UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIDAD UPN 098 D.F. ORIENTE

"ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN EL TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA"

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN EDUCACIÓN

QUE PRESENTA:

DAVID SALINAS OROZCO

ASESOR:

PROFR. JAIME ENRIQUE HERNÁNDEZ GUZMÁN

MÉXICO, D.F. MARZO 2013

SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

UNIDAD UPN 098
D.F. ORIENTE
098TIT/DICT021/2013

DICTAMEN DE TRABAJO DE TITULACIÓN

México, D.F., 20 de marzo de 2013.

C. DAVID SALINAS OROZCO
P R E S E N T E

En calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su trabajo recepcional titulado: **"ESTRATEGIAS DIDACTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN EL TERCER CICLO DE EDUCACION PRIMARIA".**

Opción: **TESIS** Plan LE' 94 **LICENCIATURA EN EDUCACIÓN** manifiesto a usted que reúne los requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo, y se le autoriza proceder a la impresión del mismo, así como realizar los trámites correspondientes para presentar su examen profesional.

S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD UPN 098
D.F. ORIENTE
DIRECCION

ATENTAMENTE
"EDUCAR PARA TRANSFORMAR"

DR. MARCELINO MARTÍNEZ NOLASCO
PRESIDENTE DE LA COMISIÓN DE TITULACIÓN

AÑIL 571, 5º. PISO, COL. GRANJAS MÉXICO. DEL. IZTACALCO C.P. 08400 TEL. 56497296

Dedicatorias y agradecimientos

A mis padres: Como un testimonio de gratitud y eterno reconocimiento, por haberme apoyado en todas las etapas de mi vida, por sus esfuerzos, dedicación y empeño puestos en mi persona, dondequiera que ellos estén gracias.

A mi esposa: Por el apoyo que siempre me ha brindado, por estar a mi lado en los momentos más difíciles, por su paciencia, su comprensión y por ser una guía en la educación de mis hijos.

A mis hijos: Que fueron el motor para superarme y que la culminación de este proyecto sea un ejemplo a seguir y logren culminar con éxito sus respectivas carreras. Gracias a ellos por haberme brindado su tiempo, su paciencia y compartir sus conocimientos de las nuevas tecnologías.

A mi asesor metodológico: Con admiración y respeto agradezco infinitamente al Profr. Jaime Enrique Hernández Guzmán por su apoyo, por el tiempo brindado para compartir sus conocimientos, por ser el guía en la investigación, escuchar mis inquietudes y brindarme la confianza necesaria para el desarrollo y culminación de este proyecto.

ÍNDICE **Pág.**

Introducción

Hoy en día, cuando estamos educando a los futuros hombres y mujeres del siglo XXI, cuando actualmente la ciencia y la tecnología han rebasado las expectativas de los más creativos escritores de ciencia ficción, vivimos en una época donde las cuestiones científicas, tales como la manipulación genética de los alimentos, los viajes espaciales, la lucha de enfermedades como el SIDA, el calentamiento del planeta, la búsqueda de nuevas fuentes de energía entre otros, es imprescindible el desarrollo de las ciencias, principalmente el de las matemáticas que es utilizada como herramienta en muchas áreas del saber como la física, la química, la biología e inclusive en las ciencias sociales para realizar investigaciones de diversa índole y buscar dar solución a los problemas que actualmente enfrenta la sociedad. De ahí que se diga que las matemáticas son un producto del quehacer humano y que muchos desarrollos importantes de esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos, propios de los grupos sociales, durante siglos por las diversas culturas desde las antiguas hasta las actuales.

Las matemáticas han ocupado siempre un lugar preponderante en el currículo de todo sistema de enseñanza. Asimismo, es de las asignaturas que despiertan sentimientos encontrados y que generalmente menos entusiasma a los escolares, ya que la gran mayoría mantienen, rechazo y desapego por tildarlas de difíciles, por su carácter abstracto y su uso posterior en la vida, y que sólo es exclusiva para niños con mente privilegiada por un lado, mientras que para otros, pocos son los que gustan y le encuentran sentido considerándolas lo más bello del mundo.

En la 46º Conferencia Internacional de Educación de la UNESCO, celebrada en Ginebra en septiembre de 2001 se señalaban factores que dificultan el desarrollo de la educación científica y entre ellos el poco interés en las disciplinas científicas por parte de los jóvenes, así como la falta generalizada de profesores en estas y en todos los niveles de los sistemas educativos[1]. En el caso particular las matemáticas como ciencia, tales problemas cobran singular importancia que amerita reflexionar

[1] Revista Iberoamericana de Educación No. 47 (ISNN:1681-5653) p.1

sobre aquellos factores que obstaculizan y afectan un buen desarrollo de su proceso enseñanza aprendizaje en los diversos niveles educativos.

En nuestro país la problemática del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, ha sido un tema que despierta polémica por la dificultad que representa para los docentes propiciar el conocimiento matemático de forma sistemática, ordenada, reflexiva y agradable. Esto ha sido objeto de investigación institucional en las últimas cuatro décadas. A través de mi experiencia como profesor de primaria y particularmente en el tercer ciclo me he dado cuenta que el tema de las fracciones es un tema amplio que abarca otros contenidos curriculares y además compleja por sus diferentes significados; un tema que como lo señala Alicia Ávila "difícil de enseñar y difícil de aprender"[2]. Muchas veces, los maestros enfrentamos dificultades cuando nos planteamos trabajar con los niños el concepto de "fracción". Pero, te has preguntado ¿Por qué se tiene que enseñar fracciones a los niños? ¿Te has parado a considerar qué es lo que se pretende con su enseñanza? ¿Crees que la razón para enseñarlas es su utilidad en la vida cotidiana?. ¿O porque está fijado en los planes de estudio?. ¿O quizá porque son necesarias para abordar y desarrollar otros contenidos escolares?.

Otro aspecto que debe considerarse es ¿qué debemos enseñar sobre las fracciones?, de ahí que surjan diversas interrogantes: ¿Cómo empezar? ¿Qué actividades organizar con los niños? ¿Con qué materiales hacerlo? ¿Qué es lo básico de las fracciones? Hay que añadir algo a los libros de texto que usas. ¿Por qué? ¿Quizá estos no toman en cuenta las características de tus alumnos y ofrecen demasiados contenidos, de forma que no solo hay que añadir, sino que debes reducirlo? ¿Qué nociones crees que son básicas? ¿Qué destrezas y, conocimientos deben poseer los alumnos para manejar el concepto de fracción?

La situación antes descrita permite analizar la importancia del papel del maestro en diseñar, desarrollar actividades y estrategias de trabajo en el aula que coadyuven en

[2] Ávila, A.,E. Mancera (1997). "La fracción: una expresión difícil de interpretar. Revista de la UPN. Vol.6 Nº 17. México

obtener mejores logros de aprendizajes esperados, en la enseñanza de las fracciones.

CAPÍTULO I : Antecedentes y problema de investigación

1.1. Formulación del problema.

Una de las problemáticas en la escuela primaria y que constituyen retos y dificultades que enfrentan los docentes, es la enseñanza de las fracciones.

A diferencia de lo que sucede con otros contenidos matemáticos, el estudio de las fracciones, estos se utilizan menos en la vida cotidiana y las pocas o nulas experiencias que los niños tienen con ellos trae consigo dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje del tema en cuestión.

En el tercer ciclo de educación primaria es común observar como los alumnos no han logrado comprender algunos de los muchos significados propios de las fracciones. Por citar algunos: situaciones de reparto, la conservación de longitudes, áreas o volúmenes, fracciones mayores que la unidad, la equivalencia, comparación de fracciones, no relacionan las fracciones con los números decimales, porcentaje, razones, cociente y los algoritmos de suma y resta en la solución de problemas. Esto se refleja en los bajos índices de aprovechamiento de los alumnos, en el momento de realizar las evaluaciones.

En torno a esta situación surgen una serie de cuestiones que considero pertinentes mencionar: ¿A qué se deberán esos resultados bajos? ¿Cuáles son las exigencias cognitivas en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Retención y memorización? ¿Empleo de algoritmos? ¿Aprendizaje de conceptos? ¿Será el uso prematuro de las fracciones y su representación simbólica? ¿Influye en el aprendizaje el uso de material concreto?¿Influye el lenguaje en el aprendizaje y manejo de las fracciones? ¿Será el significado que tiene los números para los niños como consecuencia de sus experiencias previas trabajando con los números naturales? ¿Los alumnos están aptos potencialmente para aprender este contenido matemático?¿Es necesario poseer aptitudes especiales? ¿Será la limitada preparación del maestro? ¿La utilización de metodologías inadecuadas? o ¿acaso son los programas de estudio por sus amplios contenidos curriculares? o ¿Es la misma abstracción matemática la que provoca tal situación? ¿O será la falta de materiales didácticos para la enseñanza de las fracciones? o bien porque simplemente al alumno no se le ha encausado debidamente para adquirir dentro del proceso enseñanza aprendizaje los conocimientos sobre el uso de las fracciones y sus diferentes significados así como la aplicación de estos en su vida cotidiana.

Trabajar con alumnos de 5º y 6º grado durante varios años, me he percatado que las dificultades que presentan estos por aprender el tema de fracciones y sus significados es el no haber contextualizado situaciones de reparto, equivalencia, comparación y medición, priorizando el significado del fraccionamiento de la unidad y el dominio de las reglas de la suma y resta así como la ausencia del trabajo didáctico en el aula.

Considerando lo anterior es de mi interés llevar a la práctica la propuesta didáctica que expongo más adelante, con alumnos del sexto grado de la Escuela Primaria "Nicolás Bravo" turno matutino del sistema estatal clave 15EPR2632Y con dirección en calle Tepenepantla s/n Colonia Copalera del municipio de Chimalhuacán Estado de México.

Actualmente la planta física, cuenta con 14 aulas bien construidas y 3 provisionales de las cuales 6 aulas cuentan con equipo de enciclomedia dando servicio sólo uno ya que continuamente se descomponen ya sea por falta de energía eléctrica, el bajo voltaje o por las descargas de las mismas. Se cuenta con una dirección, una subdirección y sala de maestros así como de sanitarios dos patios grandes y un huerto escolar.

Cabe mencionar que la escuela se ubica aproximadamente a 2.5 km al poniente de la carretera México-Texcoco sobre el km 26 de la misma, a faldas del cerro del Chimalhuachi del mencionado municipio.

La colonia Copalera, se empezó a poblar hace 20 años. Estas tierras eran utilizadas para la agricultura de temporal por los nativos de Chimalhuacán, mismas que fueron vendiendo poco a poco a las personas que buscaban un terreno donde vivir. En la actualidad se ha incrementado más asentamientos humanos por emigrantes provenientes de los Estados de Oaxaca, Guerrero, Puebla, Michoacán y Veracruz. Asimismo en esta zona solo un 60 % de la población cuenta con servicio de agua potable, alumbrado público, drenaje y energía eléctrica. El resto de la misma compra agua en pipas y se cuelgan de los cables de luz, de los postes más cercanos.

Se puede considerar esta región como semiurbana con mucha falta de servicios públicos como teléfonos, calles pavimentadas, drenaje, agua y energía eléctrica.

Tomando como datos las hojas de inscripción y el libro mismo de la escuela arroja como resultados que el nivel escolar de los padres de familia en un 90 % solo han concluido la primaria (algunos solo cursaron dos o tres años de este nivel), y en un porcentaje menor la secundaria y la preparatoria. Son pocos y muy contados los padres que cuentan con una preparación profesional.

La población económicamente activa se dedica al comercio fijo o ambulante, algunos trabajan de obreros o se dedican a algún oficio (albañiles, pintores, carpinteros, herreros etc.). Hay padres de familia que tienen que ocupar de dos a tres horas para trasladarse a su centro de trabajo, ya que este se encuentra en otros municipios como Ecatepec, Naucalpan, Tlalnepantla o el Distrito Federal.

Ante la situación económica que se vive actualmente los padres de familia se ven en la necesidad de trabajar ambos, delegando a la escuela la responsabilidad sobre la educación de sus hijos. Considero que el apoyo que brinden los padres para con sus hijos es de vital importancia ya sea en la realización de tareas, investigaciones y trabajos extras ya que coadyuvan a un desarrollo integral de los alumnos y de la misma manera hacerlos partícipes en los cambios que se están dando en las escuelas.

1.2. Justificación

Uno de los propósitos de la Reforma Integral Educación Básica (RIEB 2009) es la formación de ciudadanos íntegros capaces de desarrollar todo su potencial así como adquirir valores, hábitos, actitudes, habilidades y conocimientos que les permita integrarse a la vida social como personas útiles e independientes que sepan ejercer su libertad con responsabilidad. De ahí que con esta reforma se ha adoptado un modelo educativo basado en competencias que responda a las necesidades de desarrollo de México en el presente siglo.

Con la reforma educativa y la puesta en marcha de los programas de estudio 2009, los contenidos de matemáticas en la educación primaria se han organizado en tres ejes temáticos en lugar de seis como en los planes y programas de 1993. Asimismo estos ejes se articulan y coinciden con los de secundaria y son: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la información. Los propósitos centrales [3] del estudio de las matemáticas para la educación primaria en el eje temático "sentido numérico y pensamiento algebraico" es lograr que:

- Los alumnos conozcan y sepan usar las propiedades del Sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas.
- Utilicen de manera flexible el cálculo mental, la estimación de resultados y las operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales en la resolución de problemas.
- Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por sí mismos y por otros.
- Identifiquen conjunto de cantidades que varían proporcionalmente y sepan calcular valores faltantes y porcentajes en diversos contextos.

En el tercer ciclo de primaria resalta la importancia de la enseñanza de los números fraccionarios y sus diferentes significados además de trabajar con estos en diversos

[3] SEP (2009) Programas de Estudio Educación Básica Primaria. p.76

contextos que permitan a los alumnos utilizarlos como herramientas funcionales para resolver problemáticas que se plantean en el aula y su vida personal.

De acuerdo con el enfoque de las matemáticas en los Programas de Estudio 2009 y considerando la metodología que lo sustentan, se pretende llevar a las aulas una formación que permita construir conocimientos a través de actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, para encontrar diferentes formas de resolver problemas poniendo en práctica la creatividad, la imaginación, la expresión de ideas y la formulación de argumentos para validar sus resultados[4].

A partir de las experiencias que vivan los niños en el trabajo escolar al aprender matemáticas, redundará en el gusto o rechazo de esta disciplina y la vinculación con otras asignaturas.

Considero que a partir del enfoque de las matemáticas en la solución de problemas, tanto los alumnos como el maestro se enfrentan a nuevos retos y cambios de actitud frente al conocimiento matemático a desarrollarse en el aula.

No se trata que el maestro busque las explicaciones mas sencillas para resolver problemas, sino de que analice y proponga problemas y situaciones interesantes para que los alumnos aprovechen lo que ya saben, es decir hacer uso de los conocimientos previos que les permitan entrar e involucrarse en la situación problema y así tener el desafío de reestructurar algo que ya sabe y pueda modificarlo, para acceder o ampliar sus esquemas de conocimiento.

Consideraciones sobre la enseñanza de las matemáticas

Uno de los problemas centrales no sólo del bajo nivel de aprendizaje sino también del rechazo hacia las matemáticas por parte de los alumnos, es por la manera de como se ha venido enseñando esta área de conocimiento en la escuela. Las

[4] SEP (2009) Programas de Estudio Educación Básica Primaria. p.7

estrategias de la enseñanza “tradicional” de las matemáticas, han hecho ver a esta como con objeto de conocimiento rígido, que no acepta cuestionamiento, ni análisis, ni experimentación, ni manejo de alternativas; en el que lo único que se puede hacer es seguir paso a paso los lineamientos dados por el maestro. Una enseñanza en la que subyace la concepción de que los niños aprenden a través de recibir “información”.

Desde esta perspectiva, lo más fácil es querer facilitar el aprendizaje de los alumnos, donde el docente transmite sus conocimientos en una forma verbalista, expositiva y mecanizada carentes de significado; un conocimiento matemático cargado de un lenguaje de signos numerales y reglas, alterando el sentido de la concepción de aprendizaje. Así por ejemplo, en la resolución de equis problema de adición o sustracción la escuela no brinda oportunidades a los niños de mostrar que harían para resolverlo. El maestro muestra en el pizarrón como él resolvería el problema a través de la formalización; de esta manera el decide que hacer con los datos y que operación utilizar. Los niños en el mejor de los casos, aprenden a mecanizar.

La enseñanza escolar, al pretender que los educandos aprendan de forma tradicional, ofrece el conocimiento como algo ya acabado y listo para ser tomado, como si fuera un objeto material y no algo que requiere ser reconstruido por el sujeto mismo (alumno).Este procedimiento anula por completo las posibilidades de exploración y de descubrimiento, por lo tanto, en lugar de promover una actitud de búsqueda, promueve una actitud de mero receptáculo de información. La actitud del alumno termina siendo completamente pasiva, de espera a que se le otorga el conocimiento. Con esto, el proceso de aprendizaje pierde las condiciones para generar la alegría y el cambio de actitud que se deriva del derecho de descubrir algo.

En términos generales, lo que caracteriza a la enseñanza tradicional es un centramiento en la enseñanza del lenguaje matemático así como, de los mecanismos convencionales en la solución de problemas. Es decir, primero se enseñan los instrumentos, llámese operaciones aritméticas, fórmulas y reglas; en seguida se plantean problemas, con la idea de que una vez “aprendidos” éstos, los niños puedan utilizarlos en la resolución de problemas.

Sin embargo, los resultados de evaluación muestran como los alumnos presentan dificultades para resolver problemas; de ahí que los maestros se cuestionan, si los niños ya saben resolver operaciones, ¿Por qué se les dificultan qué operaciones utilizar en el planteamiento y la resolución de problemas?.

El enfoque metodológico para la enseñanza de las matemáticas 1993

En las últimas cuatro décadas y a raíz de la aparición de la teoría Psicogenética desarrollada por Piaget, cambia la concepción sobre como se aprende. Esta nueva concepción se expresa de diferentes maneras en las reformas educativas de 1993 y 2009.

En la reforma educativa de 1993, el nuevo enfoque metodológico para la enseñanza de las matemáticas, se sustenta en resultados de investigaciones en matemática educativa desarrollados en México [5] y en el extranjero [6] así como en proyectos de desarrollo curricular, todos ellos basados en corrientes constructivistas del aprendizaje.

Este nuevo enfoque tiene como propuesta, propiciar en cierta medida, el desarrollo de los procesos intelectuales a partir de situaciones problemáticas que posibiliten la construcción de conocimiento por parte de los alumnos.

Es decir el conocimiento matemático debe funcionalizarse a través de la resolución secuencial y continua de una serie de problemas que conforman lo que se denomina una secuencia didáctica. “Las secuencias didácticas implican en cada momento el trabajo sobre un concepto matemático, el que se quiere que los alumnos aprendan; e incluyen a partir de ciertos momentos otros conceptos que se relacionan con aquel a

[5] DIE-CINVESTAV. Block,David y Fuenlabrada, I (1978).Investigaciones desarrolladas por el Laboratorio de Psicomatemática..

[6] Brousseau, G.(1976) .Investigaciones desarrolladas en los IREM (Institutos de investigación y enseñanza de la matemática) de Francia .

fin de posibilitar las interrelaciones de los diferentes conceptos que hacen al conocimiento matemático" [7].

Dentro de este proceso de aprendizaje donde interactúan los alumnos, este se concibe más como un acto social que individual, por lo que se plantea organizar el trabajo (de los niños) en equipos o parejas, para que busquen conjuntamente la solución a los problemas que se les plantean y estén así en posición de expresar frente al grupo lo que han realizado en un intento de búsqueda de la solución al problema.

Está expresión de resultados funcionaliza otro espacio de socialización del conocimiento que se define como "confrontación colectiva" a nivel de grupo en la que los niños expresan, argumentan y defienden lo que han averiguado sobre la solución al problema, a la vez que escuchan, aceptan o refutan las maneras de proceder de sus compañeros.

Consecuentemente, el objetivo central de esta metodología es que los niños reconozcan a través del proceso de aprendizaje que las matemáticas son:

- Un objeto de conocimiento sujeto a cuestionamiento, análisis y experimentación, en donde "las cosas no están dadas de una vez y para siempre".
- Una herramienta útil que permite resolver problemas, donde estos pueden resolverse de diversas maneras, entre las cuáles están las estrategias informales y las convencionales (operaciones, sistemas de medida, fórmulas, etc.) y que estos últimos permitan resolver situaciones problemáticas con más facilidad y rapidez.

Por otra parte, la investigación en didáctica de la matemática desarrollada en los últimos 40 años, ha mostrado que los niños aprenden:

- Intereractuando con el objeto de conocimiento en un intento por resolver diversas problemáticas, que implican el concepto matemático;

[7] Fuenlabrada, I (1995).Actualización en la enseñanza de las matemáticas . Conferencia presentada en el 3er.Simposium en Ciencias de la Educación. Proceso de Formación y Actualización de Profesionales de la Educación.

- Intercambiando sistemáticamente con otros sujetos sus hallazgos, estrategias de solución, resultados y observaciones;
- Encontrando cada vez, argumentaciones mejores que defienden los puntos de vista que se van externando sobre los resultados o estrategias de solución.

La formación y actualización del magisterio

Con base en lo expuesto en párrafos anteriores es de vital importancia modificar la formación tradicionalista de enseñanza del maestro. Es fundamental dar un giro a la práctica docente. Se hace necesario mantener una congruencia metodológica entre la manera de concebir cómo aprenden los niños y la manera cómo se propone que los maestros aprendan los diversos conocimientos, tanto matemáticos, como de nuevas estrategias de enseñanza y de procesos de aprendizajes de los alumnos, que les ayudarán a comprender y funcionalizar en el salón de clase el nuevo enfoque de las matemáticas.

En una entrevista realizada a la Dra. Irma Fuenlabrada [8] por la Revista Novedades Educativas, se le cuestionó sobre la ubicación de los maestros ante el nuevo enfoque de las matemáticas a lo que argumentó:

"Creo que muchos maestros tienen que reconceptualizar sus ideas acerca del aprendizaje, consecuentemente acerca de la enseñanza. Por otro lado, también tienen que resolver problemas de orden disciplinar. Muchas veces sus ideas sobre el conocimiento matemático están equivocadas y otras, aunque no estén equivocadas, son una parte muy mínima del concepto que está en juego. Por ejemplo, han llegado a pensar, por su práctica, por la manera en que les han llegado las propuestas, por su formación, que un cuadrado apoyado en su vértice es un rombo, cuando lo que diferencia un cuadrado de un rombo es si tiene o no ángulos rectos y lo que se conserva tanto en uno como en el otro son los cuatro lados iguales. También piensan que un triángulo solamente tiene una base y una altura. No saben que cualquier lado puede funcionar como base. Son algunas de sus concepciones erróneas".

[8] Entrevista a Irma Fuenlabrada (1999). En Revista Novedades Educativas. Edición No. 99

Ante esta reconceptualización del conocimiento matemático es necesario que los maestros se actualicen para ampliar, profundizar y enriquecer sus conocimientos y logren comprender mejor los conceptos que sustentan al lenguaje matemático y los procesos algorítmicos que hasta ahora se han enseñado. Pero sobre todo reconceptualicen sus estrategias de enseñanza considerando que el conocimiento matemático requiere ser reconstruido por el sujeto-alumno que aprende.

Enfoque de los Programas de Estudio 2009

El planteamiento central de la metodología didáctica que sustentan los programas de estudio de matemáticas es llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, y encontrar diferentes formas de resolver problemas y formular argumentos que validen los resultados.

"El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos los puedan usar, de manera flexible para solucionar problemas de la vida cotidiana. De ahí que su construcción amerite procesos de estudio más o menos largos, que van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje, como de representaciones y procedimientos"[9].

Los avances logrados en el campo de la didáctica de la matemática en los últimos años han ayudado a entender los procesos que siguen los alumnos para construir nuevos conocimientos y superar los obstáculos que surgen en el proceso de aprendizaje. Así los niños aprenden modificando ideas anteriores al interactuar con situaciones problemáticas.

Si bien es cierto que las matemáticas se han construido a lo largo del tiempo como herramientas para resolver problemas del mundo físico, social y también del propio campo matemático, hoy en día se pretende que los niños aprendan matemáticas de una manera parecida como éstas se crearon a lo largo de la historia: construyéndolas como herramienta frente a la necesidad de resolver cierto tipo de problemas; es decir, los niños necesitan enfrentar numerosas situaciones que les

[9] SEP (2009) Programas de Estudio Educación Básica Primaria. p.74

presenten un reto y generar sus propios recursos para resolverlas a partir de lo que ya saben siguiendo un proceso cíclico y espiralado. Los recursos y saberes de los niños, informarles al principio, evolucionan poco a poco con la experiencia, la interacción con sus compañeros y la ayuda del maestro.

