación se produjo en el marco de reuniones para analizar los programas de estudio 2006, propuestos para la educación secundaria. La primera fase se llevó a cabo entre los meses de octubre de 2007 y noviembre de 2008; y la segunda fase de enero a junio de 2009.

Los resultados obtenidos en la presente tesis muestran de manera general que tener un instrumento de organización para el desarrollo profesional de los docentes, como el que proporciona la *matriz de desarrollo profesional (MDP)* que aquí se propone, permite proceder por aproximaciones sucesivas, basados en experimentos y en tentativas que unas veces son fructuosas y otras estériles, sin embargo, es posible llegar a percibir que el docente alcanza una forma más madura de conocimiento sobre la enseñanza de temas específicos, aunque éste siempre pueda ser perfectible.

La presente tesis está estructurada en seis capítulos, en el capítulo I se expresan de manera esquemática algunas de las nociones clave de la investigación sobre la formación inicial y continua de los docentes de matemáticas, lo cual permite plantear el problema de investigación de esta tesis. En este mismo capítulo se continúa con la revisión de trabajos antecedentes y se presenta un panorama general de la formación profesional de los docentes en nuestro país, así como las distintas perspectivas desde las que se ha afrontado esta situación por diferentes investigadores en los últimos años. En el capítulo 2 se despliegan las directrices teóricas que orientaron la investigación que aquí se presenta y se plantean los propósitos e interrogantes de la investigación. En el capítulo 3 se abordan las decisiones metodológicas que se adoptaron para plantear y desarrollar la investigación en la que se basa esta tesis. En el capítulo 4 se reportan los resultados de ambas fases de la investigación. En el capítulo 5 se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en las dos fases de investigación. Finalmente, en el capítulo 6 se abordan las conclusiones de este trabajo haciendo énfasis en responder las preguntas de investigación, señalar los posibles aportes, así como las rutas que podrían seguir siendo exploradas en relación con el tema que aquí se eligió abordar.

CAPITULO I. ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo se comienza por expresar de manera esquemática algunas de las situaciones y nociones clave de la investigación sobre la formación inicial y continua por la que atraviesan usualmente los docentes de matemáticas en ejercicio. Esto permite de entrada plantear cuál es el problema de investigación de esta tesis. Se continúa con la revisión de antecedentes. En particular se revisan diferentes estudios en los que se considera necesaria la formación y/o el desarrollo profesional de los docentes como uno de los mecanismos clave para la promoción de aprendizajes matemáticos en el aula. Se ubica cuál ha sido la situación de la práctica del desarrollo profesional del docente en México y se presenta un panorama general de la formación profesional de los docentes en nuestro país, así como las distintas perspectivas desde las que se ha afrontado esta situación por diferentes investigadores en los últimos años.

1.1 Situaciones, nociones clave y problema de investigación

La imagen emergente del profesor, retratada en diversos estudios es el de un profesional con un conocimiento deficiente, en particular de las matemáticas y su enseñanza, con hincapié en lo que no sabe, no entiende o no hace (Ponte & Chapman, 2006). Sin embargo, si se considera a los maestros como profesionales, con base en la noción de conocimiento profesional, resalta la complejidad de sus conocimientos y de su íntima relación con sus prácticas.

Muchos estudios muestran que el conocimiento de los maestros implica una problemática fuerte, pues los maestros no siempre poseen una comprensión amplia y profunda de los contenidos que se van a enseñar. Los estudios de las creencias y concepciones de los profesores de matemáticas proporcionan evidencia de que estas construcciones pueden ser útiles para entender las razones detrás de las decisiones de los maestros y los comportamientos en el aula, sin embargo, el cómo se desarrollan y funcionan es todavía una cuestión abierta (Ponte & Chapman, 2006).

En el estudio del desarrollo profesional de los docentes en servicio, se han ido centrando los intereses de investigación en diferentes focos de atención, según Azcárate (1998) los problemas profesionales de los docentes, en su mayoría, giran en torno al diseño y manejo del currículo, por ejemplo: encuentran dificultad en materializar las propuestas curriculares.

La calidad de la práctica de los profesores ha sido un problema persistente en el campo de la educación matemática como señalan Hiebert, et al. (2003) quienes sugieren que se puede avanzar en la solución de la problemática mediante el diseño de programas que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica mencionada.

Además es importante señalar que los programas de formación tienen un periodo de caducidad (Hiebert, et al., 2003) lo que hace necesaria la revisión continua de su diseño e implementación. Por otro lado según Marcelo (2002) la formación profesional inicial dota al docente de un bagaje de conocimientos que se deben complementar a lo largo de toda la vida profesional activa.

La oferta de programas de desarrollo profesional para los docentes en servicio se ha convertido en un imperativo, en el marco del movimiento de los estándares curriculares para las matemáticas que se imparten en la escuela, publicados por *National Council Teachers o Mathematics* (NCTM) y de la implementación de reformas a gran escala en lo contextos educativos (Sowder, 2007). Ante este hecho México no ha sido la excepción pues las reformas educativas implementadas en los años 1993, 2004, 2006 y 2011 (SEP, 1993; 2004; 2006; 2011) han demandado diferentes programas de desarrollo profesional para promoverlas y ponen de manifiesto la relación simbiótica entre el desarrollo profesional y los esfuerzos de mejora de las escuelas (Souwder, 2007).

Los cambios propuestos en las reformas para la enseñanza de las matemáticas arrojan luz sobre el papel vital que desempeñan los docentes en el cambio educativo, se requieren profesores para desarrollar enfoques de la enseñanza de las matemáticas basadas en los métodos y las iniciativas propuestas, la hipótesis sobre la que descansa esta iniciativa es que el desarrollo profesional de los docentes puede conducir a mejoras en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas (Llinares & Krainer, 2006).

En el campo de la educación matemática ha sido intenso en esfuerzo por estudiar los elementos que puedan apoyar la capacidad del maestro, o del estudiante para maestro, para entender las cuestiones relacionadas con la promoción del aprendizaje de las matemáticas (Giménez, Llinares, & Sánchez. 1996; Llinares, 1996, 1998a; 2003; 2004; 2005, 2008; Ávila, 2001; Carpenter, 2005; Garza, 2004; Cobb, 2005; Peñas & Flores, 2008).

La tesis que aquí se presenta se enmarca en el ámbito de la investigación sobre el *desarrollo profesional del docente* en el campo de la educación matemática. Según Montecinos (2003) el desarrollo profesional del docente debe entenderse como una variedad de instancias formales e informales que ayudan a un profesor a aprender nuevas prácticas pedagógicas, aunado al desarrollo de una nueva comprensión acerca de su profesión, su práctica y el contexto en el cual se desempeña. En esta tesis se trata de modelar un ciclo de desarrollo profesional del docente enfocado al aprendizaje de nuevas prácticas pedagógicas fincadas en su reflexión sobre lo que constituye su profesión y su práctica en el aula.

En las secciones que se presentan a continuación se revisan diferentes estudios en los que se considera necesaria la formación o el desarrollo profesional de los docentes como uno de los mecanismos clave para la promoción de aprendizajes matemáticos en el aula. Sin embargo, el trabajo de investigación requiere ubicar cuál ha sido la situación de la práctica del desarrollo profesional del docente en México, por ello es que en este capítulo también se presenta un panorama general de la formación profesional de los docentes en nuestro país y las distintas perspectivas desde las que se ha afrontado esta situación en los últimos años.

La revisión de los trabajos antecedentes y la comprensión de la situación del desarrollo profesional de los docentes en México constituyen la base desde la cual se fundamentan las decisiones que en esta investigación se tomaron, en relación con el planteamiento de un marco teórico de análisis de lo que aquí se propone.

En particular se selecciona la investigación sobre los conocimientos de los docentes para enseñar matemáticas porque aporta directrices para el planteamiento de algunas respuestas a partir de la investigación sobre el conocimiento de los profesores a la que anteriormente se ha hecho referencia.

Sin embargo, también se verá que en estas investigaciones se resalta la dificultad de los programas de formación para modificar las filosofías que los estudiantes o maestros en servicio traen consigo cuando se incorporan a un programa de formación inicial o de desarrollo profesional (Marcelo, 2002; Ávila, 2001).

Según Feiman (2001), quien ha dedicado gran parte de su vida a la investigación sobre la formación de los profesores, *los programas tradicionales de formación inicial del profesorado y de desarrollo profesional no están diseñados para promover aprendizajes complejos ni en los docentes ni en los alumnos.*

> *El típico programa de formación inicial representa una intervención muy débil comparada con la influencia que los profesores en formación han tenido en su etapa escolar, así como de las experiencias en prácticas (Feiman-Nemser, 2001: 1014).*

Por otro lado en México, aunque en los últimos años se han implementado programas de desarrollo profesional para impulsar la apropiación de los elementos esenciales de las reformas, existen estudios que han reportado que los enfoques para la enseñanza de las matemáticas, difieren notablemente de lo que sucede realmente en el salón de clase (Ávila, 2001; Mendoza, 2001; Shulmaister, 2000).

De esta manera otros investigadores resaltan la necesidad de propiciar una aproximación del saber teórico con las prácticas reales de los docentes de matemáticas al interior de la escuela secundaria (Peñas & Flores, 2008; Llinares, 2005; Cobb, 2005).

En este capítulo se trata de explorar elementos derivados de investigaciones antecedentes que permitan integrar un entorno de desarrollo profesional (Llinares, 2005), que aborde las filosofías del docente respecto a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas en la construcción de tareas enfocadas a la promoción de conocimientos profesionales del docente en servicio.

1.2 Panorama del desarrollo profesional de los docentes en México

> *No existe desarrollo del currículo sin desarrollo del profesor.*
>
> (Stenhouse, 1984).

Es un hecho que el profesorado ocupa un lugar muy importante en la materialización de una reforma educativa. En esta sección se revisan los programas de desarrollo profesional para docentes en servicio, instrumentados en el marco de las reformas educativas en México desde 1993.

En los sucesivos cambios que se han implementado en el ámbito de la educación, en México, se han considerado a los docentes como protagonistas de la transformación educativa, en sus distintos momentos (SEP, 1993; 2004; 2006; 2011).

Los rasgos centrales del plan y los programas de estudio 2011, los cuales concentran las directrices y evoluciones de las anteriores reformas para la educación básica, desde la de 1993, en relación con el desarrollo profesional de los docentes, radican en el reconocimiento de que la *reflexión* y *la práctica* educativa en la escuela son clave para el fortalecimiento de la formación continua de los docentes y directivos, y para impulsar *procesos de gestión escolar participativos.*

En particular, los distintos planteamientos de las reformas han apelado al *compromiso* y desarrollo profesional de los docentes para consolidarlas (SEP., 1993; 2004; 2006; 2011). De esta manera el desarrollo profesional docente ha constituido un eje fundamental en el proceso de reforma que se está operando en las escuelas secundarias mexicanas, puesto que ha marcado la posibilidad de generar transformaciones sustantivas en las prácticas pedagógicas.

Este hecho ha sido plenamente reconocido por la Secretaria de Educación Pública, al subrayar que: propiciar el desarrollo profesional es la mejor herramienta para mejorar el desempeño de los docentes frente a grupo (Ortega, Ramírez & Castelán, 2005).

Según Sandoval (2001) en México las características de los programas institucionales de desarrollo profesional de los docentes en servicio, cuentan con poca presencia real, estos programas según Martínez[1] (2005) terminan enmarcándose en un curso, que sólo adquiere sentido para sus destinatarios, si otorga puntos para Carrera Magisterial.

Por otro lado, las figuras[2] cuya función formal es orientar a los docentes en su trabajo, asisten poco a las escuelas y cuando lo hacen, su trabajo adquiere un enfoque administrativo. Por ello es que no constituyen un referente importante para la práctica del docente y menos aún un apoyo pedagógico en el marco del desarrollo profesional de los mismos (Sandoval, 2001).

En este contexto, la formación profesional de los maestros de matemáticas en servicio se constituye en un modelo en donde las actividades de los formadores o asesores del curso se concentran en elaborar cuidadosamente nuevos materiales y organizar nuevos cursos para difundir las propuestas de las reformas, es decir en un modelo de formación centrado en el formador y basada en la instrumentación de cursos homogéneos.

[1] Alba Martínez Olivé. Directora General de Formación Continua para Maestros en Servicio de la Subsecretaria de Educación Básica en México, 2005.
[2] ATP, (apoyo técnico pedagógico), jefes de clase.

Sólo por mencionar un dato, en el periodo comprendido entre 1995 y 2005, se diseñaron diez mil cursos para los maestros de educación básica, sin contar los Cursos Nacionales de Actualización que operan desde 1997 en el PRONAP[3]. Más aún, las autoridades educativas de la Secretaría de Educación Pública, en marzo de 2004, decidieron hacer un esfuerzo para ofertar mejores cursos, más útiles y relevantes para los maestros de educación básica (Martínez, 2005).

Por otro lado, la búsqueda individual de cursos en ámbitos ajenos a la SEP, parece ser una práctica bastante extendida entre los docentes de secundaria, la cual está motivada, tal vez por su sentido profesional, que busca actualizarse en su especialidad y no tanto en la enseñanza de ésta. Este escenario denominado hiperlegitimación (León, 2005) lleva consigo la idea de que aquel que lleva mas cursos externos es el más capacitado.

Otro escenario importante, destacado por León (2005) tiene que ver con la meritocracia; es decir, una buena cantidad de posgrados que con honrosas y escasas excepciones, resultan ser propuestas de formación impropia, descontextualizadas y casi nunca evaluadas en su operatividad.

En el campo de la educación matemática también se ha tratado de dar cuenta de las condiciones y contenidos que representan mayor reto en el trabajo cotidiano del maestro de matemáticas. Algunos estudios desarrollados en el contexto mexicano, indican que los enfoques para la enseñanza de las matemáticas, planteados en los planes y programas de estudio, difieren mucho de lo que se forja realmente en el salón de clase, particularmente se subraya que aunque existen variaciones en las intervenciones pedagógicas, sigue la preminencia de lo “tradicional” (Ávila, 2001; Mendoza, 2001; Shulmaister, 2000).

[3] Programa Nacional de Actualización Permanente de Maestros de Educación Básica en Servicio

De esta manera es que los maestros desarrollan prácticas de enseñanza que no se encuentran lo suficientemente comprometidas con lo planteado en las reformas educativas, y en consecuencia, no aterrizan en la atención efectiva a las problemáticas de aprendizaje de sus alumnos (León, 2005; Ávila, 2001).

En cuanto a esto último, es comúnmente aceptado que las tendencias mantenidas por los profesores, son habitualmente concebidas en la escuela de manera inconsciente, esto es, de modo no intencional, no deliberado y no sistemático, o sea, de forma totalmente contraria a como exigiría una enseñanza fundada didácticamente (Trillo & Plata, 2001).

De aquí, que el interés y la relevancia del tema que nos ocupa se proyecte específicamente en la tarea de promover conocimientos profesionales. Es necesario entonces la incorporación de la visión del profesional docente que ha irrumpido en la enseñanza de las matemáticas y que en el cumplimiento de sus tareas profesionales presenta características particulares que son la base para seguir o no desarrollándose profesionalmente.

Por tanto se plantea la necesidad de crear espacios de desarrollo profesional con base en diversas estrategias, referidas al tiempo espacio y metodología para romper con el aislamiento que, por ahora, caracteriza el trabajo de los profesores e incorporar la filosofía del profesional a la que va dirigida (Sandoval, 2001).

Se pone de manifiesto la necesidad de explorar las filosofías de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas, como un punto de partida para mejorar su conocimiento y propiciar su desarrollo profesional, además, de mejorar sus prácticas.

En resumen, se bosqueja un panorama de desarrollo profesional situado fuera de la escuela, con atención al maestro como individuo y no como colectivo, con estrategias de atención homogeneizadas y masificadas que según algunas investigaciones realizadas desde 1993, en pocas ocasiones logran impactar las filosofías respecto a las matemáticas y su enseñanza y las prácticas de los docentes en servicio (Ortega, et al., 2005; Martínez, 2005; León, 2005; Maiztegui, 2000).

1.3 Trabajos antecedentes en el campo de la formación y el desarrollo profesional de maestros de matemáticas

Aprender a enseñar matemáticas y mejorar las prácticas al respecto ha sido una constante preocupación en la agenda de los investigadores en el campo de la educación matemática, en las últimas décadas algunas investigaciones y publicaciones se han llevado a cabo para intentar comprender este proceso. (Elbaz, 1983; Shulman, 1986; Schon, 1983; Callejo, Llinares, & Valls, 2007; Sowder, 2007; Gueudet y Trouche, 2008a; Hoyos, 2009a; 2009b; Sanchez, 2010a; Llinares, 1996; Sikula, 1996; Hargreaves; 1996; Richardson, et al., 2001; Gueudet y Trouche 2008a; 2008b; 2009; Sánchez, 2010a).

En esta sección se muestran diferentes estudios cuyo foco de atención se centra en la formación y el desarrollo profesional del maestro de matemáticas. El interés principal de la revisión que aquí se presenta, tiene dos aristas, por un lado se centra en mostrar una visión general sobre distintas perspectivas[4] desde las que se ha afrontado esta problemática en los últimos años. Y por el otro, en resaltar las orientaciones que proporcionan el contexto adecuado para que el desarrollo profesional tenga lugar, las cuales han ayudado a fundamentar las decisiones tomadas en relación con las directrices que constituyen el cuerpo de la tesis que aquí se presenta.

[4] Las formas de comprender, abordar y explicar los procesos de formación y desarrollo profesional de los profesores.

A partir de 1980 con los trabajos de Elbaz (1983), Shulman (1986) y Schon (1983) se empieza a reconocer el campo relacionado con las perspectivas del conocimiento de los profesores de matemáticas. Estas perspectivas, incluyen nociones de conocimiento, creencias, concepciones y procesos de pensamiento que se han considerado como relevantes para entender la práctica, el conocimiento y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

Elbaz (1983) se centró en la identificación de lo que los profesores saben, lo cuál ella llamó conocimiento práctico y en cómo los profesores estructuran el conocimiento; sostuvo que éste conocimiento es basado en las experiencias de primera mano cubiertas de autoconocimiento, medio, materias, desarrollo del currículo, instrucción y es representado en la práctica como reglas, principios prácticos e imágenes.

Shulman (1986) propuso siete categorías de conocimiento que hacen posible a los maestros enseñar y hacer frente a su labor con más conocimientos prácticos (Conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes, conocimiento de los fines del contexto educacional, propósitos y valores), enfatizando en el conocimiento pedagógico del contenido[5] como un aspecto clave para direccionar los estudios sobre la enseñanza.

Schon (1986) distinguió entre práctica reflexiva y racionalidad técnica, atribuyendo el primero a los profesionales, afirma que los profesionales actúan con base en lo ellos conocen, sin separar el conocimiento formal del conocimiento práctico.

[5] Definido como el que le permite al profesor adaptar el contenido a las necesidades de los aprendices particulares.

De esta manera, para un maestro, reflexionar en la práctica significa hacerlo con base en el conocimiento relacionado con el contenido y con el conocimiento pedagógico del contenido. Estas aportaciones llaman la atención acerca de que la enseñanza no es una actividad técnica, en el sentido de que no sólo se hace uso de materiales o herramientas para auxiliar la labor sino que se su uso rige por un tipo de conocimiento ligado a la acción.

En un intento por reportar la amplitud, complejidad y posibilidades de la investigación sobre formación y desarrollo profesional de profesores se han considerado tres dimensiones:

1. Estudios relacionados con la formación y el desarrollo profesional.
2. Estudios relacionados con el conocimiento pedagógico y del contenido matemático.
3. Estudios relacionados con la práctica del profesor.

1.3.1 Estudios relacionados con la formación y desarrollo profesional de los maestros de matemáticas

Villar (1990) en una investigación sobre la formación y desarrollo personal del profesor subrayó distintos procesos de aprendizaje de los profesores, a saber: estadios de desarrollo, implicación del docente, relación de colaboración con sus colegas y transferencia de aprendizaje. Afirma que el profesor participa y se implica en las acciones de mejora de su práctica conforme percibe que ellas refuerzan su práctica, mejorándola. Además, subraya que la relación de colaboración con sus colegas ayuda para construir conocimientos.

El Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEM) de la Universidad de Sevilla utilizó el formato de casos en algunas tareas en las que se integra material textual y videos para la constitución de entornos de aprendizaje que intentaron implicar a los estudiantes para maestro en el análisis del proceso de aprendizaje matemático de los alumnos de Primaria (Llinares, 1996).

Así el grupo de investigación construyó algunas situaciones iniciales desde las que los estudiantes para maestro pudieron empezar a desarrollar los aspectos relativos al proceso de razonamiento pedagógico.

Clarke (1994) utiliza cuestiones de interés identificadas por los maestros mismos, para direccionar la investigación, alienta a los participantes a construir metas sobre su propio crecimiento profesional, el trabajo involucra un grupo de maestros de un número de escuelas, en los cuales se promueve la participación para ganar un grado sustancial de apropiación con base en la construcción de tareas y metas propias y en la consideración de los maestros como verdaderos socios en los procesos de cambio. Reconoce que el cambio es gradual, difícil, y a menudo con procesos dolorosos y ofrece oportunidades para el apoyo continuo, reconoce que los cambios en las creencias de los maestros sobre la enseñanza y el aprendizaje derivan de la practica en el salón de clase, seguidos de oportunidades para ser validados a través de la observación del aprendizaje de los estudiantes, además reconoce y direcciona los impedimentos que los maestros enfrentan en su crecimiento.

Mewborn (1999) subrayó que a través de la socialización de trabajos en clase, los futuros profesores empiezan a mostrar interés y a explicitar problemas inherentes al quehacer cotidiano docente. Presentó tres categorías para que los profesores en formación continua agrupen sus experiencias de clase.

1. El quehacer docente y las cuestiones inherentes a la gestión de clase.
2. El relato de acciones y experiencias enseñadas.
3. La reflexión sobre los efectos de las acciones en el aprendizaje de los alumnos.

Hawley y Valli (1999) analizan las diferencias entre los estándares para el aprendizaje de las matemáticas de la NTCM y el desarrollo de los estudiantes; involucran a los maestros como aprendices en la identificación de sus necesidades de aprendizaje y cuando es posible en el desarrollo de las oportunidades de aprendizaje y de los procesos que pueden ser usados, proveen oportunidades de aprendizaje que relacionan las necesidades individuales y por otra parte se organizan alrededor de la resolución de problemas de manera colaborativa.

Hawley y Valli (1999) Incorporan la evaluación de múltiples fuentes de información sobre las respuestas de los estudiantes y los procesos que involucran en la implementación de lecciones aprendidas. A través del desarrollo profesional proveen oportunidades para desarrollar un conocimiento teórico sobre el conocimiento y las habilidades que pueden ser aprendidas, integradas con la gama de impedimentos que los estudiantes o los facilitadores deben aprender.

Goffree y Oonk (2001) utilizaron en un entorno formativo –el MILE[6]-, en el ámbito de la formación inicial en matemáticas de profesores de primaria, que contempla situaciones de aprendizaje basadas en la práctica docente. En el MILE las situaciones prácticas de profesores en clase son digitalizadas en CD-ROMs y presentadas en fragmentos de videos.

Con base en el análisis de las conversaciones reflexivas establecidas entre el grupo de futuros profesores y educadores en los dos primeros años de implementación del entorno MILE, el grupo de investigación logró identificar distintos niveles de construcción del conocimiento práctico en los estudiantes:

[6] Mathematics Instructional Learning Education

1. La asimilación del conocimiento práctico ocurre cuando el estudiante para profesor indica lo que del entorno le gustaría implementar, sin hacer ningún tipo de restricción o juicio.

2. La adaptación y acomodación del conocimiento práctico, el estudiante para profesor modifica su repertorio a partir de reflexiones críticas y personales.

3. La integración de teorías, en este nivel el estudiante para profesor establece relaciones entre eventos, hechos en el desarrollo del proceso y sobre las teorías relacionadas.

4. La teorización, en este último nivel el futuro profesor diseña sus propias teorías locales, construye ideas sobre causas y consecuencias a través de la observación e interpretación de fragmentos encontrados por ellos mismos.

Bairral, et al. (2001) presentan una perspectiva del desarrollo profesional docente basado en la WEB, que contempla una serie de estrategias implementadas en un entorno virtual de aprendizaje, donde los involucrados interaccionaron con diferentes medios (herramientas y recursos materiales o informáticos) en situaciones de su quehacer cotidiano profesional.

Con base en la teoría del contrato didáctico, explicitan reglas y diferentes funciones para los involucrados en el proceso de desarrollo

Vaillant y Marcelo. (2001) a través de un programa de iniciación incluyeron, entre sus actividades, el asesoramiento de los profesores principiantes por medio de otros profesores, que pueden ser compañeros o bien «mentores», en sus trabajos se destaca la figura del mentor como elemento importante de los programas de iniciación.

La tarea que se asigna al «mentor» es la de asesorar didáctica y personalmente al profesor principiante, Vaillant y Marcelo basan su programa de desarrollo profesional en ciclos de supervisión clínica (planificación-observación-análisis de la enseñanza), o bien entrevistas abiertas.

Elmore (2002) se enfoca sobre en una visión articulada con el propósito de anclar en el aprendizaje de los maestros un conjunto de conocimientos y habilidades derivadas del análisis del aprendizaje de los estudiantes en un contenido específico o en un entorno especifico.

Se enfoca específicamente en las cuestiones del curriculum y la pedagogía derivadas de la investigación y de la práctica ejemplar conectado, con cuestiones específicas de la instrucción y el aprendizaje de los estudiantes en el contexto de la sala de clase, desarrolla refuerzos y sostiene un grupo de trabajo utilizando la práctica colaborativa dentro de las escuelas y dentro de las redes a través de las escuelas. Usa exámenes y evaluación para un monitoreo activo del aprendizaje del estudiante y provee una retroalimentación al maestro que aprende de su práctica, encarna una clara articulación de la teoría y el modelo de aprendizaje para los adultos.

Callejo, Llinares, & Valls (2007) plantean la importancia de la reflexión sobre la propia práctica o la de otros y de la interacción con otros profesores como aspectos clave en el desarrollo profesional.

Presentan el diseño de un entorno interactivo de aprendizaje en el que se aprende de una práctica real y se favorece la construcción social del conocimiento gracias a la interacción virtual.

El entorno de aprendizaje está planteado en el contexto de la formación permanente en la línea de una práctica reflexiva con base en el ciclo “Lesson study” (Lewis, et al., 2006).

El ciclo, según los creadores del entorno, se puede repetir focalizando la atención en otros aspectos, planteando nuevas preguntas y probando nuevos materiales y aproximaciones a la enseñanza – por ejemplo, diseño de nuevas lecciones.

Gueudet y Trouche (2008a) desarrollaron una investigación en el marco de las escuelas secundarias francesas enfocando su atención en el manejo de los recursos digitales.

La investigación basa sus acciones en GUPTEn que significa, en francés: Génesis Profesional de utilización de la tecnología por los Maestros y en el término documentación de trabajo que se refiere a la búsqueda de recursos, (Selección, diseño de tareas matemáticas y planificación de sucesión, tiempo, etc.) se estudió a los maestros en el uso especial "de una pieza de software se llama 'Mathenpoche'

A partir de un estudio longitudinal de tres años en 30 escuelas de los EE.UU., Densimone, et al. (2002) concluyen que los programas de desarrollo profesional son más efectivos en cambiar prácticas en aula, cuando involucran la participación colectiva de una misma escuela, departamento o nivel educacional.

Gueudet y Trouche (2008b) presentan un trabajo que se inició en un curso en la escuela de verano en educación matemática en 2007, los parámetros experimentales discutidos en este estudio han contribuido al desarrollo del enfoque documental.

La investigación, situada en el campo de enseñanza de las matemáticas, está basada específicamente en la documentación de los profesores de matemáticas en las escuelas secundarias.

Los investigadores se basaron en dos dispositivos experimentales: El primero se refiere a recursos en línea, especialmente el software Mathenpoche; el segundo se refiere a una educación continua, basada en los recursos de diseño colaborativo, con el objetivo de apoyar la integración de las TICs por los profesores de matemáticas.

La academia de Montpellier (Guin y Trouche, 2008) es una organización de formación a distancia para los profesores de matemáticas de secundaria, creada desde el año 2000 para proporcionar apoyo constante a los docentes en el diseño y la experimentación, para la integración de los recursos de las TIC.

La idea en la que se sustenta la organización se basa el trabajo colaborativo. Grupos de maestros se reunieron para diseñar y experimentar con diversos recursos, su trabajo tomó la forma de comunicación continua, con un día de talleres tres veces al año, el resto del tiempo a través de una plataforma compartida.

Hoyos (2009a, 2009b) presentó un estudio de caso relacionado con un entorno de desarrollo profesional basado en cursos de matemáticas y tecnología, diseñados en una plataforma moodle, dicho estudio se basó en la participación de 15 profesores de bachillerato en los cursos antes mencionados, por seis meses.

El trabajo condensa los resultados del desarrollo de un proyecto de investigación-intervención acerca de cómo incorporan la tecnología en el aula los profesores del bachillerato tecnológico, después de participar en un programa de desarrollo profesional en línea.

En particular el análisis se realizó sobre videos y planeación acerca de cómo llevarían a cabo sus prácticas en el aula utilizando herramientas digitales que los mismos profesores elaboraron sobre su práctica docente.

Sanchez (2010a) desarrolló una investigación basada en la orquestacion documentacional, con 14 maestros de matemáticas en servicio procedentes de México y Argentina inscritos en el programa de maestría en enseñanza de las matemáticas en el Instituto Politécnico Nacional de México.

El programa utilizó la plataforma Moodle (Http://moodle.org). Los datos fueron tomados de un curso asincrónico sobre el uso de tecnología para la enseñanza de las matemáticas, con una duración de cuatro semanas.

Sánchez, explora con base en la orquestacion documental, un entorno virtual de desarrollo profesional con profesores de matemáticas en servicio, su trabajo se basa en los procesos de intrumentación, cuyo foco de atencion y etapas, fueron diseñados previo al estudio con el fin de contribuir a los procesos de desarrollo profesional de los profesores implicados.

El objetivo principal de la orquestación fue para que los docentes conscientizaran las posibles modificaciones o cambios que las tareas y las técnicas pueden experimentar cuando se introduce la tecnología en el aula de matemáticas como herramienta de estudio. El estudio se cimentó en una configuracion didáctica basada en 5 estadios (1. Introducción, plan de lección, 2. Explorando el sofware matematico, 3. Resolviendo una tarea matemática usando diferentes técnicas, 4. Analisis de un plan de clase, 5. Discusión de un árticulo de investigación, mensaje final en video).

Entre los estudios explorados se destacan diferentes formas de abordar y explicar los procesos de formación y desarrollo profesional de los profesores,

Aunque tradicionalmente el desarrollo profesional se ha considerado como algo ligado al dominio de ciertas destrezas (Smyth, 1991) existen muchos investigadores que han contribuido con aportaciones específicas en esta dimensión, con la intención de comprender, abordar y explicar los procesos de formación y desarrollo profesional de los profesores.

Implicaciones para la formación del profesor de matemáticas en servicio.

En resumen los aportes principales para generar procesos de desarrollo profesional se centran en las siguientes: La implicación de docente y la Relación de colaboración con sus colegas (Villar Angulo, 1990; Sowder, 2007; Clarke, 1994); utilización de material textual (Llinares, 1996); Integración del quehacer docente, relato de acciones y la reflexión sobre los efectos de las acciones, situaciones de aprendizaje basadas en la práctica docente, Interacción con diferentes medios (herramientas y recursos materiales o informáticos) en situaciones del propio quehacer cotidiano profesional (Bairral, et al., 2001); asesoramiento de profesores principiantes por medio de otros profesores avanzados; Ciclos de supervisión clínica (planificación-observación-análisis de la enseñanza) (Vaillant y Marcelo, 2001); Reflexión sobre la propia práctica o la de otros e interacción con otros profesores (Callejo, Llinares & Valls, 2007); participación colectiva, (Densimone, et al., 2002), enfoque documental y Diseño colaborativo (Gueudet y Trouche, 2008b), Comunicación continua (Guin y Trouche 2008); Estudio de caso, análisis sobre videos y planeación Hoyos (2009a, 2009b); configuracion didáctica basada en 5 estadios (1.plan de lección, 2. Explorando el sofware matematico, 3. Resolviendo una tarea matemática, 4. Analisis de un plan de clase, 5. Discusión de un árticulo (Sanchez 2010a).

A la fecha han sido muchas las investigaciones que se han desarrollado, en el campo de la formación del profesorado, en las que se ha intentado indagar qué conocen los profesores, cómo llegan a conocerlo y —lo que resulta más importante en el marco de la presente investigación —cómo podemos mejorar el conocimiento de los profesores, un referente importe de lo anterior se halla en el trabajo de Sowder (2007) quien reporta la amplitud, complejidad y posibilidades de la investigación sobre formación y desarrollo profesional de los maestros, resaltando un conjunto de metas que deben considerar los investigadores o formadores que deseen implementar un ambiente de desarrollo profesional:

1. Desarrollar una visión compartida.
2. Desarrollar el conocimiento del contenido matemático.
3. Desarrollar un entendimiento sobre cómo piensan los estudiantes al aprender matemáticas
4. Desarrollar del conocimiento pedagógico del contenido.
5. Desarrollar un entendimiento del rol de la equidad en las matemáticas escolares
6. Desarrollar una conciencia de sí mismo como maestro de matemáticas

Las 6 metas planteadas no son independientes una de la otra, es decir que la enseñanza de un tópico no puede separarse del conocimiento pedagógico, de las posibilidades de pensamiento de los estudiantes respecto a dicho tópico, del papel que le docente juega, etc. Lo cual en conjunto según Sowder (2007) afecta la visión que tienen los maestros sobre la enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado Ponte & Chapman (2006) sugieren que para estudiar el conocimiento profesional de los profesores se debe tener en cuenta:

- La materia (matemáticas)
- Los participantes (docentes y estudiantes)

- Los objetivos explícitos e implícitos (plan de estudios, los valores sociales).
- Las condiciones de trabajo (contexto, las instituciones).

Llinares & krainer (2006) con base en la exploración de diversos estudios relacionados con el desarrollo profesional de maestros de matemáticas en servicio, han identificado una serie de características y de propósitos que pueden fungir como directrices para la generación de un espacio de desarrollo profesional.

- Elevar la conciencia de los maestros sobre los procesos matemáticos y sobre el contenido.
- Elevar la conciencia de los maestros sobre el pensamiento matemático de los alumnos.
- Promover la reflexión.
- Colaboración entre docentes y construcción de comunidades. (desarrollo profesional como un proceso social)
- Mejorar el conocimiento sobre cómo los maestros aprenden

(Llinares & krainer, 2006).

1.3.2 Estudios relacionados con el conocimiento pedagógico y el contenido matemático

En la agenda de investigación en educación matemática, el estudio sobre el conocimiento de los maestros ha ocupado gran parte de la atención desde el origen y crecimiento del campo relacionado con el conocimiento de los profesores.

Los estudios directa o indirectamente tratan con una variedad de tópicos donde destacan la geometría, funciones, fracciones y resolución de problemas. Muchos de los estudios se han centrado, alrededor de tres décadas, en reportar a cerca de las dificultades o deficiencias que los maestros presentan en algunos tópicos matemáticos particulares.

Por ejemplo Linchevsky y Vinner (1989) investigaron la medida en que los estudiantes para maestro y los maestros en servicio de escuelas primarias fueron flexibles al cambiar una estructura canónica de los números y las operaciones, por una estructura de fracciones de cantidades continuas.

Linchevsky y Vinner (1989) encontraron conceptos erróneos y confusiones asociadas con las representaciones canónicas, representaciones visuales de los maestros incompletas y no suficientes para conformar un concepto de fracciones.

Llinares y Sánchez (1991) reportaron el conocimiento del contenido pedagógico sobre fracciones, explorado en estudiantes para maestros, encontraron que muchos de los participantes mostraron incapacidad para identificar la unidad para representar algunas fracciones mayores que uno.

En la formación inicial ha habido una preocupación especial por el análisis de las creencias de los profesores en formación en su camino hacia la profesionalidad. Se ha entendido que las creencias son como proposiciones, premisas que mantienen las personas acerca de lo que consideran verdadero. Y según algunas investigaciones influyen en la forma como aprenden los profesores; y en sus procesos de cambio.

Andelfinger (1981) presentó un método de encuesta para obtener información cada día sobre la enseñanza y dio un ejemplo extendido de su uso con los maestros sobre el rol de la fracción versus los números decimales en la enseñanza de las matemáticas, indicó que los maestros consideran fracciones y decimales como tópicos separados en problemas y dificultades en común y poco relacionados con otros tópicos.

Brissiaud, et al. (1982) usaron cuestionarios para investigar la relación entre las *percepciones* de los maestros y alumnos de primaria considerando el problema, los resultados están fuertemente apoyados en la hipótesis de que la percepción del problema por parte del niño es modelada por la percepción del maestro.

Simon (1990) investigó el conocimiento de la división de los maestros de primaria. Los resultados indicaron que no tenían conocimiento de los procedimientos adecuados, pero el conocimiento conceptual insuficiente y conexiones dispersas entre los dos. Conexiones débiles y pérdidas fueron identificadas, así como aspectos de las diferencias conceptuales individuales. En general, exhibieron graves deficiencias en sus conocimientos de la división, en particular en la conectividad de ese conocimiento.

En los noventas la noción de conocimiento pedagógico del contenido fue uno de los constructos teóricos introducidos en el estudio de los conocimientos de los maestros, basado en esta noción Markovits (1991) estudió a maestros de preparatoria analizando las respuestas de los estudiantes, remarcando hipótesis sobre el tópico de funciones.

Se encontró que los maestros a menudo no son capaces de detectar las dificultades de algunos estudiantes e ignoran sus caminos de pensamiento y sus recursos. Los autores mostraron que los maestros pueden tener considerado los errores que probablemente podrían cometer sus estudiantes, pero a menudo no lo hacen, ellos resumieron sus descubrimientos diciendo que los maestros reconocen el rol central del entendimiento del pensamiento de los estudiantes, pero no reconocieron la noción de reacción.

Philippou y Christou (1994) investigaron el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones de maestros de pregrado de primaria matriculados en primer semestre de sus estudios. Los resultados indicaron que tenían un conocimiento limitado de las ideas subyacentes en el conocimiento conceptual de las fracciones. Los participantes tuvieron un mayor éxito en la suma y la resta y menor éxito en la multiplicación y división como operaciones no relacionadas. Los peores resultados fueron en ítems que miden su capacidad de conectar las situaciones del mundo real y la computación simbólica.

Zazkis y Campbell (1994) investigaron en maestros de pregrado de primaria la comprensión de los conceptos relacionados con la estructura multiplicativa de números enteros, la divisibilidad, factorización y descomposición factorial. Los resultados indicaron una fuerte dependencia de los procedimientos. Ya que estos accesorios de procedimiento parecían comprometer e inhibir el desarrollo de las estructuras más refinadas y más significativos de la comprensión conceptual.

Klein y Tirosh (1997) evaluaron el conocimiento de estudiantes para maestro y maestros en servicio de educación primaria sobre las dificultades comunes que enfrentan los niños con problemas de multiplicación y división involucrando números racionales.

Los autores encontraron que la mayoría de los maestros en servicio proveyeron expresiones correctas para problemas de multiplicación y división, lo que no paso con los futuros maestros.

Chazan, Larriva y Sandow (1999) exploraron el conocimiento conceptual y procedimental de un profesor de pregrado de nivel secundario relacionado con la enseñanza de la resolución de la ecuación. Ellos encontraron que el participante tenía una comprensión conceptual del tema, pero no fue clara en relación con la forma en que se utilizó para apoyar su enseñanza. Los autores se preguntaron acerca del uso de descripciones como la comprensión de conceptos y procedimientos para el examen de conocimientos sustantivos de los profesores de matemáticas. Explicaron: Tal vez la dificultad es que la comprensión conceptual no es un "logro," es decir, algo que se tiene o no se tiene. En su lugar, tal vez uno puede tener la comprensión conceptual de los diferentes tipos.

Presmeg y Nenduradu (2005) llevaron a cabo un estudio de caso de una maestra de secundaria, la investigación sobre el uso y el movimiento entre diferentes modos de representación de relaciones exponenciales. Encontraron que su facilidad para moverse entre los registros de representación no fue acompañado de la comprensión conceptual de las ideas matemáticas subyacentes como el maestro trató de resolver problemas algebraicos que implican relaciones exponenciales. Llegaron a la conclusión de que su caso pone en duda el supuesto teórico de que los estudiantes que pueden moverse con soltura entre varias inscripciones que representan el mismo concepto tienen de la necesidad alcanzar el conocimiento conceptual de las relaciones involucradas.

Bloch (2007) utiliza el concepto de juego de la teoría de situaciones didácticas para producir una situación sobre descomposición de vectores dirigida a futuros profesores de matemáticas. La situación diseñada tiene la finalidad de desarrollar su conocimiento matemático y pedagógico.

Implicaciones para la formación del profesor de matemáticas en servicio.

El conocimiento matemático es ampliamente reconocido como uno de los atributos fundamentales de los profesores de matemáticas (Ponte & Chapman, 2006), por lo tanto, no es de extrañar que los estudios sobre el desarrollo profesional se enmarquen en algún ámbito de la enseñanza las matemáticas, en resumen los aportes principales de los estudios abordados en esta sección es que permiten contestar preguntas básicas como: ¿Cuáles son las deficiencias en el conocimiento de las matemáticas de los profesores? ¿Cuál es el estatus actual del conocimiento de los profesores relacionado con las matemáticas y su enseñanza?, lo cual arroja implicaciones para el desarrollo profesional del maestro en el marco de las matemáticas y su enseñanza y cuáles permiten detectar los focos de atención a los que se debe dar la prioridad pues éstos estudios, directa o indirectamente, tratan una variedad de temas matemáticos con mayor atención a la geometría, las funciones, la multiplicación y la división, fracciones, y la resolución de problemas, lo cual según los reportes mismos implican retos para los docentes sujetos de estudio.

1.3.3 Estudios relacionados con la práctica del profesor de matemáticas

Desde hace algunos años ha surgido el interés por investigar cómo los aspectos relacionados con las creencias, concepciones, representaciones, teorías implícitas, etc. de los profesores, influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La importancia de las investigaciones relacionadas con la práctica del profesor ha sido señalada por muchos investigadores que la han abordado desde distintos enfoques con la finalidad de explicarla (Llinares, 2000; Ruthven y Hennessy, 2002).

Dougherty (1990) investigó los niveles cognitivos de once profesores de primaria y sus relaciones con la resolución de problemas las prácticas de enseñanza. Los indicadores de las prácticas docentes en el aula fueron variables tales como, tipos de problemas seleccionados, la cantidad de tiempo invertido en el desarrollo de clases utilizadas para la enseñanza de resolución de problemas, el uso docente y los tipos de preguntas, los ejemplos del maestro, el formato de la lección, etc.. Los resultados apoyan la teoría de que las estructuras cognitivas están relacionadas con las prácticas de enseñanza y concepciones acerca de las matemáticas y resolución de problemas.

Adler (1995) sugiere la combinación de la teoría de la práctica social de Wenger con la teoría sociocultural para una elaboración completa y efectiva de conocer, aprender y enseñar matemáticas en la escuela. Aplicó este marco para el análisis de la complejidad de la enseñanza de las matemáticas al trabajar los ideales democráticos en las aulas multilingües, centrándose en la naturaleza de la intervención del profesor. El documento considera los eventos en un salón de clases de 6 º grado. El autor llegó a la conclusión de que en algunos casos el docente debe tomarse como un punto de referencia para los estudiantes, lo que permite una cultura participativa en el aula, pero en otros casos la mediación docente es esencial para mejorar el contenido de la comunicación acerca de las matemáticas, por lo tanto, la búsqueda de un equilibrio adecuado es un reto profesional continua.

A finales de la década de los noventas se puso de manifiesto la necesidad de ampliar las maneras de mirar y conceptualizar la práctica del profesor de matemáticas. Stienbring (1998) analiza un episodio de enseñanza e identifica tres componentes del conocimiento epistemológico que debería ser introducido en la formación de los profesores de matemáticas:

- Conocimiento sobre el «carácter evolutivo» del conocimiento matemático.
- Conocimiento sobre el proceso social interactivo de la comunicación matemática como sistemas autónomos.
- Conocimiento sobre la interdependencia de las condiciones sociales y epistemológicas en la comunicación humana.

Escudero y Sánchez (1999) abordan la relación entre el conocimiento profesional y la práctica del docente de matemáticas en la escuela secundaria, para ellos la práctica es considerada como el trabajo que el profesor enfrenta a la hora de realizar sus tareas profesionales.

Los investigadores hicieron hincapié en la interrelación entre la estructura de la lección y el conocimiento del contenido matemático, señalaron como la toma de decisiones es determinada por las características de estas interrelaciones.

Un Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Sevilla realizó algunas investigaciones centradas en estudiar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas una de ellas definida como un objetivo de su agenda de investigación fue el análisis del “conocimiento profesional del profesor de matemáticas en acción” (Llinares, 2000).

Miraron el aula de matemáticas como un medio en el cual analizar algunos aspectos de la práctica profesional del profesor para caracterizar el papel desempeñado en la constitución de unas determinadas prácticas matemáticas en el aula, se realizó a través de la identificación, desarrollo y uso de conceptos teóricos procedentes de diversas perspectivas.

Utilizaron las fases propuestas hace algún tiempo por Jackson (1975) [la fase preactiva, interactiva y postactiva] para señalar distintos momentos en los que se desarrollan las actividades del profesor.

El grupo de investigación Intentó describir y comprender la realidad del profesor en la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva, al identificar las características de su gestión del proceso de enseñanza- aprendizaje e identificar aspectos de dicha gestión que puedan tener relevancia teórica debido a su capacidad explicativa.

La hipótesis adoptada fue que el conocimiento del profesor podía llegar a determinar algunos aspectos de su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El grupo de investigación en la Universidad de Sevilla ha puesto de manifiesto la complementariedad entre las perspectivas cognitivas y socioculturales para relacionar de manera dialéctica el análisis de gestión del profesor del proceso de enseñanza-aprendizaje con el conocimiento del profesor. Según Llinares (2000) dicha complementariedad, permite organizar los resultados que se obtienen en las diferentes investigaciones para una mejor comprensión de la práctica del profesor de matemáticas.

Llinares (2000) en su escrito utiliza la noción de transparencia (Lave & Wegner, 1991) para ilustrar el papel de la profesora Sara en la constitución interactiva de una práctica matemática en el aula sobre el contenido matemático de funciones.

Khisty (2001) realizó un estudio sobre los procesos de enseñanza que contribuyen al logro del estudiante en matemáticas. Miró a la actividad sociocultural como el contexto en el que los niños participan y de las cuales el uso de herramientas apropiadas y el pensamiento cultural, estudió a cinco maestros de las escuelas primarias y secundarias que atendían estudiantes latinos que aprendían el inglés como segunda lengua. Llegó a la conclusión de que la escritura matemática es un proceso que puede apoyar al pensamiento del estudiante e indicó que "los maestros eficaces" comparten características tales como: (I) fomentar el apoyo mutuo entre los estudiantes, (II) la formulación de grandes expectativas, (III) la habilidad en la conceptualización de las situaciones matemáticas, y (IV) utilizar preguntas de sondeo y declaraciones, tanto oral como escrita, como herramientas para el aprendizaje.

Escudero y Sánchez (2002) abordan el tema relacionado con la enseñanza del teorema de Thales. Al hablar de los casos de dos profesores de enseñanza secundaria, concluyeron que los dos profesores utilizan diferentes estructuras y que las decisiones iniciales de los maestros con respecto a las estructuras adoptadas estaban vinculadas a las diferentes características de los dominios del conocimiento, que estos profesores integran de una manera diferente.

Ruthven y Hennessy (2002) con el fin de desarrollar una mejor comprensión de la apropiación de las nuevas tecnologías por los maestros, realizaron un estudio en Cambridge, durante el año 2000, enfocado a las ideas de los profesores sobre su propia experiencia de éxito con el uso de herramientas informáticas y los recursos utilizados en el salón de clase.

Los datos se obtuvieron mediante entrevistas a grupos focales de participación, las cuales permitieron la identificación de temas que cuentan con un grado de asociación mayor con el uso de las tecnologías en el salón de clase.

Dicha identificación de temas representó la construcción de un estado deseable de los asuntos que los profesores tratan de encontrar en el aula, o de los que el uso de tecnología es capaz de contribuir.

Mendick (2002) se centró en las prácticas mediante las cuales los profesores, explícita e implícitamente, responden a la pregunta de los estudiantes, "¿Por qué estamos haciendo esto?" El autor presentó un estudio de caso de una clase de la escuela secundaria en la que la preparación para el examen, la competencia entre los estudiantes y el trabajo de procedimiento fueron características destacadas. El documento llama la atención sobre el desarrollo de un sentido de propósito para el aprendizaje de las matemáticas como un tema clave para entender los logros de los estudiantes.

Tzur (2002), un educador matemático que enseñó a un salón de clases de 3er grado durante cuatro meses. Examinó la utilidad de un modelo teórico de la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje para guiar la práctica, prestando especial atención a las actividades y sus efectos. Consideraba a la enseñanza como un ciclo de cuatro actividades principales: (I) inferir las concepciones, (II) la hipótesis de una trayectoria de aprendizaje, (III) el diseño atractivo de las actividades, y (IV) la orientación de las reflexiones de los alumnos, e inferir sus nuevas concepciones, etc. El autor llegó a la conclusión de que este modelo general es útil para orientar la enseñanza y se puede combinar con los modelos de contenido específico de pensamiento de los estudiantes.

Implicaciones para la formación del profesor de matemáticas en servicio.

En resumen una manera de coordinar los mensajes producidos por los diferentes contextos en los que se aprende a enseñar, es mediante la incorporación del análisis de las prácticas de enseñanza en los programas de formación del profesorado. Los partidarios de la introducción del análisis y reflexión sobre la práctica docente, sugieren que los profesores o estudiantes para profesores tendrán una mejor oportunidad de abordar y de integrar la teoría con base en la práctica (Escudero y Sánchez, 1999).

Los aportes principales de los estudios abordados en esta sección es que permiten examinar la práctica del maestro, incluyendo lo que sabe, cree y tiene la intención (Simon y Tzur, 1995), un supuesto clave es que hay una relación de reflexión entre las actividades y las prácticas de enseñanza, ya que las actividades de la persona son constitutivas de las prácticas y, al mismo tiempo, las prácticas dan forma y significado social a las actividades de la persona. Boaler (2003) describe las prácticas como "las actividades recurrentes y las normas que se desarrollan en las aulas a través del tiempo, en el que los maestros y estudiantes se dedican".

En conjunto los trabajos muestran que cualquier marco teórico determinado tiende a pedir su propio tipo de preguntas y conduce de forma natural a una imagen diferente de la situación, sin embargo, resalta el auge del enfoque sociocultural para examinar la intervención del maestro (Anghileri, 2002).

Finalmente algunas directrices de los estudios abordados que se pueden considerar para la puesta en marcha de algún programa de desarrollo profesional son las siguientes:

- Fomentar el apoyo mutuo entre los estudiantes.
- Formular grandes expectativas.
- Conceptualizar las situaciones matemáticas.
- Utilizar preguntas de sondeo y declaraciones, tanto oral como escrita, como herramientas para el aprendizaje.

(Khisty, 2001).

1.4 A manera de reflexión

En los trabajos abordados en las sección 1.2 se subraya el papel que desempeñan el conocimiento y las creencias de los profesores en la forma en que se construye el conocimiento base para la enseñanza durante los procesos de aprender a enseñar Matemáticas, ya sea desde la formación de futuros profesores o del desarrollo profesional de los profesores en servicio.

Según Llinares & Krainer (2006) la incorporación del análisis de la enseñanza en los programas de formación del profesorado constituye una manera de coordinar las experiencias en los diferentes contextos en los que se aprende a enseñar.

Los partidarios de la introducción del análisis y reflexión sobre la práctica docente sugieren que los profesores o estudiantes para profesores tendrán una mejor oportunidad de integrar la teoría y la práctica (Llinares & Krainer, 2006).

Con base en ellos podemos hacer hincapié en algunos resultados que pueden apuntalar la investigación que aquí se presenta:

1. Destaca en primer lugar el profesor como sujeto reflexivo, racional que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional.

2. La formación del profesorado se vuelve más reflexiva y se dirige explícitamente hacia la práctica escolar.

3. La formación es más efectiva si los profesores aprenden de manera similar a lo que se considera deseable como práctica escolar.

4. Los registros de la práctica constituyen la evidencia empírica sobre la que los profesores pueden vincular sus reflexiones.

5. Tanto la reflexión del docente, como su conocimiento profesional deben ser parte integral de espacios que consideran su desarrollo profesional.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

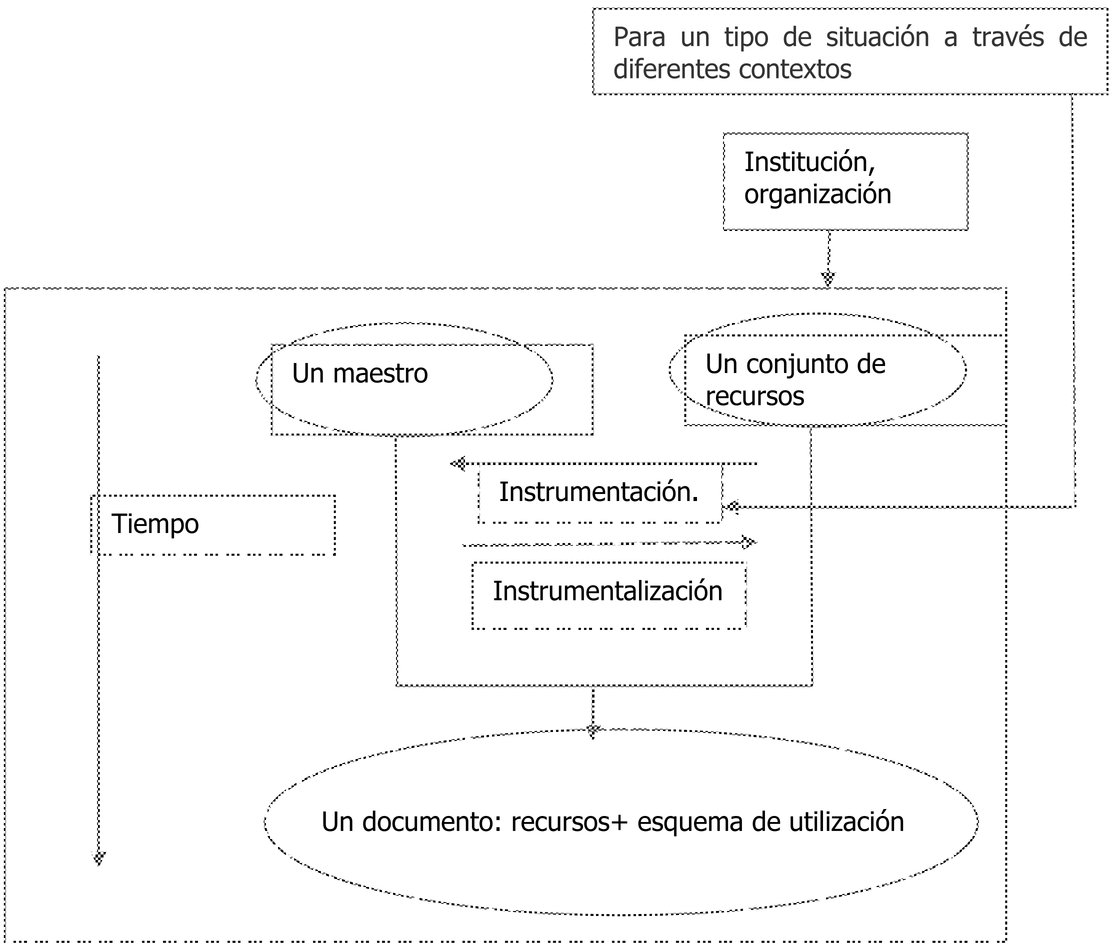
En este capítulo se despliegan los constructos relacionados con las directrices teóricas que orientaron la investigación que aquí se presenta. Las primeras secciones (2.1-2.5.1) abordan las líneas teóricas en las cuales se sustentan las decisiones metodológicas adoptadas en esta tesis. En las siguientes secciones (2.5.2-2.6.2) se abordan las nociones o instrumentos conceptuales que han emanado de la investigación en el campo de la educación matemática, relacionados con la filosofía de las matemáticas y con la generalización de patrones y el pensamiento algebraico, los cuales se van a utilizar para guiar el análisis de los datos y finamente en las secciones (2.7 y 2.8) se abordan las propósitos y las preguntas que guiaran la investigación en conjunto con el modelo de intervención que se evaluara en el marco de la presente investigación.

2.1 El enfoque documental

El enfoque documental es una perspectiva dinámica que permite guiar y perfeccionar el diseño de tareas de desarrollo profesional con base en dos procesos sustanciales: de *instrumentación* que implica la organización de tareas de desarrollo profesional con base en las potencialidades contenidas en los artefactos para influir en la actividad del sujeto y reconocer la forma en que el desarrollo de las tareas ejercen influencia en la actividad profesional del maestro e *instrumentalización*, implica la apropiación del recurso o artefacto, involucra la forma en que se utiliza el artefacto, en cierto sentido, da forma al propio artefacto y permite analizar si los maestros se apropian y/o modifican el conjunto de recursos con los que interactúan (Gueudet y Trouche, 2009).

