



SECRETARÍA ACADÉMICA  
COORDINACIÓN DE POSGRADO  
MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

***Cuando el orden de los factores sí importa: una introducción al mundo de la multiplicación con maestros de Educación Primaria***

Tesis que para obtener el Grado de  
MAESTRO EN DESARROLLO EDUCATIVO

Presenta  
Lic. Porfirio Flores Nájera

Director de Tesis: Dr. José Luis Cortina Morfín

## DEDICATORIA

A mi esposa Araceli:

Por dejarme ser parte de su vida. Que al iniciar juntos esta aventura ha sido recompensada con la llegada de tres hijos que han dado felicidad a nuestro hogar. Así también, le agradezco su apoyo, diálogo y escucha que me ha brindado en mi formación académica. TE AMO...

A mis hijos:

Alejandro Rubén, por hacerlo participe en el desarrollo de este trabajo. Sus reflexiones y preguntas me ayudaron a replantear el conocimiento del que me iba apropiando.

Citlalli, por su paciencia. Ya que a pesar de no entender lo que yo realizaba me acompañaba y me permitía concluir mis trabajos académicos.

Víctor Emanuel, porque su llegada al iniciar la maestría, trajo una nueva alegría a la familia Flores Ramírez con su nacimiento.

A mis padres y hermanos:

A mis padres: Apolonia y Rubén por darme la vida y la mejor de las herencias “la Educación”. Que Dios los bendiga...

A mis hermanos: Marisol, Jorge, Angélica. Rosario y Lucero, y a sus esposos (as), por ser parte de mi vida y aconsejarme para ser una mejor persona y salir adelante.

A la familia Ramírez Martínez:

A mis suegros: Columba y Alejandro por sus conocimientos y consejos que me indujeron hacia el camino de la docencia.

A mis cuñadas y esposos:

Por compartir y convivir momentos que fortalecen los lazos familiares.

A mis amigos:

Jessica, Benjamín y Paola por su ayuda y apoyo que me han brindado incondicionalmente en todo momento.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo se construye con la aportación de múltiples voces, a las que ahora quiero expresar mi profundo agradecimiento. Primeramente, agradezco a cada uno de los revisores de esta tesis por su tiempo y sus consejos, los cuales resultaron útiles y propiciaron nuevas reflexiones. Así, agradezco a la Dra. Mariana Sáiz, a la Mtra. Alicia Carvajal, a la Dra. Alicia Ávila, al Mtro. Iván Escalante.

En especial quiero agradecer a mi asesor el Dr. José Luis Cortina Morfín, quien además de ser un excelente maestro, que con su compromiso y disposición para la elaboración de estas páginas pude dar cuenta de la importancia del trabajo de los maestros en el aula. Sobre todo le agradezco, ayudarme a construir mi carrera profesional con todas aquellas oportunidades brindadas. Gracias.

También, agradezco a la Mtra. Claudia Zúñiga por su orientación y apoyo brindado en este trabajo.

De la misma manera, quiero agradecer a todos los maestros que participaron en el taller, ya que sus aportaciones y vivencias lo hicieron posible.

Por último, agradezco a mis compañeros y amigos de ésta generación: Erika, Fanny, Martha, Erica, Norma, Jhosep, Claudia, Gloria y Mariela por compartir sus experiencias y saberes que fueron importantes en mi formación.

## TABLA DE CONTENIDOS

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
<b>I. ¿POR QUÉ LA MULTIPLICACIÓN?</b>	<b>14</b>
<b>1.1 Programa de estudios 2011</b>	<b>14</b>
1.1.1 Enfoque	15
1.1.2 Competencias a desarrollar en el programa de matemáticas	17
<b>1.2 ¿Cuándo se introduce la multiplicación en el aula?</b>	<b>18</b>
<b>1.3 ¿Qué presencia tiene la multiplicación en la escuela primaria?</b>	<b>27</b>
<b>1.4 La multiplicación es un tema que se les dificulta a los estudiantes</b>	<b>47</b>
<b>1.5 Excale</b>	<b>49</b>
1.5.1 Contenidos temáticos de la multiplicación que evalúa excale en Educación Primaria	49
<b>1.6 Para finalizar este Capítulo</b>	<b>53</b>
<b>II. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN</b>	<b>54</b>
<b>2.1 Propiedad conmutativa</b>	<b>54</b>
<b>2.2 Propiedad asociativa</b>	<b>57</b>
<b>2.3 Propiedad distributiva</b>	<b>58</b>
<b>2.4 Comentario final de este Capítulo</b>	<b>61</b>
<b>III. TRABAJOS DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA LITERATURA EN ESPAÑOL</b>	<b>63</b>
<b>3.1 Lerner (1988) ¿Qué es la multiplicación?</b>	<b>63</b>
<b>3.2 Ávila (1988) La comprensión del algoritmo de la multiplicación</b>	<b>68</b>
<b>3.3 Botello et al, (1988) Estrategias pedagógicas para niños de primaria con dificultades en aprendizaje de las matemáticas. “Problemas y operaciones de multiplicación y división</b>	<b>72</b>
<b>3.4 Maza (1991) Enseñanza de la multiplicación y división.</b>	<b>77</b>
<b>3.5 Kemii y Jones (1995) ¿Cómo abordar la multiplicación de números de varias cifras?</b>	<b>80</b>

<b>3.6 Isoda y Olfos (2009) La enseñanza de la Multiplicación. El estudio de clases y las demandas curriculares</b>	<b>83</b>
<b>3.7 Comentario final de este capítulo</b>	<b>87</b>
<b>IV. ALGUNOS OTROS TRABAJOS DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA LITERATURA EN INGLÉS</b>	<b>88</b>
<b>4.1 Fischbein et al. (1985) Modelos asociados a las operaciones de la aritmética</b>	<b>88</b>
<b>4.2 Nesher (1988) Los problemas verbales en la multiplicación</b>	<b>89</b>
<b>4.3 Greer (1992) Las clases más importantes de situaciones que involucran a la multiplicación y división de enteros</b>	<b>90</b>
4.3.1 Grupos iguales	91
4.3.2 Comparación multiplicativa	91
4.3.3 Producto cartesiano	92
4.3.4 Área rectangular	92
4.3.5 Categorías de problemas que implica a la multiplicación	93
<b>4.4 Comentario final del capítulo</b>	<b>95</b>
<b>V. PROPUESTA DE UN TALLER DE MATEMATICAS PARA LOS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN EL TEMA LA MULTIPLICACIÓN</b>	<b>96</b>
<b>5.1 Información de los maestros que participaron en el taller de la multiplicación</b>	<b>98</b>
<b>5.2 Objetivos y diseño del taller de la multiplicación</b>	<b>99</b>
<b>5.3 Análisis del taller de matemáticas “el orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema” dirigido a los maestros de grupo de Educación Primaria.</b>	<b>101</b>
5.3.1 Primera sesión	101
5.3.2 Segunda sesión	112
5.3.3 Sesión tres	125
5.3.4 Sesión cuatro	137
<b>5.4 Comentario final del Capítulo</b>	<b>148</b>
<b>VI. CONCLUSIONES</b>	<b>149</b>
<b>VII. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>156</b>
<b>VIII. ANEXOS</b>	<b>160</b>
<b>Anexo 8.1 Problemas multiplicativos</b>	<b>160</b>

<b>Anexo 8.2 Problemas multiplicativos</b>	<b>161</b>
<b>Anexo 8.3 Problemas multiplicativos</b>	<b>162</b>
<b>Anexo 8.4 Tabla de multiplicar</b>	<b>163</b>
<b>Anexo 8.5 Tabla de multiplicar</b>	<b>164</b>
<b>Anexo 8.6 Tabla de multiplicar</b>	<b>165</b>
<b>Anexo 8.7 Representación gráfica de la tabla de multiplicar</b>	<b>166</b>
<b>Anexo 8.8 Problemas multiplicativos “Tiro al blanco”</b>	<b>167</b>
<b>Anexo 8.9 Problemas multiplicativos</b>	<b>168</b>
<b>Anexo 8.10 Problemas multiplicativos</b>	<b>169</b>
<b>Anexo 8.11 Explicación de la función de los factores de la multiplicación tomado del libro de segundo año de Educación Primaria 2010</b>	<b>170</b>
<b>Anexo 8.12 Explicación de la función de los factores de la multiplicación tomado del libro de segundo año de Educación Primaria 2010</b>	<b>171</b>
<b>Anexo 8.13 Actividades del libro del alumno de 1972 correspondiente a la multiplicación</b>	<b>172</b>
<b>Anexo 8.14 Actividad del libro del alumno de 1988 correspondiente a la multiplicación</b>	<b>174</b>
<b>Anexo 8.15 Actividad del libro del alumno de 1993 correspondiente a la multiplicación</b>	<b>175</b>
<b>Anexo 8.16 Actividad del alumno de 2010 correspondiente a la multiplicación</b>	<b>176</b>
<b>Anexo 8.17 Problema multiplicativo “Venta de paquetes de donas”</b>	<b>177</b>
<b>Anexo 8.18 Tabla pitagórica</b>	<b>178</b>
<b>Anexo 8.19 Problemas multiplicativos “División por multiplicador y multiplicando”</b>	<b>179</b>

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Conjuntos de naranjas	19
Figura 1.2 Conjuntos de diferente fruta	19
Figura 1.3 Puesto de frutas	20
Figura 1.4 Precio por la cantidad del producto comprado	21
Figura 1.5 Arreglos rectangulares	22
Figura 1.6 Tabla de combinación	22
Figura 1.7 Arreglo rectangular	23
Figura 1.8 Arreglos rectangulares	24
Figura 1.9 Jaulas para conejos	28
Figura 1.10 Conjunto de almendras	28
Figura 1.11 Tabla pitagórica	33
Figura 1.12 Precios de artículos escolares	36
Figura 1.13 Colocación del punto decimal en el producto de la multiplicación	37
Figura 1.14 Relación multiplicativa de número de botones por camisa	39
Figura 1.15 División del rectángulo en $\text{cm}^2$ para obtener el área	36
Figura 1.16 Procedimientos para obtener el perímetro	41
Figura 1.17 Promoción de productos escolares	42
Figura 1.18 Prismas rectangulares para obtener su volumen mediante el conteo	43
Figura 1.19 Prismas rectangulares para obtener su capacidad con medidas específicas	44
Figura 1.20 Rollo de manguera con medidas en el sistema inglés	44
Figura 1.21 Arreglo rectangular	46
Figura 2.1 Representación gráfica de la multiplicación $5 \times 3$	51
Figura 2.2 Bolsa con dulces	51
Figura 2.3 Distribución de los dulces de la primera bolsa	51
Figura 2.4 Representación final de la distribución de cada una de las bolsas	52
Figura 2.5 Representación gráfica de la multiplicación $3 \times 5$	52
Figura 2.6 Representación vertical del algoritmo con un solo dígito en cada uno de los factores	54
Figura 2.7 Representación vertical del algoritmo con dos dígitos en el multiplicando y uno sólo dígito en el multiplicador	54
Figura 2.8 Representación vertical del algoritmo con dos dígitos en los dos factores	55
Figura 2.9 Colocación de los números en la síntesis de la multiplicación	55
Figura 2.10 Tabla pitagórica	56
Figura 3.1 Representación vertical del algoritmo con tres dígitos en el multiplicando y dos dígitos en el multiplicador.	65
Figura 3.2 Secuencia de aprendizaje de una multiplicación a otra	75
Figura 5.1 Representación gráfica de un automóvil con cuatro llantas	117
Figura 5.2 Representación gráfica de las 5 pulseras con tres cascabeles cada una.	117
Figura 5.3 Maestros participantes representando la actividad con material concreto	125

## INDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1.1 Distribución de los contenidos de matemáticas de segundo año de educación primaria en relación con la multiplicación	27
Gráfica 1.2 Distribución de contenidos matemáticos de tercer año de educación primaria en relación con la multiplicación	30
Gráfica 1.3 Distribución de los contenidos de matemáticas de cuarto año de educación primaria en relación con la multiplicación	35
Gráfica 1.4 Distribución de los contenidos de matemáticas de quinto año de educación primaria en relación con la multiplicación	40
Gráfica 1.5 Distribución de los contenidos de matemáticas de sexto año de educación primaria en relación con la multiplicación	43
Gráfica 1.6 Distribución general de la multiplicación y presencia que tiene en otros contenidos matemáticos durante la educación primaria	45

## INTRODUCCIÓN

Como profesor de Educación Primaria, en la asignatura de matemáticas, creía que el aprendizaje de la multiplicación se centraba en memorizar las tablas de multiplicar y que, a través de su uso, los alumnos resolvieran ejercicios que implican al algoritmo de la multiplicación. Para mí, no era necesario que tuvieran que lograr la comprensión de dichos procedimientos. Esta creencia, junto a la explicación “que el orden de los factores no altera el producto” propició en mí – autor de esta tesis-, poco interés por investigar y reflexionar sobre las implicaciones de este contenido. Esta perspectiva, con el tiempo, fue cambiando porque al ver los resultados de mis alumnos en los problemas multiplicativos en las pruebas de ENLACE vi que la mayoría de ellos tuvieron resultados nada alentadores, a pesar de que yo creía que sí sabían multiplicar. La multiplicación entonces se convirtió en algo problemático para mi quehacer educativo.

El trabajo que llevó a la elaboración de la presente tesis tuvo como propósito principal proveer de herramientas conceptuales a los maestros de Educación Primaria para la enseñanza-aprendizaje de la *Multiplicación*. Implicó al diseño e instrumentación de un taller de formación para docentes de Educación Primaria en el tema de multiplicación. El taller consistió en cuatro sesiones, de una hora cada una, que se realizaron semanalmente. Un objetivo central del taller fue que los maestros participantes vieran en la multiplicación una operación cuantitativa que tiene significados que van más allá de un simple cálculo.

La tesis está conformada por cinco Capítulos: En el Capítulo 1, *¿Por qué la MULTIPLICACIÓN?*, se trata de responder esta pregunta. Se revisan las características generales del programa vigente, y se identifica la propuesta de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general. Además, se describe la propuesta didáctica que introduce la enseñanza de la multiplicación en el libro del alumno de segundo año de Educación Primaria 2011. También se describen las cuatro personalidades didácticas de la multiplicación que se presentan en los

libros de texto oficiales: suma iterada, arreglo rectangular, combinación y método para calcular.

Además, se describen algunas otras problemáticas detectadas en la enseñanza de la multiplicación en México. Se comienza con las que el autor ha identificado en su práctica docente y se continúa con las que han sido detectadas a través de la aplicación de exámenes estandarizados (EXCALE).

El Capítulo 2, *Propiedades de la multiplicación*, tiene como objetivo brindarle al lector una visión más completa del significado que puede tener la multiplicación en el aula de Educación Primaria. En este Capítulo se revisa la función que tiene cada una de las propiedades –conmutativa, asociativa y distributiva- en la multiplicación. En la propiedad conmutativa se identifican dos planos – el numérico y el conceptual-, este último, nos ayuda a identificar la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos. Se explica cómo a partir de esta diferenciación, se pueden identificar dos tipos de división que hay: – de reparto y de asignación (también llamado tasativo)-.

Se describe cómo el trabajo con la propiedad asociativa de la multiplicación, permite desarrollar y relacionar procesos mediante la factorización de las cantidades, esto a su vez, permite entender temas como: el mínimo y máximo común múltiplo, la factorización de los números y su composición y los trabajos futuros en el álgebra... Por último, la propiedad distributiva nos ayuda a entender la relación que tiene la multiplicación frente a la suma y que a partir de este trabajo se pueda entender el algoritmo tradicional con que se multiplica.

En el Capítulo 3, *Trabajos de la multiplicación en la literatura en español*, se explica cómo el contenido de la multiplicación ha sido un tema de gran relevancia en la literatura de educación matemática. Evidentemente ello se debe a que se le ha considerado un tema fundamental en la aritmética. En este Capítulo se describen diversas investigaciones y propuestas que dan cuenta de la complejidad que conlleva el trabajo del contenido de la multiplicación en el salón de clase. Cada uno de los trabajos aborda aspectos importantes que complementan la

enseñanza de la multiplicación. Los aspectos que se identifican en la enseñanza de la multiplicación son: la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos, las propiedades de la multiplicación (conmutativa, asociativa y distributiva), el elemento neutro y absorbente, las propiedades del algoritmo –valor posicional y propiedad distributiva- y comprensión del concepto. También, se identifica las diferentes interpretaciones que tiene el signo “x” (por) y la multiplicación por potencias de 10, 100 y 1000.

En el Capítulo 4, *Algunos otros trabajos de la multiplicación en la literatura en inglés*, se hace una revisión de parte de la literatura en el campo de la multiplicación en inglés que aún no ha sido traducida al español. En particular los trabajos revisados ahondan en el concepto y función que tienen el multiplicador y multiplicando en la multiplicación, así como en la correspondencia que tiene la multiplicación con otros contenidos matemáticos.

En el Capítulo 5, *Propuesta de un taller de matemáticas para los maestros de Educación Primaria en el tema la multiplicación*, se describe el diseño e instrumentación del taller de formación docente que llevó por título “El orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema”. El Capítulo se elabora sobre los objetivos generales del taller, los cuales fueron: (1) profundizar en el conocimiento de la multiplicación como una operación cuantitativa; (2) apropiarse de herramientas para apoyar el aprendizaje de los alumnos en la resolución de problemas multiplicativos. También se elabora sobre los objetivos particulares del taller: (1) analizar la estructura de la multiplicación y la función de cada uno de sus elementos dentro de un problema multiplicativo; (2) conocer las relaciones que existen en las tablas de multiplicar, y (3) reflexionar sobre el uso de la multiplicación para estimar cantidades y resolver problemas de división. Estos objetivos orientaron el diseño y estructura del taller. También se describen las dudas y dificultades de los maestros al tratar de identificar la función del multiplicador-multiplicando en los problemas multiplicativos, y que, a partir de esta función, los maestros diferenciaron los dos tipos de división que hay: de reparto y de asignación.

En la parte final de la tesis, se presenta una reflexión general sobre la enseñanza de la multiplicación en la Educación Primaria. Brevemente, se dice que: (1) aproximadamente, una tercera parte de todas las lecciones de 1° a 6° años implican a la multiplicación; (2) la propuesta didáctica que se propone en los libros de texto gratuitos para el alumno en la enseñanza de la multiplicación: suma iterada, arreglos rectangulares, combinación y el método para calcular; (3) la frase “el orden de los factores no altera el producto” se deriva de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Esta frase, probablemente, puede ser desafortunada si se utiliza indistintamente en todas las actividades que involucran a la multiplicación; (4) las implicaciones que tiene la propiedad conmutativa, tanto en el plano numérico como el conceptual; (5) la lógica cuantitativa que siguen las tablas de multiplicar, y (7) cómo el multiplicador y multiplicando sirven como herramientas para otros contenidos matemáticos.

## I. ¿POR QUÉ LA MULTIPLICACIÓN?

El objetivo de este capítulo es explicar la importancia del trabajo con la multiplicación en el aula. Para hacerlo, se revisan las características generales del programa vigente, y se identifica la propuesta de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general, y de la multiplicación en particular. Posteriormente, se describen las cuatro personalidades didácticas de la multiplicación que se presentan en el libro de segundo año de Educación Primaria 2011: suma iterada, arreglo rectangular, combinación y método para calcular. Por último, se describen algunas otras problemáticas detectadas en la enseñanza de la multiplicación en México. Se comienza con las que el autor ha identificado en su práctica docente y se continúa con las que han sido detectadas a través de la aplicación de exámenes estandarizados.

### 1.1 Programa de estudios 2011

En el programa de estudios de Educación Primaria 2011 se describen las tareas que deben realizar cada uno de los participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este programa, se plantean los fundamentos teóricos, filosóficos y metodológicos que sustentan el trabajo de las diferentes asignaturas, así como la organización de los contenidos básicos y propósitos que se trabajarán durante los 6 años de Educación Primaria.

A continuación se hace una síntesis de los elementos importantes que aparecen en el programa 2011, en relación con la asignatura de matemáticas.

Mediante el estudio de las matemáticas en la educación básica se busca que los niños y jóvenes desarrollen:

- Una forma de pensamiento que les permita interpretar y comunicar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales.
- Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas.