El enfoque didáctico de los Programas de Estudio 2009 retoma el mismo que se planteo en los programas de 1993. Este paradigma cuya base teórica es la Teoría de las situaciones didácticas, iniciada en Francia por Brousseau a finales de los años 60´ y que con el paso de los años está mejor fundamentada, gracias al trabajo de muchos investigadores en didáctica de la matemática, sigue vigente como alternativa para que los alumnos aprendan matemática y sean capaces de aplicarla en situaciones de la vida diaria. Asimismo se replantean recuperar los significados de los conocimientos matemáticos, recontextualizándolos, es decir; ponerlos en situaciones en las que cobren sentido para el alumno al permitirle resolver los problemas que se le plantean.

1.3. Estrategias de acción

Lo que aportan los programas actuales 2009 es poner en práctica un modelo educativo basado en competencias [10] y mayor precisión en cuanto lo que se sugiere hacer para que los alumnos aprendan; mayor claridad en cuanto al desafío e intervención del maestro de esta manera de estudiar y como consecuencia tener más elementos que puedan servir de apoyo para el trabajo diario.

Se espera que los alumnos desarrollen las siguientes competencias matemáticas:

- Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones con una solución única, con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; utilizando mas de un procedimiento y reconociendo cuál o cuáles son más eficaces.

---

[10] SEP (2009) Programas de Estudio pp. 75 – 76

- Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de expresar, representar e interpretar información matemática contenida en una situación o en un fenómeno.
- Validar procedimientos y resultados. Que los alumnos adquieran la confianza suficiente para expresar sus procedimientos y defender sus aseveraciones con pruebas empíricas y con argumentos a su alcance, aunque éstas disten de la demostración formal.
- Manejar técnicas eficientemente. Esta competencia se refiere al uso eficiente de procedimiento y formas de representación al efectuar cálculos, con o sin apoyo de la calculadora. Esta competencia no se limita a hacer un uso mecánico de las operaciones aritméticas; apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema, en la utilización del cálculo mental y la estimación, en el empleo de procedimientos abreviados y en evaluar la pertinencia de los resultados.

Asimismo es de suma importancia la vinculación de contenidos con otras asignaturas y el trabajo con la transversalidad (propuesta de los programas de 1993). Un elemento nuevo e implícito en la vinculación de contenidos es el denominado "aprendizajes esperados", que se presenta al principio de cada bloque y donde se señalan, los conocimientos y las habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio del bloque correspondiente. Otro cambio en los programas es que los contenidos de matemáticas se han organizado en tres ejes temáticos - en lugar de seis como los de 1993 – y que coinciden con los de secundaria y que son: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma ,espacio y medida y Manejo de la información.

La intervención del docente y trabajo en el aula

Ante los cambios recientes de los programas de estudio de nivel primaria , así como la didáctica de las matemáticas; también cambian las formas de trabajo por parte de los docentes en el aula escolar. Así, la comprensión de los procesos de aprendizaje de las matemáticas que viven los niños ha dado lugar a una nueva concepción de la enseñanza, considerándola como el proceso de conducción de la actividad de aprendizaje, en contraposición del profesor como el expositor y transmisor del conocimiento. El nuevo planteamiento del papel del maestro, abre el camino para experimentar un cambio radical en el ambiente del salón de clases donde: los alumnos piensan, comentan, discuten con interés, confrontan puntos de vista entre ellos y con el maestro; el maestro revalora su trabajo docente. Esta nueva concepción de la enseñanza implica la necesidad de que el maestro diseñe o seleccione actividades que promuevan la construcción de conceptos matemáticos a partir de experiencias concretas, en la que los niños puedan observar, explorar, conjeturar, interactuar entre compañeros y con el maestro, ya que de ello depende, el éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

“Una de las tareas fundamentales de los docentes, que ayuda garantizar la eficiencia del proceso de estudio, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la planificación de las actividades de estudio, pues ésta permite formular expectativas en torno a la eficacia de las actividades que se plantean, sobre el pensamiento matemático de los alumnos y sobre la gestión de la clase por parte del profesor. Estos tres elementos: actividad de estudio, pensamiento matemático de los alumnos y gestión constituyen los tres pilares mediante las cuales se puede generar un verdadero ambiente de aprendizaje en el aula”[11]. La puesta en marcha de actividades planificadas y donde los niños aprenden hacer matemáticas permitirá que éstos conciban esta área de conocimiento como un conjunto de herramientas funcionales y flexibles para resolver diversos problemas que puedan enfrentar en su vida futura, así como generar el gusto, la alegría y el aprecio al trabajar con esta asignatura.

El propósito de este trabajo es utilizar el juego en el plano pedagógico y didáctico a través del manejo de materiales concretos que permitan desarrollar en los niños habilidades para redescubrir las estructuras matemáticas, y crear modelos de conocimientos para la comprensión de las fracciones y sus diferentes significados.

[11] SEP (2009) Programas de Estudio Educación Básica Primaria.p. 80

A continuación hago mención de algunos materiales didácticos que considero pertinentes para abordar el tema de las fracciones.

El uso del tangram, o juego chino, que consta de siete formas geométricas básicas obtenidas a partir de la división de un cuadrado.

El tangram posee valores educativos ya sea como ejercicio de concentración, como recurso para ilustrar el concepto de las formas o como el fraccionamiento de un todo. Es un juego que puede ser utilizado para la enseñanza- aprendizaje del concepto de fracción, equivalencia, medición de áreas, fracciones propias y la suma de estos para llegar al concepto de unidad como un todo.

Otro juego interesante y que gusta a los niños es utilizando material Montessori para trabajar fracciones propias, fracciones impropias, equivalencia, fracciones mixtas y operaciones como la suma y la resta.

Otra estrategia para implementarla en clase es el trabajo con los montones- unidad, para ilustrar fracciones a partir de situaciones de reparto. Con esto se pretende que el alumno comprenda que hay enteros singulares (un pastel, una hoja de papel, un chocolate, 1 metro de jerga etc.) y enteros plurales que los llamaremos montones-unidad (un quipo de futbol, un grupo musical, un grupo de alumnos, una bolsa de dulces, una bolsa de canicas, etc…). En esta propuesta de trabajo se pueden utilizar dulces, canicas, fichas, regletas, galletas etc.

El uso de material concreto y su manipulación permite a los alumnos producir un aprendizaje orientado a la construcción de conocimientos así como la apropiación de conceptos, reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones que pueden usar para solucionar problemas.

Ante esta perspectiva el papel del maestro es fundamental, su función no solo es transmitir información, sino diseñar actividades y estrategias de trabajo que coadyuven en obtener mejores logros en los aprendizajes esperados.

1.4. Objetivo General

Elaborar estrategias didácticas vinculadas a la enseñanza de las fracciones en el tercer ciclo de educación primaria utilizando material concreto, como alternativa de solución a la problemática que entraña la adquisición de los diversos significados implícitos en los contenidos curriculares relacionados al tema en cuestión.

1.5. Objetivos Específicos

- Analizar los conocimientos programáticos del tercer ciclo, referentes al tema de "las fracciones" y sus diferentes significados.

- Desarrollar actividades para que los alumnos, representen las fracciones utilizando material concreto como el uso del tangram, material de resaques Montessori, el trabajo con montones-unidad, dibujos, representaciones y mediciones reales.

- Comprender y manejar las fracciones en la resolución de problemas que impliquen las operaciones de adición o sustracción.

- Promover situaciones de aprendizaje, a partir de situaciones problemáticas donde el alumno construya y conceptualice los diferentes significados de las fracciones en este ciclo.

- Vincular la enseñanza de las fracciones en contextos reales, para permitirle al niño un mejor acercamiento al aprendizaje del tema.

- Manejar las fracciones como una herramienta para resolver problemas que se presentan en la vida cotidiana del niño y en diferentes contextos.

- Identificar las características del desarrollo cognitivo del niño para abordar los contenidos programáticos tomando en cuenta sus conocimientos y experiencias previas así como el aspecto lúdico para encausarlo a la reconstrucción de los contenidos propuestos.

- Rescatar la experiencia que da el trabajo cotidiano en el aula replanteando la labor docente, para colocar al alumno en una mejor condición de aprendizaje.

- Establecer roles tanto para el maestro como para el alumno desde una perspectiva constructivista, enfoque que sustentan los actuales planes y programas de estudio de educación primaria.

1.6. Hipótesis

Al niño del tercer ciclo de primaria si no se le ha encausado debidamente a comprender, conocer, interpretar, asimilar, argumentar y acceder al conocimiento de los diferentes significados que encierra el término "fracción" por la falta del manejo de material concreto en situaciones didácticas desarrollados en el aula, le será difícil lograr un buen manejo con la operatividad de la suma y resta con fracciones en la resolución de problemas. De ahí que el concepto de fracción debe estar bien fundamentado en el niño, para que no se convierta para él en algo sin sentido y tenga la idea únicamente de que la fracción es parte de una figura (un círculo, un cuadrado, un rectángulo) considerado como un entero singular y representado como la unidad, sino que sus interpretaciones trasciendan más allá de los límites de esa unidad y comprenda cognitivamente la relación que guarda con otros contenidos matemáticos relacionados con el tema en cuestión.

De acuerdo a lo anterior, la hipótesis que guía esta investigación es:

El uso adecuado de materiales concretos y el diseño de estrategias didácticas favorece el aprendizaje de contenidos matemáticos relacionados con el uso de las fracciones y sus diferentes significados.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO. El estudio de las fracciones y sus significados

2.1. Las fracciones

La idea de las fracciones y los cálculos con ellas, tal como se conocen actualmente, fue inventada por los hindúes, creadores del sistema de numeración posicional decimal. Particularmente por el sabio matemático hindú Brahmagupta, quien en el siglo VI de nuestra era, escribió su enorme obra matemática /en verso/ De la india; la noción de fracción llego a Europa; y a nosotros, a través de los árabes y los mercaderes italianos en el siglo XIII. Sin embargo, hace 3 700 años en el libro de aritmética del escriba egipcio Ahmés (el llamado Papiro Rhind) un pergamino en el que se pone de manifiesto el uso de las fracciones al exponer métodos aritméticos y de medida.[12]

En ese papiro, a excepción de la fracción 2/3, sólo se usan fracciones con numerador 1 y las demás fracciones se expresan con ellas por ejemplo, 5/6 se indicaba como 1/2 + 1/3. Los babilonios usaron fracciones con denominador 60, principalmente con fines astronómicos.

[12] Curiel Ariza Miguel Angel y otros (1994). Matemáticas Primer Curso . Publicaciones Cultural México.

Los griegos no desarrollaron ningún sistema de fracciones con denominador 12, y esto derivado del hecho de que su medida de peso la expresaban como 12 onzas, las demás fracciones las aproximaban con otras denominador 12.

A fines del siglo XIX y principios del XX, el estudio de la fracciones condujo al concepto de número racional. Esta idea fue producto de grandes matemáticos como el italiano Gaetano Peano, el inglés Bertrand Rusell y el alemán Gottlob Frege.

2.2. El concepto de la fracción

Salvador Llinares y Victoria Sánchez en su libro "Las fracciones: la relación parte-todo" [13] definen a la fracción como un par ordenado de números naturales escritos de la forma **a/b,** donde **b** es diferente de cero. La fracción indica la relación existente entre el número de partes en que se ha dividido un todo llamado unidad y el número total de partes.

Hugo Balbuena, Cristina Espinosa y otros en "Descubriendo las fracciones"[14] define a la fracción como el cociente entre dos números enteros **a/b** y **b** no puede ser cero. Para el autor esta definición abarca las diferentes interpretaciones de fracción y otros más, pero enseñarla a los niños no es la solución ya que no están en condiciones de entenderla y no les serviría para resolver problemas. De ahí la importancia de evitar la forma habitual de presentar las fracciones, partiendo del contenido teórico y dejando al alumno la tarea de aplicarlo; sino presentarle, desde el principio, situaciones problemáticas que al ser resueltas por él, le permiten construir el conocimiento de las fracciones.

Según la obra Enciclopedia Autodidáctica siglo XXI [15] define a la fracción también como un par ordenado (**n, d**) de números naturales, expresándolo en la forma **n/d** con la condición que **d** sea distinto de cero, y donde **n** se llama numerador y **d**, denominador.

---

[13] Llinares, Salvador y Sánchez Mª Victoria (1997). Fracciones , La relación Parte-Todo. Ed. Síntesis. Pág.52.

[14] Balbuena, Hugo y otros (1984). Descubriendo las fracciones. DIE-CINVESTAV. Pág.167.

[15] Enciclopedia Autodidacta Siglo XXI (1999). Matemáticas. Ediciones Euro-México,Pág.13.

Aurelio Baldor [16] en su texto de Aritmética Práctica define la fracción como un par de números, donde el primero es el numerador y el segundo el denominador y ésta es diferente de cero, de diez o potencias de diez. Asimismo un número fraccionario es el que expresa una o varias partes iguales de la unidad principal.

David Block en "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria" [17] DIE-CINVESTAV IPN 1987 al trabajar con un grupo de alumnos de 3o y uno de 4, cuyo objetivo era que los alumnos construyeran un lenguaje de parejas ordenadas (**a**, **b**), en donde **a** representara el número de unidades repartidas y **b** el número de pedazos producidos en el reparto, a través de situaciones didácticas basadas en problemas de reparto. Ante la propuesta de Block, considero conveniente trabajar situaciones de reparto con material concreto, previo al uso de la representación simbólica, para que el alumno conciba el resultado obtenido de un reparto como una fracción del todo repartido.

De acuerdo con los programas actuales del nivel primaria se introducen las fracciones a partir del segundo ciclo y se parte del modelo llamado "fraccionamiento de la unidad"; así el significado de la fracción ¾ de unidad es: 3 partes de una unidad partida en cuatro. Posteriormente en el tercer ciclo de primaria aparece otra interpretación la del racional* como cociente de enteros ¾ significa ahora 3 unidades divididas entre 4.

La necesidad del empleo de los números fraccionarios la tenemos en las divisiones inexactas. La división exacta no siempre es posible, porque muchas veces no existe ningún número entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Así, la división de 3 entre 5 no es exacta porque no hay ningún número entero que multiplicado por 5 dé 3. Entonces ¿Cómo expresar el cociente exacto de 3 entre 5? Pues únicamente

[16] Baldor, Aurelio (1974). Aritmética Práctica .Ed. Cultural-colombiana. Pág. 233.

[17] Block, David (1987). Memoria de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe, sobre Formación de Profesores e Investigación en México.

* Número racional es el que expresa una o varias partes iguales de la unidad. Así, si la unidad se divide en dos partes iguales, estas partes se llaman medios; si se dividen en tres partes se llaman tercios, si se dividen en cuatro partes se llaman cuartos y así sucesivamente. Por tanto, fracción, número racional y número fraccionario indican lo mismo.

por medio del número fraccionario 3/5.

Lo anterior nos dice que todo número fraccionario representa el cociente exacto de una división en la cual el numerador representa el dividendo y el denominador el divisor. El denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal y el numerador, cuántas de esas partes se toman.

Así en la fracción 7/9 el denominador 9, indica que la unidad se ha dividido en nueve partes iguales y el numerador 7, que se han tomado siete de esas partes.

Guadalupe Almaguer y otros en "Matemáticas Primer Curso" [18] define a la fracción de la siguiente manera: si **a, b** son números naturales y **b** es diferente de cero, entonces la división indicada **a/b** es una fracción común. Donde el número **a** se llama numerador y el número **b** se le llama denominador. Las fracciones pueden ser menores, iguales o mayores que la unidad, Ejemplos: 2/4, 2/2, 7/3…

Como puede observarse la definición de "fracción" que dan diferentes autores concuerdan para establecer esa relación que existe entre dos números enteros de la forma **a/b** siendo **b** diferente de cero. Y que sirve como referencia para encontrar los diversos significados del número racional en diferentes contextos, mismos que se abordarán más adelante.

2.3. Las fracciones y el lenguaje cotidiano.

Una de las primeras circunstancias que hay que tener en cuenta al comenzar a tratar un tema matemático es el hecho de que los conceptos a desarrollar pueden estar vinculados a un lenguaje cotidiano.

De una forma u otra, el alumno en el tercer ciclo de primaria está influenciado por el uso que de ellas se hace en la escuela y fuera de ella. Dentro de la práctica docente, la palabra fracción forma parte de un vocabulario relativamente familiar pero, ¿Qué significado tiene la palabra fracción?

---

[18] Guadalupe Almaguer y otros. Matemáticas Primer curso. Págs. 120-122.

El diccionario ya separa en su significado dos acepciones bien diferenciadas. Aclarado su origen (del latín fractio, romper), por un lado se nos presenta como "la división de un todo en sus partes" o "las partes de un todo". Por otro lado, dentro de los significados propios de la Aritmética, aparecen acepciones tales como "número quebrado", "número que expresa una o varias partes de la unidad dividida en cierto número de partes iguales", “fracción decimal, donde el denominador es una potencia de 10” o "número fraccionario".

Al escuchar las conversaciones de los niños dentro y fuera de la clase, se aprecia que utilizan espontáneamente expresiones en las que aparecen las fracciones. Ahora bien, aunque el niño pueda oír y usar expresiones tales como, por ejemplo, medio día, eso no significa que piense necesariamente en la mitad de un día con relación a un día completo.

Lo mismo sucede cuando habla de una botella de medio litro. Quizá la única relación que puede establecer con la de un litro es que es más pequeña. Si el término lo utiliza para pedir "dame la mitad de tu pastel", seguramente el énfasis del significado lo esté poniendo en que las dos mitades sean exactamente iguales.

En el caso de las fracciones, el uso cotidiano se restringe en realidad a muy pocas: un medio, un tercio, un cuarto y tres cuartos principalmente; dos tercios, un quinto, un octavo, mucho menos. El campo de aplicación de cada uno de ellos se va reduciendo considerablemente, salvo un medio y un cuarto que tienen un uso casi universal y aparece prácticamente en todas las situaciones cuantificables. Además las fracciones se asocian a contextos tan diversos como pueden ser las unidades del Sistema Métrico Decimal como medio kilo, tres cuartos de litro, un cuarto de kilo, etc.; para expresar periodos temporales, un cuarto de hora, media hora, etc.; en situaciones de reparto o descuento, la tercera parte de la ganancia, rebajado un veinte por ciento, etc.

Ante este tipo de situaciones los alumnos ya han utilizado los números fraccionarios por lo cual las palabras o conceptos utilizados ya son conocidos por los alumnos de una u otra forma. Nosotros mismos como docentes damos un significado a la noción de fracción y hacemos un uso de ella en nuestra vida cotidiana que quizá no tiene un posterior reflejo en los aspectos de enseñanza.

Por eso al abordar el tema de las fracciones hay que considerar que estos se asocien a situaciones del contexto y uso cotidiano y tengan significado para el alumno, para que pueda utilizarlas como herramientas para la resolución de problemas que se le presenten en la vida.

2.4. Creencias sobre las fracciones.

En ocasiones, al tratar la noción de fracción en la escuela, las vemos desde una vertiente estrictamente matemática, menospreciando otros aspectos. Es conveniente plantearnos a nivel personal si somos conscientes no sólo del significado que damos a la palabra, sino también de los temas que vamos a tratar y cómo relacionarlo con otros contenidos curriculares, así de los saberes y conocimientos de que tenemos sobre el tema abordado.

Muchas veces se ha observado cómo una misma información es interpretada de muy distintas maneras por personas de ideologías diferentes. Parece lógico, entonces que en un proceso tan complejo como el que se desarrolla en una clase, las teorías subjetivas del profesor, sus actitudes, creencias y expectativas, juegan un papel relevante.

Hoy en día se da un especial relieve a lo que piensa un profesor sobre su propia actuación -en este caso sobre las fracciones en el área de matemáticas- , y su opinión sobre el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que de alguna manera estas ideas actúan como un filtro a la hora de transformar la información teórica en recursos prácticos.

En el caso de un concepto que organiza los conocimientos cuyo uso e incidencia en su medio social es significativo, las ideas del profesor condicionan sus decisiones, tanto en relación al contenido, como a su selección, planificación y en la evaluación del proceso. Las creencias afectan no sólo al contenido que seleccionamos para una clase, sino también a lo que hacemos al darla y al evaluarla, y al tipo de aprendizaje que en ella se produce. Considero, que en ciertos aspectos su influencia es mucho mayor que el conocimiento de técnicas o planteamientos específicos, por acertados que éstos sean en el plano teórico.

Por eso considero, que es de vital importancia conocer nuestras propias creencias y saberes sobre cada aspecto de la enseñanza, para que la dinámica de renovación y mejora del proceso no se quede anquilosada. Y una vez conocidas, hay que buscar oportunidades de mejora y actualización como reuniones colegiadas, seminarios, talleres, diplomados, acudir a los centros de maestros, etc. para poder compartir experiencias de trabajo con otros compañeros.

Es muy importante que los niños vean las matemáticas en el mundo que les rodea, y es tarea nuestra ayudarles, por un lado, a apreciar la presencia de los conceptos matemáticos en general, y de las fracciones en particular, en lo que ven y en lo que oyen; y por otro, a integrar los procedimientos de razonamiento, resolución de problemas utilización de suma y resta de fracciones, etc. en su vida cotidiana. Debemos dar a los alumnos un conocimiento intuitivo profundo de las fracciones, presentando al niño contextos significativos tanto para el concepto como para su campo de aplicación y buscando conexiones conceptuales con decimales, porcentajes, razones, fraccionamiento de figuras, etc. Hay que mantener la enseñanza de los procesos algorítmicos, intentando que no se vean aislados de todo lo anterior, presentándolos como síntesis de procesos personales de resolución de situaciones problemáticas y no como "reglas" para ser utilizadas.

Por otro lado, debemos estar conscientes de que estamos inmersos en una evolución tecnológica constante, que hace que operaciones que antes sólo podían ser resueltas a través de complicados cálculos sean ahora fácilmente solucionadas. El ignorar esto por parte del profesor puede desanimar profundamente a los alumnos. Este mismo avance tecnológico que en los últimos años, con la aparición de las calculadoras y su notación decimal, hizo que muchos se cuestionasen sobre el futuro de las fracciones y sus algoritmos en la enseñanza elemental, ahora, con la aparición de los ordenadores personales de pequeño tamaño que operan de forma algebraica ha abierto una nueva interrogante. ¿Servirán para potenciar las fracciones y sus algoritmos? ¿Conducirán a su progresiva desaparición? ¿O quizá ahora más que nunca se necesitará una buena comprensión como paso previo a su utilización?. Me inclino más por lo último.

Todas estas opiniones sobre las fracciones no son un hecho aislado. Nuestras creencias vienen condicionadas por la propia matemática, por el conocimiento de otras disciplinas, por el entorno social, la tradición escolar, nuestra visión de las didácticas de las matemáticas, y otros factores que marcan un panorama global que tenemos sobre el proceso de enseñanza aprendizaje. Este proceso se plantea como una actividad en la que intervienen, por una parte, el procesamiento de información de los conocimientos teóricos, la posesión de un conocimiento práctico –experiencias- que realiza el profesor para tomar decisiones y por otra, el procesamiento que hace el alumno para transformar la información ofrecida, y reestructurar sus capacidades, actitudes y conocimientos. Todo lo anterior desarrollado en una situación de enseñanza de las matemáticas. Estos aspectos están íntimamente relacionados, ya que los procesos de aprendizaje del alumno deben condicionar la actuación del profesor. Por tanto, el admitir que los niños construyen el conocimiento por sí mismos, la necesidad de valorar el conocimiento que ya poseen, y la interacción social como base esencial de todo el proceso, nos lleva a una aproximación constructivista de la enseñanza-aprendizaje de las fracciones.

2.5. El proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las fracciones.

Todos somos conscientes de las dificultades que presenta para los niños el aprendizaje de las fracciones, sobre todo en el nivel primaria. Estas dificultades, que abarcan tanto la comprensión conceptual como la operatividad con números fraccionarios (suma y resta) han sido constatadas por numerosos investigadores tanto en México como en otros países.

A través de mi experiencia como profesor frente a grupo en el tercer ciclo de educación primaria, he observado que a pesar de las explicaciones que se les da a los alumnos para enseñar los contenidos curriculares referente a las fracciones, de las demostraciones que se realizan para que las entiendan y de la resolución conjunta de ejercicios que implican el uso de las fracciones, no hay un aprendizaje, no entienden o tienen más dudas que no les permiten resolver correctamente ni la operatoria ni dar solución a los problemas planteados.

