SECRETARIA DE EDUCACION PUBLICA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

UNIDAD SEAD 142

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

LA RECTA NUMERICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES EN EL SEGUNDO GRADO DE EDUCACION PRIMARIA

AMPARO PLASENCIA SANTANA

T E S I N A

P R E S E N T A D A

PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADO EN EDUCACION BASICA

TLAQUEPAQUE, JALISCO. NOVIEMBRE 1988

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACION

PN 11-XI-91

Tlaquepaque, Jal., a 5 de NOVIEMBRE de 1988.

C. PROFR. (A) AMPARO PLASENCIA SANTANA.
P R E S E N T E:

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Titulación de esta Unidad y como resultado del análisis realizado a su -- trabajo intitulado: " LA RECTA NUMERICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES EN EL SEGUNDO GRADO DE EDUCACION PRIMARIA"

, opción TESINA -

a propuesta del asesor C. Profr. (a) MA. GUADALUPE FERNANDEZ TORRES , manifiesto a usted que reúne los - requisitos académicos establecidos al respecto por la Institución.

Por lo anterior, se dictamina favorablemente su trabajo y - se le autoriza a presentar su examen profesional.

A T E N T A M E N T E

PROFR. JAIME L. CORDOVA NUÑEZ.
PRESIDENTE DE LA COMISION DE TITULACION
DE LA UNIDAD UPN 142 TLAQUEPAQUE.

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
S. E. P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
UNIDAD SEAD
TLAQUEPAQUE

Gratitud y reconocimiento a todas las personas que colaboraron en la realización de esta investigación.

A mis Padres y Hermanas.

Al Director y Maestros Asesores.

A los compañeros de estudio y personal de la Escuela Urbana No. 484.

CONTENIDO

INTRODUCCION

Es tan compleja la labor educativa que cada día requiere- de investigaciones que auxilien en el desempeño de esta tarea.

En la acción cotidiana de la clase al desarrollar el programa escolar en el área de las Matemáticas de segundo año, -- surge un problema, ¿por qué le cuesta trabajo al alumno el - aprendizaje de las operaciones fundamentales? Debe considerarse que las dificultades en el aprendizaje del alumno hacen que su rendimiento escolar sea bajo; esto justifica que se investigue el tema propuesto.

A través de una prueba aplicada a las alumnas de una es-- cuela ubicada en la Col. Linda Vista en Tlaquepaque y de nivel de clase media baja, se registraron los datos que ayudaron a - confirmar el problema detectado.

Al realizar la presente investigación en el Area de Matemáticas de segundo año, se intenta buscar una forma que facilite al alumno el poder elaborar los conocimientos básicos que - utilizará en el transcurso del tiempo, esto es por una parte,- y por otra, se pretende proveer al docente de medios didácti-- cos que den un enfoque diferente, es decir, tratar de pasar de un aprendizaje mecanicista a otro más comprensivo a partir de- una reflexión sobre la misma matemática.

La primera parte trata de la Recta Numérica y sus aplicaciones en la adición y el producto.

En la segunda parte se expone la teoría Psicogenética de- Piaget como base principal del trabajo en donde se ve que la - primacía de las operaciones en el desarrollo de las estructu-- ras mentales lleva a la necesidad de una pedagogía nueva, a -- una enseñanza activa basada sobre ellas.

Los trabajos realizados por Piaget y las experiencias que ha tenido con los niños en la edad pre-elemental y elemental - pueden ser una ayuda para el maestro, aunque no dejan de estar exentos de críticas, pero también pueden aportar una base sólida para una didáctica psicológica de las matemáticas en la -- edad escolar del niño.

La tercera parte describe algunas de las dificultades por las que pasa el alumno y son confirmadas en la prueba aplicada para la investigación. Además se sugieren medios Didácticos -- que ayuden a solucionar en parte algo del problema; también se propone el uso de la recta numérica como auxiliar en la ense-- ñanza de las operaciones.

Toda investigación requiere de una técnica y una metodología para lograr el objetivo deseado, en este caso se realizó - a través de evaluaciones escritas. La investigación Documental en dos líneas: la psicopedagógica basada en autores reconoci-- dos como Jean Piaget y en la interdisciplinaria teniendo como- fundamento los volúmenes de la Lic. en Educación Básica de la- Universidad Pedagógica Nacional en el área de las Matemáticas.

Existen obstáculos y limitaciones en este tipo de trabajo:

falta de experiencia porque no se está acostumbrado a realizarlo y el tiempo que se requiere es escaso.

Al sembrar la inquietud por llevarlo a cabo es importante, de gran interés y provecho para el magisterio y la niñez.

Tratar de hacer agradable el conocimiento de las Matemáticas es el fin, ya que esta materia es de las que más dificultad presenta al alumno porque no comprende, pero una vez que la comprende manifiesta el gusto, el interés y el deseo de seguir trabajando en esta materia demostrando con esto que ha superado las dificultades y es capaz de crear sus propios conocimientos.

C A P I T U L O   1

LA RECTA NUMERICA

CAPITULO I

LA RECTA NUMERICA

CONCEPTUALIZACION DE LA RECTA NUMERICA

Para facilitar el uso, manejo y comprensión de los números pueden representarse de alguna forma, las que más se han usado son dos: "el empleo de una línea recta, llamada recta numérica o recta real, la que se usa como una especie de modelo del sistema de números reales y un sistema de nombres para cada número, el denominado sistema decimal o de base diez" (1)

La recta real o numérica se compone de un conjunto de elementos que son los puntos de una línea recta, además se tienen dos operaciones y una relación de orden definidas en ella. Este nuevo sistema satisface también al sistema de los 13 axiomas de los números reales. Gracias al trabajo del matemático alemán Richard Dedekind 1872, el sistema de los números reales desarrollado por Dedekind tiene la propiedad de que todo punto sobre la recta puede asociarse como un número real. Una recta con un número asociado con cada punto se llama recta numérica o recta coordenada. El número asociado con un punto sobre la recta se llama coordenada del punto.

Al existir esta correspondencia entre los números reales-

(1) FREGOSO, Arturo. "Introducción al lenguaje de la matemática". México, CEMPAE, 1972, pág. 187.

y los puntos de la recta es lo que con frecuencia hace identificar al número real con el punto a él asociado, también puede llamarse punto a un número real.

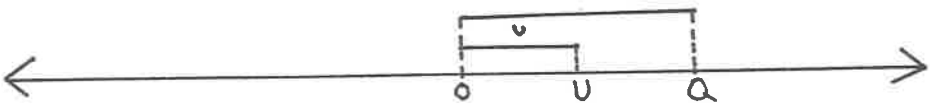
Para construir la recta numérica o recta real se traza -- una recta horizontal y se elige en ella un punto 0 que determina dos rayos en dicha recta.

El rayo a la derecha de 0 está en sentido positivo y el - rayo a la izquierda de 0 está en sentido negativo y se conviene en que el punto 0 no pertenece ni al rayo positivo ni al rayo negativo. Con esto, el rayo en sentido positivo y el rayo - en sentido negativo no tienen ningún punto en común.

Ahora bien: dado un segmento, se pueden trazar dos segmentos congruentes a él tomando como origen el punto 0, uno en el rayo positivo y otro en el rayo negativo; con esto puede decirse que un segmento está en sentido positivo, o se puede referir a él como segmento positivo y el otro está en sentido negativo o es un segmento negativo.

Enseguida se fija un segmento U, cuya longitud se toma -- como unidad. Ya que está establecida la unidad de longitud, a- cada punto determinado por un segmento positivo se le asocia- el número real que corresponde a la longitud del segmento.

Por ejemplo: si U es el punto que determina el segmento - positivo congruente al segmento u, al punto U le corresponde - el número 1; porque la longitud del segmento u es la unidad.



Si Q es el punto que determina un segmento positivo de longitud dos veces la longitud del segmento u, a Q le corresponde el número 2.

Al punto O, que se fijó como origen, se le asocia el número real cero.

Dado cualquier segmento positivo, se tiene un segmento negativo congruente a él. A los puntos que determinan estos segmentos negativos, se les asocian los números reales negativos.

Pueden marcarse también en la recta los números racionales, es decir, todos los cocientes $\frac{p}{q}$ en donde p y q sean números enteros y q no sea cero.

Los puntos de la recta que no hayan sido marcados son los números irracionales, con esto queda conformado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

APLICACION DE LA RECTA EN LA ADICION Y EL PRODUCTO

Es de gran importancia el conocimiento de las matemáticas en la vida del hombre. Esto puede demostrarse analizando las actividades humanas que se desempeñan, de alguna forma tienen relación con alguna aplicación de conocimientos matemáticos. Cuando el niño cuenta sus juguetes, cuando la madre de familia calcula sus gastos diarios, si se acomodan determinados muebles en cierto espacio disponible, si se mide algún terreno agrícola se están aplicando conocimientos matemáticos. También la industria, tecnología, las ciencias naturales, las ciencias sociales y otras más de benefician de alguna forma con los aportes que les brinda las Matemáticas. Además de la utilidad social también se le reconocen cualidades formativas ya que el estudio de esta ciencia ayuda al desarrollo intelectual del hombre al mejorar su habilidad para descubrir características comunes de fenómenos o sucesos de la realidad, establecer leyes acerca de los mismos, ordenar y clasificar hechos, crear sistemas teóricos, es decir: abstraer, generalizar y sistematizar.

A través de la formación primaria se pretende que el niño descubra la utilidad que puede brindarle las Matemáticas, las aplicaciones que él puede hacer de la misma y la formación intelectual que le ofrece.

Al término de su educación primaria el niño deberá manejar elementos básicos de aritmética, geometría, probabilidad y estadística que le sirvan para entender su mundo. Contar, com--

parar, sumar, restar, multiplicar, dividir, son habilidades -- que le ayudarán a desenvolverse mejor en nuestra civilización. También es importante que aprenda a manejar "el sistema deci-- mal posicional de numeración"comprendiendo el significado de - esta notación. Esto le ayudará a entender el por qué de los -- distintos algoritmos.

Es recomendable que el aprendizaje de las matemáticas sea multisensorial para que pueda lograr aprendizajes más firmes y pueda comprender mejor. El uso de la recta numérica en la enseñanza de las operaciones fundamentales puede ser alguno de los medios auxiliares para alcanzar los objetivos mencionados.

Antes de empezar a hablar de las propiedades de la suma - es importante tener presente cómo está integrado el sistema de los números reales.

El sistema de los números reales está formado por:

1. Un conjunto $\mathbb{R}$ cuyos elementos llamaremos números reales.
2. Dos operaciones, + y x, definidas en el conjunto R, llamadas suma y producto o multiplicación. Esto es, + y x son- dos tablas (una de sumar y la otra de multiplicar) por medio de las cuales podemos encontrar la suma y el producto de cualquier pareja de números reales, los cuales también son números reales. Se puede imaginar a la suma y a la -- multiplicación en $\mathbb{R}$ como si fueran las tablas que conocemos y que parte de las mismas están impresas frecuentemente en las contratapas de los cuadernos. El único problema que presentan las tablas es de ser infinitas.

3. El siguiente elemento del sistema es una relación de orden "$<$" definida en $\mathbb{R}$ que llamaremos "menor que o mayor que" según la leamos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Para obtener una representación gráfica de las tablas mencionadas anteriormente se van a escoger unos cuantos números, por ejemplo: 0, 1, 2, 3, y 4 se van a sacar de las tres tablas las partes correspondientes a estos números, entonces estas partes de las tablas serían las siguientes:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6
3	3	4	5	6	7
4	4	5	6	7	8

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	12
4	0	4	8	12	16

$<$	0	1	2	3	4
0	no	si	si	si	si
1	no	no	si	si	si
2	no	no	no	si	si
3	no	no	no	no	si
4	no	no	no	no	no

4. La última parte del sistema de los números reales la forman un conjunto de 13 propiedades que han de tener las operaciones y el orden, las cuales se llaman los axiomas-

del sistema de los números reales a los que dividiremos - en tres grupos, los correspondientes a la suma, la multiplicación y los que se refieren al orden.(2)

Axiomas para la suma:

S_1) La suma es conmutativa. Es decir, si a y b son dos números reales entonces: a+b = b+a

Por ejemplo: 5+8 = 13 = 8+5.

Lo que este primer axioma de la suma garantiza es que -- cualesquiera que sean los números reales a y b, entonces a+b y b+a serán siempre el mismo número.

Esta propiedad también se cumple gométricamente, para verificarlo se realiza lo siguiente:

Después de trazar una recta se localiza el punto corres-- pondiente a a+b y se comprueba que es también correspondiente- a b+a.

Suponiendo que a y b son números reales positivos.

Sean A y B los puntos correspondientes a los números a y- b respectivamente. Se observa que coinciden los puntos $S_{(A,B)}$ y $S_{(B,A)}$, de esto se tiene que a+b = b+a.

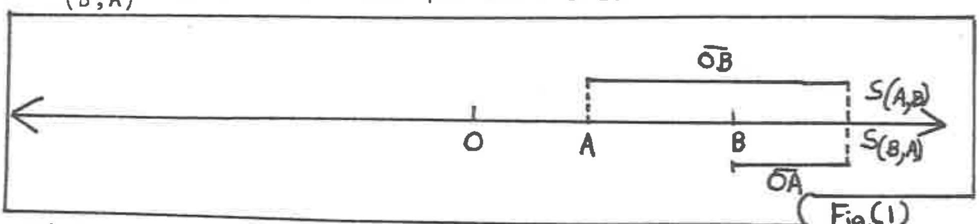


Fig.(1)

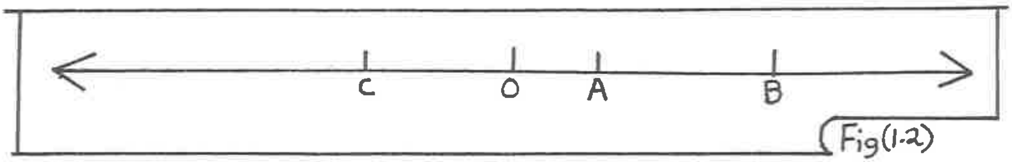
S2) La suma es asociativa. Si a, b y c son tres números reales

(2) FREGOSO, A. Op. Cit. págs. 150-151.

cualesquiera, entonces: $a+(b+c) = (a+b)+c$
este número se puede escribir $a+b+c$ sin necesidad de paréntesis porque no hay lugar para confusiones.

Por ejemplo: $5+(8+2)=5+10=15=13+2=(5+8)+2$

La igualdad planteada se verifica geométricamente suponiendo que A B y C son puntos de la recta que corresponden a los números a, b y c respectivamente, se señalan en la recta como se indica en la figura (1.2)



Fig(1.2)

Con punto inicial B se traza un segmento congruente al segmento $\overline{OC}$ en el mismo sentido de $\overline{OC}$ y se obtiene el punto $S_{(B,C)}$ el asociado a la suma b+c (figura 1.3). Ahora se suma el número a el número b+c; para esto, con punto inicial A se traza un segmento congruente al segmento $\overline{OS}(B,C)$ en el mismo sentido de $\overline{OS}_{(B,C)}$, el cual determina el punto $S_{(A,S_{(B,C)})}$ que es el asociado al número real a+(b+c) (figura 1.3) Con esto se interpreta el primer miembro de la igualdad que se quiere verificar.

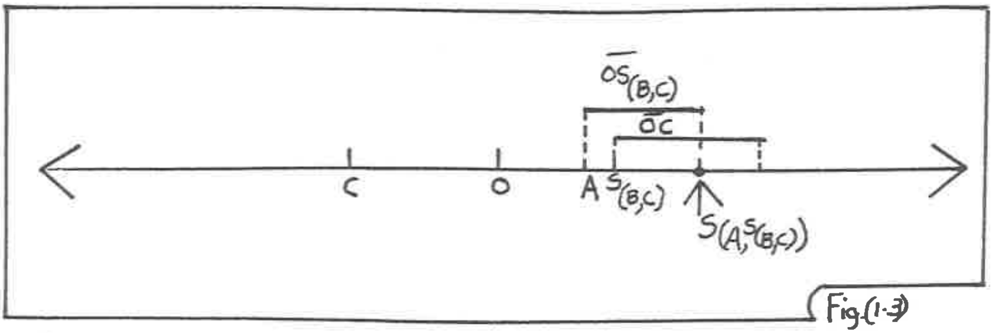


Fig.(1.3)

Ahora se necesita interpretar geométricamente el segundo miembro de la igualdad y comparar los puntos obtenidos. Para sumar los números a y b, con punto inicial A, se traza un segmento - congruente al segmento $\overline{OB}$ en el mismo sentido de $\overline{OB}$ obteniendo el punto $S_{(A,B)}$ el asociado a la suma a+b (figura 1.4). Des--- pués con punto inicial $S_{(A,B)}$, se traza un segmento congruente al segmento $\overline{OC}$ en el sentido de $\overline{OC}$ se obtiene el punto - --- $S(S_{(A,B)},C)$ el asociado a la suma (a+b)+c (figura 1.4).

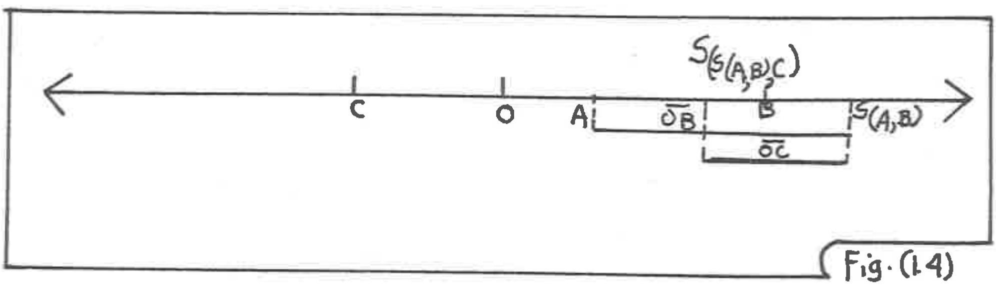


Fig.(1.4)

Puede observarse que $S_{(A,S_{(B,C)})}$ y $S_{(S_{(A,B)},C)}$ son iguales, es decir, son el mismo punto y como cada punto en la recta corres_

ponde a un único número real, se tiene que a+(b+c)=(a+b)+c --
(fig. 1.5).