- Una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes (SEP, 2011)

Para lograr lo anterior los documentos oficiales mencionan que la escuela deberá brindar las condiciones que garanticen una actividad matemática autónoma y flexible. Esto es, deberá propiciar un ambiente en el que los alumnos formulen y validen conjeturas, se planteen preguntas, utilicen procedimientos propios y adquieran las herramientas y los conocimientos matemáticos socialmente establecidos, a la vez que comunican, analizan e interpretan ideas y procedimientos de resolución.

La actitud positiva hacia las matemáticas consiste en despertar y desarrollar en los alumnos la curiosidad y el interés por emprender procesos de búsqueda para resolver problemas, la creatividad para formular conjeturas, la flexibilidad para utilizar distintos recursos y la autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas. Asimismo, consiste en asumir una postura de confianza en su capacidad de aprender.

Para lograrlo el programa 2011 propone la participación colaborativa y crítica. Se menciona que esta participación resultará de la organización de actividades escolares colectivas en las que se requiera que los alumnos formulen, comuniquen, argumenten y muestren la validez de enunciados matemáticos, poniendo en práctica tanto las reglas matemáticas como sociales del debate, que los lleve a tomar las decisiones pertinentes a cada situación (SEP, 2011).

### **1.1.1 Enfoque**

Según el programa de estudio de Educación Primaria 2011, la formación matemática que le permita a cada miembro de la comunidad enfrentar y responder a determinados problemas de la vida moderna dependerá, en gran parte, de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la

educación básica. La experiencia que vivan los niños y jóvenes al estudiar matemáticas en la escuela puede traer como consecuencias el gusto o rechazo, la creatividad para buscar soluciones o la pasividad para escucharlas y tratar de reproducirlas, la búsqueda de argumentos para validar los resultados o la supeditación de éstos al criterio del docente.

El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que sustentan los programas para la Educación Primaria consiste en llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.

El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar, de manera flexible, para solucionar problemas.

Esta manera de abordar el estudio de las matemáticas es esencialmente la misma que se sugiere en los programas de 1993 para la Educación Primaria. Los programas 2011 aportan una mayor precisión en cuanto a lo que se sugiere hacer para que los alumnos aprendan; mayor claridad respecto al desafío que representa para los profesores esta manera de estudiar y, como consecuencia, más elementos que pueden servir de apoyo para el trabajo diario (SEP, 2011).

En el estudio y trabajo con las matemáticas se considera como eje central del aprendizaje la resolución de problemas. Según el enfoque, el planteamiento de problemas debe cubrir varios ámbitos: el científico, social, cultural y económico. Pero los planteamientos de problemas de los libros del alumno se centran, solamente, en la compra y venta de productos.

### 1.1.2 Competencias a desarrollar en el programa de matemáticas

El programa de estudio de Educación Primaria 2011 propone que en matemáticas los alumnos desarrollen las siguientes competencias:

- *Resolver problemas de manera autónoma.* Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones.
- *Comunicar información matemática.* Comprende la posibilidad de expresar, representar e interpretar información matemática contenida en una situación o de un fenómeno.
- *Validar procedimientos y resultados.* Es importante que los alumnos de primaria adquieran la confianza suficiente para expresar sus procedimientos y defender sus aseveraciones con pruebas empíricas y argumentos a su alcance, aunque éstos todavía disten de la demostración formal.
- *Manejar técnicas eficientemente.* Esta competencia se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora (SEP, 2011).

Por lo anterior, se pretende que los alumnos utilicen sus: conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes, aptitudes y valores en la resolución de problemas. Estas competencias le permitirán tomar decisiones académicas y sociales dentro y fuera del lugar donde vive.

## 1.2 ¿Cuándo se introduce la multiplicación en el aula?

Los libro de texto del alumno y Programas de Estudio que proporciona la SEP, son los referentes inmediatos que tiene el maestro para diseñar y desarrollar sus actividades escolares. Estos materiales fueron diseñados con el fin de ayudar las prácticas pedagógicas de los maestros.

En la reforma educativa 2011, los libros de texto del alumno fueron diseñados paulatinamente. Es decir, en el ciclo escolar 2009-2010 los primeros libros que llegaron a las escuelas primarias fueron los de primero y sexto grado, en el ciclo escolar 2010 y 2011 llegaron los de segundo y quinto grado. En el ciclo escolar 2011 y 2012 llegaron los libros de tercero y cuarto grado, y un nuevo diseño para los libros de matemáticas de primero, segundo, quinto y sexto grado de primaria.

Al revisar los libros de matemáticas, de primero a sexto grado de Educación Primaria 2011, se identificaron en el libro de segundo grado cinco lecciones que dan cuenta de la introducción y trabajo con el contenido de la multiplicación. En estas lecciones, se identificaron cuatro personalidades didácticas que se le reconocen a la multiplicación. Estas son: suma iterada, arreglo rectangular, de combinación y método para calcular. También, se identificó a la multiplicación como auxiliar en la enseñanza de otros contenidos matemáticos.

Las lecciones de multiplicación que se identificaron son: lección 24, “El mismo sumando”; lección 32, “Multiplicando las compras”; lección 33, “¿Sumo o multiplico?”; lección 34, “Multiplico mentalmente” y lección 40, “Divido en partes iguales”. De estas cinco lecciones, las dos primeras (24 y 32) son las que guían el trabajo introductorio de la multiplicación. En dos de las tres lecciones restantes, (Lecciones 33 y 34), se trabajan problemas aditivos y multiplicativos. En la Lección 40 se trabaja la división. Estas cinco lecciones aparecen a partir del tercer bloque del libro de matemáticas de segundo año de Educación Primaria.

A continuación describiré brevemente las actividades de las dos primeras lecciones que introducen el trabajo con la multiplicación.

La Lección 24 lleva por título “El mismo sumando”. Esta lección tiene como objetivo que los alumnos resuelvan problemas de multiplicación mediante sumas repetidas. En la introducción, el alumno tiene que resolver el siguiente problema: “Víctor vende fruta en el mercado y colocó las naranjas que le quedaban en una mesa, ¿cuántas naranjas le quedaban?” (Ver figura 1.1).

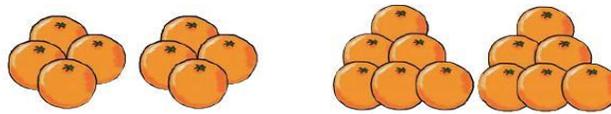


Figura 1.1 Conjuntos de naranjas

El ejercicio termina con la siguiente pregunta. ¿Qué hiciste para saber cuántas naranjas le quedaban a Víctor?

En la actividad 1 se muestran varios montones de diferentes frutas: peras, manzanas, uvas y ciruelas. Con estas frutas, los alumnos tendrán que llenar 3 apartados de la tabla, (Ver figura 1.2).

1. Observa las siguientes imágenes y completa la tabla.

Fruta	Total de montones	Número de frutas en cada montón	Total de frutas
Peras			
Ciruelas			
Uvas			
Manzanas			

Figura 1.2 Conjuntos de diferente fruta

Finaliza la actividad pidiéndole al alumno que mencione qué hizo para saber cuántas piezas había de cada tipo de fruta.

La actividad 2 tiene dos problemas multiplicativos similares. Estos problemas están relacionados con la venta de fruta. Por ejemplo, en una de esos problemas se pregunta: “Si Juanita compra 3 montones de 7 naranjas cada uno. ¿Cuántas naranjas compró?”. Al terminar la actividad, el alumno debe dibujar las naranjas que compró Juanita (ver figura 1.3).



Figura 1.3 Puesto de frutas

Al concluir la segunda actividad, aparece la siguiente explicación: “*que mientras más piezas de frutas haya en los montones se tengan, es más difícil saber cuántas frutas se tienen en total. Para saberlo, se puede sumar el número de frutas de los montones. Por ejemplo, Alicia compró 4 montones de 8 duraznos cada uno:  $8+8+8+8=32$ ,  $8+8=16 + 8+8=16$ ,  $16+16=32$ . También se puede decir que se tienen 4 veces 8 duraznos y se representa así:  $4 \times 8 = 32$* ” (p. 93).

Como última actividad de la Lección 24, se le pide a los alumnos que resuelvan los siguientes ejercicios: sumar 4 veces el 8 es igual a \_\_\_\_  $4 \times 8 =$ \_\_\_\_, y  $6 \times 4 =$ \_\_\_\_ Sumar \_\_\_\_ veces el 4 es igual a\_\_\_\_.

Como mencioné anteriormente, el objetivo de la Lección 24 es que los alumnos resuelvan problemas de multiplicación mediante sumas repetidas. En los ejercicios introductorios y las dos primeras actividades, probablemente los resultados no se obtengan mediante sumas repetidas. Más bien, creo que los resultados se obtendrán mediante el conteo y representaciones gráficas: dada la forma en la que se definen los contextos y las preguntas que se plantean al final de cada una de las actividades.

Es probable que la explicación que dan los autores al finalizar la actividad 2 (ver arriba), no sea suficiente para que los niños relacionen la idea de la suma repetida con la multiplicación. Es decir, quizá para los alumnos no sea claro que en las actividades se trabajó la suma repetida, y que ésta equivale a realizar una multiplicación. Quizá tampoco entiendan cómo funcionan las sumas abreviadas:  $8+8+8+8=32$ ;  $8+8=16 + 8+8=16$ ;  $16+16=32$ , y que sumar 4 veces 8 equivale a  $4 \times 8 = \underline{\quad}$ .

La segunda lección de multiplicación que aparece en el libro de segundo de primaria es la 32, la cual se titula “Multiplicando las compras”. Esta lección tiene como objetivo que los alumnos resuelvan distintos tipos de problemas de multiplicación. En esta lección aparecen las cuatro personalidades didácticas de la multiplicación.

En la introducción de la lección, se le pide al alumno que exprese cinco sumas repetidas en una multiplicación y las resuelva. Por ejemplo:  $3+3+3+3+ = 4 \times 3 = \underline{\quad}$ ?

En la primera actividad, los alumnos deben resolver problemas multiplicativos que implican el pago de la compra de algunos útiles escolares -gomas, libretas, lápiz, bolígrafos, colores, libretas, sacapuntas y hojas-, que hicieron Guillermo, Santiago, Pamela, Diego y Mónica. Si cada uno compró una goma, ¿cuánto recibió don Esteban por todas? (Ver figura 1.4)

Gomas	Cantidad a pagar en pesos
1	3
2	

Figura 1.4 Precio por la cantidad del producto comprado

En la segunda actividad, los ejercicios están relacionados con los arreglos rectangulares. Se les pide a los alumnos encontrar el número de mosaicos que hay en los 4 arreglos rectangulares (Ver figura 1.5)

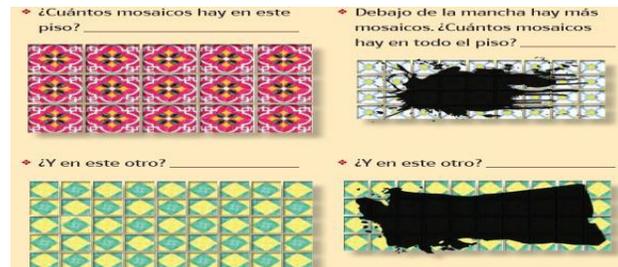


Figura 1.5 Arreglos rectangulares

En el último ejercicio de esta actividad, se le plantea al alumno el siguiente problema multiplicativo: “Si en un piso hay 8 hileras de mosaico y en cada hilera hay 9 mosaicos ¿Cuántos mosaicos hay en el piso?”

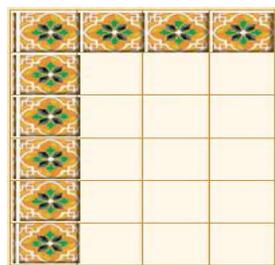
En la tercera actividad, se le pide al alumno que resuelva problemas sobre el número de combinaciones que se pueden encontrar con 4 diferentes colores de blusa y 3 pantalones con diferente color (Ver figura 1.6)


Figura 1.6 Tabla de combinación

Las combinaciones que se obtengan se escribirán en una tabla. Al término de esta actividad, los autores explican: “Una manera de calcular el número de combinaciones es multiplicar  $3 \times 4$ , porque hay 3 opciones de pantalón por las 4 opciones de blusa, o bien  $4 \times 3$ , que corresponde a 4 opciones de blusa por 3

opciones de pantalón. Como puedes darte cuenta, el orden en que realices la multiplicación no altera el resultado” (p. 129).

En la cuarta actividad, se le pide a los alumnos que resuelvan tres problemas multiplicativos; los dos primeros ejercicios están relacionados con la suma iterada y, el último, pertenece a los arreglos rectangulares. Por ejemplo: “Alejandro tiene un álbum con fotografías de su familia. Si el álbum tiene 8 hojas y en cada hoja hay 6 fotografías, ¿cuántas fotografías tienen en el álbum?”; A la escuela de Alejandro llegaron 7 cajas de libros. Si en cada caja hay 9 libros, ¿cuántos libros llegaron en total? Y En el patio de la casa de Alejandro van a colocar mosaicos. Su papá le pidió que le ayudara a calcular cuántos mosaicos van a utilizar y le hizo el siguiente dibujo (Ver figura 1.7)



El patio tiene \_\_\_\_\_ mosaicos (p. 130).

Figura 1.7 Arreglo rectangular

La lección termina con un reto: “Santiago quiere hacer una pintura de flores con pétalos del mismo color. Para ellos dispone de los colores rojo, amarillo y rosa; para los tallos verde y café. ¿Cuántas flores diferentes puede pintar Santiago?” (p. 130).

Como vemos, el objetivo de la Lección 32 es que los alumnos resuelvan distintos tipos de problemas de multiplicación. En el desarrollo de esta lección, llama la atención que la palabra “veces” no se haya utilizado en ninguna de sus actividades. Ya que, como se vio antes, en la lección 24, la palabra veces indica las veces que se itera una cantidad. En los primeros ejercicios de la introducción de la Lección 32, probablemente los autores dan por hecho que los alumnos

pueden asociar la representación de la suma repetida con la multiplicación, en donde los únicos antecedentes que se tienen son: una actividad y una explicación.

En el desarrollo de la Lección 32 se presentan por primera vez los arreglos rectangulares. Las actividades que se proponen consisten en saber cuántos mosaicos hay en un piso. Posiblemente la forma que se obtenga el resultado sea mediante el conteo por el contexto que tienen. Durante la búsqueda de los resultados, tal vez los alumnos tengan dificultad en 2 de los 4 ejercicios, ya que tienen una mancha negra que no permite ver cuántos mosaicos hay en ese lugar. La actividad de los arreglos rectangulares termina con el siguiente problema: si en un piso hay 8 hileras de mosaico y en cada hilera hay 9 mosaicos ¿Cuántos mosaicos hay en el piso?

Es probable que los cuatro ejercicios previos a este último no sean suficientes para que los alumnos imaginen y representen gráficamente éste problema para obtener el resultado. Pero, al representar gráficamente, pueden aparecer dos representaciones (Ver figura 1.8)

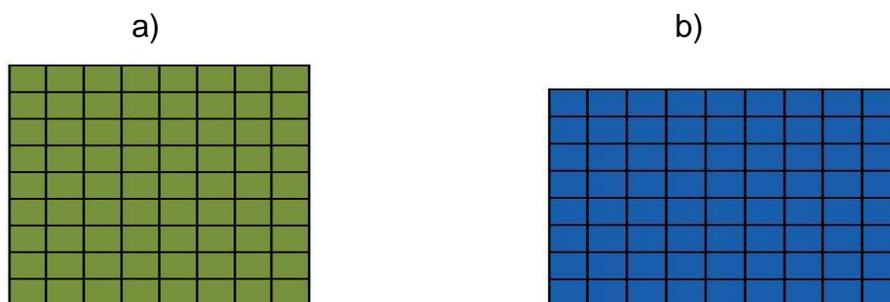


Figura 1.8 Arreglos rectangulares

En las dos representaciones se tiene el mismo número de mosaicos, pero como está estructurado el problema una representación no es válida conceptualmente. También se debe decir que la palabra “hileras” está presente en el problema y tal vez ayude a representarlo correctamente, pero no hay un trabajo previo que dé

cuenta de su uso y representación. Y si se pretendiera resolver el problema con el método para calcular, las tablas de multiplicar del 8 y 9 serán fundamentales.

Otro tipo de problema que se trabaja en esta lección son los de combinación. La estructura de los problemas de esta actividad se centra en combinar ropa. Los recursos que tienen los alumnos para resolver el ejercicio son imágenes de blusas y pantalones. Probablemente, la mayoría de los alumnos tengan experiencia de combinar ropa, pero no porque haya un conocimiento previo este problema será fácil de resolver. Las posibles dificultades que tengan los alumnos son: que repitan varias combinaciones de ropa u omitan una combinación. Los resultados que obtengan los alumnos al combinar la ropa, tal vez sea por representación gráfica y conteo.

Al finalizar el ejercicio, se da la siguiente explicación: "...el orden en el que realices la multiplicación no altera el resultado" (p. 129). Efectivamente, en estos problemas de combinación el orden de los factores no altera el resultado. Pero esta explicación puede ser desafortunada, ya que en otros problemas multiplicativos sí es importante entender que cada uno de los factores de la multiplicación tiene una función diferente. Para explicar este punto, veamos el siguiente problema: "En una escuela de música se quieren hacer 24 trajes para el grupo musical. Para cada traje se necesitan 5 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela se necesitan para hacer los trajes? Hay dos representaciones multiplicativas en las que se podría representar el problema:  $5 \times 24$  ó  $24 \times 5$ . Ambas darían como resultado 120. Sin embargo, en una sería 120 metros de tela y en la otra 120 trajes.

Si representamos las operaciones del problema anterior conforme la convención que aparece en el libro de segundo año; esto es, primero las veces y luego la cantidad que se itera ( $4 \times 8$  implica 4 veces 8 duraznos) entonces observamos que  $5 \times 24$  significaría las 5 veces (metros de tela) y 24 los trajes. La operación entonces serviría para resolver un problema como el siguiente: "Si con un metro

de tela se puede confeccionar 24 trajes ¿cuántos trajes se pueden confeccionar con 24 metros de tela?”. La respuesta sería 120 trajes. Sólo la segunda representación  $24 \times 5$  resolvería el problema originalmente planteado (24 veces cinco metros). La respuesta sería 120 metros de tela. Como se observa en los ejemplos, el orden de los factores no altera el resultado, pero en relación con la convención (veces-cantidad) sí afecta la situación planteada. Este asunto es central para la presente tesis.

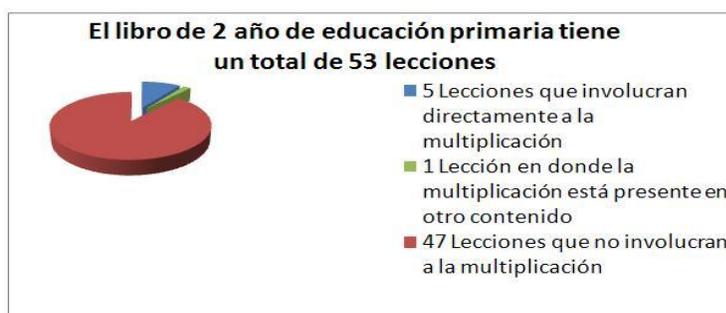
Volviendo al libro, parece que los autores esperan que después de las Lecciones 24 y 32, los alumnos ya hayan adquirido los conocimientos y las herramientas necesarias para resolver diferentes tipos de problemas multiplicativos: de suma iterada, arreglos rectangulares, combinación y método para calcular ¿Pero es ésta una expectativa razonable?

En las siguientes lecciones del libro (Lecciones 33 y 34), ya no se presentan explicaciones sobre el significado de la multiplicación. Únicamente se resuelven problemas que implican: suma iterada, arreglos rectangulares y la ejercitación de la multiplicación como cálculo. Conforme se desarrollan las lecciones, parece que se incrementa la dificultad de los problemas.

Durante la introducción y trabajo de la multiplicación en segundo grado de Educación Primaria, se identificó lo importante que es el conocer la función y uso de las cantidades en los problemas multiplicativos, que por un lado, nos dicen las veces que se va iterar la cantidad y, por el otro, la cantidad que se itera. También se identificaron las personalidades didácticas que tiene la multiplicación: suma iterada, arreglos rectangulares, combinaciones y método para calcular. Además se identificó el trabajo de la operación de manera descontextualizada. Y por último, al parecer hay inconsistencia en el uso de la convención “veces-cantidad”.