El enfoque documental suministra algunas herramientas para el estudio de los procesos que subyacen al desarrollo profesional de maestros de matemáticas, tanto individual como colectivamente. En el marco de la investigación que aquí se presenta constituye una forma dinámica de guiar y perfeccionar el diseño de tareas, con base en los procesos de, instrumentación e instrumentalización, que son parte sustancial del enfoque, pues por un lado permite analizar la forma en que el abordaje de las tareas de desarrollo profesional ejercen influencia en la actividad profesional del maestro y por el otro permite detectar el grado de apropiación del conjunto de recursos con los que los maestros interactúan.

La interacción del profesor con un conjunto de recursos que le permiten moldear y definir su trabajo.[1] Constituye el centro del enfoque documental (Sánchez, 2010b).



Esquema. II.1 Representación esquemática de la génesis documental (Trouche, 2010), (Cfr. Hoyos, 2012)

[1] Por ejemplo: extraer ejemplos y ejercicios de un libro de texto para sus planes de clase, analizar las producciones matemáticas de sus estudiantes, escuchar las sugerencias e ideas de sus colegas, etc.

La interacción se enmarca en una relación dialéctica que muestra cómo los procesos de instrumentación e instrumentalización pueden contribuir en la construcción de una interrelación entre el maestro y los recursos. Dicha interrelación, en el marco de una actividad intencional da origen a la producción de un documento[2]. El documento generado está asociado a un conjunto específico de recursos e integrado por una parte visible y tangible llamada usos y una parte no visible e implícita llamada esquemas de utilización (Sánchez, 2010b).

El concepto de documento conecta la práctica de un profesor con su sistema de creencias (Gueudet y Trouche, 2009), en este sentido los documentos son fundamentales en la actividad y el desarrollo profesional de los docentes, por lo que el trabajo en clase, y el trabajo de prever la clase son considerados como un tiempo de enriquecimiento documental.

Desde esta perspectiva la génesis documental representa la esencia misma del desarrollo profesional (Gueudete & Trouche, 2008), por un lado permite analizar las respuestas de los maestros como resultado de la resolución de tareas en particular, y por el otro permite analizar los recursos que el maestro incorpora en sus respuestas, es decir, permite focalizar la atención en la información que los procesos de instrumentación e instrumentalización arrojan durante la ejecución de una tarea en particular y utilizarla como una fuente de información para plantear las tareas subsecuentes, lo que puede constituirse en un *ciclo dinámico* en el cual la información que arroje la ejecución de una tarea particular será fuente importante para la reestructuración o planteamiento de la siguiente tarea.

La generación de lo que se ha denominado un documento, consigue desencadenar un proceso cíclico en donde éste puede participar incluso como

[2] Un documento es un conjunto de recursos asociados a esquemas de acción. Un ejemplo es el que se presenta en el trabajo de Gueudet y Trouche (2009, p. 205). Donde la profesora de matemáticas, después de buscar en diferentes recursos como libros de texto o una lista de ejercicios que ella ha utilizado previamente, construye un nuevo listado de tareas que utiliza en su clase.

parte de un nuevo conjunto de recursos en el marco del planteamiento y resolución de una nueva tarea, lo que dará lugar a un nuevo documento.

La integración de un nuevo recurso, en el marco de una nueva tarea, corresponde a un nuevo proceso de génesis que sugiere una forma continua de plantear tareas que promuevan conocimientos en los maestros y "rastrear" los desarrollos logrados por ellos.

De esta manera el enfoque documental constituye un proceso de doble vía en la que los maestros se apropian y/o modifican el conjunto de recursos con los que interactúan, y los formadores documentan la forma en que los recursos y las tareas ejercen influencia en la actividad profesional del maestro.

2.2 El Diseño basado en la investigación

Uno de los paradigmas emergentes para el estudio del aprendizaje en contexto es el diseño basado en la investigación (Brown, 1992; Collins, 1992). Se argumenta que éste puede ayudar a crear y ampliar los conocimientos sobre el desarrollo, la promulgación y la cimentación de ambientes de aprendizaje innovadores. Un colectivo de investigadores (Baumgartner, Et al., 2003) sustenta sus estudios en el diseño basado en la investigación, resaltan 5 características que son la base del paradigma.

1.-Los objetivos centrales de diseñar ambientes de aprendizaje y de desarrollar teorías, están entrelazados.
2.-El desarrollo y la investigación se llevan a cabo a través de ciclos continuos de diseño, aprobación, análisis, y rediseño (Cobb, 2001; Collins, 1992).
3.- Los diseños deben dar lugar a teorías que ayuden a comunicar implicaciones relevantes para los profesionales y a otros diseñadores educativos (Cf. Brophy, 2002).

4.- La investigación debe dar cuenta de cómo funciona el diseño en escenarios reales. No sólo debe documentar el éxito o el fracaso, si no también centrarse en las interacciones que permitan refinar la comprensión de los problemas de aprendizaje involucrados.
5.- El desarrollo se basa en métodos que puedan documentar y conectar procesos de publicación de resultados de interés.

Es importante destacar que éste paradigma de investigación va más allá de simplemente diseñar y probar intervenciones particulares, muestra un compromiso con la comprensión de las relaciones entre la teoría y la práctica y al mismo tiempo, sobre las intervenciones específicas, basadas en un diseño particular.

Baumgartner, Et. al. (2003) sugieren que el diseño basado en la investigación puede generar plausibles explicaciones causales, debido a su enfoque que vincula procesos y resultados en entornos particulares y productivamente vincularse con experimentos controlados de laboratorio o ensayos clínicos aleatorios.

En particular, el diseño basado en la investigación triangula múltiples fuentes y tipos de datos para conectar los resultados deseados y no deseados a los procesos de diseño y divulgación de teorías, utiliza métodos mixtos para analizar una intervención y refinar los resultados. Además los investigadores basados en el diseño de la investigación asumen un reto logístico que implica el mantenimiento de una asociación productiva de colaboración con los participantes en el contexto de la investigación. El trabajo toca muy de cerca los compromisos mantenidos por los investigadores y los maestros (Baumgartner. Et al, 2003).

El diseño basado en la investigación se ocupa de los problemas que se encuentran en el ejercicio de la profesión. En el marco de la investigación que aquí se presenta, el paradigma de diseño basado en la investigación ofrece algunas bondades al considerar el diseño de una intervención y sus hipótesis específicas como objetos de investigación, es decir, permite producir explicaciones de prácticas de investigación y/o de intervención innovadoras y proporcionar principios que se pueden adaptar para que otros los apliquen en una nueva configuración

Diseñar cíclica y sistemáticamente atendiendo los datos emergentes. Implica el desarrollo paralelo de medidas sensibles y cambiantes en el diseño, en atención al contexto, los resultados constituyen un marco explicativo que especifica las expectativas que se convierten en el foco de atención durante el siguiente ciclo de investigación, lo que permite al investigador o equipo de investigación profundizar en la comprensión del fenómeno que se investiga, mientras que el diseño esta en progreso.

Esto implica un compromiso con la generación y la revisión continua de datos que apoyen el análisis sistemático del fenómeno bajo investigación, como parte de un proceso iterativo, en donde la viabilidad de la siguiente tarea dependa de las conclusiones extraídas de los datos de la tarea anterior.

Asistir este proceso por el cual los datos se generan y las tareas se rediseñan significa diseñar tareas con base en resultados previos y que además generen resultados para hacer posible el trabajo con respecto a los siguientes ciclos de diseño. De esta manera el logro en los objetivos de intervención se caracterizará por la contingencia en el que los eventos anteriores posibilitan o limitan los acontecimientos que siguen. Este proceso requiere de una serie de eventos (llámese diseño y desarrollo de tareas), unidos por un proceso de análisis local, contingente y cíclico, que puede ser visto como parte de un patrón emergente de investigación.

2.3 La importancia de los aspectos colectivos

El pensamiento es una actividad fundamentalmente social

(Fleck, 1934)

Diversas tendencias propician que la profesión docente esté pasando desde una cultura del ejercicio individual al profesionalismo colectivo (Lieberman y Miller, 2001; Marcelo, 2002; Tesdesco y Tenti, 2002; Llinares, 1998a; 1998b; 2004; 2005). Tales tendencias inciden en la relación esencial entre el conocimiento y los contextos de uso, esta nueva visión involucra cambiar *la cultura organizacional tradicional* en la cual un profesor trabaja de manera aislada, refugiado en su clase (Marcelo, 2002).

En algunas investigaciones desarrolladas bajo el cobijo de la documentación colectiva (Gueudete & Troche, 2009; 2008a; 2008b; Sánchez, 2010b; Ruthven, 2009), se ha señalado la importancia de la contribución de otros colegas para desarrollar su propio material. Dicha contribución se genera cuando un grupo de maestros participa en un proyecto de trabajo común, en el que comparten el conjunto de recursos con el que interactúan para llevar a cabo dicho proyecto (Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b).

Es así que el estudio de la obra colectiva implica la inclusión de cuestiones culturales, territoriales, sociales, históricas, profesionales de comunicación, de intercambio, de participación en una tarea común, de producción de objetos y símbolos (Gueudet y Trouche, 2008b).

Según Gueudet y Trouche (2008b), la génesis documental de la comunidad, se define como el proceso de reificación y participación en el trabajo en las comunidades de maestros y sus efectos sobre el desarrollo profesional. Esta génesis por lo tanto incluye las producciones de los recursos comunes, los elementos comunes de uso de estos recursos y los patrones para cada miembro de la comunidad.

Probablemente no sea una producción única, común a todos los miembros de la comunidad, pero lo que se ha observado, en particular es que existen elementos significativos comunes en los documentos que se producen en un ambiente colectivo (Gueudet y Trouche, 2008b).

Aspectos individuales y colectivos se combinan en una génesis documental, la comunidad está involucrada (por lo menos) en cuatro aspectos para el desarrollo profesional.

1) Ayuda a proporcionar nuevos recursos para el profesor.
2) Contribuye a la formación de recursos docentes, enriqueciéndolos con nuevos elementos.
3) Ofrece nuevos tipos de situaciones o participa en la reconfiguración de clases de situaciones existentes.
4) Propone o utiliza los recursos críticos, y por lo tanto contribuye al desarrollo de los propios documentos (Gueudet y Trouche, 2008b).

Elementos de un trabajo de génesis documental colectiva:

1 La participación de los profesores en un proyecto de trabajo común.
2 Recursos compartidos.
3 La interacción con los colegas para llevar a cabo un proyecto.

(Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b).

Una de las aportaciones al desarrollo profesional de los docentes sobre la relación entre teoría y práctica ha consistido en reanimar y ampliar el conocimiento de la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje, en y a través de la práctica. El aprendizaje del profesor está enmarcado en un contexto social mediante el cual se apropian de recursos para pensar y actuar mediante la promoción de acciones como:

- Pensar sobre problemas comunes en la enseñanza de las matemáticas.
- Proponer y explorar propuestas metodológicas relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas.
- Analizar el impacto de los contenidos matemáticos en la vida.
- Dilucidar porqué los alumnos aprenden en algunos casos y en otros no.
- Pormenorizar las acciones que han conducido al éxito en la enseñanza y en el aprendizaje.
- Formar equipos de trabajo para conformar puntos de vista tendientes enriquecer las estrategias de enseñanza.
- Tratar de orientar todos los esfuerzos en un proyecto común de formación de los alumnos.

(Martínez, 2005; Garza, 2004; León, 2005; Llinares, 2005).

De esta manera los profesores aprenden en el desarrollo de sus actividades profesionales, en conversaciones con sus colegas, en la toma de decisiones cotidianas, en actividades de desarrollo profesional, etcétera. Por otro lado Covián (2005) resaltó que "la práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen" (citado en Cantoral, et al., 2006). En ese sentido cobra especial importancia el planteamiento de tareas[3], y su correlato de actividad, como elementos centrales del proceso comunicativo.

Tareas que exijan del profesor un proceso reflexivo personal-profesional sobre lo que sabe, lo que piensa, lo que hizo, lo que hace y lo que hará en su quehacer docente, en donde además se pueda subsidiar el proceso con resultados de la investigación en educación matemática.

Las filosofías personales, respecto a las matemáticas y su enseñanza, evolucionan en situaciones particulares de la enseñanza, siendo una construcción

[3] Consideradas con el objetivo de desencadenar la comunicación docente con vistas al proceso de desarrollo profesional.

personal en el sentido de que el uso del conocimiento por parte del profesorado en la gestión de situaciones de enseñanza de las matemáticas y la reflexión posterior genera nuevo conocimiento (Llinares, 1996).

2.4 El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. De la adquisición a la participación

> *La participación es uno de los elementos que caracterizan el desarrollo de los participantes en el seno de la práctica.*
>
> *(Winbourne y Watson, 1998).*

En años recientes la caracterización de un modelo basado en la expansión de la participación del profesorado en las prácticas de lo que constituye la enseñanza ha ganado bastante terreno en el campo del desarrollo profesional de los maestros de matemáticas en servicio, bajo el axioma de que los maestros deben entender y atender desde lo que están haciendo hoy, no de lo que se espera que estén haciendo hoy.

La noción de participación emerge del enfoque del aprendizaje situado como concepto vertebrador de la práctica escolar en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo profesional de los maestros que la enseñan (Winbourne y Watson, 1998). Esto también ha orillado a un cambio de una orientación del desarrollo profesional orientado en la adquisición, a una postura centrada en la participación focalizada (Ruthvein, 2010).

El concepto de participación aparece fuertemente en varios trabajos relacionados con el desarrollo profesional (Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b) como uno de los elementos clave para desarrollar un trabajo de desarrollo profesional con los profesores de matemáticas.

La noción de formación como participación se plantea como una herramienta suficientemente fuerte para abordar aspectos del aprendizaje profesional, bajo el argumento de que la investigación sobre la relación entre el conocimiento de los profesores acerca de los contenidos y prácticas pedagógicas es prometedor y que los maestros pueden aprender del conocimiento didáctico del contenido y de la práctica (Ruthven, 2007).

Aspectos como la implicación del docente, la relación de colaboración con sus colegas y de transferencia de aprendizaje, han sido destacados en investigaciones sobre la formación y desarrollo profesional del profesor. Villar (1990) testifica que el educador participa y se implica en las tareas de mejora de su práctica conforme observe que ellas se restituyen en su práctica, mejorándola. Además, acentúa que la -relación de colaboración con sus colegas- ayuda para avivar conocimientos Gueudet y Trouche (2009) subrayan tres factores ambientales que pueden afectar el trabajo de los profesores y precisamente uno de ellos es la participación:

1. Requisitos institucionales y restricciones (Chevallard, 2005).
2. El uso de las TIC
3. La participación en grupo de profesionales.

Según Gueudet y Trouche (2008b), los conocimientos de la comunidad están vivos y el compromiso es fundamental en la construcción del conocimiento en el marco de un proyecto de formación.

A decir de estos investigadores la formación de un compromiso general con objetivos compartidos, se logra mediante el compromiso y la participación, Gueudet y Trouche (2008b).

Para Wenger (1998), el desarrollo de una comunidad de práctica implica un equilibrio entre la participación y la cosificación, entrelazados en un proceso de negociación de significado. Es en este doble movimiento una comunidad de práctica se transforma en una comunidad donde se aprende el uno del otro. Dicho de otra manera, los programas de desarrollo profesional son más efectivos en cambiar prácticas en las aulas, cuando involucran la participación colectiva de una misma escuela, departamento o nivel educativo (Densimone, et al., 2002).

2.5 El papel de la filosofía en la enseñanza de las matemáticas

La forma en la que se toman las decisiones sobre cómo promover el desarrollo profesional en los profesores es reflejo de una comprensión del conocimiento considerado necesario para enseñar matemáticas y de la forma en la que se genera dicha comprensión (Llinares, 2005).

Ernest (1994a) sostiene que las diferencias existentes en la práctica de los profesores de matemáticas, no pueden explicarse de manera suficiente, aun reconociendo que es importante el conocimiento de las matemáticas. Es decir que tales diferencias pueden ser atribuibles a un particular sistema de creencias[4] sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje; lo cual constituye, en palabras del propio Ernest, los rudimentos de una cierta filosofía personal de las matemáticas que los profesores mantienen, aun muchas veces de forma no articulada y coherente.

En la actualidad, el papel de la filosofía continúa siendo, desde luego, dar cuenta de la naturaleza de las matemáticas, sin embargo las perspectivas son mucho más amplias pues toman en cuenta tanto aspectos externos –la historia, la génesis y la práctica de las matemáticas–, como aspectos internos, el ser (ontología) y el conocer (epistemología).

[4] Pueden presentarse conscientes o inconscientes; como conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias en cuanto a la disciplina.

Actualmente la enseñanza de las matemáticas es un campo interdisciplinario de estudio e investigación basado en la intersección de los campos de educación, de las matemáticas y filosofía de las matemáticas. Esta última se ha utilizado para dar cuenta de un campo de investigación que intenta mostrar cómo están constituidas las prácticas de enseñanza y aprendizaje de ellas mismas.

Es decir, el campo de la filosofía de las matemáticas ha dejado de preocuparse tan insistentemente sobre los problemas de fundamentación, para enfocar su atención en el carácter cuasi-empírico[5] de la actividad, así como en los aspectos relativos a la historicidad e inmersión de las matemáticas en la cultura (Kilpartrick y Sierpinska, 1998; Bicudo, et al., 2006; Ernest, 1991; Wiersma, 2001).

Algunas de las preguntas centrales tratadas por este campo son: ¿Cómo las matemáticas se relacionan con la sociedad? ¿Qué asunciones fundamentales son la base de las matemáticas que se enseñan y que se aprenden? ¿Cómo las filosofías de las matemáticas se ligan a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuál es el estado de la educación de las matemáticas como campo del conocimiento?

Paul Ernest (1994a) ha propuesto una reconceptualización del papel de la filosofía de las matemáticas, que tenga en cuenta la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de éstas en la ciencia y en la tecnología, y el hacer matemático a lo largo de la historia.

[5] Lakatos (1976)

Derivaciones conceptuales de la filosofía con referencia a la enseñanza de las matemáticas.	
Filosofía.	La filosofía de alguna área o actividad puede ser entendida como sus objetivos o razón de ser (Ernest, 2007).
Filosofía de la educación matemática.	Se refiere a los objetivos o razón de ser de la práctica de la enseñanza de las matemáticas (Ernest, 2007).
Filosofías personales respecto a las matemáticas y su enseñanza.	Marco general epistemológico y ético, que considera el impacto de las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con sujeción a las limitaciones y oportunidades del contexto social (Enest, 1994a).
Filosofías implícitas	Resultado de otras conductas implícitas de los profesores, de la lectura de textos científicos con referencia educativas propias de la cultura de su tiempo (Spagnolo, 2008).

Tabla II.1

Según Ernest (1994a) el sujeto edifica sus filosofías con base en su experiencia y luego éstas se ajustan al ser sometidas a nuevas experiencias con el mundo y la sociedad, plantea dos ideas centrales: Origen empírico y evolución social del conocimiento matemático.

Los procesos de dotación de significado, que los maestros pueden generar, están determinados por lo que ellos ya conocen y creen (filosofía personal sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas) (Llinares, 2004). Entonces la práctica matemática descansa en el ir y venir entre el conocimiento subjetivo y el objetivo, definido por el sostén sociogremial. Si bien esta posición define constricciones empíricas y sociales, el énfasis se pone en la parte social.

Las filosofías personales vistas como un marco general epistemológico y ético, evidentemente tienen un carácter integrador, donde las creencias o concepciones, conocimientos, etc. sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se amalgaman de manera holística para integrarla. Desde esta perspectiva el conocimiento teórico (saberes de referencia) y las características del conocimiento generado en la práctica filosofía personal[6] (Ernest,1994) respecto a la enseñanza de las matemáticas) se constituyen en componentes de suma importancia en los procesos de formación y desarrollo profesional (Llinares, 1998b).

La integración de ambos, es el principal propósito desprendido del proceso de desarrollo profesional, apoyado en la experiencia, la reflexión sobre la experiencia y el conocimiento teórico (Ponte, 1994).

A continuación se presentan las directrices principales y las implicaciones para la construcción de un modelo de desarrollo profesional como el que se intenta en el presente trabajo de investigación.

[6] (Ernest, 1994).

Directrices principales	*Implicaciones para la construcción de un entorno de desarrollo profesional*
Las filosofías personales, son producto de la organización del mundo, se acomodan a restricciones impuestas por la realidad física y social.	Una fuente muy importante para el aprendizaje de los profesores la constituye el ejercicio de su profesión.
La reorganización de las filosofías personales se realiza a través de ciclos de teoría-predicción-prueba-fracaso-acomodación y nueva teoría.	Compartir y criticar el conocimiento teórico desde la práctica de enseñar es un medio que contribuye a la integración de ambos.
El sujeto edifica sus filosofías personales con base en su experiencia y luego éstas se ajustan al ser sometidas a nuevas experiencias con el mundo y la sociedad.	El crecimiento profesional de los docentes puede apoyarse mediante el ejercicio reflexivo y compartido de la tarea de enseñar
(Ernest, 1991; 1994; 2007).	

Tabla II.2

2.5.1 Evolución de filosofías personales respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Los estudios sobre la formación y el desarrollo profesional de los maestros de matemáticas se han desarrollado bajo la adopción de diferentes posturas, sin embargo a pesar de ello, estos estudios cuentan con una intersección muy importante cuyos elementos esenciales se enumeran a continuación:

1. Reconocen que el profesor necesita desarrollar sus capacidades de intuir, imaginar, plantear hipótesis, reflexionar, analizar, organizar y seleccionar, para una toma de decisión consciente.

2. Reconocen la necesidad de generar nuevas formas autónomas de búsqueda y apropiación de conocimiento, con base en el desarrollo de actitudes de solidaridad, cooperación y reciprocidad.

3. Resaltan la necesidad de propiciar una filosofía del desarrollo profesional en donde se debe estar siempre dispuesto a reconstruir en la medida en que entiende la relatividad de lo producido.

Puesto que los objetivos y enfoques de la educación matemática están sometidos a cambios constantes y profundos, la primera característica considerada es que no existe un punto final en el aprendizaje, nunca se llegará a decir que la formación profesional ha llegado a su fin, pues a lo largo de los años el profesor va a tener que ampliar su conocimiento.

Según Llinares (1998b) el conocimiento profesional es generado en situaciones concretas de enseñanza y constituye una construcción personal, en el sentido de que su uso para gestionar situaciones de enseñanza de las matemáticas, en conjunción con la posterior reflexión, puede generar nuevo conocimiento.

Ruthven (2007) se refiere a éste sistema como una matriz de conocimientos profesionales, reseña que en la planificación para enseñar un tema, y en la realización de clases, los maestros se basan en una matriz de conocimientos profesionales, adquirida en el curso de su propia experiencia de aprendizaje y de enseñanza del tema, o recogidos de diversos materiales curriculares disponibles.

La filosofía personal del profesor respecto a las matemáticas y su enseñanza es una integración de diferentes dominios de conocimiento[7] (García & Llinares, 1998) en las diferentes tareas de enseñanza[8] que el profesor desarrolla. Por su parte Llinares (1998b) subraya que el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas no es ni artesanal (procedente únicamente de la reflexión sobre la práctica) ni científico (procedente únicamente de investigaciones adscritas a un paradigma racional), es decir en el conocimiento profesional conviven ambas.

De esta manera se concibe al maestro que enseña y sus necesidades de aprendiz para enseñar, bajo dos supuestos básicos:

1. El maestro posee conocimientos tanto técnicos como conceptuales para enseñar matemáticas.
2. El cambio en la organización de los conocimientos profesionales está en función de la participación en actividades relacionadas con tareas que provoquen procesos de incertidumbre pedagógica y de comunicación con sus colegas.

(Llinares, 2005).

2.5.2 Consideraciones filosóficas y epistemológicas respecto a la enseñanza de las matemáticas.

Al menos en los últimos treinta años la comunidad internacional de expertos en didáctica de las matemáticas, han colocado a su enseñanza en un escenario de cambios muy profundos, claro está que vivimos aún actualmente una situación de experimentación y cambio. Los profesores han sido parte de esta revolución filosófica y epistemológica en torno a la enseñanza, el aprendizaje y la investigación en matemáticas, en muchas de las investigaciones en torno al saber

[7] De matemáticas, de diferentes modos de representación para los conceptos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje, sobre los estudiantes como aprendices de matemáticas, sobre el currículum, etc.
[8] Replicar, aplicar, interpretar y asociar; priorizar, dilemas y tensiones, etc.

docente se percibe que los profesores, refieren, aunque tal vez no de manera explícita, elementos múltiples relacionados con la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 1996; Sowder, 2007; Llinares & Krainer, 2006). En este sentido las consideraciones filosóficas y epistemológicas son centrales a la práctica docente relacionada con las matemáticas y por ende a la investigación en educación matemática.

Parece apropiado en este momento efectuar un rastreo para el asunto relacionado con la filosofía de las matemáticas y su enseñanza, a razón de identificar los fundamentos que constituyen los supuestos bajo los cuales los profesores realizan su trabajo. Históricamente han existido dos vías principales de discusión. (Absolutista y falibilista). Por supuesto, como cualquier análisis hecho en términos de dicotomías, la cuenta antes dicha está sobre simplificada.

Las filosofías o creencias respecto a las matemáticas y su enseñanza, de los matemáticos, de los investigadores en educación matemática y sobre todo de los profesores de matemáticas, muy rara vez caen estrictamente en cualquiera de las dos categorías, sin embargo, empezaremos con la exploración de éstas, e iremos distinguiendo componentes básicos que en el camino derivaran en otros tipos ideológicos. Tal simplificación puede sugerir inicialmente los elementos teóricos importantes que intervienen al enseñar y aprender matemáticas y sugerirnos caminos en términos de la propia investigación.

La vía Absolutista

Las perspectivas absolutistas ven a las matemáticas como cuerpo objetivo, absoluto, cierto e incorregible de conocimiento, basado en las fundaciones de la lógica deductiva (Ernest, 1991).

La vía absolutista considera a las matemáticas como universales y objetivas, cuyas verdades son descubiertas con la intuición del matemático y después son establecidas por la prueba (Ernest, 1996). Así según el absolutismo el conocimiento matemático es atemporal, aunque podemos descubrir nuevas teorías y verdades, la historia de las matemáticas es inaplicable a la naturaleza y a la justificación del conocimiento matemático.

Cabe aclarar con base en los escritos de Ernest (1996) que estas perspectivas no están referidas *para describir* matemáticas o conocimiento matemático. Si no que se refieren al proyecto epistemológico de proporcionar sistemas rigurosos al conocimiento matemático, donde la certeza, el control y la previsibilidad se presumen como base del conocimiento legítimo y como el acceso a una realidad verdadera.

La asunción dogmática principal es que las matemáticas son realmente una empresa a priori (Handal, 2003), infalible, con una metodología que podría ser delineada perfectamente y cuyo desarrollo será favorable a través de un sistema formal y universal.

En resumen las perspectivas absolutistas proyectan una imagen de las matemáticas rígida, fija, lógica, absoluta, inhumana, fría, objetiva, pura, abstracta, ultra-racional, con atención a los principios de universalidad, y con independencia de la historia, de la identidad, de intereses y de circunstancias (Ernest, 1996; Walshaw, 2002). Las principales se bosquejan a continuación:

El positivismo

Es una corriente que afirma que el único conocimiento auténtico es el conocimiento científico, y que tal conocimiento solamente puede surgir de la afirmación positiva de las teorías a través del método científico. Según esta escuela, todas las actividades filosóficas y científicas deben efectuarse únicamente en el marco del análisis de los hechos reales verificados.

La tradición Platonista

Sugiere entidades afuera que esperan para ser descubiertas, pero como parte de una realidad ideal. Los objetos platónicos no se mezclan con el mundo de los mortales.

El realismo

El realismo hace referencia a una posición que considera las formas platónicas, o conceptos universales como reales, no hay diferencia, ni puede haber, entre el objeto de conocimiento y la cosa en sí, al igual que el platonista, el realista considera que los objetos matemáticos son independientes del tiempo y la cultura. Los objetos reales gobiernan el mundo de los mortales (Radford, 2006).

El logicismo

Es básicamente una forma de realismo Platónico en el cual las matemáticas se consideran como sistema del reino abstracto que existe externamente a la creación humana. Según los logicistas, todos los conceptos matemáticos se pueden reducir a las características abstractas que se pueden derivar con principios lógicos (Handal, 2003).

El formalismo

Considera significantes sin significados, comparte la opinión de que la lógica es necesaria, no obstante discuten que el conocimiento matemático está causado por la manipulación de los símbolos que funcionan con reglas y fórmulas prescritos y cuya comprensión se debe aceptar a priori (Handal, 2003).

La perspectiva euclidiana

Considera a las matemáticas como un cuerpo objetivo, absoluto, rígido y jerárquico de conocimientos, con el foco limitado a las fundaciones del conocimiento matemático puro y a la existencia.

La teoría conductista

Demanda la transferencia del conocimiento de un individuo a otro en ambientes educativos. Se centra en la manipulación de condiciones externas para modificar los comportamientos que conducen al aprendizaje. Además el aprendizaje se considera un producto de las recompensas y los refuerzos aplicados al estudiante. Asimismo, el énfasis está en respuestas correctas.

El racionalismo

Los racionalistas del siglo XVII, como Descartes y Leibniz consideraban que las matemáticas pueden practicarse hasta con los ojos cerrados, pues la mente no necesita el concurso de los sentidos ni de la experiencia para alcanzar las verdades matemáticas: los principios que necesitamos para entender los objetos o para percibir sus propiedades, las leyes eternas de la razón, son "principios internos", es decir que están en nuestro interior (Leibniz, 1966, pp. 34-37, citado en Radford, 2006b).

La Vía Falibilista.

Las perspectivas falibilistas acentúan la práctica de las matemáticas y el lado humano. Ven a las matemáticas como el resultado de procesos sociales, concebidas como disciplina falible, empírica o cuasi-empírica. El conocimiento matemático se entiende para ser falible y abierto a la revisión, en términos de sus pruebas y sus conceptos (Lakatos, 1976 en Ernest, 1996a), es decir, se niega que exista una cosa tal como la verdad absoluta, lo cual no significa que algo o todas las matemáticas puedan ser falsas.

La opinión falibilista ve a las matemáticas como proceso incompleto y eterno, corregible, cambiando, con las nuevas verdades matemáticas que emergen como subproductos de invenciones (Ernest, 1996). En el falibilismo los procesos y los productos de las matemáticas son considerados como parte esencial de la disciplina.

Los métodos matemáticos por lo tanto no son perfectos y no pueden demandar verdad absoluta, la verdad matemática no absoluta es pariente porque de hecho la verdad es dependiente del tiempo y del espacio. Las matemáticas se asocian a los sistemas de prácticas sociales, cada uno con su historia, las personas, las instituciones y las localizaciones sociales, las formas simbólicas, los propósitos y las relaciones de sinergia (Ernest, 1996).

En resumen la vía falibilista de las matemáticas, proyecta una imagen vital de las matemáticas, que se experimentan con un carácter humano, personal, intuitivo, activo, de colaboración, creativo, de investigación, cultural, histórico, de relación con las situaciones humanas, etc. Algunas perspectivas falibilistas se bosquejan a continuación.

El método de pruebas y de refutaciones de Lakatos

Se postula como teoría de la invención histórica, y también, implícitamente, como teoría de la creación matemática del conocimiento.

El primer teorema del estado incompleto de Godel

Ha demostrado que el axiomatismo no puede capturar las verdades de la mayoría de los sistemas matemáticos, proyecta una matemática basada en situaciones humanas.

El constructivismo

La teoría de la etapas de Piaget llamada por algunos autores constructivismo radical (Ernest, 1994a; Anderson, Reder y Simon, 2001) proyecta la construcción idiosincrásica individual del significado en términos de esquemas cognoscitivos, y proyecta el aprendizaje por medio de los procesos de desequilibrio; asimilación y acomodación, además jerarquiza el desarrollo conceptual al aprender matemáticas.

El constructivismo social

Actualmente el constructivismo social ha ganado renombre, pues reconcilia teóricamente los procesos sociales y la fabricación individual del sentido como piezas centrales y esenciales para aprender matemáticas (Ernest, 1994b).

Constructivismo social con base en una teoría Piagetiana de la mente

Una teoría neo-Piagetiana del constructivismo adopta dos estrategias. Primero, salir de una posición radical del constructivismo, agregando aspectos sociales de interacción en el salón de clase y segundo, adoptar dos armazones teóricos que obran recíprocamente, uno intraindividual y otro interpersonal.

Sin embargo, se da la prioridad a los aspectos individuales de la construcción del conocimiento, reconociendo el importante lugar secundario de la interacción social, donde se pone énfasis especial en la negociación de las normas del salón de clase. Esta posición social esta basada en “principios radicales del constructivismo y en una integración compatible de la dimensión social en procesos individuales de la construcción (Ernest, 1991). Es decir, se plantea la construcción activa del conocimiento con base en experiencias y en conocimientos anteriores, conjugado con la experiencia y la interacción con los mundos físicos y sociales.

Constructivismo social con base en una teoría de Vygotskiana de la mente

La definición de un segundo grupo de perspectivas sociales del constructivismo se basa en una teoría social de la mente. Lerman (1992) propuso la sustitución de la teoría Piagetiana por una teoría Vygotskiana de la mente, para considerar adecuadamente el lenguaje y la dimensión social.

Bartolini-Bussi (1991, 1994) propuso una forma de constructivismo social basada en la actividad, donde intervienen, mente, interacción, conversación, actividad y contexto social como formación de un entero correlacionado (Ernest, 1994). La mente se ve como social y conversacional, porque el pensamiento individual es formado por una conversación interna, y porque el pensamiento individual subsecuente se estructura por esta vía; y un cierto funcionamiento mental es colectivo.

Teoría de la cognición situada

Una de las líneas teóricas actuales ha sido la llamada teoría de la cognición situada que se suscribe a la visión de que la cognición está producida en prácticas, es decir, este cuerpo de trabajo se esfuerza para localizar el saber matemático en la actividad diaria (Lave & Wenger, 1991).

La cognición situada proporciona un acercamiento a la generación del conocimiento que confía en el contexto, donde los procesos de aprender y de entender están socialmente situados y el saber se genera en la práctica, a través de un sentido de la situación social y de las actividades en las cuales el saber ocurre.

La cognición es dialéctica, dentro de la historia de cada quien, la tradición y la cultura son la base para la verdad, el aprender matemático es entendido a través de una red de relaciones entre la gente. Es una disciplina que depende para su credibilidad de conocer a la gente, se organiza alrededor de las construcciones variables de la realidad matemática, tiene que ser un avance significativo en precedente.

La teoría de la objetivación

Sugiere que los objetos matemáticos son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos. De manera más precisa, los objetos matemáticos son patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo de la práctica social (Radford, 2006). Para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura, la adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados.

Para la teoría de la objetivación, el funcionamiento del salón de clases y el papel del profesor no se limitan a buscar el logro de la autonomía. Más importante es aprender a vivir en comunidad, en un sentido amplio, aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, a ser-con otros (Radford, 2006).

2.5.2.1 Perspectivas filosóficas que permean el enfoque para la enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria.

La actividad de enseñar y aprender matemáticas ha empezado a ser concebido como un proceso sociocultural, es decir, se enfatiza la relación entre el conocimiento y las situaciones en las que este se usa y se adquiere. En el plan de estudios 2006 se plantea que mediante el estudio de las matemáticas se busca que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas (SEP, 2006b).

El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que sustentan los programas de matemáticas para la educación secundaria consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar, de manera flexible, para solucionar problemas.

La participación colaborativa y crítica resulta de la organización de actividades escolares colectivas en las que se requiera que los alumnos formulen, comuniquen, argumenten y muestren la validez de enunciados matemáticos, poniendo en práctica las *reglas matemáticas socioculturales del debate* (Coob, 2005) que los lleven a tomar las decisiones más adecuadas a cada situación (SEP, 2006b).

Los avances logrados en el campo de la didáctica de la matemática en los últimos años dan cuenta del papel determinante que desempeña *el medio*, entendido como la situación o situaciones problemáticas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretende estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir nuevos conocimientos y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje. Con ello se intenta ir más allá de los aprendizajes esperados y, por lo tanto, de los contenidos que se estudian en cada grado; se trata de una perspectiva falibilista (Handal, 2003) que privilegia el desarrollar lo que algunos autores llaman competencias matemáticas.

Encontramos entonces que aprender matemáticas, supone tener la capacidad del uso y la generación de conocimientos mediante interacciones para hacer y resolver determinadas tareas. El conocimiento es, histórico y culturalmente constituido. Lo cual tiene su reflejo en las teorías derivadas del constructivismo conocidas como socio constructivistas que reclaman el sentido matemático como un producto de procesos sociales, en particular, como un producto de interacciones sociales, en el cual se interpretan los objetos bajo estudio en contextos familiares en donde se da la negociación (Ernest, 1999; Radford, 2000).

El entorno es visto como la base en el cual se van formando los estudiantes y los conocimientos en el marco de una diversidad de sistemas constituidos, (sociales, económicos, materiales, conceptuales y simbólicos) cuyo entendimiento se va adquiriendo como resultado de su participación en ellos (Cobb, 2005). Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones (SEP, 2006b).

La metodología didáctica de los programas de Matemáticas está orientada al desarrollo de estas competencias y por eso exige dejar atrás la postura tradicional que consiste en dar la clase para:

- Lograr que los alumnos asuman la responsabilidad de buscar al menos una manera de resolver cada problema.
- Lograr que los alumnos formulen argumentos que les den sustento al procedimiento y/o solución encontrados.
- Lograr que los alumnos expresen y representen información matemática contenida en una situación o un fenómeno.
- Lograr que los alumnos usen eficientemente procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con el apoyo de la tecnología o sin ella. (SEP, 2006b).

Dichos argumentos corresponden, según Handal (2003) a tres niveles distintos asociados con la perspectiva falibilista: para explicar, para mostrar o justificar informalmente o para demostrar.

2.6 Generalización de patrones y pensamiento algebraico

> *El sector formal de la generalización es la expresión de la generalidad.*
>
> *(Kaput & Blanton, 2005)*

La generalización se ha ubicado como un problema central tanto en psicología como en didáctica de las matemáticas. Por un lado en psicología, se alude a un proceso mental (Duvinsky, 1991) y por el lado de la didáctica de las matemáticas se alude al producto derivado de tal proceso (Radford, 2003; Kieran, 1996), desde el punto de vista educativo ambos son importantes.

El significado de la generalización que aparece en investigaciones recientes, descansa en la posición de la didáctica de las matemáticas con base en la idea de que la generalización consiste en la expresión de las relaciones matemáticas a través de la utilización de literales (Kieran, 2006). Implica además la capacidad de interpretar cómo un símbolo representa una entidad general indeterminada y puede asumir cualquier valor (Ursini y Trigueros, 2001).

Uno de los rasgos que pueden constituir el núcleo de la generalización de un patrón, a saber, es la capacidad de darse cuenta de algo en general en lo particular (Love, 1986; Mason, 1996); Kieran (1989) sin embargo, reivindica que este rasgo por si solo puede no ser suficiente para caracterizar la generalización algebraica de los patrones. Sostuvo que además de ver lo general en lo particular, “uno debe también ser capaz de expresarlo en forma algebraica".

Por lo general, la generalización de patrones como una vía para el álgebra se basa en la idea de una correspondencia natural entre el pensamiento algebraico y la generalización. Kieran (1989) tomó este argumento y sostuvo que pensar algebraicamente es más que pensar en lo general. Es pensar en lo general o generalizado de una manera que hace que sea distintivamente algebraica en su expresión. Por ello un componente necesario de la generalización es el uso del simbolismo algebraico para razonar sobre y para expresar esa generalización (Kieran, 1989).

Generalizar descansa en la capacidad de captar algo en común observado en algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que lo común se aplica a todos los términos de S y ser capaz de utilizarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S, en otras palabras, la generalización se basa en darse cuenta de una comunidad local que luego se generalizó a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de elementos de la secuencia que se mantienen más allá del campo de percepción (Radford, 2006). La expresión directa de los términos de la sucesión requiere la elaboración de una precisión de un esquema de reglas más en términos de Kant (Radford, 2005).

La objetivación del conocimiento es un proceso gradual respaldado por una distinción dinámica entre lo mismo y lo diferente, hay varias maneras de buscar lo que puede calificarse como lo mismo y lo diferente, basados en lo que Radford (2006) denomina medios semióticos de objetivación (objetos, gestos, signos y otros recursos semióticos). Es evidente que el sentido de generalidad logrado a través de palabras y gestos no es el mismo que el obtenido a través de una fórmula o un gráfico. La objetivación de la estructura matemática detrás de un patrón que fue mediado por palabras y gestos puede ser profundizado por una actividad mediada a través de otros tipos de signos.

Lo general sólo puede llegar a ser a través de los signos. Esta es la razón de que objetivar algo es hacer que entre en el mundo de la representación, es decir, que aparezca dentro de un proceso semiótico.

Hablar de la generalización es hablar de dos cosas: (1) lo que se generalizó (el objeto de generalización) y (2) el objeto generalizado (Kieran, 1989); el proceso que va de uno a otro incluye dos componentes relacionados entre sí. El primero es darse cuenta de una comunidad en algunos términos particulares dados. La segunda es la de formar un concepto -un general- generalizando el carácter común notado a todos los términos (Radford, 2006). Para que una generalización de patrones sea algebraica, se requiere de un tercer componente: que el género u objeto generalizado se cristalice en un esquema, es decir, una norma que prevé una expresión para cualquier término de la secuencia.

Dos elementos intervienen en la generalización, un elemento fenomenológico relacionado con el descubrimiento de la generalidad y por el otro lado, un elemento semiótico relacionado con la expresión de lo que se nota en el ámbito fenomenológico, estos dos elementos están relacionados entre sí y pueden ser investigados a través de dos construcciones teóricas objetivación del conocimiento y recursos semióticos (Radford, 2006). Veamos cómo algunos autores representativos en el campo coinciden con la idea en mayor o menor grado

¿Qué es la generalización?	
Una regla matemática acerca de las relaciones o propiedades.	Carpenter, Frank & Levi, 2003.
La creación de una norma, la identificación de elementos comunes.	Dreyfus, 1991; Kaput, 1998.
El proceso de ampliación o expansión de la gama de un razonamiento más allá del caso o los casos estudiados.	Dubinsky, 1991.

Tabla II.3 (Parte 1)

El levantamiento del razonamiento o la comunicación a un nivel en el que el enfoque ya no es sobre los casos o situaciones de sí mismos, sino más bien sobre las pautas, procedimientos, estructuras, y las relaciones en y entre ellos.	Kaput, 1999.
La generalización matemática en su concepción clásica de mapa o plan para la acción define y señala rutas para actuar matemáticamente, sin ser esencialmente procedimientos o métodos y permite verificar hipótesis según las relaciones producidas que incluyen, en forma explícita o implícita, el cuantificador universal.	González, 2002.
Consiste en la aplicación de un esquema existente a una colección más amplia de objetos o fenómenos. Esto supone que el esquema ha sido generalizado, el esquema sigue siendo el mismo, únicamente se ha ampliado, el rango de aplicabilidad. A esta generalización se le denomina Generalización extensiva.	Piaget, 1961.
Generalización es el uso del simbolismo algebraico para razonar y expresar la generalización.	Kieran, 1989.

Tabla II.3 (Parte 2)

La generalización de un patrón se basa en la capacidad de captar algunos elementos comunes de una secuencia S, siendo conscientes de que esta coincidencia se aplica a todos los términos de S y ser capaz de usar la información para plantear una expresión directa, independiente de S.	(Radford, 2006)

Tabla II.3 (Parte 3)

La generalización es un proceso al cual algunos investigadores en el campo de la educación matemática le han dedicado tiempo para su indagación, por ejemplo Mason (1996) sostiene que la generalización es la vida de las matemáticas y que el algebra es el lenguaje con el cual ella se expresa. Por otro lado Radford (2003) llama la atención sobre los procesos de validación de la generalización y del tipo de generalización según las acciones implicadas.

La generalización en un sentido amplio se distingue por el uso del modo simbólico para designar a sus objetos, los cuales sólo pueden estar representados indirectamente, a través construcciones basadas en signos bajo las siguientes características:

1.- Sentido de indeterminación que hace posible, por ejemplo la sustitución de una variable desconocida por otro objeto matemático propio de la base algebraica (objetos como incógnitas, variables y parámetros).

2.- Arte analítico (Vieta y otros matemáticos en el siglo XVI) el cual se refiere al análisis de los objetos matemáticos y sus relaciones (Radford, 2006).

En las conceptualizaciones presentadas hay dos elementos que resaltan, por un lado, hay un elemento fenomenológico relacionado con la captación de la generalidad. Por el otro, hay un elemento semiótico relacionado con la expresión a través de signos. Algunos investigadores también han explorado cómo la generalización se desarrolla a través de múltiples agentes en un contexto social y matemático (Davydov, 1990).

2.6.1 Etapas de la generalización matemática

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas, a medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyarlo y comunicarlo. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central (Godino, 2003).

Uno de los autores más representativos en el ámbito de la generalización es Mason quien planteó cuatro etapas para desarrollar la generalización proporcionando así un acercamiento a los sistemas algebraicos y su manejo simbólico: “Ver”, hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común. “Decir” ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar”, es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos). “Probar la validez de las fórmulas”, para que una fórmula tenga validez debe probarse de diferentes formas. Pero también es importante que la regla sea correcta y para eso, se necesita tener una noción de lo general, lo cual involucra la idea de cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general (Mason, 1985).

Para mostrar lo general es necesario reestructurar el ejemplo particular y señalar características generales, lo que se logra observando características específicas en cada caso y haciendo notar que, a pesar de que cambien, lo hacen de manera regular (Mason, 1985. p. 17).

Etapas de la generalización matemática	
Según los siguientes investigadores la generalización se favorece a través de la articulación de una serie de etapas	Etapas.
Mason, 1985.	1. Percibir el patrón.
	2. Expresar el patrón.
	3. Registrar el patrón.
	4. Probar la validez de las reglas o formulas.
Hernán González, 2002.	Primera etapa (Aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos).
	Segunda etapa. (Búsqueda sistemas inter-relacionados).
	Tercera etapa. (Utilización de los conocimientos).
García y Martinón, 1997.	Nivel 1 (Actividad de procedimiento):se reconoce el carácter recursivo e iterativo del patrón, se usa para calcular cuestiones introductorias.

Tabla II.4 (Parte 1)

	Nivel 2 (Comprensión de procedimiento o Generalización local): implica establecer un invariante, es decir que la regla de cálculo derivada de las acciones realizadas para calcular un término específico, se aplique al cálculo de otros términos.
	Nivel 3 (Comprensión conceptual o Generalización global): La regla desarrollada y usada en un problema concreto se convierte en un objeto que permite transferir la acción y el invariante a un nuevo problema que ha sido reconocido como similar.

Tabla II.4 (Parte 2)

El primer encuentro con los procesos de generalización parte de la identificación y comunicación de patrones o de relaciones, a partir del análisis de situaciones particulares cobra importancia el que el estudiante tenga algo que comunicar.

Un patrón discernible deriva su utilidad de su capacidad de denotar relaciones y sucesos que acaecen en el mundo; pero en el mejor de los casos una representación simbólica es un cuadro incompleto y distorsionado del medio ambiente, que correlaciona los pensamientos con la información que entregan los sentidos y con los actos motrices y sus efectos (Anderson, et al., 2001).

Es importante rescatar que la identificación de patrones requiere del reconocimiento de semejanzas y diferencias, y la detección de los rasgos fundamentales que conforman una estructura. El trabajo con patrones incluye procedimientos de distinto orden de dificultad, que influyen en el proceso de generalizar:

- De reproducción (copia de un patrón dado).
- De identificación (detección de la regularidad).
- De extensión (dado un tramo de la sucesión el alumno debe extenderla de acuerdo al núcleo que la rige).
- De extrapolación (completamiento de partes vacías).
- De traslación (utilización del mismo patrón sobre propiedades diferentes, Por ejemplo: cambiar formas por colores; cambiar una representación visual por una auditiva, etc.).

2.6.2 Clasificación de la Generalización

Radford (2006) distingue 3 niveles de generalización y sus modos correspondientes de expresión:

- De hecho (la indeterminación queda sin nombre; la generalidad se basa en las acciones realizadas en los números, las acciones se hacen aquí de las palabras, los gestos y la actividad perceptual).
- Contextuales (lo indeterminado se hace lingüísticamente explícito).
- Simbólicas. (lo indeterminado se materializa con el uso del simbolismo), este logro sólo puede ser posible a través de una transformación de la forma en la que las letras significan una fórmula.

Además diferentes autores han establecido una clasificación de acuerdo a sus características y los procesos a los que alude

Contextual	A través de acciones.	Radford, 2003.
	A través del lenguaje	
Simbólica	A través de símbolos matemáticos	
Aritmética	La generalización de las operaciones, sus propiedades y en algunos casos, el razonamiento acerca de ello.	Kaput, 2005.
Algebraica	Expresión simbólica de la regla que permite obtener el enésimo termino de la sucesión.	
Cercana	Implica el cálculo de un término cercano, que puede encontrarse continuando la serie, dibujando o escribiendo los números hasta encontrar el buscado.	Stacey, 1989.
Lejana	Implica el cálculo de un término lejano para el cual resulta tedioso y cansado seguir la estrategia de la generalización cercana, por lo cual se tiene que recurrir al planteamiento de una regla.	

Tabla II.5

2.7 Integración de la matriz de desarrollo profesional

Las directrices emanadas de diferentes estudios desarrollados en el campo de la educación matemática que parecen tener un mayor poder para proponer un modelo de desarrollo profesional para los maestros en servicio son:

- El fenómeno de la recuperación de experiencias y conocimientos profesionales (Hoyos, 2009a; 2009b; Callejo et al., 2007; Vaillant y Marcelo, 2001; Bairral, et al., 2001; Goffree y Oonk, 2000; Llinares, 1999a; 1999b).
- La documentación del trabajo docente (Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b; Sanchez, 2010a).
- La construcción social del conocimiento (Guin y Trouche, 2008; Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b; Callejo, et al., 2007)
- El planteamiento de ciclos en la investigación (Cobb, 2001; Collins, 1992; Baumgartner, et al., 2003).

El planteamiento inicial, desprendido de lo anterior, radica en conocer y comprender los tipos de conocimiento utilizados durante el proceso de intervención de los propios maestros en un tópico especifico, bajo el supuesto de que el maestro posee un sistema de conocimientos dinámico, llamado filosofía personal respecto a las matemáticas y su enseñanza (Ernest, 2007).

En tal sentido el cómo el maestro piensa un determinado tópico de las matemáticas y su enseñanza no es una cuestión que pueda ser indiferente en un espacio de formación profesional. Se ha tratado de incorporar el trabajo que se presenta, a una sólida tradición de investigación que sostiene que lo que piensa el profesor sobre los aspectos relacionados con su práctica profesional[9], constituye un elemento de partida clave para poder interpretar, entender y modificar su práctica en las aulas, y más aún, para poder aportar elementos conceptuales para el desarrollo de su propia filosofía respecto a las matemáticas y su enseñanza. Con base en tal reconocimiento se pretende focalizar la atención en los elementos de la formación que requieran apuntalarse y diseñar tareas que permitan problematizarlos como resolución de cuestiones profesionales.

Identificación de las filosofías personales puestas en acción. (Focalización) → ***Diseño de "tareas profesionales"***

Esquema II.2

El interés por develar las filosofías respecto a algún tópico de las matemáticas y su enseñanza, radica en focalizar los elementos que necesitan un proceso de andamiaje y someterlos a un proceso de reflexión mediante el planteamiento de tareas de desarrollo profesional que incorporen los planteamientos teóricos emanados de la investigación en educación matemática. Esta parte del proceso permite problematizar las situaciones de la práctica para poder cuestionar lo que inicialmente puede ser asumido como natural o pasar desapercibido.

A partir de las investigaciones en el ámbito de la formación y el desarrollo profesional de los maestros de matemáticas, se pueden derivar dos componentes de suma importancia en el marco del planteamiento y desarrollo de un programa de formación continua.

1. El conocimiento teórico (saberes de referencia).

[9] Cómo concibe la materia que enseña y su área de conocimiento, cómo entiende la enseñanza y el aprendizaje de la misma, y cómo percibe y valora a sus alumnos

2. Las características del conocimiento materializado en la práctica (filosofías personales respecto a las matemáticas y su enseñanza).

El proceso de instrumentación (Gueudet y Trouche, 2009) se plantea como un elemento potencial para estrechar la brecha entre los dos componentes citados en el párrafo anterior. Implica la configuración didáctica con base en las potencialidades contenidas en los propios instrumentos tanto técnicos como conceptuales para influir en la actividad del sujeto.

De esta manera el proceso de instrumentación ofrece una manera específica de observar algunos de los efectos o consecuencias de un diseño particular (Sánchez, 2010b). Lo cual enlaza el desarrollo profesional como respuesta a la realización de determinadas tareas[10] dirigidas a fortalecer las filosofías personales de los docentes respecto a las matemáticas y su enseñanza.

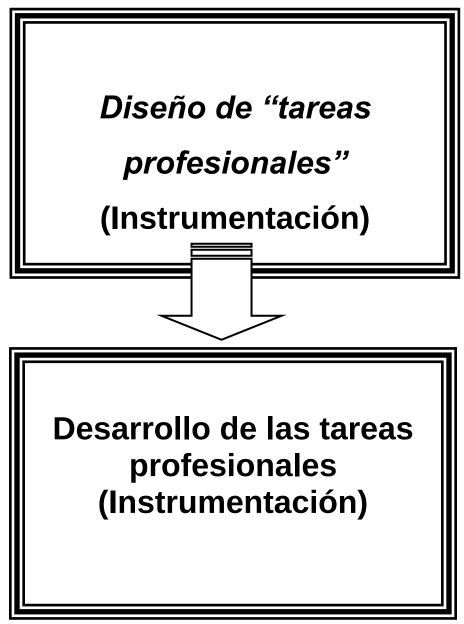
El diseño de tareas implica seleccionar y abordar los instrumentos técnicos y conceptuales (Llinares, 2005) necesarios para propiciar el aprendizaje de los contenidos matemáticos o conceptuales en los maestros. Desde una perspectiva estrictamente didáctica, el diseño de las tareas ocupa un lugar central en el proceso del desarrollo profesional (Llinares, 2000). En esta posición de intermediación, las tareas cumplen diferentes funciones:

- Promueven una acción, informan sobre un contenido.
- Generan una retroalimentación necesaria sobre los progresos de aprendizaje de los docentes.

En la interacción del docente con las tareas profesionales y los recursos que le permiten moldear y definir su trabajo, se produce un proceso de génesis en el cual

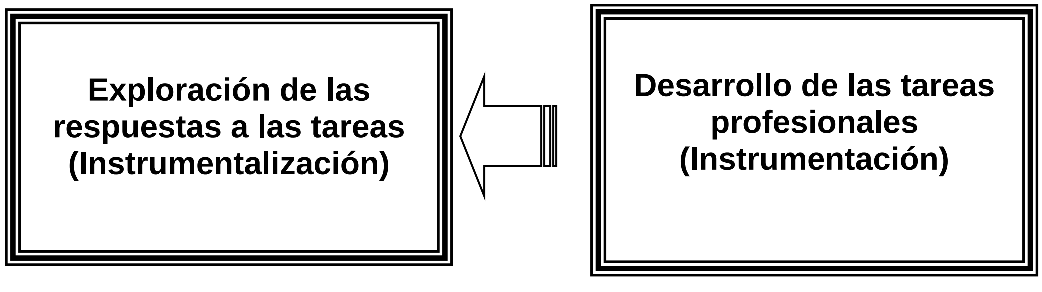
[10] Es decir, una manifestación de las relaciones entre el profesor y el currículum establecido y los documentos oficiales definidos por la administración.

se lleva a cabo la producción de lo que se ha llamado un documento. Dicho proceso de génesis documental (Gueudet y Trouche, 2009) puede proporcionar al formador o investigador información para la definición de un nuevo conjunto de tareas. Los niveles de problematización de las tareas irán desde el planteamiento y resolución de problemas matemáticos hasta el planteamiento de problemas derivados de la práctica.