En este ciclo es común ver como los alumnos caen en el error de considerar que 3/9 es mayor que ½; o 2/8 mayor que ½ porque solo comparan el valor de los numeradores.

Otra situación es cuando se les pide, representar una determinada fracción de una figura, los alumnos no logran hacerlo, porque si bien dividen la figura en el número de partes correcto, éstos no son iguales; es decir no cumplen con la equitatividad.
En cuanto a la operatoria con suma y resta de fracciones, un error frecuente es que los alumnos sumen o resten los numeradores y los denominadores por separado.
EJEMPLOS:

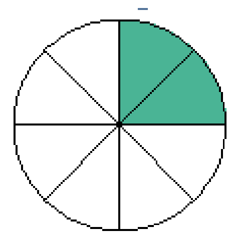
$$\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{5+4}=\frac{4}{9} \qquad \frac{4}{8}-\frac{2}{4}=\frac{4-2}{8-4}=\frac{2}{4}$$

Cuando se les solicita a los alumnos que realicen comparaciones entre fracciones es común ver los siguientes errores:

$$\frac{4}{9}>\frac{4}{3} \qquad \frac{3}{4}<\frac{4}{8}$$

En ambos casos, se observa que los alumnos ven a la fracción $\frac{a}{b}$ como dos números independientes uno del otro y realizan la comparación a través de las propiedades de los números naturales. En el primer caso $\frac{4}{9}$ y $\frac{4}{3}$ comparan los numeradores, el 4 con el 4 y los denominadores, el 9 con el 3; como los numeradores son iguales, centran su atención en los denominadores, así como 9 es mayor que 3 y concluyen que $\frac{4}{9}$ es mayor que $\frac{4}{3}$.
En el segundo caso $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{8}$ hacen la comparación utilizando el mismo procedimiento, resultando $\frac{3}{4}$ menor que $\frac{4}{8}$.
Frente a situaciones en los que el alumno debe iluminar una fracción de equis figura -un entero- ya dividido; el error frecuente que cometen los alumnos es fijarse únicamente en el número de partes (numerador), que deben iluminar sin que para ellos tenga significado el denominador. Es decir visualizan a los dos números numerador y denominador sin ninguna relación entre sí.

Por ejemplo, 2/4 lo representan así:

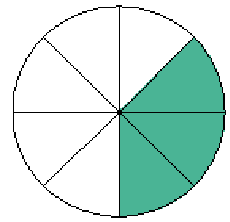


Otro error frecuente que suelen cometer los alumnos al representar una fracción es invertir los términos, cuando el numerador es mayor que el denominador.

Por ejemplo, cuando se les pide representar gráficamente las fracciones 6/4 y 8/3 suelen fraccionar el entero como se muestran en las figuras.

6/4

8/3



Como puede observarse en las representaciones gráficas que hacen los niños de 6/4 y 8/3 mostradas anteriormente, subyace una conceptualización generada por la enseñanza de las fracciones a través del fraccionamiento de la unidad, es decir; los alumnos conciben a la fracción como un entero que se divide en "equis" número de partes y de los cuales se toman siempre un número menor al número en que se dividió la unidad. Tienen dificultad para comprender que el todo repartido puede estar conformado por más de una unidad, por lo que para representar gráficamente estas fracciones buscan la manera de interpretar cada fracción convirtiendo 6/4 a 4/6 es decir un entero que se divide en 6 partes, de las cuales se toman 4. Lo mismo sucede con la segunda fracción 8/3 que lo convierten en 3/8.

Ante este tipo de situaciones es importante trabajar con ejercicios de fraccionamiento de figuras diversas, trazadas por los niños de fracciones propias –menores que el entero- e impropias –que sean iguales o mayores que el entero.

G. Brousseau,[19] distingue dos tipos de obstáculos: los epistemológicos y el didáctico. Los que se enfrentan los alumnos ante un conocimiento nuevo, los obstáculos

[19] Brousseu, Guy (1976)."Les obstacles épistemologiques et les problémes mathématiques". Traducción interna del DIE-CINVESTAV.

epistemológicos, que provienen de aplicar a un conocimiento nuevo, nociones y reglas adquiridas de un conocimiento anterior; y los obstáculos didácticos que provienen de un problema de enseñanza.

Por ejemplo errores que consisten en aplicar reglas que funcionan en los números naturales aplicado a las fracciones, como es el caso de la suma y resta donde se suman o restan numeradores y denominadores, pueden ser manifestaciones de obstáculos epistemológicos.

Errores que provienen, de no considerar que el todo puede estar formado por más de una unidad, pueden ser expresiones de una enseñanza particular, en la que las fracciones se ilustran siempre con una sola unidad. Estos errores son manifestaciones de obstáculos didácticos.

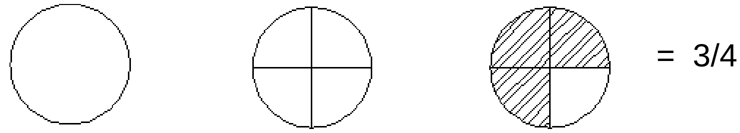
2.6. Las fracciones: diferentes interpretaciones

Para que el niño pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción se deben plantear las secuencias de enseñanza de tal forma que proporcionen a los niños la adecuada experiencia con la mayoría de las interpretaciones (KIEREN, 1976). Kieren, E.T.[20] ha realizado una serie de estudios, en los cuales ha demostrado que a la fracción se le puede interpretar de diversas formas y que está implicada en contenidos curriculares de la educación básica que en general se enseñan de manera aislada, dificultando el proceso enseñanza-aprendizaje.

Algunas de las interpretaciones de la fracción demostradas por Kieren son:

a)La interpretación generada a partir del fraccionamiento de la unidad, que es la más conocida y la que comúnmente se utiliza en la enseñanza de las fracciones.

Por ejemplo:



[20] Salvador Llinares y Victoria Sánchez (1997). Fracciones la relación parte-todo. Ed. Síntesis, España. Págs. 52-53.

La fracción $3/4$ se genera a partir de una unidad, que se divide en cuatro partes iguales y de las cuales se toman tres. La fracción ¾ representa entonces las partes tomadas de la unidad.

b) Otra interpretación de la fracción es la de decimal finito o periódico. Cuando se enseñan los números decimales, se hace mención que estos se pueden representar como fracción y que las fracciones también se pueden representar en forma decimal. Por ejemplo:

¾ = 0.75

Generalmente para enseñar a los alumnos la conversión de fracciones a decimales se recurre al siguiente procedimiento: dividir el numerador entre el denominador para obtener el número decimal equivalente a la fracción.

Estas conversiones se realizan de forma mecánica y no se hace un trabajo en el cual los alumnos puedan entender la relación existente entre ¾ y 0.75, es decir: si 3/4 se genera de una unidad que se dividió en 4 y de la cual se toman 3, ¿Qué relación tiene esta fracción con 0.75? ¿Por qué son iguales la fracción ¾ y el número decimal 0.75?

Entender la equivalencia entre estas dos representaciones de una misma cantidad es un proceso difícil y complejo que los alumnos no entienden y más difícil y complejo, entender porque si se ha visto a la fracción como una unidad que se divide en "equis" número de partes y de la cual se toman Y número de pedazos, ahora para convertir a decimales se considera al numerador y al denominador como unidades que se dividen entre sí para obtener un número que representa la misma cantidad. Este ejemplo es otro de los muchos significados que encierra un fracción.

Algo similar sucede cuando se enseña a representar en forma de fracción los números decimales. Por ejemplo:

$0.75 = \frac{75}{100}$

En un caso como este, la explicación se limita a mostrar la forma en que se representa el decimal en forma de fracción. Así por ejemplo, si el número a representar es 0.6, se dice que este es igual a 6/10 porque el seis ocupa el lugar de los décimos; si el número es 0.65, se dice que este número decimal es igual a 65/100 porque el sesenta y cinco ocupa el lugar de los centésimos y así sucesivamente –uso de las fracciones decimales- . Hasta aquí la explicación es correcta, pero qué sucede cuando los alumnos mecanizan esta explicación y la generalizan. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{3} = 0.33 = \frac{33}{100}$$

Como podemos observar, la generalización, lleva a cometer errores como el anterior, generados por la falta de un trabajo que lleve a los alumnos a diferenciar entre las fracciones decimales y las que no lo son.

Por ejemplo ¾ es una fracción cuyo denominador es divisor de una potencia de 10 (4 divide a 100), por lo tanto existe un número 25 que multiplicado por 4 da 100; así ¾ puede representarse de la siguiente manera:

¾ $\xrightarrow[\times 25]{\times 25}$ = 75/100   por lo tanto   3/4= 75/100

Por lo tanto ¾ es equivalente a una fracción decimal. En cambio 1/3 sólo puede ser aproximada con fracciones decimales ya que al dividir el 1 entre 3 da como resultado 0.333333 (decimal periódico) de ahí que consideremos a 0.33 ó 0.333 como una aproximación a 1/3.

c) Una tercera interpretación de la fracción es la que le asigna el carácter de razón, para expresar la comparación multiplicativa entre dos cantidades; por ejemplo, una información importante en relación con el Estado de México es que uno de cada cuatro habitantes forma parte de la población económicamente activa.

Representando dicha información en una tabla, queda de la siguiente manera:

Población	Económicamente activa	1	2	3	4	• • •
	Del Estado de México	4	8	12	16	• • •

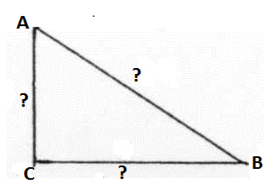
De donde podemos obtener las siguientes razones:

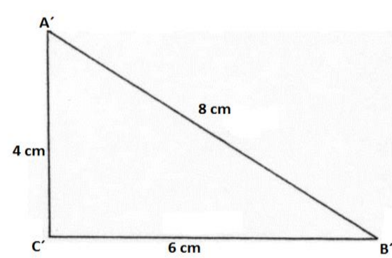
¼, 2/8, 3/12, 4/16,…

Esta interpretación se encuentra en situaciones de proporcionalidad, es decir, en situaciones en las que se plantea la igualdad de dos o más razones como se muestra en la tabla. Las aplicaciones más frecuentes del uso de la razón son las escalas y el tanto por ciento. Así por ejemplo, si se construye un cuadrado cuyos lados midan el doble del cuadrado original, puede decirse que la escala que se utilizó es de 2 a 1 (2:1).

El tanto por ciento muestra la comparación multiplicativa de las cantidades sin expresarlas; por ejemplo, si 25 % de la población mexicana tiene menos de 14 años, esto quiere decir que 25 de cada 100 mexicanos tienen menos de 14 años; de esta forma se tiene una idea clara de la parte de la población que tiene estas características, sin que sea necesario conocer el total de habitantes. Expresado en forma de razón 25/100, simplificando quedaría expresado así. ¼ ; es decir 1 de cada 4 mexicanos tiene menos de 14 años.

d) Otra interpretación más es la de operador multiplicativo. Esta interpretación está presente igual que el caso de la razón en situaciones de proporcionalidad. Veamos el siguiente ejemplo:





Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, pues tienen la misma forma aunque no son del mismo tamaño. Para saber que tan grandes son los lados de A'B'C' con respecto a los de ABC se relaciona su medida de la siguiente forma:

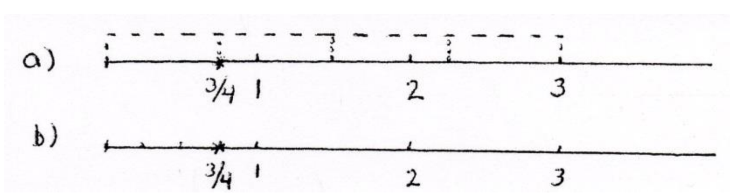
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{8}{4}=\frac{2}{1} \qquad \frac{B'C'}{BC}=\frac{6}{3}=\frac{2}{1} \qquad \frac{C'A'}{CA}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$$

La fracción que se encontró 2/1 recibe el nombre de escala, también se puede escribir 2:1 y se lee 2 a 1. Se dice entonces que el triángulo A'B'C' es una reproducción a escala 2 a 1 de ABC. Es decir, 2 cm en A'B'C' corresponden a 1 cm en ABC.

A partir de este ejemplo sabemos que la escala del dibujo grande con respecto al pequeño es de 1 a 2, es decir 1/2. Conocemos las medidas del grande y queremos calcular del pequeño, para ello aplicamos el operador multiplicativo x ½ Por lo tanto, si el segmento A'B' mide 8 cm, para obtener la longitud del segmento AB multiplicamos 8 x ½ si el segmento B'C' mide 6 cm, para obtener la longitud del segmento BC multiplicamos 6 x ½; si el segmento C'A' mide 4 cm para obtener la longitud del segmento CA multiplicamos 4 x 1/2.

En ocasiones, se reproduce un objeto del mismo tamaño del original. En este caso la escala empleada es 1/1 o simplemente 1. Una escala mayor que 1, como 2/1 indica una ampliación del tamaño original (primer caso) si la escala es 1, indica una reproducción del mismo tamaño; y finalmente, una escala menor que 1, como ½ indica una reducción.
"La escala es una fracción que indica una ampliación, una reducción o una reproducción del objeto real". [21]

e) Una quinta interpretación de la fracción es la de cociente de dos enteros; por ejemplo, la fracción ¾ en vez de significar un entero que se divide en 4 y del cual se toman 3 partes; en esta interpretación significa 3 enteros divididos entre 4 enteros.
Observemos las siguientes rectas numéricas:



[21] Berteley y Patiño Ana María (1996). Matemáticas Primer Curso. Ed. Santillana. Pág. 71

A partir del análisis y observación del dibujo anterior deducimos que ¾ está representado bajo dos de sus interpretaciones:

a) Cociente de dos enteros (3 entre 4) y
b) Fraccionamiento de la unidad (la unidad dividida en cuatro partes iguales)

Se puede observar que en ambas interpretaciones, la porción correspondiente a 3/4 son exactamente iguales, sin embargo, el significado en cada una de las interpretaciones las hace contextualmente diferentes.

Estas interpretaciones descritas enfocadas a la complejidad de la noción de fracción son resultados de años de investigación realizadas por Kieren cuyo objetivo era encontrar el origen de las dificultades de enseñanza-aprendizaje e identificar las situaciones en las que la fracción está inmersa.

f) Otra de las interpretaciones que se le da a la fracción es la de porcentaje.

Vivimos en una época en la que el uso de los porcentajes es muy común. En los periódicos, en la televisión y en la radio, tanto en las noticias como en la propaganda de algún producto, continuamente se les menciona. También son usados en los bancos, en los centros comerciales, en las escuelas y en otros diversos lugares. Veamos algunos ejemplos:

- Los precios de los alimentos en el supermercado están rebajados en un 40% (cuarenta por ciento) 40/100.
- La producción de la cosecha de frijol en este año disminuyó en un 30% (treinta por ciento) 30/100.
- Los alumnos del sexto "C" resolvieron su examen acertadamente en un 85% (ochenta y cinco por ciento) 85/100.
- Los productos básicos han aumentado en un 80% (ochenta por ciento) 80/100.

Como puede verse el uso de porcentaje es muy usual en la vida cotidiana. Pero ¿Qué es el tanto por ciento?. “Se llama tanto por ciento a una o varias partes de las 100 partes iguales en que se puede dividir una cantidad. El signo empleado para representar el tanto por ciento es %” [22].

El porcentaje puede expresarse como la razón entre dos cantidades al expresar una comparación multiplicativa entre una parte y el todo. Para introducir la noción de porcentaje, se sugiere partir de la búsqueda de fracciones equivalentes; por ejemplo, decir que 2 de cada 5 niñas (2/5 ó 2 : 5) tienen zapatos negros, multiplicando el numerador y el denominador por 20 la expresión quedaría así:

x 20

2/5 = 40/100 por lo tanto 2/5 = 40/100

X 20

Así encontramos que $\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{40}{100}$ (cuarenta de cada 100 niños tienen zapatos negros).

También puede plantearse el cálculo del porcentaje de una cantidad, por ejemplo: Juan y tres amigos ganaron un premio de 2 800 pesos. Cada uno recibe 25% de premio. ¿Cuánto recibe cada uno?

Una forma de resolver el problema sería dividir los 2 800 pesos en cien partes y tomar 25 de ellas ó multiplicar 2 800 por 0.25 (expresión de 25 % en forma decimal).

Realizando las operaciones:

$2\,800 \div 100 = 28$ el resultado multiplicarlo por 25 $28 \times 25 = 700$

ó multiplicar $2\,800 \times 0.25 = 700$

El tanto por ciento es una razón especial en la cual 100 es siempre el término de comparación. Así el 10% significa 10 de cada 100 (10/100) y puede expresarse como 0.10 (resultado de dividir diez entre cien).

g) Otra de las interpretaciones de la fracción es la que da David Block : la de número racional como proporción .[23] Veamos el siguiente ejemplo;

Si un carro recorre 90 kilómetros en una hora y suponemos que la velocidad del carro

[22] Baldor, Aurelio(1974). Aritmética Práctica. Ed. Cultural-Colombiana. Pág. 532.

[23] Block,D. Balbuena,H.,Dávila, M.,y otros (1999). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Segunda Parte., México, SEP.

no cambia, ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 4 horas?. Si hacemos el registro de su recorrido en una tabla se observa que:

Distancia en km	90	180	270	360	• • •
Tiempo en horas	1	2	3	4	• • •

Al establecer el cociente entre la distancia y el tiempo nos damos cuenta que todos los cocientes son iguales a 90.

$$\frac{90}{1} = \frac{180}{2} = \frac{270}{3} = \frac{360}{4} = 90$$

esto quiere decir que todas estas razones son iguales:

$$\frac{90}{1} = 90 \quad ; \quad \frac{180}{2} = 90 \quad ; \quad \frac{270}{3} = 90 \quad ; \quad \frac{360}{4} = 90$$

Cuando dos razones son iguales entre sí, forman una proporción. Por lo tanto una proporción es la igualdad de dos razones.

El alcanzar el concepto de fracción en todas sus relaciones e interpretaciones conlleva un proceso de aprendizaje a largo plazo. La variedad de estructuras cognitivas a las que las diferentes interpretaciones de las fracciones están conectadas condiciona este proceso de aprendizaje. En otras palabras el concepto global de fracción no se llega de una vez totalmente. Desde las primeras experiencias de los niños al trabajar con "mitades" , “cuartos”, "tercios" y otros (relación parte-todo) vinculadas a la habilidad de manejar el mecanismo de dividir (manejar situaciones de reparto) así como el manejo de la operatoria con fracciones , exige un largo camino que recorrer aunado a las estrategias y secuencias didácticas que el maestro ponga en práctica para abordar el tema de las fracciones y sus diferentes significados.

Los profesores debemos tener en cuenta todas estas características, es decir: las muchas interpretaciones, y el proceso de aprendizaje a largo plazo. Cuando pensemos en el desarrollo de secuencias de enseñanza que pretendan el aprendizaje de nociones relativas a las fracciones.

CAPÍTULO III : Fundamentos psicopedagógicos

3.1. La teoría constructivista en matemáticas.

Las matemáticas constituyen un área que exige una gran participación de la actividad mental en todas sus manifestaciones; desde los contenidos de base psico-motriz hasta aquellos en que interviene el razonamiento lógico-abstracto, pasando por la comprensión y expresión verbales y la realización de operaciones.

La teoría de Piaget, llamada constructivismo ha demostrado que los niños adquieren los conceptos y las operaciones numéricas construyéndolas internamente.

“Al igual que un albañil que construye un edificio; el edificio de la mente es construido por el individuo mismo, él construye su conocimiento ya sea conocimiento físico, conocimiento lógico matemático o conocimiento social que son los tres tipos de conocimiento que menciona Piaget “ [24].

El conocimiento físico es el conocimiento de los objetos de la realidad externa. El color y el peso de una canica son ejemplos de propiedades físicas que pertenecen a los objetos de la realidad externa y que pueden conocerse empíricamente mediante la observación.

El conocimiento lógico-matemático consiste en la relación creada por cada individuo. Por ejemplo, cuando se nos muestra una canica azul y otra roja y pensamos que son "diferentes", esta diferencia es un ejemplo del conocimiento lógico matemático. Las canicas son objetos observables, pero la diferencia entre ellas no lo es. La diferencia es una relación que cada individuo crea mentalmente al colocar ambos objetos en esta relación.

[24] UPN. Antología Básica (1996) . Construcción del Conocimiento Matemático en la Escuela.pp.8-9.

Si se quiere comparar el peso de las dos canicas, es muy probable que los dos objetos sean iguales. Si por otro lado se quiere pensar en los objetos numéricamente, se deduce que son "dos". Las dos canicas son observables, pero el numero "dos" no lo es. El número es una relación creada mentalmente por cada persona. Por tanto, el conocimiento físico es un conocimiento empírico que tiene su fuente en los objetos.
Por otro lado, el conocimiento lógico-matemático no es un conocimiento empírico, ya que sus fuentes están en la mente de los individuos, cada individuo crea esta relación de acuerdo a la madurez psíquica e intelectual, puesto que las relaciones "diferentes", "igual" y "dos" no existen en el mundo exterior y observable.

César Coll, discípulo de Jean Piaget es el mejor representante de la pedagogía constructivista, cuyos trabajos e investigaciones derivados de la epistemología genética los ha aplicado a la educación.
Coll argumenta: "La concepción constructivista del aprendizaje escolar sitúa la actividad mental constructiva del alumno en la base de los procesos de desarrollo personal que trata de promover la educación escolar"[25].
La concepción constructivista considera que la función prioritaria de la educación escolar es, la de promover el desarrollo y el crecimiento personal de los alumnos. Esta función de apoyo al desarrollo se cumple en la medida en que se facilite a los alumnos -niños- el acceso a un conjunto da saberes y formas culturales, tratando que lleven a cabo un aprendizaje de los mismos.
El auge creciente de los enfoques cognitivos en el estudio del desarrollo humano ha llevado a subrayar el carácter constructivo del proceso de adquisición del conocimiento.
La idea de un ser humano relativamente fácil de moldear y dirigir desde el exterior ha sido progresivamente sustituida por la idea de un ser humano que selecciona, asimila, procesa, interpreta, es reflexivo, constructor de su conocimiento al interactuar con los objetos, es activo, participativo y elabora hipótesis más avanzadas en función de los conocimientos por construir. Dentro de la práctica docente, este cambio de perspectiva ha contribuido, por una parte a poner de relieve lo inadecuado de algunos

[25] UPN. Antología Básica (1995). Corrientes Pedagógicas Contemporáneas.pp.33-34.

métodos de enseñanza esencialmente expositivos que conciben al profesor y al alumno como simples transmisor y receptor de conocimientos respectivamente.

El enfoque constructivista argumenta que son los niños quienes tienen que construir el conocimiento y para ello, el profesor debe proponer situaciones de interés para los niños encuentren solución a los problemas o situaciones planteadas. Cabe mencionar que las actividades deben ser planeadas con anticipación considerando el nivel cognitivo de los niños, los contenidos curriculares y objetivos específicos para llegar a construir otros conocimientos.

Se trata entonces de hacer lo posible para que los alumnos, piensen, entren en conflicto y se enfrenten a nuevos retos, en los cuales sean necesarios ciertos conocimientos que tal vez no poseen pero pueden adquirirlo a partir de lo que ya conocen.

Dentro de este enfoque se debe tener presente y permitir al alumno la solución de equis problema a través de distintos caminos en los que estén permitidos los errores, los cuales son un reflejo del pensamiento del niño y tan es así que la función del maestro no consiste en corregir la respuesta, sino indagar por qué ha cometido el error. Así también, el enfoque constructivista parte de que entre saber y no saber hay muchos pasos intermedios. Este saber y no saber no está determinado por la información que ha dado el maestro. Es común que en cualquier salón de clases, habrá niños con niveles de conocimiento distintos. En vez de negar este hecho, es necesario aceptarlo y ver de una manera positiva esta situación. Uno de los factores que favorecen la construcción de conocimientos en el aula es el conflicto cognoscitivo y que consiste en el desequilibrio que el sujeto muestra ante el cuestionamiento de sus saberes previos.

La concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza en la escuela se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

- El alumno es el responsable de su propio proceso de aprendizaje. Es él quien construye el conocimiento y nadie puede sustituirle en esa tarea. La enseñanza está totalmente mediatizada por la actividad mental constructiva del alumno. El alumno no es sólo activo cuando manipula, explora, descubre o inventa, sino también cuando lee o escucha las explicaciones del profesor.