### 1.3 ¿Qué presencia tiene la multiplicación en la escuela primaria?

Como ya se mencionó, la enseñanza de la multiplicación empieza en segundo año de Educación Primaria y continúa en gran medida a lo largo de los siguientes años escolares. Durante la revisión de los libros escolares, se describe la propuesta de trabajo de la multiplicación y la presencia que tiene en otros contenidos matemáticos que se trabajan en los libros de texto para el alumno de Educación Primaria 2011 (Ver gráfica 1.1)



Gráfica 1.1 Distribución de los contenidos de matemáticas de segundo año de Educación Primaria en relación con la multiplicación

En los problemas multiplicativos no sólo se trabaja con la multiplicación, sino también está presente la división. En la lección 40 titulada “Divido en partes iguales” del libro de segundo año de primaria, por primera vez aparece el trabajo con la división. El objetivo de la lección es: “que los alumnos resuelvan distintos problemas de reparto y agrupamiento donde se obtengan resultados alrededor de 10 mediante distintos procedimientos” (p. 159). El diseño de los problemas que se proponen en esta lección son: de reparto y agrupamiento. Por ejemplo: El problema que se plantea al inicio de la lección. “La tía de Pedro tiene 20 conejos. Para llevarlos a vender los transporta en 4 jaulas, cada una con la misma cantidad de conejos. Dibuja cuántos conejos debe colocar en cada jaula” (p. 159). La estructura del problema es de reparto, porque se tiene el total de conejos “20” que se van a repartir en 4 jaulas. El resultado de este problema se puede obtener mediante: representaciones gráficas, la división y la multiplicación (Ver figura 1.9)

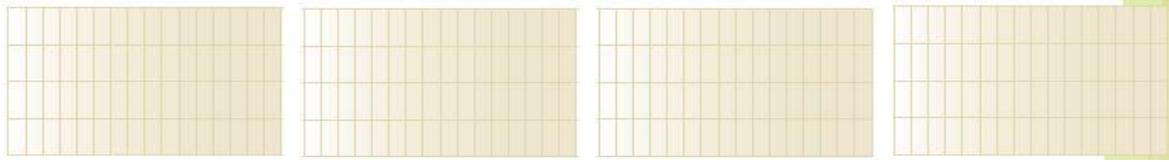


Figura 1.9 Jaulas para conejos

En la representación gráfica, el alumno debe repartir el mismo número de conejos en cada jaula como lo pide el problema. Si se resuelve con la división  $20:4$ , los alumnos tendrán que buscar un número que multiplicado por 4 les dé 20. Para obtener el resultado con la multiplicación la representación queda de la siguiente manera  $4 \times \underline{\quad} = 20$ . Si recordamos la convención “veces-cantidad” del libro de segundo año de Educación Primaria 2011 queda representado como: 4 veces una cantidad de conejos es igual a 20 conejos.

$$4 \text{ veces } 1 = 4$$

$$4 \text{ veces } 2 = 8$$

$$4 \text{ veces } 3 = 12$$

$$4 \text{ veces } 4 = 16$$

$$4 \text{ veces } 5 = 20 \Rightarrow 4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

En esta lección, también se identificó la división por asignación. Por ejemplo: Luis sabe que consumir cierto grupo de alimentos puede ayudarle a proteger su corazón y mantenerlo sano, por lo que, con el dinero de su domingo, compró las almendras, que están en la imagen. Quiere guardarlas en bolsas para compartirlas con sus amigos (p.161) (Ver figura 1. 10)



Figura 1.10 Conjunto de almendras

Si en cada bolsa coloca 9 almendras, ¿cuántas bolsas se llenan? Las soluciones posibles para esta pregunta son: que los alumnos mediante el conteo encierren el

número de almendras que se le piden; por la división, tendrán que contar todas las almendras y dividir las entre la cantidad de almendras que debe haber en cada bolsa, y mediante la representación “veces-cantidad” queda de la siguiente manera:  $\_\_\_ \times 9 = 72$  almendras. Anteriormente se mencionó que este problema es de división por asignación porque tenemos la cantidad de almendras que hay en cada bolsa y el total de almendras. Y lo que se pretende encontrar es el número de bolsas que se necesitan para todas las almendras.

$$1 \times 9 = 9$$

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$4 \times 9 = 36$$

$$5 \times 9 = 45$$

$$6 \times 9 = 54$$

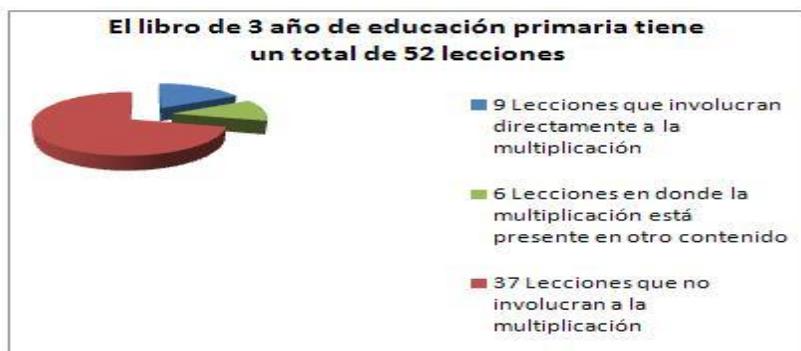
$$7 \times 9 = 63$$

$$8 \times 9 = 72 \quad \Rightarrow 8 \text{ veces } 9 = 9+9+9+9+9+9+9+9 = 72$$

Como podemos observar, la convención “veces-cantidad” nos ayuda a diferenciar los dos tipos de divisiones que hay “reparto y asignación” y que probablemente con el procedimiento de la división no sea fácil de identificar. Este trabajo es otro punto central de la tesis.

En el libro de matemáticas del alumno de tercer año de Educación Primaria 2011, se identificó un aumento de lecciones que implican directamente a la multiplicación y como auxiliar en otros contenidos matemáticos. Las personalidades didácticas de la multiplicación que se identificaron son: suma iterada, arreglos rectangulares y método para calcular. Esta última personalidad prioriza el cálculo que la interpretación cuantitativa de la multiplicación. También, por primera vez, aparece el método para calcular de manera vertical con tres cifras multiplicadas por un dígito y dos cifras multiplicadas por dos dígitos; durante este procedimiento se identificó el trabajo con la propiedad distributiva. En el desarrollo de estos dos procedimientos, tres cifras multiplicadas por un dígito y dos cifras multiplicadas por dos dígitos, se identificó cambios en la convención “veces-cantidad”

propuesta en segundo año de Educación Primaria para la enseñanza de la multiplicación. Por último, se identificó la presencia de la multiplicación en los siguientes contenidos matemáticos: números naturales y fracciones (Ver gráfica 1.2)

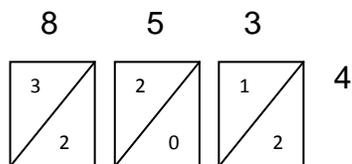


Gráfica 1.2 Distribución de contenidos matemáticos de tercer año de Educación Primaria en relación con la multiplicación

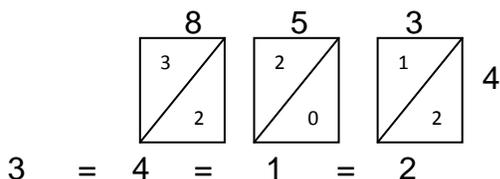
A continuación describiré algunas actividades que dan cuenta del trabajo de la multiplicación que corresponde a este grado escolar, así como el uso que tiene en otros contenidos matemáticos.

En la Lección 29 titulada “¿cómo multiplico?”. El objetivo de esta lección es que los alumnos multipliquen números de hasta tres cifras por un dígito. Para este objetivo se propone el método de la celosía, inventado en el siglo XV por Luca Pacioli. Este método consiste en: Si queremos multiplicar 853 por 4 realizamos una cuadrícula con diagonales como la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 5 & 3 \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{array} \quad 4$$
 Se anota el resultado de multiplicar  $8 \times 4$ ,  $5 \times 4$  y  $3 \times 4$  de la siguiente manera:



Así, las decenas quedan escritas arriba de la diagonal y las unidades, debajo. Después, se suman los números que están en cada una de las diagonales y se escribe debajo de la diagonal el resultado, comenzando de derecha a izquierda.



Mediante este procedimiento se obtiene el resultado de la multiplicación de  $4 \times 853$  (p. 96). En el desarrollo de este procedimiento cambia el orden de la convención “veces-cantidad” propuesta en el libro de segundo año de Educación Primaria 2011. Primero representan la cantidad y después las veces. También observé que la cantidad 853 no se ve como tal, sino como números separados y sin respetar el valor posicional que tienen. Es decir, las operaciones, respetando la convención, que se hicieron,  $4 \times 8$ ;  $4 \times 5$ , y  $4 \times 3 =$ , no dan como resultado decenas y unidades solamente. Por ejemplo: si se multiplica unidad por unidad  $4 \times 3$ , se obtiene decenas y unidades; si se multiplica unidades por decenas  $4 \times 5$  se obtiene centenas, decenas y unidades, y si se multiplica unidades por centena  $4 \times 8$  se obtiene unidades de millar, centenas, decenas y unidades. ¿Pero por qué se obtienen estos resultados? Porque los números de la cantidad no se deben multiplicar de manera absoluta, sino relativa. Como se muestra en el siguiente procedimiento.

En esta misma lección, por primera vez, aparece el método para calcular de manera vertical  $\begin{array}{r} 718 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$ . Los autores dan la siguiente explicación: El algoritmo de la multiplicación, es decir, el procedimiento que seguimos en Occidente para realizar la multiplicación, es el siguiente:

$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 7 \\ \hline 56 \end{array}$$

Multiplica el primer número 8 x 7, el resultado se anota debajo de la línea. Si recordamos la convención de segundo año de Educación Primaria 2011 (veces- cantidad), en la representación 8 x 7, los autores no están respetando la convención, es decir, primero escriben la cantidad 8 y después las veces 7.

$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 7 \\ \hline 56 \\ 70 \end{array}$$

Bien, ahora multiplica el número de las decenas 10 x 7 y el resultado se coloca donde corresponde, debajo de la primera cantidad.

$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 7 \\ \hline 56 \\ 70 \\ 1400 \end{array}$$

Después multiplica las centenas 200 x 7, el resultado se coloca donde corresponde, debajo de la segunda cantidad.

$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 7 \\ \hline 56 \\ 70 \\ \hline 1400 \\ 1526 \end{array}$$

Para terminar, suma los resultados.

En el desarrollo de este procedimiento se trabajó la propiedad distributiva, pero los autores lo llaman “el procedimiento que seguimos en Occidente para realizar la multiplicación” (p. 97). Es importante el trabajo de la propiedad distributiva en el salón de clase, ya que los alumnos irán descubriendo el porqué cuando multiplico el  $2 \times 5 = 10$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 25 \\ \times 23 \\ \hline 75 \\ 0 \end{array}$$

coloco el 0 debajo del 7 y se lleva 1,

¿Pero una qué, una unidad o una decena? Esta interrogante es otra dificultad que se tiene en la enseñanza de la multiplicación.

En la lección 42 titulada “La tabla de Pitágoras”, tiene como objetivo que los alumnos extraigan información del cuadro de multiplicaciones (tabla de Pitágoras) (Ver figura 1.11)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3		5	6	7	8	9	
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0		6	9	12	15		21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0		10	15	20	25		35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42		54	60
7	0		14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64		80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30		50	60	70	80	90	100

Figura 1.11 Tabla pitagórica

Las actividades que deben realizar los alumnos son:

- Completen la tabla de Pitágoras
- ¿Qué patrón observan en los números de la fila del 5?
- ¿Y en los de la columna del 5?...

Por último, se les pide a los alumnos que observen en la tabla pitagórica la simetría con respecto a la diagonal de color rojo (p. 141). El trabajo que se propone con la tabla pitagórica prioriza el método para calcular. Con la tabla pitagórica se puede trabajar las relaciones que tienen los números y cómo las cantidades forman conjuntos. Todo este trabajo a partir de la convención “veces-cantidad” que se presentará en el capítulo 5. Pero hasta el momento no ha sido claro el cómo enseñar las tablas de multiplicar. Probablemente sea uno de los porqué se les pide a los alumnos que memoricen las tablas de multiplicar en los primeros meses de haber iniciado el ciclo escolar en un segundo año de Educación Primaria.

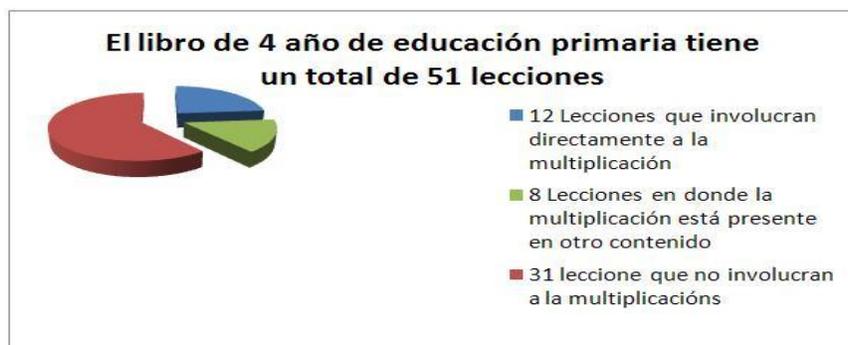
La presencia que tiene la multiplicación en otros contenidos matemáticos se presenta a continuación:

Números naturales: ¿Cuál descomposición es mayor? Tiene como objetivo “que los alumnos comparen y operen con descomposiciones aditivas y multiplicativas” (p.51). Por ejemplo: se le pide a los alumnos que coloquen los signos > mayor que, < menor que o = igual en las siguientes operaciones:  $130 \underline{\hspace{1cm}} 259$ ;  $3 \times 9 \underline{\hspace{1cm}} 3 \times 4 \times 3$ ;  $7 \times 8 \underline{\hspace{1cm}} 2 \times 4 \times 7$ ;...

Fracciones: “La mitad de la mitad de la mitad” tiene como objetivo que los alumnos utilicen fracciones (medios, cuartos y octavos) para expresar oralmente y por escrito el resultado por escrito. La multiplicación se presenta a partir de la explicación que dan los autores: *“Una forma de calcular la mitad de una fracción es multiplicar el denominador de la fracción por 2. Por ejemplo, si la fracción es  $\frac{3}{4}$  debes multiplicar el denominador, que es 4, por 2, y obtienes  $\frac{3}{8}$ ”* (p. 87).

Durante la revisión del libro del alumno de matemáticas de tercer año, una de las personalidades didácticas de la multiplicación -el método para calcular- en las actividades propuestas en el libro no hay claridad en el número que nos dice las veces y el número que nos indica la cantidad.

El libro de matemáticas del alumno de 4° año de Educación Primaria 2011 tiene la mayor cantidad de lecciones, con respecto a otros grados escolares, que implican directamente a la multiplicación o como auxiliar en otros contenidos matemáticos. También, en este año escolar se identificaron las 4 personalidades didácticas de la multiplicación: suma iterada, arreglos rectangulares, de combinación y método para calcular. Esta última personalidad, nuevamente, prioriza el cálculo. En este año escolar, se integran actividades multiplicativas que refieren a multiplicar por 10, 100 y 1000 y, por primera vez, aparece la multiplicación con los números decimales. Durante la revisión de las lecciones de cuarto año de Educación Primaria se identificó la presencia de la multiplicación en los siguientes contenidos matemáticos: fracciones, valor posicional, proporcionalidad, unidades de medida y geometría (área) (Ver gráfica 1.3)



Gráfica 1.3 Distribución de los contenidos de matemáticas de cuarto año de Educación Primaria en relación con la multiplicación

A continuación describiré algunas actividades que dan cuenta del trabajo de la multiplicación que corresponde a este grado escolar, así como la presencia que tiene en otros contenidos matemáticos.

En este año escolar, se identificaron dos lecciones con el trabajo de la multiplicación que hasta el momento no se habían propuesto –multiplicar por 10, 100 y 1000, y multiplicar números decimales por números naturales.

En la lección 14 titulada “multiplico por 10” tiene como objetivo que los alumnos determinen reglas prácticas para multiplicar rápidamente por 10, 100 y 1000. Por ejemplo: En el salón de Sofía están organizando una rifa de 2 paquetes de programas documentales en formato DVD. El boleto para participar en la rifa del primer paquete cuesta \$8.00 y el del segundo, \$13.00. Si Sofía el primer día vendió 10 boletos para el primer paquete y 100 boletos para el segundo paquete. ¿Cuánto dinero juntaron ese día? (p. 56).

Por ejemplo, en este problema multiplicativo se puede identificar la función de las cantidades; a partir de la convención “veces-cantidad”. Para encontrar el resultado de la venta del primer paquete tenemos el número de boletos vendidos y el precio de cada boleto. A partir de la convención “veces-cantidad”, el método para calcular se expresa de la siguiente manera: 10 boletos x 8 pesos = 80 pesos. Esta representación tiene sentido porque la iteración de pesos da como resultado pesos.

En la lección 47 titulado “¿Cuántos puedo comprar?” Tiene como objetivo que los alumnos resuelvan situaciones de multiplicación de números decimales por números naturales que hagan referencia a precios expresados en pesos y en centavos (p. 158). (Ver figura 1.12)

Silvia pidió 8 bolígrafos de diversos colores.  
¿Cuánto dinero pagó por todos ellos?



Figura 1.12 Precios de artículos escolares

La representación para obtener el resultado, según la convención “veces-cantidad” es la siguiente:  $8 \times 3.50 = 28.00$  pesos. ¿Pero por qué el punto decimal se colocó entre el 8 y el 0? Para esta interrogante se encontró la siguiente explicación: “*para resolver multiplicaciones que tienen un número decimal, se procede de la misma manera que con una multiplicación con números naturales, pero en este caso se debe considerar el punto decimal para colocarlo en el lugar correcto y señalar el mismo número de cifras decimales. Por ejemplo, si multiplicas  $43.50 \times 65$ , se efectúa la operación como si se tratara de dos números naturales. Una vez obtenido el resultado, se cuentan los números que están después del punto decimal, que en este caso son dos, y se coloca entonces el punto en el producto final, contando el mismo número de lugares (o cifras) de derecha a izquierda*” (p. 169). (Ver figura 1. 13)

$$\begin{array}{r}
 43.50 \\
 \times \quad 65 \\
 \hline
 21750 \\
 26100 \\
 \hline
 2827.50
 \end{array}$$

Figura 1.13 Colocación del punto decimal en el producto de la multiplicación

Durante la revisión del libro, me llamó la atención la explicación que dan los autores relacionada con la multiplicación: “Cada parte de la multiplicación tiene un nombre especial. A los elementos que se habrán de multiplicar se les llama **factores** y para distinguirlos agregamos a su nombre la posición en que se encuentran. Al resultado de la multiplicación se le llama **producto**. En el ejemplo  $5 \times 12 = 60$ , 5 es el primer factor y 12, el segundo factor. El producto del primer factor por el segundo es 60. Observa que si cambiamos el orden de los factores, el producto es idéntico:  $12 \times 5 = 60$ ” (p. 93).

Si reconstruimos la ruta didáctica que se ha propuesto para la enseñanza de la multiplicación en los libros de texto para el alumno, esta comenzó con la convención “veces-cantidad”, después se trabajó con los arreglos rectangulares, de combinación y, por último, el método para calcular desprovisto de algún significado. También se fueron identificando las explicaciones que dieron los autores relacionado con la multiplicación. Por ejemplo:

... Alicia compró 4 montones de 8 duraznos cada uno:  $8+8+8+8=32$ ,  $8+8=16 + 8+8=16$ ,  $16+16=32$ . También se puede decir que se tienen 4 veces 8 duraznos y se representa así:  $4 \times 8 = 32$ ”

... “el orden en que realices la multiplicación no altera el producto”

*“Cada parte de la multiplicación tiene un nombre especial. A los elementos que se habrán de multiplicar se les llama **factores** y para distinguirlos agregamos a su nombre la posición en que se encuentran. Al resultado de la multiplicación se le llama **producto**”.*

En esta última explicación, sí es cierto que las partes que constituyen a la multiplicación se llaman “factores y producto”. Pero no se puede determinar como primer factor y segundo factor, ya que cada uno de los factores tiene un nombre específico (multiplicador y multiplicando). También, cada uno de ellos tiene una función específica en la resolución de problemas multiplicativos. Ante esta confusión que se está generando es importante que los maestros conozcan e identifiquen en los problemas multiplicativos “suma iterada” la función que tiene el multiplicador y multiplicando.