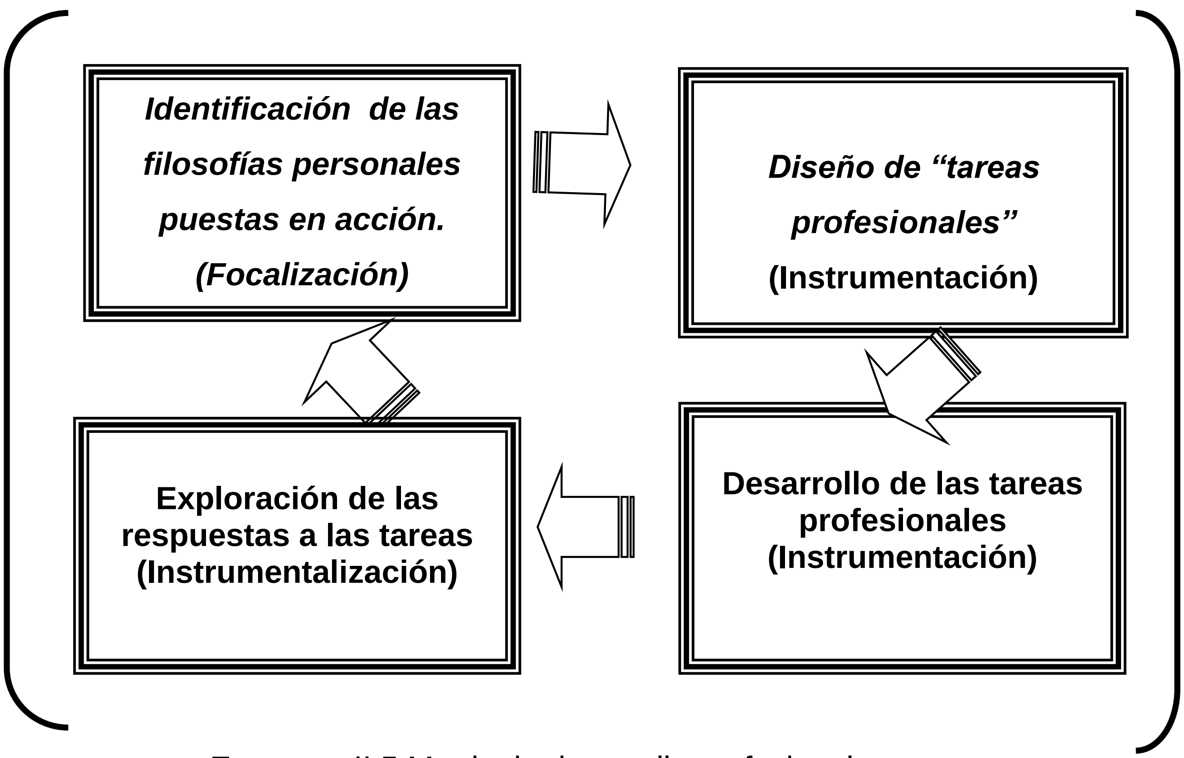
Esquema II.3

La apuesta de la instrumentación de las tareas es la reestructuración de las filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas o de la enseñanza de algún tópico de las mismas de manera coherente y sistemática. Estas filosofías materializadas en los documentos generados por los docentes participantes, proporcionarán los elementos para analizar los procesos de instrumentalización que los profesores llevan a cabo a la hora de desarrollar las tareas profesionales planteadas.



Esquema II.4

Es así como este elemento de la matriz, en particular, proporcionará la clave para por un lado explorar la integración, apropiación o remodelación de los recursos o artefactos aportados en el desarrollo de la tarea en el marco de las filosofías personales de los maestros participantes *(instrumentalización).* Y por el otro aporta elementos de *focalización* para seguir diseñando y desarrollando tareas *(instrumentación)* que permitan una formación continua y alcanzar paulatinamente los objetivos de aprendizaje.



Esquema II.5 Matriz de desarrollo profesional

Lo que se asume en el contexto de la presente investigación es que las filosofías personales del profesor respecto a la enseñanza de las matemáticas en general o referidas a la enseñanza de algún tópico en particular, determinan sus acciones (Ernest, 1996a) y se materializan en los documentos generados a partir del desarrollo de las tareas profesionales propuestas. De esta manera se trata de instituir un proceso donde por un lado los maestros se apropien y/o transformen los recursos con los que interactúan y por el otro los formadores o investigadores documenten la forma en que las tareas ejercen influencia en la actividad profesional del maestro (Sánchez, 2010b).

La hipótesis que subyace a éste planteamiento es que la generación y el análisis subsecuente de un documento permitirá detectar las necesidades de atención de los maestros en formación y orientará el diseño de nuevas tareas con base en nuevos recursos que amalgamados en un paquete conducirán a la elaboración de un nuevo documento.

El proceso de formación e investigación que pretendemos probar arranca entonces con la fase de Identificación de las filosofías personales puestas en acción, continúa con el análisis y explicitación de dichas filosofías, lo cual proporciona elementos empíricos para proponer las tareas de desarrollo profesional que permitan que los docentes profundicen en los conceptos en los que requieren apoyo.

El planteamiento y desarrollo de nuevas tareas profesionales, generará un nuevo documento lo que remite a la identificación de las filosofías respecto a las matemáticas y su enseñanza, para plantear con base en ellas nuevas tareas de desarrollo profesional.

2.8 Propósitos e interrogantes de la investigación

El estudio que presentamos en esta tesis se enmarca en la línea de investigación de los procesos de aprendizaje del maestro, particularmente en el ámbito de su desarrollo profesional, en relación con la enseñanza de las matemáticas.

La investigación se desarrolla en dos fases, la primera de carácter exploratorio y constructivo, es decir, se propone explorar e incorporar una nueva mirada sobre el desarrollo profesional del docente de matemáticas en servicio, con base en los avances en el campo de la investigación en educación matemática, en atención al reclamo de un mayor acercamiento entre las diversas instituciones que realizan investigación y la escuela (Hiebert et al. 2003).

Concretamente interesa adaptar una metodología[11] que permita la convivencia y comunicación del investigador o formador y el maestro de matemáticas en servicio en pro del desarrollo profesional del maestro. Esperamos encontrar indicadores empíricos que permitan caracterizar los procesos metodológicos de una formación profesional que atienda las necesidades emergentes de formación de los maestros de matemáticas en servicio, para ello se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cómo operan las directrices planteadas en la matriz de desarrollo profesional (ver esquema II.5) para instituir un proceso en donde los maestros se apropien y/o transformen los recursos con los que interactúan y los formadores documenten la forma en que las tareas ejercen influencia en las filosofías personales de los docentes?

- ¿Cómo se manifiestan las filosofías de los docentes en los procesos de instrumentación e instrumentalización que se generan cuando analizan el enfoque que se propone en la reforma de planes y programas de estudio?

- En el contexto señalado, específicamente ¿cómo es que éstas filosofías se manifiestan al proponer tareas de generalización?

- ¿Cuáles son las evoluciones en las filosofías de los profesores al desarrollar las tareas de desarrollo profesional derivadas de la matriz de desarrollo profesional?

[11] Matriz de desarrollo profesional e investigación.

En resumen, se plantea la idea de explorar las potencialidades de la propuesta de un modelo de desarrollo profesional que busca atender las necesidades de formación de los docentes en su propio contexto de trabajo, en donde se adaptan elementos de la investigación actual en educación matemática, sobre el tema.

CAPITULO III. DISEÑO DE LA INVESTIGACION

En el campo de la educación matemática, desde hace algunos años, se han desarrollado esfuerzos de investigación dirigidos a aumentar la comprensión sobre el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, sobre la práctica de enseñar matemáticas y sobre el proceso de aprendizaje del maestro (Giménez, et al., 1996; Llinares, 1996a; 1998; 2003; 2005; Ávila, 2001; Carpenter, 2004; Garza, 2004; Cobb, 2005; Peñas, 2008; Ball et al., 2008). La investigación que presentamos se enmarca en ésta última línea, particularmente en el ámbito del desarrollo profesional de maestros de matemáticas en servicio***.***

En este capítulo abordaremos los criterios y decisiones metodológicas que se han ido adoptando en el planteamiento y desarrollo de la investigación que aquí se presenta. Describiremos los sujetos que son el foco de atención de este estudio, la situación de toma y registro de los datos, los niveles de análisis que se han considerado para caracterizar la investigación y finalmente las fases consideradas en el desarrollo de la misma.

La investigación se desarrolla en dos fases, la primera de carácter exploratorio y constructivo, y la segunda, de carácter comparativo e inferencial, las cuales se desarrollan particularmente en el marco de la filosofía de enseñanza de las matemáticas (fase 1 de la investigación) y en el caso de la enseñanza de la generalización de patrones (fase 2 de la investigación).

3.1 Participantes

Los participantes en esta investigación fueron 21 maestros de matemáticas pertenecientes a institutos públicos de educación secundaria en la ciudad de México, todos en servicio, atendiendo en su mayoría los tres grados marcados para la educación secundaria.

Su participación en la investigación se produjo en el marco de reuniones[1] para analizar los programas de estudio 2006, propuestos para la educación secundaria, entre los meses de octubre de 2007 y noviembre de 2008 (primera fase) y de enero a junio de 2009 (segunda fase).

En dichas reuniones, los docentes debían analizar todos los contenidos matemáticos propios de la educación secundaria con el propósito fundamental de resaltar los contenidos básicos de cada grado para poder cubrirlos en la mitad del tiempo.

Esto proporcionó el marco para poder explorar con los docentes dos tipos de tareas, por un lado las que permitieron sondear y proponer un bagaje de conocimientos matemáticos básicos para la educación secundaria y por el otro las que permitieron explorar los conocimientos de los profesores para poder materializar los contenidos en las aulas. El segundo tipo de tareas fue el espacio idóneo para poder diseñar y probar los elementos indicadores del espacio de desarrollo profesional e investigación que corresponde a la parte medular de esta Investigación.

El desarrollo de las tareas y las producciones se realizaron en equipos de trabajo integrados entre 3 o 4 maestros, en su mayoría pertenecientes a la misma

[1] Cada reunión se desarrolló en dos días al mes con una duración de 4 horas por día.

escuela, por lo que los documentos que se produjeron en este contexto son de orden colectivo.

En el arranque de la investigación se trabajó con las producciones de los 21 maestros, sin embargo una vez que se focalizó la atención, sólo se trabajó con las producciones de 14 que manifestaron la necesidad de abordar el contenido de la generalización de patrones, por lo que los datos a partir de la tarea 2, primera fase de la investigación, corresponden al trabajo de 14 profesores que siguieron el proceso en ambas fases.

3.2 Recolección de datos

Para la recolección de datos se aplicaron tareas de desarrollo profesional en el marco de las reuniones antes mencionadas, las cuales al ser abordadas por los docentes propiciaron un proceso de génesis documental (Gueudet y Trouche, 2009). Los documentos, producto del desarrollo de las tareas, constituyen los principales datos en los cuales se basa la presente investigación, En ellos se plasman las interpretaciones e ideas importantes que los profesores vertían en la discusión grupal referente a la forma de enseñar los contenidos matemáticos.

Los documentos producidos por los docentes permitieron analizar el nivel de apropiación de los instrumentos conceptuales puestos en la mesa de discusión, el cual aporta una aproximación a los distintos conocimientos asociados a la enseñanza de las matemáticas que se ponen de manifiesto en respuesta a la tarea profesional.

3.3 Técnicas para el análisis de los datos

En los últimos años la técnica de análisis del contenido ha abandonado los límites de los medios de comunicación y ha pasado a utilizarse en marcos cada vez más variados y con una amplia gama de finalidades, así se ha utilizado en educación matemática para analizar el contiendo de las producciones de los estudiantes para profesor (Flores 2007).

En términos generales, el análisis del contenido es un método que busca descubrir la significación de un mensaje, ya sea este un discurso, una historia de vida, un escrito, un artículo de revista, un texto escolar, un decreto ministerial, etc. (Mayer, 1991; Gómez, 2000) sin embargo, también se puede aplicar a materiales que no sean puramente lingüísticos como anuncios esquemas o problemas gráficos.

En el contexto de esta investigación el análisis cualitativo del contenido de las producciones es utilizado como una técnica mediante la cual se efectúa el análisis[2] de los documentos que los profesores producen en el marco del desarrollo de tareas profesionales.

Al considerar que el objeto de estudio en esta investigación es de naturaleza constructiva y, por tanto, se va materializando en el curso mismo de la interacción, se implica la necesaria utilización de categorías de análisis que se van configurando durante el mismo proceso de investigación.

Por lo tanto, no se dispone a priori de las categorías que se reflejaran en el proceso, pero sí de aspectos y presupuestos que guiarán la elaboración de dichas categorías, De esta manera se irán identificando categorías que, a su vez, pueden servir para volver a definir y reformular dichos presupuestos, se trata de desarrollar un recorrido de focalización progresiva y de una correspondiente operación de filtrado, mediante los cuales se lleva a cabo la construcción de las categorías consideradas relevantes de acuerdo con los propósitos de la investigación.

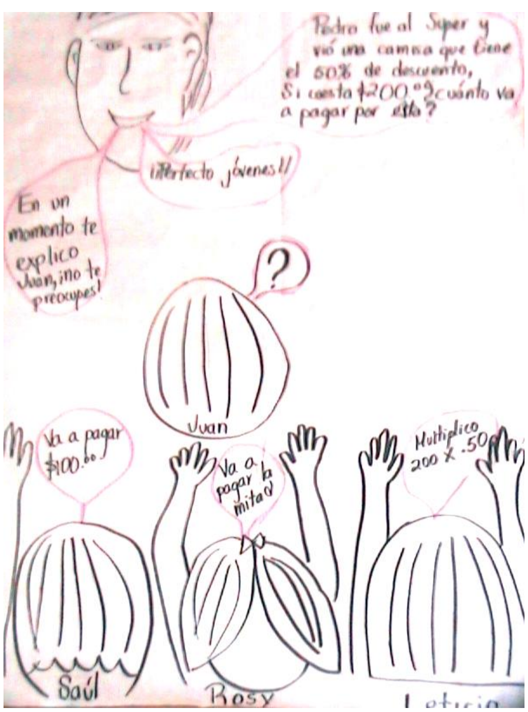
[2] Con base en los instrumentos conceptuales que se producen en el seno de la educación matemática.

El análisis de los datos tuvo como propósito caracterizar los instrumentos técnicos y conceptuales que definen la práctica del profesor en el contexto general de la enseñanza de las matemáticas (fase1) y en particular de la generalización de patrones (fase 2), el análisis se realizó en tres niveles, un primer nivel de naturaleza descriptiva y dos más, una de naturaleza conceptual e inferencial con el fin de caracterizar el conocimiento profesional del profesor y plantear las tareas e instrumentos conceptuales que pudieran serviles para fortalecer el concepto.

El primer nivel de análisis tiene como objetivo hacer una inmersión en los datos y reducir el volumen de los mismos, para tener una visión de los conocimientos que los profesores accionaban en el desarrollo de las tareas de desarrollo profesional y relacionar lo que el profesor había dicho en relación con la enseñanza de las matemáticas y con la generalización de patrones.

Por ejemplo:

Los maestros plantearon el siguiente esquema materializando los elementos importantes para la enseñanza de las matemáticas



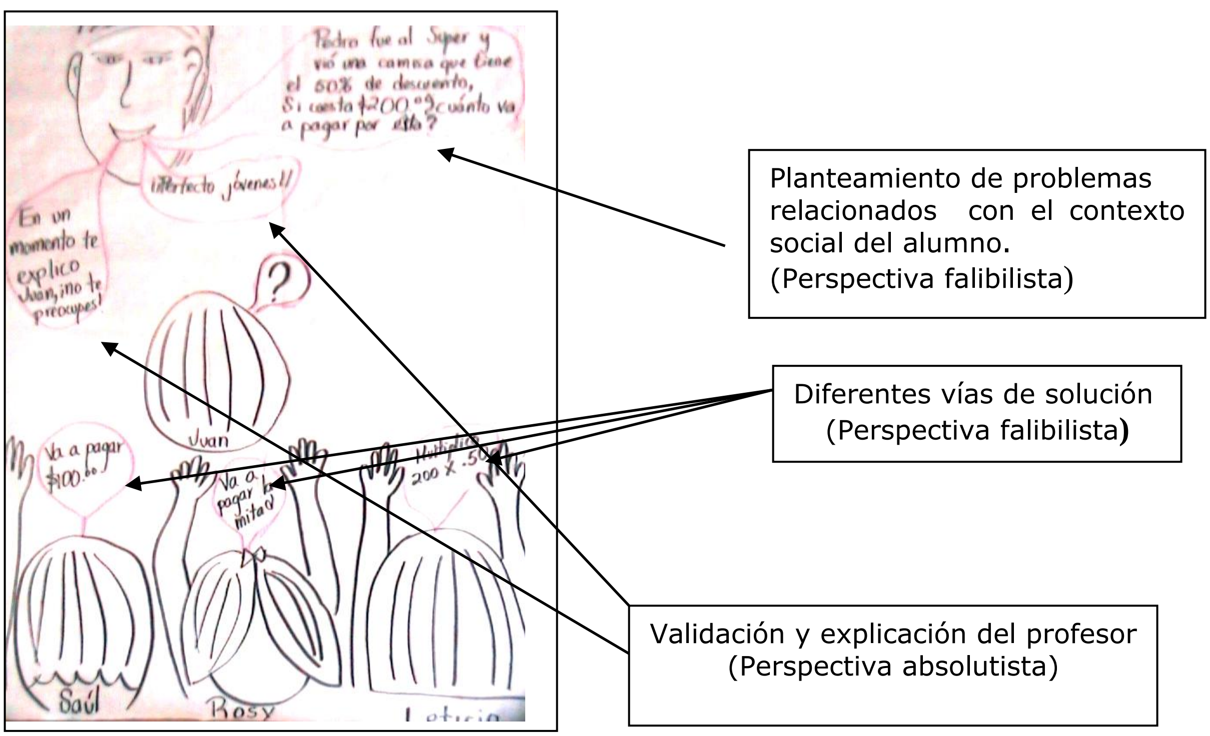
Esquema III.1

Nivel 1

Los maestros ven una forma de intervención donde los alumnos se apegan a las explicaciones y validaciones del maestro, se percibe el planteamiento de problemas y la comunicación oral de distintas estrategias de solución así como la comunicación también de dudas que en este caso pueden ser aclaradas por el maestro. El aprendizaje de las matemáticas es asociado al planteamiento de problemas.

El segundo nivel de análisis tuvo como objetivo identificar los instrumentos técnicos y conceptúales que los profesores accionaban a la hora de resolver sus tareas profesionales, analizando los documentos producidos con base en los referentes teóricos planteados en el capítulo 2 de ésta tesis.

Ejemplo: **Nivel 2**

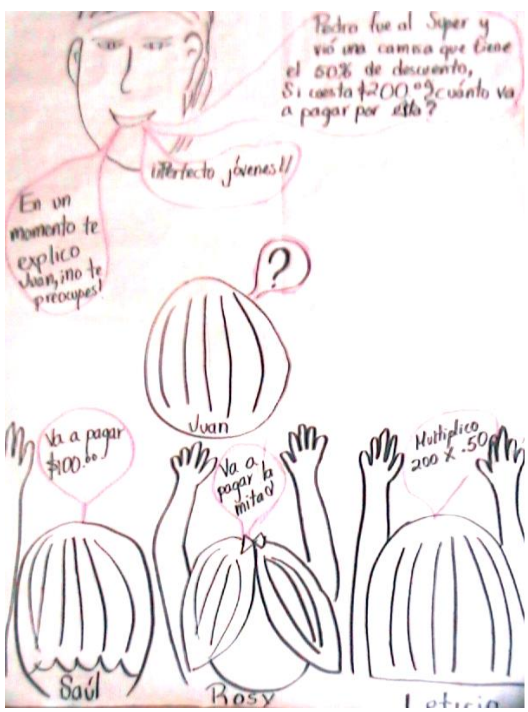


Esquema III.2

El tercer nivel de análisis tuvo como objetivo identificar las relaciones entre los conocimientos profesionales y los instrumentos conceptuales para diseñar la manera de poder reducir la brecha entre ellos, con base en nuevas tareas de desarrollo profesional.

Ejemplo: **Nivel 3**

Tal vez existan apremios del contexto social que fuerzan a un maestro a apegarse a los requerimentos del contexto, por ejemplo en el siguiente esquema **se plantea un impacto del contexto social** en el aprendizaje, y **recae en una intervención absolutista** que alude al maestro como elemento que aporta una explicación al alumno. De esta manera la enseñanza está caracterizada por el supuesto de que el aprendizaje es **un proceso dirigido desde afuera por la acción del adulto sobre el niño.**



Esquema III.3

Se plantea un salón de clase con proyecciones **tradicionales (absolutistas), con matices del contexto social, pero con un carácter secundario** o simplemente decorativo, en esta categoría los maestros ven una forma de intervención donde los alumnos se apegan a las explicaciones y validaciones del maestro, se percibe el planteamiento de problemas y la comunicación oral de distintas estrategias de solución así como la comunicación también de dudas que en este caso pueden ser aclaradas por el maestro.

En el análisis de las producciones de los maestros aparecen intercalados los tres niveles aunque cabe aclarar que no se dieron de manera simultánea, es decir primero se realizó el análisis descriptivo, con el fin de agrupar los datos en algunas categorías que pudieran ser manejables en el contexto de la propia investigación y después el análisis conceptual e inferencial.

El análisis cualitativo del contenido[3] (Mayer, 1991) es utilizado como una técnica indirecta mediante la cual se efectúa el análisis de los documentos que los maestros producen en el marco del desarrollo de las tareas profesionales. Las características generales del análisis de contenido se precisan a continuación:

(1) Se trata de una técnica indirecta, porque se tiene contacto con los maestros mediante sus producciones.
(2) Estas producciones pueden tomar diversas formas: escrita, oral, imagen o audiovisual.
(3) Las producciones pueden haber sido construidas por un maestro, o por un grupo de ellos.
(4) Permite verificar la presencia de temas, de palabras o de conceptos clave en un producto.

[3] Este tipo de análisis permite verificar la presencia de temas, de palabras o de conceptos clave en un contenido Mayer (1991).

3.4 Fases de la investigación

La investigación que aquí se presenta se desarrolla en dos fases, la primera desplegada entre los meses de octubre de 2007 y noviembre de 2008, y la segunda, implementada entre los meses de enero a junio de 2009, las cuales se desarrollan particularmente en el marco de la filosofía de enseñanza de las matemáticas (fase 1 de la investigación) y en el caso de la enseñanza de la generalización de patrones (fase 2 de la investigación).

3.5 Primera fase de la investigación.

3.5.1 Configuración de las tareas de desarrollo profesional. Primera fase de investigación

En la primera fase se propone y se explora un modelo de intervención (ver sección 2.7 Cap. 2) con maestros de matemáticas de secundaria en servicio, el cual se basa en directrices emanadas de la investigación en el ámbito del desarrollo profesional, como son (a) el fenómeno de la recuperación de experiencias y conocimientos profesionales (Hoyos, 2009a, 2009b; Callejo, et al., 2007; Vaillant y Marcelo, 2001; Bairral, et al., 2001; Goffree y Oonk, 2001; Llinares, 1999b); (b) la documentación del trabajo docente (Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b; Sanchez, 2010a); (c) el planteamiento de ciclos en la investigación (Cobb, 2001; Collins, 1992; Baumgartner, et al., 2003) y (d) la construcción social del conocimiento (Guin y Trouche, 2008; Gueudet y Trouche, 2008a; 2008b; Callejo et al., 2007). El modelo sirve para proponer tareas de desarrollo profesional a partir de la identificación de las filosofías personales de los docentes sobre la enseñanza de las matemáticas.

La propuesta de explorar e incorporar una nueva mirada sobre el desarrollo profesional del docente de matemáticas en servicio, con base en los avances en el campo de la investigación en educación matemática, busca atender el reclamo de un mayor acercamiento entre las diversas instituciones que realizan investigación con su campo de aplicación en la escuela (Hiebert, et al., 2003). Concretamente, en esta tesis interesa explorar el modelo que se construyó en este trabajo (ver sección 2.7), al cual le estamos llamando *Matriz de Desarrollo Profesional (MDP)*, porque éste surgió a partir de una interrelación como la mencionada por Hiebert, et al., (2003).

Tres han sido los momentos clave en el planteamiento y desarrollo de la primera fase de la investigación: (1) Exploración de las filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas; (2) Introduccion de instrumentos conceptuales y materialización de las filosofias personales de enseñanza en un tópico particular (3) Identificación del foco de atención temático en esta tesis, centrado particularmente en algún tópico que presente dificultad a los docentes participantes abordarlo con sus estudiantes.

Estos momentos tienen una relación directa con el desarrollo de tareas profesionales y su correlato de actividad correspondiente (Guerrero, 2001). El desarrollo de las tareas es un elemento central en el proceso de reflexión que se establece entre los docentes participantes para avanzar en el manejo del enfoque que permea actualmente la enseñanza de las matemáticas, el cual como antes ya se mencionó (ver por ejemplo, Ávila, 2001; y Shulmaister, 2000) es un punto de acumulación de dificultades docentes.

Relación de las tareas con los momentos clave en el desarrollo de la investigación.

<table>
<tr><td colspan="3">Momento 1 Tarea 1 (T1)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Primera intervención octubre de 2007
Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.</td></tr>
<tr><td colspan="3">El rescate de prácticas y conocimientos profesionales ha sido uno de los elementos recurrentes en los programas destinados al desarrollo profesional de los docentes en servicio. (Hoyos, 2009a, 2009b; Callejo et al., 2007; Vaillant y Marcelo, 2001; Bairral, et al, 2001; Goffree y Oonk, 200; Llinares, 1999a, 1999b;), En este sentido la tarea inicial se caracteriza por apelar a un proceso reflexivo personal-profesional sobre lo que el docente sabe, piensa y hace en su quehacer cotidiano.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td><td>Identificar las filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas de los maestros sujetos de estudio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 1</td><td>Plasmar en un esquema o dibujo los elementos pedagógicos que consideren importantes para trabajar con los alumnos los contenidos matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividades de investigación
Noviembre 2007 – enero 2007</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Identificación de los filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Diseño de posibles tareas profesionales</td></tr>
</table>

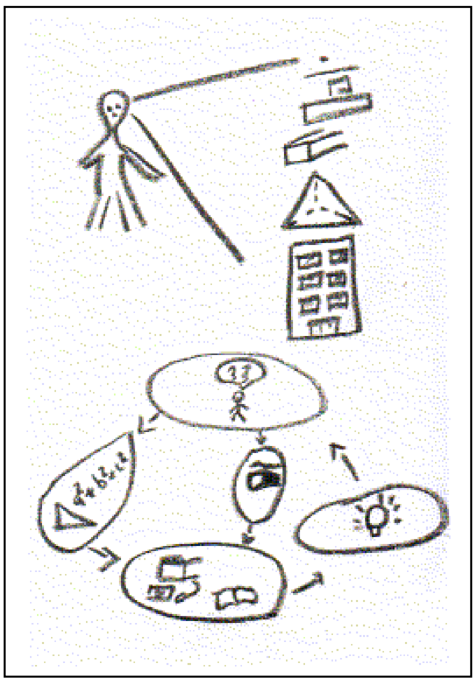
Tabla III.1

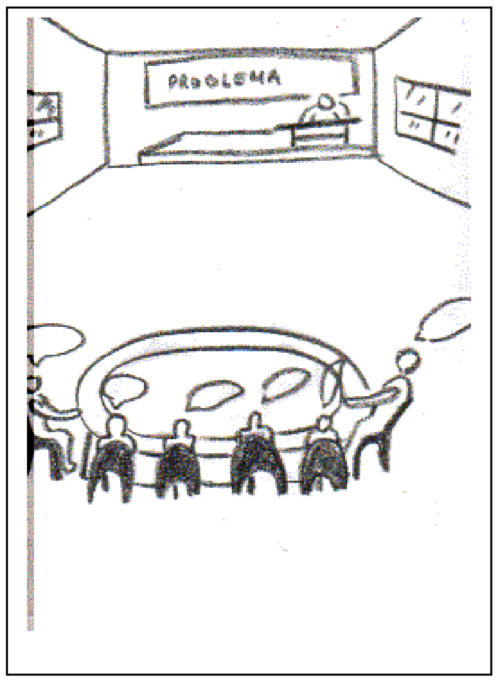
Se puede observar que se parte de una tarea inicial caracterizada por apelar a un proceso reflexivo personal-profesional sobre lo que el docente sabe, piensa y hace en su quehacer cotidiano para identificar sus filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas. En este caso resalta que las respuestas que se obtuvieron fueron expresadas principalmente en términos gráficos.

La tarea 1 “Plasmar en un esquema o dibujo los elementos pedagógicos importantes para abordar con los alumnos las cuestiones matemáticas”. Permitió a los docentes, agrupados en varios equipos, proponer diferentes esquemas *(i)*, argumentaciones y replicas *(ii)* que constituyen las primeras producciones.

Enseguida se muestran algunos ejemplos de los datos obtenidos:

(i)





(ii)

Réplica del equipo.

“Planteamiento de problemas, presencia de diferentes caminos de solución, hay alumnos que no logran resolverlo y el maestro tiene que intervenir para explicar, los alumnos que no entendieron son el objeto de nuestra práctica en ese momento.”

Esquema III.4

En general los maestros se distribuyeron en 8 equipos de trabajo por lo que las producciones en esta tarea corresponden a 8 esquemas con sus respectivas replicas.

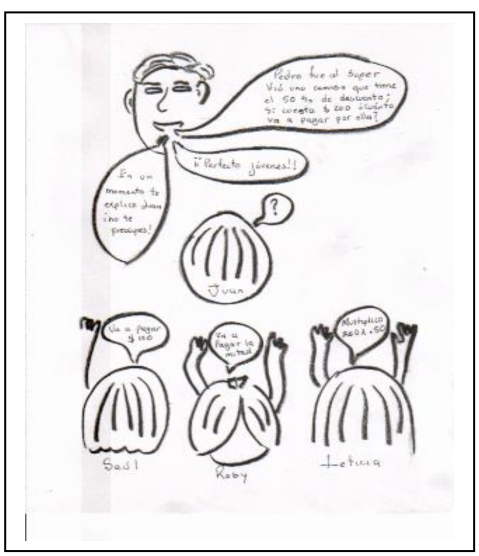
<table>
<tr><td colspan="3">Momento 2   Tarea 2 (T2)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Segunda intervención febrero de 2008
Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Emergencia de la matriz de desarrollo profesional
El análisis y categorización de los datos emanados de la tarea anterior en el marco de los referentes teóricos planteados en el capítulo 2, aportó los insumos necesarios para perfilar la siguiente tarea con el fin de subsidiar al docente con instrumentos conceptuales emanados en este caso de los documentos oficiales que apuntalan las reformas educativas, en específico sobre el enfoque para la enseñanza planteado en los programas de estudio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td><td>Someter a examen las filosofías personales de los maestros de matemáticas por medio de la recuperación de las producciones en torno a la tarea 1 e incorporación de instrumentos conceptuales para constituirse en los recursos principales para provocar un proceso reflexivo, centrado ahora sobre lo que se plantea que sepan, piensen y hagan en su quehacer cotidiano.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 2</td><td>Con base en los referentes de la lectura “competencias para la vida” (SEP, 2006a) identificar en el esquema propio, qué tipo de competencias se están desarrollando y plasmar las variaciones que se tendrían que introducir para poder lograr otras.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividades de investigación
Febrero – Abril de 2008</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Identificación de los filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Diseño de posibles tareas profesionales.</td></tr>
</table>

Tabla III.2

Para el desarrollo de la siguiente tarea se plantea una posición y un contacto diferente entre la teoría y las filosofías del profesor respecto a la enseñanza de las matemáticas, es decir, no se espera que el docente sólo lea y redunde las ideas planteadas en los documentos, por el contrario se plantea que analice sus propias producciones con el visor teórico que le proporcionan los instrumentos conceptuales planteados. Las significaciones y reflexiones de los docentes en respuesta a la tarea 2, fueron plasmadas ahora de manera gráfica y escrita; por un lado, identificaron y argumentaron por escrito las competencias que en su esquema inicial retrataban *(i)* y por el otro elaboraron un nuevo esquema *(ii)* en el que plasmaron variaciones en las prioridades asignadas al profesor, estudiantes y recursos y finalmente argumentaron su postura *(iii).* A continuación se presenta un ejemplo de los datos producidos con el desarrollo de ésta tarea.

Tarea 2

Con base en los referentes de la lectura "competencias para la vida" (SEP, 2006a) identificar en el esquema propio, qué tipo de competencias se están desarrollando y plasmar las variaciones que se tendrían que introducir para poder lograr otras.



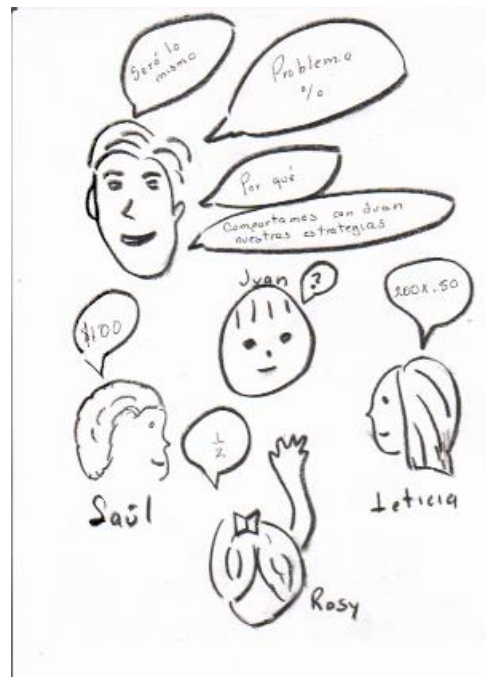
(i)

Identificación de competencias

1. Para el aprendizaje permanente porque los alumnos analizan situaciones que se encuentran de manera cotidiana y echan mano de los recursos disponibles para resolverlo

2. Para el manejo de situaciones pues al encontrar varias estrategias los alumnos tendrán que comparar y reflexionar sobre las suyas propias.

(ii)



(iii)

Otras competencias a desarrollar

1.-Para la convivencia y para vida en sociedad los alumnos analizan situaciones sociales de la vida real y tienen que discutir sus propuestas de resolución.

2- Para el manejo de la información los alumnos tendrán que proponer discutir y reflexionar para elegir la mejor estrategia para solucionar el problema.

Esquema III.5

En estas producciones se percibe de manera general la incorporación de los instrumentos conceptuales como parte de su filosofía personal, respecto a la enseñanza de las matemáticas, además de retratar los aspectos que permanecen fuertes en cada uno de los esquemas elaborados por los docentes participantes respecto a los aspectos clave en el proceso de en enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Los nuevos contenidos científicos y tecnológicos en los que se basa la educación y la necesidad de trabajar en pequeñas sociedades han desatado una transformación que promueve y condiciona profundos cambios. En esta línea, es fundamental resaltar los distintos puentes construidos con base en los instrumentos conceptuales planteados en el desarrollo de la tarea 2, tanto con el sistema científico-tecnológico, como con las filosofías personales de los maestros de matemáticas, exploradas en las anteriores secciones.

En esta sección sólo se abordan los desarrollos de los equipos 1,7 y 8 que son los que participarán en las dos fases de la investigación, por lo que las producciones solo son 3 respectivas a cada equipo.

Momento 2	Tarea 3 ***(T3)***
Tercera intervención Abril de 2008.	Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.
Para poner en marcha la siguiente tarea de desarrollo profesional se incorpora un contenido matemático que refleje el saber didáctico retratado en las tareas 1 y 2, en el marco del manejo de situaciones matemáticas con el fin de que los docentes en formación materialicen sus filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas en propuestas sobre la enseñanza un tópico particular.	

Tabla III.3 (parte 1)

Objetivo	Retratar las filosofías de los docentes en formación en propuestas sobre la enseñanza un tópico particular.
Tarea 3	Plantear por equipos alguna situación matemática en donde se perciban los elementos del estudio de la matemática que puedan incidir en el logro de competencias para la vida y el logro del perfil de egreso.
Actividades de investigación	Abril- Junio de 2008.
1	Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.
2	Identificación de los filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas
3	Diseño de posibles tareas profesionales

Tabla III.3 (parte 2)

En la siguiente tarea los docentes participantes deben seleccionar un contenido matemático para plantear una situación que materialice las ideas proyectadas en su esquema. La tarea se caracteriza ahora por materializar las filosofías de los docentes respecto a la enseñanza de las matemáticas en el planteamiento de una situación matemática. A continuación se presenta un ejemplo del tipo de documentos que los docentes producen en respuesta a la tarea planteada.

Tarea 3

Plantear por equipos alguna situación matemática en donde se perciban los elementos del estudio de la matemática que puedan incidir en el logro de competencias para la vida y el logro del perfil de egreso.

Álbum de números

- Los estudiantes tendrán que conformar su equipo para comenzar con el desarrollo de las actividades

Situaciones generadoras de aprendizaje:

- Buscar en periódicos, Internet o algún libro un conjunto de datos de temas que resulten interesantes (los temas se pueden proponer de manera grupal) algunos temas pueden ser por ejemplo:


La Jornada

Estalla la lucha frontal en contra del TLCAN

Aumentan reservas internacionales a 77894 mdd

Aumenta a 60 el número de muertos por la revuelta.

El índice de contaminación aumentó en un 0.5 %

Con recortes de periódicos y revistas los alumnos exploran la información y el tipo de números que se manejan, por ejemplo índices, número de habitantes de una población, variación de la bolsa de valores, variación de la temperatura y hacen una clasificación de los números y plantean su significado con base en un contexto social.

actividades

- Investigar y reunir información de diversas fuentes
- Averiguar sobre las diferentes formas para presentar la información
- Seleccionar y clasificar la mejor manera de comunicar los datos

Esquema III.6

Las propuestas generadas en el desarrollo de la tarea 3 concurren en un planteamiento de situaciones matemáticas que toman como referencia sus filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas vertidas en las anteriores tareas y que manifiestan distintas maneras de abordar los contenidos matemáticos y diferentes jerarquizaciones del desarrollo de competencias, según las actividades y las normas que plantean para el abordaje de la misma.

Momento 2		Tarea 4 ***(T4)***
Cuarta intervención junio de 2008 Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.		
A diferencia de las anteriores tareas, ahora los documentos generados por los docentes incluyen situaciones matemáticas contextualizadas, este tipo de producciones plantea la oportunidad para reflexionar sobre el proceso de construcción, lo que permite producir un discurso sobre los elementos que cimientan la situación propuesta. Surge entonces la posibilidad de tomar en cuenta la posición específica del enfoque que permea la enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria; bajo esta posibilidad, en la siguiente tarea de desarrollo profesional se utilizan las producciones de los maestros de la tarea anterior para ser exploradas con el visor que proporciona la lectura “enfoque,” planteado en los programas de estudio de educación básica, secundaria, 2006, específicamente el de matemáticas.		
Objetivo	Analizar las situaciones matemáticas que plantearon en la tarea anterior con base en los instrumentos conceptuales y poner a prueba los conceptos en el marco de la propia situación.	
Tarea 4	Con base en los referentes de la lectura “Enfoque” (SEP 2006b) • Contestar en equipo las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las finalidades de la situación planteada?¿Qué hace falta para lograrlo con los estudiantes? ¿Cuáles son las competencias, habilidades y contenidos matemáticos que intervienen en la situación?	
Actividades de investigación Junio- Septiembre 2008.		
1	Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.	
2	Identificación de las filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas.	
3	Diseño de posibles tareas profesionales.	

Tabla III.4

Los datos generados ahora se constituyen principalmente en argumentaciones respecto a las finalidades y competencias que se desarrollan implícitamente en la situación planteada. Específicamente los documentos generados por los profesores en respuesta a la tarea 4 se enmarcan en argumentaciones respecto a las finalidades de la situación planteada *(i)* competencias a desarrollar *(ii)* y finalmente a los reclamos específicos de los docentes *(iii).* A continuación se presenta un ejemplo de los documentos generados por los docentes en respuesta a la tarea 4.

Tarea 4

Con base en los referentes de la lectura “Enfoque” (SEP 2006b)

•Contestar en equipo las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las finalidades de la situación planteada?.¿Qué hace falta para lograrlo con los estudiantes?. ¿Cuáles son las competencias, habilidades y contenidos matemáticos que intervienen en la situación?.

(i)

Finalidades de la actividad planteada

Construir los fundamentos del razonamiento lógico matemático contextualizado en la vida cotidiana de los alumnos y no únicamente desde los conceptos formales planteados teóricamente en los programas por lo que se intenta desarrollar competencias relacionadas con el aprendizaje permanente (de abstracción, de razonamiento instrumental) y competencias relacionadas con el manejo de la información y de situaciones posibilitando la búsqueda de información en distintos medios (impresos y digitales) para la comprensión de problemas derivados la vida cotidiana

(ii)

Competencias que se abordan

La actividad planteada favorece la comunicación y la argumentación al poder darle sentido a los conceptos matemáticos culturalmente, es decir, romper las fronteras que la escuela impone, de esa manera se desarrollan competencias para la vida relacionadas también con el manejo de situaciones puesto que los alumnos pueden analizar el medio de información en el que están involucrados los objetos matemáticos en exploración, comprenderlo y en ocasiones transformarlo cuando logran ser conscientes que la situación los involucra como parte de la sociedad.

De igual manera se intenta desarrollar las competencias relacionadas con la resolución y el manejo de técnicas ya que tienen la capacidad de comunicar sus conjeturas usando los más adecuados para comunicar la situación y sea real o ficticia.

(iii)

Que hace falta para lograrlo

- Interés de los estudiantes por el estudio de las matemáticas.
- Acceso a diversos medios digitales como el internet para explorar otros escenarios.
- Canales de comunicación con otras áreas del conocimiento como español historia o geografía.

Esquema III.7

La generación y análisis de un discurso metodológico permite además de examinar las filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas de los maestros autores de la situación, focalizar elementos en los cuales los docentes encuentran un reto o resistencia para llevar a cabo las labores correspondientes a la acción educativa.

En esta sección sólo se abordan los desarrollos de los equipos 1,7 y 8 que son los que participarán en las dos fases de la investigación, por lo que las producciones sólo son 3, las respectivas a cada equipo.

Momento 3	Tarea 5 ***(T5)***
Quinta intervención septiembre de 2008. Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.	
El análisis de los datos de la sección anterior dio la pauta para poder seguir el recorrido de la matriz de desarrollo profesional en el sentido de abordar un tópico que resulte interesante o represente reto o dificultad para poder materializarlo en el aula, por ello la siguiente tarea de desarrollo profesional se perfiló en focalizar un tópico específico del primer año de secundaria, que represente dificultad para su abordaje en el aula, esto con base en que los maestros en su mayoría atendían los 3 grados de educación secundaria.	
Objetivo	Identificar un tópico matemático particular, cuyo manejo implique dificultad para los docentes participantes, para trabajarse en la segunda fase de la investigación
Tarea 5	En equipos explorar los temas de primer grado. Clasificar: Contenidos básicos. Contenidos de difícil comprensión. Contenidos que se pudieran considerar complementarios.

Tabla III.5 (parte 1)

Actividades de investigación Octubre 2008 – enero 2009	
1	Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.
2	Identificación de los filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas.
3	Diseño de posibles tareas profesionales.

Tabla III.5 (parte 2)

En el marco de esta tarea se identifican los contenidos que en el contexto educativo representan reto e incluso aquellos que se consideran de poca relevancia o complementarios, dicho en otras palabras la tarea permite a los docentes jerarquizar los contenidos planteados para la enseñanza de las matemáticas en el primer grado de educación secundaria y al formador o investigador focalizar aquellos contenidos que representan mayor dificultad para ser abordados en el aula por los docentes participantes.

Los datos generados con el desarrollo de la tarea 5, se materializaron en un formato de trabajo *(i)* con 3 categorías principales, en donde los docentes debían clasificar los contenidos según su experiencia y percepción en el abordaje de los mismos, a continuación se presenta un ejemplo derivado del trabajo en uno de los equipos de docentes participantes.

Tarea 5
En equipos explorar los temas de primer grado.
Clasificar:
Contenidos básicos.
Contenidos de difícil comprensión.

	Bloque 1
Contenidos Básicos.	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales. 1.2 Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas. 1.4 Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar. 1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
Contenidos De difícil comprensión.	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Esquema III.8

3.6 Segunda fase de investigación.

En esta sección abordaremos los criterios y decisiones metodológicas que se adoptan en el planteamiento y desarrollo de la segunda fase de investigación, presentaremos los momentos las tareas y registraremos el análisis de los datos correspondientes. Esta segunda fase de la investigación fue inspirada en las necesidades expresadas por los docentes en la primera fase de la investigación, en este espacio se somete a prueba la eficacia de la Matriz de Desarrollo Profesional, en el marco de la enseñanza de la generalización de patrones. A partir de aquí se exploran las formas en que los maestros construyen situaciones para ofrecer a los estudiantes oportunidades para desarrollar la generalización de patrones.

La generalización de patrones ha sido identificada por los profesores como uno de los múltiples retos que enfrentan en el desarrollo del programa de matemáticas 2006, por ello en esta segunda fase de investigación se abordan tareas relacionadas con éste tópico, que cuenta con amplia presencia en los programas 2006 para la enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria. La atención se centra en las filosofías personales que materializan los profesores al plantear tareas escolares para promover la generalización de patrones, con sus alumnos.

En el marco de la educación matemática concurren estudios que reportan que los futuros docentes, en formación exponen dificultad con el razonamiento algebraico y la escritura de generalizaciones (Bishop y Stump, 2000; Jean, et al., 2009). Estas dificultades resaltan, según Bedrnarz, Kieran y Lee (1996), el tema del rol del maestro quien debe ser exhortado para gestionar situaciones pedagógicas que promuevan en los estudiantes el razonamiento y la generalización.

3.6.1 Configuración de tareas de desarrollo profesional. Segunda fase de investigación

La configuración en esta fase de la investigacion se ha dirigido a la promoción en los docentes de la conciencia acerca de las ideas que guian actualmente las tareas y técnicas de enseñanza de la generalización de patrones, los momentos clave en el planteamiento y desarrollo de esta segunda fase de la investigación se enmarcan en 3: (1) Exploración de las filosofías personales respecto a la enseñanza de la generalización de patrones; (2) Análisis de los recursos y actividades, con base en la exploración de intrumentos conceptuales relacionados con la generalización de patrones para constrastar y complementar las filosofias personales respecto a la enseñanza de la generalizacion de patrones; (3)

replanteamiento por parte de los docentes participantes de las actividades y recursos utilizados respecto a los procesos de generalización.

Estos momentos tienen una relación directa con el desarrollo de tareas como elemento central del proceso de reflexión que se establece entre los docentes participantes. Las relaciones de las tareas con los momentos descritos y las actividades que se llevaron a cabo en la presente investigación se especifican a continuación:

<table>
<tr><td colspan="3">Momento 1 — Tarea 6 (T6)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sexta intervención Enero de 2009.
Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.</td></tr>
<tr><td colspan="3">El arranque de esta fase de investigación implica la identificación de las filosofías personales de los docentes respecto de la generalización de patrones, de esta forma la tarea inicial está caracterizada precisamente por captar las estrategias que los docentes utilizan como parte de su filosofía para la enseñanza de dicho tópico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo</td><td>Identificar las filosofías personales respecto de la enseñanza de la generalización de patrones de los maestros sujetos de estudio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarea 6</td><td>Recuerde y describa las estrategias y recursos utilizados en los que usted tuvo la oportunidad de propiciar procesos de generalización de patrones con los estudiantes:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividades de investigación
Febrero – marzo de 2009</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Identificación de las filosofías personales de los profesores respecto a la generalización de patrones.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Diseño de posibles tareas profesionales.</td></tr>
</table>

Tabla III.6

En concreto, los docentes en respuesta a la tarea 6 materializan distintas acciones en el asunto relacionado con la enseñanza de la generalización de patrones, en donde coordinan diferentes aspectos relacionados con el tópico y con las acciones que los maestros promueven en torno al aprendizaje de las matemáticas. A continuación se presenta un ejemplo de los documentos generados por un equipo de profesores en respuesta a la tarea 6.

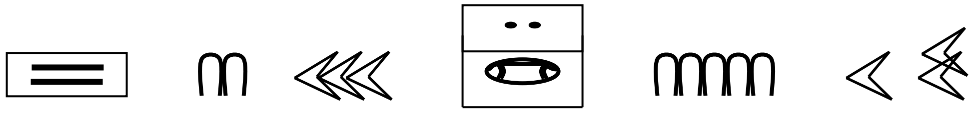
Tarea 6

Recuerde y describa las estrategias y recursos utilizados en los que usted tuvo la oportunidad de propiciar procesos de generalización de patrones con los estudiantes:

Los documentos producidos por los docentes se conforman por situaciones problemáticas para realizar con sus alumnos, los documentos corresponden a tres producciones de tres equipos que focalizaron la generalización de patrones como uno de los contenidos que implica reto para su enseñanza, por ejemplo veamos el planteamiento de uno de los equipos.

Reúnanse en equipo y analicen el comportamiento de las siguientes sucesiones con base en las siguientes actividades.

1



2

1 III 5 VII 9 XI 13 XV

1.- Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión.

2.- ¿Qué número ocupará el doceavo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito?.

Explica tu respuesta.

3.- Expresa cada una de las sucesiones en el sistema de numeración decimal.

4.- ¿Qué número ocupará el lugar número 15 en cada sucesión?.

Esquema III.9

En dichos documentos los docentes sujetos de estudio plasman distintas formas de proceder, normas para el abordaje de la situación, materiales, tiempo y propósitos; la articulación de todos estos elementos permite identificar los rasgos en los cuales los docentes basan sus decisiones para la enseñanza de la generalización de patrones.

Momento 2	Tarea 7 ***(T7)***
Séptima intervención Marzo de 2009. Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.	
Evaluación de la matriz de desarrollo profesional Al planificar, organizar, elegir o modificar las tareas o problemas que se propondrán a los estudiantes para que aprendan un contenido matemático, se ponen de manifiesto relaciones particulares entre el maestro y el currículum establecido (Llinares2005), en las siguiente tareas se les pide a los profesores valorar las características de las actividades planteadas con base en algunos instrumentos conceptuales emanados de la investigación en educación matemática para seleccionar (o elaborar) actividades más adecuadas al propósito que se persigue, en este caso la promoción de *la generalización de patrones*.	

Tabla III.7 (parte 1)

Objetivo		Evaluar las características de las tareas actividades o situaciones propuestas con base en algunos instrumentos conceptuales emanados de la investigación en educación matemática.
Tarea 7		Revisar el concepto de generalización y las etapas propuestas por diferentes autores (ver sección 2.8.1) y con base en los elementos de la lectura plantear una definición propia de generalización y los pasos que pueden distinguirse como constitutivos del proceso. A la luz de ello, analizar la actividad propuesta con base en las siguientes preguntas: 1. ¿Por qué la actividad promueve la generalización de patrones? 2. ¿Qué pasos de la trayectoria se consideran en la actividad?
Actividades de investigación Abril – mayo de 2009		
1	Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.	
2	Identificación de las filosofías personales de los profesores respecto a la generalización de patrones.	
3	Diseño de posibles tareas profesionales.	

Tabla III.7 (parte 2)

La tarea 7 asiste la reconstrucción de las nociones matemáticas relacionadas con la generalización de patrones con apoyo en instrumentos conceptuales derivados de la investigación en educación matemática (ver sección 2.6); las significaciones y reflexiones de los docentes fueron plasmadas de manera escrita, por un lado construyeron un concepto propio de generalización *(i)* y por el otro analizaron y argumentaron la situación propuesta con base en dos preguntas eje: 1 *(ii); 2 (iii)* ;

veamos un ejemplo de los documentos producidos por los docentes en respuesta a la tarea número 7, en general los documentos que se analizan corresponden a las producciones de tres equipos que seleccionaron el foco de atención.

Tarea 7.

Revisar el concepto de generalización y las etapas propuestas por diferentes autores (ver sección 2.6.1) y con base en los elementos de la lectura plantear una definición propia de generalización y los pasos que pueden distinguirse como constitutivos del proceso.

A la luz de ello, analizar la actividad propuesta con base en las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué la actividad promueve la generalización de patrones?
2. ¿Qué pasos de la trayectoria se consideran en la actividad?

(i)

Generalización.

Es un proceso mental que trata de la identificación de elementos comunes en situaciones que presentan ciertas relaciones o propiedades matemáticas susceptibles de poder plasmarse por medio de una regla y posteriormente poder usarla en casos no establecidos en la propia situación.

(ii)

El camino posible sería el siguiente:

1. *Interacción con la naturaleza y relación de componentes que configuran la situación.*
2. *Búsqueda de conjeturas acerca de las relaciones que podrían estar estructurando la situación.*
3. *Prueba de las diferentes conjeturas con base en los diferentes elementos de la situación.*

4. *Establecimiento verbal (escrito) o matemático (con símbolos del álgebra) de la regla.*

*(ii)*____

Se promueve la generalización.

Porque trata de la identificación de elementos comunes por ejemplo en los números 333 y 222 los números representan el valor según su posición.

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \downarrow & & \\ x10^2 & x10^1 & x10^0 \\ & \uparrow & \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$$

1) *En nuestro caso sólo se considera el paso 1 que es la interacción con la naturaleza de la situación.*

Esquema III.10

Existe una *asimilación del conocimiento práctico,* donde los docentes exploran su propio planteamiento e indican lo que de él aplica con los constructos explorados y perciben restricciones en sus propias propuestas o juicios, de esta manera se expande su comprensión a través de la asimilación del conocimiento práctico. En esta tarea los docentes explicitan su posición y la argumentan. Se trata de propiciar una relación mediante la cual el profesor dote de significado a la situación propuesta, puesto que según Llinares (1996) desde esta perspectiva es posible explicitar una relación dialéctica entre el maestro y la situación que permite dotar de significado a dicha situación en relación con el nivel educativo (institución) en el que desarrolla su trabajo.

Este proceso objetiva la construcción de conocimientos profesionales con base en el diálogo próximo con los instrumentos conceptuales aplicados en el planteamiento, análisis y rfeplanteamiento de una situación problemática.

En este sentido los maestros consiguen una mejor comprensión de la situación imaginada, y encuentran nuevas fuentes para la compresión y planificación de aspectos relacionados en este caso con el desarrollo de patrones. Este conocimiento profesional es generado al orientarse a la situación concreta de enseñanza en el sentido de que su uso y reflexión en situaciones de enseñanza genera nuevo conocimiento.

Momento 3	Tarea 8 ***(T8)***
Séptima intervención Mayo de 2009. Desarrollo de tareas profesionales con los profesores.	
La tarea 8 se caracteriza por orillar a los docentes a reevaluar las posiciones adoptadas de entrada, construyendo argumentos fundamentados para el replanteamiento de la situación relacionada con la generalización de patrones, se retoman las producciones anteriores (tarea 6 y tarea 7); las producciones esperadas radican en la reorganización de las situaciones propuestas, como resultado de la integración de las experiencias y conocimientos previos con la nueva información	
Objetivo	Reevaluar las filosofías personales respecto a la enseñanza de la generalización de patrones adoptadas de entrada, construyendo argumentos fundamentados para el replanteamiento de la situación relacionada con la generalización de patrones.

Tabla III.8 (parte 1)

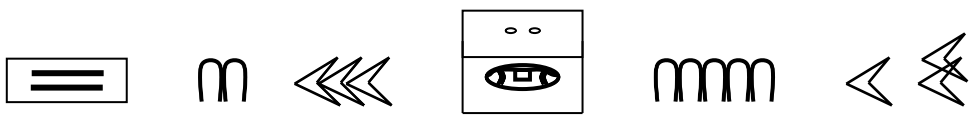
Tarea 8	Tarea 8 Con base en los planteamientos elaborados analizar la situación propuesta con base en las siguientes preguntas. ¿Qué modificaciones harían para poder cumplir con los planteamientos elaborados? ¿Por qué?
Actividades de investigación Mayo – junio de 2009	
1	Análisis descriptivo y conceptual de los primeros datos.
2	Identificación de las filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de la generalización de patrones.
3	Diseño de posibles tareas profesionales.
4	Escritura y revisión del reporte de la investigación.

Tabla III.8 (parte 2)

Como se puede ver, en ésta tarea se incluyen las producciones anteriores como recursos para explorarse, en donde los docentes materializan los cambios con base en los referentes teóricos explorados, y además los argumentan. En concreto los datos emanados de esta tarea retratan el grado de apropiación de los docentes en cuanto a los instrumentos conceptuales explorados, de ésta manera se presentan situaciones problemáticas con modificaciones enmarcadas en los instrumentos mencionados. A continuación se presenta un ejemplo de los datos que surgieron la resolución de ésta tarea de desarrollo profesional.

> Tarea 8
> Con base en los planteamientos elaborados analizar la situación propuesta respondiendo las siguientes preguntas.
>
> ¿Qué modificaciones harían para poder cumplir con los planteamientos elaborados? ¿Por qué?.

Observa el comportamiento de las siguientes sucesiones y realiza las siguientes actividades.