- La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que poseen un grado considerable de elaboración, es decir, que son el resultado de un cierto proceso de construcción a nivel social. La práctica totalidad de los contenidos que constituyen el núcleo de los aprendizajes escolares son saberes y formas culturales que tanto los profesores como los alumnos encuentran en buena parte elaborados y definidos. "El conocimiento educativo es en gran medida como subraya Edwards (1987), un conocimiento preexistente a su enseñanza y aprendizaje en la escuela". [26]

- El papel del profesor cuya función no puede limitarse únicamente a crear las condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad mental constructiva rica y diversa sino además; el profesor ha de intentar orientar y guiar esta actividad con el fin de que la construcción del alumno se acerque de forma progresiva a lo que significan y representan los contenidos como saberes culturales.

El principio explicativo más ampliamente compartido, es el que se refiere a la importancia de la actividad mental constructiva del alumno en la realización de los aprendizajes escolares y que lleva a concebir el aprendizaje escolar; como un proceso de construcción del conocimiento y la enseñanza (papel del profesor) como una ayuda a este proceso de construcción -andamiaje o ajuste de la ayuda pedagógica, el cual va modificándose a lo largo del proceso de aprendizaje-. De ahí el término "constructivismo".

3.2. La teoría psicogenética de Piaget

La teoría del desarrollo de Piaget se centra en el aspecto dinámico de la actividad intelectual y de las estructuras psicológicas que caracterizan a los niños en diferentes etapas de su desarrollo. En las obras de Piaget, se utiliza el término "estructura" para describir la organización de la experiencia por parte de un estudiante activo. Piaget

[26] UPN .Antología Básica (1995).Corrientes Pedagógicas Contemporáneas .pp 33-34

concibe el desarrollo intelectual como un proceso continuo de organización de estructuras de modo que cada nueva organización integra en sí misma a la anterior.

Presenta una teoría del desarrollo por etapas. Cada una de estas supone la consistencia y la armonía de todas las funciones cognitivas en relación a un determinado nivel de desarrollo. También implica discontinuidad, hecho que supone que cada etapa sucesiva es cualitativamente diferente a el anterior, incluso teniendo en cuenta que durante la transición de una etapa a otra, se pueden construir e incorporar elementos de la etapa anterior.

Aunque se podía estudiar el desarrollo del pensamiento de los niños en muchos campos del conocimiento, Piaget trabajó fundamentalmente sobre el desarrollo de los conceptos lógicos y matemáticos. Al respecto el autor distingue cuatro grandes períodos o estadios en el desarrollo de las estructuras cognitivas.

Período sensoriomotriz hasta los 24 meses.

Anterior al lenguaje y al pensamiento propiamente dichos. En el curso de este período el niño forma el concepto de objeto como algo distinto al "yo" partiendo de percepciones fragmentarias y de la manipulación de la realidad. Además durante este primer año se construyen precisamente todas las estructuras ulteriores: la noción de objetó, de espacio, de tiempo, bajo la forma de las secuencias temporales, la noción de causalidad, es decir todas las grandes nociones que constituirán posteriormente el pensamiento y que se elaboran desde su nivel sensoriomotriz y se ponen en acción con la actividad material -en este período el niño todo se mete a la boca, jala objetos, abre cajones, tira las cosas que están a su alcance, etc.

Período preoperacional, hasta los 6-7 años.

Aquí se produce un gran desarrollo de la función simbólica. Por medio del lenguaje y del juego se da una progresiva interiorización de la acción. El pensamiento es todavía plenamente egocéntrico e intuitivo. En esta etapa sus juegos son de imitación e imaginación por ejemplo: las comiditas, los vaqueros, las muñecas, la casita, la maestra, la escuelita, etc., en donde tienen como finalidad satisfacer el "yo" transformando lo real en función de sus deseos; además también está en la edad de los por qué a través de los cuales nos revela un deseo de conocer la causa y finalidad de las cosas que le interesan y que en un momento dado asimila a su actividad propia.

Período de las operaciones concretas, de los 7 a los 11-12 años.

A través de las operaciones de clasificación y seriación, realizados sobre objetos concretos y posibilitados para la reversibilidad del pensamiento, el niño juega a adquirir nociones tales como número, espacio, tiempo, causalidad, conservación de la sustancia, el volumen, el peso, etc. Piaget define a la operación como: "la acción que es interiorizada y reversible. Es característica de una operación el formar parte de una estructura total, no se puede concebir una operación aislada; antes bien cada operación es parte integrante de un todo, el cual consiste a su vez en muchas operaciones". [27]

Uno de los procesos fundamentales que se operan en este periodo y que permiten al niño ir conociendo su realidad de manera cada vez más objetiva, es la organización y preparación de las operaciones concretas del pensamiento, las cuales se desarrollarán entre los 7 y los 12 años aproximadamente. Es en esta etapa en la que los alumnos de 5° y 6° grado de primaria se encuentran y quien va dirigido la presente propuesta pedagógica.

Las operaciones concretas son aquellas operaciones lógicas que se refieren a las acciones que el niño realiza con objetos concretos y a través de los cuales coordina las relaciones entre ellos. La idea central es que el niño aún no puede realizar operaciones independientemente de las acciones sobre objetos concretos, es decir que no puede reflexionar sobre abstracciones.

Las operaciones más importantes al respecto son: la clasificación, la transitividad, la reversibilidad, la seriación y la noción de conservación de número.

- Clasificación

La clasificación constituye una serie de relaciones mentales en función de las cuales

[27] Piaget, Jean, Konrad Lorenz, Erik H. Erikson(1988). Juego y desarrollo. Ed. Grijalvo, México. p.13

los objetos se reúnen por semejanzas, se separan por diferencias, se define la pertenencia de objeto a una clase y se incluyen en ella subclases. En suma las relaciones que se establecen son las de semejanza, diferencia, pertenencia e inclusión. La necesidad de clasificar se presenta constantemente en todas las actividades humanas, por ejemplo; se organizan las cosas de la cocina aparte de la ropa, se acomoda diferente lo que se rompe de lo que no se rompe; se tiene a la vista lo necesario para el trabajo, etc.

En la práctica educativa el maestro crea situaciones de aprendizaje apropiadas, seleccionando el material didáctico y dando consignas que hagan posible que sea realmente el niño quien clasifique. Esta es una operación en función de la cual se establecen y ordenan las diferencias existentes relativas a una determinada característica de los objetos, es decir que se efectúa un ordenamiento según las diferencias crecientes o decrecientes por ejemplo: el tamaño, grosor, color, temperatura, etc.

Aquí el método operatorio es el que viene a dar respuesta al establecer un ordenamiento lógico, ya que por medio de él, el niño ordena, relaciones lógicas al considerar que un elemento cualquiera es a la vez mayor que los precedentes y menor que los siguientes y que si un determinado elemento es mayor que el último colocado, sería también mayor que los anteriores (pudiendo ser el mayor o el más oscuro, o el más grueso, o el más áspero, etc.). Esto supone que el niño ha construido las dos propiedades fundamentales de estas relaciones, que son la transitividad y la reversibilidad.

- Transitividad

La transitividad consiste, en poder establecer por deducción, la relación que hay entre dos elementos. Por ejemplo:

Si 2 es mayor que 1, y 3 es mayor que 2, entonces 3 será mayor que 1; y a la inversa. Si 1 es menor que 2 y 2 es menor que 3, entonces 1 será menor que 3.

Se tienen tres tazas con agua caliente. Si el primero es más caliente que el segundo, y el segundo más caliente que el tercero, entonces el primero será mas caliente que el tercero.

- Reversibilidad

La reversibilidad significa que toda operación comporta una operación inversa; esto es, si se establecen relaciones de menor a mayor; a una suma corresponde una operación inversa que es la resta.

- La noción de conservación de número

Durante la primera infancia sólo los primeros números del 1 al 5 son accesibles al niño porque puede hacer juicios sobre ellos basándose principalmente en la percepción antes que en el razonamiento lógico. Entre los 5 y los 6 años, el niño hace juicios sobre 8 elementos o más, sin fundamentarlos en la percepción. La serie indefinida de números, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, como operaciones formales; comienzan a ser accesibles al niño después de los 7 años.
El número puede considerarse como un ejemplo de cómo el niño establece relaciones no observables entre objetos, es decir, que no corresponden a las características externas de ellos. Por ejemplo si dices hay cinco muñecas. Las muñecas se pueden observar, existen en la realidad, pero el número cinco es una relación creada en la mente del niño. Si este no establece una relación mental entre muñecas, cada una podría quedar aislada. De esta manera se observa como la noción de número es una síntesis de las operaciones de clasificación (inclusión de clases y seriación).

<u>Período de las Operaciones Formales de los 12 a los 15 años</u>

A partir de los doce años de edad se produce otra transformación fundamental en el pensamiento del niño, que marca la finalización del período de las operaciones concretas y el tránsito a las operaciones formales.
Al inicio de esta etapa las operaciones alcanzadas durante el período de las operaciones concretas, comienzan a ser transpuestas del plano de la manipulación concreta al plano de las meras ideas y se expresan únicamente por el lenguaje, sin apoyo de la percepción ni de la experiencia. Las operaciones formales aportan al pensamiento un poder completamente nuevo, que logra liberarlo de lo concreto y le

permite edificar a voluntad reflexiones y teorías.

El pensamiento operatorio formal, al que empieza a acceder el adolescente, es un pensamiento hipotético deductivo, que les permite operar no solamente con datos concretos como en el período anterior; sino con proposiciones o enunciados que son el resultado de operaciones previas.

El mecanismo general de formación del conocimiento según Piaget es la equilibración. Esta se lleva a cabo mediante dos procesos, íntimamente relacionados y dependientes, que son la asimilación y la acomodación.

Cuando un individuo se enfrenta a una situación, en particular a un problema matemático, intenta asimilar dicha situación a esquemas cognitivos existentes. Es decir, intenta resolver tal problema mediante los conocimientos que ya posee y que se sitúan en esquemas conceptuales existentes. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o expande para acomodar la situación. Así, a medida que los niños se desarrollan, van integrando diferentes patrones de conocimiento organizado que le permitirán construir una visión del mundo y de él mismo. Conforme se va produciendo el desarrollo, el sujeto va interiorizando más y más la realidad, consiguiendo así independizarse de las relaciones fácticas, logrando subordinar los datos fácticos a modelos de relación que ha construido en la mente.

Los estudios sobre el desarrollo de la inteligencia, que más influyen hoy en día en la orientación de la didáctica, son los iniciados por Piaget. Por ello la importancia de su abordaje en este trabajo, tomando en consideración que las matemáticas actuales están impregnadas de una amplia gama de propósitos y contenidos que solamente se pueden describir mediante la utilización de las estructuras lógico-matemáticas.

Hoy es generalmente aceptado, que las matemáticas es una creación de la mente humana, "las matemáticas con un producto del quehacer humano y su proceso de construcción está sustentado en abstracciones sucesivas. Muchos desarrollos importantes de esta disciplina han partido de la necesidad de resolver problemas concretos, propios de los grupos sociales"[28]. Es a partir de esta tesis desde donde se

[28] SEP (1993). Plan y Programas de estudio. Educación Básica Primaria. México, pp. 52-55.

llega a deducir que la enseñanza de las matemáticas no debe reducirse a la simple transmisión de conocimientos por el profesor y al alumno como simple receptor; sino poner en práctica actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir del diálogo, y la interacción con sus compañeros y con el maestro. En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños parten de experiencias concretas. Paulatinamente y a medida que van haciendo abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos. De ahí la importancia de dejar a los niños que reinventen y hagan matemáticas a partir del desarrollo de actividades propuestas por el docente.

Al respecto Constance Kamii en su libro *Reinventando la aritmética II* , cita tres razones para defender que los niños reinventen la aritmética:
"La primera, debido al fundamento erróneo de la teoría en que se basan los profesores tradicionales de matemáticas acerca de cómo aprenden los niños, la enseñanza actual de la aritmética no da resultado. La segunda, cuando los niños reinventan la aritmética llegan a ser más competentes, que los que han aprendido con el método tradicional. Y la tercera reside en que los procedimientos que los niños inventan surgen de lo más profundo de su intuición y de su manera natural de pensar. Si se favorece que ejerciten su forma genuina de pensar, en lugar que memoricen reglas desarrollarán una base cognitiva más sólida y una mayor seguridad" [29].

Es en este contexto de ideas, donde tiene su interpretación la frase tan repetida, "las matemáticas no se aprenden, sino que se hacen". Sin embargo para poder hacerse se requiere de un lenguaje en el que se interactúe para que se establezca la comunicación; esto es, porque el pensamiento del niño en general se entiende como sujeto a una evolución progresiva, que va adquiriendo cada vez mayores grados de complejidad funcional por lo que la manifestación de este pensamiento a través del lenguaje no escapa a esta regla general.

[29] UPN. Antología Básica(1996). Construcción del conocimiento matemático en la escuela. p.13.

De acuerdo a la psicogenética, tanto la forma en la cual se maneja una determinada información como la manera en la que se presenta al sujeto-niño, son de capital importancia; y aún lo es más conocer como este lo percibe, reorganiza y aprende.

3.3. El constructivismo social de Lev Vigotsky.

Lev Semenovich Vigotsky, psicólogo ruso realizó trabajos acerca de la psicología del desarrollo, educación y psicopatología. En base a una investigación acerca de las tesis marxistas-leninistas concluyó que todas las actividades cognoscitivas fundamentales se formulan en la historia social y se basan las formas de producción del desarrollo sociohistórico.

La teoría social de Vigotsky considera que el hombre es un ser social por excelencia, que aprende por influencia del medio y de las personas que lo rodean, por lo tanto , el conocimiento mismo es un producto social.

En esta teoría, Vigotsky explica el origen social de la mente y afirma que el desarrollo humano –ya sea del antropoide al ser humano o el paso de niño a hombre- no es consecuencia solo de la herencia genética, sino que se produce gracias a la actividad social y cultural; así, lo que asimila el individuo es fundamentalmente un reflejo de lo que pasa en la interacción social, en una sociedad determinada y una época histórica.

En otras palabras, las habilidades intelectuales o patrones de pensamiento que una persona muestra no son determinadas en forma primaria por factores innatos (inteligencia heredada o habilidades mentales), sino que son producto de las actividades practicadas en las instituciones sociales en donde el individuo crece.

Para Vigotsky, la historia de la sociedad en la cual un niño crece y la historia misma de su desarrollo, en términos de sus experiencias en esa sociedad, son ambas de gran importancia para modelar los estilos que usará para pensar. Aun más, mucho del pensamiento conceptual se transmite al niño por medio de palabras, por lo que el lenguaje es una herramienta esencial para decir cómo aprenderá a pensar el niño.

Vigotsky tuvo gran interés en explicar la génesis de la conciencia. Para él la actividad que implica la transformación del medio a través de instrumentos viene a constituir la conciencia. Esos instrumentos básicos semióticos, que permiten la construcción del ambiente, permitirán también, por su internalización a través de los signos, la regulación de la conducta. Su efecto inmediato consistirá en tomar conciencia de los demás y al tener conciencia de los demás, se tiene conciencia de uno mismo.

La emergencia de la conciencia a través de los signos permite pues, el contacto significativo con los demás y con uno mismo. De ahí que Vigotsky atribuyera una importancia básica a las relaciones sociales, donde el análisis de los signos es el único método adecuado para investigar la conciencia humana.

Lo expuesto anteriormente nos lleva a considerar de qué manera Vigotsky concebía la evolución del ser humano y su desarrollo. Si tomamos al niño y hacemos una comparación con animales superiores, notaremos que en el aspecto biológico hay muchas semejanzas, pero en el aspecto psicológico, el animal no posee sino un sistema de funciones elementales; mientras que en el hombre esas funciones se transforman en funciones psicológicas superiores, lo que constituye el proceso de hominización.

La memoria, la inteligencia, el uso de la razón y todos los elementos que intervienen en las funciones psicológicas superiores, están desarrolladas a través de una actividad transformadora que permite al hombre pensar, juzgar, reflexionar y también inventar, imaginar y crear. (El homo-sapiens). Todas estas actividades lo realiza el hombre mediante instrumentos generales por la actividad semiótica, y cuyas combinaciones van a constituir el lenguaje.

Vigotsky se apoyó en las investigaciones de K. Bühler donde éste muestra que los pequeños no sólo actúan tratando de alcanzar una meta sino que también hablan en donde la conversación surge espontáneamente por lo que "el lenguaje no sólo acompaña a la actividad práctica sino que también desempeña un papel específico en su realización" [30], así lo demuestra en sus experimentos de este autor, considerando dos hechos importantes:

1º. Para el niño es tan importante el hablar como el actuar para lograr una meta, un propósito. Los niños no sólo hablan de lo que están haciendo, ya que su acción y conversación vienen siendo parte única y misma de una función psicológica, la cual está dirigida hacia la solución del problema planteado.

[30] UPN .Antología Básica. El lenguaje en la escuela I ., p. 33

2º. Cuando más compleja resulta la acción exigida por la situación y menos directa sea su solución, tanto mayor es la importancia del papel desempeñado por el lenguaje en las operaciones como un todo.
A veces el lenguaje adquiere una importancia tal que si no se permitiera hablar, los niños pequeños no podrían realizar el trabajo encomendado. Estas conclusiones llevaron a Vigotsky a la conclusión de que los niños resuelven tareas prácticas con la ayuda del lenguaje así como la de sus ojos y sus manos.

Esta unidad de percepción, lenguaje y acción constituye el tema central para cualquier análisis del origen de las formas de conducta específicamente humanas, pues el lenguaje no sólo facilita la manipulación efectiva de objetos por parte del niño, sino que también controla el comportamiento del pequeño; ya que esta relación entre lenguaje y acción es una relación dinámica en el curso del desarrollo del niño. Solo que en un principio, el lenguaje sigue a las acciones, está provocado y dominado por la actividad. Sin embargo es en los estadios superiores -de acuerdo a la estructuración que hace Piaget- cuando el lenguaje se desplaza hacia el punto de partida, de una actividad surge una nueva relación entre la palabra y la acción. "Ahora el lenguaje guía, determina y domina el curso de la acción; la función planificadora del lenguaje hace su aparición junto con la ya existente: función del lenguaje de reflejar el mundo externo" [31].

Esto es porque la lengua constituye el instrumento más eficaz para el establecimiento de la comunicación humana, asimismo; para comprender y estudiar los procesos sociales que se van generando y transformando a la sociedad.

La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).
El individuo se sitúa, según Vigotsky, en la zona de desarrollo actual o real (ZDR) y evoluciona hasta alcanzar la zona de desarrollo potencial (ZDP) que es la zona

[31], UPN .Antología Básica. El lenguaje en la escuela I ., p. 29

inmediata a la anterior.
Esta zona de desarrollo potencial no puede ser alcanzada sino a través de un ejercicio o acción que el sujeto puede realizar solo, pero le es más fácil y seguro hacerlo si un adulto u otro niño más desarrollado le apoyen, dándole elementos que poco a poco permitirán que el sujeto domine la nueva zona y que esa ZDP se vuelva ZDR.
Es aquí donde ese apoyo, ese prestar, esa ayuda del adulto o del niño mayor se convierte en lo que podría llamarse enseñanza. Lo importante es que ese prestar despierte en el niño la inquietud, el impulso y la movilización interna para que aquello que no le pertenecía, porque, no lo entendía o dominaba, se vuelva suyo.
La expresión "zona de desarrollo próximo" (ZDP) ha sido utilizada para describir cómo los educandos desarrollan las funciones psicológicas superiores.

La zona de desarrollo próximo se define como" la distancia entre el nivel de desarrollo real de un niño, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz".[32]
Este tramo, entre lo que el alumno puede aprender por sí mismo y lo que puede aprender con ayuda de otro , es la ZDP. La ZDP se favorece con la ayuda de los demás, en el ámbito de la interacción social, donde el estudiante aprende de forma más eficaz cuando lo hace en un contexto de colaboración e intercambio con otros.
El concepto es importante porque define una zona donde la acción docente tiene gran incidencia para facilitar el desarrollo de las funciones psicológicas superiores. La posibilidad de aprender depende de las ZDP que se creen con la educación. La clave es construir un andamiaje que mantenga al estudiante en la ZDP; que se modifica cuando él desarrolla capacidades.
En la ZDP hay tres supuestos adyacentes interrelacionados:

- Hay una diferencia entre lo que el niño puede lograr ya y su potencial para el aprendizaje.

[32] UPN. Antología Básica(1994). El niño: Desarrollo y proceso de construcción del conocimiento. P.77

- Lo que se puede lograr sin ayuda es diferente de lo que se puede alcanzar con la ayuda de un adulto o por un par más informado.
- Tiene lugar una deliberada transferencia del control del que sabe más, al que sabe menos.

La forma en que el adulto o la persona que sabe más, que tenga mayor conocimiento- ayuda al alumno a tomar el control del proceso enseñanza-aprendizaje es parte integral de la teoría socio-constructivista.
Vigotsky sugiere que apoyemos a los niños en el desarrollo de esas funciones que aún no han madurado pero que están precisamente en ese estado de maduración.

Funciones psicológicas elementales y superiores.
La estrategia general de Vygotsky consistía en examinar cómo las funciones psicológicas como la memoria, la atención, juego simbólico, conceptualización, la percepción y el pensamiento aparecen primero en forma primaria para luego cambiar a formas superiores. De ahí que Vygotsky distingue entre la línea de desarrollo natural y la línea de desarrollo social –o cultural-. El desarrollo natural produce funciones con formas primarias, mientras que el desarrollo cultural transforma los procesos elementales en procesos superiores.

Vygotsky menciona cuatro criterios [33] para distinguir entre las funciones psicológicas elementales (naturales) y superiores:

1) El paso del control del entorno al individuo, es decir, la emergencia de la regulación voluntaria; de acuerdo con Vygotsky, la característica fundamental de las funciones elementales es que se encuentran total y directamente determinadas por la estimulación ambiental, es decir sujetos al control del entorno mientras que las funciones psicológicas superiores obedecen a una autorregulación una estimulación,

[33] Werisch, Y. V. Vigotsky (1991). La formación de la mente. Ediciones Paidós, Barcelona. pp,42-44

autogenerada, a la creación y uso de estímulos artificiales que se convierten en las causas inmediatas del comportamiento.

2) El surgimiento de la realización consciente de los procesos psicológicos. Este segundo criterio, estrechamente relacionado al anterior, que diferencia las funciones psicológicas superiores de las elementales es la "intelectualización" y el dominio, es decir, la realización consciente y la voluntariedad.
El niño durante la edad de escolarización se encuentra en la transición de ciertas funciones elementales como la atención y la memoria a las funciones superiores de atención voluntaria y memoria lógica. Al respecto Vygotsky menciona:

"la intelectualización de las funciones y su dominio representan dos momentos del mismo proceso: la transición hacia las funciones psicológicas superiores. Dominamos una función hasta el grado de su intelectualización. La voluntariedad de la actividad de una función es siempre la otra cara de su realización consciente. Decir que la memoria se intelectualiza en la escuela es exactamente lo mismo que decir que aparece la memoria voluntaria; decir que la atención se convierte en voluntaria en el período escolar es exactamente lo mismo que decir que se fundamenta más y más en el pensamiento, es decir en el intelecto" [34]

3) El tercer criterio que caracteriza las funciones psicológicas superiores -pero no las elementales- es su origen y naturaleza social. Vygotsky argumentaba que no es la naturaleza, sino la sociedad la que, por encima de todo, debe ser considerada como el factor determinante del comportamiento humano.
Estaba interesado en cómo la interacción social en pequeños grupos o en diadas conduce a un funcionamiento psicológico superior del individuo.
4) El cuarto criterio diferencial es el de la mediación, la concepción vygotskyana del control voluntario, la realización consciente y la naturaleza social de los procesos psicológicos superiores presuponen la existencia de herramientas psicológicas o signos, que pueden ser utilizados para controlar la actividad propia y de los demás.

[34] Ibid. Pág.43.

El proceso de interiorización.

Cada proceso psicológico superior se construye dos veces: primero en el mundo y luego en el individuo, es decir, un proceso interpersonal (primero a nivel social interpsicológica), se transforma en un proceso intrapersonal (luego a nivel individual intrapsicológica). El proceso de internalización no implica la copia de la realidad en un plano interno, es más bien, la reconstrucción interna de una operación externa.

Así en el plano escolar, el individuo (alumno) es un ser social que aprende por influencia del medio y de las personas que le rodean: sus compañeros, maestros y padres de familia. El aprendizaje es primordialmente una actividad social, y para que éste ocurra es fundamental que el alumno participe en la vida social de la escuela. En consecuencia en los procesos psicológicos superiores como: lenguaje, atención, memoria, conceptualización, lectoescritura, juego simbólico, actitudes y razonamiento; éstas son producto de las relaciones sociales que desarrolla el niño en el aula, la escuela y la comunidad (contexto) con sus semejantes y que se median culturalmente por diversos actores, para luego interiorizarse o hacerse parte del individuo.