La presencia de la multiplicación en los contenidos matemáticos de cuarto año se presenta de la siguiente manera:

Valor posicional: Tiene como objetivo que los alumnos resuelvan problemas en donde se utilice el valor posicional de los dígitos en el sistema decimal. Ejemplo, En una papelería se entregaron los siguientes artículos: 4 cajas con 800 gomas cada una; 5 paquetes con 250 cuadernos cada uno; 6 bolsas con 20 moños cada una, y 3 globos. ¿Cuántos artículos fueron entregados? (p. 11).

Relaciones de proporcionalidad. Tiene como objetivo que los alumnos resuelvan problemas de valor faltante en los que se da el valor unitario, o se pregunta por él, mediante distintos procedimientos. Por ejemplo: Luisa trabaja en una fábrica de camisas. Para cada camisa de adulto se necesita 15 botones. Ayuda a Luisa a encontrar las cantidades que faltan en la siguiente tabla. Después, contesta las preguntas (p. 36). (Ver figura 1. 14)

Camisas de manga larga para adulto					
Cantidades de camisa	1	6	14	75	160
Cantidades de botones	15				

Figura 1.14 Relación multiplicativa de número de botones por camisa

¿Cuántos botones se necesitan para confeccionar 10 camisas? \_\_\_\_\_

¿Cuántos botones se necesitan para 25 camisas? \_\_\_\_\_

Unidades de medida: Tiene como objetivo que los alumnos reconozcan por su tamaño el  $m^2$ , el  $dm^2$  y el  $cm^2$ . Por ejemplo: Para cubrir una superficie de 90cm de largo por 2m de ancho, ¿cuántas losetas cuadradas de 10cm por lado se necesitan? (p. 139).

En la geometría (área) del subtema de Estimación y cálculo: Tiene como objetivo que los alumnos construyan una fórmula para calcular el área del rectángulo (p. 141). En la figura cada cuadrado representa  $1cm^2$ . ¿Cuál es su área? (Ver figura 1.15)

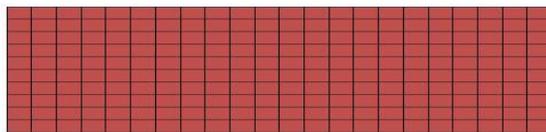


Figura 1.15 División del rectángulo en  $cm^2$  para obtener el área

Como podemos observar la multiplicación es un auxiliar que nos permite obtener el resultado en otros contenidos matemáticos, pero es importante mencionar que cada contenido tiene sus propias características que deben ser analizadas y desarrolladas en su espacio y estructura.

El libro de matemáticas del alumno de 5° año de Educación Primaria 2011, disminuyen las lecciones que implican directamente a la multiplicación, pero aumenta la presencia de la multiplicación en otros contenidos matemáticos. En este año escolar, se identificaron 2 de las 4 personalidades didácticas de la multiplicación: de combinación y método para calcular. Nuevamente, esta última

personalidad didáctica prioriza el cálculo que la interpretación cuantitativa de la multiplicación. Las actividades que se integran para el trabajo con la multiplicación están referidas con los números fraccionarios y decimales por números naturales. Los contenidos matemáticos en donde se utiliza la multiplicación son los siguientes: valor posicional, números naturales, geometría (área y perímetro), decimales, fracciones, múltiplos del metro, litro y kilogramo, proporcionalidad, porcentajes, unidades de tiempo, promedios y uso de la calculadora (Ver gráfica 1.4)



Gráfica 1.4 Distribución de los contenidos de matemáticas de quinto año de Educación Primaria en relación con la multiplicación

La actividad que se propone en este año escolar con la multiplicación es que los alumnos apliquen la multiplicación de números fraccionarios y decimales por naturales en la resolución de problemas. Por ejemplo (fracción), Juan vende quesos. El lunes vendió 3 quesos de  $1/5$ kg y 7 quesos de  $1/4$ kg. ¿Cuántos kilogramos de queso vendió en total?; (con decimales), Sonia compró 5 paquetes de queso panela de 0.375kg cada uno y 6 paquetes de jamón de 0.250kg. ¿Cuál es el peso de todo lo que compró? (p. 133).

La presencia de la multiplicación en los contenidos matemáticos de quinto año se presenta de la siguiente manera:

Para calcular el perímetro de ciertas figuras geométricas no se utiliza el método para calcular de la multiplicación directamente, pero si la suma iterada. Por ejemplo,

Los trabajadores elaboraron una tabla donde registraron las formas geométricas de otros terrenos para así facilitar el cálculo del perímetro... (p. 32). (Ver figura 1.16)

Tipo de terreno	Nombre de la figura geométrica	Longitud de cada lado			Perímetro
		8	10	15	
	Triángulo equilátero	$8 + 8 + 8 = 24$ 24 metros de malla			$L + L + L = 3L$
	Cuadrado				

Figura 1.16 Procedimientos para obtener el perímetro

En la representación del perímetro de las figuras geométricas  $3L$ , tiene un estrecho vínculo con la convención “veces-cantidad”. Es decir, primero están las “veces” 3 y después la “cantidad” 8.

En las conversiones entre los múltiplos y submúltiplos del metro, del litro y del kilogramo, la multiplicación aparece:

Sistema métrico decimal: 

Km	Hm	Dam	m	dm	cm	Mm
----	----	-----	---	----	----	----

¿Cuántos metros tiene un kilómetro?  $1\text{m} \times 1000\text{m}$  (equivale a un kilómetro)

¿A cuántos centímetros equivale un metro?  $1\text{cm} \times 100\text{cm}$  (equivale a un metro)

En el porcentaje: Luis necesita comprar 5 cuadernos para la escuela. En las tres papelerías cercanas a su casa, los cuadernos cuestan \$ 10.00, pero cada una ofrece una promoción diferente (p. 163). (Ver figura 1. 17)

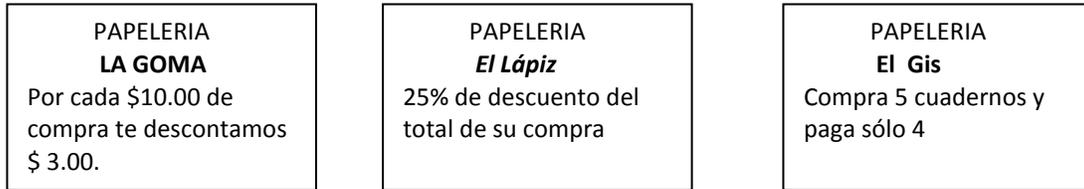


Figura 1.17 Promoción de productos escolares

¿En qué papelería le conviene comprar los cuadernos? \_\_\_\_\_

En las unidades de tiempo: Si el profesor Víctor asiste todos los días a la escuela de 7:30 a 11:20 am, ¿cuánto tiempo permanece en la escuela al mes? \_\_\_\_\_ horas y \_\_\_\_\_ minutos. Considera que el mes tiene únicamente 4 semanas (p. 177).

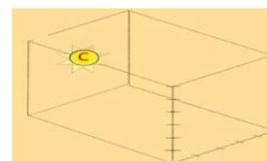
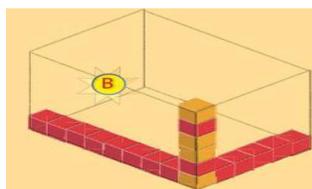
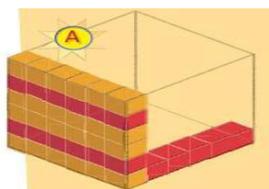
En el libro de matemáticas del alumno de 6 grado de Educación Primaria 2011, disminuyen las lecciones que implican directamente a la multiplicación, pero nuevamente aumenta la presencia de la multiplicación en otros contenidos matemáticos. Las personalidades didácticas que se identificaron en este libro son: suma iterada, de combinación y método para calcular. Nuevamente, esta última personalidad prioriza el cálculo que la interpretación cuantitativa de la multiplicación. En este año escolar, el trabajo de la multiplicación finaliza con el repaso de algunas actividades de los diferentes años escolares. Los contenidos matemáticos que se trabajan: fracciones, números naturales, geometría (área, perímetro y volumen) porcentaje, unidades de medida (tiempo), proporcionalidad, conversión del sistema métrico decimal al sistema inglés y perímetro de la circunferencia (Ver gráfica 1. 5)



Gráfica 1.5 Distribución de los contenidos de matemáticas de sexto año de Educación Primaria en relación con la multiplicación

La presencia de la multiplicación en los contenidos de sexto año se presenta de la siguiente manera:

En quinto año, el trabajo con el contenido del volumen se llevó a cabo mediante el conteo. En sexto año se presenta: En equipos, completen los prismas y obtengan su volumen. Consideren cada cubo pequeño como unidad de medida (Ver figura 1.18)



Volumen A \_\_\_\_\_

Volumen B \_\_\_\_\_

Volumen C \_\_\_\_\_

Figura 1.18 Prismas rectangulares para obtener su volumen mediante el conteo

Con capacidad: Juan quiere colocar una pecera en la sala de su casa. El vendedor le propone los siguientes modelos (Ver figura 1.19)



Figura 1.19 Prismas rectangulares para obtener su capacidad con medidas específicas

¿Cuál de las dos peceras requiere mayor cantidad de agua para llenarla? \_\_\_\_\_  
(p. 164)

De centímetros a pulgadas: se le pide al alumno que establezca relaciones entre unidades del Sistema Internacional de Medidas y del Sistema Inglés.

Don Juan fue a la ferretería a comprar una manguera para regar su jardín. Después de observar varias, eligió la que muestra la siguiente etiqueta (Ver figura 1.20)



Figura 1.20 Rollo de manguera con medidas en el Sistema Inglés

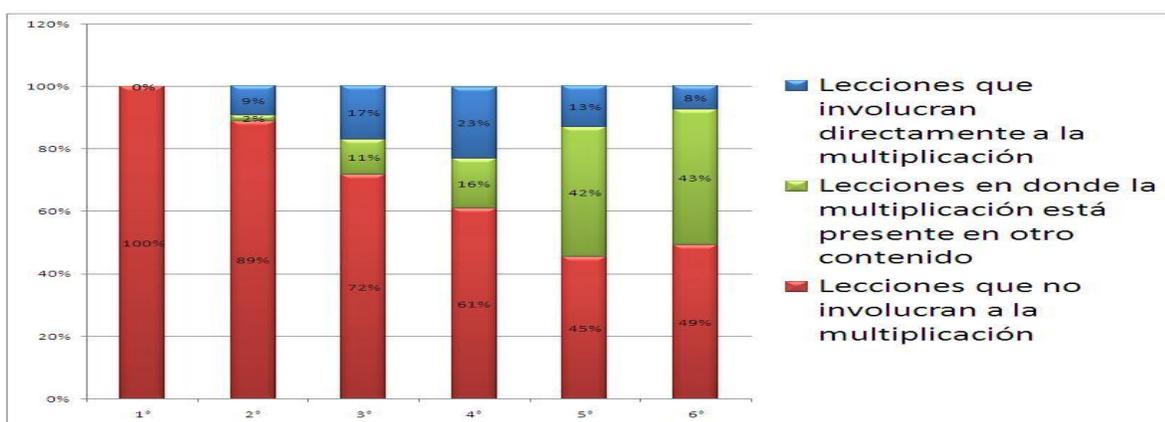
¿Cuántos metros de longitud tiene la manguera que compró don Juan? Observa que: 1 pie (ft)= 30.48cm. \_\_\_\_\_

El último contenido en donde la multiplicación está presente lleva por título la medida de la circunferencia. El trabajo que se propone es el siguiente: El diámetro de la Tierra es de 12 756 km. ¿Cuál es la medida de su circunferencia? La convención que se propone es  $C = \pi \times D$ ,  $3.1416 \times 12\,756 = 40,074.2496$  km.

Durante esta revisión, se enfatizó el trabajo que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos, a partir de la convención –veces-

cantidad-, propuesta en los libros de texto para el alumno de Educación Primaria. A partir de esta convención, se pretende que los maestros de grupo identifiquen y vean la función de los números como cantidades. De esta manera, la atención y cuidado sobre la definición “el orden de los factores no altera el producto”, desde una visión personal, ha propiciado que la multiplicación se conciba como un simple cálculo. También, en los libros del alumno de segundo año de Educación Primaria se identificaron cuatro personalidades didácticas de la multiplicación: suma iterada, arreglo rectangular, combinación y método para calcular. También, se identificaron inconsistencias en el significado de los factores en la multiplicación, por ejemplo: en las explicaciones que daban los autores relacionados con la multiplicación, en la representación del método para calcular y en el uso de la tabla pitagórica.

La representación general del trabajo de la multiplicación y presencia que tiene en otros contenidos matemáticos durante la Educación Primaria quedó de la siguiente manera (Ver gráfica 1. 6)



Gráfica 1.6 Distribución general de la multiplicación y presencia que tiene en otros contenidos matemáticos durante la Educación Primaria

Como se puede ver, en la gráfica general, en primer año de Educación Primaria no hay una sola lección que dé cuenta del trabajo con la multiplicación. El trabajo de la multiplicación, como anteriormente se mencionó, empieza en un segundo año.

En este grado escolar, solamente hubo cinco lecciones que dan cuenta de la introducción y trabajo de la multiplicación.

En los siguientes grados escolares, la multiplicación va teniendo más presencia. Es decir, en tercer año de Educación Primaria hay un aumento de lecciones que implican directamente a la multiplicación. Asimismo, se incrementa el trabajo de la multiplicación como auxiliar en otros contenidos matemáticos. Como tema de enseñanza su mayor presencia es en cuarto año. En quinto y sexto año de Educación Primaria más de la mitad de las lecciones la implican.

## **1.4 La multiplicación es un tema que se les dificulta a los estudiantes**

### **Mi experiencia personal**

En mi quehacer docente en primaria, -antes de ingresar a la maestría-, uno de los problemas a los que me enfrenté, sin duda, fue el trabajar con las matemáticas. El compromiso que implica ser profesor de grupo va más allá del deseo, requiere una preparación académica que ayude a la construcción y desarrollo de estrategias que favorezcan el aprendizaje de los alumnos. Este compromiso requiere entender el tema que se va a trabajar y los niveles progresivos del desarrollo que implica este tema. También requiere conocer los materiales didácticos que apoyan el trabajo, la metodología para trabajar con las matemáticas y las características de aprendizaje de cada uno de los alumnos.

En mi tarea docente, cuando trabajé el tema *la multiplicación*, los alumnos manifestaron dudas, inquietudes y cuestionaron lo que estaban aprendiendo: ¿Por qué cuando multiplico una cantidad por cero me da cero y si sumo una cantidad más cero obtengo la cantidad? ¿Por qué cuando multiplico el segundo número del multiplicador con el multiplicando (de derecha a izquierda) lo tengo que colocar debajo del segundo número del resultado de la primera cantidad? Ante las dudas e inquietudes de mis alumnos no tuve las respuestas claras que favorecieran su aprendizaje.

Ante estas dudas busqué información referente al tema, en el internet y en los libros, pero a la hora de realizar la lectura y análisis, encontré términos matemáticos que para mí eran nuevos y desconocidos. La información que obtuve en el internet y libros la compartí con mis compañeros de trabajo. Al revisarla, encontramos varias respuestas que me ayudaron a entender, de forma general, el significado de cada uno de los términos. En la actualidad, tengo duda de la información que construí sobre la multiplicación y el concepto del cero. Recuerdo la respuesta que di: el cero no vale nada cuando se encuentra a la izquierda y después de un punto, siempre y cuando no haya números después del 0,

ejemplo: 00001, 1.0000 y 1.0003. Actualmente analizo mi respuesta y me doy cuenta que no respondí la pregunta que me hicieron mis alumnos. Más bien relacioné el 0 con su valor posicional.

Después de esta reflexión, encontré otras dificultades relacionadas con la multiplicación. Al plantear y resolver un problema matemático que involucró a la multiplicación, los alumnos no supieron qué operación realizar. Varios alumnos me preguntaron. ¿Cómo resuelvo el problema? ¿Qué operación debo hacer? ¿Es una suma, resta, multiplicación o una división? Solamente contesté que tenían que leer bien el problema porque en el mismo problema había una “palabra” que les indicaba qué operación realizar. Después de revisar los resultados de los alumnos, encontré otra dificultad, los alumnos no sabían las tablas de multiplicar.

Entonces, podemos ver, que hay varias dificultades que están inmersas en el tema de la multiplicación. Pensé que yo era el único que tenía estas dificultades. Pero en una junta de consejo técnico, noté que varios de mis colegas tenían los mismos problemas que yo había encontrado al trabajar la multiplicación. Pude darme cuenta que no era el único que tenía esas dificultades, sino que, muchos otros maestros también viven estos problemas en su salón de clases.

## **1.5 Excale**

El desempeño escolar de los alumnos es un punto central educativo que ha sido objeto de estudio mundialmente. En la actualidad, hay dependencias –nacionales e internacionales- encargadas de diseñar exámenes para evaluar los aprendizajes alcanzados por los alumnos en determinados grados y niveles escolares. Las pruebas estandarizadas Excale evalúan los contenidos curriculares que se trabajan a lo largo de la Educación Primaria. Los resultados que muestra Excale, en el contenido de la multiplicación, brindan un panorama general del dominio y dificultades que tienen los alumnos de tercero de primaria en este contenido matemático.

De acuerdo con el INEE (2012), los exámenes Excale son pruebas criterioles, apegadas al currículo nacional y que basan su aplicación en un arreglo matricial. Son criterioles porque tienen un referente fijo, que se establece de antemano, antes de aplicar las pruebas; en este sentido, son opuestos a las llamadas pruebas normativas (en las que el resultado obtenido por un individuo se compara con un referente móvil: la ejecución de los demás individuos). El referente fijo que tienen las pruebas Excale es, precisamente, el currículo nacional. Que las pruebas estén apegadas al currículo significa que no incluyen contenidos que no se encuentran en el currículo, y también se procura que las pruebas incluyan la mayor cantidad posible de contenidos curriculares. Los equipos que diseñan y desarrollan las pruebas Excale pasan gran parte del tiempo de trabajo cuidando que los contenidos curriculares estén bien representados en las preguntas que se utilizan, tanto en la temática, como en la extensión, como en el enfoque, los cuales han de ser los que la Secretaría de Educación Pública explicita en materiales curriculares.

### **1.5.1 Contenidos temáticos de la multiplicación que evalúa Excale en Educación Primaria**

Anteriormente se mencionó que la enseñanza de la multiplicación inicia en un segundo año de Educación Primaria. Este contenido matemático se evalúa en la

prueba estandariza Excale que se aplica a un grupo de alumnos mexicanos que cursan el tercero y sexto año de Educación Primaria. Los reactivos que propone la prueba Excale tienen un estrecho vínculo con cada uno de los contenidos curriculares. Es decir, no hay un solo reactivo que no corresponda a los contenidos matemáticos que se trabajan en la Educación Primaria.

A continuación describiré algunos reactivos que evalúa la prueba estandarizada Excale del contenido *la Multiplicación* que para fines de este trabajo se consideraron:

El primer reactivo que se consideró corresponde a una de las personalidades didácticas de la multiplicación “arreglos rectangulares”. El contenido temático espera que los alumnos resuelvan los problemas con arreglos rectangulares, cuya solución implique una multiplicación. El reactivo que con el que se ejemplifica este contenido es el siguiente: “Hugo está poniendo azulejos a la pared de su cocina. Ya puso algunos como muestra (Ver figura 1.21)

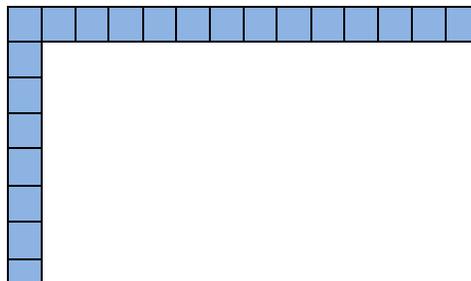


Figura 1.21 Arreglo rectangular

¿Cuántos azulejos van a poner en total?”

- a) 112 azulejos
- b) 22 azulejos
- c) 82 azulejos
- d) 126 azulejos

El porcentaje en aciertos a nivel nacional fue el 48% (INEE, 2012). Es decir, que menos de la mitad de los alumnos de tercer año de Educación Primaria contestó correctamente el problema multiplicativo. Al analizar este resultado, es importante tomar en cuenta que por ser un reactivo de opción múltiple, el mínimo de respuestas correctas que se esperaría que hubiera sería del 25%, ya que ese sería el resultado si se siguiera un proceso de selección aleatoria.