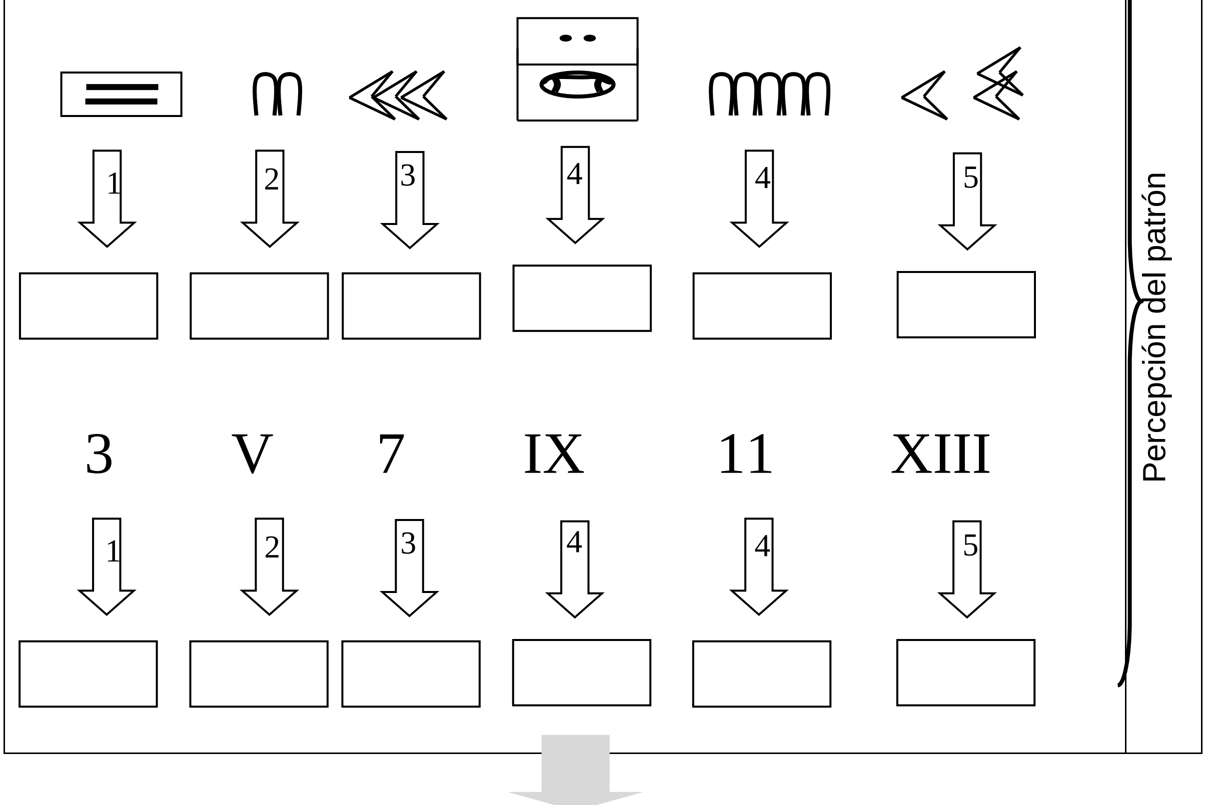


3 V 7 IX 11 XIII 15

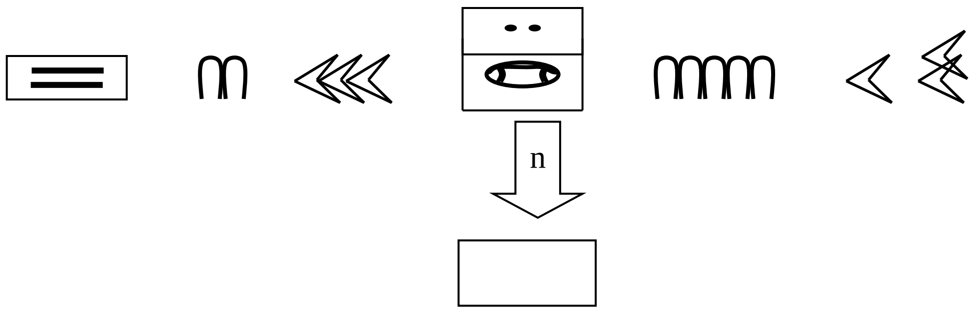
1.- Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión

Interaccion con la situacion

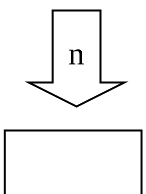
Expresa simbólicamente las operaciones que realizaste para saber el valor de cada término con base en la posición que ocupan en la sucesión



Considera que n es el lugar que ocupa cada número cómo expresarías la operación que tienes que efectuar para saber el número según la posición que ocupa en la sucesión.



3 V 7 IX 11 XIII



Expresión del patrón

-¿Qué número ocupará el trigésimo segundo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito? Explica tu respuesta.

Prueba

Esquema III.11

Los docentes intentan añadir un nuevo nivel de coherencia y profundidad a las situaciones propuestas con base en las nociones exploradas con relación a la generalización de patrones, de manera tal que se plantea la integración de dos dominios el matemático y el pedagógico.

De esta manera los docentes no sólo abordan información específica, sobre la generalización de patrones, sino también definen y comprenden las situaciones que se plantearon como parte de su práctica profesional con base en los constructos elaborados por ellos mismos.

CAPITULO IV. RESULTADOS.

4.1 Primera fase de investigación

4.1.1 Identificación de las filosofías personales de los profesores respecto a la enseñanza de las matemáticas

De manera general se puede observar que los docentes asignan distintas prioridades al maestro, estudiantes y recursos, esto por la posición de cada uno de estos elementos en el esquema, lo cual da indicios de las filosofías personales de los docentes respecto a la enseñanza de las matemáticas y del papel que le asignan al docente y al alumno en este proceso. Se han clasificado los esquemas de los maestros en tres categorías con base en los elementos que se perciben en sus presentaciones.

1. Las filosofías absolutistas con matices sociales. Equipo 8(E8)
2. Las filosofías falibilistas que plantean una amalgama entre las teorías radicales del constructivismo y las teorías sociales. Dando prioridad a los aspectos individuales del aprendizaje. (E1, E2, E5, E6, E7)
3. Las filosofías falibilistas que plantean una amalgama entre las teorías radicales del constructivismo y las teorías sociales. Dando prioridad a los aspectos sociales del aprendizaje. (E3, E4)

Aunque las producciones en una primera clasificación tienen un marco conceptual análogo, la fuerza y la jerarquización de cada uno de los elementos que los docentes materializan en sus filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas es diferenciado.

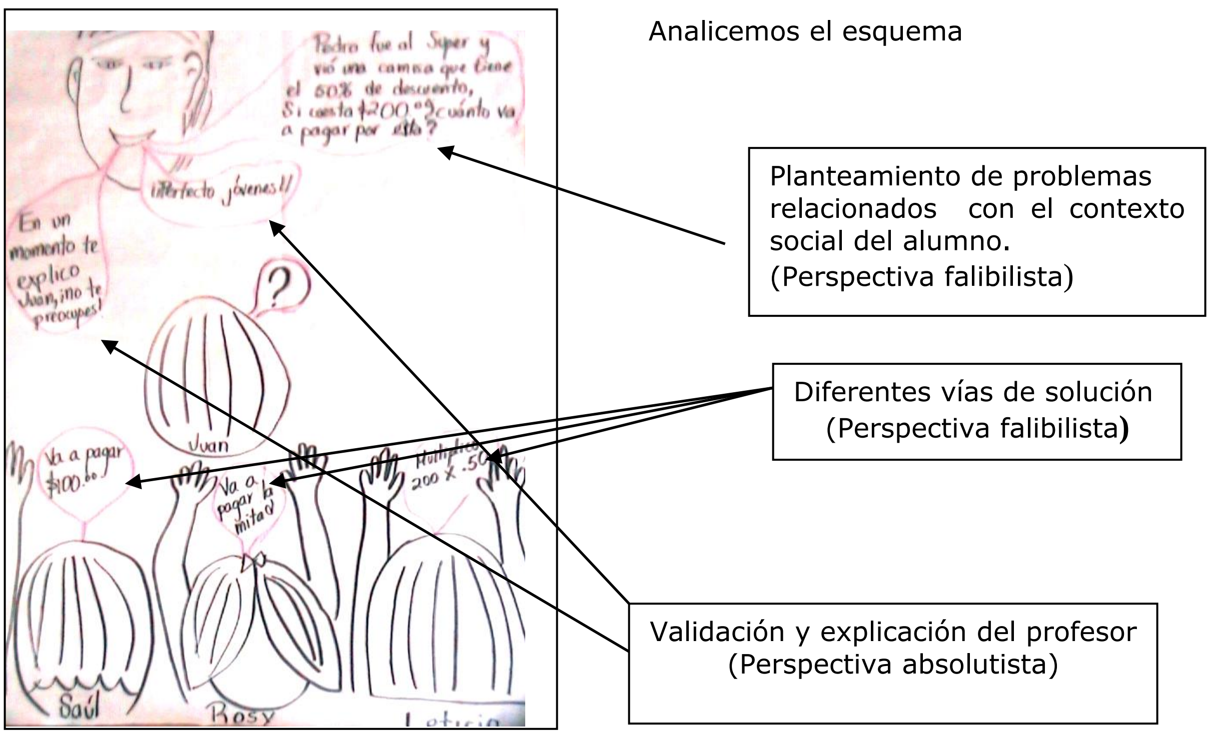
Las tareas subsecuentes se basan en el análisis de las producciones iniciales relacionadas con la tarea 6, es por ello que en el tratamiento que se hace en el escrito se abordan como casos específicos pues aportan aspectos y evoluciones diferenciadas entre sí.

4.1.1.1 Filosofías absolutistas con matices sociales

4.1.1.1.1 Caso Equipo 8 *(E8)*

Tal vez existan apremios del contexto social que fuerzan a un maestro a plantear una conformidad estratégica (Sowder, 2007), por ejemplo en el siguiente esquema se plantea un impacto del co ntexto social en el aprendizaje, y recae finalmente en una intervención absolutista que alude al maestro como elemento que aporta una explicación al alumno (Ernest, 1991). La enseñanza está caracterizada por el supuesto de que el aprendizaje es un proceso dirigido desde afuera por la acción del adulto sobre el niño.

Analicemos el esquema



Esquema IV.1

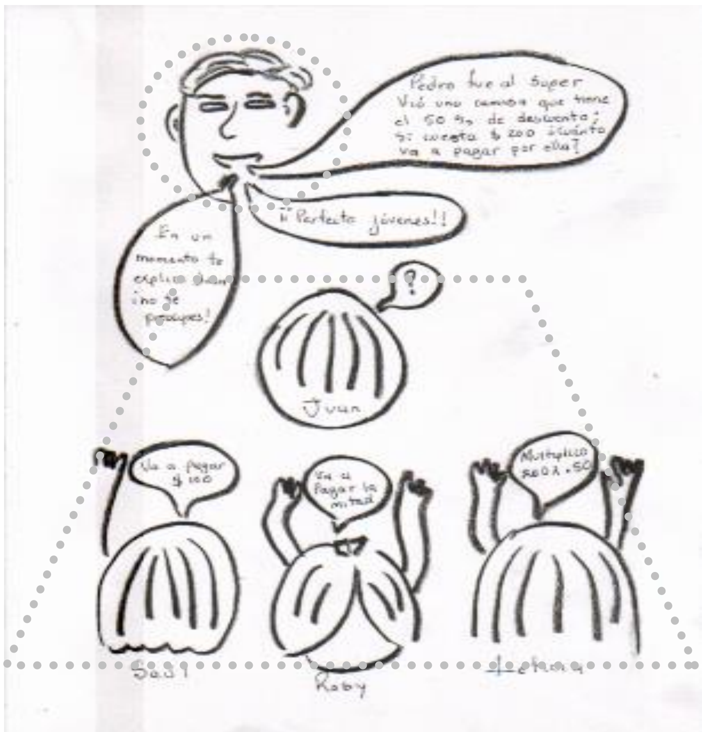
Se plantea explícitamente un salón de clase con proyecciones tradicionales (absolutistas), que demanda la transferencia del conocimiento de un individuo a otro que se centra en la manipulación de condiciones externas para modificar los comportamientos que conducen al aprendizaje (Handal, 2003). Además el aprendizaje se considera un producto de las recompensas y los refuerzos aplicados al estudiante. Asimismo, el énfasis está en respuestas correctas.

El contexto social hace su aparición al tratar de reconciliar los procesos sociales y la fabricación individual como piezas centrales y esenciales para aprender matemáticas (Ernest, 1994b); pero con un carácter secundario o simplemente decorativo, en esta categoría los maestros ven una forma de intervención donde los alumnos se apegan a las explicaciones y validaciones del maestro, es decir, se apela a la transferencia del conocimiento de un individuo a otro (Walshaw, 2002).

Metodológicamente los maestros consideran central al planteamiento de problemas y la comunicación oral de distintas estrategias de solución así como la comunicación, es decir, se enmarcan en una perspectiva falibilista que acentúa la práctica de las matemáticas y el lado humano (Handal, 2003). Ven a las matemáticas como el resultado de procesos sociales, concebidas como disciplina falible, empírica. El aprendizaje de las matemáticas es asociado al "*…planteamiento de problemas con la presencia de diferentes caminos de solución…"* coligado a su vez con las formas simbólicas sociales, la historia y localización de los alumnos, es decir, a una perspectiva falibilista "*Pedro fue al súper y vió una camisa que tenía el 50% de descuento, si cuesta $200 ¿cuánto tuvo que pagar por ella?"*

Se proyecta una imagen falibilista de las matemáticas, con un carácter, intuitivo, activo, de colaboración y creativo (Ernest, 1996), sin embargo, la cuestión última tiene que ver con cuestiones absolutistas específicamente asociadas al conductismo de transmisión y validación de un camino, el del profesor (Handal, 2003). *"…El maestro tiene que intervenir para explicar, los alumnos que no entendieron son el objeto de nuestra práctica en ese momento..."*

El proceso de construcción del conocimiento es particular, tiene diferentes niveles de elaboración, abstracción y generalidad, así como diferentes formas de representación, sin embargo existe preeminencia en la vía del absolutismo en donde el maestro está al frente de la clase planteando las situaciones a explorar, y los estudiantes situados tratando de externar sus conjeturas esperando la validación del maestro (Handal, 2003).



Esquema IV.2

Esta última aseveración comulga con una amplia percepción pública de las matemáticas como una ciencia exacta, pero difícil por completo, en el que una élite determina la respuesta única y correcta (Ernest 1996). Así las matemáticas se convierten en un tema elitista cuya afirmación viene dada por la autoridad.

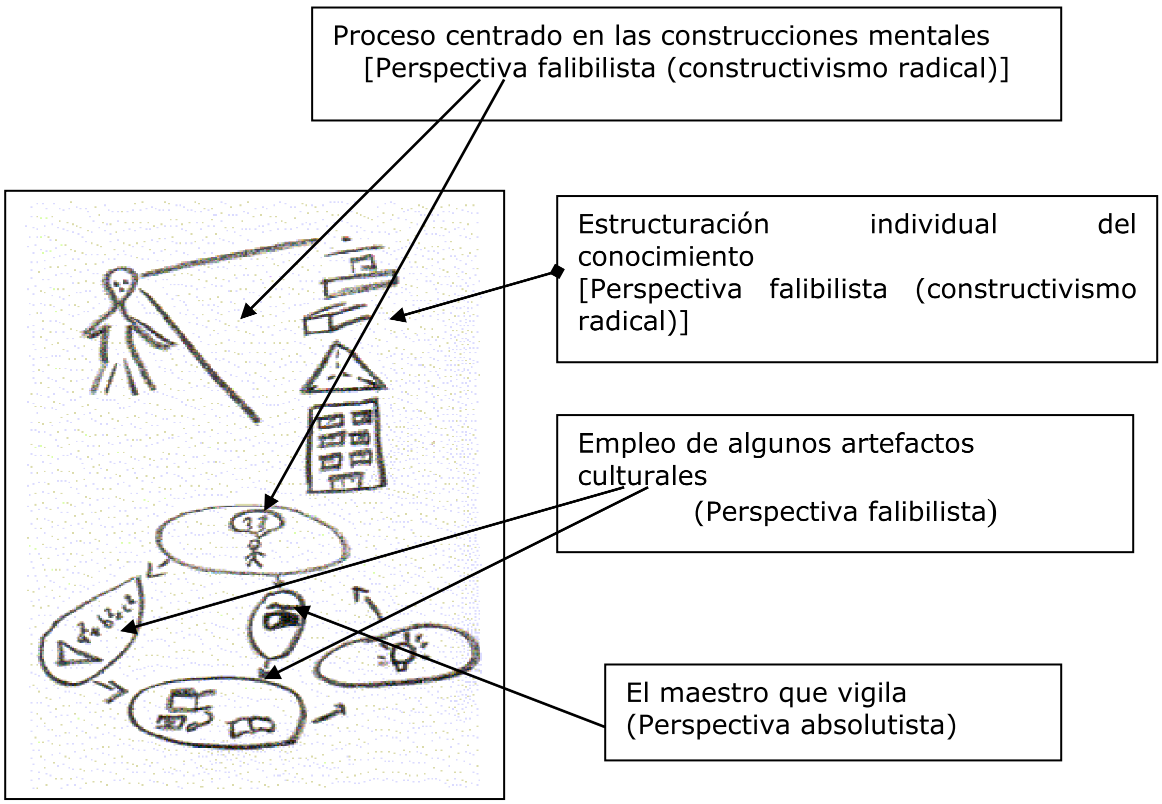
4.1.1.2 Filosofías falibilistas con base en una teoría radical constructivismo Centradas en la construcción del conocimiento matemático

Estas filosofías adoptan como base una posición radical del constructivismo, agregando aspectos sociales de interacción en el salón de clase, cuya preocupación básica se halla en los aspectos interindividuales del aprendizaje.

Los planteamientos de la epistemología genética (Piaget, 1961) respecto del origen del conocimiento, y el carácter del mismo, se reflejan en las filosofías que se bosquejaran en la siguiente sección, puesto que expresan cómo se pasa de un estado a otro de mayor conocimiento y admiten que el conocimiento escolar es objeto de construcción. Así, un nuevo conocimiento no reemplaza ni elimina a los anteriores, se inicia por la reorganización a otro nivel de las principales adquisiciones del precedente, los conocimientos se construyen por integración y reorganización de vínculos especiales no sólo con conocimientos anteriores, sino con los conocimientos más elementales (Handal, 2003).

4.1.1.2.1 Caso Equipo 1 *(E1)*

Las construcciones o pensamientos de los alumnos constituyen la base, sobre la cual se cimientan las filosofías personales de los maestros, autores del esquema en cuestión, respecto a la enseñanza de las matemáticas, los cuales se orientan a la construcción personal del conocimiento matemático. El planteamiento de los maestros se enmarca en lo que algunos autores han denominado constructivismo radical (Ernest 1994a; Anderson, Reder y Simon, 2001) que proyecta la construcción individual en términos de desequilibrio, acomodación y adaptación.



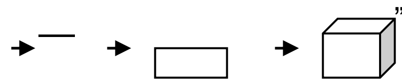
Esquema IV.3

Este esquema se basa en la consideración de ciertas relaciones entre los contenidos matemáticos, donde el progreso en el desarrollo del pensamiento consiste en la integración de esas relaciones en estructuras más amplias que garantizarán un conocimiento más objetivo. Cuanto más rico e integrado sea el sistema en cuestión, más posibilidades tendrá el sujeto de considerar lo real en su complejidad efectiva (Handal, 2003).

En el esquema se destaca la implicación activa de los estudiantes, donde les corresponde expresar y validar conjeturas, apoyar y defender sus conclusiones, reflexionar y juzgar la adecuación de sus propias ideas. La enseñanza de las matemáticas se asocia a sistemas de prácticas sociales, cada uno con su historia, las personas, las instituciones y las localizaciones sociales, las formas simbólicas y los propósitos (Ernest, 1996).

Los maestros manifiestan al explicar sus esquemas que los alumnos tienen concepciones más o menos elaboradas respecto a los contenidos matemáticos, “…*El alumno construye estructuras de conocimiento con base en lo que ya posee y sólo va ampliando la estructura…”* lo cual influye directamente en la estructuración del conocimiento e indirectamente en otro tipo de aprendizaje. Se proyecta la construcción idiosincrásica individual del significado en términos de esquemas cognoscitivos, y el aprendizaje por medio de los procesos de estructuración de lo particular a lo general lo cual tiene relación directa con la teoría de la etapas de Piaget llamada por algunos autores constructivismo radical (Anderson, Reder y Simon, 2001).

En este manifiesto, hecho por los maestros, se jerarquiza el desarrollo conceptual al aprender matemáticas, enmarcándose así en un línea constructivista radical (Anderson, Reder y Simon, 2001) puesto que la estructura está constituida por las ideas fundamentales y las relaciones que se establecen entre ellas adecuadas a la capacidad intelectual y a los conocimientos previos del alumno, mediante una secuenciación adecuada, se hace explicito como los conocimientos que poseen los alumnos se van reformulando hasta adquirir un carácter más estructurado. (Véase la parte superior del esquema en donde la representación del pensamiento y la construcción de los conceptos van adquiriendo una estructura cada vez más compleja).

[“.  ”]

Esquema IV.4

Por otro lado los maestros muestran como el docente puede percibir cuáles son los conocimientos más trascendentes para poder planificar estrategias en este caso se identifican con *“El maestro percibe ese desarrollo en los alumnos y trata de ofrecerle retos relacionados con las matemáticas…”* y en algunas ocasiones, plantear preguntas para que los alumnos reestructuren su conocimiento. Estos términos enmarcan el esquema producido por los maestros en una perspectiva falibilista acentuado la práctica de las matemáticas y el lado humano, como el resultado de procesos falibles (Ernest, 1996a).

En éstos términos el aprender depende de la manera en que cada estudiante individualmente mira una situación particular y dibuja sus propias conclusiones. Se propone la construcción de estructuras en niveles cada vez mayores de abstracción, que se originan por problemas prácticos, ayudando a organizar la comprensión del mundo y los patrones dentro de él. Los maestros ven el aprendizaje de las matemáticas como proceso incompleto y corregible, cambiando, con las nuevas verdades matemáticas que emergen como subproductos de invenciones (Ernest, 1996).

La perspectiva falibilista se posiciona en las filosofías de los maestros en el sentido de que el conocimiento construido por los estudiantes no tiene una connotación de falso o verdadero, sino que se corresponde con sus estructuras cognitivas y con la organización del mundo de las experiencias (Handal 2003). Aparece como aspecto esencial la construcción idiosincrásica individual del significado en términos de esquemas cognoscitivos propios, y además jerarquiza el desarrollo conceptual al aprender matemáticas.

Para los maestros autores de éste esquema, el alumno no posee estructuras cognitivas innatas a la manera de Kant. Estas estructuras se construyen, tienen carácter genético y evolucionan permitiendo cada vez un mejor diálogo con el mundo de las experiencias, al poder formular y contestar mayor cantidad de preguntas sobre ellas mismas. Los procesos de construcción, sólo son viables en la medida que se sugieran y se posibiliten por las estructuras de pensamiento logradas y por los conocimientos anteriores (Anderson, Reder y Simon, 2001).

Algunas de las estrategias que se desprenden directamente del *"constructivismo radical"* incluyen actividades reflexivas, como aprender por medio de la resolución de problemas (Handal, 2003) donde el sujeto y el objeto de conocimiento son inseparables se construyen mutuamente a través de la actividad; a la par que se aprende, se desarrollan las estructuras de pensamiento y éstas a su vez posibilitan nuevos conocimientos.

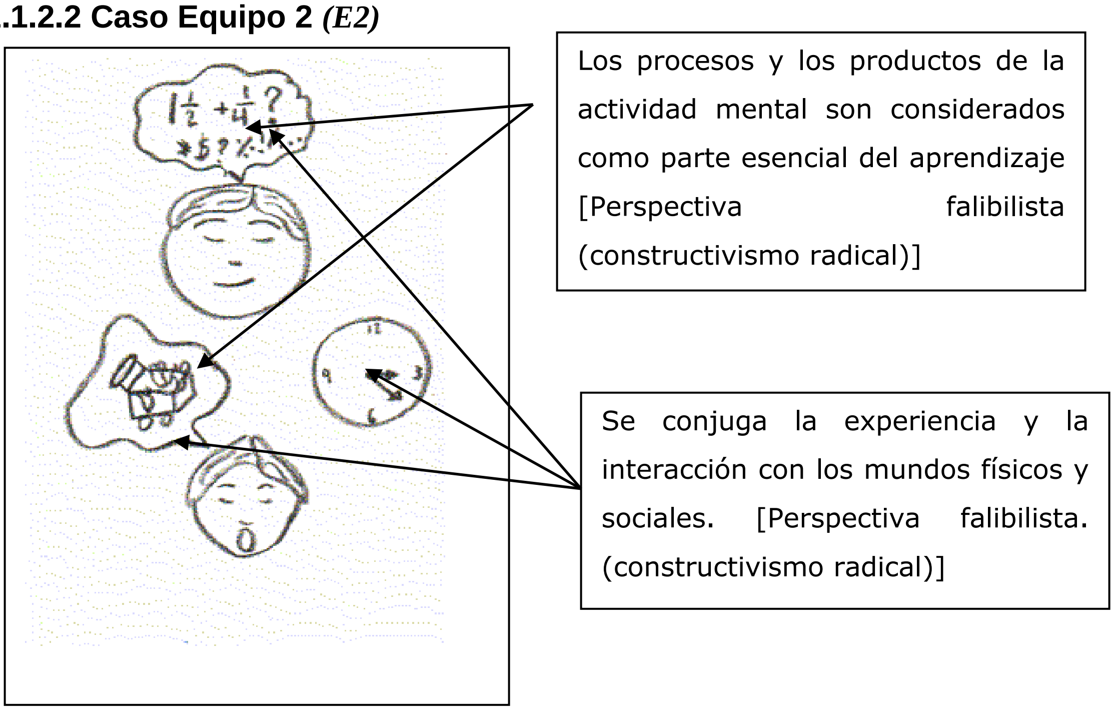
Los aspectos individuales de la construcción del conocimiento se perciben como prioridad "*El alumno construye estructuras de conocimiento con base en lo que ya posee y sólo va ampliando la estructura de tal manera que el conocimiento mayor tiene su base en relaciones con otros conocimientos básicos…",* se plantea una integración compatible de artefactos culturales o instrumentos (Falconi & Hoyos, 2005), "…*retos, en este caso relacionados con las matemáticas, que puedan resolverse utilizando recursos…"* es decir, plasman una construcción activa con base en experiencias y en conocimientos anteriores, conjugado con la experiencia y la interacción con el mundo físico.

Los aspectos sociales de interacción con artefactos culturales aparecen como elementos que obran recíprocamente, en las filosofías personales para fomentar un aprendizaje intraindividual. "…*para poder apoyar los descubrimientos o construcciones de los alumnos hacia una estructura más sólida de conocimiento…"*

En ésta postura se asume uno de los postulados importantes del constructivismo que afirma que el conocimiento previo da nacimiento a conocimiento nuevo. (Ernest, 1994a) "…*el alumno construye estructuras de conocimiento con base en* *lo que ya posee y sólo va ampliando la estructura de tal manera que el conocimiento mayor tiene su base en relaciones con otros conocimientos básicos…”* El punto de partida del conocimiento no es el instrumento o artefacto en cuanto tal, imponiéndose al sujeto; ni el sujeto imponiéndose al objeto, sino la relación entre ambos.

Se plasma explícitamente que el aprendizaje es esencialmente activo. Una persona que aprende algo nuevo, lo incorpora a sus experiencias previas y a sus propias estructuras mentales, es decir, cada nueva información es asimilada y depositada en una red de conocimientos y experiencias que existen previamente en el sujeto (Ernest, 1996a).

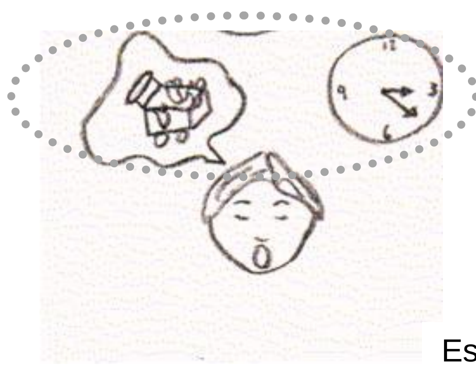
4.1.1.2.2 Caso Equipo 2 ***(E2)***



Esquema IV.5

En este contexto la enseñanza es básicamente utilitaria, los estudiantes adquieren experiencias y contenidos útiles. *“El papel del maestro es plantear problemas reales para que los alumnos puedan además de construir nuevas* *relaciones hacer uso de las que ya poseen".* La intervención del maestro está vinculada con la libertad, con la atención a las inquietudes de los alumnos y con el planteamiento de cuestionamientos para que todos avancen e intercambien ideas, es decir, que los alumnos ocupan y construyen el conocimiento al operar cuestiones de la realidad. Proporcionan un acercamiento a la generación del conocimiento que confía en el contexto, donde los procesos de aprender y de entender están socialmente situados (Cobb, 2006).

En éste sentido el conocimiento construido por los estudiantes se corresponde con la organización del mundo de las experiencias. Para los maestros autores del esquema el alumno dialoga con el mundo de las experiencias, al poder formular y contestar mayor cantidad de preguntas planteadas en un contexto real. El saber se genera en la práctica, a través de un sentido de la situación social y de las actividades en las cuales el saber ocurre y apela a constructos falibilistas específicamente relacionados con la teoría de la cognición situada.

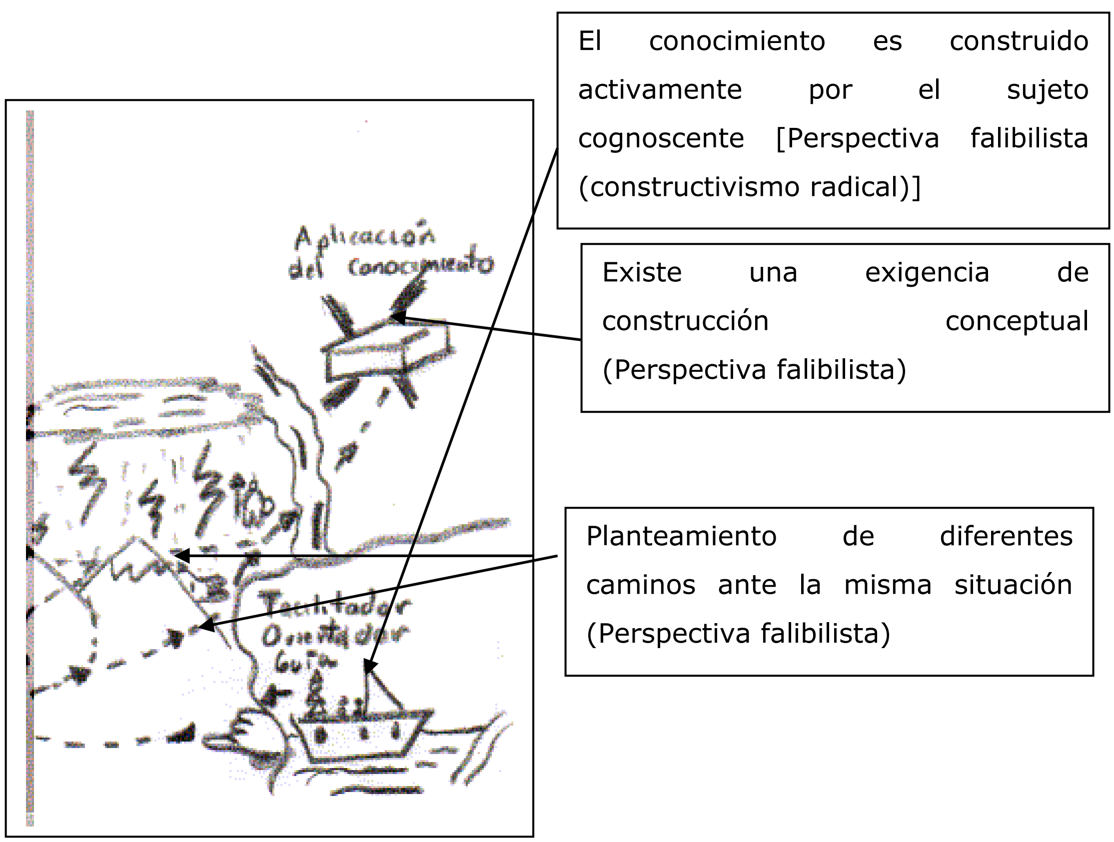


Esquema IV.6

El lado humano es acentuado en la construcción del conocimiento matemático, se considera a las matemáticas como el resultado de procesos falibles, empíricos. (Lakatos, 1976 en Ernest, 1996a). La posición falibilista permea las cuestiones de intervención *"…el papel del maestro es plantear problemas reales"…"el problema y la resolución que plantearan un conflicto* en las *estructuras existentes…"* y el constructivismo radical (Piaget, 1961) hace su aparición en torno a los procesos de construcción del conocimiento matemático *"…para que los alumnos puedan además de construir nuevas relaciones hacer uso de las que ya poseen…" "…Para que el alumno utilice los conocimientos que ya posee pero además no le sea suficiente para resolver la situación si no que tenga que avanzar más en el conocimiento matemático…"*

Se plantea que sólo es posible encontrar algo cuando se va hacia la realidad con una pregunta planteada, con un problema que se quiere resolver. Se considera el aprendizaje y la construcción del conocimiento matemático como un proceso incompleto y corregible, asociado a la posición falibilista que privilegia las prácticas sociales (Ernest, 1996b).

4.1.1.2.3 Caso Equipo 5 *(E5)*



Esquema IV.7

En éste esquema el enfoque hacia el problema y hacia el hecho de conocer está en la mente del sujeto cognoscente el cual no tiene otra alternativa que construir sobre la base de su propia experiencia, el conocimiento entonces es construido a partir de las experiencias individuales. Postulado esencial del constructivismo radical (Ernest, 1994a). Esta tendencia coloca el énfasis en el saber hacer y hace de la resolución de problemas la actividad central de l*a enseñanza de las matemáticas, c*onsidera como fundamental las estrategias generales que ayudan a analizar, interpretar y tomar decisiones frente a diversas situaciones.

El esquema muestra el problema como una forma de hacer responsables a los alumnos de sus aprendizajes, resultado de analizar las situaciones que se les presentan utilizando los recursos intelectuales propios, así como correr los propios riesgos para aprender. La experiencia se postula como esencial y se presentan caminos diferentes lo cual plantea razones para creer que las experiencias de los estudiantes no son similares. El aprendizaje de las matemáticas está asociado a sistemas de prácticas sociales, aunque cada uno con historia y relaciones diferenciadas (Ernest, 1996).

La función del conocimiento *es adaptativa*, en el sentido de la experiencia, tendiente hacia el ajuste y la viabilidad sirve a la organización del mundo experiencial del sujeto (Cobb, 2006), se proyecta una imagen vital de las matemáticas experimentándose con un carácter humano, personal, intuitivo, activo, de colaboración, creativo, de investigación, cultural, histórico, de relación con las situaciones humanas, postulados que están planteados explícitamente en la perspectiva falibilista de las matemáticas (Ernest, 1996).

Se reconoce que los procesos sociales y la construcción individual son piezas esenciales que juegan un papel muy importante a la hora de aprender matemáticas (Ernest, 1994b), puesto que el esquema retrata elementos relacionados con la idea de trabajar con problemas y explorar con base en ellos, planteando la oportunidad de que los alumnos puedan comunicar, argumentar, proponer y analizar estrategias y reflexiones distintas ante la misma situación.

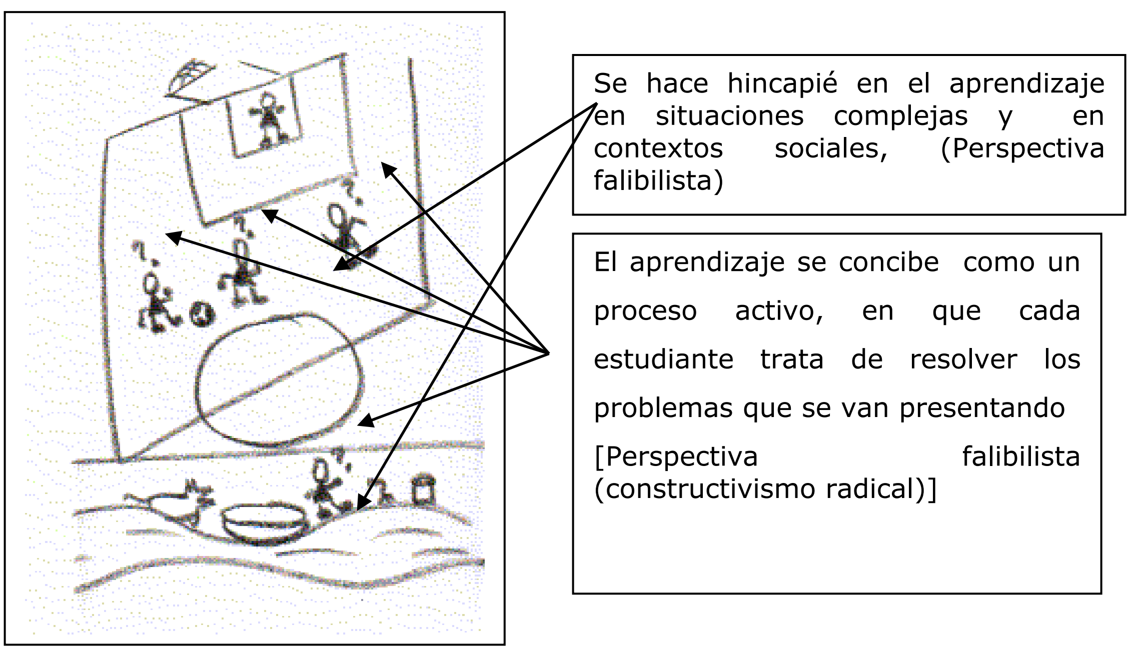
Hay consenso en que la gente no registra las experiencias en forma pasiva, sino que interpreta la información nueva con la ayuda de los conocimientos y la experiencia previos. Estas experiencias parten así mismo de la realidad, poniendo la atención en la reconstrucción o invención de la matemática por el estudiante, "…Partimos de una base que son los conocimientos previos de los alumnos…"*El papel de los maestros es solamente facilitar el camino de los conocimientos previos hasta el nuevo conocimiento…".*De esta manera el conocimiento matemático no es algo totalmente acabado sino en plena creación, así más que conceptos que se aprenden existen estructuras conceptuales que se amplían y enriquecen. Tales experiencias fueron planteadas como parte integral de una teoría constructivista (Anderson, et al., 2001).

El aprendizaje se plantea como un proceso individual, en donde a pesar de que todos los estudiantes están situados en una situación particular similar, el bagaje de conocimientos y experiencias limitan o potencian el camino hacia la construcción del conocimiento matemático (Anderson, Reder y Simon, 2001); *"…Hay caminos seguros para resolver un problema, pero el alumno tiene que recorrer el que según sus posibilidades conocimientos y habilidades le permitan, encontrará retos por vencer en cada camino hacia la resolución del problema o hacia la búsqueda del conocimiento y en cada camino son diferentes…".* se resalta el papel del docente como guía para orientar a los estudiantes a conseguir el objetivo.

Los maestros al postular que *"…El maestro sólo orienta y ayuda a los alumnos a vencer sus propios peligros mediante herramientas que lo orienten hacia el logro de la solución o aplicación del conocimiento…"* imprimen en ello que los significados, o las relaciones conceptuales, no pueden ser transmitidos, en otras palabras, que ellos se derivan únicamente de la experiencia individual y luego se pueden ajustar intersubjetivamente (Anderson, Reder y Simon, 2001).

De esta manera, los significados son subjetivos, según esta visión, el estudiante es el único responsable de sus pensamientos, su conocimiento y de sus acciones, lo cual pone en evidencia el apego al constructivismo radical (Piaget, 1961). "…*Hay caminos seguros para resolver un problema, pero el alumno tiene que recorrer el que según sus posibilidades conocimientos y habilidades le permitan, encontrará retos por vencer en cada camino hacia la resolución del problema o hacia la búsqueda del conocimiento…"* Subyace el principio de que el conocimiento no es recibido pasivamente sino construido activamente por el sujeto cognoscente como la organización del mundo experiencial (Ernest, 1996a).

4.1.1.2.3 Caso Equipo 6 *(E6)*



Esquema IV.8

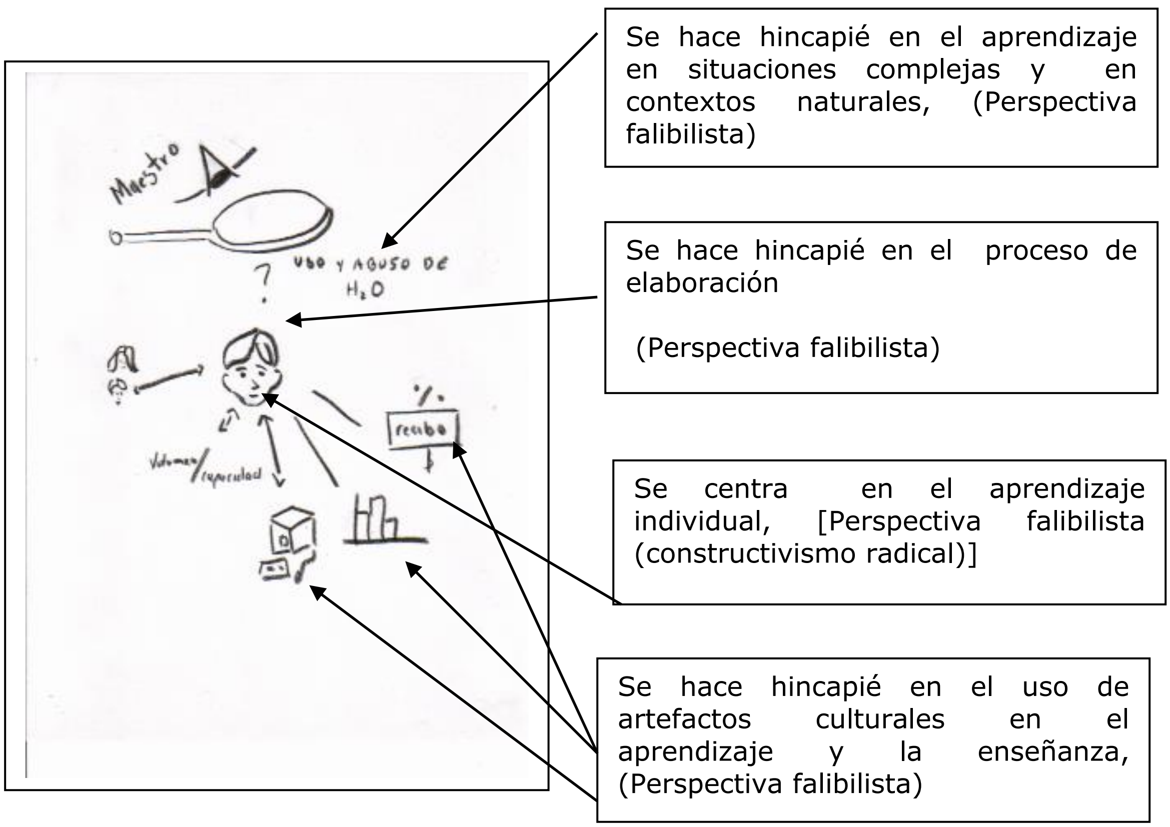
Este esquema retrata caminos falibles en el abordaje de los conocimientos matemáticos, contextualiza el aprendizaje en un escenario en donde hay elementos a favor y elementos en contra. Se concibe el problema en el momento en el cual una persona desea algo pero no tiene claras las acciones que debe tomar para conseguirlo, de tal manera que se presenta un obstáculo que debe ser librado, al echar mano de conocimientos adquiridos previamente y de sus propias capacidades.

"Plantear problemas que tengan que ver con la vida diaria de los alumnos y con sus intereses", se dice con frecuencia que este aprendizaje contextualizado es la base del constructivismo radical (Anderson, et al., 2001) pero también se sostiene que éste yace en el estado interno de la persona. Éstas filosofías están enmarcadas en un carácter pragmático, cultural e histórico, en donde el aprendizaje se ve situado (Coob, 2006) en el contexto de una situación problemática real que reclama el uso y generación de nuevo conocimiento para su solución.

La cognición situada (Coob, 2006) como parte de las teorías ubicadas en la posición falibilista ha llegado a asociarse con la idea de que la instrucción debe darse en contextos similares a la vida real, proporciona un acercamiento a la generación del conocimiento que confía en el contexto. Los procesos de aprendizaje están socialmente situados y el conocimiento se genera en la práctica, a través del sentido de la situación.

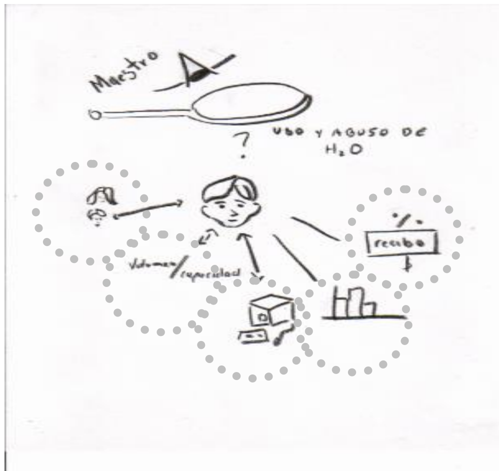
4.1.1.2.4 Caso Equipo 7 *(E7)*

En el caso del equipo 7 se niega que las matemáticas puedan ser sabidas *a priori*. Tal como lo sostienen en las posturas falibilistas (Ernest, 1996a). Se plantea que descubrimos hechos matemáticos por medios empíricos relacionados con la investigación. *“los problemas deben significar un verdadero reto al razonamiento de los alumnos y no sólo pedir la respuesta o aplicación de los conocimientos.”*



Esquema IV.9

Los maestros consideran que los recursos alternos a la clase, se encuentran estrechamente vinculados con una mejora en las habilidades de los alumnos. Se retrata de manera clara que los conocimientos de los alumnos son el resultado de una red de influencias (con el material, con los compañeros, con el maestro).



Esquema IV.10

La investigación, el razonamiento, la argumentación, la flexibilidad del pensamiento, en torno a situaciones problemáticas actuales, *"uso y abuso del H_2O"* sitúa al aprendizaje de las matemáticas en el desarrollo de competencias para la vida en sociedad, donde no sólo se trata de aprender un concepto matemático se intenta que los estudiantes tomen conciencia de las problemáticas que se están viviendo actualmente. En este sentido el aprendizaje es dialéctico, y es ubicada dentro de la historia de cada quien, la tradición y la cultura son la base para la verdad (Cobb, 2006).

Se plantea como tarea principal del profesor la de facilitar actividades interesantes que pongan al estudiante en disposición de aprender y le animen y ayuden a establecer relaciones entre diferentes recursos. Continúa la aceptación de que el aprendizaje debe ser un proceso activo, porque para aprender es preciso que se produzca un cambio en el sujeto, el que sólo puede lograrse mediante lo que hace dicho sujeto; a qué presta atención, a qué actividades se dedica (Anderson, et al., 2001). "…*exploración de diversas informaciones de muchas fuentes para construir un conocimiento argumentado y sólido…"*

La actividad del maestro es importante en la medida en que logre que los estudiantes realicen tareas que de otra manera no realizarían, con la apuesta de que generarán el material deseado utilizando material artificial (Anderson, et al., 2001). *"…seguimiento de los modos de trabajar con la información por parte de los alumnos y planteamiento de recursos que orienten el propósito que se pretende..."* Se plantea el ejercicio de las destrezas en su contexto real como parte importante para la motivación y a la vez para aprender.

Consideran la enseñanza de las matemáticas como una actividad en la que es preciso *interactuar* por medio de diferentes recursos para implicar a los estudiantes en la búsqueda de estrategias para afrontar la resolución de situaciones problemáticas donde según los docentes integrantes de este equipo *"…las matemáticas se relacionan con la exploración de diversas informaciones de muchas fuentes para construir un conocimiento argumentado y sólido…"*

Se plantea un proceso de aprendizaje individual donde los alumnos pueden descubrir y coordinar las relaciones matemáticas virtualmente contenidas en los recursos con lo que ellos ya saben, implica un esfuerzo para encontrar algo que les ayude a comprender la situación (Anderson, et al., 2001). El aspecto fundamental de esta filosofía esta puesto en el empleo y el acceso a diversos recursos para generar mejores condiciones de aprendizaje.

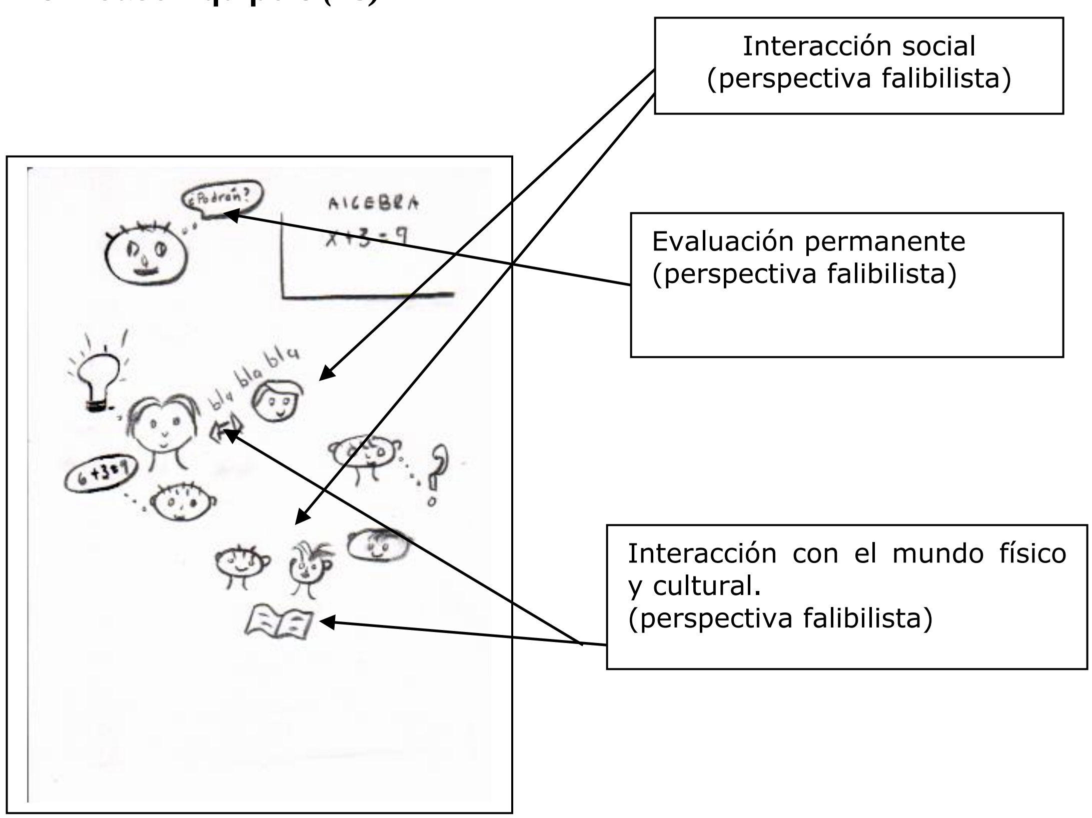
Los escritos constructivistas también propugnan la utilización de problemas "auténticos" y se pone mucho énfasis en los problemas con que podrían tropezar los alumnos en la vida diaria. Algunas de las situaciones de aprendizaje que recomiendan los escritos de los constructivistas radicales involucran tareas que pueden ser resueltas por un solo sujeto (Anderson, et al., 2001). Las características más sobresalientes de esta categoría asociada al constructivismo radical aplicado a la enseñanza de las matemáticas son:

- La dependencia en el aprendizaje por descubrimiento.
- El aprendizaje en situaciones complejas “auténticas”.
- El aprendizaje situado en diferentes contextos sociales.

4.1.1.3 Filosofías falibilistas con base en una teoría social del constructivismo

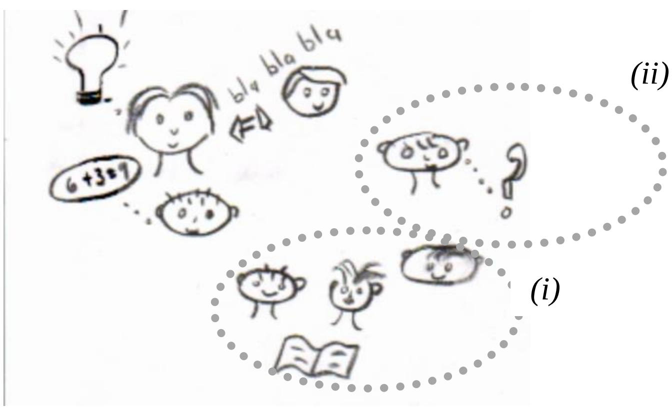
La definición de este tercer grupo de filosofías se basa en una consideración fuerte de la dimensión social. El planteamiento compatible de los procesos sociales y la construcción individual del conocimiento es la pieza central para aprender matemáticas (Lerman, 1992) en éstas filosofías, que en conjunto comparten la noción de que el mundo de lo social se convierte de cierta manera en una situación formativa.

4.1.1.3.1 Caso Equipo 3 *(E3)*



Esquema IV.11

En el esquema propuesto por el equipo 3, se puede percibir, desde el punto de vista de la didáctica de matemáticas, que los maestros han dado paso a compartir el poder (Fenema, 1999). Esto es, entre sus filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas está el dar libertad para que los muchachos exploren con base en el *"planteamiento de problemas"* y puedan recurrir a sus compañeros para resolver dudas, de manera que no sea el maestro el único que pueda orientar. Se reconoce que los procesos sociales *(i)* y la construcción individual *(ii)* son piezas esenciales a la hora de aprender matemáticas, lo cual constituye según Ernest, (1994) uno de los postulados importantes de las teorías sociales del constructivismo.



Esquema IV.12

Se percibe un acercamiento a la generación del conocimiento, donde los procesos de aprendizaje están si*tuados socialmente,* (Bartolini-Bussi, 1991) *"Planteamiento de problemas con la implicación ¿podrán?"* y el conocimiento se genera a través de las interacciones físicas y sociales. "…*pueden resolver el problema casi al instante, otros tienen que apoyarse en sus compañeros o buscar otro tipo de información adicional…"*

Se plantea la construcción de conocimiento matemático con base en la comunicación y el intercambio entre pares postulados base del constructivismo social (Ernest, 1994)**, "…***En el proceso hay alumnos que pueden resolver el problema casi al instante, otros tienen que apoyarse en sus compañeros o buscar otro tipo de información adicional…".*

Consideran al alumno situado históricamente con características específicas de desarrollo (Bartolini-Bussi, 1991), ***"…****se dedican a hablar o hacer otras cosas que en la mayoría de los casos nada tiene que ver con el problema…",* es decir, en sus filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas no sólo se centran en el abordaje pedagógico de los contenidos matemáticos, sino también en las constricciones que pueden ocurrir durante el proceso.

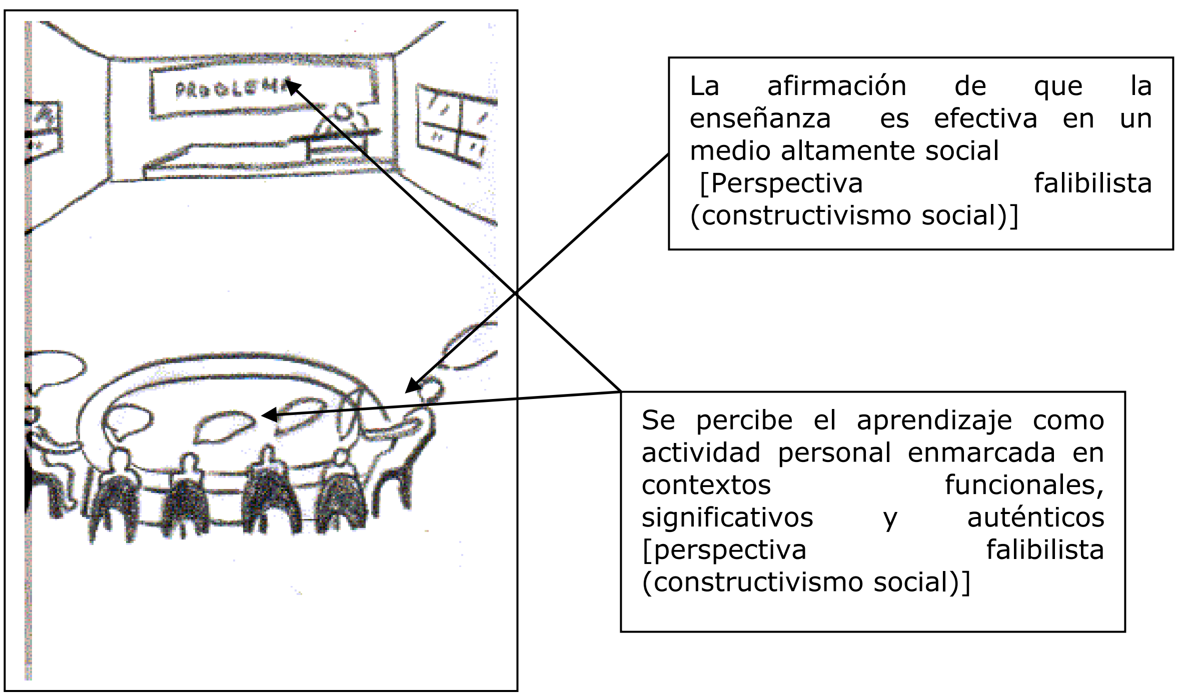
En este sentido los maestros consideran el *"Planteamiento de problemas con la implicación ¿podrán? Que en este caso es la evaluación permanente…", "el maestro tiene que mediar para orientar,"* la tarea del maestro como evaluador y mediador de este tipo de situaciones, donde la evaluación no se considera en su sentido administrativo, si no por el contrario, en el sentido pedagógico relacionado con la vigilancia constante de los procesos seguidos por los estudiantes para poder ofertar la ayuda pedagógica pertinente en el caso (SEP, 2006b).

Se propone una forma de aprendizaje basada en la actividad social, donde intervienen, mente, interacción, conversación y contexto como parte del fenómeno. La construcción del conocimiento matemático se ve como social y conversacional, porque el pensamiento individual es formado por una conversación interna convocada por un tipo de interacción ya sea física o social (Bussi, 1994).

La cognición es dialéctica en cada estudiante, el aprendizaje se logra a través de una red de relaciones entre los estudiantes. Aparece una *alerta pedagógica,* donde las construcciones y variables en el conocimiento tienen un avance significativo con base en la intervención mediadora del profesor y en las interacciones sociales. Se concilian procesos sociales e individuales como piezas centrales y esenciales para aprender matemáticas.