Por citar un ejemplo, en la clase de matemáticas para abordar temas como equivalencia y suma de fracciones, los niños trabajan con material concreto como resaques Montessori y Tangram. En una secuencia didáctica, los niños trabajan en parejas o equipos, utilizando y manipulando los materiales como instrumentos de medición; herramientas necesarias que ayudan y facilitan a reconstruir conocimientos relacionados con las fracciones y sus diferentes significados.

3.4. El aprendizaje significativo de Ausubel.

David P. Ausubel psicólogo norteamericano contemporáneo que ha desarrollado la Teoría de la Asimilación (originalmente llamada Teoría del Aprendizaje Significativo) útil para explicar la adquisición, retención y transferencia del aprendizaje. Esta teoría pertenece a la familia de las teorías cognoscitivas del aprendizaje, donde los psicólogos se ocupan de estudiar cómo se dan los procesos en la formación de conceptos, la naturaleza de la comprensión humana y de la estructura y sintaxis del lenguaje. La teoría de la asimilación propuesta por Ausubel hace énfasis en la función interactiva de la estructura cognoscitiva[35*] del alumno en el proceso de aprendizaje y ésta última tiene, además un valor explicativo para los fenómenos tanto del aprendizaje, como en la retención a largo plazo. De acuerdo con el autor existen tres géneros de aprendizaje: el afectivo,que se presenta y desarrolla "dentro" del individuo, donde primordialmente el placer-dolor, satisfacción-desagrado, tranquilidad-ansiedad, acompañan o disponen de experiencias cognoscitivas; el psicomotor, que comprende el adiestramiento de respuestas musculares mediante la práctica y que interviene con el aprendizaje cognoscitivo para la adquisición de destrezas psicomotoras tales como correr, tocar el piano, bailar, etc., y el aprendizaje cognoscitivo, del cual se desarrollan los tipos de aprendizaje que a continuación se presentan.

- Aprendizaje receptivo. En este tipo de aprendizaje se presenta el material al alumno ya sea escrito o verbal, en su forma final, y el alumno sólo tiene que recibirlo -incorporar al material tal y como se le presenta- en forma pasiva, dicho material puede o no relacionarse con la estructura cognoscitiva del estudiante. Si se relaciona el alumno puede reproducirlo más tarde, relacionarlo con otro aprendizaje o para solucionar problemas que se le presenten, si no hay relación tiende al olvido.

- Aprendizaje por descubrimiento. Esta modalidad de aprendizaje el alumno tiene que descubrir el contenido principal que va a aprender, antes de que pueda incorporarlo a su estructura cognoscitiva. Para lograr este tipo de aprendizaje es necesario que el alumno cuente con una máxima experiencia práctica específica que genere los niveles de abstracción o intuición necesarios para así lograr la aprehensión del contenido. *Se* considera este

[35] *Estructura cognoscitiva. Es el contenido y organización total de las ideas del individuo o el contenido y organización de sus ideas en un área particular del conocimiento.

tipo de aprendizaje como uno de los más sustanciales y que más favorece el desarrollo intelectual del alumno.

- Aprendizaje memorístico. También llamado repetitivo y consiste en el aprendizaje al pie de la letra "de memoria" de las proposiciones aprendidas sin que se obtenga un significado. En este caso la información ingresa por vías sensoriales y es almacenada arbitrariamente, sin ser relacionada con el conocimiento existente. Aunque este tipo de aprendizaje es necesario cuando el alumno tiene que aprender por ejemplo, fechas, nombres, números telefónicos, capitales, etc. Este tipo de aprendizaje trae consigo ciertas desventajas como: existe poca retención de la información en cuanto a su duración y capacidad, además; la información es muy vulnerable a la interferencia de materiales similares.

- Aprendizaje significativo. Este es el tipo de aprendizaje que a Ausubel más le interesa y lo considera el proceso más importante que se ha de realizar en el aprendizaje escolar. Se caracteriza por ser más dinámico donde la nueva información es incorporada y relacionada con las ideas existentes y contenidos de la estructura cognoscitiva del alumno.

Ausubel define el aprendizaje significativo como el proceso mediante el cual las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario sino sustancial con lo que el alumno ya sabe.

Analizando esta definición cabe señalar lo siguiente: la no arbitrariedad se refiere a la propiedad que tiene la información para ser relacionada con las ideas pertinentes que el alumno posee dentro de su estructura cognoscitiva. Si no existen antecedentes con los cuales relacionar las nuevas ideas se estaría relacionando de modo arbitrario. La sustancialidad es la cualidad que tiene el material ya sea oral o escrito a ser modificado sin alterar su esencia. En este sentido, el mismo concepto o proposición pueden expresarse de manera sinónima y seguir comunicando exactamente el mismo significado.

CONDICIONES PARA EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

"Ausubel y sus colaboradores (Novak y Hanesian) han insistido en numerosas ocasiones sobre las exigencias que plantea el aprendizaje significativo. Ante todo, es necesario que el nuevo material de aprendizaje, el contenido que el alumno va a aprender, sea potencialmente significativo, es decir; sea susceptible de dar lugar a la construcción de significados. Para ello, debe cumplir dos condiciones, una intrínseca al propio contenido de aprendizaje y la otra relativa al alumno particular que va a aprenderlo" [36].

Como ya se menciona, el aprendizaje significativo implica que el alumno relacione el material que va a aprender, de manera no arbitraria y sustancial, con su estructura cognoscitiva.

Para que se de este tipo de aprendizaje, son necesarias dos condiciones: un material potencialmente significativo y la disponibilidad o actitud del alumno para aprender significativamente.

.

La primera condición es que el contenido posea una cierta estructura interna, una cierta lógica intrínseca, un significado en sí mismo. Difícilmente el alumno podrá construir significados si el contenido de aprendizaje es vago, está poco estructurado o es arbitrario desde el punto de vista lógico. Obviamente este potencial de significatividad lógica, como la denomina Ausubel, no depende sólo de la estructura interna del contenido, sino también de la manera como éste se le presenta al alumno.

La segunda condición, que el alumno tenga una disposición favorable para aprender significativamente. La actitud favorable hacia el aprendizaje significativo hace referencia a una intencionalidad del alumno para relacionar el nuevo material de aprendizaje con lo que ya conoce, con los conocimientos adquiridos previamente, con los significados ya construidos. Cuando la intencionalidad es escasa por parte del alumno, este se limitará probablemente a memorizar lo aprendido de una forma un tanto mecánica y repetitiva; por el contrario cuando la intencionalidad es elevada, el alumno establecerá múltiples y variadas relaciones entre lo nuevo y lo que ya conoce. El que el alumno se sitúe en uno u otro lugar del continuo que delimitan

---

[36] Coll Salvador, César(1997). Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. Paidós Educador, México.

estos dos extremos va a depender, en definitiva de su motivación para aprender significativamente y de la habilidad del profesor para despertar e incrementar esta motivación. Como puede comprobarse, estas condiciones hacen intervenir elementos que corresponden no sólo a los alumnos -el conocimiento previo- sino también al contenido del aprendizaje -su organización interna y su relevancia- y al profesor que tiene la responsabilidad de ayudar con su intervención al establecimiento de relaciones entre el conocimiento previo de los alumnos y el nuevo material de aprendizaje.

Lo expresado hasta aquí nos da un amplio panorama de que el aprendizaje significativo de un contenido cualquiera, implica inevitablemente su memorización comprensiva, su ubicación o almacenamiento en una red más o menos amplia de significados. Asimismo en la medida en que contribuye a ampliar y extender dicha red de significados, se incrementa la capacidad del alumno para establecer nuevas relaciones cuando se enfrente a posteriores tareas o situaciones, por lo que un aprendizaje realizado de forma significativa, es al mismo tiempo, un aprendizaje que tiene un elevado valor funcional es decir, un aprendizaje útil, un aprendizaje que puede ser utilizado con relativa facilidad para generar nuevos significados.

El aprendizaje significativo puede considerarse como un proceso natural, ya que de esta manera relacionamos las cosas, conceptos y significados en nuestra primera infancia; pero a través del desarrollo educativo formal se va perdiendo la capacidad de aprender así. En opinión de Ausubel, esta actitud se ve obstaculizada por tres razones o causas que dificultan aprender significativamente:

a) La poca validez que proporcionan los profesores a respuestas emitidas por los alumnos, cuando éstas carecen de correspondencia literal y consideran incorrectas aquellas que son sustancialmente adecuadas.

b) La dificultad que presentan los alumnos para expresar con sus propias palabras un determinado conocimiento, por lo tanto recurren al aprendizaje repetitivo. Es fundamental desarrollar el vocabulario de los alumnos para dotarlos de significados verbales y que hagan uso de ellos.

c) El alumno prefiere aprender la información de memoria (mecánicamente), para dar la falsa impresión de que sabe, aunque no haya entendido, esto como consecuencia de las técnicas tradicionales de enseñanza. Es por ello conveniente implementar técnicas que favorezcan el aprendizaje significativo.

Para favorecer el aprendizaje significativo en el aula, es importante dar un giro de la práctica docente; traducido por el planteamiento central en cuanto a la metodología que sugiere los planes de estudio para la enseñanza de las matemáticas. El uso de materiales y el desarrollo de secuencias didácticas conlleva a resolver problemas, donde el alumno hace uso de sus conocimientos previos para restructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o para volver a aplicarlo en nuevas situaciones y avanzar en el uso de técnicas y razonamientos más eficaces.

En este contexto el trabajo desarrollado con alumnos de sexto grado con montones-unidad, ha sido de gran apoyo para abordar el tema de fracciones en situaciones de reparto (y abarcar otro tema como el de divisores de un número) y la multiplicación de fracciones con un natural. Por ejemplo si se tiene un montón-unidad de 40 dulces la consigna es, ¿De cuántas maneras puedo repartirlas sin que sobre ningún dulce?

En este caso los niños confrontan resultados, discuten, reflexionan y encuentran argumentos y llegan a acuerdos para dar solución al problema planteado.

Otros planteamientos son: Si tengo un montón- unidad de 30 dulces,¿Qué cantidad representa 1/5 de 30? ¿Cuántos dulces representan 2/6 de 30?. Las respuestas son 6 y 10 dulces respectivamente. Aquí se está abordando el tema de multiplicación de fracciones por un natural.

Trabajar en el aula situaciones como las descritas, hacen que el aprendizaje sea más significativo y de interés para los niños, en un ambiente donde se lleva a cabo una relación social que involucra a todos los que participan en la reconstrucción del conocimiento y por consecuencia al desarrollo del pensamiento matemático.

Variedades de aprendizaje significativo.

Ausubel menciona que existen tres tipos de aprendizaje significativo; el aprendizaje de representaciones, el de conceptos y el de proposiciones.

1. Aprendizaje de representaciones. Se ocupa de los significados de símbolos, fórmulas, etc., consiste básicamente en representantes y referentes; es decir, el

alumno aprende que las palabras nuevas vienen a representar objetos o ideas correspondientes de aquéllos. Cuando un niño está aprendiendo la palabra "árbol", asocia el sonido de la palabra con la representación física del objeto o con el objeto mismo, aprendiendo que ambas cosas significan lo mismo.

2. Aprendizaje de conceptos. Es el aprendizaje de ideas genéricas que representan un conjunto de elementos que implica el aprendizaje de los atributos de criterio (características esenciales) que permiten identificar o distinguir un objeto o fenómeno. Por ejemplo: El alumno que aprende el concepto de velocidad en su primer curso de física, tiene la necesidad de comprender el producto de masa por aceleración.

3. Aprendizaje de proposiciones. Implica captar el significado de nuevas ideas a través de la combinación de palabras. Cada una de las palabras no requiere un referente por sí solo, sino que gracias a reglas gramaticales se elabora una proposición completa que produce a la vez una idea compuesta.

3.5. Bruner y la representación cognoscitiva de los conceptos matemáticos.

Jerome Bruner psicólogo norteamericano, combino los objetivos de la psicología experimental con los del estudio del trabajo del aula y sus experimentos en el aula se refirieron sobre todo al aprendizaje de las matemáticas.

Como muchos otros educadores orientados hacia la estructura que intentaban desarrollar procedimientos elegantes para la enseñanza de las matemáticas y que intentaban demostrar la capacidad de los niños para comprender conceptos matemáticos sofisticados, Bruner trabajó estudiando muy de cerca a niños individualmente, en situaciones experimentales de enseñanza.

Bruner formaba parte de un grupo de psicólogos norteamericanos que, en los años que siguieron a la Segunda Guerra Mundial protagonizaron el resurgimiento e interés por los procesos cognoscitivos humanos: los medios por los que los organismos consiguen retienen y transforman la información.

Bruner y sus colegas llevaron a cabo experimentos con adultos en los que examinaron las estrategias que utilizan las personas en el complejo proceso de ordenar y clasificar que es el desarrollo de los conceptos (decidir lo que es y lo que no es relevante a la nueva idea a la que se está dando forma). Sobre este fondo de experimentación con adultos, Bruner empezó a examinar los procesos cognoscitivos de los niños y se preocupó especialmente de cómo representan mentalmente los niños los conceptos e ideas que van aprendiendo. Para ello trabajó estudiando muy de cerca a niños en forma individual y en situaciones experimentales de aprendizaje.

Bruner era un gran defensor de las relaciones de trabajo próximas entre los psicólogos, los educadores y los matemáticos, colaboró en sus experimentos en el aula con Zoltan P. Dienes, profesor de matemáticas.

Apoyándose en parte en las ideas de Piaget que había sugerido que el desarrollo suponía una reestructuración constante de los datos y de las relaciones, consecuencia de las interacciones de los niños con su entorno y de su manipulación activa del mismo, Bruner se centró en cómo se representan los resultados de estos episodios interactivos en la mente del niño. En palabras de Bruner.

"Si queremos sacar partido de nuestro contacto con las regularidades recurrentes del entorno, debemos representárnoslas de alguna manera. Dejar de lado este tema diciendo que se trata de memoria pura y simple supone no entender el problema. Porque lo más importante de la memoria no es su almacenamiento de la experiencia pasada, sino la recuperación de lo que es relevante, en un formato que se pueda utilizar. Esto depende de cómo se codifica y se procesa la experiencia anterior, para que pueda ser relevante y aprovechable en el presente cuando se necesite. El producto final de tal sistema de codificación y procesamiento es lo que podemos llamar representación". [37]

[37] LAUREN B. Resnick (1991). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos Psicológicos Ediciones Paidós. p. 139.

Bruner describe tres modos de representación necesarias en el proceso de aprendizaje: **enactiva, icónica y simbólica.**

La representación enactiva es un modo de representar eventos pasados mediante una respuesta motriz adecuada. Se cree que este modo es la única manera por la que los niños pequeños pueden recordar las cosas -etapa que Piaget ha llamado sensoriomotriz-, es el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento de este con la mano, indicando así que recuerda el objeto en relación a la acción que se realiza sobre el mismo. También los adultos pueden recordar algunas acciones motrices complejas de forma enactiva. Por ejemplo, nuestros músculos se encargan de recordar cuando subimos a una bicicleta o pegarle al balón de fútbol aunque hayan pasado muchos años.

El segundo modo de representación, el icónico, nos separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales. La representación icónica es lo que sucede cuando el niño se imagina una operación o una manipulación, como forma no sólo de recordar el acto sino también de recrearlo mentalmente cuando sea preciso. Estas imágenes mentales no incluyen todos los detalles de lo que sucedió, sino que abrevian los sucesos representando únicamente sus características importantes. Así por ejemplo un niño que está aprendiendo la operación de la división puede guardar en forma de imágenes sus experiencias en situaciones de reparto, de tal forma que las instrucciones futuras en la resolución de problemas de división pueda comprender haciendo referencia de lo que ha construido antes. Otro ejemplo es cuando alguien recibe información para llegar a un sitio determinado, imaginando las calles que tiene que recorrer para llegar al lugar deseado.

La tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, es la representación simbólica, que se posibilita sobre todo por la aparición de la competencia lingüística. Un símbolo es una palabra o marca que representa alguna cosa, pero que no tiene que parecerse a dicha cosa. Por ejemplo, la cifra 5 no se parece en absoluto a una formación de objetos que tengan dicha propiedad numérica, ni tampoco lo hace la palabra cinco. Los símbolos los inventan las personas para referirse a ciertos objetos, narrar sucesos o escribir ideas, y sus significados se comparten principalmente porque la gente se ha puesto de acuerdo en compartirlos. Cuando los niños empiezan a escribir sus operaciones matemáticas utilizando números, signos de operación como +, -, x, / e =, es el principio para ellos de la representación simbólica, como lo es su capacidad de leer e interpretar estas notaciones matemáticas. Pronto empiezan a pensar en sus ejecuciones en términos de los mismos símbolos, lo que les abre nuevas posibilidades de pensamiento abstracto.

Para Bruner, los modos de representación enactiva, icónica y simbólica se relacionan entre sí evolutivamente desarrollándose en ese orden de tal manera que cada modo depende del anterior, y exige mucha práctica en el mismo antes de pasar al modo siguiente. Esta formulación de los modos de representación equivale, a una teoría de las etapas de desarrollo del intelecto.

Bruner se preocupó por experimentar y desarrollar su trabajo dentro del aula lo que llevó a afirmar: que "Toda idea o problema o cuerpo de conocimientos se puede presentar de una forma lo suficientemente sencilla como para que cualquier estudiante determinado lo pueda comprender de forma reconocible" [38].

En otras palabras, le pareció que existían formas de presentar los conceptos complicados a los niños de cualquier edad de tal manera que pudieran entender en un nivel adecuado a sus capacidades intelectuales y a su experiencia.

Ampliando su trabajo sobre el desarrollo a sugerencias para la enseñanza en el aula, Bruner afirmó que si el intelecto se desarrollaba en el orden enactivo-icónico-simbólico, entonces lo lógico era enseñar los conceptos en dicho orden. Esto partía de la base de que el desarrollo conceptual seguía un curso paralelo a la teoría general del desarrollo intelectual. Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. Así la forma en que los seres humanos se

[38] Ibidem. Pág. 140.

representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula.

Bruner hace mención que los niños son constructivistas por naturaleza. A partir de los 7 y hasta los 11 años de edad los niños se forman imágenes a partir del contacto con objetos y capturan experiencias en la memoria para representarlas a través de símbolos. De ahí la importancia de trabajar con materiales didácticos, que permitan presentar a los alumnos diversas estrategias de aprendizaje de temas afines a las fracciones. El Tangram, los resaques Montessori, las regletas de colores, envases de refresco y otros, son de gran utilidad y permite que los niños perciban diversas presentaciones y formas, además de cumplir con la variabilidad matemática que permite que el concepto de racional pueda generalizarse a otros contextos, no limitándose a un solo modelo sino a varios.

Así por ejemplo, se habla de medios, cuartos y octavos con los resaques, donde una unidad llamado círculo se divide en dos, cuatro y ocho partes iguales. Es a través de conocer, manipular y trabajar con sus compañeros, que los niños descubren que hay fracciones equivalentes y que un número de partes forman un todo. Asimismo al formar enteros mayores que la unidad utilizando resaques, permite que los alumnos formalicen la suma y resta de fracciones, permitiéndoles acceder a estos conocimientos y comprobar con material concreto la operatividad con numerales.

Es a través de la acción, el juego y la interacción con materiales como menciona Bruner, que los conocimientos se presentan ante los niños y en este caso comprender los diferentes significados de las fracciones.

CAPÍTULO IV : Estrategias didácticas para la enseñanza de las fracciones

4.1. El Tangram.

Los puzzles o rompecabezas han gozado de gran popularidad en todos los tiempos. Ya los niños de tres a cuatro años tratan de acoplar correctamente las elementales piezas de su primer puzzle, para formar un todo con ellos. Existen puzzles para todas las edades, para niños y para adultos y entre ellos no hay ninguna diferencia básica. Ciertamente que el mayor número de piezas requiere más trabajo, pero en definitiva, el propósito es siempre el mismo: acoplar formas, irregulares para reconstruir una figura. El hecho de que la figura a reproducir sea cada vez más complicada no constituye sino un aliciente mayor para seguir adelante.

El Tangram chino[39] también es un puzzle pero se diferencia de los puzzles europeos y americanos. Se ignora cuándo apareció el juego del Tangram, llamado también Chí Cháe pan, que en chino significa "tabla de la sabiduría" o "tabla de los siete elementos". Los dos nombres son apropiados, pues para jugar el Tangram hace falta cierto grado de reflexión, análisis, imaginación e inteligencia.

El Tangram, o juego de los siete elementos, consta de siete formas geométricas básicas, obtenidas a partir de la división de un cuadrado (cuadrilátero). La figura muestra como se han de acoplar las siete piezas para formar dicho cuadrado.

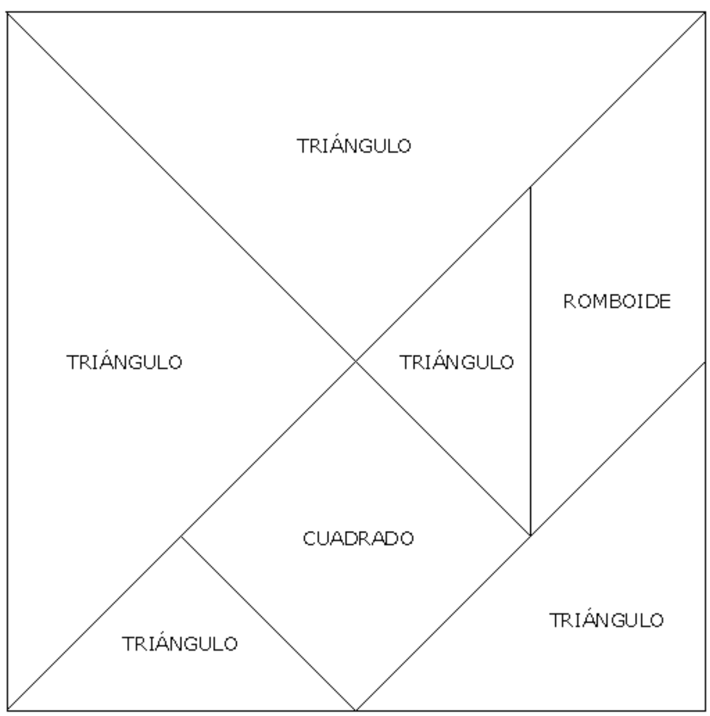


FIGURA 1

[39] Elffers, Joost (1989). El Tangram “Juego de formas chino”. Ed. Labor. España .pp 10-11

¿Cómo pueden observarse los siete elementos del Tangram?

Este consta de cinco triángulos isósceles, un cuadrado y un romboide, piezas que sirven para construir el cuadrado. Con los siete elementos se pueden formar determinadas figuras geométricas como un cuadrado, un cuadrilátero, un trapecio, un triángulo etc.

Con el Tangram se pueden construir figuras geométricas, de objetos y seres vivos como hombres corriendo, sentados, en caída, danzando de pie o bebiendo, además de animales como peces, gatos, o cerdos, junto con puentes, barcos y casas.

Una regla del Tangram, establece que en la composición de cualquier figura han de intervenir todas las siete piezas, ni una más ni una menos, pues el número de los elementos es constante.

El Tangram posee valores educativos ya sea como ejercicio de concentración, como recurso para ilustrar el concepto de las formas, o como el fraccionamiento de un todo. Es un juego que puede ser utilizado como material didáctico para la enseñanza-aprendizaje de las fracciones comunes. Ya M. Williams maestro de profesión inglés (1817) presenta un artículo con diversos ejercicios matemáticos que se pueden resolver con ayuda del Tangram.

¿Por qué el Tangram es un cuadrado?
En escritos antiguos y escrituras rupestres, el cuadrado significa aprisionamiento, hogar, morada. Con sus posibilidades estructurales el cuadrado ha ofrecido a artistas, arquitectos y tendencias estilísticas de todos los tiempos un esquema regular con el que construir una obra de arte.

En la naturaleza, el cuadrado presta su forma a numerosos minerales. En tiempos pasados, al cuadrado se le atribuía el poder de protegerse de las desgracias.

El cuadrado sirve de base a muchos juegos antiguos, como el ajedrez y las damas, que se siguen practicando en nuestro tiempo.

Según un proverbio chino, la infinitud es un cuadrado sin ángulos. En la cultura china (dinastía Ostchin, 31 - 420 d. de C.), el calígrafo Wang Hsi Chin [40] perfeccionó la escritura china confiriéndole su bella forma cuadrada.