Así pues, el porcentaje es relativamente bajo. Probablemente los alumnos no pudieron interpretar la imagen que se les presenta porque, tal vez, la enseñanza de la multiplicación se ha enfocado en priorizar el método para calcular. Si fuera el caso, sería razonable esperar que los alumnos, posteriormente, tuvieran dificultades con el contenido de área y perímetro en geometría.

En otro contenido temático de la multiplicación se les pide a los alumnos que identifiquen un problema cuya solución sería una multiplicación. El reactivo con el que se ejemplifica es el siguiente: ¿Cuál de los siguientes problemas se resuelve con la operación  $48 \times 6$ ?

- A) En una tienda hay 48 cajas con 6 focos en cada una. ¿Cuántos focos hay en total?
- B) Había 48 golondrinas paradas en el alambre y llegaron otras 6. ¿Cuántas hay ahora?
- C) Compré 48 chicles, ¿cuántas bolsitas con 6 chicles en cada una puedo hacer?
- D) Mario tiene 48 canicas y Adolfo 6, ¿cuántas canicas le faltan a Adolfo para tener tantas como Mario?

El porcentaje de aciertos a nivel nacional fue el 33% (INEE, 2012). Estos resultados son particularmente significativos ya que nos indican que una gran cantidad de alumnos en el sistema educativo nacional tienen dificultad al tratar de interpretar y relacionar el significado que tienen las cantidades cuando multiplican.

Es importante notar que la Respuesta “A” representa un problema multiplicativo “suma iterada” por un lado identificamos las veces (multiplicador) y, por otro, la cantidad (multiplicando): 48 veces 6 fotos.

Para los propósitos de esta tesis, los resultados nos sugieren que sería importante lograr que maestros y alumnos distingan la función que tienen los factores (multiplicador y multiplicando) en la resolución de problemas multiplicativos. Esto es, que desarrollen una comprensión cuantitativa de la multiplicación.

Otro de los contenidos temáticos requiere que los alumnos calculen una multiplicación que no implica transformar. Uno de los factores es de tres cifras y el otro de una. El problema reactivo con el que se ejemplifica es el siguiente: ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? 
$$\begin{array}{r} 720 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$
 El porcentaje de aciertos que se tuvo a nivel nacional fue el 53% (INEE, 2012).

Para los propósitos de la presente tesis, es significativo que los alumnos tengan menos dificultades que con el anterior. Ello sugiere que en la educación que reciben se prioriza la realización de cálculos sobre la interpretación y resolución de problemas. También sugiere que muchos de los alumnos que correctamente resuelven multiplicaciones no tienen una idea clara del significado de los números con los que operan, ni de la operación misma.

El último reactivo multiplicativo que se consideró, tuvo como objetivo que los alumnos calcularan multiplicaciones con dos factores, ambos de dos cifras y con transformación. La actividad que se propuso fue la siguiente: ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? 
$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$$
 El porcentaje de aciertos a nivel nacional fue el 37% (INEE, 2012).

Aquí es significativo que a pesar de que se trata de un cálculo relativamente difícil, el porcentaje de aciertos sea mejor que el de reconocer el problema que se

resuelve con una multiplicación dada. Este resultado es consistente con el comentario anterior, en el sentido de que muchos alumnos pueden no tener una idea clara de qué significa multiplicar, aún cuando sean capaces de realizar correctamente el cálculo.

En general, los resultados de EXCALE sugieren que la enseñanza de la multiplicación a partir del método para calcular no es efectiva. Al menos, no lleva a los alumnos a reconocer las situaciones en que se debe de aplicar esta operación; situaciones que frecuentemente implica iterar cierto número de veces una cantidad dada (multiplicador y multiplicando).

### **1.6 Para finalizar este Capítulo**

Los antecedentes que se han mostrado en este Capítulo sobre la importancia del trabajo de la multiplicación en Educación Primaria nos dan una visión general de los retos y dificultades que hay en la enseñanza y aprendizaje de este contenido. En este Capítulo se aclaró el porqué es importante identificar la función que tienen las cantidades en los problemas multiplicativos. Además, se identificaron las cuatro personalidades didácticas de la multiplicación: suma iterada, arreglos rectangulares, de combinación y método para calcular.

También, se identificó el aumento de las lecciones en el contenido mismo de la multiplicación y como auxiliar en otros contenidos matemáticos en los diferentes grados escolares. En las pruebas estandarizadas Excale, se identificó que muchos alumnos de tercero no tienen una idea clara de qué pueden significar los números que forman parte de una multiplicación.

Queda claro entonces que *la multiplicación* es un contenido difícil de enseñar. También ha sido objeto de estudio por diferentes investigadores. En el siguiente Capítulo se hace una somera revisión de la literatura en el campo.

## II. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Cuando trabajé el contenido de la multiplicación en el salón de clase, a mis alumnos los guíé hacia la memorización y síntesis del algoritmo. Mi objetivo fue que los alumnos obtuvieran el resultado “correcto” en cada una de las actividades que realizaran. Al revisar sus resultados, por ejemplo, Emanuel compró 5 bolsas de caramelo. Cada bolsa le costó 7 pesos ¿Cuánto pagó en total? Mis alumnos hicieron los siguientes procedimientos:  $5 \times 7 = 35$  y  $7 \times 5 = 35$ . No había un interés de mi parte por analizar las representaciones que hacían los alumnos, ya que en mi trayectoria académica y formación docente escuché: “que el orden de los factores no altera el producto”.

Para este trabajo de tesis, consideré importante revisar cada una de las propiedades de la multiplicación: conmutativa, asociativa y distributiva. Esta revisión tiene como objetivo brindarle al lector una visión más completa del significado que puede tener la multiplicación en el aula de primaria.

### 2.1 Propiedad conmutativa

La frase “el orden de los factores no altera el producto” se deriva de la propiedad conmutativa de la multiplicación pero lo que realmente implica esta propiedad es que en la multiplicación la inversión en los valores de los factores mantiene el producto.

Vergnaud (1991) menciona que: “La propiedad conmutativa de la multiplicación en el plano numérico permite perfectamente invertir el papel del multiplicador y multiplicando; pero se requiere una cierta precaución pedagógica para lograr que los niños acepten tal conmutatividad, pues tendrán que hacer abstracción de lo que representan los números” (p.150). Por tal motivo, en un primer momento, entendamos a la propiedad conmutativa como la inversión de los valores entre el multiplicador y multiplicando que mantienen el producto. Por ejemplo,

Citlalli tiene 5 bolsas de dulces. Cada bolsa tiene 3 dulces ¿Cuántos dulces tiene en total?

En el problema expuesto, -según la convención propuesta por los libros de la SEP-, una de las cantidades nos menciona las veces (multiplicador) y la otra cantidad el número de colección (multiplicando). Es decir,  $5 \times 3 =$ , en esta representación el 5 es el multiplicador que nos dice las veces que se va iterar el número de colección; el número 3 es el multiplicando, esta cantidad nos indica el número de colección que se va a iterar, 5 veces 3 (Ver figura 2.1)



Figura 2.1 Representación gráfica de la multiplicación  $5 \times 3$

La propiedad conmutativa en el plano numérico permite perfectamente invertir el papel del multiplicador y multiplicando. Por ejemplo, en la primera representación gráfica del problema, tenemos 5 bolsas con 3 dulces cada una. Tomemos una bolsa de la representación (Ver figura 2. 2),



Figura 2.2 Bolsa con dulces

cada uno de los dulces los vamos a colocar por separado (Ver figura 2.3),



Figura 2.3 Distribución de los dulces de la primera bolsa

al término, haremos lo mismo con cada una de las bolsas restantes. Cada uno de los dulces se irá distribuyendo uno a uno con los dulces de la primera bolsa

cuando termine el reparto de todos los dulces de las bolsas, habrá quedado de la siguiente manera (Ver figura 2.4)

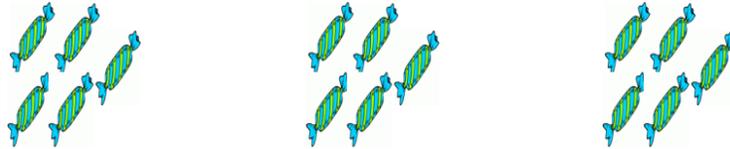


Figura 2.4 Representación final de la distribución de cada una de las bolsas

En esta segunda representación, se observa que la cantidad de dulces de cada bolsa son suficientes para representar la cantidad de bolsas con la misma cantidad de dulces.  $3 \times 5 =$ , 3 veces 5 (Ver figura 2.5)

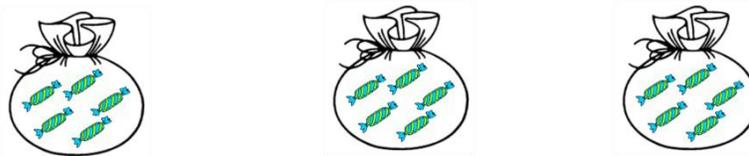


Figura 2.5 Representación gráfica de la multiplicación  $3 \times 5$

La propiedad conmutativa en el plano numérico, nos permite entender qué pasa cuando se invierten los factores (multiplicador y multiplicando) y que al hacerlo conservan el producto. Pero, Vergnaud en Chamorro (2001) nos dice que: “No se puede ignorar la naturaleza de las cantidades que representan los números” (p.217). Es decir,

Emanuel compró 5 bolsas de estampas. Si cada bolsa cuesta 9 pesos ¿Cuánto pagó por todas las bolsas que compró?

La representación de su solución, es  $5 \times 9$ , que son cinco iteraciones de nueve,  $9 + 9 + 9 + 9 + 9$  dándonos un total de pesos. Si se invierten las cantidades  $9 \times 5$  la iteración de bolsas de estampas no nos puede dar pesos. No es equivalente, conceptualmente, partir de nueve y multiplicar por cinco, y partir de cinco y

multiplicar por nueve, a pesar de la equivalencia de los dos procedimientos a nivel numérico Vergnaud (2001).

La diferencia del plano numérico y plano conceptual, es que este último, nos ayudará a diferenciar la función del multiplicador y multiplicando, ya que a partir de esta diferencia podemos identificar dos tipos de división, - de reparto y asignación (también considerado “como de tasa”)-, que se ha hecho poco énfasis en su enseñanza en la literatura.

## **2.2 Propiedad asociativa**

Para la propiedad asociativa Courant y Robbins (2008) mencionan: “La ley asociativa de la adición, establece que la adición de tres números da el mismo resultado ya sea que se sume al primero la suma del segundo y el tercero, o al tercero la suma del primero y el segundo” (p. 24). Podemos entender que para la propiedad asociativa de la multiplicación hay que entender a los factores como productos. Es decir, cuando multiplicamos un número por un número es como si lo multiplicara por sus factores primos o sus combinaciones. Ejemplo,

Rubén compró 100 libretas profesionales para venderlas en este inicio escolar. Si cada libreta le costó 20 pesos, ¿cuánto pagó por todas las libretas?

$$100 \times 20 = 2000$$

Esta propiedad asociativa permite desarrollar y relacionar procesos mediante la factorización de las cantidades.

El resultado del problema anterior se puede obtener mediante diferentes representaciones:

$$(50 \times 2) 20 = 2000 \text{ (o “cincuenta veces lo doble de veinte”)}$$

$$(5 \times 5 \times 2 \times 2) 20 = 2000$$

$$(10 \times 5 \times 2) 20 = 2000$$

$$(5 \times 2 \times 10) 10 \times 2 = 2000$$

$$100 (5 \times 4) = 2000$$

En la revisión de la literatura que se realizó no se identificó un apartado que hablara y trabajara la propiedad asociativa en la multiplicación. El trabajo de esta propiedad puede ayudar a entender temas como: el mínimo y máximo común múltiplo, la factorización de los números y su composición y los trabajos futuros en el álgebra....

### 2.3 Propiedad distributiva

Para Courant y Robbins (2008): “La ley distributiva, expresa el hecho de que para multiplicar una suma por un entero podemos multiplicar cada término de la suma por este entero y después sumar los productos” (p. 24). Entendamos a la propiedad distributiva como la multiplicación frente a la suma.

La enseñanza del algoritmo de la multiplicación, se representa comúnmente en el salón de clases de forma vertical con un solo dígito en el multiplicando y multiplicador (Ver figura 2. 6).

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

Figura 2.6 Representación vertical del algoritmo con un solo dígito en cada uno de los factores

Después, aumenta la cantidad del multiplicando a dos dígitos (Ver figura 2.7)

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

Figura 2.7 Representación vertical del algoritmo con dos dígitos en el multiplicando y uno sólo dígito en el multiplicador

posteriormente se trabaja con dos dígitos en el multiplicando y multiplicador (Ver figura 2.8)

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 25 \\ \hline \end{array}$$

Figura 2. 8 Representación vertical del algoritmo con dos dígitos en los dos factores

En este nivel mis alumnos manifestaron dudas, inquietudes y cuestionaron lo que estaban aprendiendo: ¿Por qué cuando multiplico el segundo número del multiplicador con el multiplicando (de derecha a izquierda) lo tengo que colocar debajo del segundo número del resultado de la primera cantidad? (Ver figura 2.9)

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 25 \\ \hline 65 \\ 26 \end{array}$$

Figura 2.9 Colocación de los números en la síntesis de la multiplicación

Ante la duda e inquietud de mis alumnos no tuve la respuesta clara que favoreciera su aprendizaje. Solamente mencioné que como el segundo número del multiplicador está en el lugar de las decenas, por tal motivo, se coloca el resultado en las decenas.

En el lugar de las unidades les pedí que lo dejaran vacío. Al revisar los resultados observé que en el lugar vacío los alumnos colocaron: un cero, una X, o un  $\square$  ). Estas representaciones eran utilizadas para justificar el lugar vacío de las unidades, cuando se multiplica el segundo factor del multiplicador (decenas) con el primer número del multiplicando (unidad) ambos de derecha a izquierda.

Anteriormente se mencionó, que los números se tienen que ver como cantidad. Es decir,  $\begin{array}{r} 45 \\ \times 26 \end{array}$  la cantidad que se encuentra en el multiplicando es 45, en él encontramos 45 unidades o 4 decenas y 5 unidades. Esta misma relación pasa con la cantidad del multiplicador  $\begin{array}{r} 45 \\ \times 26 \end{array}$  26, tenemos 26 unidades ó 6 unidades y 2 decenas.

Por tal motivo, cuando multiplicamos estas cantidades  $\begin{array}{r} 45 \\ \times 26 \\ \hline \end{array}$  la propiedad distributiva nos puede ayudar a entender el por qué se deja un lugar vacío en la solución del algoritmo<sup>1</sup> de la multiplicación:

$$26 \times 45 = 6 \times 45 + 20 \times 45:$$

$$6 \times 45 = (6 \times 5) + (6 \times 40):$$

$$20 \times 45 = (20 \times 5) + (20 \times 40):$$

$$\text{Por lo tanto: } 26 \times 45 = (6 \times 5) + (6 \times 40) + (20 \times 5) + (20 \times 40) = 30 + 240 + 100 + 1800 = 1170$$

La revisión y análisis de estas propiedades, para efectos del taller, me ayudó a entender a la multiplicación desde un punto de vista más cuantitativo. Por ejemplo, en la tabla pitagórica identifiqué las relaciones que hay en las tablas de multiplicar y que en la mayoría de las veces no se pueden ver estas relaciones porque las tablas de multiplicar se memorizan cada una por separado.

Por ejemplo, en mi experiencia, las tablas de multiplicar que se les dificultan a los alumnos son la del 6, 7, 8, y 9 (Ver figura 2.10)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 2.10 Tabla pitagórica

<sup>1</sup> Para Trajtenbrot (1974), el algoritmo constituye un proceso determinado que puede ser ejecutado y repetido con el mismo éxito por cualquier persona y permite, además, resolver problemas de un mismo tipo. Tomado del fascículo 3 de Botello et al. 1988.

Supongamos que los alumnos se han aprendido las tablas de multiplicar del 1 al 5. Para obtener el resultado de la tabla de multiplicar de  $6 \times 6$ , -basado en la convención del libro de texto para el alumno de Educación Primaria veces-cantidad-, pueden obtener el resultado por diferentes vías: si se saben la tabla del 1 y la del 5, entonces, los resultados de  $6 \times 1$  y  $6 \times 5$ , al sumarlos  $6 + 30$  nos da 36 que es el resultado de multiplicar  $6 \times 6 = 36$ ; o si se saben la tabla del 2 y 4,  $6 \times 2$  y  $6 \times 4$  al sumarlos  $12 + 24$  nos da 36 o dos veces la tabla del 3,  $6 \times 3$  y  $6 \times 3$  nos da  $18 + 18 = 36$ . Los resultados de la tabla de multiplicar del  $8 \times 7$  también se pueden obtener con el mismo procedimiento: la tabla del  $8 \times 2$  y la del  $8 \times 5$ ; la de  $8 \times 3$  y  $8 \times 4$  y la del  $8 \times 1$  y  $8 \times 6$ ; si sumamos cada conjunto de pares de las multiplicaciones nos da 56. En el caso de la tabla de multiplicar del 8 se puede seguir este procedimiento o duplicar la tabla del 4,  $1 \times 4 = 4 + 4 = 8$ ;  $2 \times 4 = 8 + 8 = 16$ ;.... Para obtener el resultado de la tabla de multiplicar del 9 se puede restar el multiplicador al resultado de la tabla del 10. Es decir,  $1 \times 10 = 10 - 1 = 9$ ;  $2 \times 10 = 20 - 2 = 18$ ;.... Al término de este trabajo podemos identificar que la memorización no es la única forma de que los alumnos se aprendan todas las tablas de multiplicar.

#### **2.4 Comentario final de este Capítulo**

En el presente Capítulo, se mostró la función que tiene cada una de las propiedades –conmutativa, asociativa y distributiva- en la multiplicación. En la propiedad conmutativa se identificaron dos planos – el numérico y el conceptual-, este último, nos ayuda a identificar la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos. A partir de esta diferenciación podemos identificar los dos tipos de división que hay –de reparto y de asignación-. El trabajo con la propiedad asociativa permite desarrollar y relacionar procesos mediante la factorización de las cantidades, esto a su vez, permitirá entender temas como: el mínimo y máximo común múltiplo, la factorización de los números y su composición y los trabajos futuros en el álgebra..., pero, probablemente en la Educación Primaria no se le ha dado la importancia que requiere esta propiedad. Por último, la propiedad distributiva nos ayuda a entender la relación que tiene la multiplicación frente a la suma y que a partir de este trabajo se pueda entender,

en el método para calcular, por ejemplo, el porqué cuando se multiplica el segundo número del multiplicador con el multiplicando (de derecha a izquierda) se coloca debajo del segundo número del resultado de la primera cantidad.

También, esta revisión me permitió entender las relaciones que tienen las tablas de multiplicar unas con otras. Y que a partir de esta relación haya otra forma de aprender las tablas de multiplicar sin que se empiece por lo memorístico. En el siguiente capítulo se hace una somera revisión en la literatura en el campo.

### III. TRABAJOS DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA LITERATURA EN ESPAÑOL

El trabajo con el contenido de la multiplicación ha sido un tema de gran relevancia en la literatura de educación matemática. Evidentemente ello se debe a que se le ha considerado un tema fundamental en la aritmética. Como veremos más adelante, los puntos de vista y perspectivas de los trabajos que afrontan el tema han sido diversos, lo que ha puesto de relevancia que la multiplicación es un conocimiento complejo que involucra una gran variedad de asuntos. A continuación se presenta una descripción de los trabajos más relevantes escritos en español, con el objetivo de que el lector los conozca someramente y pueda recurrir a ellos, según su interés específico.

#### 3.1 Lerner (1988) ¿Qué es la multiplicación?

Uno de los textos importantes que tocan el tema de la multiplicación es elaborado por Lerner (1988). En el texto, esta autora menciona que la respuesta que habitualmente se obtiene a la pregunta “¿Qué es la multiplicación?” es: “la multiplicación es una suma abreviada” (p. 129). La autora cuestiona la respuesta obtenida preguntándose: Si la multiplicación es un caso particular de la suma, entonces ¿por qué  $5 + 0 = 5$  pero, en cambio,  $5 \times 0 = 0$ ? ¿Por qué  $5 + 1 = 6$ , siendo 6 el sucesor de 5, en tanto que  $5 \times 1 = 5$ ?

Ante estas preguntas, la autora comenta lo siguiente:

1) La función del cero es muy diferente en la suma y en la multiplicación.