El proceso de aprendizaje y enseñanza es interactivo y comprende la negociación tácita y expresa del significado de los conceptos matemáticos (Bartolini-Bussi, 1991). En el curso de estas negociaciones, maestro y alumnos elaboran una realidad matemática que se da por compartida y que constituye la base de la comunicación. Se sugiere que el imperativo social gobierna las funciones educativas hasta el punto de que cualquier entendimiento está basado en la discusión.

4.1.1.3.2 Caso Equipo 4 *(E4)*



Esquema IV.13

Según este esquema los maestros promueven en sus alumnos la comunicación de sus conjeturas, reflexiones, dudas, reestructuraciones, etc. Los alumnos aprenden al establecer relaciones a través de la interacción con sus compañeros y con el medio, de esa manera coordinan relaciones y proponen conjeturas.

Los elementos que se perciben como parte de sus filosofías personales, respecto a la enseñanza de las matemáticas, se derivan de procesos de comunicación producto de las interacciones entre los estudiantes. Se asume que el proceso de desarrollo justamente tiene lugar o es viable en cuanto existan factores mediadores que den matices a un proceso que demande trabajar con algunos referentes comunes y que a su vez permita proyectar el proceso individual de abordaje de la situación (Bartolini-Bussi, 1991). Así el proceso educativo del ser humano, visto como un acto formativo intencional es proyectado con influencia de lo social y lo cultural.

La afirmación de que el aprendizaje es efectivo en un medio altamente social se basa en las ideas de que:

1) Prácticamente todos los empleos son marcadamente sociales.
2) El aprendizaje está íntimamente vinculado con el contexto en que se desarrolla (Anderson, et al., 2001).

Vygotsky es considerado el precursor del constructivismo social, a partir de él, se han desarrollado diversas concepciones sociales sobre el aprendizaje (Ernest, 1994), estos enfoques coinciden en considerar al individuo como el resultado del proceso histórico y social, donde el lenguaje desempeña un papel esencial y el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural (Handal, 2001). Se percibe el trabajo de comunicación y exploración de conceptos, con base en situaciones problemáticas *"…se parte del planteamiento de problemas…",* el intercambio de ideas entre los alumnos y la orientación del trabajo a través de preguntas. *"…El maestro toma el papel de un alumno más y se integra al grupo o al equipo de tal manera que la ayuda será por medio de preguntas* como: ¿cómo lo resolverías? ¿Qué planteamiento sugieres? ¿Por qué? ¿Por qué consideras que?...*"*

Esquema IV.14

Los nuevos conocimientos se forman a partir de los propios esquemas de la persona producto de su realidad, y su comparación con los esquemas de los demás individuos que lo rodean (Bartolini-Bussi, 1991) *"…Los alumnos comparten su conocimiento y se retroalimentan con sus compañeros…"*

Se considera el aprendizaje en el ámbito de la interacción social y esta interacción social como posibilidad de aprendizaje es lo que se ha denominado la zona de desarrollo próximo (Cobb, 1989) que surge generalmente como el contexto para el crecimiento a través de la ayuda dicho en palabras de los docentes *"...el maestro evalúa mediante las participaciones de cada uno de los alumnos para poder plantear problemas más sencillos que ayuden al alumno a resolver el problema…"*

Las características más salientes de esta categoría asociada al constructivismo social aplicado a la enseñanza de las matemáticas son:

- El aprendizaje y el desarrollo son una actividad social y colaborativa que no puede ser "enseñada" a nadie.
- Depende del estudiante construir su propia comprensión.
- La interacción personal puede ser usada para diseñar situaciones apropiadas durante las cuales el estudiante podrá ser provisto del apoyo apropiado para el aprendizaje óptimo.
- El aprendizaje tiene lugar en contextos significativos, preferiblemente el contexto en el cual el conocimiento va a ser aplicado.
- El conocimiento matemático se constituye en una “producción”, creada y experimentada por los agentes cognoscitivos dentro de prácticas sociales.

4.1.2 Emergencia de la matriz de desarrollo profesional

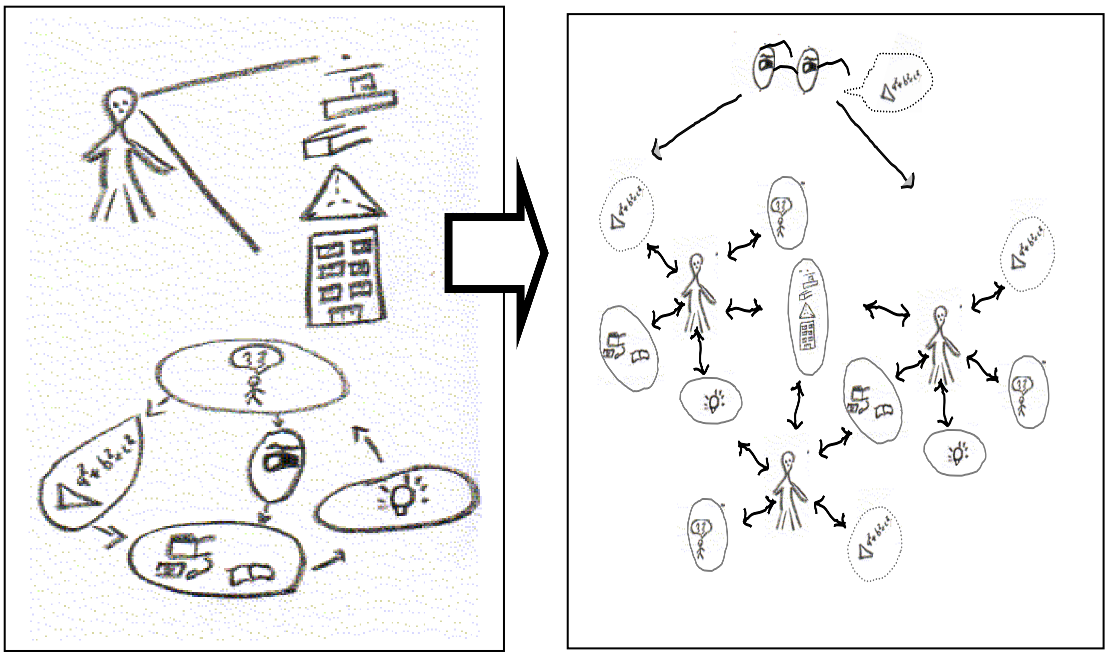
Las producciones generadas por los docentes en el marco del desarrollo de la tarea 1 fueron la base para el planteamiento de las tareas subsecuentes, con base en la matriz de desarrollo profesional (Ver sección 2.7); enseguida se presenta la experiencia de 3 equipos en el paso por las tareas planteadas para la primera fase de la investigación

4.1.2.1 Evoluciones en torno a las filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas

4.1.2.1.1 Caso equipo 1 *(E1)*

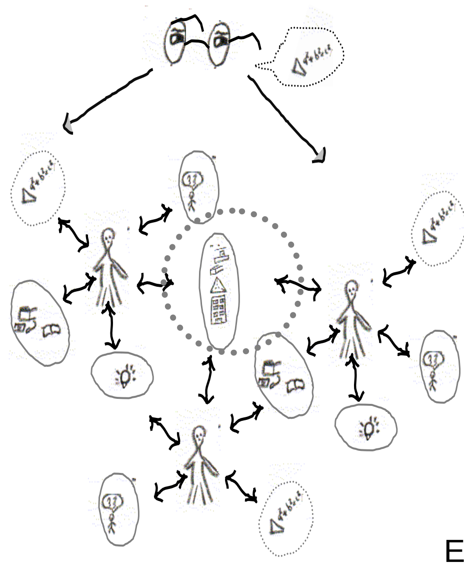
Tarea *(T2)*

Una de las variaciones importantes que se percibe en el equipo 1 es la tendencia al planteamiento de las discusiones con toda la clase, donde el maestro organiza un espacio para que los estudiantes discutan y cuestionen el pensamiento de los demás, se hace hincapié en un funcionamiento dialógico (Wertsch y Toma,1995). Cabe resaltar que las características planteadas en el esquema inicial conservan su poder, es decir, se sigue planteando la estructuración del conocimiento como uno de los elementos en los cuales centrar la atención a la hora de enseñar matemáticas.



Esquema IV.15

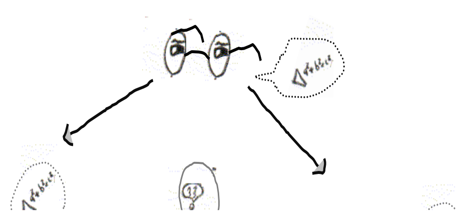
Existe un reconocimiento general en lo que respecta al énfasis en la estructura abstracta de la matemática. *"…el alumno tiene que hacer un inventario de los conocimientos que posee y que en teoría estarían en posibilidad de poder aportar elementos en la resolución de la situación problemática…"* La estructura se convierte en una herramienta que permite organizar un arsenal de relaciones más o menos generales, una vez que se encuentran relaciones satisfactorias con una estructura conocida (Anderson, Reder y Simon, 2001)



Esquema IV.16

Se reconoce la necesidad de cultivar la intuición en general, la manipulación operativa del espacio físico y social en el que se desenvuelven los estudiantes, es decir se comienza por romper el aislamiento intelectual para acceder a una postura en donde se reconcilian teóricamente los procesos sociales y la fabricación individual del sentido como piezas centrales y esenciales para aprender matemáticas (Ernest, 1994b) *"…al plantear una situación actual los alumnos tienen que reflexionar y emitir juicios y opiniones con base en la información y el análisis de la problemática que les atañe físicamente…"*

La capacidad de un maestro de reconocer, modificar o desarrollar una actividad central que es cognitivamente exigente, permite a las matemáticas conservar su vitalidad intelectual.



Esquema IV.17

Se plantea una interacción fecunda entre la realidad y los contenidos matemáticos en la cual se hace necesario acudir, por una parte, a la filosofía falibilista, que nos devela ese proceso de emergencia de nuestra matemática en el tiempo (Ernest, 1994), al promover de los estudiantes el aporte de "…*elementos en la resolución de la situación problemática, planteada, y establecer estrategias de búsqueda de nueva información para poder establecer una estrategia de trabajo adecuada a las necesidades de la nueva situación…"*

También se hace referencia al saber hacer y saber convivir cuestiones que están plenamente relacionadas con lo planteado en el enfoque de la educación matemática, contenido en nuestros planes y programas de estudio, que hacen patente el desarrollo de competencias relacionadas con la resolución de problemas y el manejo de técnicas (saber hacer) y con la comunicación (saber convivir) (Sep., 2006).

Por otra parte, existe la conciencia, de que cada vez más se va haciendo necesario explorar como prioridad los conocimientos previos para poder plantear otras situaciones de enseñanza para abordar otros contenidos, (Anderson, Reder y Simon, 2001) "…*implica la posibilidad de que cada alumno pueda asumir y dirigir su propio proceso de aprendizaje movilizando conocimientos previos ya sean culturales, científicos o tecnológicos en la resolución de la situación planteada…"*

Se plantea la idea de que en nuestro *pequeño mundo científico e intelectual,* tan rápidamente mutante, vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes (Bartolini-Bussi , 1994), Ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones *"…en el sentido de que el alumno tiene que hacer un inventario de los conocimientos que posee y que en* *teoría estarían en posibilidad de poder aportar elementos en la resolución de la situación problemática, planteada, y establecer estrategias de búsqueda de nueva información para poder establecer una estrategia de trabajo adecuada a las necesidades de la nueva situación…"*

(T3).

Los datos generados por los maestros en el desarrollo de la tarea 3 confluyen en una elección juiciosa de situaciones matemáticas que toman como referencia sus propias ideas vertidas en la tarea anterior. En general los datos reflejan diferentes formas de abordaje de los contenidos matemáticos y diferentes jerarquizaciones del desarrollo de competencias, según las actividades y las normas que plantean para el abordaje de la misma.

Una preocupación general que se observa en las modificaciones planteadas por los profesores del equipo 1 conduce a la búsqueda de la motivación del alumno desde un punto de vista que no se limite al posible interés intrínseco de la matemática y de sus aplicaciones (Cobb, 2006). Se percibe el esfuerzo por hacer patentes los impactos mutuos que la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, por una parte, y la matemática, por otra, han proporcionado.

Con la utilización de instrumentos como computadoras se plantea una importante posibilidad de proponer problemas dentro de un contexto y permite que el estudiante formule sus propias estrategias de solución a través de la experimentación (Falconi y Hoyos, 2005). En esta tarea los maestros manifiestan un intento por que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a través de diversos medios, a fin de involucrarlos en ella de un modo más hondamente personal y humano "…*Buscar en periódicos, Internet o algún libro un conjunto de datos de temas que resulten* *interesantes (los temas se pueden proponer de manera grupal) algunos temas pueden ser por ejemplo:*


La Jornada

Estalla la lucha frontal en contra del TLCAN

Aumentan reservas internacionales a 77894 mdd

Aumenta a 60 el número de muertos por la revuelta.

El índice de contaminación aumentó en un 0.5 %

…"

Esquema IV.18

La actividad planteada para desarrollarse con los estudiantes retrata que los procesos y los productos son considerados como parte esencial de la disciplina. Los métodos de aprendizaje por lo tanto no son únicos y no se puede demandar verdad absoluta "…*Investigar y reunir información de diversas fuentes…" "…Averiguar sobre las diferentes formas para presentar la información…", "…Seleccionar y clasificar la mejor manera de comunicar los datos…"* Esto hace alusión a un postulado importante de la filosofía falibilista que dice que la verdad matemática no es absoluta, porque de hecho la verdad es dependiente del tiempo y del espacio (Ernest, 1996).

El aprendizaje de las matemáticas es asociado a los sistemas de prácticas sociales "…*Los estudiantes tendrán que conformar su equipo para comenzar con el desarrollo de las actividades…"* esta asociación de las matemáticas con las localizaciones sociales y las formas simbólicas constituye una de las características planteadas para caracterizar los procesos falibilistas (Ernest, 1996).

Una de las innovaciones asociadas con el fin de las matemáticas es que éstas ya no son vistas como un cuerpo de conocimiento puro y abstracto (Ernest, 2008) por el contrario estas se definen en el marco de la cultura humana "…*Con recortes de periódicos y revistas los alumnos exploran la información y el tipo de números que se manejan, por ejemplo índices, número de habitantes de una población, variación de la bolsa de valores, variación de la temperatura y hacen una clasificación de los números y plantean su significado con base en un contexto social…"*. Es una forma de *falibilismo* que niega que las matemáticas pueden ser sabidas a priori, es decir que descubrimos hechos matemáticos por medios empíricos relacionados con la investigación (Lakatos, 1976 en Ernest, 1996a).

(T4)

Como se puede ver, la característica que distingue estos datos es el énfasis en la generación de un discurso metodológico que permite además de examinar las filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas de los maestros autores de la situación, focalizar elementos en los cuales los docentes encuentran un reto o resistencia para llevar a cabo las labores correspondientes a la acción educativa. Hawley & Valli (1999) afirman que considerar las necesidades de los maestros como aprendices provee oportunidades de aprendizaje que relacionan las necesidades individuales y por otra parte se organizan alrededor de la resolución de problemas de manera colaborativa.

Los maestros plantean su actividad sobre la idea falibilistica que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas en que han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad (Ernest, 1996).

Tales ideas están en plena consonancia con las ideas abordadas en los instrumentos conceptuales y parecen como un corolario natural de ellas. Se plantea la construcción del conocimiento matemático espontáneamente en el intento por explorar aspectos *matematizables* de la realidad (Anderson, Reder y Simon, 2001). En ese sentido, hay confluencia ideológica sobre las metas y propósitos de una nueva matemática, con alcance social, pues los profesores tienen como fin "…*construir los fundamentos del razonamiento lógico matemático contextualizado en la vida cotidiana de los alumnos y no únicamente desde los conceptos formales planteados teóricamente en los programas…"*

Partir de problemas, seguidos de posibles soluciones arriesgadas, con presencia de la examinación y la refutación, constituye una base cuasi-empírica (Ernest, 1996a). La atención se centra siempre en los bordes oscuros, los resultados pretenden ser crecimiento y evolución permanente, no acumulación de verdades y fundamentos eternos. Estos pueden incluir la masa, forma y tamaño, los atributos de matemáticas de un mundo digital o impreso. *"…posibilitando la búsqueda de información en distintos medios (impresos y digitales) para la comprensión de problemas derivados de la vida cotidiana…"*

Al respecto, los maestros han hecho emerger ciertas pautas reformadoras que pueden tener su reflejo en las teorías de la cognición situada y del constructivismo social (Coob, 2006), ya que plantean entre otras premisas que la matemática no se enseña ni se aprende sin la participación constructiva del aprendiz, sin la influencia del contexto cultural y sin el carácter moderador insustituible del docente pues se intenta *"…romper las fronteras que la escuela impone…", "… puesto que los alumnos pueden analizar el medio de información en el que están involucrados los objetos matemáticos en exploración, comprenderlo y en ocasiones transformarlo cuando logran ser conscientes que la situación los involucra como parte de la sociedad…".* Evidentemente, en esta perspectiva, la pragmática tiene un papel importante al *"…darle sentido a los conceptos matemáticos culturalmente…",* de acuerdo a la naturaleza del problema y el contexto.

El trabajo con las matemáticas se transforma en un espacio para compartir experiencias donde los estudiantes requieren intercambiar información al interior de sus equipos, acordar y compartir ayuda y apoyo para el logro de metas comunes (Coob, 2006). Se trata de una visión que fundamenta sus debilidades en cuestiones culturales, académicas y en la conciencia del estudiante hacia el estudio de las matemáticas, pues se pone de manifiesto la falta de "...*Interés de los estudiantes* por el estudio de las matemáticas…" Una postura de este tipo comulga con las tesis constructivistas que no sólo permiten advertir las dificultades que suelen tener los alumnos para aprender, sino también aporta una guía para desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje más eficientes, empleando un proceso de enseñanza donde el protagonista central es el alumno, considerando sus intereses, habilidades para aprender y necesidades en el sentido más amplio (Castillo, 2008).

Los maestros subrayan la importancia de una vinculación estrecha de las matemáticas con otros conocimientos y disciplinas en la educación, pues manifiestan la necesidad de activar *"…Canales de comunicación con otras áreas del conocimiento como español historia o geografía…";* lo que pone de manifiesto la necesidad de fortalecer los enfoques *transdisciplinarios* (Sep., 2006b) en la enseñanza de las matemáticas.

Es decir, se plantea la necesidad de la construcción de redes formadas por profesionales de diferentes disciplinas que establezcan situaciones didácticas comunes y que realicen todos los procesos de planeamiento, construcción y estrategia pedagógicos integradamente. Este es un asunto que se plantea también en los mismos planes de estudio de educación secundaria (Sep., 2006). Según los profesores autores de la propuesta en ella se promueve la convivencia y el aprendizaje en ambientes colaborativos y desafiantes. Se posibilita una transformación de la relación entre maestros, alumnos y otros miembros de la comunidad escolar.

Finalmente como consecuencia de la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) a la enseñanza de las ciencias, y particularmente a la de la matemática, se ha visto presionada la práctica pedagógica de los docentes para recurrir a este tipo de recursos con sus estudiantes, pues en las necesidades ponen de manifiesto el "…acceso a diversos medios digitales como el internet para explorar otros escenarios…"

(T5)

Involucrar a los maestros en la identificación de sus necesidades de aprendizaje y cuando es posible en el desarrollo de las oportunidades de aprendizaje y de los procesos que pueden ser usados, proveen oportunidades para organizar tareas alrededor de la resolución de problemas de manera colaborativa (Hawley & Valli, 1999).

En este sentido los docentes en el desarrollo de la *T5* identificaron la siguiente gama de aprendizajes considerados como básicos y de difícil comprensión los cuales representan el foco de atención considerado por los maestros como básico y a la vez implicar un reto para su práctica profesional puesto que es considerado de difícil comprensión. Cabe mencionar que los resultados de este ejercicio servirán para focalizar la atención en un tópico particular para la segunda fase de la investigación.

.

	Bloque 1
Contenidos Básicos	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales. 1.2 Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas. 1.4 Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar. 1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
Contenidos De difícil comprensión	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Tabla IV.1

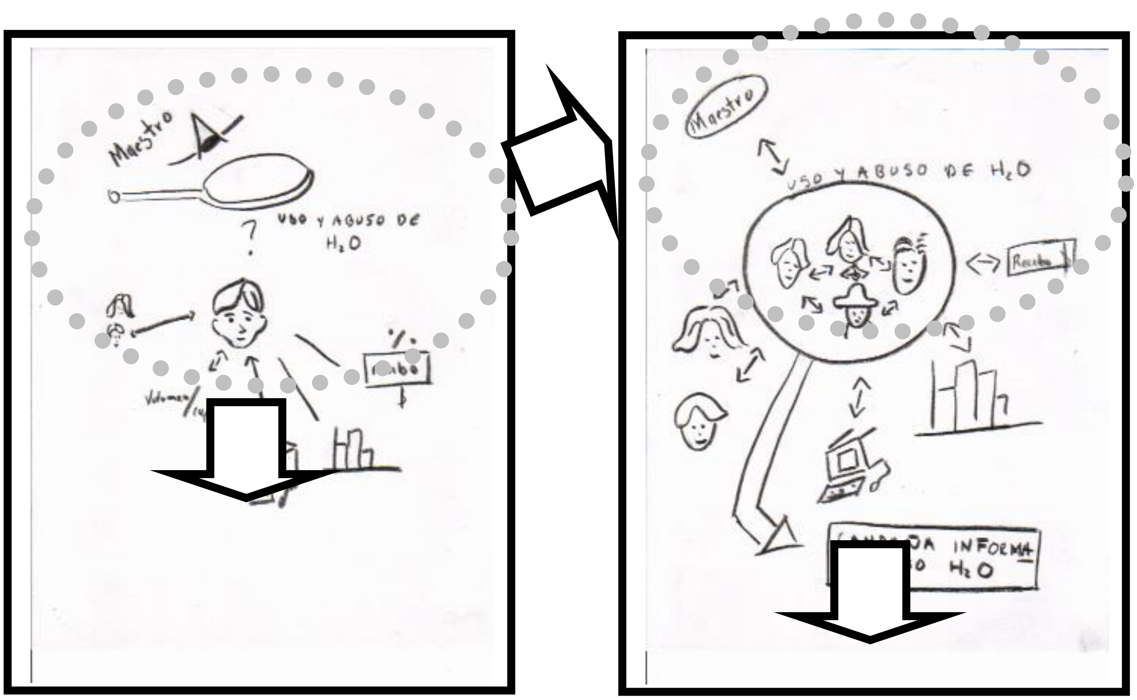
Se generan retos que oscilan en el eje de sentido numérico y pensamiento algebraico (sucesiones numéricas y reglas y propiedades del sistema de numeración decimal), además consideran ambos contenidos como básicos.

4.1.2.1.2 Caso equipo 7 *(E7)*

(T2)

Los maestros comienzan a ver el aprendizaje como un proceso por el cual las personas se apropian en un contexto social de instrumentos para “pensar” y “actuar” (Llinares, 2005). Es decir, consideran explícitamente que ciertos aspectos de la enseñanza de las matemáticas se pueden apoyar mediante la construcción social.

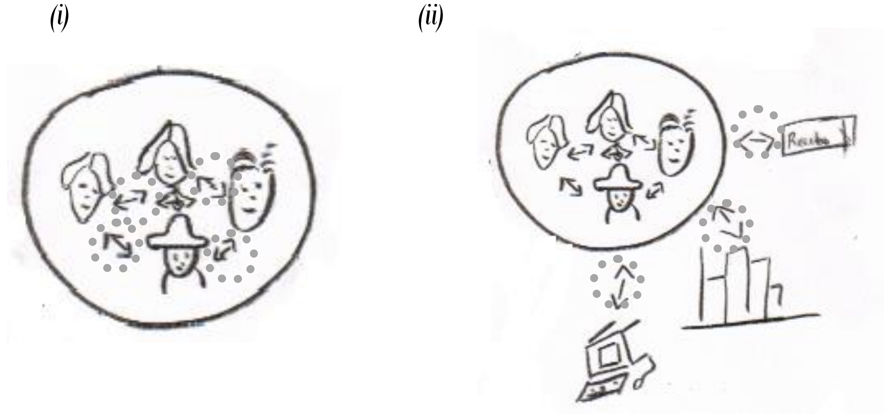
El diálogo y la negociación son planteados como los idóneos para alcanzar cierto consenso entre los estudiantes. El aprendizaje de las matemáticas se asocia con prácticas sociales, cada uno con su historia, personas, instituciones y lugares sociales, formas simbólicas, propósitos y relaciones de poder.



Esquema IV.19

Se plantean relaciones dialécticas entre sujeto-sujeto *(i)* "*…se motiva la interacción de los alumnos para que intercambien sus ideas estrategias y conjeturas…" y ente sujeto- objeto (ii) "…se motiva los alumnos a trabajar con diferentes recursos…"*

(i) *(ii)*



Esquema IV.20

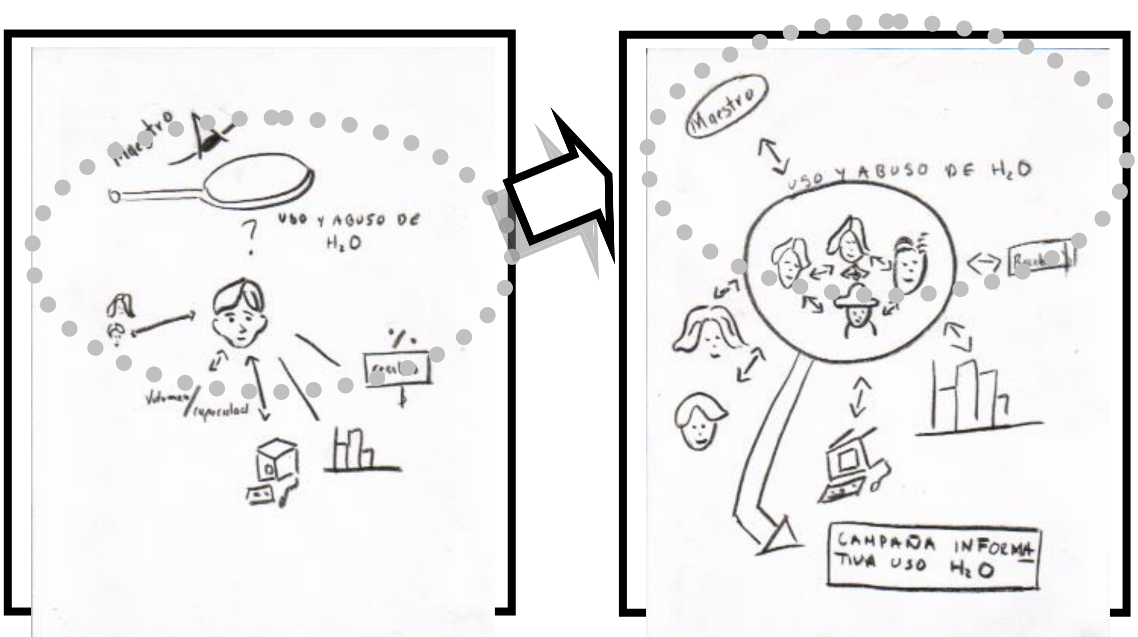
La gama de relaciones que se pueden dar entre individuos en interacción están marcadas por los polos de esa relación siendo la relación de cooperación motivada con base en un contexto cultural. El aprendizaje se desarrolla en el marco de una coordinación de actividades mediatizadas por diferentes artefactos culturales, como computadoras, recibos telefónicos, periódicos, libros, etc., los cuales permiten además de darle un valor cultural a la matemática al situarla en el contexto claro y preciso de un problema, acelerar en el estudiante la modelación del mundo físico (Falconi y Hoyos, 2005).

Esquema IV.21

Al mismo tiempo, el problema sobre el cual los alumnos reflexionan es parte de su propia realidad, “uso y abuso del H_2O”. La idea que marca la clave es la de negociación como eje de desarrollo de significados matemáticos. Los agentes interpretan los objetos bajo estudio colocándolos en contextos que les son familiares y a partir de esos puntos de vista idiosincráticos, la negociación arranca a través de ella los participantes llegan a un acuerdo provisional.

Durante el proceso de interacción dos perspectivas resultan ser ajustadas, de manera que un tema en conjunto es alcanzado." Aunque el "sentido matemático [mathematical meaning] es considerado como un producto de procesos sociales como un producto de interacciones sociales" (Voigt, 1998).

Se considera el aprendizaje de las matemáticas como producto de la cultura, los profesores acentúan que la dirección del aprendizaje de la matemática es dictada por la interacción en el grupo social que la realiza a*l “…negociar sus significados, al privilegiar diferentes estrategias, por lo que tiene que poner en juego el análisis y evaluación de sus propias ideas frente a las que plantean sus propios compañeros de equipo.”* Estos planteamientos comulgan con la filosofía social del constructivismo (Ernest, 1994c).



Esquema IV.22

La vehiculización de la práctica del aprendizaje de las matemáticas está planteada por medio de comunidades sociales y afirma la conexión empírica (Ernest, 1994b); con esto se distancia claramente de la *filosofía absolutista* sobre las matemáticas.

(T3)

La matemática es vista con un valor *instrumental* (Llinares, 2005), pues se ocupa para analizar las estructuras, los procesos y las relaciones de los *objetos ideales*. *"…Que los estudiantes utilicen la simulación para analizar situaciones probabilísticas…".*

Los maestros refieren el aprendizaje de las matemáticas como una *disciplina racional democrática,* en razón de que el conocimiento se discute sobre la base de la lógica, no de la autoridad (Ernest, 2009). Potencialmente, cualquier estudiante puede justificar o debatir los conocimientos utilizando la razón al explorar la situación, *"…Compartir la información con otros equipos para obtener el resultado de la simulación con 100 exámenes…", "…elaborar una presentación de la información, comunicarla y debatirla con sus compañeros…".*

La propuesta se centra en un trabajo dirigido, dando preeminencia a los «procesos de construcción de conocimiento, con base en dos componentes dialógicas:

- De restricción, [las situaciones están dirigidas y dejan poco espacio para el despliegue de ideas y de estrategias (Anderson, Reder y Simon, 2001)]

  "…Conseguir una bolsa que no sea transparente y tres fichas o canicas negras y una blanca…", "…Introduzcan las 4 fichas o canicas en la bolsa y por cada pregunta extraigan una ficha de la bolsa (si la ficha es blanca significa que respondió bien a la pregunta pero si es negra significa que la respondió mal)…", "…Elaborar una tabla de doble entrada para registrar los resultados…", "…Repetir el experimento con las 10 preguntas y con 10exámenes y registren sus resultados en la tabla:

Examen	❑ *Pregunta*					
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2						
3						
4						
5						

…"

Esquema IV.23

- De posibilidad, [se ofrece al alumno en la interacción con los otros (Anderson, Reder y Simon, 2001)] *"…Compartir la información con otros equipos para obtener el resultado de la simulación con 100 exámenes…", "…elaborar una presentación de la información, comunicarla y debatirla con sus compañeros…".*

La posición asociada al constructivismo social, reconoce que para ser oído, una voz debe ser de alguien que es un participante en el juego de lenguaje compartido (Ernest, 2009), postulado que se retrata al pedir a los estudiantes *"…Elaborar una presentación de la información, comunicarla y debatirla con sus compañeros…".* El constructivismo social se refiere a las matemáticas como cargadas de valores, con responsabilidad social (Ernest, 2009), situación que se bosquejó en la última actividad planteada *"…Con base en los datos obtenidos puede plantearse una campaña a favor del estudio en pro de obtener una buena calificación en contraste con el azar y la suerte…".*

Las matemáticas son el resultado de una práctica social e histórica (Ernest, 1994b). Su preocupación central se separa de las de los intentos absolutistas, los asuntos se centran en ¿cómo se hace la práctica matemática? Desde esta perspectiva, las matemáticas son mucho más que números y cálculos, sino que emergen a través de redes de correspondencia matemática, preguntas, y deliberaciones. Éste grupo de maestros de matemáticas combinan concepciones absolutistas del sujeto con posiciones falibles en las matemáticas y su enseñanza.

(T4)

Para el aprendizaje de las matemáticas se plantean escenarios compartidos por los mismos estudiantes con los que tienen que debatir y examinar críticamente las ideas hacia una convicción compartida. Se trata del establecimiento de normas socio-matemáticas (Coob, 2005), para crear un medio ambiente que regule las formas comunes de construcción de sentido matemático.

El individuo que aprende matemáticas debe construir los conceptos a través de la interacción que tiene con los objetos y con otros sujetos "…se trata de que ellos mismos puedan echar mano de los recursos disponibles para poder buscar y analizar la información y posteriormente comunicarla…" se plantea que el alumno pueda construir su conocimiento y llevar a cabo la interacción activa con los objetos matemáticos inmersos en el problema.

El aprendizaje de las matemáticas es visto como un esfuerzo creativo, el maestro y los libros de texto no son las autoridades absolutas en las aulas. Hay lugar para ser interrogados, hay espacio para la exploración y para la experimentación. Al plantear *"Que los alumnos utilicen los conocimientos matemáticos de manera significativa, es decir, que se desarrollen de manera cotidiana analizando situaciones reales."*

Esta tendencia en la educación matemática se ha caracterizado como la renuncia a "la autoridad matemática" (Cobb, Yackel, & Wood, 1992; Smith, 1996). Dar sentido comprende un conjunto de prácticas y normas que son colectivas, no sólo individuales o idiosincrásicas.

En éste tipo de planteamiento el alumno reconstruye la realidad externa, procesando la información recibida para organizarla y reorganizarla de manera que refleje de forma fiel un determinado contenido*, "…los alumnos tienen que buscar la información y analizarla…"* usando para ello estrategias efectivas como reglas de producción *"…al discutir y proponer la mejor forma de comunicar la información…", "…con base en la información analizada determinar una posición ante la situación planteada…".*Se entiende el aprendizaje como un proceso eminentemente social, enclavado en un entorno particular (Bartolini-Bussi, 1991). Se concibe el aprendizaje como la construcción social del conocimiento, que se materializa mediante la interrelación de los aprendices y de éstos con el ambiente. Los maestros reflejan un mundo externo tamizado e influido por los apremios de la sociedad, la cultura, el lenguaje y las relaciones con los demás, pues manifiestan la necesidad de *"...Promover un ambiente en donde sean los estudiantes los responsables de encontrar las soluciones a las situaciones planteadas…", "…Encontrar la manera de apoyar a los alumnos en el análisis de la información pues frecuentemente se encuentra que tienen dificultades para comprender lo que leen."*

(T5)

Entre las necesidades que pueden ser abordadas, los maestros manifiestan una gama de *impedimentos* que los investigadores o los facilitadores deben tomar en cuenta para analizarce en el espacio de desarrollo profesional que pretenda apoyarlos (Hawley & Valli, 1999).

	Bloque 1
Contenidos Básicos	1.2 Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas. 1.4 Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar. 1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
Contenidos De difícil comprensión	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Tabla IV.2

En la tabla podemos distinguir que se generan retos que oscilan en el eje de sentido numérico y pensamiento algebraico (sucesiones numéricas y reglas y propiedades del sistema de numeración decimal).

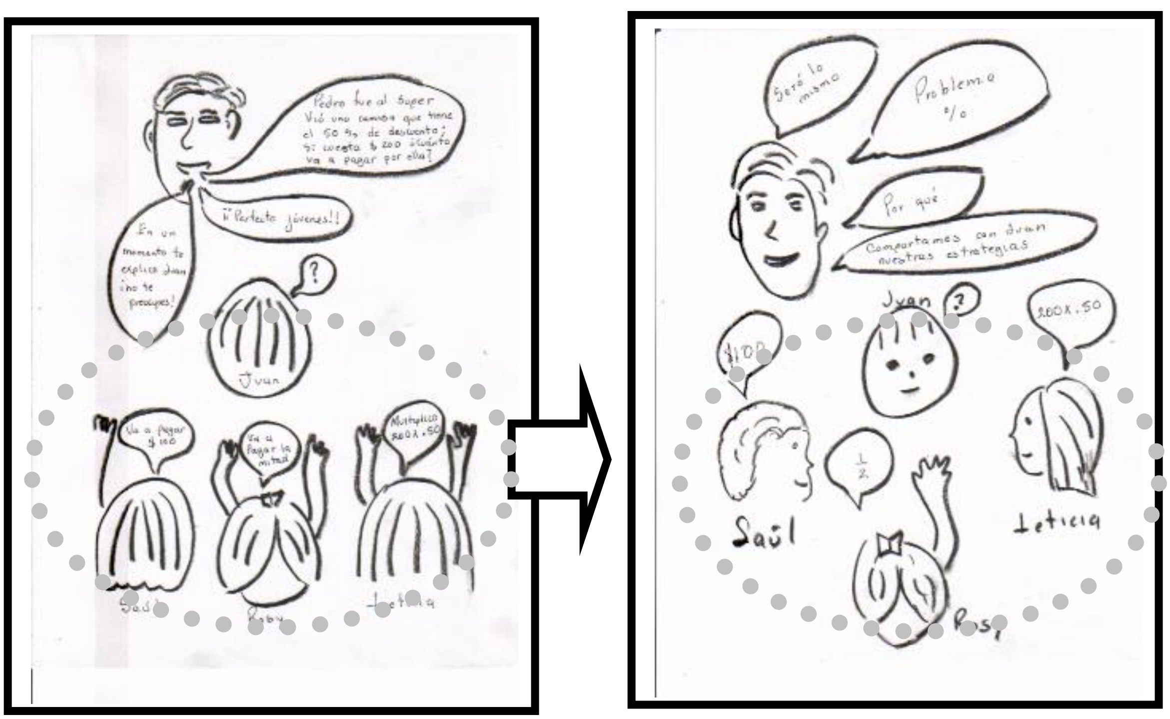
El contenido en el que los maestros coincidieron en considerarlo básico, pero que además con implicación de un reto mayor para su enseñanza es el siguiente:

1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

4.1.2.1.3 Caso equipo 8 ***(E8)***

(T2)

Las variantes planteadas en los esquemas iniciales, como producto del desarrollo de la tarea profesional 2, plantean un intento colectivo por plantear las experiencias educativas socialmente. Es decir visto desde el (E8) la experiencia del constructivismo Piagetiano se ve influida por una experiencia en la que lo socio-cultural (Bartolini-Bussi, 1991) se filtra disimuladamente en el acto educativo, ésta idea queda perfectamente retratada en las variantes planteadas, las cuales intentan modificar las experiencias educativas planteadas desde lo individual en experiencias planteadas socialmente.
Veamos:



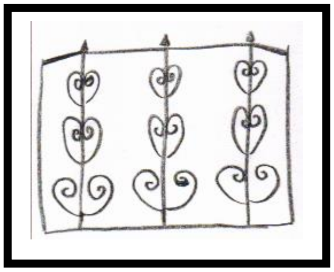
Esquema IV.24

La inmediatez del conocimiento individual se ve complementado por un proceso aún más complejo, en donde lo social se convierte en una parte esencial del desarrollo del estudiante, el propio estudiante es visto como contribuyente al desarrollo de las prácticas que facilitan y o restringen su propio proceso (Bartolini-Bussi, 1991), "…*los alumnos tendrán que proponer discutir y reflexionar para elegir la mejor estrategia para solucionar el problema…", "…los alumnos analizan situaciones sociales de la vida real y tienen que discutir sus propuestas de resolución*…". Gracias a los instrumentos conceptuales (LLinares, 2005), los maestros, superan su propia estructura del acto educativo formando nuevos centros estructurales.

Los maestros perciben la educación a través de instrumentos conceptúales derivados de la teoría (Llinares 2005). En las variaciones propuestas se muestran las prácticas sociales como una *función normativa* para la enseñanza de las matemáticas (Cobb 2005). Es decir como una regla que permite que las matemáticas sean discutidas y aprendidas.

(T3)

Las situaciones planteadas por los maestros sugieren el trabajo vinculado con la realidad de los alumnos y sus fenómenos, es decir, se percibe el acto educativo en contexto con su realidad cultural e histórica, lo cual constituye uno de los papeles clave que Radford (2006) resalta de la cultura, porque se plantea que "…*los alumnos analizan situaciones que se encuentran de manera cotidiana y echan mano de los recursos disponibles para resolverlo…".* La práctica con éste tipo de tareas muestra que a los profesores de matemáticas les es fácil ver las situaciones matemáticas como la exploración de la cultura para construir determinados contenidos matemáticos (Sánchez & LLinares, 2002; 2003). Veamos por ejemplo en este planteamiento, en donde el escenario cultural se convierte en un objeto didáctico para que el estudiante construya los conceptos, se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura.

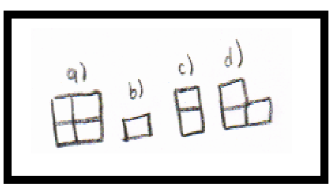


"…Colocar el espejo de tal forma que con su ayuda se vea una barra y la reja completa…"

Esquema IV.25

Las inquietudes plasmadas en el problema que plantean los maestros sugieren y justifican, por tanto, la selección de una serie de situaciones más o menos cercanas a la realidad cotidiana de nuestros estudiantes para ser trabajadas y analizadas en las aulas, con lo cual se enfatiza la necesidad de contextualizar el objeto de estudio no sólo como un problema de carácter cognoscitivo sino también sociocultural (Ernest, 1994).

Los maestros plantean un ambiente falibilista en el cual los estudiantes puedan experimentar la investigación de manera espontánea (Ernest, 1994), el aprendizaje es un proceso activo en el que los estudiantes cometerán errores pero finalmente darán con la solución.



"…Colocar el espejo en la figura a) para obtener la b), c) y d)…"

Esquema IV.26

Estas filosofías hacen énfasis en cómo los aprendices construyen los conocimientos en función de sus experiencias y experiencias previas, estructuras mentales o ideas que ocupan para interpretar objetos y eventos. Ésto último comulga con un postulado de la teoría constructivista que demanda que el saber, sea de cualquier naturaleza, lo elabora el aprendiz mediante acciones que realiza sobre la realidad (Castillo, 2008).

La realidad se explora con base en una construcción mental interna interpretativa del que *aprende "…Finalmente pidieron al grupo que saliera a buscar 2 objetos uno de la naturaleza y otro cultural en donde se pudiera percibir la simetría axial….".* El contexto es empleado como un instrumento técnico para ampliar el poder de los conceptos y acciones de los estudiantes.

Podemos identificar algunos elementos que articulan la actividad en donde conviven perspectivas asociadas al *conductismo "- dijeron que en las posiciones en que había quedado el espejo era el eje de simetría y con base en ello definieron lo que era simetría-"* y finalmente con las perspectivas socioculturales, el trabajo en pequeños equipos y su interacción.

(T4)

En las respuestas de los maestros a la tarea 4 aparecen cuestiones relativas a las filosofías personales generadas en la acción profesional como justificación de las decisiones y las acciones en el contexto de trabajo de la enseñanza de las matemáticas. Las filosofías personales de los maestros van al encuentro de posiciones filosóficas positivistas que ven el conocimiento como acumulación de saberes manifestados en la complejidad creciente de los comportamientos. (Radford, 2000), plantean la idea de la acumulación del conocimiento aplicado en un contexto histórico "…*Lograr el dominio del conocimiento de las matemáticas y aplicarlo en las diferentes áreas de las ciencias, así como en la vida diaria…".*

Se percibe una congruencia con las características que dan fuerza y que definen al planteamiento inicial con sus evoluciones y resistencias. La situación planteada por los maestros integra creencias que posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de las articulaciones que se van conformando por medio de la comunicación.

Sin duda, la interacción del individuo con los que le rodean y con su ambiente es lo que conformará el mundo de experiencias y conocimientos. Los conocimientos, habilidades y actitudes se almacenan juntos, en paquetes hechos a la medida, organizados para satisfacer las demandas en un momento y escenario determinado, como el familiar, social o escolar (Ernest, 1994). *"…El alumno en los pequeños equipos de trabajo desarrolla competencias relacionadas con la comunicación el manejo de situaciones y la argumentación ya que en las actividades tienen que argumentar las características de la posición de la recta para que ésta sea simétrica*…"

Desde ésta perspectiva, el aprendizaje constructivo se producirá, en gran medida, como resultado del intercambio de significados entre los que intervienen en la situación de enseñanza-aprendizaje. El profesor actuará como animador y copartícipe de los intercambios verbales, de las experiencias compartidas, de las argumentaciones y debates (Bartoloni-Bussi, 1994), con el fin de que se produzcan contrastes, negociaciones y consensos acerca de los contenidos tratados, facilitando así la construcción colaborativa de conocimientos y valores socialmente respaldados.

La gestión del proceso de enseñanza- aprendizaje viene acompañada por una serie de problemas derivados del propio contexto que plantean no sólo cuestiones de orden cognitivo, si no que recurren a perspectivas socioculturales, donde el aprendizaje del alumno y la práctica profesional del profesor se enmarcan en un mundo que va mas allá de la cognición del estudiante (Coob, 2006), pues los docentes al manifestar sus necesidades plantean "…*Materiales en la escuela (espejos copias); Habilidades docentes (para el planteamiento y seguimiento de las tareas); Flexibilidad de la institución (para el desarrollo de las actividades al aire libre) ; Involucrar al alumno. (Motivarlo y buscar una mayor interrelación grupal) Realizar un trabajo interdisciplinario…"*

El contexto de práctica sugiere la necesidad de una serie de instrumentos técnicos y conceptuales (Llinares, 2005) que permitan hacer frente a los problemas que evidentemente van más allá del propio aspecto cognitivo de los alumnos. El uso operativo de los contenidos matemáticos se materializa de diferente manera en cada uno de los equipos, de la misma manera diferentes contenidos matemáticos presentan retos importantes para los maestros, de ésta manera la siguiente tarea trata de descubrir cuál es el reto que les implica el desarrollo del programa.

(T5)

Los maestros enfocan sus necesidades sobre contenidos específicos que permiten según Elmore (2002) plantear una visión articulada con el propósito de impactar en el aprendizaje de los maestros en un contenido específico y en un entorno específico.

Las necesidades específicas del curriculum y de la práctica que se conectan, con cuestiones de la instrucción y el aprendizaje de los estudiantes en el contexto de la sala de clase, se manifiestan de la siguiente manera:

	Bloque 1
Contenidos Básicos	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales. 1.2 Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

	1.4 Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar. 1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
Contenidos De difícil comprensión	1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas. 1.7. Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

Tabla IV.3

Se generan retos que oscilan entre los ejes de sentido numérico y pensamiento algebraico (sucesiones numéricas y reglas) y manejo de la información (Proporcionalidad), el contenido en el que los maestros coincidieron en considerarlo básico, pero que además con implicación de un reto mayor para su enseñanza es el siguiente:

1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

El interés principal en el análisis fue detectar focos de atención que pudieran ser abordados específicamente en la siguiente fase de la investigación, Así el tópico de generalización de patrones fue en el que la mayoría de los profesores coincidió en clasificarlo como un tema de difícil comprensión, por lo cual éste se institucionaliza como el foco de atención para la fase 2 de la presente investigación.

4.2 Segunda fase de la investigación.
Evaluación de la matriz de desarrollo profesional.

La operación más importante de la mente es la generalización
(Radford, 2006).

El presente apartado está dedicado a la generalización de patrones, uno de los procesos con amplia presencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la amplitud del tema ha hecho que se centre la atención en las filosofías personales que materializan los profesores al plantear tareas escolares para promover la generalización de patrones, con sus alumnos de educación secundaria.

Lo anterior fue dado sobre la base de que la generalización de patrones ha sido identificada por los profesores como uno de los múltiples retos que enfrentan en el desarrollo del programa de matemáticas 2006, curiosamente éste *foco de atención* también ha sido identificado por la comunidad de investigación en educación matemática, pues existen evidencias de que los estudiantes de éste nivel educativo tienen dificultades para desarrollar una comprensión adecuada del uso de las letras en álgebra y lograr una capacidad aceptable para trabajar con ellas (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005; Bednarz, Kieran , Lee, 1996).

Po otro lado existen estudios que documentan que los estudiantes para profesor muestran dificultad con el razonamiento algebraico y la escritura de generalizaciones, además de no entender lo que distingue a la aritmética del álgebra. Bishop y Stump (2000). Vemos evidencias de la creciente importancia de la generalización de patrones en los nuevos programas y evaluaciones, internacionales y nacionales que incluyen habilidades algebraicas desde el primer año de la educación secundaria.

Las dificultades inherentes a la introducción al pensamiento algebraico a través de la generalización resaltan, según Bedrnarz, Kieran y Lee (1996), el tema del rol del maestro quien debe ser exhortado para gestionar situaciones pedagógicas que promuevan en los estudiantes el razonamiento y la generalización.

En éste apartado se explora la mirada de la generalización desde la perspectiva de los maestros, a propósito de retratar elementos de las filosofías personales que el profesor pone en acción, con el fin de convertirlos en objeto de estudio. El maestro al desarrollar éste proceso no requiere más elementos que los que ya posee como referencia en relación con la generalización, por un lado y por el otro, con las acciones pedagógicas que faciliten el desarrollo integral de los estudiantes.

Se trata de develar los sentidos y fundamentos en que efectivamente se cimienta la práctica docente, así como los obstáculos más recurrentes, a fin de continuar un proceso de desarrollo profesional teniendo como base de partida, ahora el foco de atención, delineado por los docentes en el capítulo anterior, la generalización de patrones. Para empezar la exploración se les pide a los maestros que propongan una actividad en donde se promueva la generalización (Tarea 6, fase 2).

4.2.1 La generalización más allá de las sucesiones

En los planteamientos que hacen los maestros ponen de manifiesto que deben hacer participar a los estudiantes en el aprendizaje de los principios generales de las matemáticas conforme aprenden aritmética o geometría, veamos por ejemplo, el siguiente planteamiento en donde los profesores recurren a la aritmética para promover generalización.

4.2.1.1 Caso equipo 1 *(E1)*

(T6)

Los maestros inician su actividad con el planteamiento de elementos derivados de la aritmética como la propiedad posicional del sistema decimal "…donde generalizar implica pasar de una colección de casos particulares a descubrir una propiedad común..." Se trata de un tipo de generalización que kaput y Blanton (2005) denominan aritmética generalizada, puesto que directamente implica la exploración de las propiedades del sistema de numeración decimal y el razonamiento acerca de ello para ampliar el rango de la comprensión del hecho matemático implícito en la situación planteada.

Se resalta como primer paso la exploración fenomenológica de la situación (Radford, 2006), es decir, se plantea el estudio y análisis de situaciones aritméticas familiares lanzadas a la conciencia, con el fin de develar la relación que hay entre los hechos y el ámbito en que se hace presente esta realidad (el razonamiento conciencia).

"…

CM	*DM*	*UM*	*C*	*D*	*U*

2	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*

a*)Observa los números que escribiste y trata de contestar*

b*) ¿El símbolo representa lo mismo en cada posición?*

c*) ¿Qué representa el símbolo en la primera posición?*

d*) ¿Qué representa el símbolo en la segunda posición?*

e*) ¿Qué representa en la siguiente posición?...”*

Esquema IV.27

Posteriormente transforman la situación en dos secuencias numéricas análogas derivadas de la misma exploración aritmética. En éste caso los profesores encuentran en los números y en las operaciones oportunidades para constituir *principios generales* (Kaput, 2005) “…*Utiliza sólo el símbolo 2, puedes usarlo varias veces, para escribir 3 números diferentes ¿cómo lo logras?...”* una filosofía *absolutista* con tintes *formalistas* considera que la comprensión matemática es engendrada sobre la base de la manipulación de los símbolos que funcionan con normas, algoritmos y fórmulas prescritas y cuya validez se debe aceptar *a priori* (Handal 2003).

2x1000	2x100	2x10	2x1
$2x10^3$	$2x10^2$	$2x10^1$	$2x10^0$

Esquema IV.28

En otras palabras, la generalización se basa en darse cuenta de algo general y conocido en lo que es particular y concreto mediante la manipulación de los símbolos y las relaciones, es un tipo de generalización que se trata del sometimiento del caso particular a un concepto general conocido (Radford 2006).

En particular se recurre al conocimiento previo para interactuar y hacer visible la generalidad de las afirmaciones acerca de la situación o fenómeno modelado, promoviendo así un alcance más profundo de los conocimientos, los maestros intentan fomentar la generalización cuando utilizan frases para conducir a una discusión sobre la justificación de los principios implícitos. Además en su argumentación hacen referencia a la reflexión sobre las operaciones y las propiedades del sistema de numeración veamos: *"Se promueve la generalización de patrones del sistema de numeración por que se intenta que los alumnos perciban que un mismo número puede adoptar diferentes valores según la posición que ocupen, y que éstos se relacionan con las potencias de 10."* La construcción de generalizaciones sobre todo propiedades de los números o las relaciones, implica una aritmética generalizada (kaput, 2005).

Desde el punto de vista de Carpenter y sus colaboradores del proyecto álgebra temprana de la universidad de Wisconsin el vincular la aritmética con el pensamiento algebraico es una manera de promover eficaces maneras de pensar en las matemáticas (Carpeter 2003).

Levi (2003) dice que los maestros pueden dar oportunidades de aumentar las destrezas aritméticas en el contexto del hallazgo y generalización de patrones y relaciones matemáticas, puesto que el álgebra en un sentido más general, dice Levi, lo que realmente busca son los grandes principios y propiedades unificadoras de las matemáticas.

Carraher, et al. (2000) afirman que la aritmética proporciona elementos para construir y expresar generalizaciones (aritmética generalizada). Las actividades propuestas por los maestros intentan dar cuenta de los objetivos educativos que se pretenden en el aprendizaje del contenido. Puesto que la enseñanza de las matemáticas no se puede percibir aislada del currículum y de la institución en la que se desarrolla (Llinares, 2005).

Caracterización de la tarea (E1)

Los dominios a través de los cuales el maestro dota de significado a la “tarea” en la que deben actuar (por ejemplo, para la tarea planteada 1 correspondiente a los docentes de primer grado se tiene la siguiente caracterización:

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
<table>
<tr><td>CM</td><td>DM</td><td>UM</td><td>M</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>2x1000</td><td>2x100</td><td>2x10</td><td>2x1</td></tr>
<tr><td>$2x10^3$</td><td>$2x10^2$</td><td>$2x10^1$</td><td>$2x10^0$</td></tr>
</table>
</td>
<td>La tarea promueve la generalización de las propiedades del sistema de numeración decimal.</td>
</tr>
<tr>
<td>Aritmética generalizada.
(kaput, 2005)</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Observa el esquema y trata de completarlo
<table>
<tr><td>UM</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>2x100</td><td>2x10</td><td>2x1</td></tr>
<tr><td></td><td>$2x10^2$</td><td>$2x10^1$</td><td>$2x10^0$</td></tr>
</table>
</td>
<td>La tarea promueve la generalización a través de acciones direccionadas y enmarcadas en un contexto local.</td>
</tr>
<tr>
<td>Generalización contextual.
(Radford, 2003)</td>
</tr>
</table>

Tabla IV.4 (Parte 1)

“ c*¿Qué representa el símbolo en la primera posición?* d*) ¿Qué representa el símbolo en la segunda posición?* e*) ¿Qué representa en la siguiente posición?...”*	La tarea promueve la exploración de términos cercanos. Generalización cercana. (Stacey, 1989)

Trayecto por las etapas de la generalización		
Mason, (1985)	González, (2002)	García-Cruz y Martinón, (1997).
1.-Percibir el patrón	Primera etapa (aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos).	Nivel 1 se reconoce el carácter recursivo e iterativo del patrón.
2.- Expresar el patrón	Segunda etapa. (Búsqueda sistemas inter-relacionados).	Nivel 2 (Comprensión de procedimiento o Generalización local): implica establecer un invariante, es decir que la regla de cálculo.

Tabla IV.4 (Parte 2)

3.- Registrar el patrón	Tercera etapa. (Utilización de los conocimientos).	Nivel 3 (Comprensión conceptual o Generalización global): La regla desarrollada se convierte en un objeto que permite transferir la acción y el invariante a un nuevo problema que ha sido reconocido como similar.

Perspectivas filosóficas respecto a la enseñanza.	
Absolutista-positivista. Ernest (1991,1996)	*Utiliza sólo el símbolo 2, puedes usarlo varias veces, para escribir 3 números diferentes ¿cómo lo logras?* a*) Observa los números que escribiste y trata de contestar* b*) ¿El símbolo representa lo mismo en cada posición?* c*) ¿Qué representa el símbolo en la primera posición?* d*) ¿Qué representa el símbolo en la segunda posición?* e*) ¿Qué representa en la siguiente posición?*
El planteamiento hace alusión a la lógica deductiva como fundamento. Plantean el descubrimiento de las relaciones matemáticas sobre la base de la intuición del matemático y después son establecidas por la prueba.	

Tabla IV.4 (Parte 3)

<table>
<tr><td rowspan="2">La certeza, el control y la previsibilidad se presumen como base del conocimiento legítimo</td><td>Utiliza sólo el símbolo 2, puedes usarlo varias veces, para escribir 3 números diferentes ¿cómo lo logras?</td></tr>
<tr><td>Observa el esquema y trata de completarlo.
<table>
<tr><td>CM</td><td>DM</td><td>UM</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>2x100
$2x10^2$</td><td>2x10
$2x10^1$</td><td>2x1
$2x10^0$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Con base en los aprendizajes esperados propuestos en el programa de Matemáticas (SEP, 2006)</td></tr>
<tr><td>Grado</td><td>Contenido relacionado con la generalización</td><td>Contenidos relacionados con la situación planteada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Primero</td><td rowspan="2">1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.</td><td>1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales.</td></tr>
<tr><td>4.2. Resolver problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y la potencia de exponente natural de números naturales y decimales.</td></tr>
</table>

Tabla IV.4 (parte 4)

Los docentes intentan añadir un nuevo nivel de coherencia y profundidad a las nociones aritméticas exploradas, de manera tal que se plantea la integración de dos dominios (1.1 y 4.2); plasman relaciones conceptuales al interior de la disciplina, es decir vinculan aprendizajes esperados del bloque 1 (1.1, 1.3) y del bloque 4 (4.2), sin embargo los límites se hallan en las fronteras de la propia disciplina y no plantean relaciones interdisciplinares entre las demás asignaturas del plan planteado para la educación secundaria.