La división del cuadrado en el Tangram permite construir cientos de formas figurativas y abstractas combinando adecuadamente sus elementos. Partiendo del cuadrado estático, se pueden elaborar innumerables movimientos; gracias al juego conjunto de sus elementos, que de este modo se liberan de la inmovilidad, el Tangram podría ser de interés para la filosofía, la pedagogía, la psicología y la estética.

4.2. Uso del Tangram para construir el concepto de fracción y equivalencia de fracciones.

En un primer momento se sugiere que los alumnos elaboren su Tangram a través del doblado de una hoja cuadrada. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Doblar la hoja por sus diagonales.
- Doblar la hoja verticalmente, marcando un eje de simetría; repetir la operación por segunda ocasión.
- Llevar los vértices superior izquierdo y superior derecho al punto central del cuadrado.
- Recortar por una diagonal el cuadrado, formándose dos triángulos isósceles.
- Seleccionar el triángulo que tenga la marca de un trapecio isósceles y cuya base mayor coincida con la diagonal.
- Cortar el triángulo isósceles del ángulo inferior derecho del cuadrado.
- Cortar el triángulo isósceles de uno de los extremos; quedando la figura geométrica de un trapecio recto.

[40] Elffers, Joost (1989). El Tangram “Juego de formas chino”. Ed. Labor. España,p.14

- Identificando las líneas del doblado cortar el cuadrado del trapecio recto; quedando otro trapecio recto.
- Del trapecio recto se cortan otro triángulo isósceles y un romboide (ver las marcas del doblado)
- Al final se deben tener siete figuras geométricas: dos triángulos isósceles grandes, uno mediano y dos pequeños; un cuadrado y un romboide.

En un segundo momento dejar que los niños exploren y manipulen los elementos del Tangram para formar siluetas, objetos, seres vivos o lo que ellos deseen construir; sólo hay que recordarles que deben de utilizar las siete piezas (etapa enactiva, concreta u objetiva).

En un tercer momento los niños definirán el valor de cada figura geométrica de acuerdo con sus conocimientos previos y de las acciones realizadas en la construcción del Tangram y entrar al campo de las imágenes mentales (etapa icónica o gráfica). Aquí el niño es capaz de imaginar una operación -de dividir por ejemplo, a través del doblado- o manipulación anterior para recrearla mentalmente y así llegar al concepto de fracción (parte-todo). Cabe mencionar que en el tercer ciclo de primaria los niños ya saben encontrar fracciones: equivalentes, por lo que a través del doblado de cada uno de los elementos del Tangram y varios ensayos de comparación de figuras llegan a deducir el valor de cada figura. La tarea del docente es de vital importancia en la contextualización del conocimiento y en la confrontación de ideas, ya que permite a los niños descubrir por sí mismos ciertas generalizaciones y principios que les provoquen gozar del aprendizaje y participar en algunos de los procesos creadores en la construcción de las matemáticas, a propósito de las fracciones.

Así por ejemplo se puede preguntar.

¿Qué representan cada uno de los dos triángulos grandes con respecto a la totalidad?

¿Qué representa el triángulo mediano con respecto a uno grande? o ¿Cuántas veces cabe el triángulo mediano en el grande?

¿Cuántas veces cabe un triángulo pequeño en el cuadrado? ¿Cuántos en el romboide? ¿Cuántas veces cabe el triángulo pequeño en uno grande? ¿El cuadrado y el romboide son iguales? deducir por qué ¿Cuántas veces cabe el romboide en un triángulo grande?

Es recomendable que a través de las respuestas que dan los niños, estos comprueben y corroboren sus resultados de manera gráfica antes de expresarlo en forma numérica (etapa simbólica o abstracta).

A continuación se dan los valores numéricos en forma de fracción de cada uno de los elementos que conforman el Tangram.

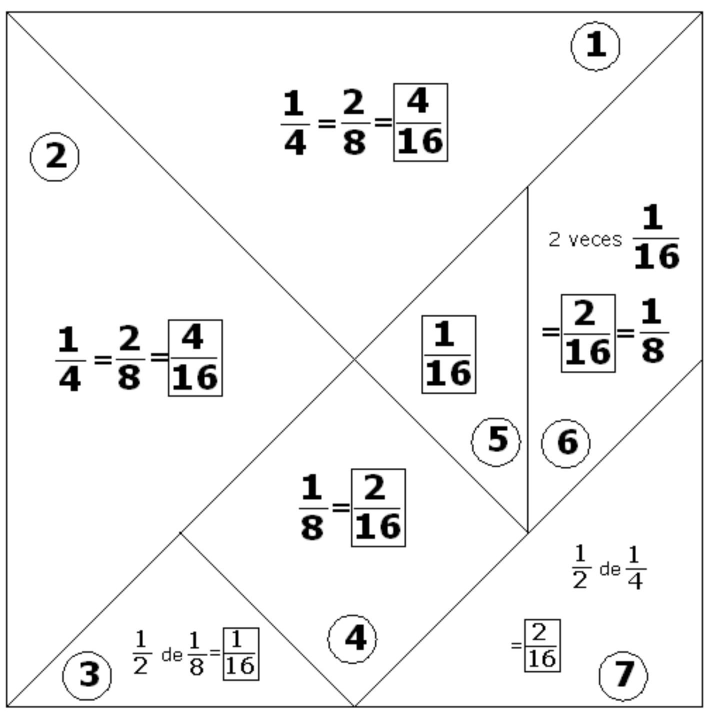


FIGURA 2

Es primordial respetar el proceso que sigue el niño para aprender. Cuando los docentes enseñan fracciones a partir de la etapa simbólica no permiten al individuo que madure y poco a poco desarrolle habilidades; lo único que le queda a este último es aprender de memoria símbolos sin significado y operar mecánicamente con esos numerales.

De ahí la importancia de utilizar materiales manipulables, ya que el niño visualiza lo que es una fracción.

En un cuarto momento, cuando el niño aprenda representar gráficamente una fracción y escribirlo numeralmente se plantean situaciones problemáticas. Con el uso del Tangram se pueden plantear diversos problemas. Por ejemplo:

- Se tiene un terreno cuadrado de 400 m^2. ¿Qué área representa cada una de las figuras geométricas del Tangram?

¿Qué área representa el cuadrado? ¿Qué área el romboide? ¿Qué área la suma de los dos triángulos pequeños? ¿El triángulo mediano? ¿La suma de un triángulo grande y el cuadrado? ¿La suma del triángulo mediano y el romboide? etc.

De acuerdo a la figura 2 el área de cada uno de los elementos es:

- Triángulo 1, $\frac{1}{4}$ de 400 m^2 = 100 m^2

- Triángulo 2, de igual manera 100 m^2

- Triángulo 3, $\frac{1}{16}$ parte de 400 m^2 es 25 m^2

- El área del cuadrado, sabiendo que $\frac{1}{16}$ = 25 m^2, como su área es 2 veces el triángulo 3 el resultado es $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$ que equivale a 50 m^2.

- El triángulo 5 es igual en área al triángulo 3 por lo tanto es 25 m^2.

- el romboide es dos veces ya sea el triángulo 3 o 5 por lo tanto su área equivale a 50 m^2.

Sumando los valores de cada uno de los elementos tenemos:

$\frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{16}{16} = 1$ (El Tangram como un entero-unidad)

100 m^2 + 100 m^2 + 25 m^2 + 50 m^2 + 25 m^2 + 50 m^2 + 50 m^2 = 400 m^2

- El área del cuadrado es de $\frac{2}{16}$ partes del entero y equivale a 50 m^2

- El área del romboide representa dos veces el área de un triángulo pequeño, es decir $\frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ igual a $\frac{1}{16}$, equivalente al área del cuadrado 50 m^2

- La suma de los dos triángulos pequeños quedaría expresada como:

$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$ que equivale a 50 m^2

- El triángulo mediano es $\frac{2}{16}$ del entero (cuadrado) por lo tanto su área es equivalente a 50 m^2

- La suma de un triángulo grande y el cuadrado queda expresado de la siguiente manera:

$\frac{4}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16}$ que equivale a 150 m^2 “seis partes de dieciséis”

- Asimismo la suma del triángulo mediano y el romboide, se expresa numeralmente

$\frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{4}{16}$ que equivale a 100 m^2

“cuatro partes de dieciséis, que es el total”

Como puede observarse, el uso del Tangram es un recurso didáctico que ayuda a los docentes en la enseñanza de fracciones y la resolución de problemas para llegar a la conceptualización de fracción (como parte de un todo) y la realización de suma de fracciones. Asimismo se pueden plantear problemas de resta. Por ejemplo:

Si a la figura (1) le quito la parte que tiene la figura (4) ¿cuánto me queda?
Solución

$\frac{4}{16} - \frac{2}{16} = \frac{2}{16}$ que equivale a 50 m^2

4.3. ¿Cómo aprender suma de fracciones menores o igual que la unidad utilizando resaques Montessori?

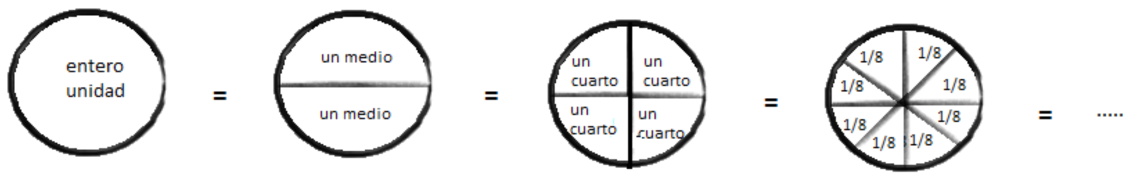
Para ello se trabaja con el material Montessori, el primer jalón de las fracciones comunes; es decir medios, cuartos y octavos.

En primer instancia se les da a conocer a los alumnos el material para que lo conozcan, lo toquen, visualicen y empiecen a manipularlo verificando sus formas y e iniciar el juego con ellos. Por ejemplo buscando equivalencias de áreas, antes de abordar el concepto de fracción.

Para este primer caso y trabajar con el primer jalón de las fracciones comunes es conveniente que el niño se percate que el entero unidad se puede formar con medios, cuartos, octavos y otras fracciones.

Así a través de la manipulación y manejo de este material los niños observaran de forma concreta la formación y equivalencias de áreas.

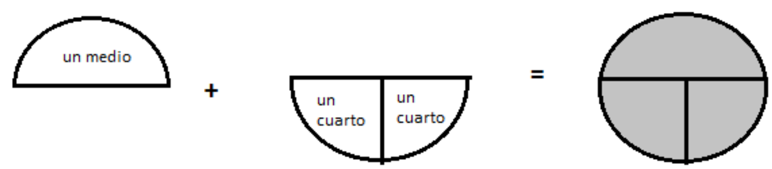
Observemos las siguientes equivalencias.



un entero = dos medios = cuatro cuartos = ocho octavos = otras fracciones

1 = 2/2 = 4/4 = 8/8 = ...

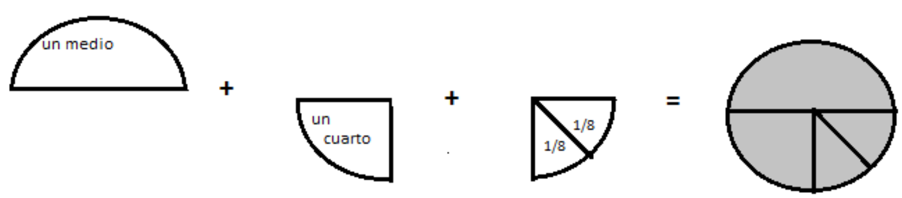
Al manipular los materiales los alumnos podrán darse cuenta que el entero unidad también puede formarse con una combinación de los mismo. Por ejemplo:



un medio más dos cuartos igual a un entero unidad.
Expresado numéricamente:

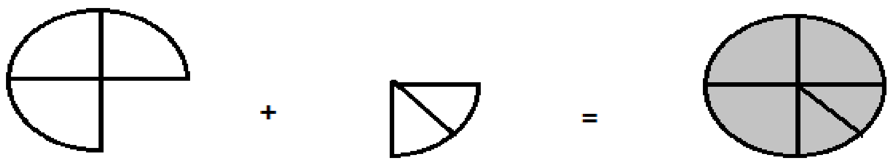
$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$

Otros ejemplos para formar el entero unidad.



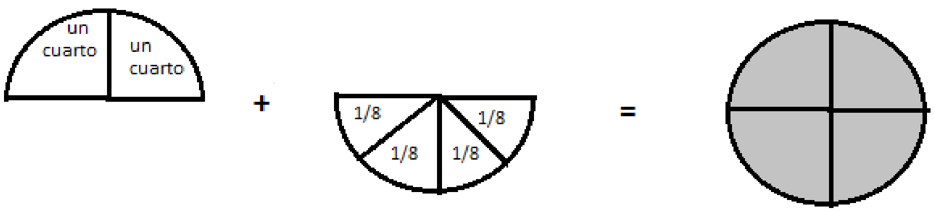
un medio más un cuarto más dos octavos igual a un entero unidad

1/2 + 1/4 + 2/8 = 1



Tres cuartos   más dos octavos igual a un entero unidad

$3/4 + 2/8 = 1$



dos cuartos más cuatro octavos igual a un entero

$2/4 + 4/8 = 1$

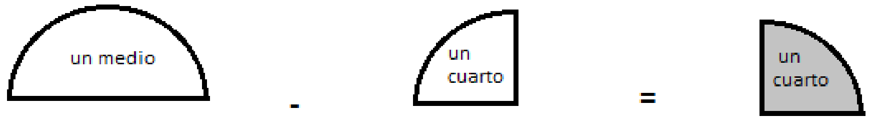
Como puede observarse en los casos anteriores, ya se está abordando lúdicamente la equivalencia y suma de fracciones basta un entero, es decir la unidad.

Para el caso de la resta se puede iniciar con situaciones sencillas como las siguientes:

Si a un entero le quitamos un medio (1/2) ¿Cuánto nos queda?

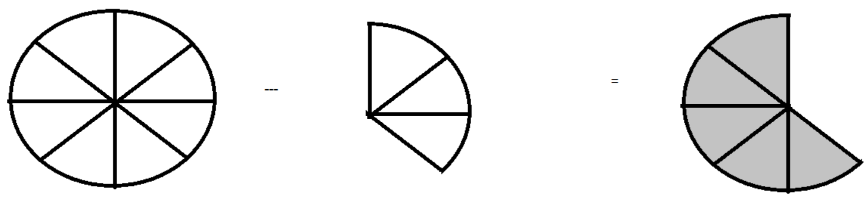
$2/2 - 1/2 = 1/2$

Si a un medio (1/2) le quitamos un cuarto ¿Cuánto nos queda?



1/2 - 1/4 = 1/4

Si a un entero le quitamos tres octavos (3/8) ¿Cuál es el resultado?



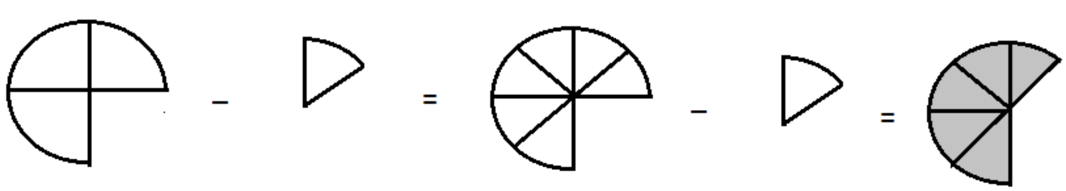
8/8 - 3/8 = 5/8

Si a tres cuartos (3/4) le quitamos un octavo (1/8). ¿Cuál es el resultado?

Como un cuarto (1/4) es equivalente a (2/8) entonces (3/4) es equivalente a seis octavos (6/8). Cabe mencionar que la transformación de cuartos a octavos los niños lo realizan manipulando su material a través de equivalencias de áreas, encontrándose así un común denominador que es 8 y se procede a realizar la resta. Numéricamente queda expresado así:

$$3/4 - 1/8 = 6/8 - 1/8 = 5/8$$

Gráficamente queda de la siguiente forma.



3/4 equivale a 6/8 menos 1/8 = 5/8

Las situaciones hasta aquí presentadas son algunas de las muchas alternativas que se proponen para trabajar e iniciar el estudio de las fracciones como parte de un todo, así como desarrollar temas afines a los números fraccionarios. Por mencionar algunos: equivalencia de fracciones, fracciones propias, fracciones impropias, fracciones mixtas, suma y resta de fracciones etc.,utilizando para ello materiales concretos y en situaciones de juego.

4.4. Trabajo con suma de fracciones mayores que la unidad utilizando resaques Montessori.

Primero que los alumnos conozcan los siguientes materiales:

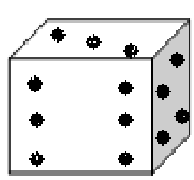
- Material Montessori de resaques.
- Un dado común que tenga marcados los puntos del uno al seis.
- Un dado del primer jalón, segundo o tercer jalón de las fracciones comunes (opcional de acuerdo al avance de los niños).

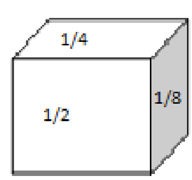
Conociendo los materiales presentaré cómo sumar fracciones a partir del juego que realizaron cuatro niños, alumnos que cursan el sexto grado de la escuela primaria "Nicolás Bravo" ubicada en la Colonia Copalera del municipio de Chimalhuacán Estado de México.

La consigna consiste en ver quién de los cuatro niños es el que logre primero formar tres pasteles (tres enteros unidad).

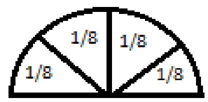
Los participantes para este juego son: Karla, Luis Angel, Laura Cecilia y Enrique.

Toca en primer turno a Karla.
Lanza los dados a la vez, el de puntos y del primer jalón de las fracciones comunes.
El resultado fue:





En esta primer jugada Karla obtuvo 4 veces 1/8. Del material de resaques toma cuatro piezas de 1/8 que equivale a 4/8.



= 4/8

Las notaciones se registran en una tabla. Ver tabla 1.

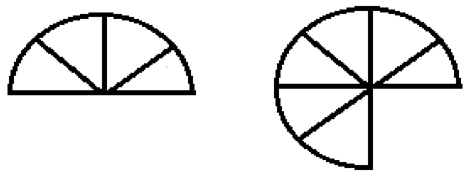
Nombres	Primer jugada
Karla	4 veces 1/8 = 4/8
Luis Ángel	
Laura Cecilia	
Enrique	

La siguiente tirada es para Luis Ángel, al lanzar los dados su resultado fue:

Seis veces 1/8

Nombres	Primer jugada
Karla	4 veces 1/8 = 4/8
Luis Ángel	6 veces 1/8 = 6/8
Laura Cecilia	
Enrique	

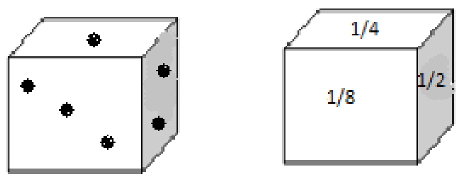
Al mostrar y formar sus resaques, los niños se dieron cuenta que la fracción que obtuvo Luis Ángel fue mayor que la que obtuvo Karla por lo que deducen que 4/8 es menor que 6/8 ó 6/8 es mayor que 4/8.



4/8 < 6/8

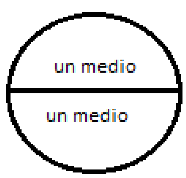
cuatro octavos es menor que seis octavos de pastel.

El turno es para Laura Cecilia, al tirar los dados su resultado fue:



dos veces 1/2

Del material de resaques toma dos piezas de un medio (1/2).Laura Cecilia observa que con sus dos piezas puede formar un entero y pide hacer el intercambio.

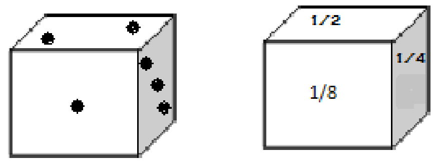


igual a dos medios 2/2 igual a un entero.

Se hacen las notaciones en la tabla de registros. Tabla 3.

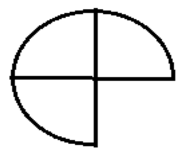
Nombres	Primer jugada
Karla	4 veces 1/8 = 4/8
Luis Ángel	6 veces 1/8 = 6/8
Laura Cecilia	2 veces 1/2 = 2/2
Enrique	

El turno para realizar la siguiente tirada es para Enrique, que al lanzar los dados el resultado fue:



tres veces 1/4

Del material de resaques toma 3 piezas de ¼ para ir formando su pastel.



3/4 de pastel

Se hacen las anotaciones correspondientes en la tabla 4.

Nombres	Primer jugada
Karla	4 veces 1/8 = 4/8
Luis Ángel	6 veces 1/8 = 6/8
Laura Cecilia	2 veces 1/2 = 2/2
Enrique	3 veces 1/4 = 3/4

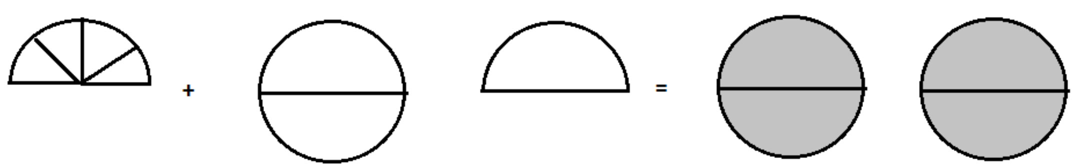
Observando la tabla y concretamente sus pasteles por acuerdo de los niños en la primer jugada, Laura Cecilia es la que ha logrado formar un pastel entero (2/2); con un empate le siguen Luis Ángel y Enrique si formar 6/8 y 3/4 (fracciones equivalentes) de pastel respectivamente, en último lugar se encuentra Karla con 4/8 de pastel formado.

Veamos que sucede en la segunda jugada.

Los resultados fueron los siguientes, mismos que se registraron en la tabla 5.

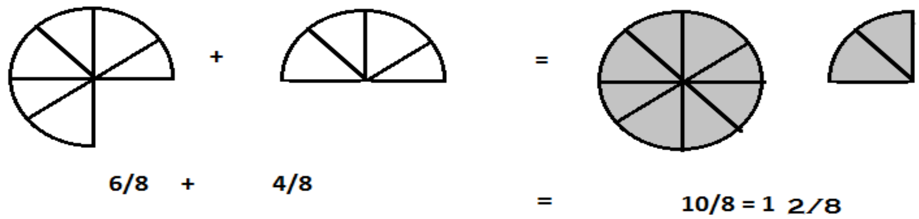
Nombres	Primer jugada	Segunda jugada
Karla	4/8	3 veces 1/2 es decir 3/2
Luis Ángel	6/8	4 veces 1/8 es decir 4/8
Laura Cecilia	2/2	2 veces 1/8 es decir 2/8
Enrique	3/4	2 veces 1/4 es decir 2/4

Haciendo un análisis de la tabla 5 y observando su material de resaques en la formación de pasteles, los niños deducen que Karla fue la que obtuvo la fracción mayor al lanzar los dados y formar un pastel entero más un medio, es decir pastel y medio(1 ½). Asimismo Karla se da cuenta que con los 4/8 de pastel de su primer jugada y el medio de la segunda jugada forma otro pastel; Karla hasta esta jugada lleva 2 pasteles formados.

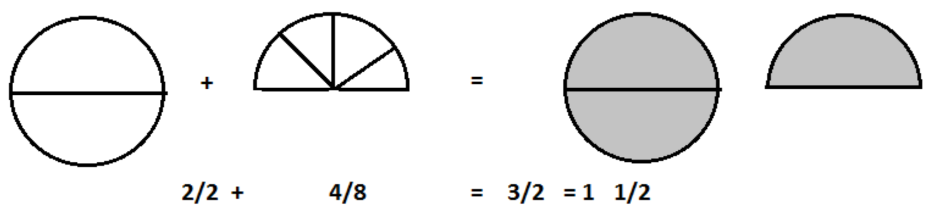


4/8 + 3/2 = 4/2 = 2 enteros
Primera jugada segunda jugada

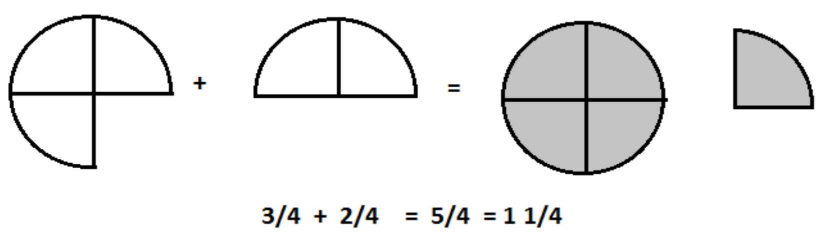
Los demás participantes también van sumado los resultados obtenidos de las dos jugadas. Así, Luis Ángel junta sus resaques y observa que 6/8 de la primer tirada más 4/8 de la segunda da un total de 10/8, una fracción impropia ó que es lo mismo un entero dos octavos que numéricamente se escribe 1 2/8. Gráficamente queda así:



De la misma manera Laura Cecilia realiza la suma de sus jugadas 2/2 más 4/8. Con 4/8 encuentra un equivalente de los materiales de resaques que es igual a ½, formando en su totalidad 3/2 es decir un pastel entero más una mitad. (1 1/2)



Enrique hace lo mismo al sumar ¾ de la primer jugada más 2/4 de la segunda, haciendo un total de 5/4, formando 1 pastel más 1/4. 1 1/4.