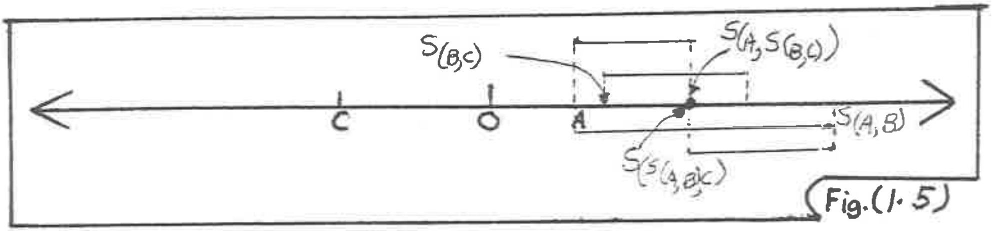


Fig.(1.5)

Con esto queda verificado la propiedad asociativa de la suma,- en un caso en que los números a y b son positivos y el número- c negativo. Puede hacerse análogamente en todos los demás ca-- sos.

S3) Existencia del elemento neutro de la suma. Si a es cual--- quier número real entonces: a+0=a; es decir, al sumar cero a - cualquier número real se obtiene el mismo número real.

Por ejemplo: 8+0 = 8.

Esta propiedad se verifica en el caso en el que a es un número real positivo.

Sean a un número real positivo y A el punto asociado a él. Como se sabe 0 es el punto asociado al número cero y el segmento 00 se reduce a un punto, por lo tanto $S_{(A,0)}$ es el punto A -- (figura 1.6); esto es a+0=a. (&)

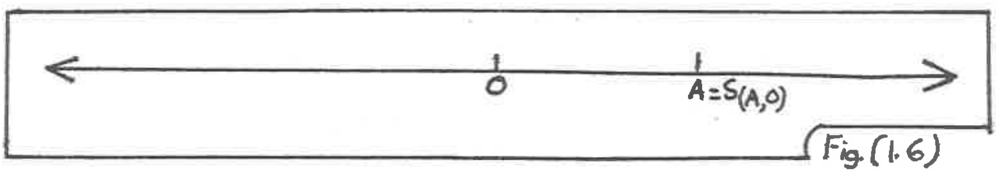


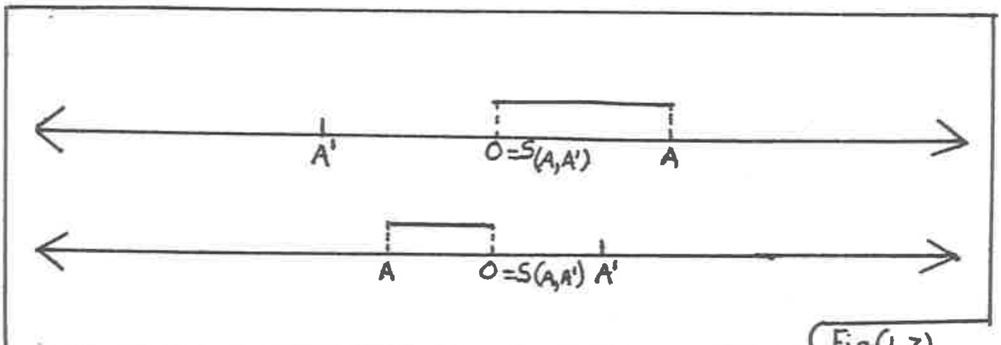
Fig.(1.6)

& Se ha convenido en considerar $\overline{00}$ como un segmento, aunque se trata únicamente del punto 0.

Observación: el único número real con esta propiedad es el cero. Es decir: si a un número real a se le suma un número real distinto de cero, se obtiene un número distinto del número a.

S4) Existencia del inverso aditivo. Dado cualquier punto A en la recta, existe otro punto A' a la misma distancia de 0, pero en sentido contrario, de tal forma que el segmento $\overline{OA'}$ es congruente al segmento $\overline{OA}$, por lo que se dice que son puntos simétricos con respecto a O. Por otro lado se sabe que a cualquier número real a se le asigna un punto A en la recta; al número real correspondiente al punto A', simétrico al punto A respecto al origen. Este se llamará inverso aditivo de a y será denotado por -a.

El inverso aditivo tiene la propiedad de que si se suma al número a, la suma es igual a cero, es decir, a+(-a) =0 (figura 1.7) por ejemplo.



Fig(1·7)

Observación: nótese que este inverso aditivo existe para cada número real y es único.

Definición: Si a y b son dos números reales la diferencia o resta de a menos b, denotada por a-b, es la suma de a más el inverso aditivo de b; es decir: $a-b=a+(-b)$.

Para interpretar geométricamente esta operación se supone que A y B son los puntos en la recta asociados a a y b respectivamente y que B' es el punto asociado al número (-b).

Se suma a+(-b) usando la interpretación geométrica de suma que se tiene (figura 1.8).

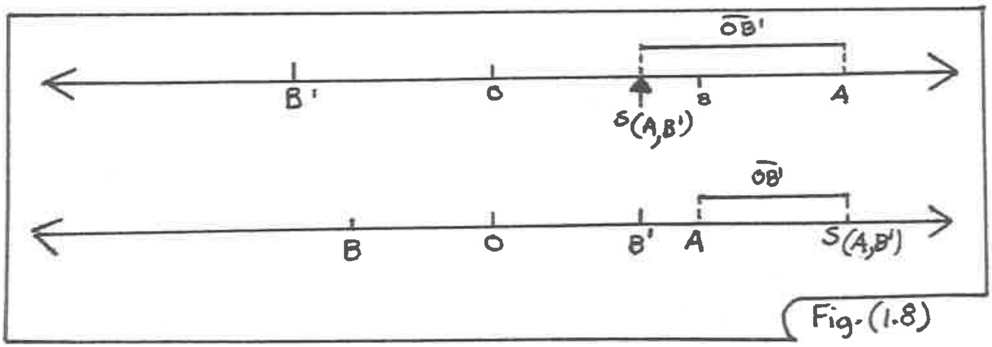


Fig.(1.8)

Observe que la diferencia de dos números es un caso particular de la suma, ya que restar un número es sumar su inverso aditivo.

Axiomas para la multiplicación.

M1) La multiplicación es conmutativa. Sean a y b dos números reales, entonces $a.b=b.a$

Es decir: es lo mismo multiplicar el número a por el núme ro b que multiplicar el número b por el número a.

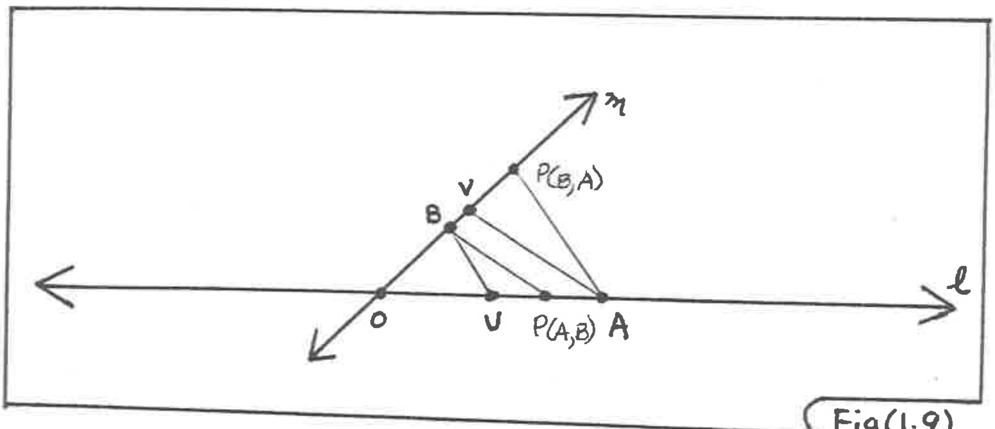
Por ejemplo: 8x5=40=5x8.

La representación geométrica de esta propiedad es la siguiente: Suponiendo que los puntos A y B son los asociados a y b, en la recta 1 y m respectivamente.

Sean U y V los puntos correspondientes a 1, en las rectas 1 y m respectivamente. Para interpretar el punto a.b, se traza el segmento $\overline{VA}$ y por B una recta paralela a $\overline{VA}$; el punto de intersección de ésta con la recta 1, da el punto $P_{(A,B)}$.

Por otro lado, si se traza el segmento UB y luego una recta paralela a $\overline{UB}$ que pase por el punto A entonces el punto de intersección de ésta con la recta m es el punto $P_{(B,A)}$.

Se puede comprobar, que los segmentos $\overline{OP}_{(A,B)}$ y $\overline{OP}_{(B,A)}$ son congruentes y están en el mismo sentido&; por lo tanto los puntos $P_{(A,B)}$ y $P_{(B,A)}$ corresponden al mismo número real, es decir, a.b=b.a.(figura 1.9).



Fig(1.9)

(&) Decir "están en el mismo sentido" significa sentido positivo o negativo respecto a las rectas 1 y m, según sea el caso.

M2) La multiplicación es asociativa. Sean a, b y c números rea_
les entonces: a.(b.c)=(a.b).c

Por ejemplo:

Esta propiedad en el caso en que a, b y c son positivos se verifica como sigue:

Sean 1 la recta horizontal dada, m y n dos rectas auxilia_
res que pasan por O, y A,B y C los puntos correspondientes a - los números a, b y c, en las rectas 1, m y n respectivamente - (figura 1.10). Llámese V y W a los puntos correspondientes al- número 1, en los rayos positivos de las rectas m y n respectivamente (figura 1.10). Ahora se traza el segmento $\overline{VA}$ y, por B, se traza una recta paralela a $\overline{VA}$; el punto de intersección de esta recta con la recta 1, corresponde al producto a.b, y se - denota por $P_{(A,B)}$(figura 1.10).

Para multiplicar el número a.b por c, se traza por C una- recta paralela al segmento $\overline{WP}_{(A,B)}$ cuya intersección con la -- recta 1 determina el punto $P_{(P_{(A,B)}C)}$, el asociado al producto (a.b).c (figura 1.10). Con esto se interpreta geométricamente - el primer miembro de la igualdad.

Ahora se interpreta el segundo miembro de la igualdad. Se traza el segmento $\overline{WB}$, y luego una paralela a $\overline{WB}$ que pase -- por C, en la intersección de ésta con la recta m. obteniéndose el punto $P_{(B,C)}$ correspondiente al producto b.c (fig. 1.10). - Por último por $P_{(B,C)}$ se traza una recta paralela a $\overline{VA}$, el pun_
to de intersección de ésta con la recta 1 es $P_{(A,P_{(B,C)})}$ y -- corresponde al producto de a.(b.c) (figura 1.10).

Como se puede observar los puntos $P_{(A,P_{(B,C)})}$ y $P_{(P_{(A,B)},C)}$ son iguales y por lo tanto a.(b.c)=(a.b).c.

A continuación se presenta la figura 1.10 para comprobar lo expuesto anteriormente.

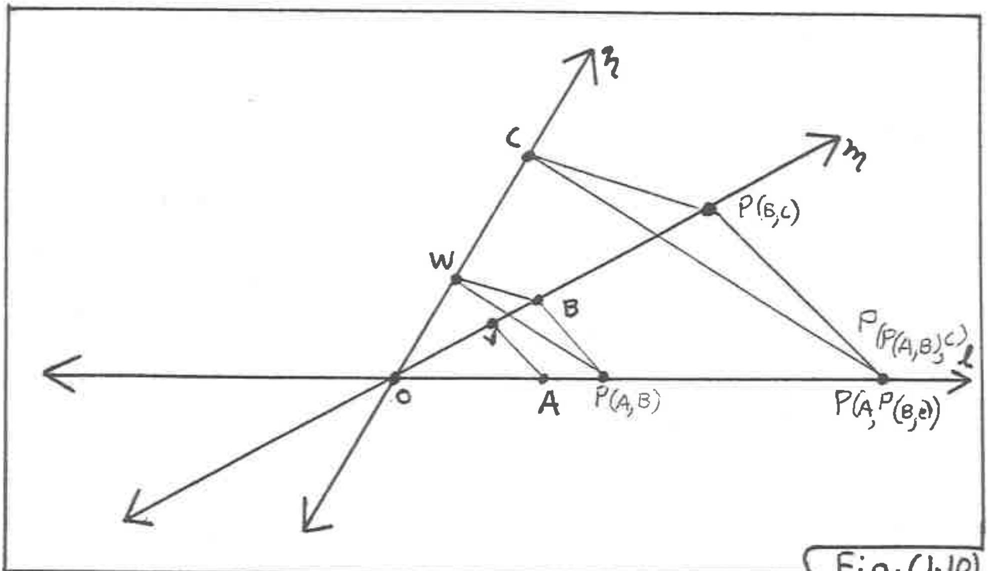


Fig.(1.10)

M3) Existencia del elemento unitario o neutro del producto.

Elemento unitario o neutro multiplicativo. Para cualquier número real que se represente con a, se tiene que a.1=a.

Por ejemplo: 8x1=8.

Esta propiedad dice que al multiplicar cualquier número real a por el número 1, el producto es el mismo número a.

Para hacer la construcción geométrica se supone que el punto A en la recta 1, es el asociado al número a y que el punto V en la recta m es el asociado al número 1.

Para efectuar el producto a.1 se tiene que trazar el segmento $\overline{VA}$ y luego por V una recta paralela a $\overline{VA}$; pero como esta recta contiene al segmento $\overline{VA}$, el punto de intersección de ella con la recta 1 es el mismo punto A. Es decir, el punto $P_{(A,V)}$ es el punto A y por lo tanto a.1=a. (figura 1.11).

Enseguida se muestra la figura que sirve para demostrar la existencia del elemento unitario o neutro multiplicativo.

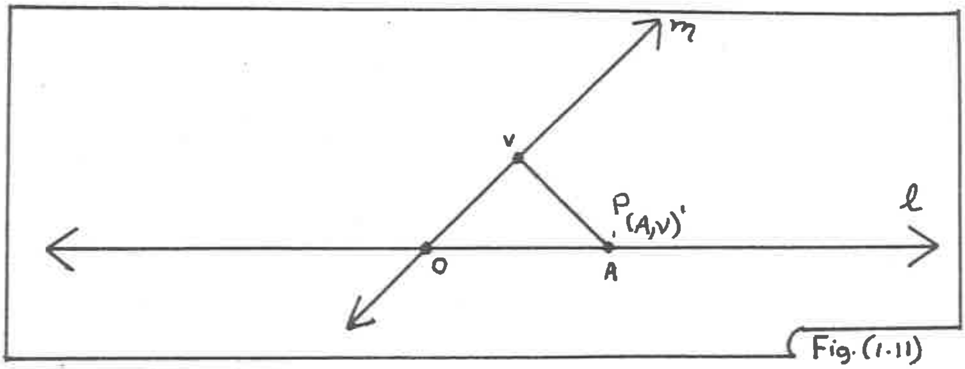


Fig.(1.11)

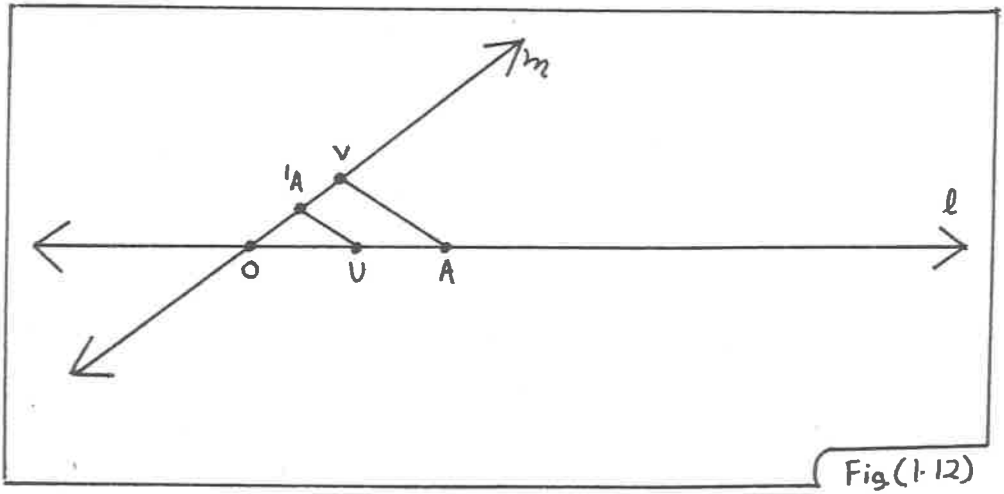
M4) Inverso multiplicativo. Dado cualquier número real a distinto de 0 ($a \neq 0$), existe otro número real que se denota por $\frac{1}{a}$ o a^{-1} tal que $a.\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

Se verifica esta propiedad en el caso en que a es un número positivo (figura 1.12)

Sea A el punto en la recta 1 correspondiente al número a; como $a \neq 0$, el punto A debe ser distinto del punto O. Sean U y V los puntos en las rectas 1 y m respectivamente correspondientes al número 1.

Se traza el segmento $\overline{VA}$ y por U se traza una recta paralela a- $\overline{VA}$, la cual se intersecta a la recta m en un punto llamado -- 1_A (figura 1.12).

Se llama $\frac{1}{a}$ al número real asociado a 1_A, por la forma en- que fue construido 1_A, el producto.