(T7)

Los maestros reconocen como primeras aproximaciones a la generalización el valor instintivo que consiste en explorar las piezas o partes que componen la situación "…1.- *Interacción con la naturaleza y relación de componentes que configuran la situación…"; "…2.- Búsqueda de conjeturas acerca de las relaciones que podrían estar estructurando la situación…"; "…3.- Prueba de las diferentes conjeturas con base en los diferentes elementos de la situación…."*. Se trata de un hacer fuertemente manipulativo que canaliza el aprendizaje a través de los órganos sensoriales: vista y oído frecuentemente, en donde se permite tomar los objetos, piezas o instrumentos, observarlos atentamente, palparlos, elaborar algunas hipótesis acerca de las relaciones que podrían estar implícitas, se trata de un tipo de generalización clasificada por Radford (2006) como generalización de hecho.

La secuencia del hacer continua en forma natural, una vez que han manipulado los objetos matemáticos, los maestros proponen el planteamiento de leyes que los manejen o que permitan hacer algo con ellos, definiciones de propiedades que se cumplan en estos objetos, reglas estructuradas o semi estructuradas que amplíen el anterior campo del hacer, es decir se mueven en el campo de la generalización contextual (Radford, 2003) "…*Establecimiento verbal (escrito) o matemático (con símbolos del álgebra) de la regla…"* éstas acciones son más complejas y con un carácter utilitario en el marco de la generalización matemática. Es la etapa clave del conocimiento de las instrucciones o reglas que permitan usar las piezas conocidas con un propósito y sentido práctico amplio.

Para los maestros de éste equipo generalizar significa, codificar usando sistemas de signos o crear nuevos signos si es necesario. En ésta tarea los maestros no sólo abordan información específica, sobre generalización de patrones, sino también definen y comprenden las situaciones que se plantearon como parte de su práctica profesional con base en los constructos elaborados por ellos mismos pues plantean que la generalización es "…*un proceso mental que trata de la identificación de elementos comunes en situaciones que presentan ciertas relaciones o propiedades matemáticas susceptibles de poder plasmarse por medio de una regla y posteriormente poder usarla en casos no establecidos en la propia situación…".* Esta definición propuesta descansa en la idea de que la generalización consiste en la expresión de las relaciones matemáticas a través de la utilización de literales, la cual ha sido utilizada en algunas investigaciones relacionadas con el tópico (Kieran, 2006).

(T8)

A partir de referenciales teóricos y cuestiones sobre las situaciones observadas, los maestros establecen relaciones entre los eventos y las teorías relacionadas y proponen ajustes, comienzan considerando una de las fases en las que la mayoría de los autores representativos en el campo de la generalización consideran que es la interacción con los componentes de la situación (Mason, 1996).

- *Utiliza sólo el símbolo 2 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes.*
- *Utiliza sólo el símbolo 3 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes.*
- *Utiliza sólo el símbolo 5 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes.*
- *Ahora contesta las siguientes preguntas:*

¿Qué representa cada número en la primera posición?

¿Qué representa cada número en la segunda posición?

¿Qué representa cada número en la tercera posición?

¿Qué representa cada número en la cuarta posición?

Interacción con los componentes

Esquema IV.29

Los maestros en sus planteamientos promueven oportunidades de formalización progresiva (Mason, 1996), según los propios maestros, la situación que propornen se enmarca en una etapa que han denominado *"…Búsqueda de relaciones…"; Por cuanto multiplicarías el valor del símbolo para obtener el valor que representa según la posición. En la primera posición; En la segunda posición…"*

En la fase siguiente los maestros consideran importante la abstracción. Es decir, el proceso de encontrar y señalar las relaciones en toda una clase de objetos similares, y además probar que funcionan para objetos no incluidos explícitamente (Radford, 2006) "…*Según tu conjetura ¿cuál es el valor que representa el símbolo 2 en el siguiente número 1250?; ¿Cómo lo obtuviste?..."* La generalización así tiene su fundamento en notar los patrones y propiedades comunes a varias situaciones (Mason, 1999). Además esta posición comulga con el enfoque situado del aprendizaje que se basa en la suposición de que las personas aprenden a través de la participación gradual en las prácticas sociales y culturalmente organizadas (Lave y Wenger, 1991).

Diferentes experiencias formales son planteadas por los docentes para direccionar con mayor grado el proceso de generalización orientado explícitamente a generación y manipulación de expresiones algebraicas (Kieran, 1989) "…*Ahora trata de plasmar tu conjetura de manera general considera que N representa un número cualquiera.*

CM	*DM*	*UM*	*C*	*D*	*U*
N	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
					NX10
					NX1
					N

Esquema IV.30

Se espera expresar generalizaciones con la norma de los símbolos algebraicos tal como lo plantea Kieran (2005).

4.2.1.2 Caso equipo 8 *(E8)*

(T1)

La afiliación con situaciones que incorporan aspectos relacionados con el uso de distintos lenguajes, (aritmético, geométrico y algebraico), se pone de manifiesto. La tarea propuesta por los profesores integrantes del equipo 8, tiene un carácter diferente al comúnmente usado en las situaciones relacionadas con la generalización de patrones.

Las vías de acceso a los procesos de generalización implican actividades encaminadas a detectar relaciones de tipo proporcional “… *¿Cuánto mide el ángulo que representa el 100%?; ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 50%?...”* y aplicarlo en un caso específico “… ¿Cuánto mide el ángulo que representa el gasto de trasporte?...” tratan las operaciones aritméticas como enunciados generalizados es decir se trabaja en términos procedimentales (González, 2002*)*

“…*Los alumnos pueden calcular el valor del ángulo aplicando una relación”*

$$\boxed{\frac{360^0}{100\%} = \frac{X}{12\%}}$$

En donde tienen que generalizar que el 100% equivale a un ángulo de 360 ^{0} *y que un ángulo que represente el 1% equivale a dividir 360* ^{0} *entre 100, por lo que aplicando estas relaciones pueden calcular el valor de cualquier ángulo.”*

La generalización es considerada como sinónimo de generalización de técnicas. La filosofía falibilista se hace presente en el plano de la interacción social, donde los estudiantes tienen que aprender a ver los objetos del conocimiento de los demás (profesores y estudiantes) (Ernest, 1994). Se plantea un intercambio de ideas, así como de soluciones y la discusión de los mismos entre los grupos, seguido por las discusiones en clase general, “*Con un compañero o compañera observa la siguiente gráfica que representa los gastos del maestro Mario durante la quincena y traten de descubrir cuánto mide el ángulo correspondiente al transporte desarrollando las actividades…”*

Caracterización de la tarea (E8)

…¿Cuánto mide el ángulo que representa el 100%? … ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 1%?	Generalización aritmética (kaput, 2005).
	La tarea promueve la generalización de las operaciones, sus relaciones y el razonamiento acerca de ello.
1.- Dibujen un ángulo que represente el 100% *2.- Dibujen un ángulo que represente el 50%* *…* *5.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 50%?* *…* 9.-- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el gasto de trasporte?	Generalización contextual (Radford, 2003).
	La tarea promueve la generalización contextual a través de acciones y de la comunicación.
¿Cuánto mide el ángulo que representa el gasto de trasporte?	Generalización lejana (Stacey, 1989)
	La tarea promueve la exploración de términos para poder plantear una regla y calcular así cualquiera.

Tabla IV.5 (parte 1)

Trayecto por las etapas de la generalización		
Mason (1985)	González (2002)	García-Cruz y Martinón, 1997.
1.-Percibir el patrón.	Primera etapa (aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos).	Nivel 1 se reconoce el carácter recursivo e iterativo del patrón.
2.- Expresar el patrón.	Segunda etapa. (Búsqueda sistemas inter-relacionados)	Nivel 2 (Comprensión de procedimiento o Generalización local): implica establecer un invariante, es decir que la regla de cálculo.
3.- Registrar el patrón.	Tercera etapa. (Utilización de los conoci-mientos).	Nivel 3 (Comprensión conceptual o Generalización global): La regla desarrollada se convierte en un objeto que permite transferir la acción y el invariante a un nuevo problema que ha sido reconocido como similar.

Tabla IV.5 (parte 2)

Con base en los aprendizajes esperados propuestos en el programa de matemáticas (SEP, 2006)		
Grado.	Contenido relacionado con la generalización.	Contenidos relacionados con la situación planteada.
Primero.	1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.	1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
		1.7 Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.

Tabla IV.5 (parte 3)

Las relaciones planteadas en este caso particular se hallan principalmente en el campo de la geometría, a diferencia del caso anterior que ubica su campo de acción en las propiedades aritméticas, además las relaciones conceptuales se siguen planteando al interior de la disciplina en éste caso dentro del mismo bloque 1 (1.3, 1.6 y 1.7).

(T7)

La generalización es tomada como una actividad i*nductivamente empírica,* en la cual se acumulan y se exploran ejemplos para detectar el patrón (Masson, 1985), "…1) *Percibir el patrón; 2) Probar el funcionamiento de dicho patrón; 3) Plasmar el patrón; 4) Probar el patrón en elementos no considerados de la situación…".* Se hace referencia al *ver* como la identificación mental de una relación o un patrón

"…*Es un proceso cognitivo que consiste en el análisis de una colección de objetos o fenómenos para detectar el patrón o esquema que está involucrado en la situación y posteriormente ampliarlo a casos que no están estipulados… "*

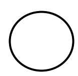
La materialización de la generalización matemática implica una afirmación con base en la semiótica de alguna propiedad o técnica que vale para un gran conjunto de objetos o condiciones (Radford, 2006) *"…en el contexto implica la utilización de cuantificadores universales (símbolos algebraicos) para poder plasmarla…".* El alcance de la demanda es siempre más grande que el conjunto de casos comprobados de forma individual, por lo general, se trata de un número infinito de casos expresados con símbolos algebraicos.

En el marco de las filosofías personales de los docentes, hacer generalizaciones puede no ajustarse plenamente a las normas matemáticas, puesto que centran la atención en que los estudiantes entiendan con base en la observación empírica casos particulares basados en la coherencia lógica y en última instancia, en el razonamiento sobre estructuras matemáticas *"…se trabaja con una gama de elementos para descubrir las relaciones que los sistematizan y se trata de ver más allá de los elementos que originan la situación…"*

Para los maestros, los estudiantes pueden predecir el siguiente elemento (o estado) en un conjunto ordenado, sin embargo, no consideran la generación de una regla (Kieran, 2005) para determinar el valor de un elemento en una posición arbitraria "…*Las etapas que abarca nuestra situación son* percibir patrón y probar patrón…" Extender un conjunto ordenado de objetos muestra un cierto grado de generalización. Pero ésto está lejos de una generalización explícita expresada en la lengua o formas matemáticas convencionales (Radford, 2006).

(T8)

Los maestros pasan de considerar la generalización de un hacer instintivo y manipulativo [generalización de hecho (Radford, 2006)] que radica en observar el contenido, las piezas o partes que componen la situación, al rastreo de los sistemas del hacer matemático en la situación [generalización contextual (Radford, 2006)] *"…Ahora en equipo traten de llenar la información requerida en la siguiente tabla:*

Porcentaje	*Grados*	*Angulo*
100%	*360^0*	
50%	*180^0*	
25%		
10%		
5%		

Percibir patrón

…."

Esquema IV.31

Se trata de un hacer que implica una generalización de hecho (Radford, 2006) que canaliza el *aprendizaje* a través de la observación atenta, con la intención de desembocar en la elaboración de hipótesis acerca de las relaciones matemáticas que organizan las situaciones.

La generativa de la tarea radica en la aparición de nuevos objetos (10%-5%) para sustituir los anteriores (50%-25%) y orillar a construir una hipótesis que pueda abarcar cualquier elemento del conjunto *"…Si los gastos destinados al pago* *de servicios correspondieran a un porcentaje del 12.5%, cuánto mediría el ángulo correspondiente?...”; “...¿Si los gastos destinados al pago de servicios correspondieran a un porcentaje del 2.5%, cuánto mediría el ángulo correspondiente?...”* lo que implica en palabras de los propios docentes *“probar el funcionamiento del patrón”*.

Los maestros transformaron las relaciones implícitas en dos situaciónes contextuales, porque las secuencias hacen uso de las relaciones de manera implícita sin llegar a la formalización por medio del uso del simbolismo algebraico.

1)

100%	90%	80%	70%	.	.	.	.	.	10%
360^0	324^0	288^0	252^0	.	.	.	.	.	36^0

2)

100%	50%	25%	12.5%
360^0	180^0	90^0	45^0

Esquema IV.32

Se impulsa a continuar la cadena de acciones, pero ahora este hacer adquiere una característica semiótica (Radford, 2006) que permite distinguir una relación y orilla a lo que los maestros denominaron *“plasmar el patrón”* *“…Ahora si la letra “n” representa los grados que representan el porcentaje de 12.5 cómo representarían la relación si sabemos que 100% equivale al 360^0…”* ; “…*Ahora si la letra “n” representa los grados que representan al porcentaje “x” cómo representarían la relación si sabemos 100% equivale al 360^0….”* El planteamiento tiende a promover una generalización al estilo de Kieran (2005) que implique el uso del simbolismo algebraico para su expresión.

Los signos constituyen el puente de acceso a las relaciones conceptuales vistas como situadas más allá del contexto local, es decir que representan una posisición especifica de un término si no que abarca todos los casos inmplicitos en la situación. Para Radford (2010) es la actividad humana la que produce al objeto, el signo y la forma en que éste es usado (esto es, su sintaxis) son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos objetivan al objeto matemático (Radford, 2004).

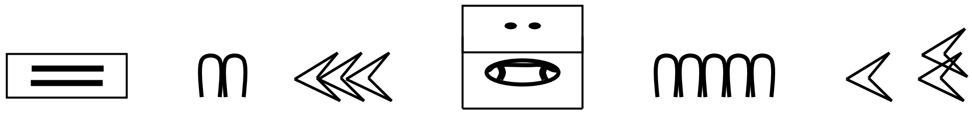
De ninguna manera se aborda el proceso de generalización como el resultado de un acto contemplativo a la manera de Kant, por contrario las tareas desde su planteamiento original aluden a la capacidad cognitiva de notar diferencias en las cosas, de esta manera, en lugar de un acto contemplativo de obviedades, por triviales que puedan ser, se plantea un complejo proceso cultural-cognitivo que finaliza con la *"prueba del patrón"*. *"…Ahora con base en tu fórmula o regla indica cuánto mide al ángulo que representa 20%..."*

4.2.2 Generalización y sucesiones.

4.2.2.1 Caso equipo 7 *(E7)*.

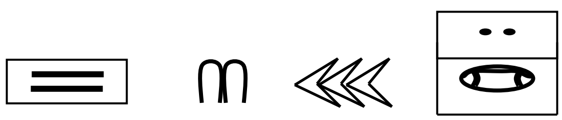
(T6)

Los maestros plantean el uso de los conocimientos y propiedades aritméticas como instrumento técnico para plantear un tipo de razonamiento cuantitativo como un campo para expresar generalizaciones. La generalización es introducida con base en la transformación de problemas aritméticos en oportunidades de descubrimiento de patrones (Kaput, 2005). Las situaciones planteadas por los maestros son de tipo gráfico y numérico, Implica el cálculo de un término cercano, que puede encontrarse continuando la serie, dibujando o escribiendo los números hasta encontrar el buscado (Stacey, 1989). Se presentan como una sucesión en espera de que el estudiante sea capaz de extenderla "…*analicen el comportamiento de las siguientes sucesiones…"*



1 III 5 VII 9 XI 13 XV

Nuevamente aparecen planteamientos emanados del campo de la aritmética como oportunidades (Kaput, 2005) para promover la generalización de patrones.



1 III 5 VIII 9

Diferentes sistemas de numeración propiedades y relaciones

Esquema IV.33

La generalización se trata ahora de darse cuenta de una relación local común, que luego debe generalizarse a todos los términos de la secuencia y que sirve como un orden para construir las expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo (Radford, 2006) pues los profesores del equipo utilizan sucesiones numéricas para enfatizar la expresión de la generalización con la idea de que estos contextos proveen experiencias con las cuales se pueden materializar relaciones matemáticas.

En el contexto planteado se exige el percato del cumplimiento de la relación o relaciones para todos los elementos, es decir, el elemento para el cual se reconoce dicha regularidad ha de ser cualquiera (Radford, 2003). (Deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). La situación planteada por los maestros contiene una cadena de acciones *(1.-, 2.-,3.-)* con el fin guiar hacia la elaboración de hipótesis acerca de las relaciones matemáticas que organizan la situación, en este sentido la relación precisa de aquellos objetos que son presentados, es promovida por medio de una captación intelectual que intenta reproducir o anticipar eventos por venir (Stacey, 1989) "…*los alumnos tienen que buscar las relaciones que están configurando cada una de las situaciones planteadas y utilizarlas para encontrar otros elementos no contenidos en las situaciones…"*

Este contexto es representativamente diferente a los dos anteriores, puesto que aunque está planteado desde el campo de la aritmética, interviene directamente el contexto de los patrones numéricos, los cuales ya sean numéricos o geométricos según John Mason (1999) enfatizan de manera significativa la expresión de la generalidad.

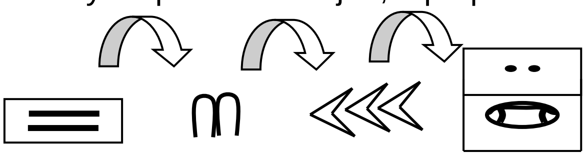
Además de ello comulgan con las sugerencias hechas por Blanton y Kaput (2003) al introducir la generalización y el pensamiento algebraico con base en actividades aritméticas y con la transformación de problemas con una sola respuesta numérica a oportunidades de descubrimiento de patrones y realización de conjeturas o generalizaciones.

La generalización es tomada como una actividad inductivamente empírica, la cual esta basada en el dominio de la situación que está siendo modelada, con hincapié en todas las conexiones circunstanciales, y conversaciones que implican un razonamiento circunstancial cuantitativo y computacional (Radford 2003).

Se propone la búsqueda de relaciones entre:

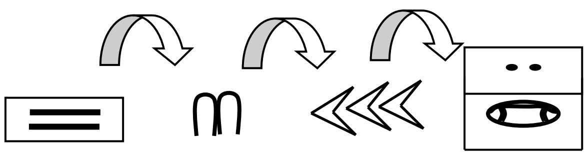
- Los objetos matemáticos.

- Leyes que los manejen, o propiedades que se cumplan en estos objetos.



10 20 30 40

- Reglas contextuales estructuradas o semi estructuradas que amplían el campo de la situación particular.



Sistema de numeración Maya-Egipcio-Babilónico- Maya-Egipcio-Babilónico.

Esquema IV.34

A éste tipo de generalizaciones a partir de las relaciones contextuales, Luis Radford los denominó precisamente generalizaciones contextuales (Radford, 2003), más específicamente generalizaciones de hechos, que suponen un punto de vista privilegiado desde el cual la secuencia es supuestamente vista, y se puede hablar de la figura y la figura siguiente, en el propio contexto. La figura y el siguiente término que pone de relieve la posición ordenada de objetos en el espacio.

La indeterminación queda sin nombre; la generalidad se basa en las acciones realizadas en los números, las acciones se hacen aquí de las palabras, los gestos y la actividad perceptual (Radford, 2006) se proponen objetos matemáticos que tratan de canalizar el aprendizaje a través de la observación atenta, de formas, colores, apariencias y relaciones, para descubrir relaciones comunes a los objetos y poder generalizar el pensamiento considerando objetos que cumplan estas relaciones matemáticas y que objetos no se hallen expresados de manera concreta en el contexto de la situación planteada.

Los maestros se posicionan en una filosofía falibilista de descubrimiento que acentúa la práctica de las matemáticas y el lado humano, el conocimiento matemático se entiende para ser explorado y abierto a la revisión, en términos de sus pruebas y sus conceptos, el conocimiento que se pueda generar depende de la naturaleza de la situación y de la información que puedan obtener de ella en su mayoría, la situación planteada contiene un hacer instintivo y manipulativo, que radica en observar las piezas o partes que componen la situación, y manipular el contenido (Ernest, 2007) con lo cual se trata de sugerir una pista de éstos sistemas del hacer matemático buscado.

Linda Levi y sus colegas Thomas Carpenter y Megan Loef Franke (2003) quienes trabajan desde hace 8 años en un estudio llamado proyecto de Álgebra Temprana, consideran que los maestros deben hacer participar a los alumnos en el aprendizaje de los principios generales de las matemáticas conforme aprenden aritmética y dicen que con frecuencia se aísla la aritmética de otras ideas matemáticas afines, lo cual puede dificultar a los alumnos el aprendizaje del álgebra más adelante.

Muchos alumnos que estudian el álgebra en la enseñanza media no ven los procedimientos que se utilizan para resolver ecuaciones o simplificar expresiones como algo basado en las mismas propiedades que ya usaron en los cálculos aritméticos (Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Caracterización de la tarea (TPE7)

¿Qué número ocupará el doceavo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito? Explica tu respuesta.	Generalización aritmética. (kaput, 2005)
	La tarea promueve la generalización relaciones y sus operaciones acerca de ello.
1.- Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión. *2.- ¿Qué número ocupará el doceavo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito?. Explica tu respuesta…*	Generalización contextual (Radford, 2003)
	La tarea promueve la generalización contextual a través de acciones y de la comunicación.
…¿Qué número ocupará el doceavo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito?... *¿Qué número ocupará el lugar número 15 en cada sucesión?.*	Generalización cercana (Stacey, 1989)
	La tarea promueve la exploración de términos cercanos, que pueden encontrarse continuando la serie, dibujando o escribiendo los números hasta encontrar el buscado.

Tabla IV.6 (parte 1)

Trayecto por las etapas de la generalización.		
Mason, 1985	González, 2002	García-Cruz y Martinón, 1997.
1.-Percibir el patrón.	Primera etapa (Aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos).	Nivel 1 se reconoce el carácter recursivo e iterativo del patrón.
2.- Expresar el patrón.	Segunda etapa. (Búsqueda sistemas inter-relacionados).	Nivel 2 (Comprensión de procedimiento o Generalización local): implica establecer un invariante, es decir que la regla de cálculo.
3.- Registrar el patrón.	Tercera etapa. (Utilización de los conoci-mientos).	Nivel 3 (Comprensión conceptual o Generalización global): La regla desarrollada se convierte en un objeto que permite transferir la acción y el invariante a un nuevo problema que ha sido reconocido como similar.

Tabla IV.6 (parte 2)

Con base en los aprendizajes esperados propuestos en el programa de matemáticas (SEP, 2006).		
Grado	Contenido relacionado con la generalización.	Contenidos relacionados con la situación planteada.
Primero	1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.	1.1. Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales.

Tabla IV.6 (parte3)

Ésta situación particular está centrada específicamente en la generalización de patrones y utiliza los planteamientos usuales (sucesiones numéricas y figurativas) para promover su desarrollo con los estudiantes.

Los datos generados fueron analizados con base en los referentes teóricos planteados en el capítulo 2, dicho análisis dio indicios de las filosofías personales de los docentes respecto a la generalización de patrones, como se puede ver, la característica que distingue éstos datos es el énfasis en la generación de situaciones de enseñanza que aluden a la enseñanza de la generalización de patrones desde sus propias filosofías.

Estas producciones fueron recuperadas con el fin de incorporarlas como recurso para la siguiente tarea de desarrollo profesional en conjunción con la incorporación de instrumentos conceptuales para provocar un proceso reflexivo, centrado ahora sobre el concepto de generalización y sus etapas propuestas por distintos autores con presencia en el campo de la generalización de patrones.

(T7)
Grosso modo podemos decir que los maestros consideran la generalización como el resultado de abstraer las propiedades comunes de determinados objetos o identificar sus regularidades, pues plantean que la generalización *"…es un proceso que inicia con la identificación de rasgos comunes (patrones) y la percepción de que ese rasgo aplica a todos los términos y finaliza con el planteamiento del patrón que permea la situación…"* cabe destacar que los docentes del equipo no resaltan el carácter semiótico para expresar la generalización, lo cual la ubica a la estrategia teóricamente en el marco de una generalización contextual (Radford, 2003).

Podemos inferir del párrafo anterior que la generalización matemática presupone un pensamiento discursivo-empírico; pues en el planteamiento de las fases o etapas se privilegia este carácter *"…Interacción con la situación-Percepción del patrón-Expresión del patrón-Prueba del patrón…"* lo cual en términos del propio Radford (2003) constituye la promoción de un tipo de generalización contextual a través de las acciones y del lenguaje.

Por otra parte en la justificación dada por los maestros se considera la generalización matemática como proceso del pensamiento lógico, desde la perspectiva de que el alumno pueda establecer relaciones *"…Se promueve la generalización porque a partir de una colección de objetos matemáticos se trata de descubrir las reglas que imperan esas relaciones, además se pide el razonamiento más allá de los casos particulares".* En éste sentido se plantea que la generalización es verificable por extender los conceptos estudiados en una clase determinada a otra más amplia, lo cual comulga con los planteamientos de Dubinsky (1991) quien postula que la generalización es un proceso de ampliación o expansión de la gama de un razonamiento más allá del caso o los casos estudiados.

Para los maestros la generalización tiene su base en la inducción, es decir, se logra mediante la sumatoria de experiencias particulares, algunas veces de manera inconsciente y otras de manera deliberada,.

Existe una *asimilación del conocimiento práctico* (Goffree y Oonk, 2001) donde los profesores exploran su propia propuesta e indican lo que de ella aplica con los constructos explorados "…*trata de la identificación de elementos comunes por ejemplo en los números 333 y 222 los números representan el valor según su posición*

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ \downarrow & & \\ x10^{2} & x10^{1} & x10^{0} \\ \uparrow & & \\ 2 & 2 & 2\ldots\text{''} \end{array}$$

Esquema IV.35

Los maestros perciben restricciones en sus propias propuestas o juicios, así expanden su comprensión a través de la asimilación del conocimiento práctico "…*En nuestro caso sólo se considera el paso 1 que es la interacción con la naturaleza de la situación.*

Utiliza sólo el símbolo 2, puedes usarlo varias veces, para escribir 3 números diferentes ¿cómo lo logras?.

a*) Observa los números que escribiste y trata de contestar.*

b*) ¿El símbolo representa lo mismo en cada posición?.*

c*) ¿Qué representa el símbolo en la primera posición?.*

d*) ¿Qué representa el símbolo en la segunda posición?.*

e*) ¿Qué representa en la siguiente posición?.*

Observa el esquema y trata de completarlo.

CM	DM				
					2
			2x100 2X10X10 $2X10^2$	2x10 $2X10^1$	2x1 $2X10^0$

interacción con la naturaleza de la situación.

Esquema IV.36

(T8)

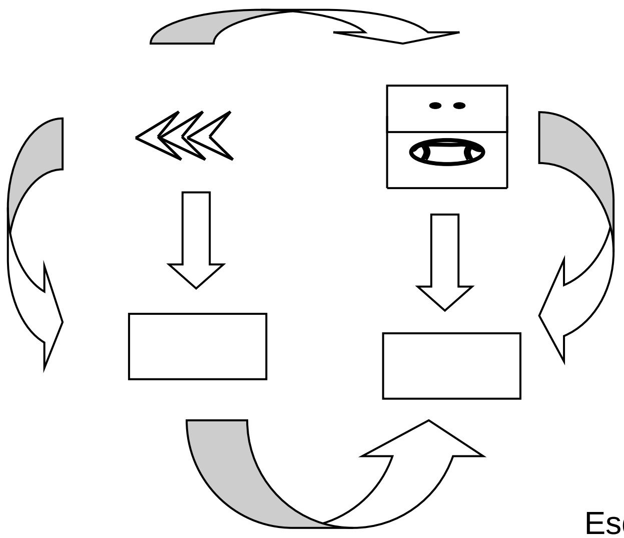
El mundo de los artefactos culturales aparece, como una fuente importante en el proceso de aprendizaje (Falconi & Hoyos, 2005), los docentes hacen uso de los conocimientos previos de los estudiantes para plantear una fase inicial que denominan *"interacción con la situación"* "…*Observa el comportamiento de las siguientes sucesiones y realiza las siguientes actividades...*"

3 V 7 IX 11 XIII 15

…”

Esquema IV.37

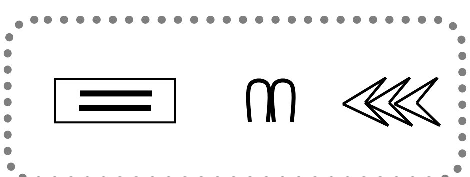
Los maestros promueven *generalizaciones contextuales* (Radford, 2006) basadas en la acción del sujeto sobre los objetos matemáticos, formuladas en un régimen de funcionamiento a través de la actividad, donde lo indeterminado se hace verbalmente explícito.

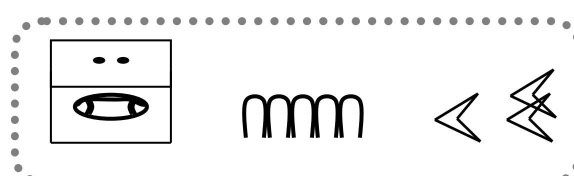


Esquema IV.38

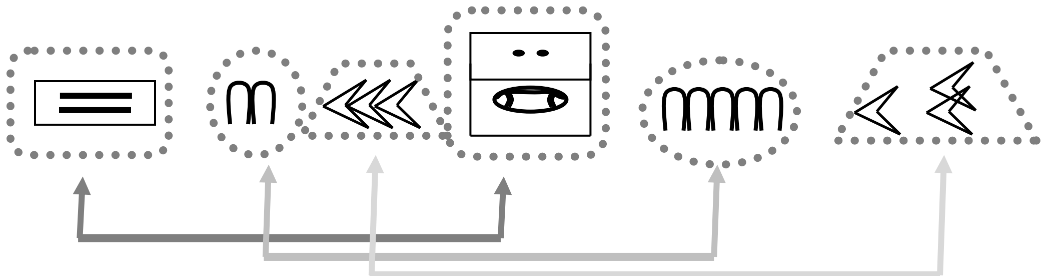
En este sentido a través de la propia actividad se promueve la captación de nuevos objetos, en primer lugar es posible identificar una serie de variables visuales como:

- El agrupamiento.





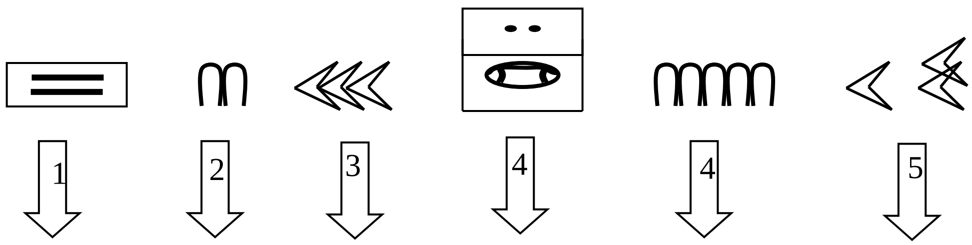
- La distribución



Esquema IV.40

Se ponen en juego patrones geométricos y aritméticos simples, así por ejemplo la secuencia geométrica anterior se traduce en 10, 20, 30, 40, 50, 60…, la cual es posible que el estudiante con una primera exploración descubra el patrón implícito. Uno de los productos que ponen en evidencia que ésta fase ha sido superada es la percepción de la regularidad y el planteamiento de elementos cercanos a la sucesión, se puede hablar en términos de lo que Stacey (1989) ha denominado generalización cercana que Implica el cálculo de un término cercano, que puede encontrarse continuando la serie, dibujando o escribiendo los números hasta encontrar el buscado "… *Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión…"*

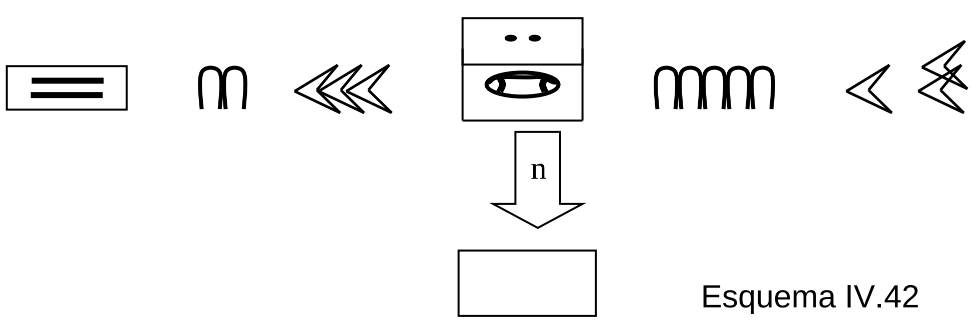
Los maestros plantean una fase denominada *"percepción del patrón"* en donde los alumnos deben organizar la información que les permitió obtener la respuesta a la situación inicial, se trata de hacer conciencia en los alumnos respecto a las operaciones que están llevando acabo y las regularidades que comparten "… *Expresa simbólicamente las operaciones que realizaste para saber el valor de cada término con base en la posición que ocupan en la sucesión*



Esquema IV.41

Piaget (1961) considera que los hombres están organizados internamente con la capacidad de autorregularse en el procesamiento de toda la información que recibe destacando aquello que le es esencial para aprender, ésta actividad planteada por los maestros se enmarca teóricamente lo que se ha denominado *metacognición* que implica ser capaz de *tomar conciencia* del funcionamiento de nuestra manera de aprender y comprender los factores que explican que los resultados de una actividad, sean positivos o negativos.

Los maestros consideran que el núcleo de la generalización está en la detección de los patrones para su posterior análisis y tratamiento, consideran detallar las experiencias realizadas para que los alumnos puedan llegar al punto de generalizar sus hipótesis con base en el uso de expresiones simbólicas *“…Considera que n es el lugar que ocupa cada número, ¿cómo expresarías la operación que tienes que efectuar para saber el número según la posición que ocupa en la sucesión?.*



Esquema IV.42

Hasta aquí se puede apreciar el arduo trabajo de codificación que concuerda con la generalización algebraica (Kaput, 2005) o simbólica (Radford, 2003) que implica la expresión simbólica de la regla para obtener el enésimo término de la sucesión a ésta fase los docentes la han denominado “Expresión del patrón”.

Finalmente terminan su planteamiento con una fase de prueba que involucra un tipo de generalización lejana (Stacey, 1989) que Implica el cálculo de un término lejano para el cual resulta tedioso y cansado seguir la estrategia de la generalización cercana que consiste en continuar la serie, dibujando o escribiendo los números hasta encontrar el buscado, por lo cual se tiene que recurrir al planteamiento y prueba de una regla *“…¿Qué número ocupará el trigésimo segundo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito? Explica tu respuesta.”*

CAPITULO V. SINTESIS Y DISCUSION DE RESULTADOS.

En este capítulo se hace una síntesis de los resultados obtenidos en ambas fases de la investigación, relacionados con la emergencia y evaluación de la matriz de desarrollo profesional y con las filosofías personales de los maestros respecto a la temática de cada una de las fases (1) filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas (2) Generalización de patrones.

5.1 Funcionamiento y emergencia de la matriz de desarrollo profesional en el marco de las filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas

Los trabajos de (Ponte & Chapman, 2006; Gueudete & Trouche, 2009, Matos, et al., 2009, Ruthven, 2010) constituyen algunos antecedentes inmediatos de la presente investigación, entre sus principales aportaciones teórico-metodológicas planteadas, destaca la caracterización de modelos basados en la ampliación de la participación del profesorado en las prácticas de lo que constituye la enseñanza y el énfasis en la recuperación del conocimiento de los maestros derivado de su ejercicio profesional.

La utilidad revelada por las aportaciones de estas investigaciones, se amalgamó en un sistema matricial (ver sección 2.7), con base en tres directrices principales: amalgamadas en un sistema permeado por la *focalización continua,* es decir, por un sistema que se basó en el análisis inmediato de datos para enfocar las necesidades de los maestros que pudieran intentar ser subsanadas en el planteamiento de la siguiente tarea de desarrollo profesional*:*

1. Recuperación del conocimiento derivado del ejercicio profesional de los docentes (Ruthven, 2010).
2. Planteamiento de tareas profesionales para establecer un diálogo con materiales curriculares e instrumentos conceptuales emanados de la

investigación en educación matemática. (Gueudete & Trouche, 2009; Matos, et al., 2009).

3. Participación de los profesores en la resolución de tareas, y génesis de documentos (Gueudete & Trouche, 2009).

La noción de participación (Winbourne y Watson, 1998; Matos, et al., 2009), aporta concreciones deseables de parte de los maestros de matemáticas participantes, que permiten dar cuenta de su aprendizaje. Sin embargo, en grupos de aprendizaje focalizado como es nuestro caso éstas producciones se erigen en sugerencias que posibilitan al investigador avanzar en el establecimiento de una sinergia de colaboración entre y con los maestros sobre la base de compartir, inquietudes, objetivos y recursos similares.

Según Ruthven (2007) en la planificación y enseñanza de un tema, los maestros se basan en una matriz de conocimientos profesionales, adquirida en el curso de su propia experiencia en el aprendizaje y la enseñanza del tema y en el contacto con los materiales curriculares disponibles. El centro de ésta matriz es de relevancia, pues se basa en los objetivos y acciones que sirven para orientar su enseñanza sobre el tema, constituye lo que se ha denominado un script[1] plan de estudios (Ruthven, 2007).

Hawley & Valli (1999) analizan las diferencias entre los estándares para el aprendizaje y el desarrollo de los estudiantes; involucran a los maestros como aprendices en la identificación de sus necesidades de aprendizaje y cuando es posible en el desarrollo de las oportunidades de aprendizaje y de los procesos que pueden ser usados, proveen oportunidades de aprendizaje que relacionan las necesidades individuales y por otra parte se organizan alrededor de la resolución de problemas de manera colaborativa. La presente investigación parte del reconocimiento de los elementos que direccionan la práctica en dimensiones

[1] Constituye una forma de organización cognitiva de eventos estructurados, que incluye expectativas de una situación y cursos de acción alternativos (Ruthven, 2007).

particulares (ver sección 4.1.1); lo cual permitió plantear tareas alrededor de un cuerpo de negociaciones sobre la marcha que dieron lugar a una serie de documentos que fueron constantemente examinados (ver secciones 4.1.2 y 4.2)[2], lo cual comulga con la idea de que el conocimiento profesional es generado en situaciones concretas de enseñanza y constituye una construcción personal, en el sentido de que su uso para gestionar situaciones de enseñanza de las matemáticas, en conjunción con la posterior reflexión, tiene la posibilidad de generar nuevo conocimiento (Llinares,1998b).

Como resultado de la investigación podemos sostener que al considerar los conocimientos derivados del ejercicio profesional de los docentes (ver secciones 4.1.2.1.1- 4.1.2.1.3 y 4.2.1.1-4.2.2.1) aumentan las probabilidades de apoyar a los docentes en la superación de sus propias filosofías o estructuras del pensamiento al respecto de un tema específico; es visto que cuando se les integra, como es nuestro caso, se gana considerablemente claridad con relación a los elementos de la práctica educativa de los docentes con prioridades de experimentación y análisis.

5.2 Filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas

Primera fase de investigación

Las necesidades profesionales de los maestros constituyen una de las herramientas que algunos investigadores han considerado necesarias para direccionar las acciones de investigación y de profesionalización docente, Ball y Cohen (1999) sugieren que los maestros necesitan convertirse en serios aprendices de su práctica, y hacen notar que cuando las necesidades profesionales de los docentes son tomadas en cuenta en conjunto con la complejidad de las interacciones y situaciones en el salón de clase se tiene un efecto en las maneras en que el maestro aprende Borasi y Fonzi (2002).

[2] Emergencia de la matriz de desarrollo profesional.

Las nociones precedentes de conocimiento de los maestros forman la base teórica que define su propia actividad, según Ponte & Chapman (2006) éstas no son independientes entre sí y se materializan en diferentes contextos en los que la actividad de los maestros puede ser situada. Hasta hace poco tiempo el motor de la filosofía más importante de los maestros de matemáticas descansaba en el proceso de axiomatización y sus aplicaciones, ahora existe un amplio consenso en el campo de la educación matemática en torno a una concepción dinámica de las matemáticas, donde los procesos de elaboración tienen un papel relevante y configuran la esencia del conocimiento matemático (Trillo y Platas, 2001), éstas ideas toman fuerza en las filosofías de los maestros, que bosquejan las relaciones matemáticas como creaciones libres del pensamiento (E1, E2, E3, E4, E5, E7) así como el sujeto intelectualmente activo (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 Y E8).

La mayor parte de la literatura en la educación, gira alrededor de la dicotomía absolutista–falibilista, en términos del propio campo educativo la discusión está representada entre los movimientos del constructivismo y los movimientos del conductismo, es evidente que sus diferencias no han marcado una frontera para los maestros quienes reforman las teorías en términos de la propia acción educativa, o tal vez conforme a los mismos apremios del contexto social, se puede dar lugar en un salón de clase humanista una proyección absolutista de las matemáticas (E8) donde la imagen de las matemáticas se proyecta como una consecuencia temporal del contexto social, y sin embargo la razón última tiene que ver con cuestiones absolutistas de aplicación o explicación.

Desde el punto de vista de la pedagogía de las matemáticas, los maestros han dado paso a compartir el poder (E3, E4, E5) (Fenema, 1999) dan libertad para que los estudiantes exploren con base en el *"planteamiento de problemas"* y puedan recurrir a sus compañeros para resolver dudas.

Las filosofías bosquejadas tienen elementos coincidentes, relacionados con la resolución de problemas (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 Y E8) y a la vez diferencias;

se empiezan a disolver los límites entre la escuela y la experiencia vital (E2, E3, E4, E5, E6, E7 Y E8).

Las funciones del maestro se diversifican en distintos matices falibilistas (Ernest, 2007) desde el planteamiento de situaciones y problemas con su respectiva promoción de la discusión (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 Y E8) hasta la formalización e institucionalización de los conocimientos emanados de la acción (E8) lo cual se enmarca en una perspectiva absolutista pues considera a las matemáticas como cuerpo de conocimiento objetivo, basado en las fundaciones de la lógica deductiva (Ernest, 1991).

En las filosofías bosquejadas conviven elementos de nuevas y viejas filosofías de enseñanza y aprendizaje, ahora el rol del maestro consiste en dejar hacer pero también en imponer (E5, E8); el alumno debe participar, pero también debe recibir (E5, E8). Finalmente cabe resaltar que también hay filosofías cuyos elementos básicos en torno a las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza se mantienen en el paradigma de la explicación (E8).

En otras palabras, las filosofías personales de los maestros de matemáticas ocupan una posición intermedia, son más que una colección de creencias, pero menos que un cuerpo de conocimientos absolutos, resaltando sobretodo la actividad humana (Ernest, 1996b).

A partir de las producciones de los docentes recabadas en la tarea inicial de la fase 1, es factible afirmar que estamos ante una diversificación de la enseñanza de las matemáticas, misma que se ha expresado en los elementos que los maestros perciben como las idóneos para provocar construcción de conocimientos en los estudiantes.

Podemos destacar un punto que aparece como homólogo en los esquemas y que además cuenta con una afiliación importante de maestros desde el punto de vista cualitativo, *la resolución de problemas,* (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8) que constituye en palabras de ellos mismos, una fuente importante para los razonamientos de los alumnos. En la diversificación el conjunto de maestros reconocen la idea de la existencia de las situaciones problemáticas. Sin embargo se trata de una visión que aunque concuerda con los planteamientos constructivistas al reconciliar los procesos sociales y la fabricación individual del sentido como piezas centrales y esenciales para resolver problemas (Ernest, 1994b) el peso y la materialización en cada uno de los equipos es diferente.

Piaget inspiró un cuerpo substancial de teorías jerárquicas del desarrollo conceptual para aprender matemáticas, que condujo a la versión mayormente conocida del constructivismo. Desembocó en una teoría educativa que orienta intervenciones en los procesos de aprendizaje que plantea la construcción activa del conocimiento con base en experiencias y en conocimientos anteriores (Ernest, 1991). Así, por ejemplo (E1), aunque existen diversas versiones del constructivismo, la versión radical que da la prioridad a los aspectos individuales de aprender, es más generalizada entre las filosofías que proyectan los profesores (E1, E2, E5, E6, E7, E8) dejando de lado otros aspectos como el social.

Éstos elementos se ven reflejados en la manera en que se materializa la *interacción* en cada una de la filosofías bosquejadas, es decir, es vista como negociación de significados entre personas [(sujeto-sujeto); E3, E4, E6, E7)] o como el ambiente que ofrece los estímulos de adaptación que requiere el desarrollo [(sujeto-objeto); E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8]; implica la inclusión de cuestiones culturales, territoriales, sociales, históricas, profesionales de comunicación, de intercambio, de participación en una tarea común (Gueudet y Trouche, 2008b).

Finalmente la dicotomía epistemológica absolutismo-falibilismo tiende a desaparecer, de modo que en las filosofías personales de los maestros respecto a la enseñanza de las matemáticas, ambas perspectivas se complementan, tal vez ésto sea objeto de muchas críticas, sin embargo, si lo tomamos seriamente, la conclusión ineludible es que éstas filosofías son una construcción humana pragmática que responde a un conjunto de condiciones histórico sociales.

El reto que se plantea a partir del reconocimiento hecho de las filosofías que los maestros accionan para definir su práctica es: ¿Cómo relacionar las filosofías personales de las matemáticas de los docentes, con las teorías actuales sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza?.

5.3 Evoluciones percibidas con base en la emergencia de la matriz de desarrollo profesional

Los planteamientos se basan en dos componentes esenciales para explicar los procesos de enseñanza.

- La primera componente pertenece a la esfera de la instrumentación (Gueudete & Trouche, 2009); y se refiere a la focalización continua, es el encuentro del maestro con su contexto y necesidades profesionales de práctica.
- La segunda pertenece a la esfera de las normas en las interacciones (Cobb, 2005), esto es, a la esfera de la *normatividad* de los encuentros del hombre con el hombre.

Mientras que en la primera prima el artefacto o la herramienta cultural, en la segunda prima la comunicación entre pares. Las formas fundamentales en las que se sustentan las filosofías personales respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son la producción de documentos y la interacción social.

Esas actividades, especialmente en su relación integral entre una y la otra, según Luis Radford (2000) son requisitos para nuestra existencia diaria y para la del paso de una generación a la siguiente. Cuando se plantea a los maestros la orientación que habrían de dar a la enseñanza de las matemáticas, surge como idea central la conveniencia de realizar abundantes trabajos prácticos para romper con una enseñanza *puramente libresca*, ello constituye, sin duda, el paso de una enseñanza de carácter enciclopédico, a una enseñanza eminentemente vivencial y experimental como una especie de revolución pendiente (Enest, 2006).

La resolución de problemas, es retratado como campo privilegiado para el desarrollo de competencias matemáticas, al igual que en las filosofías iniciales, sólo que ahora abarca interacciones entre sujeto-sujeto, es decir entre pares y la interacción entre sujeto- artefactos culturales como instrumentos para materializar el aprendizaje de las matemáticas, lo cual teóricamente coincide con una de las líneas para la enseñanza denominada cognición situada que se suscribe a la visión de que la cognición está producida en prácticas, es decir, éste cuerpo del trabajo se esfuerza para localizar el saber matemático en actividad diaria (Cobb, 2006).

Aunque las evoluciones retratadas en estas filosofías personales vistas de manera ingenua pueden ser equivalentes, tienen apoyos conceptuales sensiblemente diferentes, vemos por ejemplo que la interacción social y otros medios culturales de significación (como el uso de las computadoras y de materiales impresos se posicionan de distinta forma).

La dicotomía entre posiciones filosóficas absolutistas y falibilistas pierde fuerza bajo el peso de la evidencia, pues se ha encontrado que ambas conviven de manera armónica en las filosofías personales de los maestros de matemáticas, respecto a la enseñanza de las matemáticas. Es decir, se reconoce que los profesores se muestran más falibilistas sobre lo que creen que “se debe hacer” y más absolutistas en lo que “hacen”.

Los rasgos evolutivos esenciales promovidos con base en la matriz de desarrollo, se muestran a continuación:

1. Del planteamiento del aprendizaje individual [constructivismo radical, proyecta la construcción idiosincrásica individual del significado en términos

de esquemas cognoscitivos, y proyecta el aprendizaje por medio de los procesos de desequilibrio; asimilación y acomodación (Simon, 2001)], al planteamiento de la interacción y la exploración entre pares [constructivismo social que reconcilia teóricamente los procesos sociales y la fabricación individual del sentido como piezas centrales y esenciales para aprender matemáticas (Ernest, 1994b)].

2. De la exploración basada en la resolución de problemas a la exploración de diferentes situaciones problemáticas basadas en contextos socio-culturales por medio de diferentes artefactos culturales como recursos.
3. De la atención a lo inmediato al desarrollo de diferentes competencias que permiten al estudiante seguir aprendiendo durante el transcurso de su vida.
4. De la articulación individual, a la elaboración de conocimientos socialmente compartidos.

Los maestros siguen planteando situaciones de enseñanza en el marco de la propia disciplina, consideran a las matemáticas como universales y objetivas, (Ernest, 1996). No se piensa la enseñanza de las matemáticas desde estructuras interdisciplinares, es decir, no se plantea la necesidad de la construcción de redes formadas por profesionales de diferentes disciplinas que establezcan situaciones didácticas comunes y que realicen todos los procesos de planeamiento, construcción y estrategia pedagógicos integradamente.

La reflexión de los docentes estuvo ligada siempre al análisis de sus propias producciones que tejidas de manera conjunta con la teoría proporcionaron las bases para que sus propias filosofías siguieran evolucionando, en general con el apoyo de la matriz y la instrumentación de las tareas se logró percibir una evolución de las filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas caracterizada por los siguientes rasgos generales:

Construcción del conocimiento.	
De la construcción individual. [constructivismo radical (Ernest 1994a)].	A la elaboración de conocimientos socialmente compartidos. [Constructivismo social (Ernest, 1994b)].
Abordaje de los contenidos matemáticos.	
De la exploración con base en un problema. (teoría de la resolución de problemas).	A la utilización de diferentes instrumentos para favorecer el desarrollo de habilidades y actitudes de apertura, comunicación y comprensión del entorno. [Constructivismo social (Ernest, 1994b)].
La educación matemática	
De la atención con "*lo inmediato*" y "*lo útil*".	A la capacitación del alumno para acceder a los sistemas de información del mundo actual, para el conocimiento y dominio de nuevas tecnologías y para entender los procesos de cambio que se viven en el conjunto de la sociedad. [perspectiva falibilista (Handal, 2003).

Tabla V.1

La controversia entre las posiciones filosóficas pierde fuerza bajo el peso de la evidencia, pues se han encontrado posiciones "híbridas"; se reconoce que los maestros se muestran más constructivistas sobre lo que creen que "se debe hacer" (fase 1, sección 4.1) que sobre lo que "hacen" en sus clases (fase 2, sección 4.2), es decir, tienden a ser más tradicionales en lo relacionado con la práctica.

Los maestros plantean sus situaciones como especialistas en matemáticas y pocas veces piensan la enseñanza de las matemáticas desde estructuras interdisciplinares, aunque han mostrado ser capaces de plantear situaciones que van más allá de las tareas tradicionales centradas en los alumnos y restringidas al espacio físico del aula, entre las consideraciones hechas se concretan principalmente en el trabajo en equipo, en la colaboración y en la utilización de diferentes instrumentos técnicos[3] para la enseñanza, tal vez sea porque el sujeto edifica sus filosofías con base en su experiencia y luego éstas se ajustan al ser sometidas a nuevas experiencias con el mundo y la sociedad (Ernest, 1994a).

Las tensiones que experimentaron las filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas de los docentes aunque suelen centrarse teóricamente en la organización cognitiva del alumno, también apuntan hacia la organización escolar que reclama exigencias al aquí y al ahora, [origen empírico (Ernest, 1994a)] cabe señalar que la reestructuración de las filosofías no es suficiente para revertir una serie de dinámicas *“tradicionales”*, institucionalizadas en la escuela, pero es muy probable que éstas traten de convertirse en imágenes sociales y en mecanismos de una filosofía de enseñanza, pues se apela a la evolución social del conocimiento (Ernest ,1994a).

5.4 Evaluación de la matriz de desarrollo profesional en el marco de la generalización de patrones

Los resultados de ésta investigación sugieren que existe una distancia grande entre las filosofías de los maestros y la literatura de investigación existente acerca de la generalización de patrones y su enseñanza (Duvinsky, 1991; Radford, 2003; Kieran, 1996) pero también existen evidencias de que los intentos por acortarlas aunque parecen ser lentos son eficientes, pues los docentes reestructuran su filosofía con base en las tareas de desarrollo profesional referentes a su práctica y a los instrumentos conceptuales.

[3] Como computadoras y diversas fuentes de información escrita.

La generalización es abordada por los maestros en un inicio (tarea 1, sección 4.1.1) como exploración de reglas aritméticas o de reglas que rigen sucesiones. Sin embargo, una vez que se ha explorado la tarea 2, las representaciones algebraicas empiezan a tratarse como una manera de materializar lo general (Radford, 2006).

Gracias a los instrumentos conceptuales y a las tareas de desarrollo profesional relacionados con ellos, los profesores, superan su propia estructura sobre la enseñanza de la generalización de patrones incorporando nuevos elementos conceptuales a su estructura. En algunas investigaciones desarrolladas bajo el cobijo de la documentación colectiva (Gueudete & Troche, 2009; 2008a; 2008b; Sánchez, 2010b; Ruthven, 2009), se ha señalado la importancia de la contribución de otros colegas para desarrollar su propio material. Dicha contribución se ha generado en nuestro caso al promover la participación de los maestros en un proyecto de trabajo común, en el que comparten el conjunto de recursos con el que interactúan para llevar a cabo dicho proyecto. En general con el apoyo de la matriz y la instrumentación de las tareas se logró percibir una evolución de las filosofías respecto a la generalización de patrones y su enseñanza caracterizada por los siguientes rasgos generales:

Generalización.	
De describir verbalmente la regla .	A simbolizar.
De proponer estrategias basadas en el descubrimiento.	A proponer tareas estructuradas con base en diferentes fases haciendo notar que se requiere primero describir y luego simbolizar.
De modos de expresión contextual. [Reconocimiento en diferentes patrones (aritméticos y geométricos) una serie de relaciones variantes e invariantes en los	A modos de expresión simbólica.

diferentes términos].	
De darse cuenta de algo común en algunos términos que figuran en lo particular y formar un concepto general- del carácter común observado con todos los términos de la secuencia[4].-	A la cristalización de en un esquema, es decir, una norma que disponga de una expresión para cualquier término de la sucesión.[5]
De procesos de validación con base en la argumentación oral.	Procesos de validación mediante la satisfacción y la presencia de razonamientos por parte de los estudiantes.

Tabla V.2

Los maestros prefieren producir prescripciones verbales (argumentación intencional) como materialización de la generalización de patrones, versus expresar de las relaciones matemáticas a través de la utilización de literales (Kieran, 2006). En éste segundo punto se apoyan en el uso de las letras como número general, para plasmar las relaciones de generalización.

Queda claro que una *generalización,* independientemente de lo que signifique, necesita siempre de algo más que nombrar las relaciones implícitas en una situación, lo cual nos lleva a la representación de la relación con base en las herramientas de la semiótica (Radford, 2006).

Una de las aportaciones del enfoque documental al desarrollo profesional de los docentes sobre la relación entre teoría y práctica ha consistido en reanimar y

[4] Componentes de *la generalización aritmética* identificados por Radford (2006).
[5] Tercera componente identificada por Radford (2006) para que una generalización sea considerada *algebraica*.

ampliar el conocimiento de la naturaleza de la enseñanza y el aprendizaje, en y a través de la práctica (Sánchez, 2010). El aprendizaje del profesor es visto como un contexto social mediante el cual se apropian de recursos para pensar y actuar mediante la promoción de acciones como pormenorizar y someter a análisis las acciones que han conducido al éxito en la enseñanza y en el aprendizaje, asistimos un proceso donde los maestros edifican sus filosofías con base en su experiencia y luego éstas se ajustan al ser sometidas a nuevas experiencias.

Finalmente no podemos concluir que la formación profesional ha llegado a su fin, puesto que los objetivos y enfoques de la educación matemática están sometidos a cambios constantes y profundos (Sowder, 2007) entonces no existe un punto final en el aprendizaje, pues a lo largo de los años el profesor va a tener que ampliar su conocimiento.

5.5 Filosofías personales respecto a la enseñanza de la generalización de patrones

Los maestros en sus planteamientos acentúan la práctica de las matemáticas y el lado humano, ven a las matemáticas como el resultado de un proceso falible y abierto a la revisión, en términos de sus pruebas y sus conceptos, es decir, no se plantea la existencia de una cosa tal como la verdad absoluta. Lo cual se enmarca en la vía falibilista que ve a las matemáticas como proceso incompleto y corregible, cambiando con las nuevas verdades matemáticas que emergen como subproductos de invenciones (Ernest, 1996).