Veamos ahora los resultados de los niños al hacer su tercer jugada.

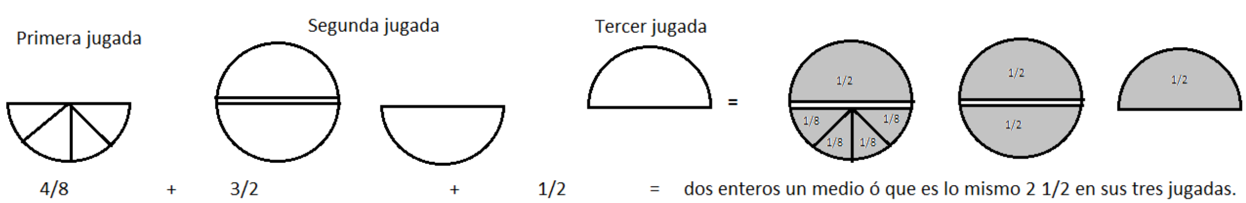
Para ello se tienen los registros en la tabla 6.

Nombres	Primer jugada	Segunda jugada	Tercer jugada
Karla	4/8	3 veces 1/2 es decir 3/2	Una vez 1/2 es decir 1/2
Luis Ángel	6/8	4 veces 1/8 es decir 4/8	4 veces 1/4es decir 4/4
Laura Cecilia	2/2	2 veces 1/8 es decir 2/8	5 veces 1/2 es decir 5/2
Enrique	3/4	2 veces 1/4 es decir 2/4	5 veces 1/8 es decir 5/8

Los niños al hacer una reflexión de los resultados obtenidos por cada uno de ellos y observar como van formando pasteles o partes de pastel en cada jugada, observan que Laura Cecilia es la ganadora al formar primero los tres pasteles más una fracción sobrante.

Veamos el siguiente análisis de cómo cada participante fue formando sus pasteles, en forma gráfica (concreta) y numéricamente.

Los resultados que obtuvo Karla en sus tres jugadas fueron las siguientes:

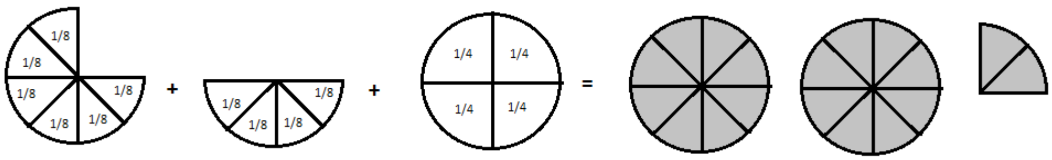


Numéricamente el algoritmo de la suma de fracciones que ha expresado como

$4/8 + 3/2 + 1/2 = 1/2 + 3/2 + 1/2 = 5/2 \quad = \quad 2\ 1/2$

fracción impropia — Número ó mixto — fracción mixta

Luis Angel hasta su tercer jugada obtuvo los siguientes resultados:



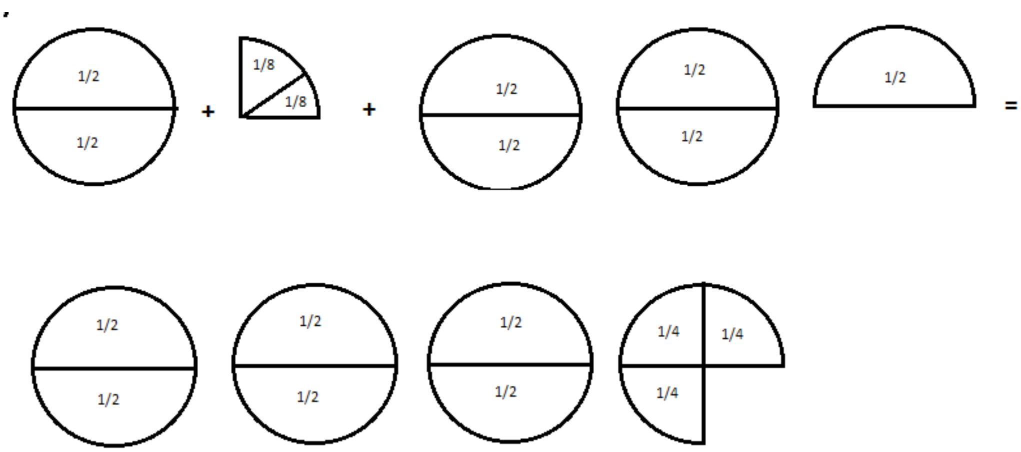
Númericamente queda así:

6/8 + 4/8 + 4/4 = 6/8 + 4/4 + 8/8 = 18/8 = 2 2/8

$\underbrace{\text{4/4 = 6/8 + 4/4}}_{\text{Fracciones equivalentes}}$

Sumando sus resaques encuentra que ha formado, dos pasteles más una fracción de 2/8 de pastel o también dos enteros un cuarto de pastel, simplificando la fracción 2/8.

Laura Cecilia hasta su tercer jugada tiene los siguientes resultados, resultando ella la ganadora veamos porque.



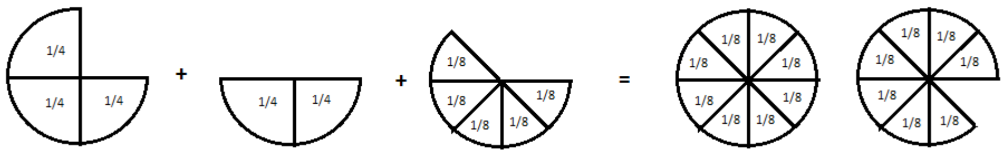
3/2 + 2/8 + 5/2 = tres enteros más tres cuartos, (resultado gráfico)

Realizando la suma de fracciones queda de la siguiente manera.

$\frac{2}{2}+\frac{2}{8}+\frac{5}{2}=\frac{8}{8}+\frac{2}{8}+\frac{20}{8}=\frac{30}{8}=3\frac{6}{8}=3\frac{3}{4}$ simplificando.

Con los resultados arriba señalados se comprueba que Laura Cecilia es la ganadora, ya que en una ronda de tres jugadas, formó tres pasteles más tres cuartos de otro pastel.

De la misma manera Enrique el cuarto participante, comprueba sus resultados.



3/4 + 2/4 + 5/8 Obteniendo como resultado un pastel más una fracción de 7/8 de pastel

Realizando la suma de fracciones.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{5}{8}=\frac{6}{8}+\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

Enrique formó 1 7/8 de pastel en sus tres jugadas.

Resumiendo…

Observar en la tabla 7 los resultados de cada jugada y los totales.

Nombres	Primer jugada	Segunda jugada	Tercer jugada	Total de pasteles formados
Karla	4/8	3/2	1/2	2 1/2
Luis Angel	6/8	4/8	4/4	2 2/8
Laura Cecilia	2/2	2/8	5/2	3 3/4
Enrique	3/4	2/4	5/8	1 7/8

Los niños al analizar la tabla sacan por conclusión que Laura Cecilia fue la que formó más pasteles y Enrique el que menos pasteles formó.

4.5. Resta de fracciones utilizando resaques Montessori.

Para el caso de la resta se utiliza la misma estrategia, sólo que ahora se parte de equis entero o enteros para llegar a la unidad ó que no sobre nada mediante la consigna. Veamos el caso de tres niños realizando resta de fracciones utilizando resaques con el primer jalón de las fracciones comunes.

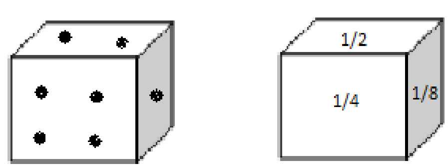
Los participantes en este juego son: Silvestre, Denisse y Daniel.

Se les proporciona 3 unidades entero que representaran los pasteles a cada niño. La consigna es quién de los tres participantes come primero sus 3 pasteles utilizando el material de resaques Montessori.

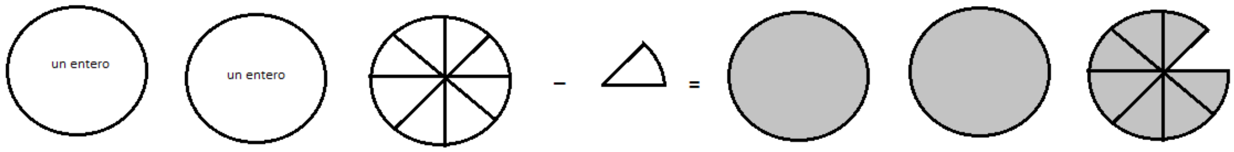
Materiales a utilizar para la realización del juego.

-Material de resaques Montessori del primer jalón de las fracciones comunes.
-1 dado de puntos.
-1 dado del primer jalón de las fracciones comunes (1/2,1/4 y 1/8).
-9 pasteles que representa cada uno el entero unidad.

Después de haberse realizado el sorteo toca el primer turno a Daniel. Al tirar sus dados el resultado fue:



Una vez 1/8
Daniel realiza el siguiente procedimiento cambia uno de sus tres pasteles por su equivalente en octavos.



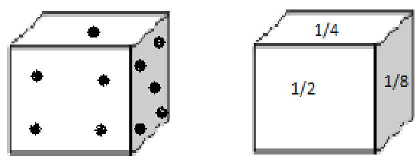
Un entero igual a 8/8
3 - 1/8 = 2 7/8

Se recomienda para el caso de la resta, que cada participante registre sus resultados en una tabla, como lo hizo Daniel. Ver tabla 1.

Tabla 1

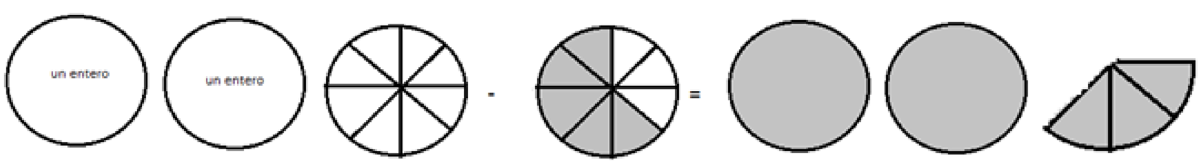
Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera	3	1/8	2 7/8

Toca el turno a silvestre, que al tirar sus dados el resultado fue:



Cinco veces 1/8 es decir 5/8

Silvestre cambia del material de resaques uno de sus pasteles por octavos y de éste quita 5/8. Gráficamente queda así:



Tres enteros menos cinco octavos igual dos enteros tres octavos

Al realizar el algoritmo de la resta queda expresado numéricamente así:

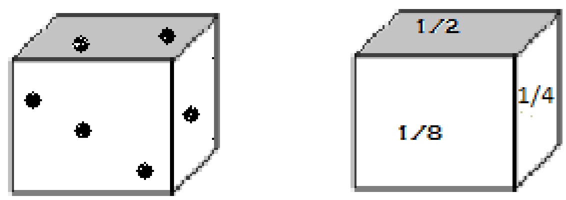
$$3 - \frac{5}{8} = \frac{24}{8} - \frac{5}{8} = \frac{19}{8} = 2\ \frac{3}{8}$$

Equivalencia de tres enteros a octavos

Silvestre hace sus notaciones en su tabla:

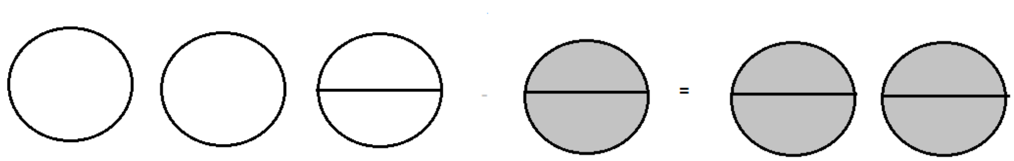
Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera	3	5/8	2 3/8

El turno es para la niña Denisse, que al momento de lanzar sus dados obtiene como resultado:



Dos veces ½ ó que es lo mismo 2/2

De sus tres pasteles, Denisse cambia uno en medios y procede quitar los dos medios (2/2), resultado de su jugada.



3 enteros menos 2/2 = dos enteros = dos enteros ó 4/2

Realizando la resta

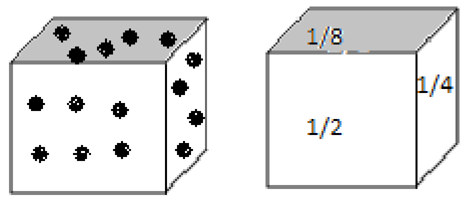
$$3 - \frac{2}{2} = \frac{6}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ enteros}$$

Denisse hace sus notaciones en unta tabla.

Numero de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera	3	2/2	4/2 = 2

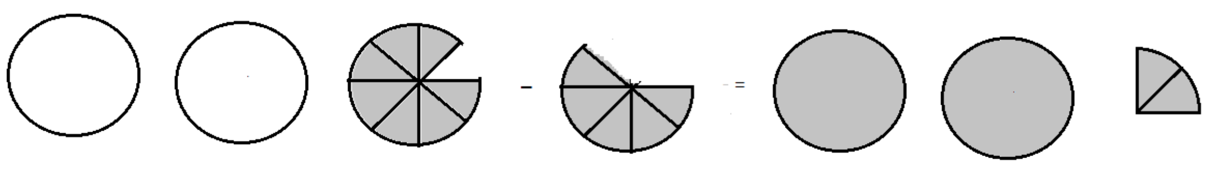
Se procede continuar con el juego de comer pasteles.

Daniel realiza su segunda jugada, tira sus dados, el resultado fue:



Cinco veces $\frac{1}{8}$, es decir $\frac{5}{8}$.

Procede quitar $\frac{5}{8}$ de $2\ \frac{7}{8}$

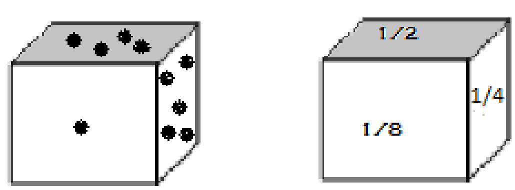


2 enteros 7/8 menos $\frac{5}{8}$ igual a 2 enteros $\frac{2}{8}$

Numéricamente …

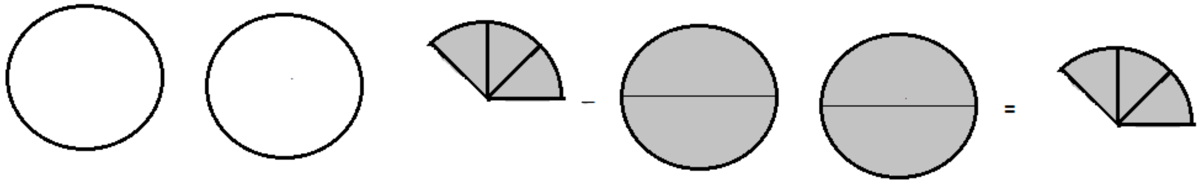
$2\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{23}{8} - \frac{5}{8} = \frac{18}{8} = 2\ \frac{2}{8}$

Toca el turno a Silvestre, el resultado que obtuvo al tirar sus dados fue:



Cuatro veces $\frac{1}{2}$, es decir $\frac{4}{2}$

De sus $2\ \frac{3}{8}$ de pastel, quita $\frac{4}{2}$ que es el equivalente a dos pasteles enteros .



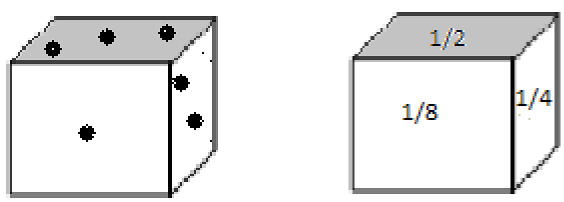
Dos pasteles $\frac{3}{8}$ menos cuatro medios $\frac{4}{2}$ igual a $\frac{3}{8}$ de pastel

Realizando la resta de fracciones, la operación queda expresada así:

$$2\frac{3}{8} - \frac{4}{2} = \frac{19}{8} - \frac{16}{8} = \frac{3}{8}$$

A Silvestre después de su segunda jugada le sobra $\frac{3}{8}$ de pastel.

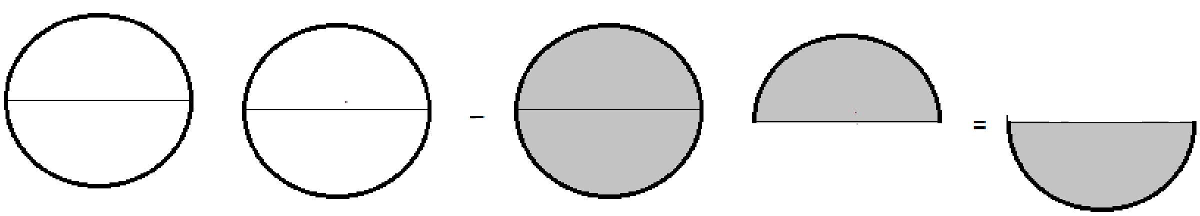
Ahora es Denisse quien lanza sus dados. El resultado es:



Tres veces un medio es decir $\frac{3}{2}$

Denisse procede quitar 3/2 del estado final de la primera jugada que fue 2/2

Gráficamente queda de la siguiente manera:



Cuatro medios menos tres medios igual a un medio

$\frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Después de haber realizado dos tiradas cada uno de los participantes, los registros quedan de la siguiente manera:

TABLA 1 NOMBRE: DANIEL

Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera jugada	3	$\frac{1}{8}$	$2\ \frac{7}{8}$
Segunda jugada	$2\ \frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$2\ \frac{2}{8}$

TABLA 2 NOMBRE: SILVESTRE

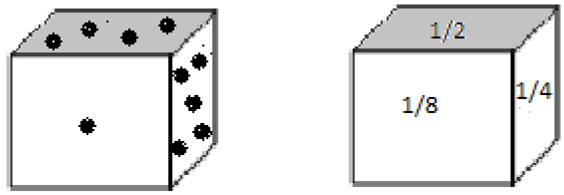
Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera jugada	3	$\frac{5}{8}$	$2\ \frac{3}{8}$
Segunda jugada	$2\ \frac{3}{8}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{8}$

TABLA 3 NOMBRE: DENISSE

Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera jugada	3	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{2}$
Segunda jugada	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

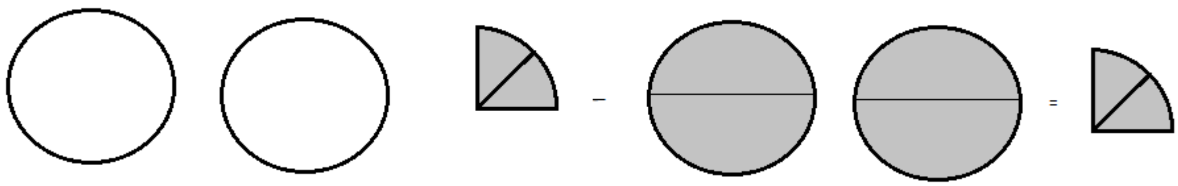
Haciendo un análisis de los resultados en las tablas de cada uno de los participantes, ninguno ha terminado de comer sus pasteles, por lo que se reinicia el juego con una tercer jugada.

Daniel tiene $2\ \frac{2}{8}$ de pastel y al realizar su tercera jugada su resultado fue:



Cuatro veces un medio es decir $\frac{4}{2}$

Expresando gráficamente:

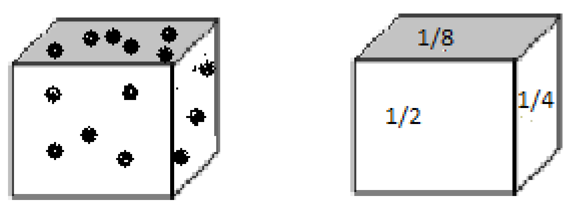


Dos pasteles dos octavos menos cuatro medios igual a 2/8 de pastel

Expresado numéricamente:

$2\ \frac{2}{8} - \frac{4}{2} = \frac{18}{8} - \frac{16}{8} = \frac{2}{8}$

El turno es para Silvestre. Al tirar sus dados el resultado fue:



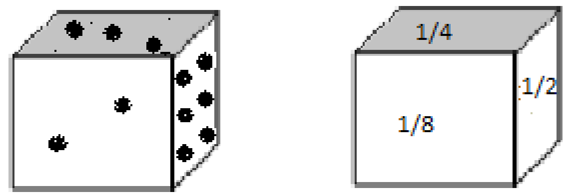
Seis veces un octavo es decir $\frac{6}{8}$

Como Silvestre hasta antes de esta jugada tenía 3/8 de pastel; con el resultado obtenido de la tercera jugada ha terminado de comer pasteles.

$\frac{3}{8} - \frac{6}{8} = 0$ (cero pasteles)

Veamos que sucede con Denisse en su tercer tirada.

Ella realiza su jugada y el resultado es como lo muestran los dados.



Tres veces un cuarto es decir $\frac{3}{4}$

Denisse tenía en su estado final de la segunda jugada $\frac{1}{2}$ de pastel que es equivalente a $\frac{2}{4}$ del mismo pastel. Al obtener $\frac{3}{4}$ en su tercer jugada, una fracción mayor que $\frac{2}{4}$; ella también termina de comer el resto de pastel.

$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = 0$ (cero pasteles)

Después de haber realizado tres jugadas, las tablas de registros de cada participante quedan de la siguiente manera.

Daniel

Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera jugada	3	$\frac{1}{8}$	$2\ \frac{7}{8}$
Segunda jugada	$2\ \frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$	$2\ \frac{2}{8}$
Tercera jugada	$2\ \frac{2}{8}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{2}{8}$

Silvestre

Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera jugada	3	$\frac{5}{8}$	$2\ \frac{3}{8}$
Segunda jugada	$2\ \frac{3}{8}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{8}$
Tercera jugada	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	______

Denisse

Número de jugadas	Estado inicial	Quitar	Estado final
Primera jugada	3	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{2}$
Segunda jugada	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tercera jugada	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	______

Haciendo un análisis de las tablas de cada uno de los participantes, se observa que el ganador de este juego fue Silvestre, ya que él fue quien terminó primero con sus pasteles. El segundo lugar fue para Denisse y el tercero para Daniel.

Realizar este tipo de juegos resulta agradable e interesante para los niños, motivándolos a introducirse al estudio de las fracciones así como la utilización de los algoritmos de la suma y resta de números fraccionarios.

En el tercer ciclo de educación primaria los niños ya están familiarizados con el uso de fracciones como medios, tercios, cuartos , quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos, por lo que es recomendable utilizar para otros juegos (utilizando las mismas estrategias antes mencionadas) los dados que impliquen el segundo, tercer y cuarto jalón de las fracciones comunes.

Concluyendo, es recomendable utilizar materiales de resaques para que los niños observen concretamente como se conforma el entero unidad y como al fraccionarlo permite el trabajo con fracciones propias, asimismo abordar diversos contenidos que involucra el estudio de las fracciones equivalentes, fracciones impropias, números mixtos, la operatividad de la suma y resta de fracciones y todo esto a través del juego.

4.6. Situaciones de reparto con montones – unidad.

En este apartado se incrementa el uso de montones – unidad[41] para ilustrar los diferentes tipos de fracciones, a partir de situaciones de reparto. Con esto se pretende que el alumno comprenda que hay enteros singulares (un pastel, una hoja de papel, un metro de jerga, etc..) y enteros plurales que les llamaremos montones – unidad (un equipo de futbol, un grupo musical, un grupo de alumnos, una bolsa de canicas, una bolsa de dulces, etc.)

En esta propuesta de trabajo con montones – unidad utilizaremos dulces, es decir material concreto.

Material necesario.

- Dulces (6 bolsas de 1 Kg.)
- 6 Pelotas de vinil

Propòsitos:

- Que los alumnos construyan conceptos relacionados con las fracciones comunes a partir de los montones – unidad.

Descripción del juego.