Según la autora, en la suma, el cero es el elemento neutro, es decir, es el elemento que, al combinarse con cualquier otro, da como resultado este último elemento.

Además, la autora menciona que en la multiplicación el cero es el elemento absorbente, es decir, el elemento que, al combinarse con cualquier otro, lo convierte en sí mismo.

La autora concluye lo siguiente: “Es obvio, entonces, que la función del cero en la multiplicación es exactamente opuesta a la que cumple en el caso de la suma” (p. 129).

2) Algo similar ocurre con respecto al 1 (uno):

La autora menciona que cuando se suma “1” (uno) a cualquier número natural se obtiene el sucesor de este último. Y que para la multiplicación no pasa lo mismo. Por ejemplo: “Al multiplicar por 1 cualquier número natural, se obtiene este último número. Es decir que el 1 es el elemento neutro de la multiplicación y cumple la misma función que cumple el cero en el caso de la suma” (P. 129). Ante esta disyuntiva, la autora comenta: “Si la multiplicación es un caso particular de la suma, ¿por qué el número que cumple la función de elemento neutro no es el mismo en ambos casos? ¿Por qué un mismo número -el 0 ó el 1- cumple funciones tan diferentes en un caso y en otro?” (p. 130).

Para ejemplificar esta situación, la autora cree conveniente preguntarse cuáles son las acciones concretas, realizables con objetos también concretos, que corresponden a la operación de la multiplicación. Por ejemplo:

Juan invitó 6 niños a su fiesta y quiere regalarle 2 globos a cada uno. ¿Cuántos globos necesita? Para ejemplificar el problema, la autora utilizó las siguientes representaciones:

ESTADO INICIAL

6

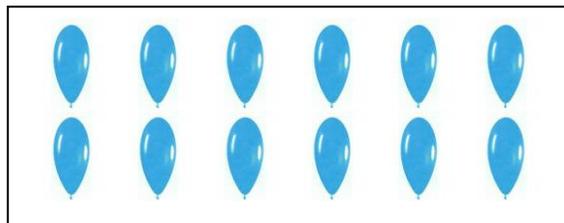
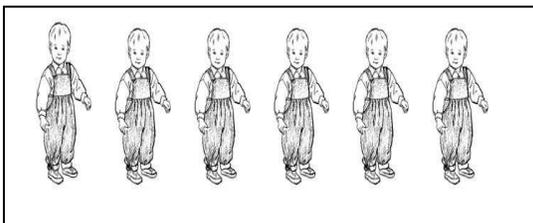
OPERADOR

$\times 2$

ESTADO FINAL

12

La autora menciona que esta representación significa que el conjunto “estado inicial” son los niños y el “conjunto final” son los globos.



Asimismo, la autora, al término de las representaciones, hizo la siguiente pregunta: ¿Qué hizo el operador?<sup>2</sup> Ante la pregunta formulada por la autora, ella responde: ¿Reunió? ¿Agregó? Evidentemente no, porque si el estado inicial estaba compuesto por niños y el operador hubiera reunido o agregado, ¿cómo explica que el estado final estuviera formado por globos?

La explicación que da la autora ante estas interrogantes es: “Si la multiplicación fuera una suma abreviada, sería difícil explicar por qué el operador  $\times 1$  no altera el número al que se “suma abreviadamente”. Si, en cambio, se considera a la multiplicación como una operación de correspondencia, resulta claro que –al multiplicar por uno- a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento (o un conjunto de un elemento) en el estado inicial; por lo tanto, el resultado, en términos numéricos, es idéntico al estado inicial (p.132).

Estas consideraciones que hace la autora sobre el elemento neutro (1) y el absorbente (0) en el trabajo de la multiplicación son importantes para comprender conceptualmente la función que tienen cada uno de ellos en el desarrollo del contenido. También, esta explicación es consistente con una de las interrogantes que a mí –el autor de esta tesis- me hicieron mis alumnos: ¿Por qué cuando multiplico una cantidad por cero me da cero y si sumo una cantidad más cero obtengo la cantidad? Como expliqué en el Capítulo 1, en su momento no tuve la respuesta que ayudara a su entendimiento.

De vuelta al texto de Lerner, la autora menciona que esta identidad es sólo numérica ya que, desde el punto de vista de los objetos concretos NO se trata del mismo conjunto: en nuestro ejemplo había 6 niños en el conjunto inicial y los niños fueron remplazados por globos en el conjunto final (p.133).

Otra interrogante que la autora realiza en su trabajo: ¿Por qué el signo de la multiplicación se llama “por”?

---

<sup>2</sup> Esto es, el multiplicador.

La misma autora menciona que “en este caso concreto ¿qué significa  $\times 2$ ? Está claro que 2 se refiere a un conjunto de globos ¿a qué conjunto de globos? Al que corresponde a cada niño. La acción concreta que corresponde a la multiplicación es una correspondencia que se establece de la siguiente manera: a cada elemento del conjunto inicial le hace corresponder un conjunto de elementos en el conjunto final” (p.133). Es decir, que la operación no consiste en reunir los conjuntos indicados por él y el operador, sino en REEMPLAZAR, a través del establecimiento de una correspondencia, cada elemento del estado inicial (cada niño, en este caso) por un conjunto de elementos en el estado final (un conjunto de dos globos en este caso) (p.134).

Al parecer la autora, a partir de su explicación, la representación de la multiplicación es “niños  $\times$  globos”. Esta representación tiene un estrecho vínculo con la propuesta pedagógica “veces-cantidad” que se consideró para la enseñanza de la multiplicación en los libros de texto para el alumno de Educación Primaria 2011. Pero, a partir de la propuesta pedagógica “veces-cantidad”, para este trabajo de tesis, no se considera en “reemplazar” sino que a partir de la suma iterada se entienda conceptualmente, por un lado, la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos y, por otro, la relación que tiene la cantidad con el producto.

Volviendo al trabajo de la autora, ella, da la siguiente explicación:

Primero, que el estado inicial y el estado final NO pertenezcan, en el caso de la multiplicación, a la misma clase, ya que, si bien es absurdo reunir elementos pertenecientes a clases diferentes, es perfectamente lógico establecer correspondencia entre elementos de una clase y elementos de otra.

Segundo, de lo anterior también se deduce que el signo de la multiplicación se llama POR porque esta operación no representa una reunión de conjuntos, sino un REEMPLAZO de un tipo de elementos POR otro tipo de elementos.

Es fácil ahora explicar que el 1 y el 0 tengan funciones diferentes en ambas operaciones, puesto que se trata realmente de dos operaciones DIFERENTES (p.134).

Las conclusiones a las que llega la autora en su trabajo son:

La autora se pregunta: ¿Podemos seguir diciendo que la multiplicación es una suma abreviada? No, la multiplicación no es un caso particular de la suma, es una operación diferente, que representan acciones diferentes. Lo que sí podemos decir es que la multiplicación es equivalente a una suma de sumandos iguales. Equivalentes en el sentido de que da el mismo resultado, pero no es igual porque el proceso que se sigue para llegar al resultado no es el mismo. Según la autora, ésta no es una mera exquisitez terminológica: Aclarar el significado concreto de la multiplicación hace crear situaciones de aprendizaje en las que el niño descubra la naturaleza de esta operación, establezca relaciones de semejanza y diferencia con la suma, comprenda qué está haciendo realmente cuando multiplica, sea capaz de inventar las tablas de multiplicación (y de reinventarlas cada vez que no se acuerde de un resultado), comprenda con exactitud cuándo debe utilizar cada operación (p.135).

Para la autora, que cuando el alumno pregunta al maestro ¿qué operación debe utilizar de más o de por? Muestra una dependencia básica por parte del alumno: él sólo maneja un mecanismo pero no sabe cuando aplicarlo (p.135).

A partir de lo que se mencionó, la autora hace la siguiente reflexión: “las máquinas de calcular pueden reemplazar fácilmente al mecanismo de la cuenta, pero, ¿cuál es la máquina que reemplazará el razonamiento del niño?” (p. 135).

La autora finaliza su trabajo planteando la siguiente disyuntiva: “formar un niño reproductor de mecanismos o consolidar su capacidad de pensar, de resolver problemas a partir de su propio razonamiento” (p. 135).

Otro trabajo importante en el campo de la multiplicación es sin duda el que se enfocó en el algoritmo de la multiplicación de Ávila.

### **3.2 Ávila (1988) La comprensión del algoritmo de la multiplicación**

Ávila (1988) en su trabajo, entrevistó a un grupo de 99 niños (23 de tercero, 25 de cuarto, 24 de quinto y 27 de sexto grado) de cinco escuelas del Distrito Federal. El grupo entrevistado estuvo conformado por niños de ambos sexos, provenientes de diferentes niveles socioeconómicos, con calificaciones escolares que iban de 5 a 10 y que sabían multiplicar por dos cifras. El objetivo explícito de la investigación fue: “evidenciar si los alumnos que cursan del tercero al sexto grado de la escuela primaria comprenden el algoritmo de la multiplicación; esto es, si pueden explicar los procesos matemáticos que constituyen dicho algoritmo” (p.137).

La autora en su metodología definió la comprensión del algoritmo de la multiplicación para el estudio: “como la comprensión de los procesos matemáticos en los cuales se basa dicho algoritmo” (p. 138). Tales procesos son:

- \* Concepto de multiplicación
- \* Valor posicional de los números
- \* Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Estos procesos y su comprensión, la autora los definió para fines de la investigación de la siguiente manera:

#### 1. Concepto de multiplicación.

Según la autora el concepto de la multiplicación es “la noción intuitiva de que al multiplicar un número por otro, lo que se hace es sumarlo o repetirlo abreviadamente tantas veces como indica la operación” (p. 138). En este sentido, la autora le interesaba saber si los niños al efectuar una multiplicación tienen claro esta idea de repetición que relaciona la adición con la multiplicación.

#### 2. Valor posicional.

Para la autora el valor posicional es: “Noción de que cada cifra, según su posición, tiene un valor peculiar, es decir, idea de que las cifras con que se expresa un número representan diferentes agrupamientos de los cuales derivan su valor” (p. 138). Para este aspecto, la autora pretendía saber si los niños perciben ese valor

de “agrupamiento” que representan las cifras dentro del sistema algorítmico de la multiplicación.

### 3. Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Según la autora es la “Idea de que al multiplicar un número, éste se “separa en partes” y que el producto final es el resultado de la suma de las multiplicaciones parciales” (p. 138). Con relación a este punto, la autora observó si los niños tienen conciencia de que al multiplicar descomponen un número en partes y que la suma de los productos parciales es un “mecanismo” que permite reunir los resultados de multiplicar esas “partes”.

La valoración de estos tres procesos le permitió a la autora conocer la comprensión global que tienen los niños acerca del algoritmo. El protocolo que elaboró la autora consistió, en plantearles el siguiente algoritmo (Ver figura 3.1)

$$\begin{array}{r} 346 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

Figura 3.1 Representación vertical del algoritmo con tres dígitos en el multiplicando y dos dígitos en el multiplicador.

Posteriormente, la autora realizó una serie de preguntas elaboradas ex profeso para investigar cada uno de los tres aspectos señalados.

Entre los resultados obtenidos de los procesos:

#### 1. Concepto de multiplicación

La autora encontró dos tipos fundamentales de respuesta. “Los niños más pequeños, al basar sus juicios en índices figúrales y perceptuales nunca fueron capaces de dar respuestas anticipatorias, fracasaron en la vinculación de la multiplicación con la adición. Los niños más evolucionados, al liberarse de los indicadores figúrales, lograron razonar matemáticamente la relación entre las dos operaciones, concibiendo la multiplicación como síntesis de la adición” (p. 140).

Según la autora, los datos ilustran la necesidad del niño de romper con los índices perceptuales y figurales que predominan en las estructuras primitivas del pensamiento, para poder dominar los mecanismos matemáticos de la multiplicación (p.141).

## 2. El valor posicional de los números

Ávila encontró que “el valor posicional de los números dentro de la multiplicación, enfrenta al niño a la necesidad de coordinar en un solo sistema la “longitud” de las representaciones numéricas (es decir, la cantidad de cifras que representan a un número) con la posición que dichas representaciones ocupan dentro de la multiplicación. Parece que en los niños no se da tal coordinación: como las cifras tienen rasgos perceptuales más evidentes, éstas predominan sobre el valor posicional cuya naturaleza es más abstracta, pues está vinculada con el manejo de los principios matemáticos en que se basa el sistema decimal” (p. 142).

También, la autora menciona “que los niños no utilizan ni comprenden las razones matemáticas, por las cuales tienen que colocar el segundo factor de las decenas; la justificación es simplemente: “porque ese espacio hay que dejarlo”, porque así es la de las cifras “o” porque así es como sale bien el resultado” (p.143). Asimismo, la autora menciona que con ello, “el hueco, el orden de los números y el resultado correcto son la preocupación fundamental, y no los principios matemáticos en que se basa el sistema decimal y que nosotros creemos se están trabajando a la hora de resolver una multiplicación” (p. 143).

## 3. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición

Según la autora “a diferencia del concepto de multiplicación, este aspecto encontró más dificultad para su solución y la gran mayoría de los niños no encontraron explicaciones matemáticas en la pregunta que cuestionaba el porqué se suman los productos parciales. Las explicaciones demostraron, por una parte, aceptación pasiva de una verdad dogmática y rígida que se impone independientemente de cualquier fundamentación racional y, por otra parte, la preocupación por obtener el resultado” (p. 144).

En los dos últimos resultados de los procesos –el valor posicional de los números y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición-, obtenidos de la investigación de la autora, son consistentes con la interrogante que me planteaban mis alumnos en el desarrollo del proceso del algoritmo. ¿Por qué cuando multiplico el segundo número del multiplicador con el multiplicando (de derecha a izquierda) lo tengo que colocar debajo del segundo número del resultado de la primera cantidad? A partir de los datos obtenidos de la investigación de la autora doy cuenta de que el trabajo con el método para calcular no es solamente para sintetizar una suma, como se ha considerado, sino que detrás de esa síntesis hay procedimientos conceptuales que la constituyen.

Volviendo al texto, las conclusiones a las que llegó la autora en su trabajo son: “que las relaciones numéricas que implica el algoritmo de la multiplicación no siempre están presentes en los niños. Los niños tienen, en tarea a dicha operación, sus explicaciones y preocupaciones propias que difieren de las de la disciplina matemática” (p.144).

Para Ávila “las relaciones que implica el concepto de multiplicación no siempre son entendidas como relaciones matemáticas por parte de los niños, sino como relaciones espacio-perceptuales” (p. 145).

Según Ávila: “el valor posicional de los números, tampoco es comprendido por los niños. Así las variables fundamental que ellos manejan para saber si un número es mayor o menor que otro, especialmente en 3º y 4º grados, es el número de cifras que lo representan (longitud de la representación numérica) y no los principios matemáticos que están atrás del sistema decimal. La multiplicación agrega una dificultad más a la comprensión del valor posicional. Esta dificultad es la posición peculiar de los productos parciales. El valor que deriva de dicha posición, resulta totalmente incomprensible para los niños y entonces el “hueco” bajo el primer producto, es decir el criterio objetivo que ellos sí pueden percibir, se torna fundamentalmente en las justificaciones que elaboran respecto al valor numérico y a la colección de los productos parciales” (p. 145).

Además, para ella: “la propiedad distributiva, es también desconocida por los niños. Los argumentos dados para explicar la suma de los productos parciales están siempre en función de la necesidad de seguir la norma (así se hace las multiplicaciones) y de obtener un resultado” (p. 145).

Finalmente la autora nos comenta que: “de los tres procesos matemáticos analizados, el más comprensible para los niños es el concepto de multiplicación. El valor posicional de los números, dentro del sistema algorítmico de dicha operación, y la distributiva, resulta totalmente inentendibles, salvo en escasas excepciones” (p. 145).

El siguiente trabajo contiene un compendio general de los factores que están implícitos en la multiplicación elaborado por Botello et al.

### **3.3 Botello et al, (1988) Estrategias pedagógicas para niños de primaria con dificultades en aprendizaje de las matemáticas. “Problemas y operaciones de multiplicación y división**

Botello et al. (1988) en su investigación muestran el resultado de la experimentación realizada directamente con los niños (de segundo a sexto año de Educación Primaria), con miras a ofrecer al maestro una guía para que él pueda diseñar algunas otras como resultado de su propio trabajo. La estructura de su investigación la reportan en 5 capítulos.

A continuación describiré brevemente el Capítulo uno que es de interés para este trabajo de tesis.

En el capítulo uno, los investigadores mencionan que cuando se habla de la multiplicación se hace referencia a ésta como una simplificación de la suma, esto es, una forma más rápida de obtener el producto de  $4+4+4+4$  sería multiplicar  $4 \times 4$ . También, los autores mencionan que si bien es posible obtener un proceso multiplicativo por medio de una suma iterada, el multiplicar remite a una variedad de significados diferentes: suma de sumandos iguales, número de veces que se repite un conjunto, relación de proporcionalidad, etc. (p.3).

Los autores reconocen los diferentes significados que están implicados en la multiplicación que permite utilizarla de manera adecuada dentro del contexto de un problema; por ejemplo: “si sabemos que para hacer una funda para una almohada necesitamos 60 cm. de tela y queremos hacer cinco fundas, un procedimiento de cálculo podría ser sumar  $60+60+60+60+60$  o simplemente multiplicar  $60 \times 5$  y así se obtendría el total de tela que se requiere” (p. 3).

La representación que hicieron los autores “ $60 \times 5$ ” para obtener el resultado, encontramos en ella, primero la cantidad y después las veces. Esta representación, en relación con la propuesta pedagógica de la enseñanza de la multiplicación en un segundo año de Educación Primaria 2011 primero encontramos las veces y después la cantidad. Ante esta confusión, considero importante que maestros y alumnos identifiquen la función que tienen las cantidades en los problemas multiplicativos para que cuando, por ejemplo, se les pida a los alumnos que identifiquen un problema cuya solución sea una multiplicación (ver reactivo muestra de EXCALE p. 47), tengan las estrategias para diferenciarlo.

Volviendo a la investigación, los autores propusieron otro problema multiplicativo, en donde el uso de la suma iterada no ayudaría a obtener el resultado. Por ejemplo: “Si tenemos como patrón una funda que mide 24 cm. de largo y 10 cm. de ancho y las fundas que vamos a hacer deben guardar la misma proporción que el patrón pero midiendo 36 cm. de largo (esto es 12 cm. más larga), no podemos recurrir a sumar  $10 + 12$  para obtener la medida el ancho” (p. 3). En este caso, los autores mencionan que el procedimiento de cálculo remite forzosamente a una multiplicación (o división) para obtener la cantidad proporcional de incremento entre el ancho del patrón y el ancho de la funda que queremos hacer, en relación a la diferencia de los largos. Esto es, si la diferencia entre el largo del patrón y el largo de nuestra funda es de 12 cm., éste corresponde a la mitad del primero, por tanto, para saber cuánto debe medir el ancho de la funda debemos multiplicar 10 por .5, o bien dividir 10 entre 2 (ya que  $10 \times \frac{1}{2} = 10/2$ ) (p.3).

A partir de las dos situaciones mostradas, los autores mencionan “que mientras en la primera el aumento de la cantidad de tela necesaria de cinco a seis fundas se obtiene sumando 60 cm., en la segunda el aumento se obtiene agregando el producto obtenido de multiplicar por .5 la medida de cada lado. Evidentemente en ambas situaciones existe una relación de proporcionalidad, sin embargo en la segunda es difícil ver la relación con la suma iterada” (p. 4).

Los autores reconocen que “el ver a la multiplicación como suma iterada tiene sus ventajas y permite ejercicios útiles pero subordina enteramente la multiplicación a la suma, minimizando así el hecho de que existe también una multiplicación sui generis. Vista así, se puede propiciar la información de estrategias que permitan abordar los problemas multiplicativos para diferenciarlos de los problemas aditivos” (p. 5).