Los maestros promueven un tipo de generalización relacionado con la profundización de las ideas aritméticas[6] (TPE1, TPE8.) pero la experiencia no va más allá de los grados elementales del pensamiento algebraico; se abordan las

[6]Según kaput y Blanton el álgebra como generalización y formalización de patrones Incluye el uso de la aritmética como un campo para expresar y argumentar generalizaciones, a este campo se le conoce como *aritmética generalizada*.

ideas en forma pre simbólica o verbal[7] (TPE1, TPE7, TPE8.), lo cual comulga con las ideas de Love (1986) como uno de los rasgos que pueden constituir el núcleo de la generalización de un patrón la capacidad de darse cuenta de algo en general en lo particular. Pues se ha hecho hincapié en la idea de que la generalización se produce en el universo del discurso, el cuál no va más allá de elementos locales en particular (Radford, 2006). Se proyecta una imagen vital de las matemáticas, que se experimentan con un carácter humano, personal, intuitivo, activo, creativo, de investigación, de relación con las situaciones humanas, etc. Lo cual alude a elementos planteados como esenciales en la vía falibilista (Ernest, 1996).

Las propuestas se ubican en la franja de *la generalización contextual* (Radford, 2003) pues no introducen a los estudiantes en la expresión general mediante la sintaxis algebraica Love (1986) y Mason (1996), destacan que uno de los rasgos que pueden constituir el núcleo de la generalización de un patrón, es la capacidad de darse cuenta de algo general en lo particular. Kieran (1989), sin embargo, afirmó que ésta característica puede no ser suficiente para caracterizar la generalización algebraica de los patrones, sostuvo que además de ver lo general en lo particular "también se debe ser capaz de expresarla algebraicamente" (Kieran, 1989, p. 165).

Las tareas planteadas por los maestros para promover la generalización aluden a dos habilidades *(i)* y *(ii)* y dos contextos sensitivamente diferentes en su naturaleza *(iii)* y *(iv):*

(i) La habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto [someter un caso particular a un concepto general conocido (TPE1)].

[7]Radford (2001) postula que la historia de las matemáticas sugiere que, en algunas tradiciones culturales, la evolución de algunas notaciones algebraicas está basado en gran medida en el habla.

(ii) La habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado. [Deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares (TPE7, TPE8)].

(iii) Generalización de la aritmética, sus operaciones y sus propiedades. Como parte de un proceso de búsqueda de una relación matemática cada vez más general y abstracta del conocimiento implicado en cada situación particular, [del valor posicional de los números, y las relaciones implícitas en la potenciación (TPE1)], se hace uso de la aritmética como instrumento técnico para centrar la atención en operaciones o propiedades del sistema de numeración decimal, según Radford (2006) una generalización de éste tipo que se basa en las acciones realizadas en los números, con base en palabras, gestos y actividad perceptual se denomina "De hecho".

(iv) Creación de generalizaciones acerca de regularidades, como herramienta para modelar una propiedad, una regularidad o una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una configuración. [La búsqueda de regularidades en series basado en el uso de las propiedades, de los distintos sistemas de numeración y el uso de relaciones particulares planteadas de manera figurativa (TPE7) y la identificación de relaciones proporciónales (TPE8)].

Los planteamientos hechos por los maestros para promover la generalización en los estudiantes permiten ver que ellos involucran otros tipos de pensamiento matemático: numérico (TPE1), geométrico-algebraico (TPE8) y de utilización de relaciones o propiedades numéricas (TPE7). Las situaciones (TPE1, TPE7, TPE8) aluden a la primera fase de la generalización, propuesta por Mason (1985) y al primer nivel "*De hecho*" propuesto por Radford (2006) que implica *percibir el patrón,* a través de la actividad perceptual expresándola con palabras o gestos pues los profesores tratan de proponer situaciones particulares con el objetivo de hacer instintivo el contenido, se trata de un hacer fuertemente manipulativo que canalizará la "generalización", donde los estudiantes deberán tomar los objetos, figuras, o instrumentos, observarlos atentamente en su forma, color y apariencia, elaborar algunas hipótesis acerca de las relaciones contenidas en ello y del posible uso que pudieran hacer de estas relaciones matemáticas.

Los maestros se identifican con un postulado falibilista que plantea que el conocimiento es producto de la actividad humana y de la cultura (Ernest, 1996), (TPE1, TPE7, TPE8) creen trabajar los aspectos relacionados con la existencia de las ideas previas de los alumnos (TPE7). Consideran la utilización de diferentes recursos para enseñar matemáticas, pero en la práctica una mayoría se centra en actividades de tipo libro de texto (TPE1, TPE7, TPE8).

Aunque en las filosofías respecto a la enseñanza de las matemáticas bosquejadas por los maestros se incluyen perspectivas de aprendizaje relacionadas con Tecnologías de la Comunicación y la Información (con referencia al capítulo 4). En las producciones relacionadas con la generalización de patrones los instrumentos técnicos a los que recurren los profesores se centran principalmente en actividades relacionadas con el libro de texto como medios para capacitar a los estudiantes.

5.6 Evoluciones percibidas con base en la evaluación de la matriz de desarrollo profesional

En las evoluciones percibidas se destaca el paso de considerar la generalización como una descripción general basada en el lenguaje ordinario [generalización de hecho (Radford, 2006)] a la generalización como la representación simbólica de reglas y procedimientos [Generalización simbólica (Radford, 2006)] sin embargo el transcurso de la generalización concluye en algunos casos cuando los estudiantes registran lo que han derivado de la misma, (E1,T3) y en general se ocupan de la fase *de validación*[8] (Villa, 2006) como un proceso de reflexión con aquello que los estudiantes registran (E7,T3;E8,T3).

Los docentes consideran ahora de manera consiente la promoción de diversos medios de objetivación semiótica, (Radford, 2006) gráficos (TPE7 y TPE8), tablas (TPE1), artefactos, etc. para originar la generalización. Para los maestros es un hecho que el hacer una generalización implica descubrir leyes o propiedades que permitan transformar el campo de interacción con los objetos matemáticos en uno más amplio en el uso del uso del simbolismo algebraico destacan 2 tipos.

1. El uso de letras para representar incógnitas (TPE8) Implica además la capacidad de interpretar como un símbolo representa una entidad general indeterminada y puede asumir cualquier valor (Ursini y Trigueros, 2001).

2. El uso de letras para expresar soluciones generales, como herramienta para probar reglas que gobiernan relaciones numéricas o geométricas. (TPE1 y TPE7).

Ahora el énfasis de la generalización se halla alrededor del simbolismo algebraico, caracterizada por los medios semióticos de la objetivación a la que se orilla a recurrir a fin de lograr sus generalizaciones (Radford, 2006). El significado de la generalización comulga con la idea de que la generalización consiste en la expresión de las relaciones matemáticas a través de la utilización de literales (Kieran, 2006). Los maestros basan sus tareas en la promoción de diversos procesos individuales y sociales.

[8] El cual se centra al cumplimiento de la regla en algunos casos particulares no contenidos en la información inicial.

Procesos individuales.	Procesos sociales.
Percibir. Se promueve la identificación mental de un patrón o una relación.	***Expresar*.** Se promueve la articulación en palabras el patrón o la relación que se ha reconocido.
Plasmar. Se promueve un movimiento hacia el uso de los símbolos y la comunicación escrita.	***Comunicar*** Se promueve la negociación y la construcción social de conjeturas.

Tabla V.3

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES, APORTES Y PERSPECTIVAS

Éste capítulo está relacionado principalmente con las interrogantes de la investigación (ver sección 1.4), está organizado en torno a tres elementos que se consideran capitales en el marco de la propia investigación.

1. Las directrices principales que apoyan la promoción de entornos de desarrollo profesional.
2. Aportes al campo.
3. Rutas que podrían seguir siendo exploradas.

6.1 Directrices principales que apoyan la promoción de entornos de desarrollo profesional de los maestros de matemáticas

Como antecedentes inmediatos a ésta investigación tenemos los trabajos de (Ponte & Chapman, 2006; Gueudete & Trouche, 2009; Matos, et al., 2009; Ruthven, 2010) quienes entre sus principales aportaciones teórico metodológicas plantean el enfoque de la orquestación documental, la caracterización de un modelo basado en la ampliación de la participación del profesorado en las prácticas de lo que constituye la enseñanza y en el énfasis en la recuperación del conocimiento de los maestros derivado de su ejercicio profesional.

La orquestacion documentacional se constituyó en una herramienta útil porque los documentos producidos por los docentes, al desarrollar las tareas profesionales, favorecieron que las ideas y acciones adquirieran un carácter público; transformándose así en nuevos recursos para el trabajo documental colectivo de los mismos docentes.

Ademàs el analisis de éstos documentos permitió establecer una sinergia de comunicación entre los docentes y los mismos documentos (ver secciones 4.1 y 4.2) pues constituyó una fuente importante de información para percibir la distancia entre los propósitos planteados en el proceso de intrumentación y lo que realmente sucede, materializado en los procesos de instrumentalizaciòn.

La noción de participación (Winbourne y Watson, 1998; Matos, et al., 2009), en grupos de aprendizaje focalizado, aporta concreciones deseables de parte de los maestros de matemáticas participantes, que permiten dar cuenta de su aprendizaje. Estas producciones se erigen en sugerencias que posibilitan al investigador avanzar en el establecimiento de una sinergia de colaboración entre y con los maestros sobre la base de compartir, inquietudes, objetivos y recursos similares.

La utilidad revelada por las aportaciones de estas investigaciones, se amalgamó en un sistema matricial (ver sección 2.7), con base en cuatro directrices principales: amalgamadas en un sistema permeado por la focalización continua.

1. El enfoque documental (Gueudet y, Trouche, 2010b).
2. Recuperación del conocimiento derivado del ejercicio profesional de los docentes (Ruthven, 2010).
3. Planteamiento de tareas profesionales para establecer un diálogo con materiales curriculares e instrumentos conceptuales emanados de la investigación en educación matemática. (Gueudete & Trouche, 2009; Matos, et al., 2009).
4. Participación de los profesores en la resolución de tareas, y génesis de documentos (Gueudete & Trouche, 2009).

6.1.1 Recuperación del conocimiento derivado del ejercicio profesional

Según Ruthven (2007) en la planificación y enseñanza de un tema, los maestros se basan en una matriz de conocimientos profesionales, adquirida en el curso de su propia experiencia en el aprendizaje y la enseñanza del tema y en el contacto con los materiales curriculares disponibles. El centro de esta matriz es de relevancia, pues se basa en los objetivos y acciones que sirven para orientar su enseñanza sobre el tema, esto constituye lo que se ha denominado un script[1] plan de estudios (Ruthven, 2007).

La presente investigación parte del reconocimiento de los elementos que direccionan la práctica en dimensiones particulares (ver secciones 4.1.1 y 4.2); lo cual permitió plantear tareas alrededor de un cuerpo de negociaciones sobre la marcha que dieron lugar a una serie de documentos que fueron constantemente reafirmados, alterados o mantenidos (ver secciones 4.1 y 4.2).

Como resultado de la investigación podemos sostener que al considerar los conocimientos derivados del ejercicio profesional de los docentes aumentan las probabilidades de apoyarlos en la superación de sus propias filosofías o estructuras de pensamiento al respecto de un tema especifico; es visto que cuando se les integra, como es nuestro caso, se gana considerablemente claridad con relación a los elementos de la práctica educativa de los docentes con prioridades de experimentación y análisis.

[1] Constituye una forma de organización cognitiva de eventos estructurados, que incluye expectativas de una situación y cursos de acción alternativos (Ruthven, 2007).

6.1.2 Planteamiento y desarrollo de tareas profesionales

En el marco de la investigacion de quien esto sucribe, los resultados obtenidos muestran que el concepto de orquestación documental[2], que amalgama los conceptos de instrumentación (Trouche, 2004; 2005) y génesis documental (Gueudet & Trouche, 2009), constituye una herramienta útil para orientar el planteamiento, refinamiento y restructuración de las tareas planteadas a los profesores en el entorno de desarrollo profesional.

El enfoque documental (Gueudete & Trouche, 2009; Sánchez, 2010) se constituyó en una herramienta útil porque permitió el diseño y desarrollo de diferentes tareas profesionales que favorecieron la generacion de documentos (ver secciones 3.6.2 y 3.7.2) por parte los docentes participantes. La generacion de dichos documentos permitió que las ideas y acciones de los docentes adquirieran un carácter público, transformándose así en nuevos recursos para el trabajo documental colectivo de los mismos docentes.

Además el análisis de éstos documentos constituyó una fuente importante de información para la *focalización continua*, en el sentido que permitieron percibir la distancia entre los propósitos planteados en el proceso de instrumentación y lo que realmente sucede en los procesos de instrumentalización, materializado ésto último en los documentos generados por los docentes en respueta a las tareas profesionales plantedas.

Es decir, el análisis de los documentos producidos por los docentes, al desarrollar sus tareas profesionales, sugirió al investigador de manera constante elementos para el planteamiento de tareas para atender los elementos con prioridades de

[2] Según el cual los profesores en un contexto de participacion interactuan con sus colegas compartiendo recursos para llevar a cabo un proyecto comun.

experimentación y análisis. Un coralario derivado de lo anterior es que el desarrollo profesional de los docentes es un proceso que tiende al infinito, puesto que siempre quedan elementos de la práctica educativa por experimentar y analizar, dicho en otras palabras, la generacion y analisis de documentos por parte de los docentes participantes, permitió al investigador, establecer una sinergia de comunicación entre los docentes y él mismo.

6.1.3 Participación

La participación en el desarrollo de las tareas y su corolario, el diálogo, constituyeron el centro de la matriz de desarrollo profesional (ver sección 2.6), pues permitieron la génesis constante de diversos documentos[3]. La noción de participación (Winbourne y Watson, 1998; Matos, et al., 2009) en grupos de aprendizaje focalizado, aporta concreciones deseables por parte de los maestros de matemáticas participantes, las cuales permiten dar cuenta de su aprendizaje.

6.1.4 Estructuración de las directrices (matriz de desarrollo profesional e investigación)

El análisis de la situación en relación con el desarrollo profesional de los docentes se enmarca en la exploración de las filosofías personales respecto a la enseñanza de las matemáticas y la generalización de patrones, las cuales permitieron establecer las condiciones para fundamentar las acciones de actualización con base en las condiciones y necesidades materializadas por los docentes en los documentos generados durante el desarrollo de las tareas profesionales.

En el caso de la presente investigación se exploran las filosofías personales relacionadas con los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas (primera fase sección 4.1.1) y la generalización de patrones (segunda fase sección 4.2)

[3]Con base en el conocimiento profesional del profesor y las directrices curriculares y conceptuales referentes al tema.

proporcionó el cimiento adecuado para poner en acción tareas de desarrollo profesional, con base en el análisis de las producciones.

La detección de necesidades de desarrollo profesional permitió postular tareas para promover la reflexión de los conocimientos que se postulan como validos según las aportaciones emanadas de la investigación en educación matemática (Hawley & Valli, 1999) y de las directrices oficiales propuestas para el desarrollo de los programas de matemáticas para la educación secundaria para fortalecer las filosofías de los docentes. La necesidad de materializar las propias ideas para poder presentarlas a los compañeros, así como para debatir las otras ideas presentadas se convierte en un ámbito de reflexión necesario en el proceso de desarrollo profesional, ciertamente asistimos a un proceso en que la formación de los docentes forma parte de una dinámica en contacto con las realidades académicas que se dan en el ámbito escolar.

El presente trabajo conduce a considerar que el desarrollo profesional tiene que ver con procesos de acción, producción o reproducción de experiencias educativas (Elmore, 2002), los resultados del análisis desarrollado en los capítulos 3 y 4 impulsan a resaltar el proceso de elaboración teórica como elaboración pública, es decir, comunicada, analizada, verbalizada, contrastada, debatida y sistematizada en los espacios de trabajo de los maestros, este proceso permitió articular las filosofías en acción de los maestros con respecto a la enseñanza de las matemáticas y la generalización de patrones con los soportes científicos y producciones resultantes del trabajo en el mismo.

Los elementos observados en la investigación están vinculados en un sistema complejo en el que intervienen instrumentos técnicos y conceptuales (Llinares, 2005) relacionados con la enseñanza de las matemáticas y la generalización de patrones, toda esta complejidad puede apreciarse en una relación dinámica entre las filosofías de los docentes respecto a la enseñanza de las matemáticas y la generalización de patrones y los conocimientos teóricos, cuando se modifican las filosofías de los docentes sobre la base del desarrollo de tareas profesionales, pues las evoluciones contienen las ligas que conectan las filosofías iniciales con los referentes teóricos básicos.

La exploración de algunos focos de atención[4] (Llinares, 2005) con los maestros, la reflexión teórica al respecto y la experimentación sistemática han dado como resultado una caracterización del papel de los conocimientos a aprender y de los recursos y formas de trabajo en el aula, además permitieron resaltar la atención de los saberes que se necesitan en el contexto de práctica del profesor.

Resulta evidente que lo que los docentes hacen es consecuencia de sus filosofías y que toda innovación en el contexto de las prácticas de la enseñanza está forzosamente influida por ellas. El análisis realizado en los capítulos 3 y 4 confirma que las filosofías de los maestros, referentes a una situación específica como la generalización de patrones y su enseñanza, al someterse a situaciones de interacción aún más específicas tienen consecuencias significativas en la estructuración de sus filosofías en torno a la situación.

Por ejemplo una evolución importante es que en las filosofías iniciales relacionadas con la enseñanza de las matemáticas se consideraba de manera mínima la dimensión social del aprendizaje y después del contacto con los instrumentos teórico conceptuales los maestros consideraron importante la incidencia de la interacción entre los estudiantes, en la enseñanza de las matemáticas.

El grado en que se concede a los docentes responsabilidad y participación en el proceso de adopción de decisiones es una importante variable que define el

[4] La generalización de patrones fue uno de los conocimientos prioritarios que los docentes identificaron como parte de sus necesidades de desarrollo profesional.

potencial de desarrollo profesional en términos de oportunidades y limitaciones (Hawley & Valli, 1999), esto arroja una señal de prudencia en el sentido de no ver todo como resultado de maestros resistentes al cambio, por el contrario, las probabilidades de éxito tienen que ver, sobre todo, con una concepción más estructural en términos de procesos y no de hechos.

Un punto de vista crítico respecto al desarrollo profesional que se ha recogido a lo largo de ésta investigación, es que la evolución de las filosofías de los docentes es un proceso bastante lento, dicho en otras palabras, sería bastante ingenuo afirmar que el cambio es inmediato, fácil y en solitario, implica una manera diferente de pensar el desarrollo profesional de los maestros, en la que se comparten pensamientos, inquietudes y prácticas en lugar de una manera particular de hacer las cosas, de modo que los maestros aprenden entre todos.

6.1.5 En torno al funcionamiento de la matriz de desarrollo profesional

Construir y analizar una matriz (sección 2.7) que sirva de base metodológica para apoyar el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas no resulta tarea fácil, el trabajo práctico desarrollado con base en ella constituye una contribución a que los docentes se desarrollen trabajando sobre la base de sus propios conocimientos hacia los conocimientos científicos y no al contrario como tradicionalmente sucedía[5], es decir, que al considerar sus experiencias profesionales como parte de una filosofía personal se intenta satisfacer las necesidades y demandas de carácter práctico y contextual.

Los elementos de la matriz de desarrollo profesional han sido estudiados en el contexto de las filosofías de enseñanza (primera fase, sección 4.1) y particularmente en el caso de la generalización de patrones (segunda fase sección

[5]Con base en el proceso que se ha seguido se puede sugerir que los esfuerzos de innovación pueden perder gran parte de su capacidad si sólo se quedan en aportaciones puntuales desligadas de la práctica docente.

4.2), donde los docentes plasmaron los aspectos esenciales de sus filosofías al respecto y adaptaron las estrategias de intervención en el contexto específico con base en la exploración de instrumentos conceptúales.

Se consideró importante introducir en la formación de profesores de matemáticas elementos para orientar los procesos de estudio matemático (instrumentos conceptuales) (Llinares, 2005), amalgamados con el uso de materiales y documentos de trabajo producidos por los propios maestros. Lo anterior se hace evidente cuando los maestros intentan incluir la dimensión social en sus filosofías de enseñanza o cuando reestructuran la tarea de generalización de patrones propuesta con base en las nociones exploradas.

El desarrollo de tareas profesionales planteadas sobre la base de los conocimientos de los maestros y sobre lo que ellos perciben como foco de atención ofrece oportunidades para que los profesores se involucren con el diseño e instrumentación de diferentes situaciones, la definición del foco de atención, por parte de los maestros creó una oportunidad para compartir significados, usarlos para definir nuevos argumentos e interaccionar con ellos. Al considerar la naturaleza situada del conocimiento del profesor fue factible la integración del conocimiento de la materia y el conocimiento del contenido pedagógico.

La utilización de los instrumentos conceptuales cambió cualitativamente el flujo y la estructura de las actividades propuestas por los docentes como las idóneas para la enseñanza de las matemáticas en general y en específico para la generalización de patrones. A partir de ellos los maestros establecieron relaciones entre los eventos y las teorías relacionadas, pero el conocimiento generado[6] se encuentra en un estado intermedio pues no es conocimiento científico en el sentido estricto, y tampoco lo es netamente conocimiento práctico, pues tiene

[6] Ver la tarea 8 de la fase 2 donde los profesores a partir de instrumentos teóricos y cuestiones sobre las situaciones observadas, establecen relaciones entre los eventos y las teorías relacionadas y proponen ajustes.

matices de ambos, los instrumentos teórico conceptuales median en la evolución de la filosofía profesional del profesor con base en los siguientes rasgos:

- Transforman las situaciones en una relación más amplia con perspectivas de acciones más complejas.

- Transforman la situación en una relación de carácter utilitario en la situación particular.

La implementación de la matriz de desarrollo profesional constituyó una confluencia temporo-espacial en la cual convergieron los conocimientos prácticos, los cocimientos matemáticos y los conocimientos pedagógicos del contenido matemático de los maestros y las aportaciones que se han venido dando en la marco de la educación matemática.

No podemos negar que existieron influencias en los niveles de organización filosófica personal en los docentes, es decir, el abordaje con el material vivo y particular de las ideas propias de los maestros, respecto a la enseñanza de las matemáticas (fase1) y a la generalización de patrones (fase2), permitió establecer relaciones entre lo que sucede al interior de las filosofías personales.

Finamente cabe resaltar que la matriz permite proceder por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que se va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible de conocimiento profesional.

Con el desarrollo de la matriz cada vez va siendo más patente la enorme importancia de los conocimientos efectivos que involucran a los docentes, el potencial de la matriz para el desarrollo profesional explorada, ha sido sostenido por:

- Una mayor aproximación a las necesidades de los profesores.

- Atención a las teorías con fundamentados en las propias prácticas de los profesores.
- La reflexión docente no limitada a cuestiones técnicas sobre rutinas de enseñanza y gestión interna de clase, hay una atención hacia cuestiones curriculares y planteamientos educacionales.
- El permitir la aproximación de los docentes que comparten contextos y problemáticas semejantes.

Según el encuadre anterior, es preciso modificar el foco, es decir, pasar de los objetos a las prácticas, subrayando el papel que desempeña la triada: instrumentos, contextos y prácticas. Lo cual produce un deslizamiento hacia explicaciones, holísticas, complejas y transdisciplinarias.

6.2 Principales aportes al campo

6.2.1 Determinación del foco de atención

Una de las principales aportaciones de éste trabajo se puede ver a través de la noción de participación (Matos, Powell, Sztajn, 2009), pues se logró que los maestros que se integraron en esta experiencia de desarrollo profesional propusieran el foco de atención[7] a trabajar en el entorno de desarrollo profesional a partir de sus propias necesidades de desarrollo profesional.

Los maestros determinaron el foco de atención hacia donde deberían dirigirse los esfuerzos, que en este caso específico se enmarcó en la generalización de patrones. Las primeras producciones en éste marco estuvieron encaminadas a que sus alumnos determinaran expresiones generales para definir las reglas de sucesiones numéricas y figurativas, lo que sirvió como base para desencadenar actividades de análisis y reflexión entre los maestros en torno de diferentes

[7] Los profesores propusieron diferentes contenidos que representan una complejidad para su enseñanza. (uno los contenidos de difícil comprensión para los alumnos, seleccionado por lo docentes fue “determinar expresiones generales que definen reglas de sucesiones numéricas y figurativas”).

posturas teóricas emanadas de la investigación en educación matemática, relativas al tema, dicho en otras palabras, los maestros participan en una serie de actividades que les permiten expresar la necesidad de explorar contenidos cuya enseñanza posee una complejidad específica lo que les permitirá finalmente fortalecer su práctica docente.

El foco de atención no lo constituyó un elemento asociado a una razón externa, proveniente de un grupo de autoridades superiores, tal como ha sido abordado en las estrategias de capacitación y actualización implementadas hasta ahora en México (Ortega, et al., 2005).

Determinar el foco de atención de manera interna constituyó una condición para recuperar el conocimiento de los profesores sobre el contenido elegido y para revisar las dificultades que significa su enseñanza, en tal sentido, cuando los profesores determinan el foco de atención a estudiar en el entorno de desarrollo profesional, no sólo se manifiesta el deseo de integrarse en una práctica social enfocada, si no también el deseo de aprender[8].

Lo anterior no se debe a que los maestros hayan modificado su interés por el aprendizaje en sí mismo, sino a que les resulta más atractiva la práctica social en la que el interés se centra en lo que les interesa, encontramos un fuerte eco con las ideas planteadas años atrás por Wenger (1998) que postula que el hecho de que se organicen tareas en torno a un área concreta de conocimiento cuyo interés es generado por sus miembros les da un sentido de empresa común y de identidad.

Esto también ha llevado a la autocrítica, hacia un cambio de una orientación del desarrollo profesional orientado a la adquisición a una postura centrada en la participación focalizada, pues los maestros que trabajan en las escuelas

[8] La potencialidad de la comunidad sólo se hará realidad si el sujeto quiere.

convencionales deben entender y atender desde lo que están haciendo hoy, no de lo que se espera que estén haciendo hoy; de hecho, las teorías contemporáneas del cambio educativo, reconocen cómo los procesos de desarrollo profesional toman mayor sentido con la inserción de decisiones de los agentes implicados (Ruthvein, 2007).

6.2.2 Focalización continua

Como hemos mencionado antes, un proceso de genesis documental está regulado a través de la información que los procesos de instrumentación e instrumentalización proporcionan, ésta información permite hacer los ajustes y plantear las tareas con el fin superar las propias filosofías. Una tesis importante que se ha mantenido implícita en éste trabajo es el carácter cíclico, esto es, teniendo en cuenta estos procesos, la orquestación se puede rediseñar o transformar.

Dicho carácter cíclico de la concepción de las tareas en la formación del profesorado ha sido mencionado por otros formadores de docentes (ver por ejemplo Yackel, et al., 2007; Liljedahl, et al., 2007), éste carater nos ayudó a identificar, a través de los documentos generados por los docentes, los recursos que son apropiados, modificados o introducidos por los maestros. Ésto permitió ver las consecuencias de los cambios y tomarlos en cuenta para mejorar el proceso de desarrollo profesional.

Los documentos llevan las huellas de múltiples intercambios, una simbiosis parece estar funcionando y permiten identificar el grado de integración de los instrumentos conceptuales y la posibilidad de asociarse con otros disponibles. En el marco de la presente investigación, los maestros generaron documentos a partir de la interacción con los recursos propios con los cuales cotidianamente desarrollan su trabajo en el aula; trabajaron con el documento generado interactuando con nuevos recursos para ser modificado, proceso que dio origen a un nuevo documento, que incluso fue incorporado como recurso en un siguiente ciclo, para la generación de un nuevo documento; La promulgación de un nuevo documento, se asoció con la integración de un nuevo recurso, es decir, los maestros a partir de un documento inicial y con base en la integración de nuevos recursos (referentes teóricos e intercambio de ideas con los colegas) generaron nuevos documentos que dan constancia de una evolución.

Lo anterior constituye un proceso de Génesis documental continua y por lo tanto focalización continua: donde se da a luz al documento nuevo, que se combina con otros recursos que en conjunto participan en el planteamiento y desarrollo de una nueva tarea lo que da origen a una nueva génesis. En algunas investigaciones recientes relacionadas con el enfoque documental (Sanchez 2010, Gueudete & Trouche 2009) los procesos de instrumentación e instrumentalización son dos elementos que informan respectivamente al investigador sobre la orquestación y sobre la apropiación y/o modificación del conjunto de recursos con los que está interactuando el profesor, éstos ayudan a esclarecer la manera en que una orquestación en su conjunto[9] es apropiada. En éste caso particular los procesos de instrumentación e instrumentalización son dos procesos complementarios, puesto que los segundos aportan insumos de manera permanente a los primeros.

En éstas investigaciones relacionadas con la genesis documental la información proveída por lo s procesos de instrumentación está relacionada con la manera en que se diseñó la orquestación, en nuestro caso, se puede decir que la trayectoria de la orquestación se desarrolla en ciclos en donde a partir de la primer tarea, la información derivada de los documentos producidos por los maestros constituye un insumo importante para seguir orquestando con base en los documentos y la informacion derivada de ellos de tal manera que el diseño se fue dando sobre la base del análisis de los documentos que los profesores producían y de la

[9] El diseño de la orquestación es estática y sólo sufre modificaciones una vez terminada la orquestación.

instrumentalización que materiallizaban en ellos, dichos documentos permitieron retratar de manera constante los objetivos, conocimientos y acciones que sirven al docente para orientar su enseñanza sobre el tema de la generalización de patrones esto constituye lo que se ha denominado un Craft knowledge[10] (Ruthven, 2010).

Se puede concluir que la focalización continua facilita la inferencia e interpretación de los invariantes que guían la práctica, las cuales pueden orientarse en sugerencias que posibilitan al investigador en el avance en el establecimiento de una sinergia de colaboración entre y con los maestros sobre la base de compartir, inquietudes, objetivos y recursos similares.

6.3 Rutas que podrian seguir siendo exploradas

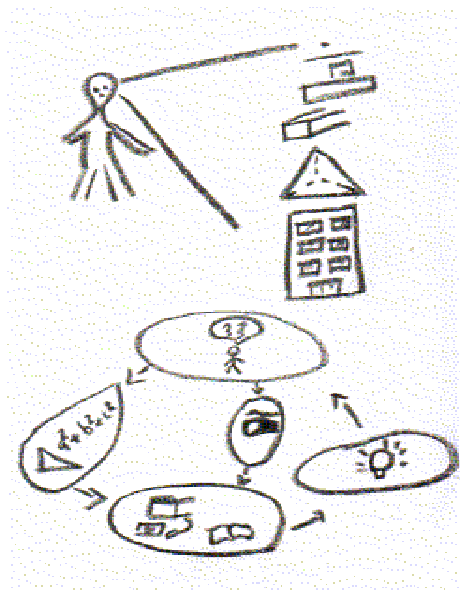
Éste trabajo se basa en el enfoque documental (Gueudet y Trouche, 2009) y abre algunas rutas de acción en la investigacion que podrían seguir siendo exploradas dentro de esta aproximación.

- Primero, éste trabajo proporciona evidencia empírica de la utilidad de la instrumentalización como insumo para modificar el curso de un diseño particular.
- Segundo, no sólo se han identificado procesos de instrumentación que favorecen el desarrollo del conocimiento de los docentes, sino también se han manejado procesos de instrumentación que contribuyen a la identificación de focos de atención para trabajar sobre ello.
- Tercero se ha mostrado que el enfoque de la genesis documental puede adquirir una naturaleza cíclica y evolutiva que permite sugerir que el estudio de diseños particulares ciclicos y dinámicos para contribuir de manera más eficaz los procesos de desarrollo profesional.

[10] Constituye una forma de organización cognitiva de eventos estructurados, que incluye expectativas de una situación y cursos de acción alternativos.

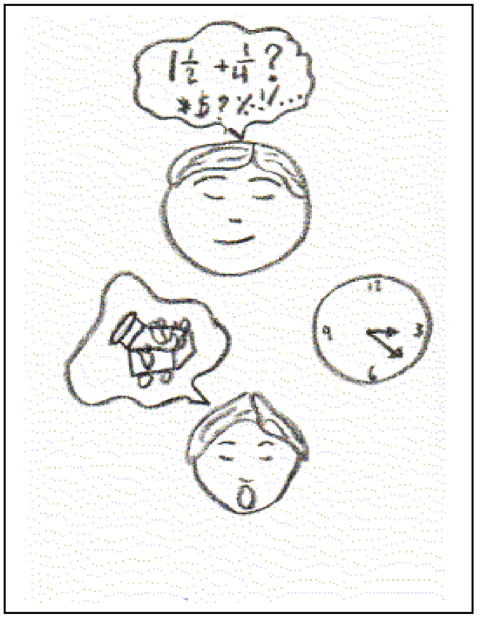
- Finalmente se podría explorar un campo de investigación más complejo relacionado con el desarrollo de los formadores de profesores, por ejemplo, al centrar la atención en el tipo de tareas y los insumos que un formador de maestros utiliza para una clase de situaciones dada.

Fase 1 (F1); Tarea 1 (T1); Equipo 1 (E1)



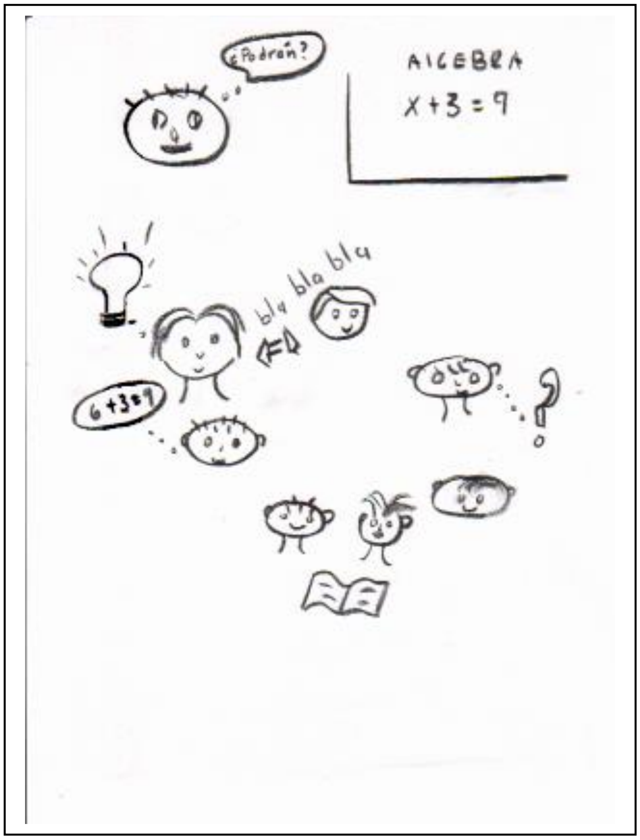
Réplica del equipo.
"El alumno construye estructuras de conocimiento con base en lo que ya posee y sólo va ampliando la estructura de tal manera que el conocimiento mayor tiene su base en relaciones con otros conocimientos básicos"
El maestro percibe ese desarrollo en los alumnos y trata de ofrecerle retos, en este caso relacionados con las matemáticas, que puedan resolverse utilizando recursos para poder apoyar los descubrimientos o construcciones de los alumnos hacia una estructura más sólida de conocimiento y es un ciclo que puede repetirse."

(F1); (T1); 2 (E2)



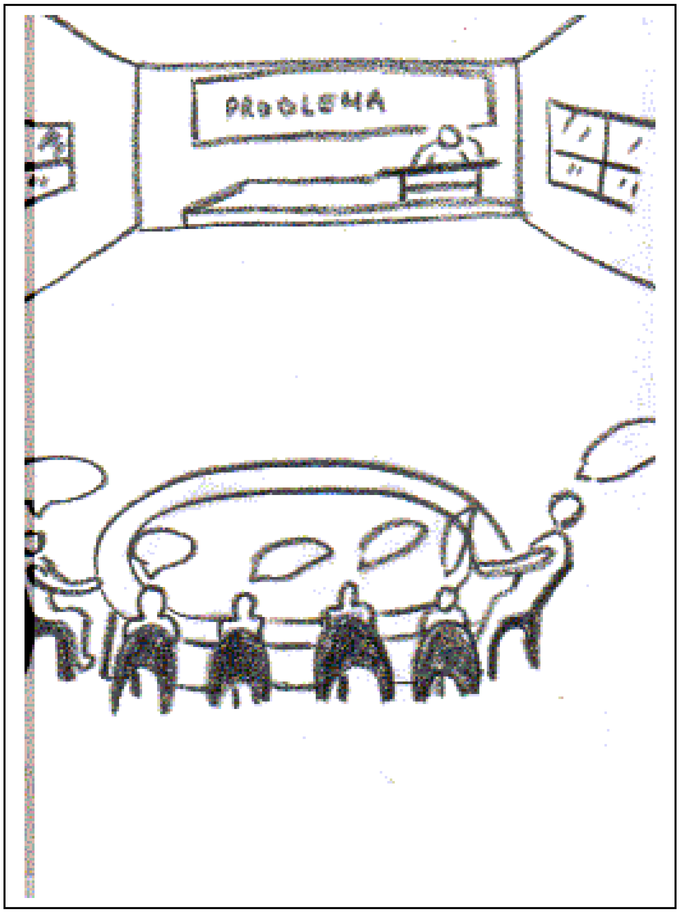
Réplica del equipo:
"El alumno posee conocimientos matemáticos previos; el papel del maestro es plantear problemas reales para que los alumnos puedan además de construir nuevas relaciones hacer uso de las que ya poseen; esto es, para que el alumno utilice los conocimientos que ya posee pero además no le sea suficiente para resolver la situación si no que tenga que avanzar más en el conocimiento matemático en estas situaciones el problema y la resolución que plantearán un conflicto en las estructuras existentes, el cual se va clarificando con el proceso de resolución."

(F1); (T1); (E3)



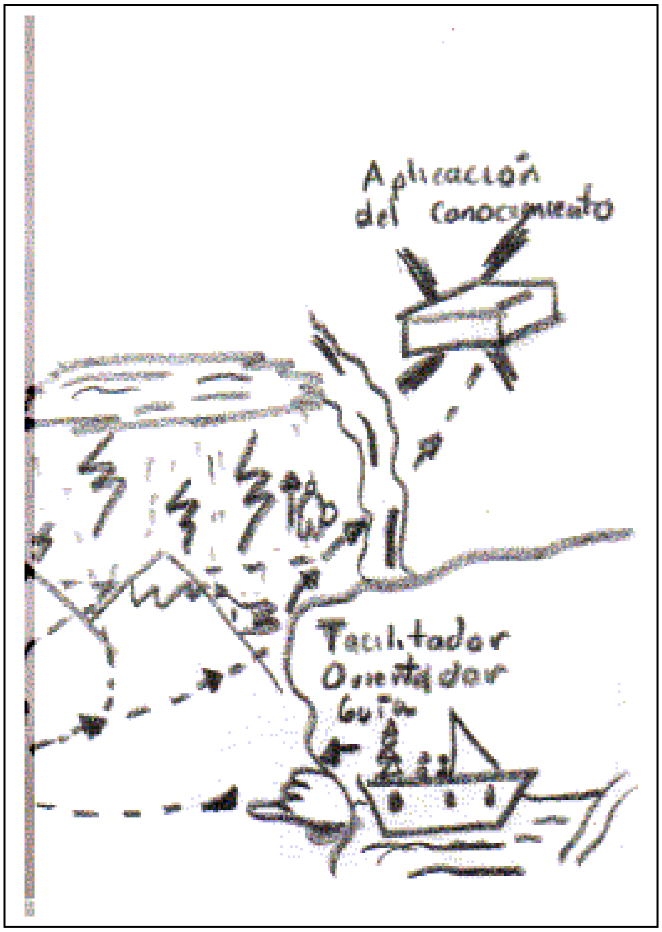
"Planteamiento de problemas con la implicación ¿podrán? Que en este caso es la evaluación permanente. En el proceso hay alumnos que pueden resolver el problema casi al instante, otros tienen que apoyarse en sus compañeros o buscar otro tipo de información adicional para poder avanzar, otros se dedican a hablar de otras cosas que en la mayoría de los casos nada tiene que ver con el problema que se ha planteado y es donde el maestro tiene que mediar para orientar."

(F1); (T1); (E4)



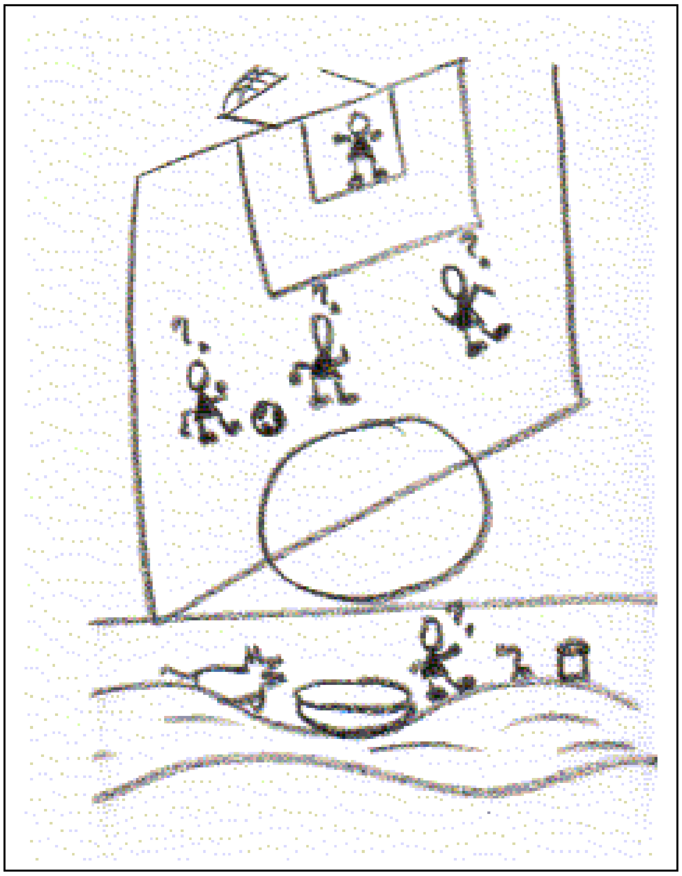
Réplica del equipo:
“Se parte del planteamiento de problemas. El maestro toma el papel de un alumno más y se integra al grupo o al equipo de tal manera que la ayuda será por medio de preguntas como: ¿cómo lo resolverías? ¿Qué planteamiento sugieres? ¿Por qué? ¿Por qué consideras que? Etc. Los alumnos comparten su conocimiento y se retroalimentan con sus compañeros, además se les orilla a que lo argumenten para darse a entender con cada uno de sus compañeros; el maestro evalúa mediante las participaciones de cada uno de los alumnos para poder plantear problemas más sencillos que ayuden al alumno a resolver el problema”.

(F1); (T1); (E5)



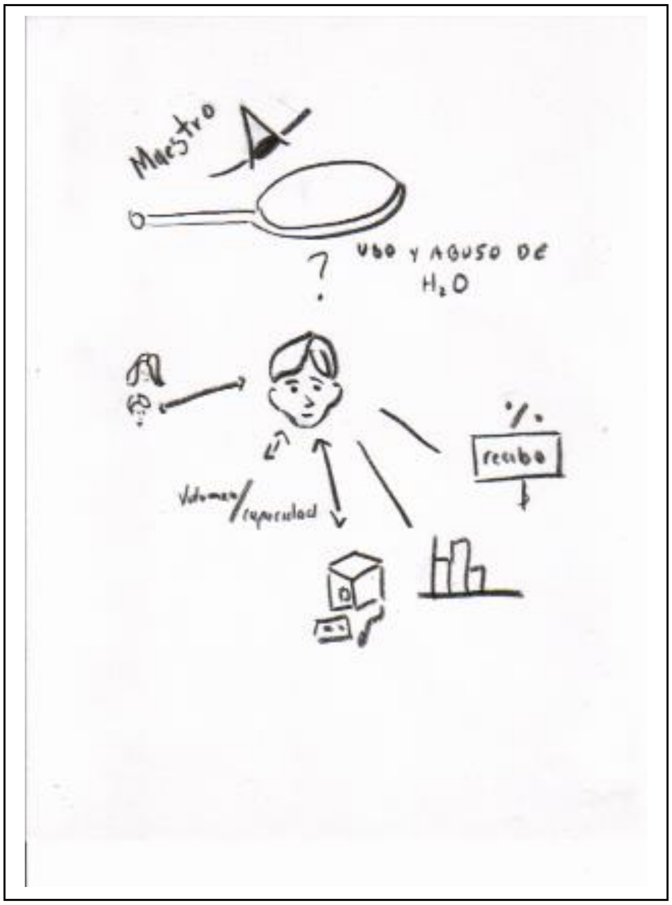
Réplica del equipo.
"Partimos de una base que son los conocimientos previos de los alumnos. El papel de los maestros es solamente facilitar el camino de los conocimientos previos hasta el nuevo conocimiento. Hay caminos seguros para resolver un problema, pero el alumno tiene que recorrer el que según sus posibilidades conocimientos y habilidades le permitan, encontrará retos por vencer en cada camino hacia la resolución del problema o hacia la búsqueda del conocimiento y en cada camino son diferentes. El maestro sólo orienta y ayuda a los alumnos a vencer sus propios peligros mediante herramientas que lo orienten hacia el logro de la solución o aplicación del conocimiento."

(F1); (T1); (E6)



Réplica del equipo.
Las matemáticas no sólo están en los libros de texto, están sobre todo en la *vida diaria,* por ello se necesita plantear problemas que tengan que ver con la vida diaria de los alumnos y con sus intereses, los problemas deben significar un verdadero reto al razonamiento de los alumnos y no sólo pedir la respuesta o aplicación de los conocimientos.

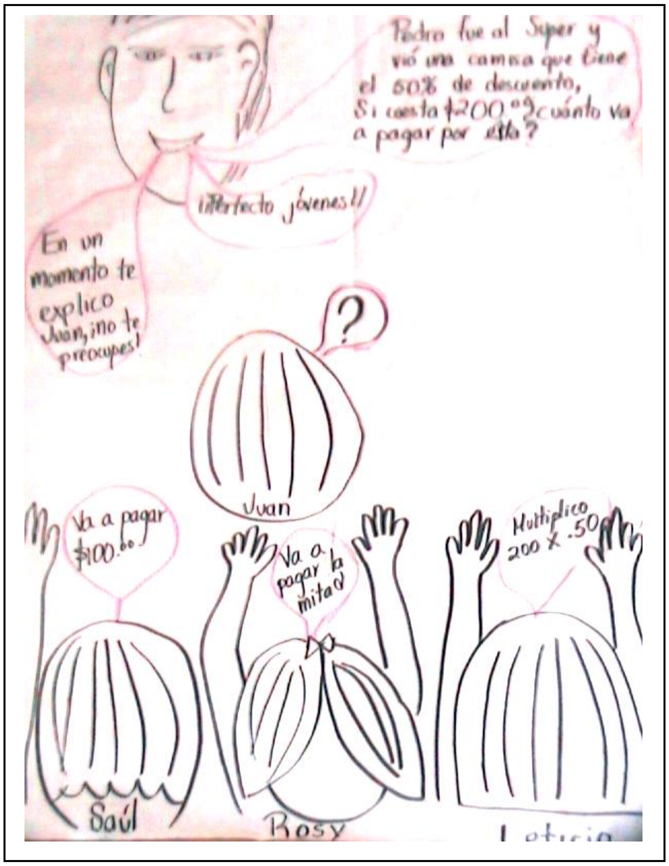
(F1); (T1); (E7)



Réplica del equipo.

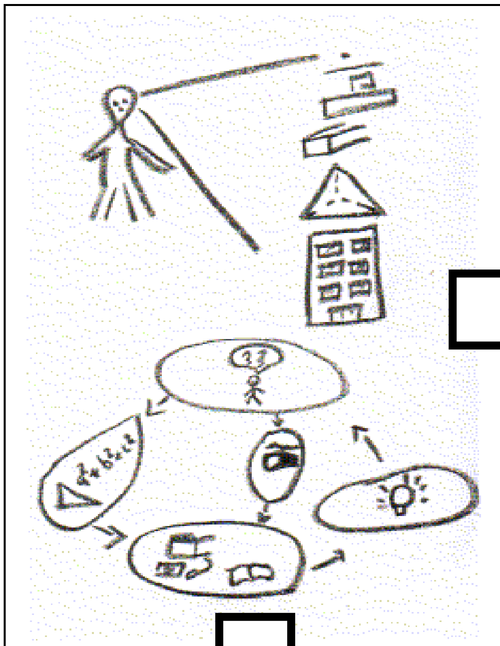
"Planteamiento de situaciones cotidianas o temas de actualidad relacionadas con las matemáticas, exploración de diversas informaciones de muchas fuentes para construir un conocimiento argumentado y sólido, seguimiento de los modos de trabajar con la información por parte de los alumnos y planteamiento de recursos que orienten el propósito que se pretende."

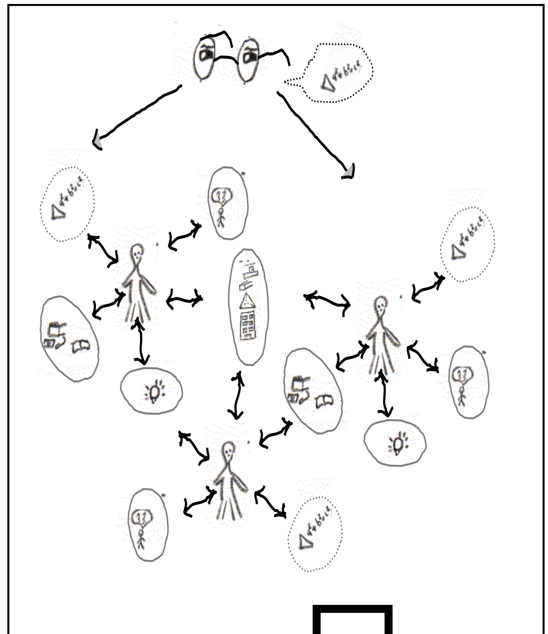
(F1); (T1); (E8)



Réplica del equipo.
"Planteamiento de problemas, presencia de diferentes caminos de solución, hay alumnos que no logran resolverlo y el maestro tiene que intervenir para explicar, los alumnos que no entendieron son el objeto de nuestra práctica en ese momento."

Fase 1 (F1); Tarea 2 (T2); Equipo (E1)



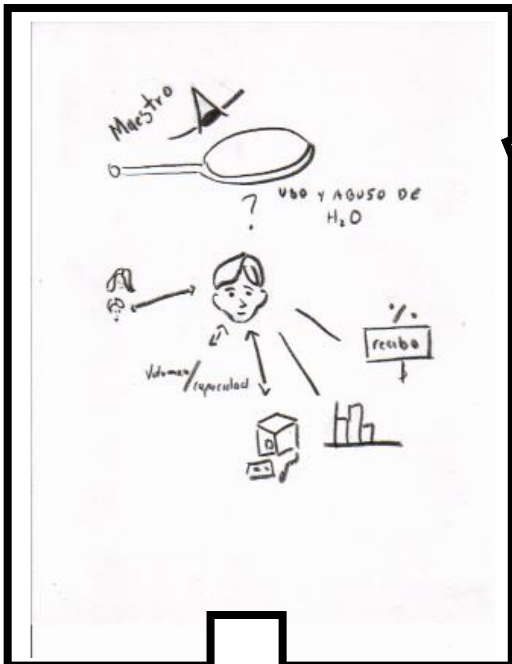


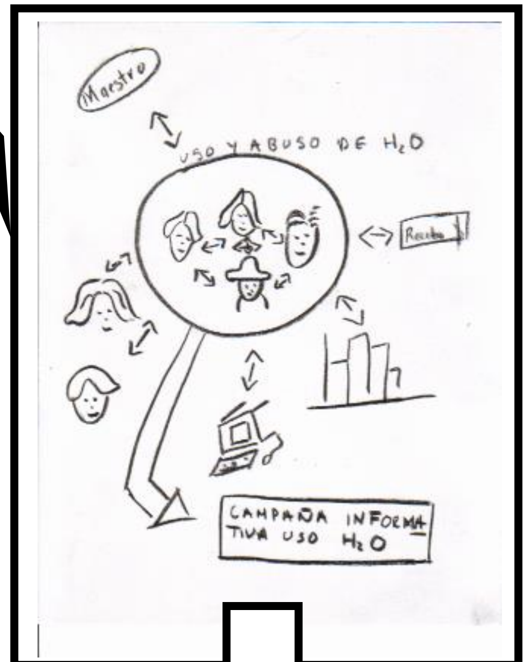
Otras competencias a desarrollar

El manejo de situaciones, la vida en sociedad y convivencia, al plantear una situación actual los alumnos tienen que reflexionar y emitir juicios y opiniones con base en la información y el análisis de la problemática que les atañe físicamente

Identificación de competencias
Se desarrollan competencias para el aprendizaje permanente y el manejo de la información en el sentido de que el alumno tiene que hacer un inventario de los conocimientos que posee y que en teoría estarían en posibilidad de poder aportar elementos en la resolución de la situación problemática, planteada, y establecer estrategias de búsqueda de nueva información para poder establecer una estrategia de trabajo adecuada a las necesidades de la nueva situación, lo cual implica la posibilidad de que cada alumno pueda asumir y dirigir su propio proceso de aprendizaje movilizando conocimientos previos ya sean culturales, científicos o tecnológicos en la resolución de la situación planteada

(F1); (T2); (E7)





Identificación de competencias.

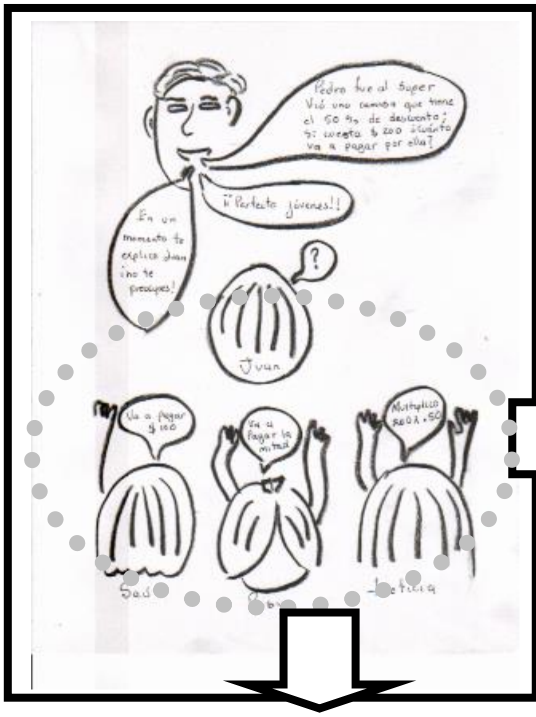
Se desarrollan competencias relacionadas con el manejo de la información y el aprendizaje permanente porque los alumnos utilizan sus conocimientos para darle sentido a la nueva situación.

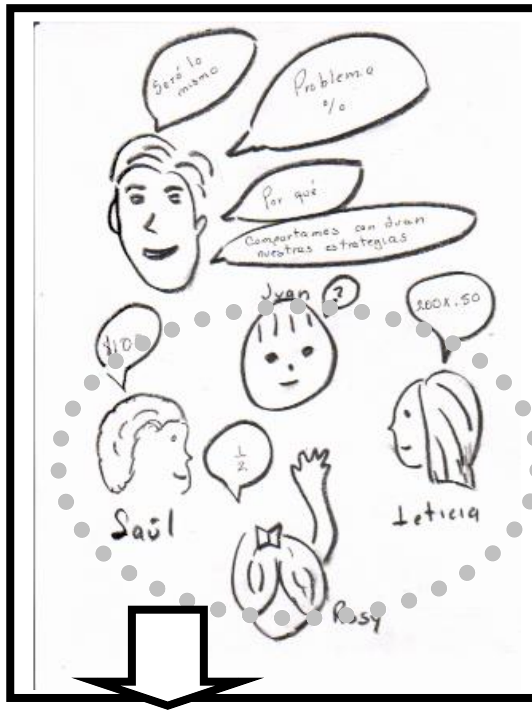
Otras competencias a desarrollar.

Competencias para la connivencia para la vida en sociedad cuando se motiva la interacción de los alumnos para que intercambien sus ideas estrategias y conjeturas relacionadas con la situación propuesta

Para el manejo de situaciones cuando se motiva los alumnos a trabajar con diferentes recursos y negociar sus significados al privilegiar diferentes estrategias, por lo que tiene que poner en juego el análisis y avaluación de sus propias ideas frente a las que plantean sus propios compañeros de equipo.

(F1); (T2); (E8)





Identificación de competencias

1. Para el aprendizaje permanente porque los alumnos analizan situaciones que se encuentran de manera cotidiana y echan mano de los recursos disponibles para resolverlo
2. Para el manejo de situaciones pues al encontrar varias estrategias los alumnos tendrán que comparar y reflexionar sobre las suyas propias.

Otras competencias a desarrollar

1.-Para la convivencia y para vida en sociedad los alumnos analizan situaciones sociales de la vida real y tienen que discutir sus propuestas de resolución.

2- Para el manejo de la información los alumnos tendrán que proponer discutir y reflexionar para elegir la mejor estrategia para solucionar el problema.

Fase 1 (F1); Tarea 3 (T3); Equipo 1 (E1)

Álbum de números

- Los estudiantes tendrán que conformar su equipo para comenzar con el desarrollo de las actividades

Situaciones generadoras de aprendizaje:

- Buscar en periódicos, Internet o algún libro un conjunto de datos de temas que resulten interesantes (los temas se pueden proponer de manera grupal) algunos temas pueden ser por ejemplo:


La Jornada

Estalla la lucha frontal en contra del TLCAN

Aumentan reservas internacionales a 77894 mdd

Aumenta a 60 el número de muertos por la revuelta.