Fig(1.12)

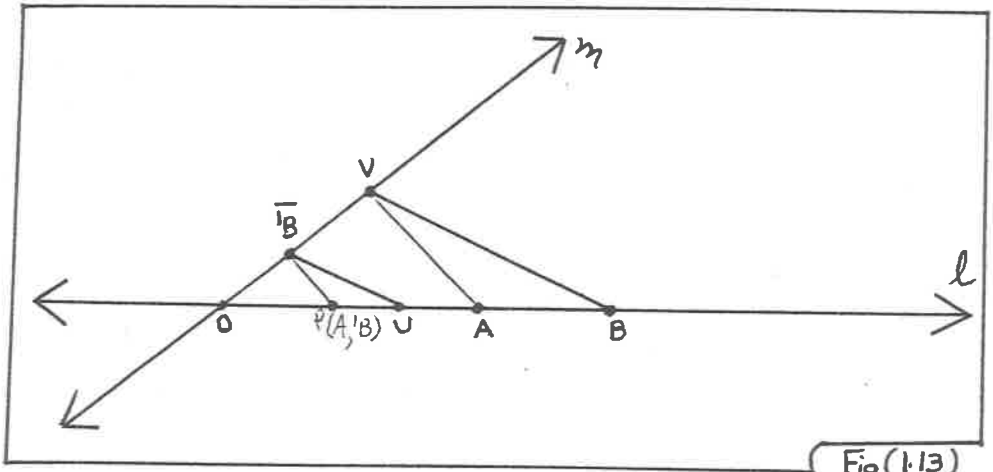
Observación: Se hace notar que este número existe y es único - para cada número real $a \neq 0$. (fig. 1.12).

Definición: Sean a y b dos números reales y $b \neq 0$; se define- la división de a entre b, denotada por $\frac{a}{b}$, como el producto de a por el inverso multiplicativo de b; es decir, $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$.

Observación: Note que sí tiene sentido hablar del inverso multiplicativo de b, ya que $b \neq 0$.

Para interpretar geométricamente esta operación se consideran dos puntos A y B en la recta 1, los asociados a los números a y b respectivamente; después, se construye el punto 1_B -

en la recta m, correspondiente al inverso multiplicativo de b- y, por último, se efectúa el producto $a.\frac{1}{b}$ conforme a la interpretación geométrica del producto. La figura 1.13 ilustra un caso en que a y b son positivos.



Fig(1.13)

Observación: La división es un caso particular del producto, ya que dividir entre un número es multiplicar por el inverso multiplicativo de dicho número.

MS) Axioma que relaciona a la multiplicación con la suma. Distributividad. Sean a, b y c números reales, entonces -------
a.(b+c)=(a.b)+(a.c.).

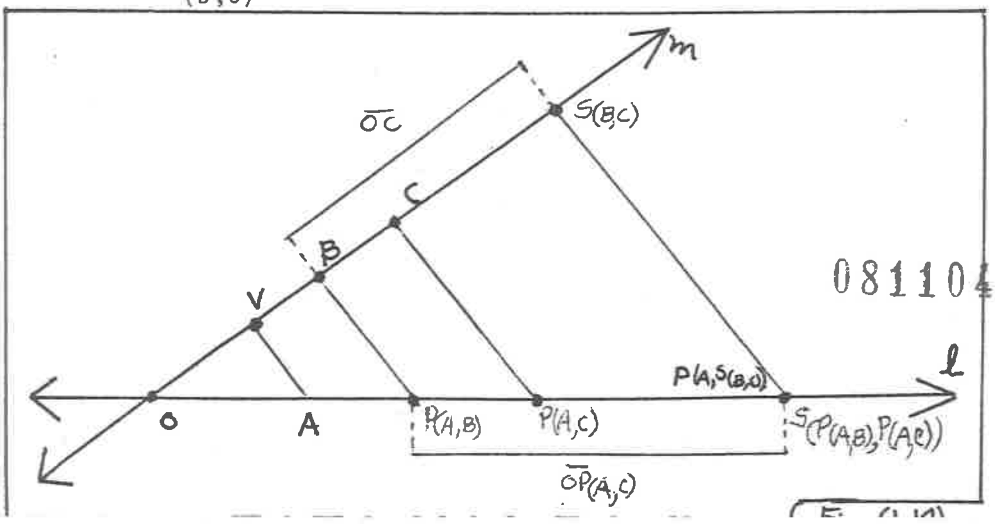
Esta propiedad que se usa con frecuencia, dice que si se tiene un número a multiplicado por la suma de otros dos, b y c da lo mismo sumar primero los números b y c y luego multiplicar por a, que efectuar primero los productos de a con cada uno de los números que se están sumando (byc) y después sumarlos.

Esta verificación se hace para el caso de a, b y c núme-- ros reales positivos.

Sea A el punto de la recta l asociado al número a y sean- B y C los puntos en la recta m asociados a los números b y c - respectivamente (figura 1.14).

Con punto inicial B se traza un segmento congruente a $\overline{OC}$- en el sentido de $\overline{OC}$, que determina el punto $S_{(B,C)}$ en la recta m, asociado a la suma b+c. Después se traza el segmento $\overline{VA}$ y - por $S_{(B,C)}$ una recta paralela a $\overline{VA}$ que intersecta a la recta l en el punto $P_{(A,S_{(B,C)})}$ correspondiente al producto a.(b+c) -- (figura 1.14).

Ahora se traza por B y C dos rectas paralelas al segmento $\overline{VA}$, que al intersectarse con la recta l determinan los puntos- $P_{(A,B)}$ y $P_{(A,C)}$ correspondientes a los productos a.b y a.c respectivamente. Luego, con punto inicial $P_{(A,B)}$ se traza un segmento congruente a $\overline{OP}_{(A,C)}$ en el mismo sentido que éste y se - obtiene el punto $S_{(P_{(A,B)},P_{(A,C)})}$ (figura 1.14), que es el punto $P_{(A,S_{(B,C)})}$ y por lo tanto a. (b+c)=(a.b)+(a.c).



Axiomas del orden

01) El orden es tricotómico. (Tricotomía) Dados dos números -- reales a y b, se cumple una, y solamente una, de las relacio-- nes siguientes:

(i) $a<b$

(ii) $a=b$

(iii) $a>b$

Por ejemplo: $\frac{5}{13} - \frac{3}{8}$; para decidir cuál es menor, o si son - iguales, se debe decidir si la diferencia $\frac{5}{13} - \frac{3}{8}$ es positi- va, cero o negativa; en este caso

$$\frac{5}{13} - \frac{3}{8} = \frac{5.8 - 3.13}{13.8} = \frac{40-39}{13.8} \; 0 \; ;$$

en consecuencia, $\frac{3}{8} > \frac{5}{13}$

Se puede representar trazando una recta y elegir un punto B -- en ella, también se toman puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. La relación - de orden entre cada uno de los números correspondientes, $a_1, a_2,$ a_3, a_4, a_5, y el número b, asociado al punto B, es $a_1 < b$, $a_2 < b$, $a_3 < b$, $b < a_4$, $b < a_5$. (figura 2.1)

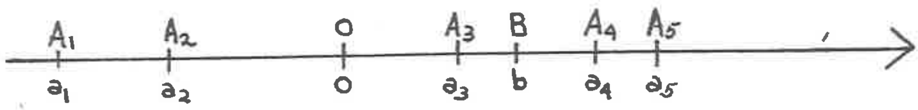


Fig.(2.1)

Para comprobar esta propiedad, se toma en cuenta que el - número real b-a satisface una, y sólo una, de las afirmaciones siguientes:

$$b-a < 0, \quad b-a = 0 \quad ó \quad 0 < b-a,$$

y que, al sumar en los dos miembros de una desigualdad el mismo número, la desigualdad se conserva; por lo tanto, si sumamos a en las tres relaciones anteriores, se obtiene:

$$(b - a) + a < 0 + a$$

$$(b - a) + a = 0 + a$$

$$(0 + a) < (b - a) + a$$

Al aplicar la propiedad asociativa de la suma, y tomar en cuenta las relaciones $-a + a = 0$ y $0 + a = a$ se pueden escribir las relaciones anteriores en la forma.

$$b < a$$

$$b = a$$

$$a < b$$

y una, sólo una, de estas tres (expresiones) relaciones, es -- cierta para dos números reales a y b.

02) Propiedad arquimedeana del orden. Si a y b son números reales positivos tales que a es menor que b, se pueden encontrar-

un número natural m tal que el número m.a sea mayor que b; en-símbolos,

$$\text{si } 0 < a < b, \text{ entonces } m \cdot a > b \text{ para algún } m \in \mathbb{N}$$

Para representarla se traza una recta, se elige en ella puntos A y B que satisfagan las condiciones requeridas; al construir-los puntos A_2, A_3, A_4, etc., de forma que los segmentos AA_2, - AA_3, etc. sean todos positivos y congruentes al segmento $\overline{OA}$,se logra en algún momento "capturar" al punto B en alguno de --- ellos:

Puede verificarse en la figura (2.2).

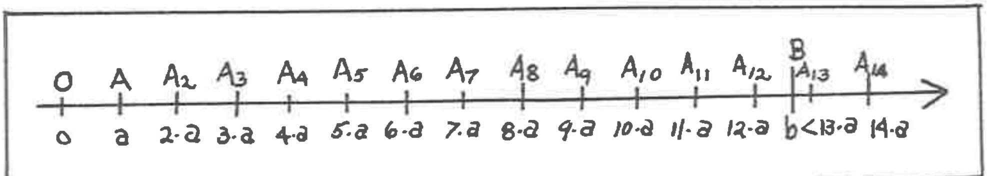


Fig. (2.2)

Axiomas que relacionan al orden con las operaciones.

OS) Ley de cancelación para la suma. Si a, b y c son números - reales tales que $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

Este resultado puede probarse como sigue:

Como $a + b = a + c$, si se suma el inverso aditivio de a - en ambos (miembros) lados de la igualdad se tiene que $(-a) + a + b = (-a)+ a + c$, entonces $0 + b = 0 + c$.

Por lo tanto $b = c$.

OM) Ley de cancelación para el producto. Si a, b y c son números reales, con $a \neq 0$, y tales que $a.b=a.c$ entonces $b=c$.

Este resultado puede probarse como sigue:

Como $a \neq 0$, se puede hablar del inverso multiplicativo de a, o sea, a^{-1}. Se multiplica la igualdad $a.b= a.c$ por a^{-1} y se obtiene $a^{-1} . a.b=a^{-1} .a.c$.

Se sabe por la propiedad del inverso multiplicativo que $a^{-1}.a= 1$. De aquí y de la igualdad anterior, se tiene que:

$$1.b=1.c$$

y por lo tanto $b=c$ como se quería probar.

Hasta este momento se ha terminado de describir al sistema de los números reales, el cual resumiendo, está formado por: un conjunto de dos operaciones, + y x, una relación de orden y los trece axiomas siguientes:

S1) Propiedad Conmutativa de la adición

$$a + b = b + a$$

S2) Propiedad Asociativa de la adición

$$a + (b + c) = (a + b) +c$$

M1) Propiedad Conmutativa del producto

$$a . b = b . a$$

M2) Propiedad Asociativa del producto

$$a . (b. c) = (a . b).c$$

S3) Elemento Neutro de la adición

$a + 0 = a$

M3) Elemento Neutro o Unitario del producto

$a \cdot 1 = a$

S4) Inverso Aditivo

$a + (-a) = 0$

M4) Inverso Multiplicativo.

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Restar

Definición: Si a y b son dos números $\mathbb{R}$; la diferencia o resta de a-b, es la suma de a + el inverso aditivo de b.

$a - b = a + (-b)$

Dividir

Definición: Sean a y b dos números $\mathbb{R}$ y $b \neq 0$ se define la división $\frac{a}{b}$ como el producto de a por el inverso multiplicativo de b, es decir:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

MS) Propiedad Distributiva. Axioma que relaciona el producto con la adición.

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

O1) Tricotomía. Dados dos números reales a y b se cumple una y solamente una, de las relaciones siguientes:

(i) $a < b$

(ii) $a = b$

(iii) $a > b$

02) Propiedad Arquimedeana del orden.

si $0 < a < b$, entonces $m.a > b$ para algún $m \in \mathbb{N}$

Axiomas que relacionan al orden con las operaciones.

0S) Ley de Cancelación para la adición

$a + b = a + c$ entonces $b=c$

0M) Ley de Cancelación para el producto.

con $a \neq 0$

$a \, . \, b = a \, . \, c$ entonces $b=c$

Lo que ha sido expuesto hasta aquí son unos cuantos puntos que dan una idea de las posibles aplicaciones que pueden hacerse con ella.

Al maestro le ayuda recordar estos temas para su práctica-docente y aplicarlos de acuerdo al grado con quien labora.

Para el alumno el uso de la recta puede ser un auxiliar - que gradualmente va a ir conociendo y aplicando de acuerdo al-grado que cursa.

Desde el primer año ya se inicia este conocimiento, pero-en segundo aparece muy poco porque en las operaciones con números naturales desaparece y sólo se usa en una sola lección con los números racionales.

En el primer grado se inició con la suma de números naturales, en segundo podría utilizarse en la multiplicación tam--bién.

Siendo muy conocido el uso de la recta en la realización-de la adición y el producto ya no se enunciará en este trabajo.

C A P I T U L O 2

TEORIA PSICOGENETICA EN LA EVOLUCION DEL NIÑO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

CAPITULO 2

TEORIA PSICOGENETICA EN LA EVOLUCION DEL NIÑO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

DESARROLLO PSIQUICO DEL NIÑO

Aunque este tema es muy extenso, se tratará de enunciar - los conocimientos más importantes y que puedan servir para el- pedagogo práctico.

Al hablar de la psicología del niño se parte del hecho de que la vida no es algo acabado, sino que va desarrollándose -- gradualmente, desde el embrión hasta la fase adulta. Si todos- los seres vivos están sometidos a un desarrollo, indudablemen- te que el hombre lo esté también, con la diferencia de que se- manifiesta en aspecto exterior, corporal como crecimiento y -- transformación. En su intimidad psíquica el desarrollo no es- perceptible, pero sus facultades van madurando y sus posibili- dades de experiencia cambian y pueden ampliarse. Entre las -- condiciones que intervienen en el desarrollo se cuenta con las disposiciones hereditarias y el medio ambiente formando un con junto indisoluble, ya que no se puede concebir el uno sin el - otro.

Existen grandes dificultades para poder afirmar con exac- titud la importancia que tienen las disposiciones y el medio -

ambiente en el desarrollo del hombre especialmente en su psiquismo. La Genética se encarga de demostrar que el desarrollo del huevo maduro se debe a los genes depositados en los cromosomas; no se puede imaginar que las disposiciones psíquicas estén almacenadas en los genes como si fueran casilleros; a éstos les corresponde exclusivamente la acción directiva de los fenómenos del desarrollo. Para determinar este complejo estructural, hay que recordar, que, según la genética no se transmiten las cualidades ya desarrolladas, sino únicamente disposiciones, es decir, posibilidades para determinar las cualidades. Según los resultados de la psicología genética, sólo se dan disposiciones elementales: "bases de la personalidad", "formas-raíces de la personalidad" (1). "Funciones fundamentales" (2), (3), las cualidades no deben ser consideradas como rígido mosaico, sino como una estructura elástica, variable (complejo estructural) (4), (5).

Respecto al medio, este concepto todavía no está bien definido, pero gracias a VON UEXKULL, en la Biología ha obtenido un significado preciso, lo considera como una totalidad de condiciones que aseguran a un ser viviente el conservarse de acuerdo con su organización específica determinada por su aparato motor y de percepción. Como ya se ha dicho, el hombre no

1) KRETSCHMER, E. (986, págs, 53 ss).
2) PFAHLER, G. (90) y (91)
3) REMPLEIN, H (997, págs. 525 ss.).
4) STUMPLF, F. (105).
5) KROH, O. (74).

está adaptado orgánicamente a un medio ambiente específico; como ser viviente "abierto al mundo" "libre de medio ambiente" y no "limitado", no tiene "medio ambiente" en el sentido restringido de VON UEXKULL. (6)

No obstante, si en Genética el medio ambiente suele oponerse a la herencia, dicho concepto debe ser usado en un sentido más amplio (7), es decir, como la suma de realidades que producen efectos en la construcción psico-somática del hombre, tanto si éste los experimenta conscientemente, como si es influído por ellos de un modo inconsciente.

Después de estas reflexiones no puede dejar de considerarse como un complemento, la importancia que tienen las disposiciones y el medio ambiente en el desarrollo psíquico del hombre. Por un lado hay disposiciones que se imponen frente a las más fuertes influencias ambientales -disposiciones "estables"-, y, por otro, disposiciones que se desarrollan de forma distinta con diversas influencias ambientales -disposiciones "inestables"-.

Son disposiciones "estables" frente al medio la actividad sensorial, la vitalidad y el temperamento: impulsos fuertes o débiles, reacciones rápidas o lentas, inclinación a la alegría o a la tristeza, fácil o difícil comunicabilidad de sentimien-

---

6) GEHLEN, A. (56, págs. 85 y 365).
7) Muchas veces se recurre al término científico de idioplasmas y peristasis (medio)

tos, perseverancia más o menos grande -todos estos son rasgos que pueden ser observados tempranamente en los niños, aparte - las influencias ambientales. Pertenecen, como la disposición, a la forma que reviste el crecimiento corporal en la constitución individual, forma que ofrece relativamente poca resistencia ante las influencias del mundo exterior y que se impone -- con frecuencia a influencias contrarias.

En cambio son "inestables" frente al medio las funciones- intelectuales -por ejemplo, la ideación-, las dotes especia-- les- por ejemplo, el talento para la Música, Historia, Psicología y Filosofía-. La cuestión de si son "despertadas", en qué- dirección y hasta qué punto se desarrollan, no sólo depende -- del grado de disposición, sino también de la clase y medida de influencias ambientales, especialmente las que ejercen el tiempo y la formación.

Las capas psíquicas más profundas son más "estables" frente al medio ambiente: (impulsos e instintos, actividad motriz y sensorial, vitalidad y temperamento); las superiores, son en cambio más "inestables": (inteligencia, razón). En consecuencia, sólo mediante una observación superficial, se puede considerar en la misma proporción la influencia de la disposición y el medio en el desarrollo; un análisis más profundo muestra - que la importancia de las disposiciones es proporcionalmente - distinta según la capa psíquica a que hay que atribuirlas.