Por tal motivo, los autores consideran importante abordar la multiplicación como suma iterada para identificar el operador multiplicativo que hace referencia no a la medida de los elementos de cada grupo, ni a la cantidad de objetos que obtendremos al final, sino al número de veces que se repite el grupo. Esto puede quedar más claro con la siguiente cita:

*“Uno de los principales problemas que presenta el aprendizaje de la multiplicación aritmética es el descubrimiento del operador multiplicativo, es decir, del número de veces que se repite un determinado conjunto, o lo que es lo mismo, del número de acciones u operaciones realizadas. La diferencia entre las operaciones  $3+3+3+3+$  y  $3 \times 4$  ó  $4 \times 3$  es que mientras en la primera adicionamos un conjunto sobre otro sin tener en cuenta para nada el número de conjuntos adicionamos, este dato es decisivo para la segunda” (p. 6).*

En su trabajo, los autores mencionan que al identificar el operador multiplicativo se observa que el multiplicando es una medida (número de elementos de un conjunto) el multiplicador es un operador sin dimensión, (número de veces que se repite el conjunto) a diferencia de la suma en donde ambos factores son medidas (número de elementos de dos conjuntos de una misma clase que se ponen en

relación para obtener el conjunto producto de la unión de ambos). Esta disimetría entre multiplicando y multiplicador hace que los números que puede ponerse en el multiplicando y en el multiplicador no sean de la misma magnitud en las diversas etapas de la enseñanza de la multiplicación (número entero mayores que 10 o decimales) (p. 7).

Así, dentro de los aspectos que dan a las situaciones multiplicativas su especificidad los autores citan lo siguiente:

*“Significado del signo X: Al igual que los problemas de estructura aditiva en donde el signo + (más) puede iniciar transformación, relación, etc.; en las estructuras multiplicativas el signo X (por) tiene varios significados: puede hacer referencia al número de veces que se repite un conjunto, a un incremento proporcional o a la relación producto de dos conjuntos” (p. 8).*

*“Naturaleza del número xn: Mientras que en las igualdades  $a + b = c$  y  $a - b = c$ ,  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan medidas, en las ecuaciones  $a \times b = c$  o  $a : b = c$ ,  $a$  y  $c$  representan medidas y  $b$  puede representar un número con o sin dimensión pero no necesariamente una medida” (p. 8).*

Otro concepto a lo que los autores enfatizaron en su trabajo fue en el significado que tiene el algoritmo de la multiplicación. Para ello, los autores parten de la definición de Trajtenbrot (1974), “el algoritmo constituye un proceso determinado que puede ser ejecutado y repetido con el mismo éxito por cualquier persona y permite, además resolver problemas de un mismo tipo. Los autores mencionaron que el desarrollo de los algoritmos obedece a ciertas reglas, las cuales se derivan de las propiedades de las operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación y división) y del Sistema Decimal de Numeración” (p. 32).

También, los autores en el caso del algoritmo de la multiplicación, indican que las propiedades que le corresponden son: valor posicional y propiedad distributiva. Los autores sostienen que la comprensión y correcta aplicación de los algoritmos

requiere del conocimiento de dichas propiedades, sin lo cual se corre el riesgo de reducirlos a un conjunto de reglas y signos sin significado (p. 33).

Con respecto a la propiedad conmutativa, los autores comentan: Si se nos plantea por ejemplo,  $\begin{array}{r} 8 \\ \times 1283 \end{array}$  evidentemente decidiremos resolver en su lugar la multiplicación  $\begin{array}{r} 1283 \\ \times 8 \end{array}$  porque implícita o explícitamente sabemos que el orden de los factores no altera el producto, es decir sabemos que esta operación es conmutativa (esta propiedad interviene indirectamente ya que no sustenta las reglas del algoritmo). Sin embargo, los autores afirman que conviene hacer notar que en el plano de los objetos no es lo mismo, por ejemplo, 5 dulces 4 veces que 4 dulces 5 veces. En el primer caso, el 4 juega el papel de operador sin dimensión y en el segundo el de una medida, en consecuencia, esta propiedad no tiene porqué ser evidente para los niños (p. 37).

Durante la revisión de este trabajo, los autores mencionaron que es importante identificar “el operador multiplicativo” porque al identificar este operador se observa que el multiplicando es una medida y el multiplicador es un operador sin dimensión. Pero, esta información solamente quedó en lo teórico ya que, al parecer su investigación tomó rumbo hacia: el algoritmo y sus propiedades, las propiedades de la multiplicación y el campo de las estructuras multiplicativas de Vergnaud.

También, se identificó, por un lado, el trabajo de la multiplicación y, por otro, el de la división, sin que haya indicios de que las dos operaciones aritméticas se utilicen en la resolución de los problemas multiplicativos. Al no estar presente esta relación, probablemente, sea difícil diferenciar los dos tipos de división que hay “de reparto y de asignación (también considerado “como de tasa”)”. Que es uno de los objetivos que tiene este trabajo de tesis.

El siguiente trabajo propone una secuencia de aprendizaje del algoritmo de la multiplicación elaborado por Maza.

### **3.4 Maza (1991) Enseñanza de la multiplicación y división.**

EL autor propone una secuencia de aprendizaje para la construcción y utilización del algoritmo de la multiplicación y, en concreto, la forma que adoptan la operación de números de dos dígitos entre sí o la de un número de dos dígitos por otro de tres, es la forma final de un proceso que parte de los hechos multiplicativos básicos. El autor sostiene que “en su transcurso, diversas multiplicaciones intermedias deben ser dominadas tanto desde el punto de vista de su técnica como, primordialmente, desde una perspectiva conceptual” (p. 103).

Según el autor, los requisitos previos fundamentales para desarrollar este algoritmo son los siguientes:

1) Memorización de los hechos multiplicativos básicos.

Para el autor “esta condición es indispensable y se hace más evidente cuando percibimos que una gran proporción de los errores registrados en la realización del algoritmo tiene como causa un conocimiento insuficiente de estos hechos multiplicativos” (p. 103).

2) La descomposición de un número por el valor posicional de sus cifras.

Según el autor “en una multiplicación tan sencilla como  $5 \times 37$ , por ejemplo, se han de distinguir dos pasos sucesivos: la realización de  $5 \times 7$  por un lado y de  $5 \times 3$  por otro. Esta última es, en realidad, la multiplicación  $5 \times 30$ . Esta distribución propia del algoritmo presupone que el número  $37 = 30 + 7$ . El dominio del sistema de numeración decimal no se limita a este hecho, por importante que sea, y se extiende a la posible descomposición múltiple de un número. En efecto, el resultado de la operación anterior es 185. Este número se obtiene a través de dos expresiones:  $150 + 35$  y  $180 + 5$ . Así pues, el alumno debe poseer un comportamiento flexible del sistema decimal que le permita utilizar la equivalencia de ambas expresiones, sobre todo para abordar correctamente una de las principales causas de errores algorítmicos: la presencia de llevadas” (p. 103).

3) La multiplicación por potencia de diez.

El autor menciona que “esta forma de operación que podríamos colocar casi al mismo nivel de elementalidad que los hechos multiplicativos básicos. En efecto, si a través de un uso adecuado de la propiedad conmutativa el alumno ha dominado las multiplicaciones  $A \times 10$ ,  $A \times 100$ , etc (siendo  $A$  un número desde 1 a 10), podrá comprender un hecho fundamental del algoritmo. La forma extendida del algoritmo  $7 \times 125$  se expresa así:

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 7 \\ \hline 35 \\ 140 \\ \hline 700 \\ 850 \end{array}$$

La multiplicación  $7 \times 1$  se refiere, en realidad, a la multiplicación  $7 \times 100$  cuyo resultado es 700. Si el alumno no ha aprendido esto se generará una serie de errores de mala colocación de los resultados parciales que, en la práctica, no resultan ser infrecuentes” (p. 104).

#### 4) La multiplicación por múltiplos de diez y sus potencias.

Otro requisito importante que considera el autor “es aplicable a multiplicaciones por diez, cien, etc. Sin embargo, su aplicabilidad es mucho mayor ya que puede extenderse, a través del uso de la propiedad asociativa, a multiplicaciones por 20, 30,...,200. 300 etc” (p. 104).

#### 5) Dominio de las propiedades multiplicativas.

Por último, el autor considera que “la propiedad conmutativa y, de forma más relevante, la asociativa y distributiva han ido surgiendo a lo largo de los requisitos anteriores. Estas propiedades resultan ser el substrato en el que se cimienta todo el algoritmo. Resulta difícil empequeñecer su papel en el paso de unas operaciones a otras hasta culminar en la multiplicación de dos números de varios dígitos” (p. 104).

Para el autor, la secuencia de aprendizaje relaciona entre sí todos los requisitos enunciados hasta culminar, paralelamente, en la multiplicación de números de dos dígitos y en la de un número de dos dígitos y otro de tres se representa en la siguiente tabla. (Ver Figura 3.2).

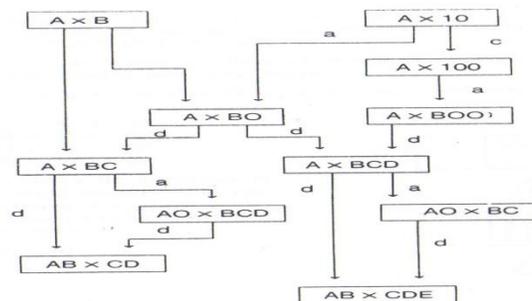


Tabla 10.1

Figura 3.2. Secuencia de aprendizaje de una multiplicación a otra

Según el autor “las flechas que señalan la relación de dependencia de unas operaciones respecto de otras se ha escrito una C, A o D según la propiedad (conmutativa, asociativa o distributiva, respectivamente) que viene a caracterizar fundamentalmente el paso de una multiplicación a otra” (p. 104).

El modelo que propone el autor para la secuencia de aprendizaje, consiste en presentar información de eventos sociales y culturales como: boletos de corrida de toros, El águila imperial y venta de productos (gorra, tenis, comida enlatada, bebidas, tarifas en peseta por recorridos y categorías, enciclopedias y tarifas de vuelo). Cada información, el autor la considera para ejemplificar los posibles procedimientos para cada uno de los requisitos previos fundamentales para el trabajo del algoritmo de la multiplicación.

El orden que consideró el autor para la secuencia de aprendizaje es el que presenta en la Figura 3.2 (Ver arriba). Por ejemplo: “multiplicación por potencia de diez y sus múltiplos”, “multiplicador por un dígito”, “multiplicador como un múltiplo de diez o cien”, multiplicador de dos dígitos distintos” y “estimación con grandes números”.

Durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje no se identificaron indicios que se enfocaran en diferenciar la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos. Lo que sí se identificó es que en la

representación, del método para calcular, el autor consideró primero las veces y después la cantidad. Por ejemplo: “Cada sobre de cromos te cuesta 20 pesetas. Si quieres comprar 5 sobres ¿cuánto dinero deberás pedir a tus padres?  $5 \times 20$ .”

El siguiente trabajo se enfoca a la comprensión del algoritmo de la multiplicación elaborado por Kemii y Jones.

### **3.5 Kemii y Jones (1995) ¿Cómo abordar la multiplicación de números de varias cifras?**

Kemii y Jones (1995) el trabajo de las autoras tiene su fundamento en el constructivismo derivado de la epistemología genética de Jean Piaget. La investigación que hicieron las autoras parte de la propuesta de los libros de texto que introducen la multiplicación de números de varias cifras con problemas fáciles como:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

Según las autoras “los problemas como el de la izquierda se presentan primero porque no exigen ningún reagrupamiento y, por tanto, son mucho más sencillos” (p.175). Para las autoras, este trabajo lo consideran un enfoque de carácter conductista, cuyo fin es enseñar el algoritmo convencional para multiplicar números de varias cifras. Sin embargo, las autoras no creen en la enseñanza de algoritmos convencionales y que sus antepasados no inventaron la multiplicación para números tan pequeños. Para las autoras, decirles a los niños que utilicen la multiplicación para números tan pequeños es una imposición arbitraria porque la adición es perfectamente adecuada cuando el multiplicador es pequeño (p.175).

Ellas mencionan que sus niños hacen  $3 \times 23$  pensando, sin lápiz ni papel. También hacen  $4 \times 26$  doblando el doble de 26 o pensando que como cuatro veces 25 son 100, cuatro más cien son 104.

En su trabajo, las autoras proponen los siguientes problemas para el segundo año: “Si un paquete de chicle cuesta 23 pesos ¿cuánto dinero necesitaras para comprar cinco paquetes?” (p. 175). Los procedimientos que identificaron las

autoras son: los niños de segundo curso normalmente obtienen la respuesta escribiendo  $5 \times 23$ , escribiendo 23 en vertical cinco veces y utilizando entonces la adición. Otros, sin embargo, empiezan diciendo, “cinco veintes son 20, 40, 60, 80, cien” y “cinco treses son 3, 6, 9, 12, 15...”. En la representación que hicieron los alumnos  $5 \times 23$ , las autoras mencionan que el hecho de que los niños escriban “ $5 \times 23$ ” en vez de “ $23 \times 5$ ” probablemente se debe a que escriben tal como piensan y dicen “cinco por 23 (veces). Por tal motivo, las autoras no les mencionaron que tienen que escribir “ $23 \times 5$ ” porque ellas quieren que los alumnos se concentren en pensar numéricamente (conocimiento lógico-matemático), sin la carga extra de los convencionalismos (conocimiento social) (p. 175).

Para ello, las autoras definen el conocimiento lógico-matemático como “las invenciones que hacen los alumnos ante los problemas dados” (p. 184). Y que la forma vertical de escribir problemas de multiplicación es un conocimiento social que los niños no han inventado. Pero, las autoras sostienen que cuando los alumnos explican las reglas y procedimientos que están inmersos en la representación lo consideran un (conocimiento lógico-matemático) (p.184).

De los resultados obtenidos, las autoras consideran aumentar el número de paquetes de chicles a “12”. Este trabajo, las autoras lo dirigieron para alumnos más adelantados de segundo año y a principio de terceros. Con este trabajo, las autoras pretenden motivar a los niños para que utilicen la multiplicación al calcular, en vez de utilizar únicamente la palabra por (o veces) al hablar y el símbolo  $\times$  al escribir. Sin embargo, las autoras identificaron que la mayoría de sus alumnos de tercer año continuaban utilizando la tediosa adición de dos en dos (p.175).

Al ver esta situación, las autoras discutieron dos métodos que emplearon para empujar a los niños hacia la utilización de la multiplicación en el cálculo de respuestas a problemas. Los métodos que proponen las autoras son: 1) animar a los alumnos a pensar en las maneras *más fáciles* y *más rápidas* que requieran *escribir lo menos posible* y 2) animar a los alumnos a utilizar las propiedades de nuestro sistema de escribir (p. 176).

Una vez propuestos los métodos, las autoras retomaron los procedimientos que habían realizado los alumnos al tratar de resolver los problemas que se les presentaron anteriormente. Por ejemplo: “Si un paquete de chicle cuesta 23 pesos ¿cuánto dinero necesitarás para comprar doce paquetes?” (p. 176). Durante la revisión de los procedimientos, las autoras plantearon preguntas una tras otra con la intención de relacionar el pensamiento del alumno con el conocimiento convencional social sobre la manera de escribir que él ya tenía. Para ello, las autoras mencionan que: “Una clave de la enseñanza constructivista es plantear la pregunta adecuada en el momento oportuno para que los niños piensen” (p. 185). Uno de los resultados de que los niños piensen puede ser que desarrollen un razonamiento de nivel superior.

Las conclusiones a las que llegaron las autoras en su trabajo son:

Según las autoras “el multiplicar un número de dos cifras por un número de una sola cifra o por un múltiplo de 10, no es muy difícil para los alumnos de tercer año. Sin embargo, cuando se multiplican números de dos cifras y ninguno de los dos acaba en cero, los niños se confunden” (p. 188).

Además para ellas “cuando los niños están confundidos por la lógica de la multiplicación de números de varias cifras, una buena manera para facilitar sus invenciones consiste en dar problemas, como  $125 \times 11$ , que tienen cifras pequeñas, fáciles de multiplicar” (p. 189).

Por último, las autoras mencionan que “el constructivismo no ofrece una receta. Como no se trata de un método pedagógico, cada enseñante debe decidir qué hacer en función del grupo particular que tiene a su cargo” (p.189).

Para las autoras no fue prioridad la representación del orden de los factores de la multiplicación ni mucho menos el significado que tienen las cantidades en los problemas multiplicativos. Porque la intención de la investigación, como lo mencionaron las autoras, fue que los alumnos se centraran en pensar numéricamente la comprensión del algoritmo.

Por último, el siguiente trabajo reporta una propuesta de trabajo en la enseñanza de la multiplicación elaborado por Isoda y Olfos.

### **3.6 Isoda y Olfos (2009) La enseñanza de la Multiplicación. El estudio de clases y las demandas curriculares**

El trabajo de Isoda y Olfos (2009) forma parte de un proyecto de investigación en la enseñanza de la multiplicación en conjunto entre los países de Japón y Chile. En su trabajo, los autores muestran ejemplos concretos de cómo preparar e implementar clases centradas en la resolución de problemas y que contribuyen a cubrir los programas de estudio; que espera dar pistas para que en Chile e Hispanoamérica la reflexión de los docentes permita generar una tradición de enseñanza ajustada a las demandas curriculares y a la tendencia de formar ciudadanos reflexivos.

Los propósitos explícitos en los cuales se centro el trabajo de los autores son: “El primer propósito más evidente de este libro es ofrecer a profesores de educación básica y formadores de profesores ejemplos de lecciones, planes de clase y sugerencias para enseñar la multiplicación. Estas orientaciones son fruto de la experiencia del Estudio de Clases en Japón desde la década de 1870 y de antecedentes complementarios de la literatura internacional con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. El segundo propósito es favorecer en investigadores, curriculistas y autores de textos, como también en docentes y estudiantes de pedagogía, la comprensión de una estrategia de enseñanza que concilia el enfoque de resolución de problemas, originario de Japón hacia 1940, con el estudio de los contenidos del currículo...” (p. 9).

Para ello, los autores se dieron a la tarea de revisar las propuestas curriculares en la enseñanza de la multiplicación de ocho países correspondientes de Asia y América, en el cual incluye a México. Al revisar la propuesta curricular de México, los autores identificaron que la enseñanza de la multiplicación se inicia en 2° grado de Educación Primaria, bajo la siguiente orientación:

Según los autores encontraron que la multiplicación se introduce mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos.

Además, los autores identificaron que la escritura convencional de la multiplicación empieza con un (número de una cifra).

Por último, los autores identificaron la construcción del cuadro de multiplicaciones (p. 24).

Los autores mencionan que su trabajo se modeló basado en la resolución de problemas y los requerimientos del currículo. También, los autores mencionan que su modelo consideró, en la práctica, los dos grandes propósitos de la educación matemática, a saber, el formativo y el informativo. En la dimensión formativa, los autores sostienen que favorece el desarrollo de las habilidades transversales de pensamiento y comunicación en matemáticas (Isoda, 2006), y en la dimensión informativa, favorece la adquisición de los contenidos disciplinarios (p. 10).

También, los autores retoman, con respecto a las matemáticas, las metas que (Treffers et al., 2001) consideró: “hacer conexiones entre la aritmética y la experiencia cotidiana, adquirir destrezas básicas, comprender el lenguaje matemático y aplicarlo en situaciones prácticas, reflexionar sobre las actividades matemáticas y chequear los resultados, establecer relaciones, reglas, patrones y estructuras, y describir y utilizar estrategias de investigación y de razonamiento” (p. 19).

Siguiendo con esta línea, los autores desarrollaron un vocabulario con términos propios, entre los que figuran:

Contexto. “El contexto es un evento, asunto o situación derivada de la realidad, el cual es significativo para los niños o el cual ellos pueden imaginar. El contexto provee significado concreto y da la base para las relaciones matemáticas relevantes u operaciones que realiza el niño. El contexto puede ser encontrado en

el mundo de las matemáticas en sí mismo, como en el caso de las propiedades de los números primos, dando origen a contextos aritméticos y matemáticos” (p. 19).

Contextualización. “La contextualización significa dar significado a los números y operaciones relacionándolas a las situaciones significativas de cada día, el mundo real o el mundo significativo de los niños” (p. 19).

Destrezas básicas. “En el dominio de las destrezas básicas se consideran: el conteo hacia delante y atrás con distintas habilidades, el conocimiento de las tablas hasta 10 en suma y multiplicación, la realización de tareas aritméticas simples usando eficientemente el conocimiento acerca de las operaciones, el hacer estimaciones en operaciones aritméticas para determinar un resultado aproximado, alcanzar comprensión de la estructura de los números naturales y entender las posiciones del sistema de numeración decimal, hacer uso inteligente de la calculadora, y modelar problemas simples en términos matemáticos” (p. 20).