- Se forman equipos de trabajo de 4 a 6 elementos.
- A cada equipo se le proporcionará una bolsa de dulces y se invita a sus integrantes a jugar con ellos, a partir de la tonada "había un navío, navío cargado de dulces". Para ellos se da a cada niño un montón – unidad de 20 dulces.
- Se pide a los niños que repartan sus dulces en montones iguales.
- Una vez que han terminado de realizar está acción se pide a los alumnos de diferentes equipos que mencionen como hicieron su reparto. Como la consigna fue repartir sus dulces en montones iguales, habrán niños que

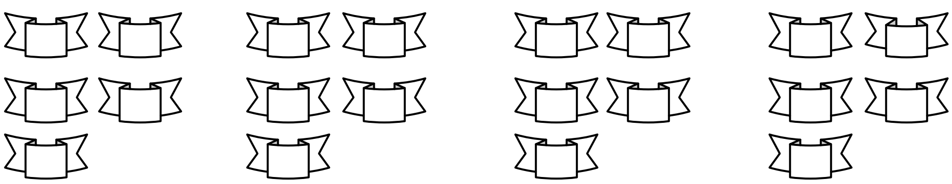
[41] Caballero, Ramos Romeo Froylán (2000). Aritmética con regletas de colores.Serie Museo Didáctico de la matemática. México, 2ª edición. pp.45-47

hicieron sus repartos en medios (2 montones de 10 dulces cada uno), otros habrán repartidos en cuartos (4 montones de 5 dulces cada uno), otros en quintos (5 montones de 4 dulces cada uno), otros en décimos (10 montones de 2 dulces cada uno).

1er Caso ⇨ 20 dulces forman el montón – unidad

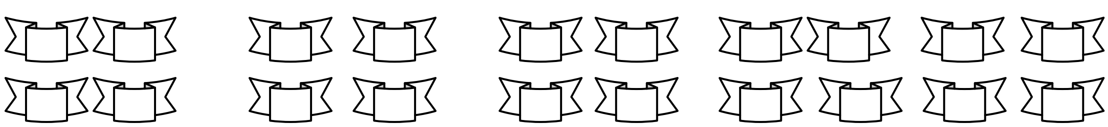
Un medio de dulces | Un medio de dulces

2º Caso ⇨ 20 dulces forman el montón – unidad



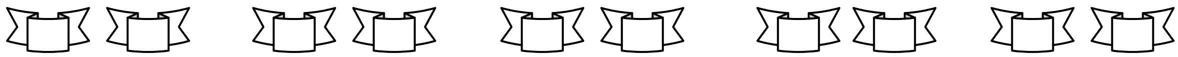
Un cuarto de dulces | Un cuarto de dulces | Un cuarto de dulces | Un cuarto de dulces

3er. Caso ⇨ 20 dulces forman el montón – unidad.

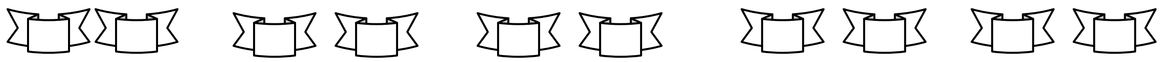


Un quinto de dulces | Un quinto de dulces | Un quinto de dulces | Un quinto de dulces | Un quinto de dulces

4º Caso ⇨ 20 dulces forman el montón – unidad



Un décimo de dulces	Un décimo de dulces	Un décimo de dulces	Un décimo de dulces	Un décimo de dulces



Un décimo de dulces	Un décimo de dulces	Un décimo de dulces	Un décimo de dulces	Un décimo de dulces

Después de esta actividad. Se pide a los niños que repartan sus 20 dulces en dos montones iguales y se pregunta.¿ Cómo podremos llamar a cada montón?(es decir la mitad de 20 que es 10) o un medio de un entero plural.

A continuación el profesor invita los alumnos a jugar al navío, a partir del reparto que los niños tienen a la vista y se les menciona la consigna, piensen cuántos dulces habrán en un medio de 20, y se lanza la pelota al tiempo que todos dicen la tonada “ había un navío, navío cargado de”. A quien le caiga la pelota debe de decir algo equivalente a “ en un medio de 20 hay 10 dulces “, después ese niño pregunta cuántos dulces habrá en dos medios de 20 y lanza la pelota.

Para este juego es conveniente considerar los montones que formó cada equipo, medios, cuartos, quintos y décimos, dando así la variedad al juego y por consecuencia hacerlo más interesante y entretenido para los niños.

Cuando los alumnos han comprendido el juego se procede a trabajar con diferentes montones – unidad que fije el maestro a los mismos alumnos. Por ejemplo con 10 dulces, 16 dulces, 25 dulces, 30 dulces, 36 dulces, 40 dulces, 45 dulces, etc..

Hasta aquí se ha trabajado con fracciones menores o igual al entero – unidad. ¿Qué se hace cuando se piden fracciones que rebasen el entero, es decir, mayor que uno?

Retomando el juego anterior donde el montón – unidad son 20 dulces, se pueden hacer los siguientes cuestionamientos.

¿Cuántos dulces hay en 3 medios de 20?, a lo que e niño o niña deberá contestar algo similar a “ en 3 medios de 20 habrán 30 dulces” (ya que cada medio de 20 dulces tiene 10).

¿Cuántos dulces habrán en 5 cuartos de 20?
Como un cuarto de 20 dulces son 5 . el niño contestará así “ en 5 cuartos de 20 habrán 25 dulces”
¿Cuántos dulces habrán en 8 quintos de 20?
“ en 8 quintos de 20 habrán 32 dulces”

¿Cuántos dulces habrán en 15 décimos de 20?
“ en 15 décimos de 20 habrá 30 dulces”

Este tipo de situaciones y la utilización del material concreto favorece que los niños puedan fraccionar a partir de montones – unidad y confrontar ellos mismos todos los posibles resultados haciendo que su aprendizaje sea significativo y manejando números fraccionarios.

A través del juego se observará que se cumple con las dos condiciones en el reparto de montones – unidad : la equitatividad y la exhaustividad (partes iguales y que no sobre nada).

Otros ejemplos de situaciones problemáticas que se pueden plantear en el aula son las siguientes:

a) Representar con dulces 6 séptimos de 35
b) Representar con dulces 8 novenos de 81
c) Representar con dulces 6 décimos de 40
d) Representar con dulces 12 cuartos de 16
e) Representar con dulces 14 quintos de 20

Duración del juego. Se recomienda que cada sesión de trabajo tenga una duración de 30 a 60 minutos, dependiendo del interés del niño. El juego se repite el número de sesiones que el profesor considere conveniente y que la mayoría de los niños jueguen sin equivocarse hasta comprender como repartir montones – unidad utilizando diferentes fracciones.

¿Cómo trabajar con tercios, sextos y novenos?

Material necesario

- 6 bolsas de dulces de 1 kg
- 6 pelotas de vinil

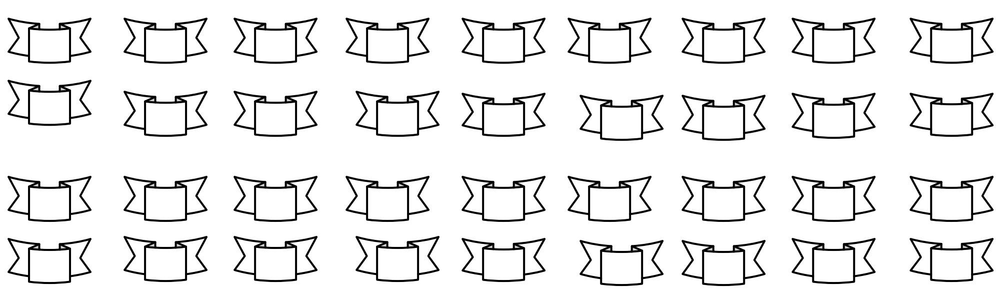
Descripción del juego

- Se forman equipos de trabajo de 4 a 6 elementos
- A cada equipo se le proporcionara una bolsa de dulces y se indica a sus integrantes que forman un montón – unidad de 36 dulces.

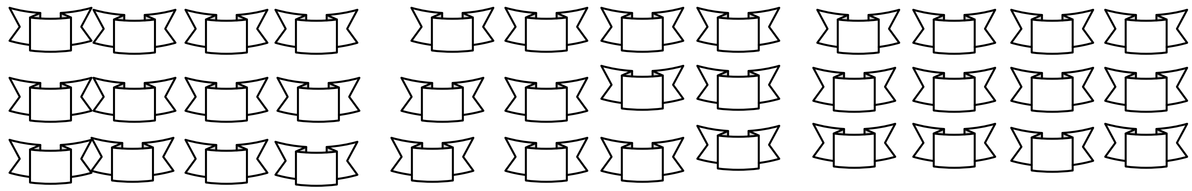
Una vez que los equipos hallan formado su montón – unidad de 36 dulces, se les invita a los alumnos de cada equipo realicen repartos en tercios, sextos y novenos.

A continuación se ilustra los repartos que hicieron los niños ante la consigna.

36 dulces forman el montón – unidad

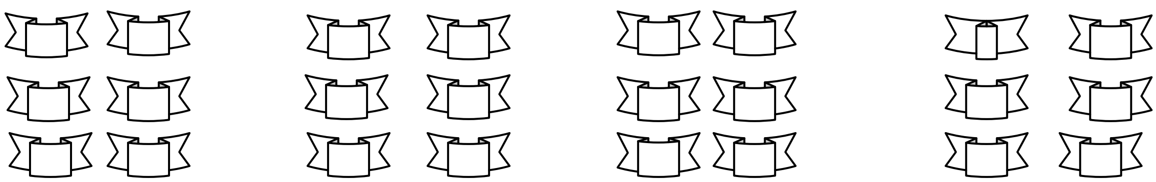


Para repartir el montón – unidad en tercios los niños formaron montones de 12 dulces.



Un tercio de 36 dulces. Un tercio de 36 dulces. Un tercio de 36 dulces.

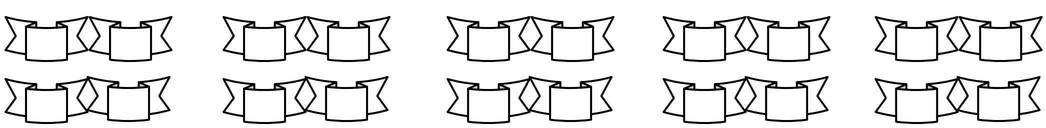
Para la situación de repartir el montón – unidad en sextos, se formaron 6 montones de 6 dulces cada uno.



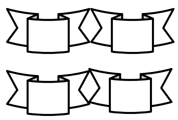
Un sexto de 36 dulces Un sexto de 36 dulces Un sexto de 36 dulces Un sexto de 36 dulces

Un sexto de 36 dulces Un sexto de 36 dulces

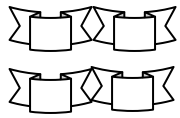
Para repartir el montón – unidad en novenos, los niños formaron 9 montones de cuatro dulces cada uno. Se les preguntó ¿Qué fracción representaba cada montón? Los niños argumentaron que dividieron los 36 dulces entre 9 montones, de los cuales dio como resultado 4 dulces en cada montón . Asimismo dedujeron que cada montón representa 1/9 en forma de fracción y que la suma de los 9/9 conforman el montón-unidad. Los montones quedaron conformados así.



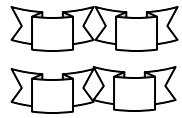
Un noveno de 36 dulces Un noveno de 36 dulces Un noveno de 36 dulces Un noveno de 36 dulces Un noveno de 36 dulces



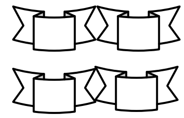
Un noveno de 36 dulces



Un noveno de 36 dulces



Un noveno de 36 dulces



Un noveno de 36 dulces

Después de esta actividad el profesor invita a los alumnos a jugar al navío, para reforzar el manejo de fracciones a partir de situaciones de reparto, utilizando montones – unidad.

Para el desarrollo de este juego el profesor manejará diferentes fracciones así por ejemplo se les cuestionará, que piensen cuántos dulces habrán en un medio de 36, y se lanza la pelota a uno de sus compañeros al tiempo que todos dicen la tonada "había un navío, cargado de". A quien le caiga la pelota debe decir algo equivalente a "en un medio de 36 dulces hay 18".

Después ese niño pregunta ¿Cuántos dulces habrán en un cuarto de 36 y lanza la pelota al mismo tiempo que todos dicen la tonada " había un navío, cargado de". A quien le caiga la pelota mentalmente hará sus repartos en montones – unidad de 4 dulces, y dar respuesta "en un cuarto de 36 dulces hay 9".

Antes de continuar con el juego, el profesor hará una intervención para preguntar ¿Con 36 dulces puedo formar montones – unidad de 5?

Ante este cuestionamiento los niños tienen que buscar divisores, como 5 no es divisor de 36 la respuesta es **no.**

Se prosigue con el juego, el niño que tiene la pelota le toca preguntar. ¿Cuántos dulces habrán en un sexto de 36? y lanza la pelota al mismo tiempo que todos dicen la tonada "había un navío, cargado de". A quién le caiga la pelota, hará sus repartos mentalmente en montones – unidad de 6, el niño contestará así "en un sexto de 36 dulces hay 6".

El profesor de nueva cuenta preguntará ¿Con 36 dulces se pueden hacer repartos iguales de 7 y 8 dulces?

Los niños quedan pensativos y responden **no.**

El juego continúa y el niño que se quedó con la pelota, pregunta ¿Cuántos dulces habrán en un noveno de 36 y lanza la pelota al mismo tiempo que todos dicen la tonada "había un navío, cargado de". Al niño o niña que le caiga la pelota responderá así " en un noveno de 36 dulces hay 4"

Como la consigna era trabajar hasta novenos el juego se da por concluido.

Cabe mencionar que los juegos que se lleven a cabo en el aula con los niños, deben ser planeados siguiendo una secuencia didáctica y abordando los temas a desarrollar , programados con anticipación para no caer en la improvisación, así también como el uso de diversos materiales como fichas de colores, dados, cubos de madera, dulces, canicas, etc.

Para el juego de 36 dulces el profesor puede hacer los siguientes cuestionamientos.

¿De qué otra manera puedo formar montones- unidad diferentes de medios, tercios, cuartos, sextos y novenos?

Los niños tendrían que experimentar con sus dulces para formar montones-unidad diferentes a los mencionados en el juego.

Las respuestas serían 2 montones – unidad de 3 dulces "doceavos" y 18 montones – unidad de 2 dulces "dieciochoavos.

Otros cuestionamientos para este juego son los siguientes:

¿Cuántos dulces hay en 3 medios de 36?

¿Cuántos dulces hay en 6 cuartos de 36?

¿Cuántos dulces habrá en 5 novenos de 36?

¿Cuántos dulces hay en 1 doceavo de 36?

¿Cuántos dulces hay en 5 tercios de 36?

¿Cuántos dulces hay en 7/6 de 36?

Otras variantes del juego

- Se juega con montones – unidad que permitan fraccionar en quintos y décimos (10, 20, 30, 40, etc.)
- Se juega con montones – unidad que permitan fraccionar en séptimos (7, 14, 21, 28, etc.)

Sugerencias para el trabajo en el aula de los montones – unidad.

- Se recomienda que los niños a través del juego realicen repartos de montones – unidad (entero plural) en montones iguales, hasta agotar todas las combinaciones posibles.
- Después de que los niños hayan realizado sus repartos, cuestionarlos cómo lo hicieron, y qué nombre recibe cada uno de los montones – unidad.
- Cuando los alumnos han comprendido el juego en situaciones de reparto (montones iguales) se piden fracciones que rebasen el entero (manejo de fracciones impropias o mixtas)
- Para el desarrollo de los juegos es importante contar con suficiente material concreto (dulces, canicas, botones, fichas de colores, monedas, dados, regletas de 1cm…etc.)
- El profesor invita a los alumnos salir al patio a jugar al navío, para poner en práctica lo que el niño ha aprendido en el aula, sobre el fraccionamiento de montones – unidad y el manejo de fracciones de diferente denominador.
- Ese tipo de juego favorece el desarrollo mental de los niños y permite adquirir conocimientos que van de lo concreto a lo abstracto.
- Otra variante del juego consiste, que los niños salgan al patio y formen equipos (montones – unidad) tomados de las manos, que acepten relaciones que se piden; por ejemplo: medios, cuartos, octavos; tercios, sextos o quintos y décimos, dependiendo del número de alumnos.

Para este juego, que cada integrante de cada equipo se vaya rolando para mencionar las relaciones que se piden o el profesor sea quien dirija la actividad; gana el equipo que primero forme sus montones – unidad.

CONCLUSIONES

Hoy en día y como resultado de muchas investigaciones se evidencia que para llegar a la comprensión del concepto de fracción hay que recorrer un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones y que en relación a la enseñanza, es conveniente considerar objetivos a corto y largo plazo considerando cada uno de los significados.

Tomando como referencia los libros de texto de matemáticas del ciclo escolar 2011-2012, en quinto grado de 51 lecciones; 19 están relacionados con temas de fracciones, mismos que representan un 37%. En sexto de un total de 46 lecciones; 18 también lo están, representados por un 39% del total de los contenidos. Asimismo se inserta la suma y resta de fracciones en quinto grado; la multiplicación y la división en sexto grado; podemos notar que el tema de fracciones tiene una carga curricular importante en el programa de estudios, por lo que es necesario implementar estrategias didácticas que orienten la conceptualización y aplicación de las mismas que fue uno de los objetivos de ésta investigación.

Llegar a conocer funcionalmente cada uno de los significados o interpretaciones del “mega” concepto de fracción, conlleva el dominio de diferentes estructuras cognitivas, entendidas como esquemas de pensamiento subyacente a las acciones necesarias para desarrollar tareas que implican la idea de número racional para cualquiera de estas interpretaciones.

Considerando la multiplicidad de significados y las dificultades que enfrenta el profesor en la enseñanza de las fracciones, en la “Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones en el Tercer Ciclo” he utilizado recursos didácticos como el tangram, material Montessori de resaques y el uso de montones-unidad a través de juego, lo que permitió a los alumnos apropiarse del concepto de fracción y plantear la resolución de problemas. Como resultado de las actividades realizadas en el aula con los materiales antes mencionados, se mostró más disposición para el trabajo y cambios de actitud para abordar temas relacionados con las fracciones. Así por ejemplo con el Tangram, se abordaron significados como parte-todo, medida, fracciones equivalentes, fracciones propias, suma de fracciones y porcentaje.

Además, con el material Montessori de resaques la relación parte-todo, equivalencia de áreas, fracciones propias, impropias, números mixtos, equivalencia de fracciones, suma y resta de fracciones y porcentaje. Con montones-unidad, los alumnos construyen conceptos como fracción propia, fracción impropia, equivalencia de fracciones, suma y resta de fracciones, porcentaje así como la comprensión de que hay enteros singulares y enteros plurales.

Es importante que el docente utilice diversos materiales y dinámicas donde propicie la participación en parejas, en equipos y grupal, utilizando como recurso el juego, ya que a través de él se puede aprovechar las experiencias y conocimientos que los niños poseen.

La experiencia que el niño tenga con su medio físico y social, y las observaciones que hagan ellos, así como la utilización de material concreto y el juego favorece que los niños se interesen y motiven para construir conceptos relacionados con los diferentes significados de las fracciones, aunado a las secuencias didácticas que el profesor desarrolle en el aula, son herramientas que le ayudarán a reconstruir el conocimiento, encontrar reglas, formar conceptualizaciones y encontrar solución a los problemas planteados coadyuvando a un aprendizaje significativo a partir de las experiencias que tengan con sus compañeros y como conductor de ese aprendizaje el docente.

Cabe mencionar que uno de los factores que inciden en el proceso de aprendizaje es el enfoque didáctico, y la participación de los alumnos. Esta secuencia didáctica debe propiciar espacios para que sean los propios niños quienes construyan los conocimientos; que sean funcionales y tengan sentido.

En una propuesta didáctica, el profesor juega un papel muy importante ya que se requiere de una intervención concreta y específica, para procurar que los alumnos logren los objetivos deseados. El profesor como conductor y guía en todo momento, debe resguardar las condiciones para que los niños vivan las problematizaciones, formular, proponer, argumentar, ampliar significados, resolver conflictos para generar nuevos conocimientos y validar respuestas ante situaciones problemáticas.

Finalmente, puedo concluir que el uso de materiales concretos y las estrategias didácticas diseñadas en este proceso de investigación favorece significativamente la conceptualización de las fracciones y su aplicación en la resolución de diversos problemas que el alumno enfrenta en los diferentes ámbitos de su vida.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Amelia y del Río Pablo. Educación y desarrollo: la teoría de Vigotsky y la zona de desarrollo próximo. En Coll, C. et, al. (1990). Desarrollo y educación II. Psicología de la educación. Madrid: Alianza.

Ausubel, David P y otros. Significado y aprendizaje significativo. Ed.Trillas, 1983.

Ausubel, David P. Psicología Educativa, Un punto de vista cognoscitivo. Ed. Trillas. México,1983.

Ávila, Alicia y Eduardo Mancera. "Algunos problemas en el aprendizaje de las fracciones (estudio exploratorio en alumnos que finalizan la primaria en el Distrito Federal)". Memoria de la 1ª Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Educación Matemática, Mérida,1987.

Ávila, Alicia y Eduardo Mancera,.La fracción: una expresión difícil de interpretar. En Pedagogía. Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. México,1989.

Balbuena,H., Block,D.,Dávila, M.,y otros. La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas. Taller para maestros. Segunda Parte., México, SEP.

Balbuena, Hugo, Espinoza, Cristina, Saiz,Irma y otros. Descubriendo las fracciones. Laboratorio de Psicomatemática del DIE-CINVESTAV. México, 1984.

Baldor, Aurelio. Aritmética, teórico-práctica.Ed. Cultural Colombiana. Colombia, 1974.

BENM. Antología. La Matemática y su enseñanza en la Escuela Primaria. Módulo I. México, 1999.

Block, David. Memoria de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe, sobre formación de profesores e investigación en México. "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria". México, 1987.

Briseño, Verdugo, Martínez y Struck. Descubre y aprende matemáticas I. Pearson educación, (Facultad de Ciencias UNAM). México, 2000.

Bruner, Jerome S. Desarrollo cognitivo y educación. Ediciones Morata. Madrid, 1998.

Elffers, Joost. El Tangram "Juego de formas chino". Ed. Labor. España, 1989.

Fuenlabrada,Irma.Juega y aprende matemáticas. SEP. Libros del Rincón. México,1992.

Llinares, Salvador C. Y Mª Victoria Sánchez G. Fracciones “La relación parte-todo”. Ed. Síntesis. España,1997.

Marván , Luz María. Hacer matemáticas. Ed. Santillana. México, 2001.

Orton, Anthony. Didáctica de las matemáticas. Ediciones Morata, S.L.Madrid,1998.

Parra, Cecilia., Sainz, Irma. “Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones”. Capítulo III. Ed.. México, 1994.pp. 51-63.

Perero, Mariano. Historia e historias de Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. México, 1994.

Resnick, Lauren B. Ford, Wendy,W. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Ed. Paidós. España, 1991.

Revista de la Universidad Pedagógica Nacional. Vol. 6 Nº 17. México, 1989.

Revista Educación Matemática, CINVESTAV. Vol. 8, Nº 3. México, 1996.

Revista Lux. Pax. Vis. Benemérita Escuela Nacional de Maestros. Vol. III, Nº 30. México, 1999.

SEP. Primaria “ Plan y programas de estudio 1993”. México, 1994.

SEP. Programas de estudio 2009. Quinto Grado. México, 2009.

SEP. Programas de estudio 2009. Sexto Grado. México, 2009.

Temas de matemáticas. Cuaderno 6. Números Racionales. Ed. Trillas. México, 1987.

UPN. Antología Básica. El lenguaje en la escuela I. México 1994.

UPN. Antología Complementaria. El niño: Desarrollo y proceso de construcción del conocimiento. México,1994.

UPN. Antología Básica. Construcción del conocimiento matemático en la escuela.México,1994.

UPN. Antología Complementaria. Construcción del conocimiento matemático en la escuela. México, 1994.

UPN. Antología Básica. Corrientes pedagógicas contemporáneas. México, 1995.

UPN. Antología Básica. El niño: Desarrollo y proceso de construcción del conocimiento. México,1994.

Vergnaud, Gerard. El niño, las matemáticas y la realidad. Ed. Trillas. México, 1997.

Vigotsky, Lev S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Ed. Crítica, Grijalvo. México, 1988.

Waldegg, Guillermina, Villaseñor, Roberto,García, Víctor. Matemáticas en contexto. Grupo Editorial Iberoamérica S.A de C.V. México, 2000.

Werisch.Y.V. Vigotsky y la formación de la mente. Ed. Paidós. España, 1991.