Estas generalidades pueden ayudar a comprender lo que sucede en el niño a través de su desarrollo, hasta esta parte se ha tomado éste como un proceso natural, en el cual se enumeran las disposiciones hereditarias y el medio ambiente que son factores que intervienen en la vida del niño y que hay que considerar para conocer su evolución; más adelante se tratará del desarrollo cognoscitivo y aprendizaje según Piaget y así complementar este tema que es importante en la labor educativa.

TEORIA DE PIAGET

Esta teoría se interesa en el desarrollo de las funciones cognoscitivas. En ella se pueden distinguir tres procesos:

La adaptación de un organismo a su ambiente durante su crecimiento (dimensión biológica).

El establecimiento de relaciones cognoscitivas o más generalmente epistemológicas, que involucran un grupo de estructuras construídas progresivamente por continua interacción entre el sujeto y el mundo exterior. (Relación entre sujeto y objeto).

La adaptación de la inteligencia en el curso de la construcción de sus propias estructuras.

La adaptación de un organismo a su ambiente durante su crecimiento (dimensión biológica).

Las investigaciones que realizó Piaget sobre la estructura del conocimiento tuvieron influencia de las nociones de adaptación y equilibrio que tomó de sus estudios de zoología.-

Para él existe una analogía entre las concepciones biológicas- y psicológicas sobre la idea de incorporación de elementos nue vos que estructuran el conocimiento en el sujeto. Considera -- que existe una continuidad entre los procesos de adquisición - de conocimiento y la organización biológica del individuo de - aquí su énfasis en la dificultad de comprender la psicogénesis si no se toman en cuenta las raíces orgánicas. (8)

La aparición de las funciones cognoscitivas en el sujeto- son posibles gracias a los mecanismos biológicos. Los proce-- sos de asimilación y acomodación son necesarios para la expli- cación de la construcción gradual de los esquemas consgnosciti vos y de los estados en que se encuentran en cada fase (o esta dio) del desarrollo humano.

Relación entre sujeto y objeto.

Para conocer los objetos, el sujeto debe actuar sobre -- ellos y por lo tanto TRANSFORMARLOS, conectar, combinar, sepa- rar y volver a unir.

El conocimiento está constantemente unido a las acciones- u operaciones, esto es, a las transformaciones que abarcan des de las acciones sensoriomotoras más elementales (como empujar- y jalar) hasta las operaciones intelectuales más complejas, -- que son acciones interiorizadas que se llevan a cabo mental--

8) PIAGET, J. Biología y conocimiento, pág. 267.

mente (por ejem: juntar, ordenar, poner en correspondencia de 1 a 1).

En toda acción el sujeto y los objetos están fusionados ya que el sujeto necesita información objetiva para estar consciente de sus acciones, pero también necesita varios componentes subjetivos. Sería imposible para el sujeto conocer lo que pertenece al objeto, lo que le pertenece a él mismo como sujeto activo y lo que le pertenece a la acción misma tomada como transformación de un estadio inicial a uno final, sin la práctica prolongada o sin la construcción de instrumentos de análisis y coordinación.

Por lo tanto, el llamado problema epistemológico, o problema del conocimiento, se reduce a analizar cómo es que el sujeto llega a ser progresivamente capaz de conocer los objetos adecuadamente, esto es cómo llega a ser capaz de tener objetividad; además no puede ser considerado en forma separada del problema del desarrollo de la inteligencia.

La adaptación de la inteligencia en el curso de la CONSTRUCCION de sus propias estructuras.

La consecuencia natural de las interacciones mencionadas anteriormente, dan una segunda idea central de la teoría, que es la CONSTRUCCION, ya que el conocimiento objetivo no es adquirido por un registro de la información externa, sino que tiene su origen en las interacciones entre el sujeto y los objetos, esto implica necesariamente dos tipos de actividades:

la coordinación de las acciones mismas y la introducción de -- inter-relaciones entre los objetos. Estas actividades son interdependientes porque es únicamente a través de la acción que estas relaciones se originan, con esto se deduce que el conocimiento objetivo está subordinado a ciertas estructuras de acción, pero estas estructuras son el resultado de una CONSTRUCCION y no están dadas en los objetos ya que éstas dependen dela acción, ni tampoco están dadas en el sujeto ya que éste debe aprender a coordinar sus acciones.

Según Piaget, el objeto se conoce solo a través de las actividades que el sujeto realiza con el fin de aproximarse a -- ese objeto. "El objeto no es un dato inmediato que puede alcanzarse en forma espontánea"; sin embargo, el constante acercamiento al objeto permite la construcción de esquemas cognoscitivos cada vez más complejos que se originan en las estructuras biológicas más primitivas. Por lo tanto, Piaget otorga la misma prioridad al objeto y al sujeto, es decir, rechaza tanto la primacía del objeto sobre el sujeto, como la del sujeto sobre el objeto, pues considera la existencia de una reciprocidad entre el medio ambiente y el organismo. (9)

Esta intercacción tiene como consecuencia la adquisiciónde nuevas experiencias, las cuales asumen un papel esencial en la formación de las estructuras lógico matemáticas.

9) BATTRO, A. El pensamiento de J. Piaget: Psicología y Epistemología.

De estas experiencias se desprenden dos tipos de experiencias o abstracciones: (10)

1) Experiencia física o abstracción empírica,
2) Experiencia lógico-matemática o abstracción reflexiva. (11)

La primera se refiere a la abstracción de las propiedades esenciales del objeto con respecto a una situación particular. Para ello el sujeto actúa sobre el objeto y extrae sólo aquellas propiedades relativas a un conocimiento dado.

La experiencia lógico-matemática o experiencia de abstracción reflexiva consiste en actuar sobre el objeto con el fin de extraer información sobre la coordinación de acciones que el sujeto ejerce sobre el objeto. Es por medio de las acciones ejercidas sobre el objeto como se adquiere el conocimiento que no proviene del objeto y de sus características físicas entre sí: esta experiencia lógico-matemática es concebida como una acción realizada por el sujeto tendiente a la construcción del conocimiento de ese objeto. Este proceso constructivo se presenta a lo largo del desarrollo del individuo.

La construcción del conocimiento se forma mediante un proceso contínuo. En cada etapa se refleja la constitución de estructuras operatorias cada vez más grandes que permiten al in-

---

10) OTERO, A. "La escuela ginebrina", en Cuelli, J. & Reidl, L. Corrientes psicológicas en México.
11) INHELDER, B. "Aprendizaje y estructuras del conocimiento". pág. 31.

dividuo lograr un grado de organización intelectual. Es importante este concepto para la explicación de la construcción de estructuras cognoscitivas.

Desde la etapa que abarca de la niñez a la edad adulta, se observan construcciones de estructuras que tienden a reproducir la organización interna requerida por el individuo. Este proceso resulta ser una función invariante en cada una de las etapas del desarrollo y las únicas que varían son las estructuras que se van formando. Entonces, la función invariante de renovación y transformación constante de estructuras variables propicia la organización y por lo tanto la adaptación. (12)

Cuando el organismo transforma sus estados mentales en función del medio y su propia organización cognoscitiva se habla de una adaptación y la consecuencia de este proceso es el logro del equilibrio continuo.

En la relación que existe entre organización (que implica el ordenamiento cognoscitivo) y la adaptación (posibilidad de seguir interactuando con el medio), Piaget señala una serie de categorías del conocimiento que corresponden a cada aspecto de la realidad y que el sujeto construye a lo largo de su vida.

El análisis de estas categorías que Piaget ha observado en cada estadio o fase del desarrollo del individuo, especialmente en el niño, forman parte de las nociones que se propone-

12) OTERO, A. "La escuela ginebrina", en: Cueli, J. & Reidl, L. Corrientes Psicológicas en México.

para explicar las dimensiones más importantes del conocimien-- to, y son las siguientes: construcción de lo real, formación- del símbolo, génesis del número y cualidades de los objetos fí sicos.

Construcción de lo real. Esta dimensión parte del desa-- rrollo de las nociones de objeto, espacio, causalidad y tiem-- po, categorías que permiten la observación y explicación de la adquisición y manejo que el niño tiene de cada noción en sus - diferentes estadios.

Formación del símbolo. Son importantes los estadios so-- bre la imitación, el juego y la representación. El papel de - la imaginación y sobre todo de la función simbólica, tienen es pecial importancia como una actividad presente en toda la evo- lución intelectual.

Para el análisis de génesis del número, Piaget se apoya - sobre todo en la noción de la conservación y en las nociones - de clase; relaciones y números.

En el estudio de las cantidades físicas se extiende la no ción de conservación para la explicación de las cualidades fí- sicas esenciales como: substancias, peso y volumen.

Cada una de estas categorías fueron observadas y analiza- das (por Piaget), en diferentes niños de acuerdo a cada fase - del desarrollo de ellos. Para ello utilizó un método empírico y como instrumento usó la lógica operatoria para explicar las- operaciones de las estructuras intelectuales y la formación de esquemas y sus operaciones mentales con base en cada una de es tas nociones básicas.

Todos estos puntos en los cuales se funda la teoría de -- Piaget manifiestan cómo se van desarrollando las funciones cognoscitivas que necesita el maestro tener presente para poder - comprender algunos de los problemas que presenta el alumno a - través de su aprendizaje.

En la actividad cotidiana del aula, se registran con gran frecuencia las dificultades por las que pasa el alumno cuando- se trata del conocimiento de algunos temas de las Matemáticas, siendo ésta una de las materias que integran el programa escolar, la cual debe alcanzar también un objetivo propio.

Uno de los problemas que pretende analizarse a través de- esta investigación, es precisamente ¿por qué le cuesta trabajo al alumno el aprendizaje de las operaciones fundamentales?

En esta teoría pueden encontrarse algunas de las bases -- principales que pueden ayudar a solventar este problema, sobre todo cuando habla de la experiencia lógico matemática o abs--- tracción reflexiva, ya que si al alumno se le propicia una actitud crítica, y si se le inicia a la reflexión matemática, podrá comprender el algoritmo de la suma y del producto que le - permitirá solucionar acertadamente los problemas.

Posteriormente se tratará algo más sobre la experiencia - lógico-matemática.

CONOCIMIENTO Y APRENDIZAJE

Para Piaget el desarrollo cognitivo del niño es un proceso espontáneo, vinculado a todo el proceso de embriogénesis -- biológico y psicológico, además se relaciona con la totalidad- de las estructuras del conocimiento.

Es importante entender cómo se considera el concepto de - operación para entender el desarrollo del conocimiento. Operación es un conjunto de acciones que modifican al objeto y capacitan al sujeto que conoce para llegar a las estructuras de la transformación. Además es una acción reversible, es decir puede tener lugar en ambas direcciones, por ejemplo, sumando o -- restando, uniendo o separando.

Una operación nunca se encuentra aislada, siempre vinculada a otras operaciones y como resultado es siempre una parte - de la estructura total.

Las estructuras operacionales constituyen la base del conocimiento. El problema central del desarrollo del conocimiento es entender: la formación, elaboración, organización y funcionamiento de estas estructuras. Las etapas del desarrollo - de estas estructuras son:

1a. Etapa. Sensorio-motriz (18 primeros meses). Etapa preverbal. Desarrolla el conocimiento práctico que constituye la super estructura del conocimiento representativo posterior. Un ejemplo es la construcción del objeto permanente, construcción del espacio práctico o sensorio motor, construcción de capacidad sensorio motriz elemental. Por ejemplo, el niño durante - sus primeros meses un objeto no tiene permanencia porque cuando desaparece de su campo perceptual, no existe más.

2a. Etapa. Representación-Preoperacional (2-7 años). -- Principios del lenguaje, función simbólica del pensamiento o - de la representación.

En esta etapa no existe todavía la conservación que es el criterio psicológico que indica la presencia de operaciones reversibles. Por ejemplo, si se vierte líquido de un vaso a -- otro de diferente forma, el niño preoperacional pensará que -- hay más en uno de los vasos que en el otro. En ausencia de la reversibilidad operacional, todavía no existe la conservación- de cantidad.

3a. Etapa. Primeras Operaciones (7-11 años). Operaciones concretas operan sobre objetos y no sobre hipótesis. Por - ejemplo existen las operaciones de clasificación, ordenamiento, la construcción de la idea de número, operaciones especiales y temporales, y todas las operaciones fundamentales de la- lógica elemental de clases y relaciones, de las matemáticas -- elementales, de la geometría elemental y hasta de la física -- elemental.

4a. Etapa. Nivel formal o de Operaciones Hipotético-Deductivas (11-15 años). El puede razonar de acuerdo a hipótesis y no sólo a objetos, construye más operaciones de lógica - proporcional y no solo de clases, relaciones y números. El niño obtiene nuevas estructuras que pueden ser combinatorias o - estructuras grupales más complicadas.

Los factores que sirven para explicar el paso del desarrollo de un grupo de estructuras a otro son:

1o. Maduración: es insuficiente por sí solo. No se sabe de maduración del sistema nervioso en los primeros 11 meses. Se sabe algo a partir de los dos primeros años.

2o. La Experiencia: de los aspectos del ambiente físico sobre las estructuras de la inteligencia o cognoscitivas.

Este factor no lo explica todo. Hay dos razones: a) algunos de los conceptos que aparecen al comienzo de las etapas de operaciones son tales que no puede verse como pudieron ser derivados de la experiencia, aparece una necesidad lógica. b) La noción de experiencia es equívoca. Existen dos clases de experiencia psicológicamente distintas y de importancia en el aspecto Pedagógico: experiencia matemático-lógica y experiencia lógico-matemática, ésta se deriva de las acciones que se efectúen sobre los objetos. La experiencia lógico matemática consiste en la coordinación total de las acciones del sujeto y no de una experiencia de los objetos mismos, antes de que puedan existir operaciones es necesaria esta experiencia, ya que se obtuvieron las operaciones no es necesaria, y las coordinaciones de acciones pueden darse por sí mismas bajo la forma de deducción y construcción de estructuras abstractas.

3o. Transmisión Social-Transmisión Ligüística o Transmisión Educativa. Este factor es fundamental, pero también insuficiente porque el niño puede recibir información valiosa vía lenguaje, vía educación dirigido por un adulto sólo si se en--

cuentra en la etapa en la cual puede comprender esa información.

4o. Equilibración: puesto que ya existen tres factores, estos deben equilibrarse de alguna manera entre ellos mismos. En el acto del conocimiento el sujeto es activo y cuando se enfrenta con una molestia externa, reacciona con objeto de compensar y consecuentemente tendrá equilibrio. Equilibración es pues, un proceso activo de autorregulación.

Ahora se verá brevemente cómo se describe el proceso de aprendizaje en el niño. Este es provocado por varias situaciones: experimentador psicológico, maestro de acuerdo a aspectos didácticos y a la situación externa.

El aprendizaje es limitado a un solo problema o a una estructura, también es posible en el caso de las estructuras lógicas-matemáticas, cuando la estructura que se desea enseñar al sujeto esté apoyada por estructuras lógicas-matemáticas simples, más elementales. Los niños de cuatro años no quieren hacer una predicción.

La generalización se dá aproximadamente a los cinso años y medio. El aprendizaje es posible si se basan las estructuras más complejas en estructuras más simples, esto es siempre y cuando exista una relación natural y el desarrollo de estructuras y no simplemente el reforzamiento externo.

El aprendizaje está subordinado al desarrollo y el aprendizaje de estructuras obedece las mismas leyes que el desarrollo natural de estas estructuras.

Existe una relación entre aprendizaje y desarrollo, el -- aprendizaje es duradero cuando una estructura se desarrolla -- espontáneamente, una vez que ha alcanzado el estado de equilibrio, es duradero, continuará a través de toda la vida del niño.

Lo que hace interesante el aprendizaje es la posibilidad- de transferencia que tiene una generalización.

La relación fundamental involucrada en todo el desarrollo y todo el aprendizaje no es la relación de asociación, sino de asimilación. Asimilación es la integración de cualquier tipo- de realidad en una estructura.

El aprendizaje es posible solo cuando exista una asimilación activa, sin esta actividad no hay posible didáctica o pedagogía que transforme significativamente al sujeto.

Todo desarrollo se compone de conflictos momentáneos, de- incompatibilidades que deben ser superadas por alcanzar un nivel superior de equilibrio.

Se trata en verdad de una teoría estímulo-respuesta, pero primero se le agregan operaciones y después equilibración.

En resumen puede decirse que el aprendizaje es una unidad indivisible, formada por los procesos de asimilación y acomodación, y el equilibrio que existe permite la adaptación del individuo al medio cognoscente que lo rodea. Esta unidad es presentada como una secuencia de estructuras íntegras y no como - elementos y procesos superiores.

EVOLUCION DE LA COMPRENSION EN EL NIÑO

Un antecedente que puede ser útil al maestro en el desempeño de su labor docente en la enseñanza de las operaciones, - es el analizar cómo se desarrolla el pensamiento y la comprensión en el niño.

Para esto Piaget realizó investigaciones y experimentos - interesantes que ayudan al estudio del conocimiento del niño.

La primera consideración que puede hacerse sobre el significado de número para el adulto. Un número cardinal común y - simple, por ejemplo nueve, denota una colección de unidades -- simples que se reconocen como semejantes en algún sentido: nueve elementos, nueve sillas, nueve objetos. Por más que las -- unidades se distribuyan de diferente manera, el total se man-- tiene idéntico; ya sean cinco y cuatro, tres y seis, siempre- serán nueve. Ser capaz de hacer estas manipulaciones y ejercitarlas mentalmente en relación con un número significa comprender la significación de ese número. Operaciones lógicas es la expresión que usa Piaget para referirse a esto. "El término empleado para designar la comprensión lógica de que el total permanece igual a través de las diferentes distribuciones de sus- pares es constancia.

La reversibilidad de las operaciones lógicas es fundamental para la verdadera comprensión". (13)

---

13) LAWRENCE Evelyn y otros: "La comprensión del número y la - Educación progresiva del niño según Piaget.1982. P. 8.

En el proceso fundamental de numeración y apreciación de la cantidad, Piaget trata de determinar con mayor exactitud -- cómo trabaja la menta del niño. Para ello ideó test y mate--- rial adecuado aplicando y ensayando con niños comunes de la -- edad correspondiente a la escuela primaria.