El índice de contaminación aumento en un 0.5 %

Con reco… vistas los alumnos exploran la información y el tipo de núme… por ejemplo índices, número de habitantes de una població… de valores, variación de la temperatura y hacen una clasi… y plantear su significado con base en un contexto social.

actividades

- Investigar y reunir información de diversas fuentes
- Averiguar sobre las diferentes formas para presentar la información
- Seleccionar y clasificar la mejor manera de comunicar los datos

(F1); (T3); (E7)

Simulación probabilística de un examen contestado por azar.

Propósito: Que los estudiantes utilicen la simulación para analizar situaciones probabilísticas.

Situación problemática:

La maestra Rosario va aplicar un examen de 10 preguntas de opción múltiple (cuatro opciones) a los estudiantes del 1.C pero ellos llegaron tarde a su clase, por quedarse más tiempo en la clase de deportes, por lo que sólo les quedaron 5 minutos para resolver su examen, así que ante la emergencia deciden contestarlo al azar.
¿Cuál será el resultado esperado en la situación?

- ❑ Conseguir una bolsa que no sea transparente y tres fichas o canicas negras y una blanca.
- ❑ Introduzcan las 4 fichas o canicas en la bolsa y por cada pregunta extraigan una ficha de la bolsa (si la ficha es blanca significa que respondió bien a la pregunta pero si es negra significa que la respondió mal)
- ❑ Elaborar una tabla de doble entrada para registrar los resultados
- ❑ Repetir el experimento con las 10 preguntas y con 10exámenes y registren sus resultados en la tabla

Examen	❑ Pregunta					
1	1	2	3	4	5	6
2						
3						
4						
5						

- Compartir la información con otros equipos para obtener el resultado de la simulación con 100 exámenes

- Recurrir a sus conocimientos previos, a sus notas o investiguen para estimar la probabilidad de obtener una calificación aprobatoria en un examen contestado al azar con base en los resultados obtenidos en el experimento

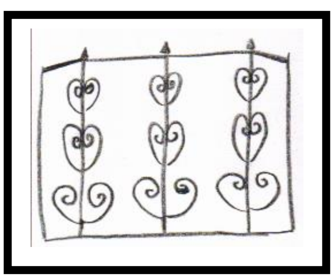
Elaborar una presentación de la información, comunicarla y debatirla con sus compañeros.

"Con base en los datos obtenidos puede plantearse una campaña a favor del estudio en pro de obtener una buena calificación en contraste con el azar y la suerte".

(F1); (T3); (E8)

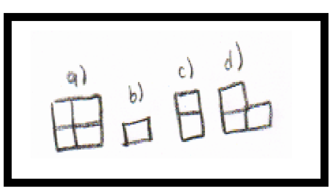
1.- Simetría en la naturaleza y en la cultura.

Los profesores trabajaron (en pequeños equipos) algunos ejemplos de simetría imaginando el trabajo con espejos y se apoyaron en imágenes como las siguientes:



En donde la tarea que pidieron fue colocar el espejo de tal forma que con su ayuda se vea una barra y la reja completa.

Colocar el espejo en la figura a) para obtener la b), c) y d)



Posteriormente dijeron que en las posiciones en que había quedado el espejo era el eje de simetría y con base en ello definieron lo que era simetría.

Finalmente pidieron al grupo que saliera a buscar 2 objetos uno de la naturaleza y otro cultural en donde se pudiera percibir la simetría axial.

Fase 1 (F1); Tarea 4 (T4); Equipo 1 (E1)

Finalidades de la actividad planteada

Construir los fundamentos del razonamiento lógico matemático contextualizado en la vida cotidiana de los alumnos y no únicamente desde los conceptos formales planteados teóricamente en los programas por lo que se intenta desarrollar competencias relacionadas con el aprendizaje permanente (de abstracción, de razonamiento instrumental) y competencias relacionadas con el manejo de la información y de situaciones posibilitando la búsqueda de información en distintos medios (impresos y digitales) para la comprensión de problemas derivados la vida cotidiana

Competencias que se abordan

La actividad planteada favorece la comunicación y la argumentación al poder darle sentido a los conceptos matemáticos culturalmente, es decir, romper las fronteras que la escuela impone, de esa manera se desarrollan competencias para la vida relacionadas también con el manejo de situaciones puesto que los alumnos pueden analizar el medio de información en el que están involucrados los objetos matemáticos en exploración, comprenderlo y en ocasiones transformarlo cuando logran ser conscientes que la situación los involucra como parte de la sociedad.

De igual manera se intenta desarrollar las competencias relacionadas con la resolución y el manejo de técnicas ya que tienen la capacidad de comunicar sus conjeturas usando los más adecuados para comunicar la situación y sea real o ficticia.

Que hace falta para lograrlo

1. Interés de los estudiantes por el estudio de las matemáticas
2. Acceso a diversos medios digitales como el internet para explorar otros escenarios
3. Canales de comunicación con otras áreas del conocimiento como español historia o geografía.

(F1); (T4); (E7)

Finalidades

- Que los alumnos utilicen los conocimientos matemáticos de manera significativa, es decir, que desarrollen de manera cotidiana analizando situaciones reales.
- Desarrollar competencias para la búsqueda de la información, se trata de que ellos mismos puedan echar mano de los recursos disponibles para poder buscar y analizar la información y posteriormente comunicarla
- Desarrollar competencias relacionadas con la resolución de problema el manejo de situaciones y la convivencia de manera integral.

Competencias

- Manejo de la información –los alumnos tienen que buscar la información y analizarla
- Manejo de técnicas- al discutir y proponer la mejor forma de comunicar la información
- Argumentación –con base en la información analizada determinar una posición ante la situación planteada

Que hace falta para lograrlo

1) Promover un ambiente en donde sean los estudiantes los responsables de encontrar las soluciones a las situaciones planteadas.
2) Encontrar la manera de apoyar a los alumnos en el análisis de la información pues frecuentemente se encuentra que tienen dificultades para comprender lo que leen.

(F1); (T4); (E8)

Finalidades.
Lograr el dominio del conocimiento de las matemáticas y aplicarlo en las diferentes áreas de las ciencias, así como en la vida diaria

Competencias que se abordan

El alumno en los pequeños equipos de trabajo desarrolla competencias relacionadas con la comunicación el manejo de situaciones y la argumentación ya que en las actividades tienen que argumentar las características de la posición de la recta para que esta sea simétrica

¿Qué hace falta para lograrlo?

Materiales en la escuela (espejos copias)

Habilidades docentes (para el planteamiento y seguimiento de las tareas)

Flexibilidad de la institución (para el desarrollo de las actividades al aire libre).

Involucrar al alumno. (Motivarlo y buscar una mayor interrelación grupal)

Realizar un trabajo interdisciplinario

Fase 1 (F1); Tarea (T5); Equipo 1 (E1)

	Bloque 1
Contenidos Básicos	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales 1.2 Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas 1.4 Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar. 1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
Contenidos De difícil comprensión	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas
Contenidos complementarios	1.5. Construir figuras simétricas respecto de un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. 1.7. Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional 1.8. Resolver problemas de conteo utilizando diversos recursos, tales como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos personales.

(F1); (T5); (E7)

	Bloque 1
Contenidos Básicos	1.2 Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas 1.4 Explicar en lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas, interpretando las literales como números generales con los que es posible operar. 1.6 Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante" en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.
Contenidos De difícil comprensión	1.1 Identificar las propiedades del sistema de numeración decimal y contrastarlas con las de otros sistemas numéricos posicionales y no posicionales 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas
Contenidos complementarios	1.5. Construir figuras simétricas respecto de un eje, analizarlas y explicitar las propiedades que se conservan en figuras tales como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos. 1.7. Elaborar y utilizar procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional 1.8. Resolver problemas de conteo utilizando diversos recursos, tales como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos personales.

Fase 2 (F2); Tarea 6 (T6); Equipo1 (E1)

Utiliza sólo el símbolo 2, puedes usarlo varias veces, para escribir 3 números diferentes ¿cómo lo logras?

a) Observa los números que escribiste y trata de contestar
b) ¿El símbolo representa lo mismo en cada posición?
c) ¿Qué representa el símbolo en la primera posición?
d) ¿Qué representa el símbolo en la segunda posición?
e) ¿Qué representa en la siguiente posición?

Observa el esquema y trata de completarlo

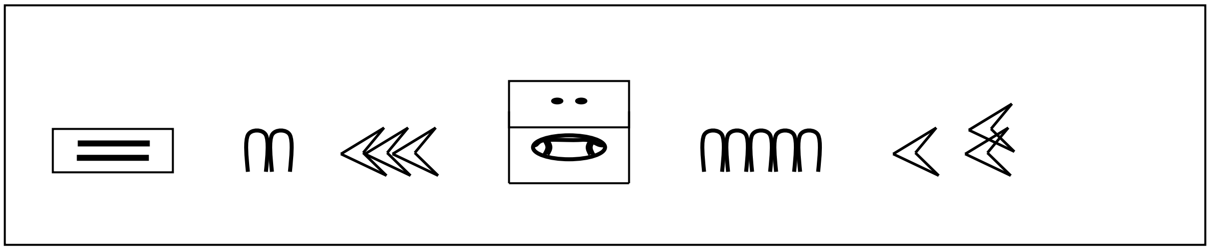
CM	DM	UM	C	D	U
2	2	2	2	2	2
			2x100 2X10X10 $2X10^2$	2x10 $2X10^1$	2x1 $2X10^0$

Se promueve la generalización de patrones del sistema de numeración por que se intenta que los alumnos perciban que un mismo número puede adoptar diferentes valores según la posición que ocupen, y que estos se relacionan con las potencias de 10

(F2); (T6); (E7)

Reúnanse en equipo y analicen el comportamiento de las siguientes sucesiones con base en las siguientes actividades.

1



2

1 III 5 VII 9 XI 13 XV

1.- Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión

2.- ¿Qué número ocupará el doceavo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito?

Explica tu respuesta.

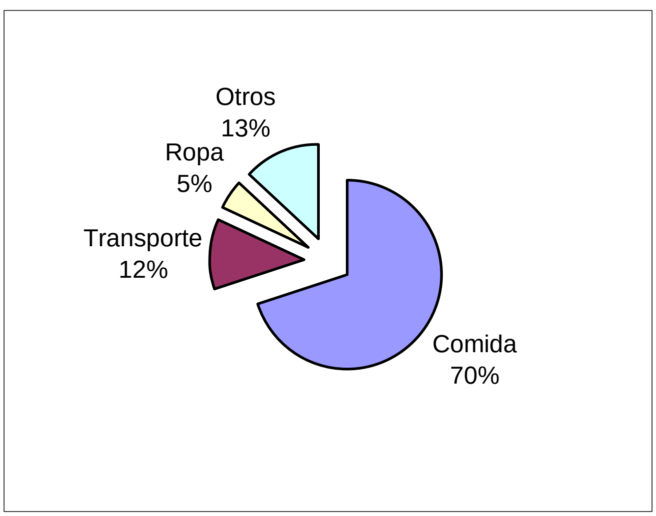
3.- Expresa cada una de las sucesiones en el sistema de numeración decimal.

4.- ¿Qué número ocupará el lugar número 15 en cada sucesión?

Se promueve la generalización porque los alumnos tienen que buscar las relaciones que están configurando cada una de las situaciones planteadas. Y utilizarlas para encontrar otros elementos no contenidos en las situaciones de manera que el pensamiento debe ir más allá de los casos propuestos.

(F2); (T6); (E8)

Con un compañero o compañera observa la siguiente gráfica que representa los gastos del maestro Mario durante la quincena y traten de descubrir cuánto mide el ángulo correspondiente al transporte desarrollando las actividades



1.- Dibujen un ángulo que represente el 100%

2.- Dibujen un ángulo que represente el 50%

3.- Dibujen un ángulo que represente el 25%

4.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 100%?

5.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 50%?

6.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 25%?

7.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 10%?

8.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el 1%?

9.- ¿Cuánto mide el ángulo que representa el gasto de trasporte?

Los alumnos pueden calcular el valor del ángulo aplicando una relación

$$\frac{360^0}{100\%} = \frac{X}{12\%}$$

En donde tienen que generalizar que el 100% equivale a un ángulo de 360^0 y que un ángulo que represente el 1% equivale a dividir 360^0 entre 100, por lo que aplicando estas relaciones pueden calcular el valor de cualquier ángulo.

Fase 2 (F2); Tarea 7 (T7); Equipo (1)

Generalización.

Es un proceso mental que trata de la identificación de elementos comunes en situaciones que presentan ciertas relaciones o propiedades matemáticas susceptibles de poder plasmarse por medio de una regla y posteriormente poder usarla en casos no establecidos en la propia situación.

El camino posible sería el siguiente:

1. Interacción con la naturaleza y relación de componentes que configuran la situación

2. Búsqueda de conjeturas acerca de las relaciones que podrían estar estructurando la situación

3. Prueba de las diferentes conjeturas con base en los diferentes elementos de la situación.

4. Establecimiento verbal (escrito) o matemático (con símbolos del álgebra) de la regla

Se promueve la generalización

Porque trata de la identificación de elementos comunes por ejemplo en los números 333 y 222 los números representan el valor según su posición

3 3 3

↓

X102 $x10^1$ $x10^0$

2 2 2

3) En nuestro caso sólo se considera el paso 1 que es la interacción con la naturaleza de la situación

Utlliiza sólo el símbolo 2, puedes usarlo varias veces, para escribir 3 números diferentes ¿cómo lo logras?

a*) Observa los números que escribiste y trata de contestar*

b*) ¿El símbolo representa lo mismo en cada posición?*

c*) ¿Qué representa el símbolo en la primera posición?*

d*) ¿Qué representa el símbolo en la segunda posición?*

e*) ¿Qué representa en la siguiente posición?*

Observa el esquema y trata de completarlo

CM	DM				
					2
			2x100 2X10X10 $2X10^2$	2x10 $2X10^1$	2x1 $2X10^0$

interacción con la naturaleza de la situación

- *Utiliza sólo el símbolo 2 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes.*
- *Utiliza sólo el símbolo 3 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes*
- *Utiliza sólo el símbolo 5 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes*
- *Ahora contesta las siguientes preguntas:*

¿Qué representa cada número en la primera posición?

¿Qué representa cada número en la segunda posición?

¿Qué representa cada número en la tercera posición?

¿Qué representa cada número en la cuarta posición?

Interacción con los componentes

(F2), (T7), (E7)

Generalización

Es un proceso que inicia con la identificación de rasgos comunes (patrones) y la percepción de que ese rasgo aplica a todos los términos y finaliza con el planteamiento del patrón que permea la situación

Trayectoria

- Interacción con la situación
- Percepción del patrón
- Expresión del patrón
- Prueba del patrón.

Se promueve generalización

Se promueve la generalización porque a partir de una colección de objetos matemáticos se trata de descubrir las reglas que imperan esas relaciones, además se pide el razonamiento más allá de los casos particulares.

(F2), (T7), (E8)

Generalización

Es un proceso cognitivo que consiste en el análisis de una colección de objetos o fenómenos para detectar el patrón o esquema que está involucrado en la situación y posteriormente ampliarlo a casos que no están estipulados en el contexto implica la utilización de cuantificadores universales (símbolos algebraicos) para poder plasmarla

Trayectoria

1) Percibir el patrón
2) Probar el funcionamiento de dicho patrón
3) Plasmar el patrón
4) Probar el patrón en elementos no considerados de la situación

Se promueve la generalización Porque se trabaja con una gama de elementos para descubrir las relaciones que los sistematizan y se trata de ver más allá de los elementos que originan la situación Las etapas que abarca nuestra situación son percibir patrón y probar patrón

Fase 2 (F2), Tarea 8 (T8), Equipo 1 (E1)

- Utiliza sólo el símbolo 2 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes. - Utiliza sólo el símbolo 3 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes - Utiliza sólo el símbolo 5 (puedes usarlo varias veces) para escribir 3 números diferentes - Ahora contesta las siguientes preguntas: ¿Qué representa cada número en la primera posición? ¿Qué representa cada número en la segunda posición? ¿Qué representa cada número en la tercera posición? ¿Qué representa cada número en la cuarta posición?	Interacción con los componentes

Por cuanto multiplicarías el valor del símbolo para obtener el valor que representa según la posición. En la primera posición _____________ En la segunda posición _____________ En la tercera posición _____________ En la cuarta posición _____________	Búsqueda de conjeturas

Se promueve la generalización

Porque se trabaja con una gama de elementos para descubrir las relaciones que los sistematizan y se trata de ver más allá de los elementos que originan la situación

Las etapas que abarca nuestra situación son percibir patrón y probar patrón *observa los siguientes cuadros y trata de completarlos*

CM	DM	UM	C	D	U
1	2	4	3	5	7
	2X10				7X10
		4X 1000		5X10	
			300		

CM	DM	UM	C	D	U
1	2	4	3	5	7
	2X10				7X10
		4X 1000		5X10	
			300		

CM	DM	UM	C	D	U
2	2	2	2	2	2
			2X10	2X10	2X10
			2X100	2X10	2X1
			200	20	2

Ahora trata de plasmar tu conjetura de manera general considera que N representa un número cualquiera

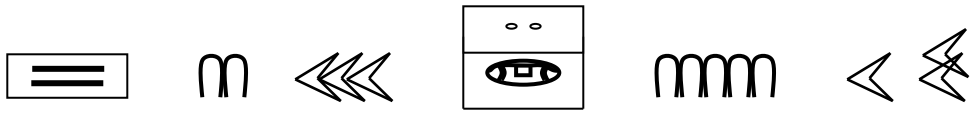
CM	DM	UM	C	D	U
N	N	N	N	N	N
					NX10
					NX1
					N

Explica tu estrategia

Establecimiento de la regla

(F2), (T8), (E7)

Observa el comportamiento de las siguientes sucesiones y realiza las siguientes actividades.

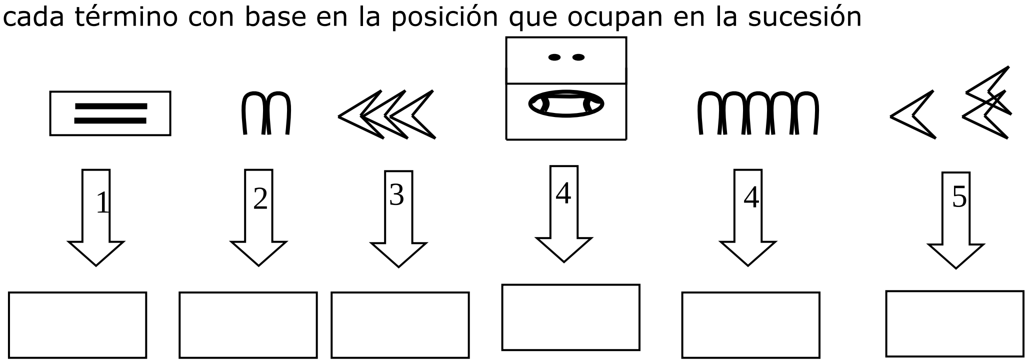


3 V 7 IX 11 XIII 15

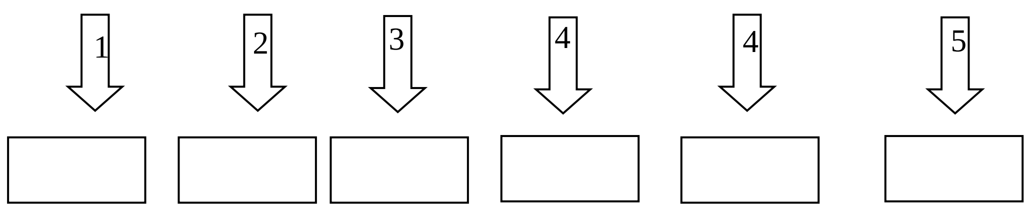
1.- Escribe los siguientes cinco términos de cada sucesión

Interacción con la situación

Expresa simbólicamente las operaciones que realizaste para saber el valor de cada término con base en la posición que ocupan en la sucesión

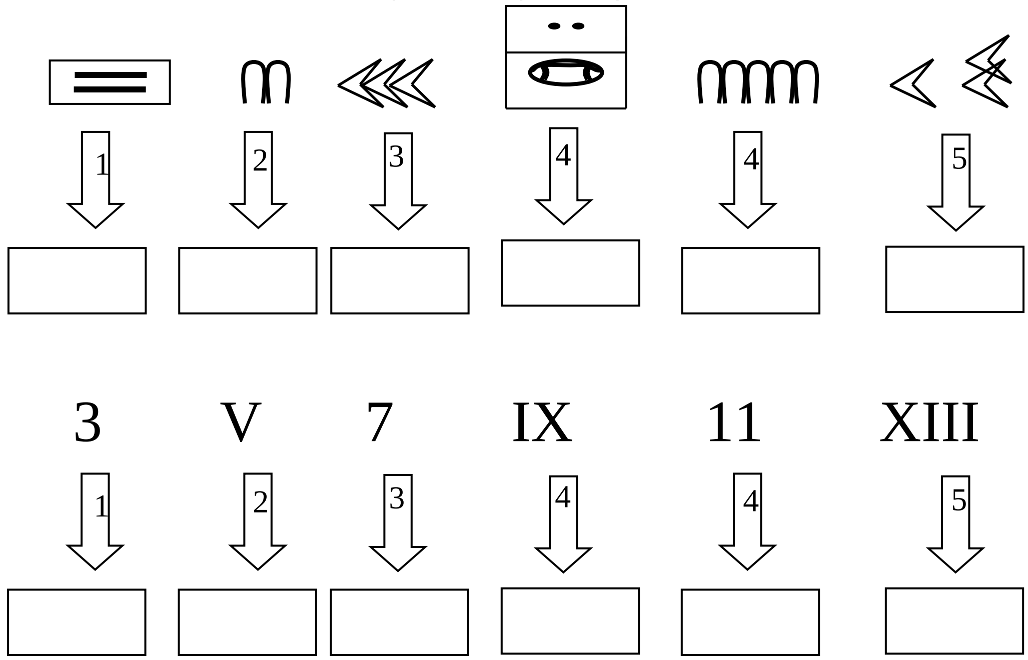


3 V 7 IX 11 XIII



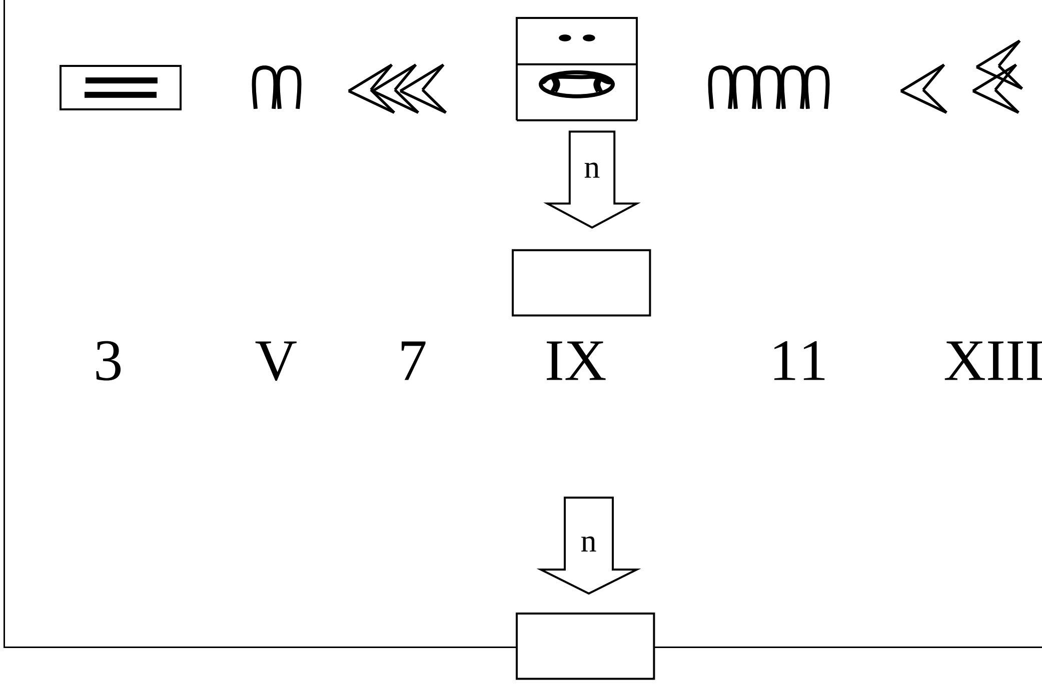
Percepción del patrón

Expresa simbólicamente las operaciones que realizaste para saber el valor de cada término con base en la posición que ocupan en la sucesión



Percepción del patrón

Considera que n es el lugar que ocupa cada número como expresarías la operación que tienes que efectuar para saber el número según la posición que ocupa en la sucesión.



Expresión del patrón

-¿Qué número ocupará el trigésimo segundo lugar de cada sucesión y en qué sistema de numeración estará escrito? Explica tu respuesta.	Prueba

(F2), (T8), (E8)

Con un compañero o compañera explora la siguiente tabla que representa los gastos del maestro Mario durante una quincena y traten de graficarlo con base en el programa Excel apoyándose en una gráfica circular.

Porcentaje	Categoría
100%	Ingreso por quincena.
50%	Gastos por comida
25%	Gasto en transporte y vestido.
10%	Gasto destinado al pago de servicios
10%	Gasto destinado a los estudios de los hijos
5%	0tros.

Ahora en equipo traten de llenar la información requerida en la siguiente tabla:

Porcentaje	Grados	Angulo
100%	360^0	
50%	180^0	
25%		
10%		
5%		

Percibir patrón

Si los gastos destinados al pago de servicios correspondieran a un porcentaje del 12.5%, ¿cuánto mediría el ángulo correspondiente? ▪ ¿Si los gastos destinados al pago de servicios correspondieran a un porcentaje del 2.5%, cuánto mediría el ángulo correspondiente?	Probar el funcionamiento
▪ Escribe la estrategia que utilizaste en cada situación ▪ Ahora si la letra "n" representa los grados que representan el porcentaje de 12.5 cómo representarían la relación si sabemos. 100% equivale al 360^0 • Ahora si la letra "n" representa los grados que representan al porcentaje "x" cómo representarían la relación si sabemos 100% equivale al 360^0	Plasmar el patrón
▪ Ahora con base en tu formula o regla indica cuánto mide al ángulo que representa 20%	Probar el patrón

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

Adler, J. (1995). *Participatory inquiry pedagogy, communicative competence and mathematical knowledge in a multilingual classroom: A vignette*. In L. Meira & D. Carraher (Eds), Proceedings of the 19th PME International Conference, 3, 208-215.

Andelfinger, B. (1981). *Provocative texts and spontaneous reactions of teachers: A method for recognizing teaching and learning of mathematics.* In Equipe de Recherche Pédagogique (Eds.), Proceedings of the 5th PME International Conference, 1, 381-386.

Anderson, J., Simon, H., y Reder, L. (2001). *Radical Constructivism and Cognitive Psychology*. Publicado originalmente en Diane Ravitch (ed.), Rookings Papers on Education Policy.The Brookings Institution.

Anderson, J. (1995). *Cognitive Tutors: Lessons Learned*. pp. 167-207.

Aspin, D., y Chapman, J. (2001). *Towards a Philosophy of Lifelong Learning.* En D. Aspin, J. Chapman, M. Hatton, E y. Sawano (eds.), International Handbook of Lifelong Learning. London: Kluwer, pp. 3-34.

Ávila, A. (2001). *Algunas realizaciones de la reforma a las matemáticas, sus alcances y su significado*. En memoria electrónica del VI congreso de investigación educativa. Manzanillo. COMIE. Universidad de Colima.

Azcarate, P. (1998). *La formación inicial del profesor de matemáticas: Análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional.* Revista universitaria de formación del profesorado. No 3. Mayo/ agosto 1998. Pp. 129- 142

Bairral, Gimenez, & Togashi. (2001). *Desenvolvimento profissional docente baseado* na WEB: perspectivas para a Educação Geométrica. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, nº 39, p. 25-36, set./2001.

Ball, D., & Cohen, D. (1996). *Reform by the book: what is –or might be- the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform?.* Educational researcher, 25(9), 6-8, 14.

Ball, D., & Cohen, D. (1999). *Developing practice, developing practitioners: Towards a practice- based of theory of profesional education.* In Darling-Hammong & G Sykes (Eds), Taeaching as the learning profession; hand book on policy and -practice (Pp 3-32). San francisco. Jossey- Bass

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). *Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?.* American educator fall 2005, 14-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special?*. Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Bartolini-Bussi, M. (1991). *Interacciones sociales y conocimiento matemático*. En PME-15 Assisi, Italia, 1, 1-16.

Bartolini-Bussi, M. (1994). *Acercamientos teóricos y empíricos a la interacción de la sala de clase.*

Baumgartner, E., Bell, P., Brophy, S., Hoadley, C., Sherry, H., Joseph, D., Orrill, C., Puntambekar, S., Sandoval, W., Tabak, I. (2003). *Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry, Educational Researcher*, Vol. 32, No. 1, pp. 5–8

Bednarz, N., Kieran, Carolyn., Lee, L. (Eds), (1996). *Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching.* Kluwer Ademic Publishers. Dordrech/Boston/london.

Bicudo, M., Kluth, V., Paulo, R. (2006). *Philosophy of mathematics education: the construction of geometrical knowledge, lived experience, and lived time. Universidade do sagrado coração* (usc) and universidade estadual paulista (unesp), rio claro campus, são paulo, brazil.

Biddle, B., Good, T., y Goodson, I. (1997). *International Handbook of Teachers and Teaching.* London: Kluwer.

Bishop, J., & Stump, S. (2000). *Preparing to teach in the new millennium: Algebra through the eyes of preservice elementary and middle school teachers.* In Fernendez (Ed.), Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Tucson, AZ: ERIC.

Brissiaud, R., Moreau, J., Perrot, G., Valentin, D., & Vaudy, J. (1982). *Representation des problèmes par le maître et par l'élève a l'école elementaire.* In Vermandel (Ed.), Proceedings of the 6th PME International Conference, 2, 84-90.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003). *Developing elementary teachers "algebra eyes and ears". Teaching children mathematics.* 70-83.

Borasi, R., & Fonzy, J. (1999). *Introducing math teachers to inquiry framework and supporting materials to design professional development.* Report prepared for the National science foundation for grants TPE-9153812 & DUE 9254475 Rochester, NY, University of Rochester.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Callejo, M., Llinares, S., & Valls, J. (2007). *El uso de videoclips para una práctica reflexiva.* Comunicación en las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G. (2006). *Socioepistemología y representación: algunos ejemplos.* Relime, Número Especial, 2006, pp. 83-102.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. (2005). *Escaling up innovative practices in mathematics and science. Research report. National center for improving student learning and achievement in mathematics and science.*

Carraher, D., Schliemann, A., y Brizuela, B. (2000). *Early algebra, early arithmetic. Trating operations as functions.*

Castillo, S. (2008). *Pedagogical proposal based on constructivism for the optimal use of ict in the teaching and learning of mathematics.* Relime V.11 n.2. México.

Chazan, D., Larriva, C., & Sandow, D. (1999). *What kind of mathematical knowledge supports teaching for “conceptual understanding”? Preservice teachers and the solving of equations.* In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd PME International Conference, 2, 193-200.

Chevallard, Y. (2005). *Steps towards a new epistemology in mathematics education.* In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols: CERME 4.

Clarke, D. (1994). *Ten key principles from research on the professional development of mathematics teachers.* In D. B Aichele & A.F Coxford (Eds.), Professional development for teachers of mathematics (pp. 37-48) . Reston VA. NTCM.

Cobb, P. (1989). *Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education.* For the Learning of Mathematics, 9, 32-42.

Cobb, P. (2006). *Putting philosophy to work:coping with multiple theorical perspectives.* Vanderbilt university.

Cooney, T. (1999). *Conceptualizing teachers' ways of knowing.* Educational Studies in Mathematics, 38, 163-187.

Coulange, L. (2001). *Pratiques du professeur dans l'enseignement des systèmes d'équation en classe de Troisième: double point de vue écologique et économique.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 21(3), 305-354.

Davydov, V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education.* Volumen 2. Editor J. Kilpatrick. Traducción inglesa de J.Teller. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.

Davis, P. & Hersh, R. (1980). The Mathematical Experience. London: Penguin.

Densimone, L., Porter, A., Garet, M., Yoon, K., y Birman, B. (2002). *Effects of professional development on teachers' instruction: Results from a three-year longitudinal study, Educational Evaluation and Policy Analysis,* 24(2), 81–112.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós.

Dougherty, B. (1990). *Influences of teacher cognitive/conceptual levels on problem-solving instruction.* In G. Booker, P. Cobb & T. Mendicuti. (Eds.), Proceedings of the 14th PME International Conference, 1, 119-126.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes.* En: D. Tall (Ed). Advanced mathematical thinking. (pp. 25-41). Netherlands. Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.* En D.Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge.* New York: Nichols.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* London: Falmer Press.

Elmore, R. (2002). *Bridging the gap between standards and achievement: The imperative for profesional development in education. Washinton.* DC. Albert Shanker Institute.

Ernest, P. (1994a). *La filosofía de las matemáticas y de la educación de las matemáticas.* En Biehler, R., Scholz, R., Straesser, R. y Winkelmann, B. Eds

(1994). La didáctica de las matemáticas como disciplina científica, Dordrecht: Kluwer, 335-349.

Ernest, P. (1994b). *Which is constructivism social in the psychology of the education of the mathematics?.* En Ponte J. and Matos, (Eds) PME-18, Lisboa, Portugal: University of Lisboa, vol. 2, 304-311.

Ernest, P. (Ed), (1994c). *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education,* London, The Falmer Press.

Ernest, P. (1996). *The nature of mathematics and teaching.* En Ernest Paul (1996). (Ed.), Philosophy of mathematics education. Journal No.9. University of Exeter. Reino Unido.

Ernest, P. (1999). *Is mathematics discovered or invented?.* En Ernest P. (1999) Ed. Philosophy of mathematics education. journal No12. University of Exeter. Reino Unido.

Ernest, P. (2007). *Philosophy of Mathematics Education.* Journal No. 22. Philosophy of Mathematics Education. Journal ISSN 1465-2978. (Online). University of Exeter, United Kingdom.

Ernest, P. (2008). *Epistemology plus values equals classroom image of mathematics.* Ernest. P (Ed). (2008) Philosophy of Mathematics Education Journal No. 23 (October 2008) ISSN 1465-2978 (Online)

Ernest, P. (2009). *Critical issues in mathematics education. Values and the social responsibility of mathematics.* Pages 207- 216. University of Exeter, UK.

Escudero, I., & Sánchez, V. (1999). *The relationship between professional knowledge and teaching practice: The case of similarity.* In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd PME International Conference, 2, 305-312.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2002). *Integration of domains of knowledge in mathematics teachers' practice.* In A.D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th PME International Conference, 4, 177-185.

Falconi, M., y Hoyos, V. (2005). *Instrumentos y matemáticas. Historia, fundamentos y perspectivas educativas.* Universidad Pedagógica Nacional. México

Feiman-Nemser, S. (2001). *From Preparation to Practice: Designing a Continuum to Strengthen and Sustain Teaching. Teachers College Record,* 103 (6), 1013-1055.

Fenema, E. (1999). *Mathematics clasroom that promote understading. University of Wisconsin.* LEA Lawrencee Erbaum Publishers

Flores, P. (2007). *Profesores de Matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación.* PNA. 1(4), 139-159.

García Blanco, M., y Llinares, S. (1998). *Un método para el análisis del contenido y estructura del conocimiento profesional del profesor de matemáticas en secundaria.* En Uno No. 17, p. 65-81.

García-Cruz, J., y Martinón, A. (1997). *Actions and invariants in linear generalising problems.* En E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki: PME.

García-Cruz, J., y Martinón, A. (1998). *Levels of generalization in linear patterns.* En A. Olivier (Ed.), Proceedings of the 22nd Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 329-336). Stellenbosch: PME.

Garza, R. (2004). *Modelación del laboratorio de matemáticas en la escuela secundaria.* Tesis de maestría. México. UPN

Giménez, J., Llinares, S., & Sánchez, V. (Eds.) (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación matemática.* Comares. Granada.

Godino, J. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros.* http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros

Goffree, F., y Oonk, W. (2001). *Digitalizing Real Teaching for teacher Education Programmes:* The MILE-Approach (pp 111-146). En F. Lin & T. Cooney (eds), Making Sense of Mathematics Teacher Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gómez, M. (2000). *Análisis del contenido cualitativo y cuantitativo: definición, clasificación y metodología.* En: Revista de ciencias Humanas UTP. Colombia 2000.

González, H. (2002). *Instantes en el estudio de una generalización matemática.* Universidad de Santiago de Chile, Viña del Mar, Comunicación elaborada con el apoyo del Proyecto de Investigación DICYT 039733GG VII Jornada de Innovación en la Enseñanza de la Matemática, 9 de Octubre de 2002.

Greeno, j., Collins, A., & Resnick, l. (1996). *Cognition and learning.* En D. Berliner & R. Calfee (Eds.), Handbook of educational psychology New York: Macmillan pp.15-46.

Guerrero, S. (2001). *Las tareas matemáticas.* Uno, n. 27, p. 5-6

Gueudet, G. Trouche, L. (2009). *Towards new documentation systems for mathematics teachers? educational studies in mathematics.* 71(3) 199–218. . ICMI. http://www.mathunion.org/index.php?id=685.

Gueudet, G., Trouche, L. (2008a). *Vers de nouveaux systemes documentaires des professeurs de mathematiques?.* En Bloch, I., Conne, F. (eds.). Actes de la xivème ecole d'eté de didactique des mathématiques. (pp. 1–24). saint- livrade: la pensée sauvage.

Gueudet, G., Trouche, L. (2008b). *Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. education et didactique.* 2(3) 7–33. [http://educationdidactique.revues.org/342]

Gueudet, G., Trouche, L. (2009). *Towards new documentation systems for teachers?* Educational Studies in Mathematics.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010a). *Des ressources aux documents, travail du professeur et geneses documentaires,* in G. Gueudet, & L. Trouche (dir.), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 57-74). Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010b). *Genèses documentaires, genèses communautaires, histoires en miroir.* In Gueudet, G. & Trouche, L. (dir.), Ressources vives. le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 129-145). Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP

Gueudet, G., Trouche, L. (2010c). *Ressources vives.* Le travail documentaire des professeurs, lecas des mathématiques. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Guin, D., Joab, M., & Trouche, L. (dir.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM.* (2000-2006). Lyon : INRP et Montpellier : IREM (Université Montpellier 2).

Handal, B. (2003). *Philosophies and pedagogies of mathematics.* En P. Ernest. (2003). Ed. Philosophy of mathematics education. Journal No.17. University of Exeter. Reino Unido.

Hargreaves, A., y Goodson, I. (1996). *Teachers' professional lives: Aspirations and actualities.* London: Falmer Press.

Hawley, W., & Valli, L. (1999). *The essentials of effective professional development: A new consensus.* In L. Darling Hammond & G. Sykes (Eds), Teaching as learning profession: Handbook of policy and practice (Pp. 127-150) San Francisco: Jossey Bass.

Hernán, E., González, G. (2002). *Instantes en el estudio de una generalización matemática.* Universidad de Santiago de Chile, Viña del Mar, Comunicación elaborada con el apoyo del Proyecto de Investigación DICYT 039733GG VII Jornada de Innovación en la Enseñanza de la Matemática, 9 de Octubre de 2002.

Hiebert, J., Morris, A., & Glass, B. (2003). *Learning to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics.* Journal of Mathematics. Teacher Education, 66, 201–222.

Hoyos, V. (2009a). *On line teacher training centered on the integration of mathematics and ICT in high school.* En CREME 6 proceedings. Lyon (France): Université Claude Bernard.

Hoyos, V. (2009b). *Incorporating ICT in Math and Science Highschool Classroms.* En PMENA 2009 Procedings. (en prensa). Atlanta (USA): Georgia State University.

Hoyos, V. (2012). *Online education for in-service secondary teachers and the incorporation of mathematics technology in the classroom.* **ZDM** The International Journal on Mathematics Education.

Hallagan, J., Rule, A., Carlson, L. (2009). *Elementary school pre-service teachers’ understandings of algebraic generalizations.* The Montana Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, Vol. 6, nos.1&2, pp.201- 206. Montana Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Jackson, P. (1975). *La vida en las aulas.* Madrid: Morova.

Jean, E., Hallagan, A., Rule, C., & Lynn, F. (2009). *Elementary school pre-service teachers’ understandings of algebraic generalizations.* Oswego, New York.

Kaput, J. (1998). *Transforming algebra from an engine of inequity an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum.* In S. Fennel (Ed.) The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceeding of a National

Symposium (Pp. 25-26). Washington, D.C.: National Research Council, National Academic Press.

Kaput, J., & Blanton, M**.** (2005). *Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way.* In Romberg, T., & Carpenter, T. (Eds.) Understanding Mathematics and Science Matters (pp. 99-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Khisty, L. (2001). *Effective teachers of second language learners in mathematics.* In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th PME International Conference, 3, 225-232.

Kieran. C., Lee. L., Bednarz. N. (Editores), (1996). *Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Ademic Publishers . Dordrech/Boston/london.

Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective.* In S. Wanger & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra (Vol. 4, pp. 33–59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Kieran, C. (2006). *Research on the learning and teaching of algebra.* A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kilpartrick, J., & Sierpinska, A. Eds. (1998), *Mathematics Education as a Research Domain.* Dordrecht: Kluwer.

Klein, R., & Tirosh, D. (1997). *Teachers' pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers.* In Pekhonen, H. (Ed.). Proceedings of the 21st PME International Conference, 3, 144-152.

Lakatos, I. (1976). Proofs and Refutations, Cambridge: Cambridge University Press.

Lave & Wenger (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation. Cambridge:* Cambridge University Press.

Leon, A. (2005). *El trabajo colegiado en las escuelas de educación básica.* En Revista educare. Año 1. Número 2. México. Agosto de 2005.

Lewis, C., Perry, R. & Murata, A. (2006). *How Should Research Contribute to Instructional Improvement? A Case of Lesson Study.* Educational Researcher, Vol. 35, No. 3, pp. 3-14.

Lieberman, A., y Miller, L. (2001). *Teachers caught in the action: Professional development that matters.* New York: Teachers College Press.

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zazkis, R. (2007). *Interweaving mathematics and pedagogy in task. design: a tale of one task.* Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 239–249.

Linchevsky, L., & Vinner, S. (1989). *Canonical representations of fractions as cognitive obstacles in elementary teachers.* In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), Proceedings of the 13th PME International Conference, 2, 242-249.

Llinares, S. (1996). *Contextos y enseñar a aprender matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria.* En J. Giménez, S, Llinares, V. Sánchez (eds). El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática" Granada. Editorial Comares.

Llinares, S. (1998a). *La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional.* AULA. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa, vol. 10, 153-179

Llinares, S. (1998b). *Aprender a enseñar matemáticas en la enseñanza secundaria: relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico.* En Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, n. 32, p. 117-127.

Llinares, S. (2000). *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas.* En: Da ponte, j., y Serrazina, L. (org.). Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália : actas. [Lisboa] : Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000. ISBN 972-8614-00-4, pp.109-132972-8614-00-4

Llinares, S. (2002a). *La práctica de enseñar y aprender a enseñar matemáticas. La generación y uso de instrumentos de la práctica.* Revista de Enseñanza Universitaria, nº 19, 11-124.

Llinares, S. (2002-b). *Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. (*pp. 195-209). En G.C. Leder; E. Pehkonen, & G. Torner (eds.) Beliefs: A hidden variable in mathematics education?. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Llinares, S. (2003). *Contexto y Práctica de formar profesores de matemáticas. Una mirada al caso de España.* (Pp. 115-140). En Fandiño, M (ed.) (2003) Riflessioni sulla formazione iníziale degli insegnanti di matemática: a ressegna internazionale. Bologna: Pitagora; Italia.

Llinares, S. (2004). *La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en Educación Primaria.* Publicado en (2004). UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, nº 36, pp. 93-115.

Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje.* Conferencia pronunciada en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), Oporto, Portugal. Julio 2005.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). *Mathematics (student) Teachers and teachers educators as learners.* En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). Handbook of research on the psycology of mathematics education. Past, present and future (429-460) Rottedam/ Taipei: Sense Publishers.

Llinares, S. (2008). *Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: Prácticas Sociales y Tecnología.* En revista evaluación e investigación. Num. 1. Año 3. Enero-Junio 2008.

Llinares, S. y Sánchez, V. (Eds.) (1990). *Teoría y Práctica en Educación Matemática.* Edit. Alfar: Sevilla. ISBN: 84-86256-86-0.

Lerman, S. (1992). *La función de la lengua en el Constructivismo radical: Una perspectiva Vygotskiana.* PME-16 de la conferencia, Durham, de New Hampshire, los E.E.U.U., 2:40 - 47.

Lerman, S. (1986). *Alternative Views of the Nature of Mathematics and their Possible Influence on the Teaching of Mathematics,* unpublished Ph.D. Thesis, King's College, University of London.

Love, E. (1986). What is algebra? *Mathematics Teaching,* 117, 48-50.

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra.* In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), Approaches to Algebra (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J., Graham, A.. Pimm, D. y G La formación de los profesores de ciencias en Iberoamérica. ower. (1985*). In routes of roots of algebra, Gran Bretaña: The Open University Press.*

Maiztegui, A. (2000). En Revista Iberoamericana de educación No. 24. Madrid.

Marcelo, C. (2002). *Aprender a enseñar para la sociedad del conocimiento.* Education Policy Analysis Archives, 10(35). http://epaa.asu.edu/epaa/v10n35.

Martinez, A. (2005). *En busca de una mejor opción de los maestros y las maestras en servicio.* En Revista educare. Año 1. Número 2. México. Agosto de 2005.

Mason, J. (1985). *Rutas hacia el álgebra y Raíces del álgebra.* (C. Agudelo, Trad.)Tunja, Colombia. Tunja: UPTC. MEN. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra.* In N. Bednarz, C. Kieran,& L. Lee (Eds.) Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Mayer, R., Quellet, F. (1991). *Méthodologie de recherche pour les interventants sociaux. Boucherville.* Gäetan Morin Editeur. Montreal-Paris-Casablanca. p. 473-502.

Mauss, M. (1950). *Sociologie et anthropologie*. Paris: Presses Universitaires de France.

Mendick, H. (2002). ‘*Why are we doing this?’: A case study of motivational practices in mathematics classes.* In A.DE. Cokburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th PME International Conference, 3, 329-336.

Mendoza, J. (2001). *La reforma curricular y el uso de los problemas en la enseñanza de las matemáticas.* En memoria electrónica del VI congreso de investigación educativa. Manzanillo. COMIE. Universidad de Colima

Montecinos, C. (2003). *Desarrollo profesional docente y aprendizaje colectivo. Psicoperspectivas.* Revista de la escuela de psicología facultad de filosofía y educación pontificia universidad católica de Valparaíso. Vol. II / 2003 (pp. 105 - 128)

Ortega, S., Ramírez, M., & Castelán, A. (2005). *Panorama de la educación secundaria en el D.F. Bases para la acción. AFSEDF.* SEP. México. D.F.

Pajares, F. (1992). *Teachers´ beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. Review of Educational Research,* 62, 3, pp. 307-332.

Pédauque, R. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. Caen: C & F éditions.

Pédauque, R. (coll.) (2007). *La redocumentarisation du monde*. Toulouse: Cépaduès éditions.

Peñas, M., & Flores, P. (2008). *Modo de uso del conocimiento profesional en procesos de reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas.* PNA, 3(1), 19-34.

Philippou, G., & Christou, C. (1994). *Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions.* In J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th PME International Conference, 4, 33-40.

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño. Fondo de cultura económica,* México.

Ponte, J. (1994). *Mathematics teachers' professional knowledge.* En J. Ponte, & J. Matos, (Eds.), Proceedings of the 18th PME Conference, 1, 195-210.

Ponte, J., & Chapman, O. (2006). *Mathematics teachers' knowledge and practices.* En A Gutierrez & P. Boero (Eds.). Handbook of reseach on the psycology of mathematics education. Past, present and future (461-494) Rotterdam/ Taipei: Sense Publishers.

Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). *An investigation of a preservice teacher's use of representations in solving algebraic problems involving exponential relationships.* In H.L. Chick & J.L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th PME International Conference, 4, 105-112.

Putnam, R., & Borko, H.(2000). *What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?.* Educational Researcher, vol. 29, nº 1, pp.4-15

Putnam, R., y Borko, H. (2000b). *El aprendizaje del profesor: Implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición.* En B. Biddle, T. Good y I. Goodson (eds.). La enseñanza y los profesores I. La profesión de enseñar. Barcelona: Paidos, pp. 219-309.

Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2005). *Instruments et systèmes d'instruments (Instruments and systems of instruments).* In P. Rabardel, & P. Pastré (Eds.), Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement (pp. 211–229). Toulouse: Octarès.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Radford, L. (2003). *Gestures, speech, and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning,* 5(1), 37-70.

Radford, L. (2004). *Semiótica cultural y cognición.* Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla, Chiapas México. [En red] Disponible en http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf.

Radford, L. (2005). *The semiotics of the schema.* Kant, Piaget, and the Calculator. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), Activity and Sign. Grounding Mathematics Education. (pp. 137-152). New York: Springer.

Radford, L. (2006). *Elementos de una teoría cultural de la objetivación.* Relime, Número Especial, 2006, pp. 103-129.

Radford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities.*PNA, 4(2), 37-62.

Richardson, V., y Placier, P. (2001). *Teacher Change.* En V. Richardson (ed.). Handbook of Research on Teaching. Fourth Edition. New York: American educational Research Association, pp. 905-947.

Ruiz, A. (1998). *Constructivismo empírico y filosofía de las matemáticas.* Comité interamericano de educación matemática. Boletín informativo. Año 6, No. 1. Escuela de matemática, Universidad de Costa Rica.

Ruthven, K. (2009). *Book review: Summing up mathematics teacher education.* Educ Stud Math (2010) 73:87–97. Published online: 2 September 2009. Springer Science + Business Media B.V. 2009.

Ruthven, K. (2007). *Teachers, technologies and the structures of schooling.* CERME 5 (2007).

Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002). *A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning.* Educational Studies in Mathematics,49 (1), 47-88.

Sánchez, M. (2010a). *Orquestación documentacional: herramienta para la estructuración y el análisis del trabajo documentacional colectivo en línea.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.30, n°3.

Sanchez, M. (2010b). *On the concept of documentational orchestration.* IMFUFA-NSM, Roskilde University en: Carl Winsløw and Robert Evans. Editors (2010). Didactics as design science. FUKU, Forskeruddannelsesprogram i Uddannelsesforskning, Københavns Universitet

Sánchez, M., y LLinares, S. (2002). *Imágenes sobre las Matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje en estudiantes para profesores de Secundaria y tareas matemáticas escolares,* Revista de Educación**,**

Sandoval, E. (2001). *Ser maestro de secundaria en México: Condiciones de trabajo y reformas educativas.* En OEI - Ediciones - Revista Iberoamericana de Educación - Número 25. Profesión docente / Janeiro - Abril 2001.

Schön, D. (1983). *The reflective practioner: How professionals think in action.* Aldershot Hants: Avebury

Schulman, L. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15, 4-14.

SEP. (1993). *Plan y programas generales de estudio secundaria 1993.* México, D.F. SEP.

SEP. (2006a). *Plan de estudios. Secundaria 2006.* México D.F. SEP.

SEP. (2006b). *Programas de estudio 2006, educción básica. Secundaria. Matemáticas.* México.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011, educación secundaria.* México D.F. SEP.

Shulmaister, M. (2000). *La enseñanza de las fórmulas en la escuela primaria un análisis didáctico. Tesis de Maestría en ciencias en la especialidad de investigaciones educativas.* DIE CINVESTAV.

Sikula, J., Buttery, T. y Guyton, E. (eds.), (1996). *Handbook of Research on Teacher Education.* New York: MacMillan.

Simon, M. (1990). *Prospective elementary teachers' knowledge of division.* In G. Booker, P. Cobb & T. Mendicuti (Eds), Proceedings of the 14th PME International Conference, 3, 313-320.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education,* Dordrecht: Kluwer.

Sowder, J. (2007). *The Matehematical Education and Development of Teachers.* En F.K Lester Jr. (ed) Second Handbook of Research on mathematics Teaching and learning (157-224). Charlotte, NC-Reston,VA:NTCM-IAP publishing.

Steinbring, H. (1998). *Elements of epistemological knowledge for mathematics Teachers.* Journal of MathematicsTeacher Education, 1, 157-189.

Spagnolo, F. (2008). *Philosophy of mathematics education among east and west.* Paul Ernest. Editor. Philosophy of Mathematics Education Journal No. 23 (October 2008)**.**

Stacey, K. (1989). *Finding and using patterns in linear generalising problems. Educational studies in mathematics,* 20,147-164.

Steiner, H. (1987). *Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education,* For the Learning of Mathematics, Vol. 7, No. 1: 7-13.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum.* Madrid. Morata.

Tedesco, J., y Tenti, F. (2002). *Nuevos tiempos y nuevos docentes.* Documento presentado en la Conferencia Regional O desmpenho dos profesores América

Latina e Caribe: Novas Prioridades. BID/UNESCO/MINISTERIO DA EDUCACAO, Brasilia, 12 Julio de 2002.

Thom, R. (1973). *Modern mathematics: does it exist?* in Howson A. G. Ed. Developments in Mathematical Education, Cambridge: Cambridge University Press: 194-209.

Thompson, A. (1992). *Teachers beliesfs and conceptions: a synthesis of the research.* En Grows, Douglas. (Ed). Handbook of reseach on mathematics teaching and learnig. (pags 127-146) Nueva York. EEUU. Mcmilllan pub.

Trillo, F., & Plata, A. (2001). *¿Qué modelos de enseñanza-aprendizaje adoptan los profesores de secundaria de matemáticas?* o, cómo los profesores han seguido haciendo lo de siempre pese a la reforma. Anuario universitario de didáctica. Universidad de Salamanca.

Trouche, L. (2004). *Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9(3), 281–307.

Trouche, L. (2005a). *Instrumental genesis, individual and social aspects.* En Guin d., Ruthven k., Trouche l. (eds.) the didactical challenge of symbolic calculators. urning a computational device into a mathematical instrument (pp. 197–230). new york: springer.

Trouche, L. (2005b). *An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. I*n D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument (pp.137 – 162). U.S.A.

Tymoczko, T. (Ed.). (1986). *New Directions in the Philosophy of Mathematics,* Boston: Birkhauser.

Tzur, R. (2002). *From theory to practice: Explaining successful and unsuccessful teaching activities (case of fractions).* In A.D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th PME International Conference, 4, 297-304.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* Editorial Trillas, ISBN 968-24-6752-7, México.

Ursini, S. Trigueros, M. (2001). *A model for the uses of variable in elementary algebra.* En: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.) Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, PME 25.Vol. 4. Freudenthal Institute. Faculty of Mathematics and Computer Science. Utrecht University. Utrech, Países Bajos, p.p. 327-334

Vaillant, D., & Marcelo, C. (2001). *Las Tareas del Formador.* Málaga: Aljibe. Mathematics education as a research domain: A search for identity (pp. 227–241). Dordrecht: Kluwer.

Vergnaud, G. (1998). *Toward a cognitive theory of practice.* In A. Sierpinska & J. Kilpatrick. (Eds.), Mathematics education as a research domain: A search for identity (pp. 227 – 241). Dordrecht:Kluwer.

Verillon, P., y Rabardel, P. (1995). *Cognition and artefacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity,* European Journal of Psychology of Education, vol. 10, núm. 1, pp. 77-101.

Villa, O. (2006). *El proceso de generalización matemática, algunas reflexiones en torno a su validación.* Revista tecnológica. No. 16. Julio de 2006.

Von, G. (1990). *Introducción al constructivismo radical.* En P. Watzlawick y otros, La realidad inventada (pp. 20–37). Barcelona, España: Gedisa.

Waldeg, M. (1992). *Constructivimismo y educación matemática.* En revista educación matemática. Vol. 4. No.2. Editorial iberoamericana. México.

Walshaw, M. (2002). *Epistemic terrains and epistemic responsibility.* Massey University, Palmerston North, New Zealand. En Ernest Paul. (2002) Ed. Philosophy of mathematics education. Journal No.16. University of Exeter. Reino Unido.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. New York : Cambridge University Press.

Wiersma, L. (2001). *Mathematical sophistication and educational philosophies among novice mathematics teachers.* Paul Ernest. Editor. (2001). Philosophy of mathematics education journal 14. POME journal 14, may 200,. Wakefield High School (Arlingon, VA) and American University.

Winbourne, P., & Watson, A. (1998). *Participating in learning mathematics through shared local practices in classrooms.* In A. Watson (Ed.), Situated cognition and the learning of mathematics. Oxford: Centre for Mathematics Education Research of the University of Oxford.

Yackel, E., Underwood, D., & Elias, N. (2007). *Mathematical tasks designed to foster ah reconceptualized view of early arithmetic.* Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 351–367

Zazkis, R., & Campbell, S. (1994). *Divisibility and division: Procedural attachments and conceptual understanding.* In J.P. Ponte & J.F. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th PME International Conference, 4, 423-430.

Zhu y Simon. (1988), *Learning Mathematics from Examples and by Doing.* Pp. 137-166.