"La hipótesis inicial fue que el desarrollo de las ideas- de número y el de la capacidad para el pensamiento lógico van- a la par, y que una etapa pre-numérica corresponde a una etapa pre-lógica". (14)

En el Test 1. La constancia de las cantidades contínuas- una de las ideas fundamentales es la siguiente: toda compren- sión, presupone un sistema de principios de constancia y el -- pensamiento matemático requiere esta regla. Por ejemplo, una- cantidad de un líquido o una colección de objetos es concebi-- ble solamente si su valor total permanece constante. En forma semejante, una cantidad continua, como una medida de longitud- o de volumen, sólo puede ser utilizada por la mente en la medi da en que permanezca constante con independencia de las dife-- rencias en la distribución de sus partes.

Esta idea de permanencia es la base sobre la cual se cons truyen las nociones de número y cantidad, se quiere saber si - está presente en la mente del niño desde el principio; o es -- parte de la estructura esencial de la mente, una especie de -- idea innata que surge con el primer funcionamiento intelectual; o se desarrolla en forma graduada.

---

14) Ibid., p. 9

A continuación se describe la técnica para adoptar este - problema: a cada niño que se le aplica el test se le presentan dos recipientes cilíndricos semejantes de igual tamaño, cada - uno contiene una cantidad igual de líquido coloreado. Después se pasa el contenido de uno de ellos a dos recipientes más pequeños y se le pregunta al niño si la cantidad de líquido permaneció igual a la del recipiente que no se tocó. Este problema es presentado en varias formas, pero siempre en términos de la preservación de la igualdad con el líquido del recipiente - que permanece igual.

Los resultados muestran que "en un principio, no está presente la idea de cantidad constante, que esta idea se desarrolla gradualmente según modos que pueden demostrarse" (15)
La figura 1 presenta la situación experimental.

Situación 1 Transformación Situación 2

Figura 1. Conservación de la cantidad en el caso de un fluido. La situación 1 muestra dos vasos de igual tamaño, antes de que la apariencia del fluido sea transformada vertiéndolo en el recipiente alto y delgado. La situación 2 es la que se presenta después de volcado el líquido. Un niño pequeño, aunque presencie la operación de volcar el fluido, puede dar respuestas incorrectas. Si entonces se vuelve a pasar el agua del vaso alto y delgado al que contenía antes, el niño preoperacional volverá a la respuesta que dió en la situacion 1, "los dos tienen - la misma cantidad".

15) LAWRENCE E. Op. cit., pág. 11

Se pueden distinguir 3 etapas de desarrollo: la primera - aproximadamente a los 4 ó 5 años, en ella el niño considera - natural que la cantidad de un líquido varíe junto con la forma del recipiente al que se lo tranvasa. Parece que cambia y no- existe la idea de una cantidad invariable que pueda corregir - la impresión visual. La segunda etapa es alrededor de los -- 5 1/2-6 años, es un período de transición y elaboración, ya se puede ver cómo comienza a aparecer la idea de constancia, pero aunque se le descubrió en el curso de diversas operaciones de- transvasamiento, no se generaliza y se pierte en ciertas cir-- cunstancias. En la tercera etapa, alrededor de los 6 1/2-8 -- años, el niño, desde el principio supone que la cantidad de lí quido es constante. En su desarrollo no llega el niño primero a la idea de cantidad y luego a la idea de que ella permanece- constante. Sólo llega a aprehender la significación de la canti dad cuando es capaz de comprender la idea de totalidades que - pueden permanecer constantes.

En el primer nivel, la cantidad en el niño es una tosca - distinción perceptual entre lo más alto y lo más ancho, entre- lo más y lo menos. Las verdaderas relaciones dimensionales no las comprende porque no puede relacionarlas entre sí mediante- las operaciones de adición o de multiplicación. En la segunda etapa ya arriba a la noción lógica de cantidad, pero no puede- medirla por medio de unidades. Al llegar a la tercera etapa - el niño ya está preparado para tener la idea de una cantidad - total y estable, que puede medirse mediante unidades y es inde pendiente de las diferencias en la apariencia o distribución.

Sólo el último descubrimiento hace que pueda tener el verdadero desarrollo de la idea de número.

Resumiendo las tres etapas puede establecerse un pequeño cuadro:

4 - 5 años:	La cantidad es una idea tosca, existe la distinción perceptual de lo más y lo menos, lo más alto y lo más ancho.
5 1/2 - 6 años:	Obtiene la noción lógica de cantidad, pero no puede medirla por medio de unidades.
6 1/2 - 8 años:	Está preparado para tener la idea de cantidad total y estable, puede medirla mediante unidades, ya es posible tener el desarrollo de la idea de número.

La comprensión de un objeto de conocimiento en la teoría de Piaget, está ligada a la posibilidad del alumno de reconstruir este objeto, porque comprendió cuáles son las leyes de composición. La comprensión "piagetana" no es figural sino operatoria, es la comprensión de las transformaciones que engendran esas configuraciones, conjuntamente con los invariantes que le son propios.

Una práctica pedagógica acorde con esta teoría no debe temer al error ni al olvido. Lo importante no es el olvido, sino la incapacidad para restituir el contenido olvidado. Si un alumno ha aprendido las tablas de multiplicar de memoria sin -

comprender las operaciones que las engendran, al olvidarse -- "cuánto es" 9x8 por ejemplo, podrá restituir el conocimiento - olvidado solamente si se dirige a alguien que lo posea y pide- que se lo restituya. Por el contrario, si ha comprendido el mecanismo que produce ese conocimiento, será capaz de restituir-lo por sí mismo no de una sola forma, sino de varias formas. - En el primer caso se dá al sujeto dependiente de otros que po-seen conocimiento y que pueden otorgarlo. En el segundo caso - se dá al sujeto independiente, porque ha comprendido los meca-nismos de producción de ese conocimiento, y por lo mismo se ha convertido en creador de conocimiento.

La diferencia que separa las concepciones conductistas de la anterior concepción piagetana es que en la primera el suje-to del aprendizaje es receptor de un conocimiento y lo recibe- desde afuera y en la segunda el mismo sujeto es productor del- conocimiento.

Un progreso en el conocimiento no se obtendrá sino a tra-vés de un conflicto cognitivo, es decir, cuando la presencia - de un objeto (en el sentido amplio de objeto de conocimiento)- no asimilable fuerza al sujeto a modificar sus esquemas asimi-ladores, o sea, a realizar un esfuerzo de acomodación tendien-te a incorporar lo que resultaba inasimilable (y que constitu-ye, técnicamente una perturbación). Pero de la misma manera -- que no cualquier actividad define la actividad intelectual, -- tampoco cualquier conflicto es un conflicto cognitivo que per-mite un progreso en el conocimiento. Hay momentos particulares en el desarrollo en los cuales, ciertos hechos, antes ignora--

dos, se convierten en perturbaciones. &

En la práctica, no se trata de introducir al alumno frecuentemente en situaciones conflictivas difícilmente soportables sino en tratar de detectar cuáles son los momentos cruciales en los cuales la persona es sensible a las perturbaciones y a sus propias contradicciones, para ayudarle a avanzar en el sentido de una nueva reestructuración.

La teoría psicogenética de Piaget, puede ayudar en parte para comprender la naturaleza de los procesos de adquisición de conocimiento, también puede contribuir a solucionar algunos de los problemas de aprendizaje de las matemáticas y a evitar que el sistema escolar siga produciendo futuros alumnos que adquieran el conocimiento únicamente en forma mecánica, ya que esto resulta perjudicial en el niño.

LA FORMACION DE LOS CONOCIMIENTOS LOGICO-MATEMATICOS Y SUS ESTRUCTURAS

Aunque anteriormente se habló en parte sobre la lógica-matemática, se tratará de ampliar algo más este concepto, ya que es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria.

En primer lugar debe reconocerse que la experiencia es al

& Para el esclarecimiento teórico de estos problemas se remite a Piaget (1975) Ejemplos particularmente claros de conflicto cognitivo se encuentran en B. Inheidir. H. Sinclair y M. Bovel (1975).

go indispensable para la formación de las nociones lógicas y - matemáticas en el niño. Existe un nivel en el cual el niño no- admite que A = C, si A = B y B = C y necesita un control per-- ceptivo para admitir esta transitividad. Eso mismo ocurre con- la propiedad conmutativa y esencialmente con el hecho de que - la suma de los elementos de una serie es independiente del or- den de enumeración. Así, pues, al principio sólo se conoce con la ayuda de la experiencia algo que (a partir del nivel opera- torio de los 7 a los 8 años) aparecerá como evidente por necesi dad deductiva.

Existen, como ya se dijo, dos tipos de experiencias: la - física y la lógico-matemática.

La experiencia física consiste en actuar sobre objetos pa ra extraer un conocimiento por abstracción a partir de estos - mismos objetos. Por ejemplo, cuando el niño levanta sólidos ad vierte por experiencia física la diversidad de los pesos, su - relación con el volumen a igual densidad, la variedad de las - densidades etc.

Por el contrario, la experiencia lógico-matemática consis te en operar sobre los objetos pero sacando conocimientos a -- partir de la acción y no a partir de los objetos mismos.

En este caso, la acción empieza por conferir a los obje-- tos caracteres que no poseían por sí mismos (manteniendo ade-- más sus anteriores propiedades) y la experiencia se refiere al ligamen entre los caracteres introducidos por la acción en el- objeto (y no a las anteriores propiedades de éste). En este -- sentido es en el que el conocimiento se extrae de la acción co mo tal y no de las operaciones físicas del objeto.

A partir de un cierto nivel existe una lógica y una matemática puras para las que la experiencia deja de tener sentido. Por eso, además, la lógica y la matemática pura pueden superar indefinidamente la experiencia al no estar limitadas por las propiedades físicas del objeto. Como la acción humana es la propia de un organismo que forma parte del universo físico se comprende también por qué estas combinaciones operatorias ilimitadas se anticipan con frecuencia a la experiencia y porqué, cuando vuelven a encontrarse, hay acuerdo entre las propiedades del objeto y las operaciones del sujeto.

Todo esto es con respecto a la experiencia, ahora se verá lo referente a las estructuras.

El resultado de las investigaciones de la psicología de la inteligencia, es que las estructuras, aún las más necesarias en el adulto, como las estructuras lógico-matemáticas, no son innatas en el niño, sino que se van construyendo poco a poco. Estructuras tan fundamentales como la de la transitividad, de la inclusión (que implica que una clase total contenga más elementos que la sub-clase encajada en ella), de la conmutabilidad de las sumas elementales, etc., se van construyendo poco a poco, por lo tanto no hay estructuras innatas, sino que suponen una construcción y estas construcciones se remontan paso a paso a estructuras anteriores.

Toda estructura tiene una génesis, y son indisociables génesis y estructuras, es decir, si se está en presencia de una estructura en el punto de partida, y de otra estructura en el punto de llegada, entre ambas se sitúa necesariamente un proceso de construcción, que es la génesis. No se puede encontrar la una sin la otra: pero tampoco se alcanzan ambas en el mismo momento, puesto que la génesis es el paso de un estado anterior a un estado ulterior. Si se quiere entender mejor la relación entre estructura y génesis hay que tener en cuenta el equilibrio en el terreno psicológico.

Para definir el equilibrio, Piaget toma tres caracteres:

Primero, el equilibrio se caracteriza por su estabilidad. Debe observarse que estabilidad no es ni significa inmovilidad y la noción de movilidad no es contradictoria a la de estabilidad: el equilibrio puede ser móvil y estable. En el campo de la inteligencia se necesita esa noción de equilibrio móvil.

Un sistema operatorio será por ejemplo, un sistema de acciones, una serie de operaciones móviles, que pueden ser estables en el sentido de que la estructura que las determina no será modificada una vez que se ha formado.

Segundo carácter: Todo sistema puede sufrir perturbaciones exteriores que tienden a modificarlo. Se dice que existe equilibrio cuando esas perturbaciones exteriores están compensadas por acciones del sujeto, orientadas en el sentido de la compensación. Es fundamental la idea de compensación porque es la más general para definir el equilibrio psicológico.

Como tercer punto, considera el equilibrio como una cosa esencialmente activa, supone una actividad tanto mayor cuanto mayor sea el equilibrio, por lo tanto, equilibrio es sinónimode actividad. Una estructura estará equilibrada en la medida-- en que la actividad de la persona oponga a todas las perturbaciones, compensaciones exteriores.

Gracias al juego de las operaciones, puede anticiparse -- las perturbaciones posibles y compensarlas mediante las operaciones inversas o las operaciones recíprocas.

Esta definición de equilibrio permite la síntesis entre - génesis y estructura que engloba a su vez las de compensación- y actividad. Ahora bien, si se considera una estructura de la- inteligencia, una estructura lógico-matemática cualquiera (una estructura de lógica pura, de clase, de clasificación, de relación, etc., o una operación proposicional), se encontrará en - ella ante todo la actividad, ya que se trata de operaciones, - pero podrá encontrarse en ellas sobre todo el carácter fundamental de las estructuras lógico-matemáticas que es la de ser- reversibles. La reversibilidad de las operaciones, de las estructuras lógico-matemática, constituye lo propio en el plano- de la implicación; para comprender cómo la génesis desemboca - en esas estructuras, hay que recurrir al lenguaje causal. Entonces aparece la noción de equilibrio en el sentido que se ha definido: "como un sistema de compensaciones progresivas; cuando estas compensaciones son alcanzadas, es decir, cuando el -- equilibrio es obtenido, la estructura está constituída en su - misma reversibilidad". (16)

---

(16) PIAGET Jean. "Seis Estudios de Psicología". México, Ariel Seix Barral, 1984. pág. 218.

Ejemplo de estructura lógico-matemática.

El ejemplo de estructura lógico-matemática que se propone está tomado de una de las experiencias que se realizan en psicología infantil: la conservación de la materia de una bola de arcilla sometida a cierto número de transformaciones. Consiste en presentar al niño dos bolas de arcilla de las mismas dimensiones, luego se alarga una de ellas en forma de salchicha. Entonces se pregunta al niño si ambas presentan todavía la misma cantidad de arcilla. Por varias experiencias se sabe que, al principio, el niño no admite esta conservación de la materia: se imagina que hay más en la salchicha porque es más larga, o que hay menos porque es más delgada.

Habrá que esperar, por término medio, hasta los 7 u 8 años para que admita que la cantidad de materia no ha cambiado, otro tiempo hay que esperar para llegar a la conservación del peso, y por último, hasta los 11-12 años, para la conservación del volumen.

La conservación de la materia es una estructura, que se apoya en un agrupamiento operatorio más complejo. Para saber de dónde viene esta estructura, las teorías del desarrollo, de la génesis, en psicología de la inteligencia recurren a tres factores que pueden ser aplicados de uno en uno o simultáneamente los tres. Estos factores son los siguientes: la maduración, que es un factor interno, estructural, pero hereditario; el segundo, la influencia del medio físico, de la experiencia o del ejercicio; el tercero, la transmisión social. Ahora se verá cómo intervienen estos factores en el caso de la bolita - de pasta para modelar. Primero, la maduración. Es evidente que tiene importancia, pero no basta para resolver el problema. La prueba es que el acceso a la conservación no se produce a la - misma edad en los diversos medios. Existe una diferencia entre los niños de la ciudad y del campo observando en estos últimos mayor retraso. Por tanto no se trata solamente de un problema- de maduración; hay que considerar además el medio social, el - ejercicio y la experiencia. Segundo factor: la experiencia física. También es importante; a fuerza de manipular objetos, se llega a nociones de conservación; pero en el terreno concreto- de la conservación de la materia se presentan algunas dificultades. Esa materia que se conserva para el niño antes que el - peso y el volumen, es una realidad que no se puede percibir ni medir. ¿Qué es una cantidad de materia cuyo peso y volumen varía? No es nada accesible a los sentidos: es la substancia -- por la que empieza el niño. Esta conservación de la substancia nada la apoya desde el punto de vista de la medida o de la percepción posibles. "Es, pues, una noción exigida por una estructuración lógica, mucho más que por la experiencia y, en todo - caso, no es debida a la experiencia como factor único". (17)

Tercer factor: la transmisión social. No deja de carecer- de importancia, aunque constituye una condición necesaria, no- es tan poco suficiente. Se puede observar que la conservación- no se enseña; no hay forma para enseñarla a los niños pequeños;

---

(17) PIAGET J. Op. Cit. pág. 220.

luego, cuando se transmite un conocimiento al niño, la experiencia demuestra que pueden suceder dos cosas: o permanecer como letra muerta, o si es comprendida puede sufrir una reestructuración. Esta reestructuración exige una lógica interna.

Como una conclusión se dice que cada uno de estos tres factores tiene su papel, pero que ninguno de ellos basta.

C A P I T U L O 3

ALGUNAS DIFICULTADES MAS USUALES EN LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES DE SEGUNDO GRADO

CAPITULO 3

ALGUNAS DIFICULTADES MAS USUALES EN LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES DE SEGUNDO GRADO

Siendo la formación integral del individuo uno de los fines primordiales de la Educación en nuestro país, la escuela pretende alcanzarlo a través de la educación primaria facilitando al alumno algunos medios necesarios para ayudarle a lograr la meta propuesta.

Entre las materias básicas para la formación del alumno se encuentran las matemáticas, materia que a varios alumnos presenta dificultad, esta es la situación por la cual a través de la investigación realizada se pretende encontrar solución al problema antes mencionado.

La dificultad que el niño presenta para comprender el conocimiento de las operaciones fundamentales, se percibe desde primer grado en donde se inicia con estos temas, hasta sexto grado en donde aún no lo sabe utilizar; sin embargo, para concretizar esta realidad se ha aplicado una sencilla prueba a los alumnos de tercer grado utilizando los conocimientos que tuvo que haber aprendido en el segundo grado, respecto al aprendizaje, en sus dos niveles: Mecánico y de Comprensión.

La prueba consta de tres mecanizaciones de adición y tres sencillos problemas en donde se aplica la adición; enseguida - resuelve cuatro mecanizaciones de substracción con sus tres -- problemas respectivos;* finalmente realiza cuatro multiplica-- ciones y un solo problema en donde tiene que aplicar esta ope- ración combinando también la adición. (Ver Apéndice A.)

Para la realización de esta evaluación en primer lugar no hubo límite de tiempo porque se le dió a cada alumna todo el - tiempo que necesitó para contestarla. En su resolución fueron- libres de usar los medios que cada una creyó conveniente: algu nas alumnas trataron de solucionar la multiplicación a través- del algoritmo de la suma (usaron palitos dibujados para con--- tar).

EN LA ADICION CON NUMEROS NATURALES

Manejo del sistema posicional.

Con esta evaluación se detectó como una dificultad el ma- nejo del sistema posicional, obteniéndose el 46.15%, cifra que manifiesta que tuvieron problema varias alumnas para contestar correctamente. (Ver Apéndice A.)

Interpretación de datos.

---

*Al evaluar las mecanizaciones no se tomó en cuenta la última- porque no presentó grado de dificultad.

Al contestar el primer problema de adición, el 57.69% no-distinguió la separación de datos que debía sumar y todos los-incluyó para efectuar dicha mecanización. (Ver Apéndice A).

En los problemas de la substracción el último presentó un grado de dificultad en donde los datos no estaban acomodados - en el orden correspondiente para la realización de la substracción, ellas debían colocar el minuendo primero y después el -- sustraendo y colocaron el orden como se enunció en el problema, primero el sustraendo y después el minuendo y en la pregunta - del problema se utilizó la palabra más para preguntar la diferencia y por esta palabra el 73.07% efectuó una adición para - resolverlo. (Ver Apéndice A).

EN EL PRODUCTO CON NUMEROS NATURALES

El producto presentó un mayor grado de dificultad desde - las mecanizaciones hasta el problema. En las mecanizaciones sólo el 7.69% contestó acertadamente todas; es decir realizó -- bien las tres mecanizaciones; el 26.92% contestó bien dos mecanizaciones; el 19.23% realizó una sola y, finalmente, el ---- 38.46% no contestó bien, alguna mecanización. (Ver Apéndice B).

En el problema del producto iba incluído dos mecanizaciones sencillas de la misma combinadas con una adición y hubo -- quienes agruparon todos los datos para realizar una adición -- sin distinguir qué datos correspondían a la multiplicación y - qué datos correspondían a la adición. (Ver Apéndice A). Del total de las 26 alumnas a las que se aplicó este instrumento de-evaluación solamente el 3.85% realizó las operaciones correcta mente. (&)

Al final se anexan los Apéndices: B, C y D con el cuadro de frecuencias de cada operación con sus problemas propios para poder ver globalmente en donde presentaron mayor grado de dificultad y qué se les facilitó más. Indudablemente la adición fue la que menos trabajo les dió resolver. sin embargo, en el primer problema se dió un dato numérico para hacerlo reflexionar que no debía incluirse en la adición y el 57.69% lo utilizaron para resolverlo.

La substracción presentó gran dificultad porque el 42.31% no contestó ninguna operación y el 26.92% realizó sólo una substracción de tres.

Otra dificultad se presentó en la substracción cuando el minuendo es menor que el sustraendo porque no contestaron correctamente esta operación. Desde el segundo grado debe quedar bien cimentado y bien comprendido este conocimiento que es básico para después poder realizar hasta la división.

El instrumento (Apéndice A) se elaboró consierando, que el nivel de aprendizaje mecánico se alcanza en relación directa con la capacidad de "resolver operación a través del algoritmo" y, el nivel de aprendizaje reflexivo o de comprensión, se alcanza con la capacidad de "aplicar el algoritmo de las operaciones en la resolución de problemas".

(&) En la prueba aparece un solo problema de multiplicación. pero se evaluó considerándolo como tres porque en el mismo se realizan tres mecanizaciones para su solución.

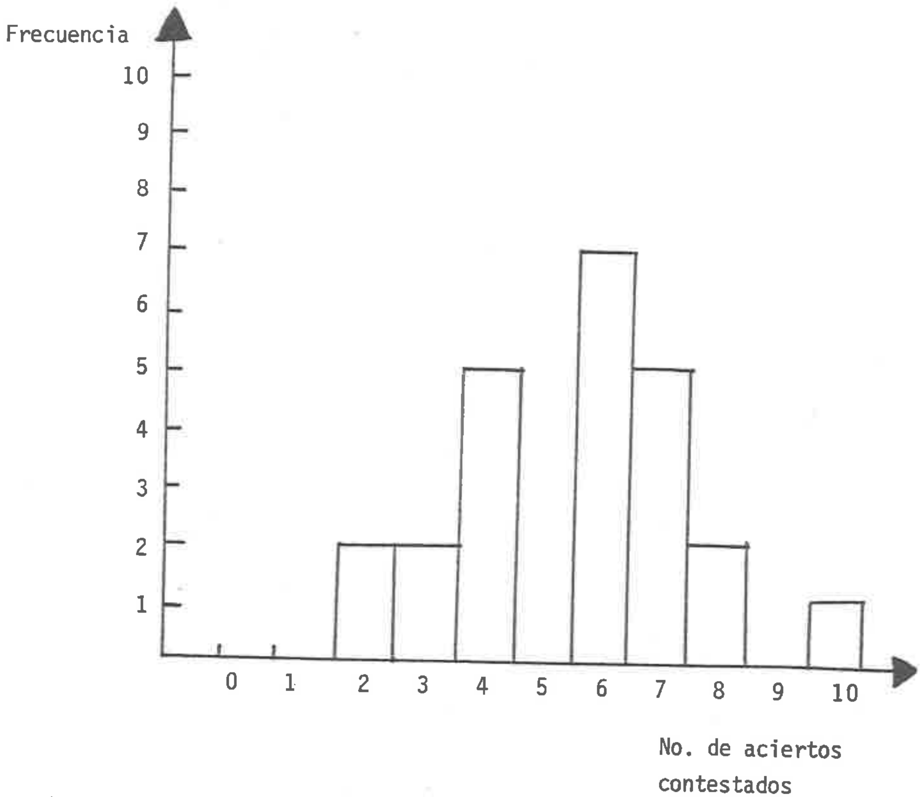
A través de dicho instrumento se puede verificar lo siguiente:

1o.- Que existe una diferencia entre los dos niveles de aprendizaje: mecánico y de comprensión. (Ver Apéndice B y C).

2o.- Que la diferencia es a favor del nivel mecánico.

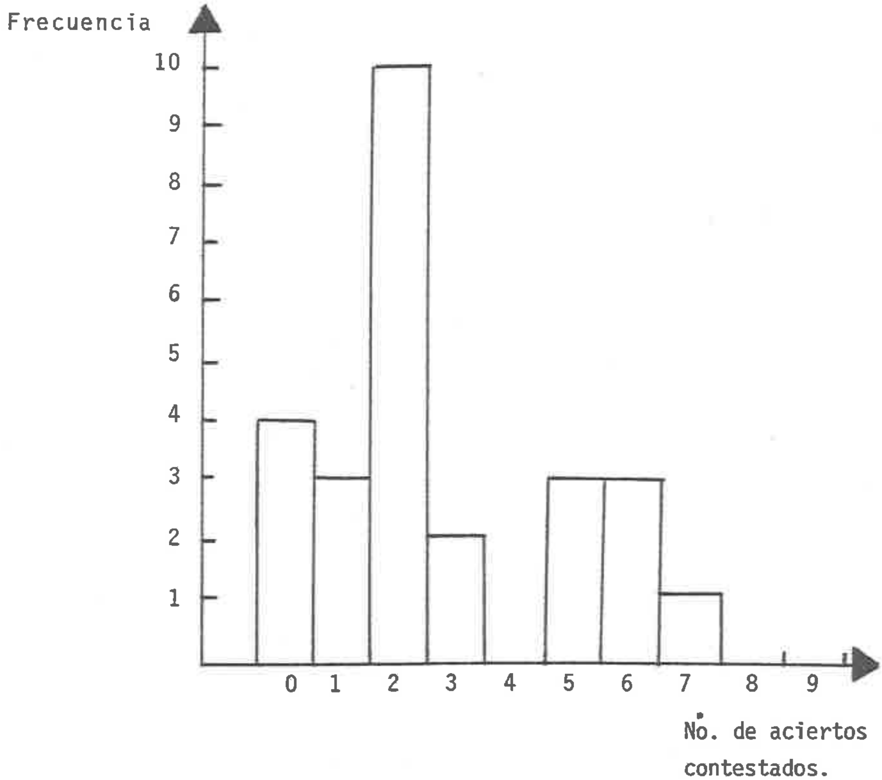
Esto se comprueba con las gráficas que a continuación se presentan

GRAFICA DEL NIVEL DE APRENDIZAJE POR MECANIZACION



(&) Cuadro de concentración No. 1, Apéndice B.

GRAFICA DEL NIVEL DE APRENDIZAJE POR COMPRENSION



(&) Cuadro de concentración No. 2, Apéndice C.

APLICACION DE OPERACIONES EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS

A través de la práctica docente con frecuencia se encuentra la dificultad que presenta el estudio de los problemas aritméticos tanto para su enseñanza como para el aprendizaje del alumno.

Existen en la vida cotidiana del niño eventos, situaciones y problemas que le exigen un conocimiento en relación con las matemáticas y éstas a su vez se presentan como un conjunto coherente de nociones, relaciones y sistemas relacionales que se apoyan entre sí. Incluído en este conjunto se encuentra la aritmética y en particular las operaciones llamadas aritméticas. Las operaciones aritméticas son relaciones ternarias ya que involucran y relacionan tres elementos entre sí -su representación está fundada sobre la noción de "ley de composición binaria" con propiedades específicas: asociatividad, conmutatividad y otras de las cuales ya se habló anteriormente en el Capítulo I.

La adición y substracción son operaciones binarias. Sus propiedades y características permiten una variedad de cálculos y sin embargo no puede decirse que todas las situaciones implicadas en un enunciado de la forma $a \pm b = c$ sean comprendidas simultáneamente por el niño. Algunas veces encuentra dificultad para resolver problemas de tipo aditivo, es decir, aquellos problemas que exigen el empleo de la adición y substracción para encontrar su solución.

El maestro debe tener presente que para el aprendizaje y comprensión de conceptos, operaciones y relaciones entran en -

función gran diversidad de variables de las cuales se mencio-- nan algunas: el desarrollo cognoscitivo, la estructura o tipo- de problema, características semánticas, la representación que el niño se forma del problema, cantidad y tipo de información- verbal, tamaño del número, las diferencias entre el cálculo numérico y el cálculo relacional y los procedimientos de solu--- ción que emplea. También debe considerarse que el proceso de - construcción del conocimiento matemático, se auxilia de la ma- nipulación de los objetos y de la transmisión social, su desa- rrollo se logra a partir de la propia actividad intelectual -- del niño, la reflexión ante los hechos y las relaciones que va estableciendo; es importante hacer destacar que no es suficiente la actividad por sí misma sino que debe ir acompañada por - la reflexión que el alumno puede realizar. Cuando el niño in-- gresa en la escuela primaria ya ha iniciado la elaboración de- operaciones intelectuales, además se pretende que adquiera el- conocimiento haciendo uso correcto de la inteligencia; una de- sus propiedades no es contemplar, sino "transformar" y su mecanismo es esencialmente operatorio, estas operaciones consisten en acciones interiores que se caracterizan por la reversibilidad, esto quiere decir que toda transformación puede ser anulada por su inversa aunque no se realice de hecho, sino en el -- pensamiento.

Es importante esta característica del desarrollo del niño porque a través de su experiencia en la vida familiar y esco-- lar le ayudan a construir lo que podría llamarse campos conceptuales, englobando estos al conjunto problemas, situaciones, -

conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones - de pensamiento que se conectan y entrelazan en el proceso de - adquisición de un determinado conocimiento. Si éste se refiere a la solución de problemas de adición y substracción, se pue-- den considerar 3 elementos constantes (invariantes) y son las- siguientes: Invariantes Relacionales.

I. Cualitativa: Se requieren tres elementos en los problemas - de adición y substracción; son dos elementos conocidos y uno - es el que no se conoce y se desea conocer.

I. Cuantitativa: Existe una cierta relación de cantidad en todos los problemas.

I. Relacional: Para llegar a la solución de los problemas se - establece una relación entre los números.

Teoremas en Acto. Aparte de las invariantes el maestro debe tener presente que el niño no resuelve el problema aritmético -- automáticamente, va planteándose una serie de hipótesis como - resultado de la representación que él se hace del problema, esto lo va llevando a formularse acciones o estrategias para encontrar la solución.

En el enfoque de la aritmética se hace destacar lo que se ha llamado invariantes relacionales y teoremas en acto, dentro del marco de campos conceptuales. A partir de esto la enseñanza-aprendizaje de los problemas aditivos se plantea considerando la estructura de los problemas, o sea, las relaciones entre los números, la posición del elemento desconocido y la clase - de números con los que se trabaje.

A continuación se analizan los siguientes problemas:

I. Eva tiene 6 flores en la mano derecha y otras 3 en la mano-izquierda.

¿Cuántas tiene en total?

6 + 3 =_____

2.- Pepe juega a las canicas.

Durante el juego él pierde 3 canicas

Al final del juego le quedan 6.

¿Cuántas tenía antes de empezar a jugar?

6 + 3 = _____

3.- Silvia tiene 6 lápices de colores.

Lucía tiene 3 más que Celia.

¿Cuántos lápices de colores tiene Lucía?

6 + 3 =_____

4.- Miguel tiene 6 pesos.

Si él gana 3 pesos tendrá igual que Lupe

¿Cuánto dinero tiene Lupe?

6 + 3 =_____

Existen algunas semejanzas en los cuatro problemas y son-las siguientes:

1. La invariante cualitativa que comprende el mismo enunciado-matemático a+b=c, en donde hay 2 elementos conocidos y uno por conocer.

2. La invariante cuantitativa, el cálculo numérico es semejante en todos 6 + 3 =.

Lo que se puede observar en estos problemas es que hay diferentes relaciones entre los elementos, esto conduce a representaciones diferentes tanto a nivel del niño como de manejo - por parte del profesor.

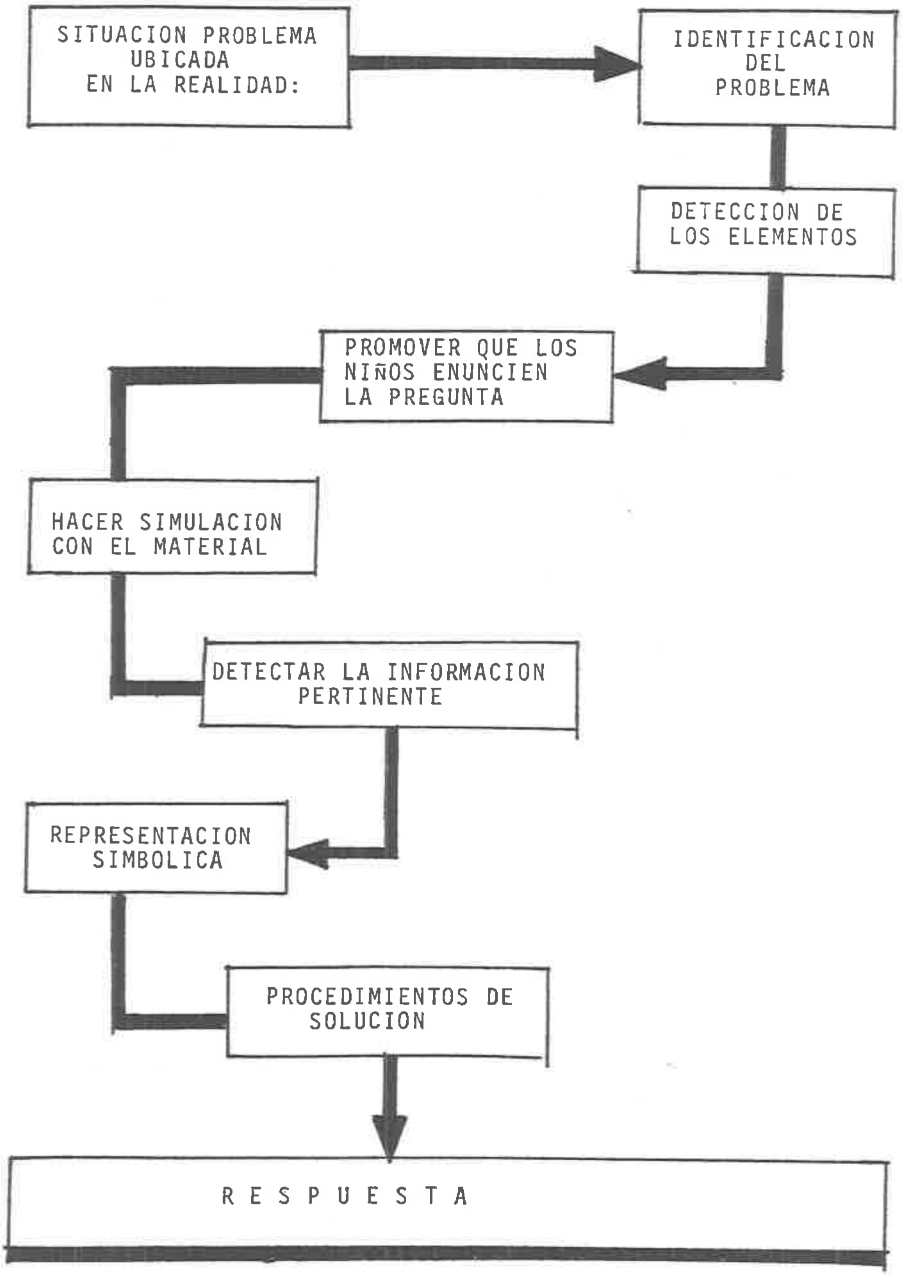
El trabajo de los problemas de adición y substracción en- el aula podría facilitarse siguiendo una secuencia didáctica - que ayude al alumno a encontrar la solución adecuada. En ésta- se resaltan algunas actividades fundamentales, pero no se quiere decir que sean las únicas, el maestro podrá enriquecerla; - con base a sus experiencias.

La secuencia Didáctica puede representarse de la siguiente forma: (I)

El trabajo de los problemas de adición y substracción en el aula.

(I) MEMORIA del VII Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas. Guad., Jal. Impreso en Monterrey, 1984. -- A.N.P.M. pág. 41.

UNA SECUENCIA DIDACTICA



La situación problemática se deriva a partir de un relato o de una historia y se enfatizan los enunciados en donde se - encuentre la información:

Pepe juega a las canicas.

Antes de empezar él tiene 6 canicas

Durante el juego él gana tres.

La síntesis de la historia se hace con la participación - de los niños haciendo destacar el problema aritmético y se les estimula para que ellos formulen la pregunta del problema.

Después que se ha escrito el problema en el pizarrón y en los cuadernos se pregunta a los alumnos qué se puede hacer para resolver el problema. Es conveniente por parte del maestro- apreciar los diferentes procedimientos seguidos por los alum-- nos y respetar los pasos de cada niño al resolver el problema- a fin de que considere en las actividades sucesivas el razonamiento seguido por sus educandos.

El tipo de material que se utilice depende del grado escolar en que se trabaje. Para segundo grado se sugiere material- objetivo: (palitos, corcholatas, etc.) para simular el problema, en tercero es recomendable usar representaciones gráficas- (dibujos).

Finalmente el uso de esta secuencia Didáctica puede ser - auxiliar en el proceso enseñanza-aprendizaje que facilite al - alumno el encontrar una solución más adecuada a los problemas- que se le presenten.

COMO UTILIZAR LA RECTA NUMERICA EN LA ENSEÑANZA DE LA SUBSTRACCION

A través de la práctica docente y comprobando con una investigación realizada sobre la aplicación de las operaciones fundamentales en segundo grado (ver apéndice D), en la substracción ya se presentaron dificultades para su aprendizaje, sobre todo en las substracciones en que algunas cifras del minuendo son menores que en el sustraendo. Para tratar de solucionar en mínima parte este problema se menciona una forma práctica de cómo utilizar la recta numérica en la enseñanza de la substracción.

Véase un primer caso:

Decenas	Unidades	
4	0	MINUENDO
2	7	SUSTRAENDO
1	3	RESTA O DIFERENCIA

1.- Busca en el SUSTRAENDO de la operación ¿Cuál número está en las Unidades?: Es 7

2.- Busca en el MINUENDO de la operación ¿Cuál número está en las Unidades?: es 0

3.- Traza una recta numérica en el patio anotando los números desde el 0 hasta el 18. (Puede dibujarse en el pizarrón, en su cuaderno o puede usar la regla).

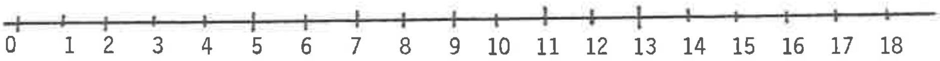


Fig.(3)

4.- ¿Cuál número en la recta adelante del 7 tiene el 0 en las Unidades?: es 10. (Figura 3)

5.- Cuenta en la recta los pasos que das a partir del 7 para- llegar al número 10..Son 3 pasos- (figura 3), después - de contarlos anótalos en el lugar de las unidades que co- rresponden al resultado: RESTA O DIFERENCIA.

Decenas	Unidades	
4	0	MINUENDO
2	7	SUSTRAENDO
	3	RESTA O DIFERENCIA

6.- El 1 de la decena del 10 lo vas a sumar al número de dece nas del SUSTRAENDO: $\boxed{1 + 2 = 3}$. Localiza el 3 en la recta - y cuenta los pasos que das para llegar al 4. (Figura 3). - Anótalos en el lugar de las Decenas que corresponden al re sultado: RESTA O DIFERENCIA

Decenas	Unidades	
4	0	MINUENDO
2	7	SUSTRAENDO
1	3	RESTA O DIFERENCIA

7.- Comprueba el resultado de la resta realizando estas sumas- en la recta. (Figura 3.1)*

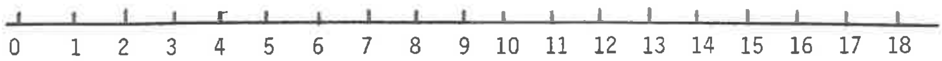


Fig.(3.1)

a) ¿Cuántos pasos das del 7 al 10? 7 + $\boxed{3}$ = 10

El número del cuadrito que es uno de los SUMANDOS, es el -- mismo del resultado de las Unidades.

b) ¿Cuántos pasos das del 3 al 4? 3 + $\boxed{1}$ = 4

El número del cuadrito que es uno de los sumandos es el mismo del resultado de las Decenas.

Esta es una de las formas en que se aplica el uso de la recta, el maestro puede encontrar diferentes formas de cómo utilizar- la también.

Para que sea gradual el aprendizaje se sugiere empezar -- con el MINUENDO menor (en valor absoluto) que el SUSTRAENDO en el lugar de las unidades, como se realizó en el ejemplo.

Ya que se domine este conocimiento se pasa al minuendo menor que el sustraendo en el lugar de las decenas. Por ejemplo:

---

* Cabe aclarar que las decenas también se buscan en las unidades de la recta usando ésta como auxiliar y punto de localización, pero no en relación con el sistema decimal, dado que el desarrollo mental del niño no permite tratarlo de esta forma.

C D U	C D U	C D U
7 3 4 ---- MIN	4 8 6 ---- MIN	8 7 3 ---- MIN.
- 2 7 1 ---- SUST.	- 1 9 5 ---- SUST.	- 6 8 1 ---- SUST.
4 6 3 ---- R. ó D.	2 9 1 ---- R. ó D.	1 9 2 ---- R. ó D.

El ejercicio siguiente sería con el minuendo menor que el sustraendo en el lugar de las unidades y decenas. Por ejemplo:

C D U	C D U	C D U
6 5 6 ---- MIN	5 7 1 ---- MIN.	9 2 8 ---- MIN.
-2 7 8 ---- SUST.	- 1 9 4 ---- SUST.	- 6 3 9 ---- SUST.
---- R ó D.	---- R. ó D.	---- R. ó D.

Otro grado de dificultad puede ser dejar el último número del sustraendo solo y los primeros con números en las unidades y decenas. Por ejemplo:

C D U	C D U	C D U
6 2 8 ---- MIN	5 3 6 ---- MIN.	9 2 8 ---- MIN.
- 3 9 ---- SUST.	- 7 8 ---- SUST.	- 6 9 ---- SUST.
---- R. ó D.	---- R. ó D.	---- R. ó D.

También es conveniente que el alumno se familiarice con los nombres que se utilizan en las operaciones fundamentales, como son: Adición o suma; substracción, resta, ó diferencia; producto o multiplicación, para que aprenda a usar la terminología propia de las matemáticas y después en grados superiores vayan disminuyendo las dificultades.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

El uso de la Recta Numérica puede ser un auxiliar para la enseñanza-aprendizaje de las operaciones fundamentales en la educación primaria.

Es necesario enseñar al alumno desde los primeros años el lenguaje matemático.

Al educando algunas veces le cuesta trabajo el aprendizaje de las operaciones porque este proceso ha sido mecanicista.

Para la comprensión de las Matemáticas es necesaria la reflexión.

La Teoría Psicogenética es importante porque da a conocer la evolución del niño para saber en qué etapa del desarrollo se encuentra y de acuerdo a esto usar los medios propios para la enseñanza.

Hay que tener presente que en el aprendizaje tiene que haber un proceso de asimilación-acomodación.

El aprendizaje es un proceso activo que debe ir acompañado de la reflexión.

El aprendizaje se produce cuando el niño posee mecanismos e instrumentos de pensamiento (estructuras), con los que pueda asimilar la información.

Para el aprendizaje de las operaciones fundamentales es indispensable la comprensión.

La investigación en la educación es urgente y necesaria para encontrar solución a los problemas que se presentan en ella.

La investigación requiere de mucho tiempo, por lo cual sería conveniente dedicar maestros de tiempo completo para la realización de estos trabajos.

Es necesario realizar trabajos de investigación en el mayor número de escuelas posibles y en todos los grados de educación primaria.

Así como los libros de texto son a nivel nacional; los grupos de orientación para el magisterio sean dirigidos por Universidad Pedagógica Nacional.

De acuerdo a las necesidades propias de cada Entidad realizar investigaciones para su solución.

Que el magisterio nacional aproveche a la Universidad Pedagógica Nacional para realizar investigaciones relacionadas a los problemas de la Educación.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

ARIAS OCHOA, Marcos Daniel. Seminario. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1986. 150 p. (Sistema de Educación a Distancia).

BATRRO, Antonio M. Diccionario de epistemología genética. Buenos Aïres, Ed. Proteo, 1971. 17 p.

BONFIL CASTRO, Ma. Guadalupe y otros. Pedagogía: bases psicológicas. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1982 324. p. Sistema de Educación a Distancia).

——— Pedagogía: La práctica docente. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1981. 94 p. (Sistema de Educación a Distancia).

CARVAJAL JUAREZ, Alicia Lily y otros. Contenidos de aprendizaje. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1983. - 74 p. (Sistema de Educación a Distancia).

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la matemática moderna. México, Ed. Trillas, 1973. 23 p.

CERUTTI GULDBERG, Horacio, Adolfo Mir Araujo y David René T. - García. Metodología de la investigación I. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1981. 41 p. (Sistema de - Educación a Distancia).

CLAUSS, G. y H. Hiebsch. Psicología del niño escolar. México,- Ed. Grijalbo, 1966. 59 p.

CUERVO CUERVO, Alberto y otros. Teorías del aprendizaje.México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1986. 211 p.

DOLCIANO P., Mary y otros. Introducción al análisis moderno. - México, Publicaciones Cultural, 1969. 33 p.

FERREIRO E. y Ana Teberosky, Introducción en los sistemas de - escritura en el desarrollo del niño. México, Ed. Siglo -- XXI, 1980. 17 p.

FREGOSO, Arturo. Introducción al lenguaje de la matemática. México, Ed. CEMPAE, 1972. 150 p.

GONZALEZ, Marcela, Lidia Y. y otros. Matemáticas I, Volumen 3. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1979. 7 p.- (Sistema de Educación a Distancia).

GUAJARDO RAMOS, Eliseo. Licenciatura en educación básica. Sexto curso. Optativa. Jean Piaget. México, SEAD. 1984. 65 - p.

HAASER, Norma. B. Análisis matemático I. Curso de Instroducción México, Ed. Trillas, 1970-79 23 p.

LAWRENCE Evelyn y otros. La comprensión del número y la educación del niño según Piaget. Barcelona, Ed. Paidós, 1982.- 7 p.

MEMORIA, del VII Congreso Nacional de profesores de matemáticas. Monterrey, México, A.N.P.M., 1984. 37 p.

MUNGUIA ZATARAIN, Irma y José Manuel Aquino. Técnicas de investigación documental. Manual de consulta. México, Universidad Pedagógica Nacional, SEP. 1980. 111 p.

NICHOLS, Eugene D. Algebra Moderna Elemental. México, Ed. --- C.E.C. 1968.-1970. 48 p.

PETERSON, John. A. y Joseph Hashisaki. Teoría de la Aritmética. México, Ed. Limusa, 1969-1982. 267 p.

PIAGET, Jean. Seis estudios de psicología. 4 ed. Barcelona, -- Ed. Seix Barrall, 1984. 218 p.

REMPLEIN, Heinz. Tratado de psicología Evolutiva. 4 ed. Barcelona, Ed. Labor, 1966-1974. 13 p.

RIVADEO F., Ana María. (compiladora). Introducción a la epistemología. México, UNAM, 1986. 16 p.

SARRAMONA, Jaime. Investigación y Estadística aplicadas a la - educación. Barcelona, Ed. CEAC, 1980.

SEP Libro para el Maestro. Segundo grado. México, 1981. 20 p.

A P E N D I C E S

APENDICE A.

INVESTIGACION POR MEDIO DE LA EVALUACION DE UNA PRUEBA

PRUEBA DE MATEMATICAS

Edad 8 ALUMNO Ma de Lurdes Aguirre Preciado

ESCUELA 11- GRADO 3º

LUGAR Y FECHA Urb. H 484 Tlaquepaque Jal. 26 de Feb./82

No. DE ACIERTOS 7 - 2 CALIFICACION

I.- EN LAS RECTAS NUMERICAS? EFECTUA LAS SIGUIENTES ADICIONES:

3 + 9 + 4 = 16 ✓

0 I 2 3 4 5 6 7 8 9 I0 II I2 I3 I4 I5 I6

7 + 8 + 0 + 15 ✓

0 I 2 3 4 5 6 7 8 9 I0 II I2 I3 I4 I5 I6

8 + 5 + I = 14 ✓

0 I 2 3 4 5 6 7 8 9 I0 II I2 I3 I4 I5 I6

II.- RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS.

EL VIERNES LOS ALUMNOS DE LOS " GRUPOS DE SEGUNDO FUERON DE PASEO.

I.- SALIERON EN 2 AUTOBUSES. EN UNO IBAN 46 NIÑOS Y EN OTRO 49. ¿ CUANTOS ALUMNOS SALIERON DE PASEO?

OPERACION

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 46- \\ 49 \\ \hline 115 \end{array}$$

✗

RESULTADO 115.

2.-EN EL MERCADO COMPRARON PLANTAS PARA EL JARDIN DE LA ESCUELA, ADQUIRIERON 28 ROSALES Y 34 DALIAS. ¿ CUANTAS PLANTAS LLEVARON? 28+

OPERACION 34 Resultado 62 ✓

2

3.-EL PROFESOR DE UN GRUPO COMPRO 75 NARANJAS Y EL OTRO COMPRO 58 NARANJAS ¿ CUANTAS NARANJAS COMPRARON EN TOTAL?

OPERACION

75+
58
133

RESULTADO 133

III.- EFECTUA LAS SIGUIENTES SUSTRACCIONES:

960	809	641	936
- 679	565	- 317	- 825
299	364	324	111

IV .- RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

I.- DON RODRIGO TENIA 970 LITROS DE ACEITE; SI VENDIO 684 LITROS, ¿ CUANTOS LITROS DE ACEITE LE SOBRAN?

OPERACION

970-
684
294

RESULTADO 294

2.- LINA COMPRO 750 PALITOS PARA HACER UNA CHAROLA; SI GASTO 405 ¿CUANTOS PALITOS LE QUEDAN?

OPERACION

750-
405
365

RESULTADO 355

3.- EN MI ESCUELA HAY 589 ALUMNOS, y EN LA DE LUZ HAY 832. ¿CUANTOS ALUMNOS MAS HAY EN LA ESCUELA DE LUZ?

OPERACION

589+
832
1357

RESULTADO 1357

V.- REALIZA ESTAS MULTIPLICACIONES

648	957	201	325
x 37	x 48	x 69	x 52
14536	17656	1809	650
1944	3828	1206	1625
24676	45936	13869	16900

VI.- RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

I.- TENGO 7 MONEDAS DE 50 PESOS Y 3 DE 20 PESOS ¿CUANTOS PESOS TENGO?

OPERACION

50+
20
7
3
80

RESULTADO 80

APENDICE B

CUADRO 1 ASPECTO MECANICO

No. de Aciertos contestados	Frecuencia de aciertos contestados	Porcentajes %	% Ac_A	% Ac_D
10	1	3.85	100.00	3.85
9	0	0.00	96.14	3.85
8	2	7.69	96.14	11.54
7	5	19.23	88.45	30.77
6	7	26.92	69.22	57.69
5	2	7.69	42.30	65.38
4	5	19.23	34.61	84.61
3	2	7.69	15.38	92.30
2	2	7.69	7.69	100.00
1	0	0.00	0.00	100.00
0	0	0.00	0.00	100.00
	26			

N= 11= No. de Aciertos

F_T= 26 = Frecuencia Total

$\overline{X}$ = 2.36 = Promedio de respuestas contestadas

S = 2.34 = Desviación respecto a la Media

Fuente:

Escuela Urbana 484 Grado 2o. No. de alumnos 26

Instrumento Prueba con 10 reactivos de mecanización

APENDICE C

CUADRO 2 ASPECTO COMPRENSION

No. de aciertos contestados	Frecuencia	Porcentajes %	% Ac_A	% Ac_D
9	0	0.00	100.00	0.00
8	0	0.00	100.00	0.00
7	1	3.85	100.00	3.85
6	3	11.54	96.15	15.39
5	3	11.54	84.61	26.93
4	0	0.00	73.07	26.93
3	2	7.69	73.07	34.62
2	10	38.46	65.38	73.08
1	3	11.54	26.92	84.62
0	4	15.38	15.38	100.00
	26			

N = 10 = No. de Aciertos

F_T = 26 - Frecuencia Total

$\overline{X}$ = 2.6 = Promedio de respuestas contestadas.

S = 3 = Desviación respecto a la Media

Fuente: Esc. Urbana 484 Grado 2o. No. de alumnos 26
Instrumento: Prueba con 9 reactivos de comprensión.

APENDICE D

APRENDIZAJE POR MECANIZACION Y COMPRENSION

ADICION, SUBSTRACCION Y PRODUCTO

ADICION

Aciertos	Frec.	%
3	24	92.31
2	2	7.69
1	0	0.00
0	0	0.00
Total	26	

SUBSTRACCION

Aciertos	Frec.	%
3	4	15.38
2	4	15.38
1	11	42.31
0	7	26.92
Total	26	

PRODUCTO

Aciertos	Frec.	%
4	2	7.69
3	2	7.69
2	7	26.92
1	5	19.23
0	10	38.46
Total	26	

ADICION

Aciertos	Frec.	%
3	9	34.62
2	9	34.62
1	4	15.38
0	4	15.38
Total	26	

SUBSTRACCION

Aciertos	Frec.	%
3	3	11.54
2	3	11.54
1	2	7.69
0	18	69.23
Total	26	

PRODUCTO

Aciertos	Frec.	%
3	1	3.85
2	0	0.00
1	0	0.00
0	25	96.15
Total	26	

Fuente:

Escuela Urbana No. 484 Grado 2o. No. de Alumnos 26

Instrumento: Prueba con 10 reactivos de mecanización

Instrumento: Prueba con 9 reactivos de comprensión.

GLOSARIO

BIBLIOGRAFIA

Jean Piaget

Clave de los Libros citados	
D.Q.	(Con Inhelder): El desarrollo de las cantidades en el niño.
E.G.I.	Introducción a la epistemología genética. I. el pensamiento matemático.
G.N.	(Con A. Szeminska): La génesis del número en el niño.
G.S.L.	(Con B. Inhelder): La génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificación y seriación.
J.R.	El juicio y el razonamiento en el niño.
L.E.A.	(Con. B. Inhelder): De la lógica del niño a la lógica del adolescente.
L.P.	El lenguaje y el pensamiento en el niño.
N.I.	El nacimiento de la inteligencia en el niño.
N.T.	El desarrollo de la noción de tiempo en el niño.
P.I.	La psicología de la inteligencia.
R.E.	(Con B. Inhelder): La representación del espacio en el niño.
T.L.	Tratado de lógica. Ensayo de lógica.
E.E.G.I.	(Con. E.W. Beth y W. Mays): Epistemología genética e investigación psicológica.
E.E.G.II	(Con Apostel y B. Mandelbrot): Lógica y equilibrio (Estudios de epistemología genética II).
E.E.G. IV.	(Con Apostel, W. Mays, A. Morf y B. Matalon): Las relaciones analísticas y sintéticas en el comportamiento del sujeto.
E.E.G. V.	(Con A. Jonckheere y B. Mandelbrot): La lectura y la experiencia.
E.E.G. VI	(Con J.S. Brunner, F. Bresson y A. Morf): Lógica y percepción.

E.E.G. VII (Con P. Gréco): Aprendizaje y conocimiento.

E.E.G. X (Con M. Goustard, P. Gréco y B. Matalon): La lógica de los aprendizajes.

E.E.G. XI (Con P. Gréco, J.B. Grize y S. Papert): Problemas de la construcción del número.

E.E.G. XII (Con D.E. Berlyne): Teoría del comportamiento y operaciones.

E.E.G. XIV (Con E.W. Beth): Epistemología matemática y psicológica. Ensayo sobre las relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.

1.- Abstracción.

"...la abstracción consiste en agregar relaciones al dato perceptivo, y no sólo en extraerlas de él. Reconocer la existencia de cualidades comunes, tales como cuadrado o redondo, grande o pequeño, «chato» o de tres dimensiones, etc., es construir esquemas relativos a las acciones del sujeto, tanto como a las propiedades del objeto... De una manera más general aún, las cualidades comunes en que se basa una clasificación son «comunes» en la medida en que la acción del sujeto las pone en común, lo mismo que en la medida en que los objetos prestan a ese poner en común". G.S.L. 247.&

2.- Abstracción reflexiva de la experiencia lógico-matemática.

"...(a) la experiencia lógico-matemática consiste en comprobar en objetos cualesquiera los resultados de las acciones ejercidas sobre ellos; (b) los resultados son determinados por los esquemas de las acciones así ejercidas sobre los objetos; (c) pero para comprobar (o «leer») esos resultados, el sujeto tiene que efectuar otras acciones (de lectura) utilizando los mismos esquemas que aquellos cuyo producto se trata de examinar. Sin embargo, (d) el conocimiento adquirido es nuevo para el sujeto, es decir, que (aunque en verdad una simple deducción habría podido reemplazar la experiencia) la experiencia le enseña aquello de lo cual no tenía conciencia de antemano. Por lo tanto hay que llegar a la conclusión (e) de que la abstracción por medio de la cual el sujeto extrae el conocimiento nuevo (para su conciencia) de los resultados de sus acciones implica una parte de construcción, que tiene por efecto traducir el esquema y sus consecuencias a términos de preoperaciones o de operaciones conscientes, cuyo manejo posterior permitirá reemplazar por deducciones las experiencias o procedimientos empíricos que así se han vuelto inútiles". E.E.G. XIV 253.
"...transforma la conducta misma, diferenciándola, y por consiguiente...agrega algo a la cualidad así aislada por la abstracción". E.G. I 72.

3.- Acción.

"Al aplicarse a los objetos, toda acción se acomoda a ellos, es decir, sufre en negativo la impresión de las cosas sobre las cuales se moldea. Por supuesto, lo esencial de la acción no consiste en esa impresión: consiste en la modificación impuesta al objeto, es decir, en la asimilación de éste a los esquemas del sujeto". R.E. 540.
"Df. 1. Acción es toda conducta (observable exteriormente, inclusive por interrogación clínica) que apunta a un objeto desde el punto de vista del sujeto considerado". E.E.G. IV 43.

& BATTRO, Antonio M. Diccionario de epistemología genética. -- Buenos Aires, Ed. Proteo, 1971. 17 p.

Versión resumida preparada para esta investigación.

Es preciso "definir la acción como una reequilibración de la - conducta en los casos de modificación del medio". E.E.G. IV -- 44.

4.- Acción lógico-matemática.

Df. 20. Llamaremos lógico-matemática toda acción susceptible - de introducir propiedades de tipo I en los objetos". E.E.G. IV 57.

5.- Acomodación op. Asimilación.

Para "la acomodación de los esquemas...existe...un tertium en- tre aplicar y no aplicar un esquema de asimilación: consiste - en modificar a éste..." E.E.G. VII 44.
"En primer lugar, designa una actividad: aunque la modifica--- ción del esquema de asimilación sea impuesta por las resisten- cias del objeto, no es dictada de golpe por el objeto, sino -- más bien por la reacción del sujeto que tiende a componer esa- resistencia (de tal modo, puede proceder por reacción inmedia- ta, o por ensayos y errores, etc.). Pero en segundo lugar, si- la acomodación es entonces, todavía, una actividad que consis- te en diferenciar un esquema de asimilación, con respecto a la asimilación es derivada o secundaria" E.E.G. VII 44.
"La presión de las cosas termina siempre, no en un sometimien- to pasivo, sino en una simple modificación de la acción ejerci da sobre ellas". P.I. 14. Cf. N.I. 245.

6.- Actividad operatoria.

Se forma el "problema del conocimiento en términos biológicos- de relaciones entre el organismo y el medio, o en términos psi cológicos de relaciones entre la actividad operatoria del suje to y la experiencia". E.G. I 25.

7.- Adición lógica.

"La inclusión o adición lógica (reunión o exclusión de objetos como elementos de clases)". D.Q. 332.
"La adición lógica...no es otra cosa que la reunión de los ele mentos en una clase, o de dos clases en una clase total". D.Q. 266.

8.- Adqüisición (Mecanismos).

"(1) maduración interna del sistema nervioso (P.Ej.:marcha);
(2) aprendizaje en función de la experiencia;
(2a) física (p.ej.: noción de peso);
(2b) lógico-matemática (p.ej.: conmutatividad de la suma);
(3) por el lenguaje y las transmisiones educativas o sociales (p.ej.: numeración hablada);
(4) por equilibración progresiva (p.ej.: conservación de la - materia), en lugar de limitarse a emitir juicios sobre --

las configuraciones únicamente (el niño) se dedica a razonar sobre las transformaciones, y de ello cada vez más reversible (en el sentido de la intervención de las transformaciones inversas) E.E.G. XIV 210.

9.- Agrupación y reversibilidad.

"Un mecanismo operatorio reversible, es decir...agrupaciones - lógicas o...grupos aritméticos o geométricos". D.Q. 322.
"La reversibilidad de la agrupación operatoria es a la vez deducción o asimilación indefinidas y perpetuamente acomodables- a las situaciones nuevas". M.V. 172.
"Es equilibrio móvil que constituye en la vida mental la«agrupación»de las operaciones directas e inversas". D.Q. 330.
"La agrupación de las operaciones, es decir, su composición reversible". D.Q. 51.

10.- Agrupación desde el punto de vista matemático (J.B.Grize).

"Las clases y las relaciones sobre las cuales el niño se apoya en su desarrollo no son las nociones abstractas del lógico.
Se mantienen cualitativas en lo fundamental, aunque estructuradas, y esa estructura es la que Piaget llamó agrupación, y que desempeña un papel de primer plano en la explicación psicológica". E.E.G. XI 70-74.

11.- Aprendizaje.

"... (a) todo aprendizaje supone la utilización de coordinaciones no aprendidas del todo, que constituyen una lógica o una- prelógica del sujeto; (b) el aprendizaje de las estructuras lógicas supone la utilización de otras estructuras lógicas o prelógicas previas, no aprendidas (o no aprendidas del todo)". -- E.E.G. X 184.

12.- Asimilación.

"El acto de asimilación es el hecho primero, que engloba en un todo la necesidad funcional, la repetición y la coordinación - entre el sujeto y el objeto, que anuncia la implicación y el - juicio". N.I. 46.
"...modificación objetiva de movimientos y posiciones externas por los movimientos propios, así como la modificación subjetiva resultante del hecho de que la percepción o la comprensión- de dichos movimientos y posiciones externas es necesariamente- relativa al«punto de vista»propio". "...asimilación de los datos actuales a los datos anteriores por el hecho de que la misma acción, o, dicho de otro modo, el mismo esquema, les es -- aplicado sucesivamente". F.S. 288.
"Si toda acción es asimiladora, y si asimilar significa integrar los objetos (o las ligazones exteriores) a esquemas de -- acciones, toda acción que incide sobre un objeto transformará- a éste en sus propiedades o en sus relaciones". E.E.G. V 57.

13.- Cantidad.

"...la cantidad está dada al mismo tiempo que la cualidad: está constituída por las relaciones asimétricas que vinculan necesariamente entre sí a las cualidades, sean cuales fueren". G.N. 15.

14.- Clase lógica.

"...una clase lógica y...su división en subclases o en elementos componentes... es un sistema de reuniones (aditivas o multiplicativas) y de separaciones (sustracciones o divisiones lógicas". D.Q. 272-273. "...es una reunión de individuos que presentan en común la misma cualidad". G.N. 217.

15.- Clasificación.

"...en todos los planos del desarrollo existen conductas de clasificación, bien en estado diferenciado, o bien que las clasificaciones sigan siendo inherentes a las otras formas de acción: entonces, o bien el sujeto dividirá los objetos en colecciones, o bien actuará sobre ellos de una manera cualquiera (aprehender, equilibrar, etc), pero sus acciones supondrán también clasificaciones...". E.E.G. XIV 183.

16.- Conocimiento (asimilación).

Hay un "modelo de conocimiento (asimilación) según el cual la operación es un acto que se adquiere en función de la propia coordinación de las acciones del sujeto, porque esa coordinación, como tal, implica ya algún elemento de transformación en el sentido lógico-matemático del término". E.E.G. XII 113.

17.- Correspondencia numérica.

"Será...la que haga abstracción de las cualidades de las partes y las considere como otras tantas unidades..." G.N. 84.

18.- Deducción.

"La deducción comienza cuando la construcción se efectúa en el interior de <agrupaciones> o de <grupos> acabados". D.Q. 338.

19.- Epistemología genética (forma general).

"Estudio de los mecanismos del acrecentamiento de los conocimientos". E.E.G. I 14.

20.- Equilibrio y reversibilidad.

"...el sistema está en equilibrio cuando las operaciones de que es capaz el sujeto constituyen una estructura tal, que sus operaciones sean susceptibles de ser desarrolladas en los dos-

sentidos (bien por inversión estricta o negación, bien por reciprocidad). Por consiguiente, el sistema está en equilibrio porque el conjunto de las operaciones posibles constituye un sistema de transformaciones virtuales que se compensan, y que se compensan en la medida en que obedecen a las leyes de la "reversibilidad". E.G. I 36.
"...el equilibrio [es] el lugar de unión específica entre lo posible y lo real..." E.G. I 36.

21.- Equilibrio y estructura.

"Equilibrio y estructura son los dos aspectos complementarios de toda organización del pensamiento. L.E.A. 213.
"...las estructuras pueden interpretarse como el producto o el resultado de un proceso autónomo de equilibración". Así como "la estructura (u órgano) [es diferente de] la función (en el sentido biológico del término):...la equilibración es un proceso funcional distinto de la estructura..." E.E.G. II 43.

22.- Estructura matemática.

Estructura genética.

Se llaman < estructuras M > las de los matemáticos y < estructuras G > las del sujeto estudiado genéticamente. Aunque son mucho menos generales que las estructuras M, las estructuras G inciden, sin embargo, sobre elementos de naturalezas muy diversas.
Lo que los Bourbaki llaman <relaciones> constitutivas de las estructuras M corresponde a lo que nosotros llamamos las <operaciones> de las estructuras G, por ejemplo la ley de composición z = xty de un < grupo > ".
"Las <condiciones> de esas relaciones en las estructuras M son las que denominamos las <leyes de composición> que caracterizan a la estructura G como sistema de conjunto; ejemplos: la reversibilidad por inversión es el caso de las estructuras de clase y por reciprocidad en el caso de las de relación". E.E.G. XIV 201-202.

23.- Evolución del pensamiento del niño.

"...se caracteriza por el paso de un egocentrismo general... a la descentralización intelectual..." P.I. 88.

24.- Experiencia Lógico-matemática.

La experiencia lógico-matemática implica "acciones generales que proceden por abstracción a partir de coordinaciones entre las acciones". E.E.G. I 33.
"La experiencia lógico-matemática consiste...en actuar sobre los objetos, pero de manera de descubrir propiedades que son...abstraídas de las acciones mismas del sujeto, de suerte que en cierto plano de abstracción la experiencia sobre los obje--

tos se vuelve inútil y la coordinación de las acciones basta para engendrar una manipulación operatoria simplemente simbólica, con lo cual se procede en forma deductiva para..." E.E.G. VII 24-25.
"La experiencia lógico-matemática no incide sobre la acción como proceso individual, sino sobre los resultados de la acción como objetividades y como necesarios". E.E.G. XIV 250. Cf. M. V. 31.

25.- Lógica de las operaciones concretas (de 7-8 años a 11-12 años).

La "esquematización logística <de la agrupación> proporciona las reglas de la lógica de las totalidades". P.I. 53. La lógica de las operaciones concretas incide sobre los objetos, y no todavía sobre las proposiciones, y no presenta aún una disociación completa entre la forma y el contenido. E.E.G. I 27.

26.- Número.

"Es...una colección de objetos concebidos a la vez como equivalentes y como seriables". P.I. 172.
El número consiste "en transformar los elementos en unidades". E.G. I 100 35-36.
"...el número no es otra cosa que una colección de elementos hechos todos equivalentes por semejanza generalizada, y sin embargo mantenidos todos distintos gracias a un orden vicariamente o una diferencia generalizada. En efecto, cada uno de estos elementos constituye una unidad a la vez cardinal (pues A=1, A+A"+2A, A+A'+B'=3A, etc.) y ordinal (pues siempre hay un primer elemento, sea cual fuera el orden elegido)...". E.G. I 101.
"El número está hecho a la vez de clases y de relaciones asimétricas". E.G. I 102.
"El número es...un sistema de unidades". D.Q. 251.
"...el número se organiza, etapa tras etapa, en estrecha solidaridad con la elaboración gradual de los sistemas de inclusiones (jerarquía de las clases lógicas) y de las relaciones asimétricas (seriaciones cualitativas), constituyéndose así, la serie de los números, como síntesis operatoria de la clasificación y la seriación". G.N. II. Cf. D.Q. 337. D.Q. 272.
"Los números finitos son, pues, necesariamente, a la vez cardinales y ordinales..." G.N. 195.
Pero en las etapas preoperatorias del pensamiento (antes de los 7-8 años), el niño no coordina necesariamente la cardinalidad y el orden de los números.
"La igualación de las diferencias es la fuente de la unidad, y por lo mismo del número. G.N. 120 (véase ORDEN VICARIANTE).

27.- Operaciones lógicas o lógico-aritméticas.

"...inciden sobre las reuniones de elementos o de objetos individuales considerados como indescomponibles (como de tipo 0 en la jerarquía de los tipos de Russell) y que tienen como límite

superior a la clase total del sistema considerado (o universo-
del discurso)". E.E.G. VI 60.
"Las operaciones lógico-aritméticas consistentes en agrupacio-
nes de clases y de relaciones, o en grupos de números que fu--
sionan a las dos precedentes". D.Q. 216. "Las operaciones ló_
gico-aritméticas son las de las clases (o reuniones de térmi--
nos equivalentes), las relaciones asimétricas (o series) y los
números". D.Q. 271.

28.- Reflexión.

"Es el acto por el cual unificamos nuestras tendencias y nues-
tras creencias diversas, a la manera en que la conversación y-
el intercambio social unifican las opiniones individuales, --
asignando a cada una su papel y extrayendo de todas una opi---
nión media". J.R. 164-165.
Es la "tendencia a unificar las creencias y las opiniones, a -
sistematizarlas para evitar las contradicciones entre ellas".-
L.P. 94.

29.- Reversibilidad.

"Df. Llamaremos reversibilidad la capacidad de ejecutar una --
misma acción en los dos sentidos de recorrido, pero teniendo -
conciencia de que se trata de la misma acción.. E.E.G. II 44.
"Esa reversibilidad, que implica un aspecto causal (desde ese-
punto de vista caracteriza la existencia misma de un estado de
equilibrio), representa también un aspecto implicativo o lógi-
co; una operación reversible es una operación que admite la po
sibilidad de una inversa". T.L. 15.
"La reversibilidad verdadera es el descubrimiento de la opera-
ción inversa como operación". D.Q. 17.
Reversibilidad completa es la que implica la operacíón de in--
versión (N); N (A) = - A y la operación de reciprocidad (R); R
(A = B) = (B = A). E.E.G. I 27.

30.- "Y"

Hay que distinguir "...el <y> de la adición serial (la opera--
ción + no conmutativa) y el <y> de simple reunión (el + conmu-
tativo)". N.T. 262.