Hacer aritmética concreta. “Hacer operaciones aritméticas o razonamiento concreto significa hacer la operación mientras es fácil de imaginar. Esto a menudo da un incremento de la comprensión en tales operaciones y razonamientos de un contexto práctico o situación” (p. 20).

Memorización. “La memorización es la asimilación del conocimiento: aprendizajes de los números y resultados aritméticos tales como los productos de las tablas de multiplicación por intuición y luego ser capaces de recordarlas cuando ellas se requieran. La memorización es a menudo el acto final en un proceso de aprendizaje en el cual las operaciones son graduales y en creciente eficiencia llevadas a niveles cada vez más altos” (p. 20).

Modelos de contexto. “Un modelo de contexto es una situación que puede mantenerse para un rango completo de situación aritmética relacionadas. En ellas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división están reflejadas significativamente. Tal contexto puede ofrecer soporte en llevar adelante un cálculo y desarrollar un procedimiento” (p. 20).

Para los autores el principio de extensión para la enseñanza de la multiplicación es el siguiente:

*“Favorecer la comprensión del producto como cantidad de elementos o medida resultante de grupos de igual número de elementos o medidas que se repiten, lo que se refiere a un caso particular de la proporcionalidad. Importa la extensión del concepto “la unidad” y ello se hace a partir de la idea de grupo. Luego se estudian las tablas de multiplicar, esto es, la proceduralización<sup>3</sup> del concepto con número de una cifra. Primero las tablas del 2 al 5, luego del 6 al 9 y multiplicar por 2. Luego vendrá la multiplicación por 0 y por 10” (p. 21).*

Al parecer, los autores pretenden que en la enseñanza de la multiplicación, los alumnos vean en el producto una cantidad resultante de grupos de igual número de elementos o medidas que se repiten. Este principio es consistente con la propuesta de trabajo de esta tesis ya que, uno de los objetivos es diferenciar la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos “suma iterada”. A partir de esta diferenciación en tender la relación del multiplicando con el producto.

De vuelta al texto, para los autores el modelo multiplicativo lo retoman según lo que menciona Freudenthal (1983), “la multiplicación sirve para hallar un número llamado producto que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad, distinguiendo así claramente las situaciones multiplicativas de las aditivas” (p. 44).

A partir de esta información, los autores inician su proyecto en la enseñanza de la multiplicación. En su trabajo, los autores fueron consistentes en diferenciar el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos. La representación que ellos implementaron para diferenciarlos es: que después del signo (x) colocan un símbolo para diferenciarlos (p. 46). Por ejemplo: “si un grupo de 3 elementos se repite 4 veces, se tiene  $3+3+3+3$  elementos, lo que abreviadamente se escribe

---

<sup>3</sup> La palabra proceduralización no tiene sentido lógico en español pero así está escrito en el texto.

3x,4; en donde el multiplicando es el que está a la izquierda y el multiplicador se encuentra a la derecha de la representación.

### **3.7 Comentario final de este capítulo**

Como se observó en este capítulo 3, se han realizado diversas investigaciones y propuestas que dan cuenta de la complejidad que conlleva el trabajo del contenido de la multiplicación en el salón de clase. Cada uno de los trabajos aborda aspectos importantes que complementan la enseñanza de la multiplicación, que probablemente, ayuden a maestros y alumnos a entender cuantitativamente la operación. Los aspectos que se identificaron en la enseñanza de la multiplicación son: la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos, las propiedades de la multiplicación (conmutativa, asociativa y distributiva), el elemento neutro y absorbente, las propiedades del algoritmo –valor posicional y propiedad distributiva- y comprensión del concepto. También, se identificaron las diferentes interpretaciones que tiene el signo “x” (por) y la multiplicación por potencias de 10, 100 y 1000. En el siguiente Capítulo se hace una somera revisión de la literatura escrita en inglés en el campo.

## IV. ALGUNOS OTROS TRABAJOS DE LA MULTIPLICACIÓN EN LA LITERATURA EN INGLÉS

El propósito de este capítulo es ampliar la revisión de la literatura en el campo de la multiplicación, retomando algunos trabajos escritos en inglés y que aún no han sido traducidos al español. En particular los trabajos revisados ahondan en el concepto y función que tiene el multiplicador y multiplicando en la multiplicación, así como en la correspondencia que tiene la multiplicación con otros contenidos matemáticos. A continuación se hace una somera revisión de tres trabajos.

### 4.1 Fischbein et al. (1985) Modelos asociados a las operaciones de la aritmética

Uno de los trabajos importantes sobre la multiplicación que no ha sido traducido al español es el de Fischbein et al. (1985). Estos autores consideran que el modelo inicial asociado con la multiplicación es la suma iterada, en donde un número de series del mismo tamaño se colocan juntas. Los autores reconocen que hay otros modelos, tales como el arreglo rectangular que se ha propuesto para la enseñanza de la multiplicación. Los autores no afirman que la enseñanza de la multiplicación tiene que iniciar con la “suma iterada”, pero ellos mencionan que el modelo “suma iterada” implícitamente afecta el significado y uso de la multiplicación (Fischbein et al. 1985)

También, los autores explican cómo desde la interpretación de la suma iterada,  $3 \times 5$  significa ya sea “ $5 + 5 + 5$ ” ó “ $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ ”. Para ellos, en esta interpretación no se ve a la multiplicación como conmutativa, porque un factor (el número de series equivalente) se toma como el *operador (multiplicador)*; el otro (la magnitud de cada serie), como el *operando (multiplicando)*. El operando puede ser de cualquier cantidad positiva, pero el operador debe ser un número entero. Los autores comentan que no se puede concebir intuitivamente una cantidad (operador) menor que un entero  $0.63$  veces ó  $3/7$  veces, mientras que sí se puede concebir  $3$  veces  $0.63 = 0.63 + 0.63 + 0.63$ , aún si no se puede realizar la operación. Debido a que el operador es siempre un número entero,

necesariamente la multiplicación “se hace más grande” (Fischbein et al. 1985. P. 6)

Fischbein et al. (1985) en relación con la división, comentan que fuera de las múltiples interpretaciones que se le puede dar a la división; ellos consideran que es importante el trabajo y uso de la operación cuando un problema parece necesitar de la división. La estructura del problema determina el modelo de la división.

Los autores identificaron dos modelos de división:

El primer modelo de división es de reparto que también puede ser llamado división compartida, en donde un objeto o serie de objetos es dividido en un número de fragmentos iguales o subcolecciones. Para ello, el dividendo tiene que ser más grande que el divisor; el divisor (operador) tiene que ser un número entero; el cociente tiene que ser más pequeño que el dividendo (operando).

El segundo modelo de división para estos autores, es de asignación. Ellos consideran que tiene que ser considerado como división de medición porque se busca determinar cuántas veces una cantidad dada está contenida en una cantidad más grande. En este caso, la única restricción es que el dividendo debe ser más grande que el divisor. Si el cociente es un número entero, el modelo puede ser visto como una sustracción repetida.

#### **4.2 Neshier (1988) Los problemas verbales en la multiplicación**

Otro trabajo importante sobre la multiplicación que no ha sido traducido al español es el de Neshier (1988). En éste se describen las principales categorías de los problemas verbales de la multiplicación.

Para Neshier (1988) la operación de multiplicación tiene muchos modelos asociados a ésta. Según la autora las principales categorías de esta búsqueda son:

1.- Los problemas aditivos de repetición. Ejemplo: hay cuatro bolsas de canicas sobre una bolsa. Cada bolsa tiene cinco canicas ¿cuántas canicas hay en el total de las bolsas?

2.- Escala o veces de los problemas. Ejemplo, Ruth tiene dos muñecas. Sharon tiene tres veces las muñecas que tiene Ruth. ¿Cuántas muñecas tiene Sharon?

3.- Problemas cartesianos, incluidos área y problemas combinados. Ejemplo de una solución al problema: Dan obtuvo una caja rectangular de chocolates. Hubo cuatro piezas a lo largo de la caja y cinco a lo ancho de la caja ¿Cuántos chocolates hubo en la caja?

En los problemas multiplicativos mostrados, se identificaron tres de las cuatro personalidades didácticas de la multiplicación identificadas en el libro de matemáticas de segundo año de Educación Primaria 2011, -suma iterada, arreglo rectangular y de combinación-. En cada uno de los problemas mostrados se puede distinguir la función de los factores de la multiplicación (multiplicador y multiplicando), es decir, una de las cantidades involucradas en la multiplicación es conceptualizada como “multiplicador” sobre el otro “multiplicando” para producir el resultado.

#### **4.3 Greer (1992) Las clases más importantes de situaciones que involucran a la multiplicación y división de enteros**

Otro trabajo importante sobre la multiplicación que no ha sido traducido al español es el de Greer (1992). En el texto se proponen las clases más importantes de situaciones que involucran a la multiplicación y división de enteros denotando la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos.

Para Greer (1992), las clases más importantes de situaciones que involucran la multiplicación y división de enteros incluye: grupos iguales, comparación multiplicativa, producto cartesiano y área rectangular. A continuación se describe cada una de ellas:

### **4.3.1 Grupos iguales**

Según el autor la situación en la que hay un número de grupos de objetos que tienen el mismo número en cada grupo normalmente constituye el encuentro más fácil de los niños con una aplicación de la multiplicación. Por ejemplo:

3 niños tienen 4 galletas cada uno. ¿Cuántas galletas tienen entre todos?

Dentro de esta conceptualización, los dos números juegan, claramente, diferentes roles. El número de niños (multiplicador) opera sobre el número de galletas (multiplicando), para producir la respuesta. Una consecuencia de esta asimetría es que se pueden distinguir dos tipos de división. Si se divide el total (12) por el número de grupos (3) se obtiene el número en cada grupo (4), este procedimiento se le conoce como “división por reparto”, la cual corresponde a la práctica familiar del reparto igual (con connotaciones sociales de equidad). Si se divide el total (12) por el número de cada grupo (4) se obtiene el número de grupos (3), este procedimiento se le conoce como “división por asignación” (algunas veces llamada división “medida”, reflejando sus lazos conceptuales con las operaciones de medición).

### **4.3.2 Comparación multiplicativa**

Para Greer, un tipo diferente de aplicación es la comparación multiplicativa, verbalmente expresada por “n veces más que...”, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Juan tiene 3 veces más manzanas que María. María tiene 4 manzanas, ¿cuántas manzanas tiene Juan?

Según el autor, el factor multiplicativo puede ser concebido como el multiplicador. Sin embargo, también es posible ver la situación en términos de una correspondencia de uno-mucho (3 manzanas de Juan por cada manzana de María), lo cual indica que 3 es el multiplicador.

### 4.3.3 Producto cartesiano

Para Greer, los productos cartesianos proveen un contexto muy diferente para la multiplicación de números naturales. Un ejemplo de tal problema es:

-Si 4 chicos y 3 chicas están bailando, ¿cuántas parejas son posibles?

Según el autor, esta clase de situaciones corresponde a la definición formal de  $m \times n$  en términos del número de pares ordenados que pueden ser formados cuando el primer miembro de cada par pertenece a un conjunto con  $m$  elementos y el segundo a un conjunto con  $n$  elementos. Según Greer (1992), esta complicada forma de definir la multiplicación de enteros fue, en términos históricos, recientemente formalizada.

También, el autor menciona que hay una simetría entre los roles de los dos números, dado que hay 12 posibles parejas, no hay una diferencia esencial entre (a) haber dicho que hay 4 chicos y haber preguntado cuántas chicas hay y (b) haber dicho que hay 3 chicas y haber preguntado cuántos chicos (en realidad, sería inusual plantear problemas de división de este tipo) (Greer, 1992)

### 4.3.4 Área rectangular

Para Greer, la situación final a ser considerada es el área rectangular, donde los lados del rectángulo son integrales, por ejemplo: 4 cm. por 3 cm. En este caso, el rectángulo puede ser dividido en cuadrados que midan por lado 1 cm para que el área pueda ser encontrada contando aquellos cuadrados, esto es literalmente 12  $\text{cm}^2$ . Para el autor, tal parece, que el diagrama mantiene una similitud obvia con la disposición física de  $mn$  objetos en una representación rectangular con  $m$  filas y  $n$  columnas. La representación del rectángulo con lados enteros provee una representación útil para tener ciertas propiedades de la multiplicación como una operación binaria, tal como la propiedad conmutatividad, intuitivamente aceptable (Greer, 1992).

En el Capítulo 1 de este trabajo de tesis, se mencionó que en “los arreglos rectangulares” en el plano numérico la propiedad conmutativa permite invertir el

orden de los factores manteniendo el producto, pero en el plano conceptual el orden de los factores sí importa. Por ejemplo: si se le pide al herrero hacer una puerta que tenga 2 metros de ancho por 3 metros de largo, al invertir las medidas no se obtiene la puerta con las dimensiones que fue inicialmente pedida, a pesar que mantenga el producto.

#### **4.3.5 Categorías de problemas que implica a la multiplicación**

Greer (1992) cita a Vergnaud quien estableció la multiplicación y división dentro del gran contexto de lo que él llama “el campo conceptual de las estructuras multiplicativas” el cual define consistente de:

*“Todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple y para las cuales uno necesita usualmente multiplicar o dividir. Muchos tipos de conceptos matemáticos están ligados a aquellas situaciones y al pensamiento necesitado para dominarlas. Entre estos conceptos están las funciones lineales y no lineales, espacios vectores, análisis dimensional, número racional, y la multiplicación y división. (Vergnaud, 1988, p.141)”*

Greer (1992) identificó en el trabajo de Vergnaud (1988) las siguientes categorías que implican a la multiplicación, división por multiplicador y división por multiplicando.

CLASE	PROBLEMAS DE MULTIPLICACION	DIVISION (POR MULTIPLICADOR)	DIVISIÓN ( POR MULTIPLICANDO)
GRUPOS IGUALES	3 niños, tienen cada uno 4 naranjas. ¿Cuántas naranjas tienen por todos?	12 naranjas son compartidas igualmente entre 3 niños. ¿Cuántas le toca a cada uno?	Se tienen 12 naranjas, ¿a cuántos niños les puedes dar 4 naranjas?
MEDIDAS IGUALES	3 niños, cada uno tiene 4.2 litros de jugo de naranja. ¿Qué tanto jugo tienen entre todos?	12.6 litros de jugo de naranja es compartido igualmente entre 3 niños. ¿Cuánto le toca a cada uno?	Si tienes 12.6 litros de jugo de naranja, ¿a cuántos niños les puedes dar 4.2 litros?
VELOCIDAD, TASA, ÍNDICE	Un bote se mueve a una velocidad permanente de 4.2 metros por segundo. ¿Qué tanto se desplaza en 3.3 segundos?	Un bote se mueve 13.9 metros en 3.3 segundos. ¿Cuál es el promedio de velocidad en metros por segundo?	¿Cuánto le toma a un bote para moverse 13.9m a una velocidad de 4.2m por segundo?
CONVERSIÓN DE MEDIDA	Una pulgada mide aproximadamente 2.54cm ¿Cuántos cm son en 3.1 pulgadas?	3.1 pulgadas equivalen a 7.84 cm ¿Cuántos centímetros hay en 1 pulgada?	Una pulgada es 2.54 cm ¿A cuántas pulgadas equivale 7.84 centímetros?
COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA	¿El acero es 0.88 veces más pesado que el cobre. Si una pieza de cobre pesa 4.2kg, ¿cuánto pesa una pieza de acero del mismo tamaño?	El acero es 0.88 veces más pesado que el cobre. Si una pieza de acero pesa 3.7 kg, ¿cuánto pesa una pieza de cobre del mismo tamaño?	Si las piezas de acero y cobre de la mismo tamaño pesan 3.7kg y 4.2kg respectivamente, ¿qué tanto pesado es el acero con respecto al cobre?
PARTE-TODO	En una universidad pasaron $\frac{3}{5}$ de sus estudiantes en un examen. Si 80 estudiantes que hicieron el examen, ¿cuántos pasaron?	En una universidad pasaron el $\frac{3}{5}$ de sus estudiantes en un examen. Si 48 pasaron, ¿cuántos estudiantes presentaron el examen?	En una universidad pasaron 48 de 80 estudiantes que presentaron el examen. ¿Qué fracción de los estudiantes pasaron?
CAMBIO MULTIPLICATIVO	Una pieza de elástico puede ser estirado 3.3 veces más de su longitud original. ¿Cuál es la longitud de una pieza de 4.2m de largo cuando está totalmente estirada?	Una pieza de plástico puede ser estirado 3.3 veces más de su longitud original. Cuando está totalmente estirada tiene 13.9m de largo ¿Cuál fue su longitud original?	Una pieza de plástico de 4.2m de largo puede ser estirada a 13.9m ¿Por qué factor es alargada?

#### **4.4 Comentario final del capítulo**

Después de revisar la literatura podemos decir que la multiplicación (en los números naturales) es un contenido importante en el trabajo de la aritmética, que para poder ser comprendido requiere de un largo y complejo proceso. El trabajo con la multiplicación involucra una diversidad de habilidades que participan en su construcción y entendimiento. En la literatura se identificó, en el trabajo con la suma iterada, la función que tienen el multiplicador y multiplicando en la resolución de problemas multiplicativos; denotando así los dos tipos de división: división por el multiplicador (reparto) y la división por el multiplicando (asignación). También se identificaron las clases más importantes de situaciones que involucran a la multiplicación y división de enteros que incluyen: grupos iguales, comparación multiplicativa, producto cartesiano y área rectangular.

Tanto la literatura en inglés, comentada en este capítulo, como la que está en español sirvieron para diseñar el taller matemático titulado “El orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema” dirigido a los maestros de Educación Primaria. En el siguiente capítulo describo en qué consistió dicho taller.

## V. PROPUESTA DE UN TALLER DE MATEMATICAS PARA LOS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN EL TEMA LA MULTIPLICACIÓN

En la formación académica de los alumnos de Educación Primaria, en la asignatura de matemáticas, la enseñanza de los contenidos se propone a través de la resolución de problemas matemáticos. Este enfoque metodológico ubica a los problemas como punto de partida del aprendizaje (SEP, 2011).

Para los alumnos de primer año de Educación Primaria, la resolución de problemas matemáticos -en aritmética- empieza con los problemas aditivos. Por ejemplo: “Ana tenía 7 globos y su mamá le compró otros 2. ¿Cuántos globos tiene Ana?” (SEP, 2011). En segundo año de primaria, en el tercer bloque, aparecen los problemas multiplicativos. Por ejemplo: “Si Juanita compra 3 montones de 7 naranjas cada uno. ¿Cuántas naranjas compró?”

Al tratar de resolver los problemas multiplicativos<sup>4</sup>, los alumnos tienen dificultad para diferenciarlos de los problemas aditivos. Por tal motivo, en algunas ocasiones, los problemas multiplicativos son resueltos mediante una suma. “Si Juanita compra 3 montones de 7 naranjas cada uno. ¿Cuántas naranjas compró?”  $R= 3 + 7 = 10$ . O simplemente los alumnos no saben qué operación realizar ante el problema que se les presenta.

En el capítulo 1 mencioné dudas y dificultades que tuvieron mis alumnos al tratar de resolver los problemas multiplicativos: ¿Por qué cuando multiplico una cantidad por cero me da cero y si sumo una cantidad más cero obtengo la cantidad? ¿Por qué cuando multiplico el segundo número del multiplicador con el multiplicando (de derecha a izquierda) lo tengo que colocar debajo del segundo número del resultado de la primera cantidad? ¿La cantidad que se lleva en dónde la coloco? También, identifiqué las dificultades que tuvieron mis alumnos al buscar un resultado con las tablas de multiplicar.

---

<sup>4</sup> Por problemas multiplicativos me refiero como la relación de dos cantidades de manera multiplicativa

Las dificultades didácticas que identifican maestros y alumnos en la resolución de problemas multiplicativos y que no son resueltas de manera pertinente, probablemente limiten el nivel de aprovechamiento académico del alumno. Como por ejemplo, en las pruebas de Excale que se les aplicó a los alumnos de 3 y 6 años de Educación Primaria, en la resolución de problemas multiplicativos, los resultados que se obtuvieron no son nada alentadores ya que el 52% de los alumnos está por debajo del nivel básico (INEE, 2012).

El trabajo de la multiplicación va más allá de una simple operación aritmética por la complejidad conceptual que implica este contenido. Su aprendizaje no termina en sí mismo, sino que su aplicación tiene presencia en otros contenidos matemáticos como: geometría, fracciones, proporcionalidad..., como se mostró en las gráficas correspondientes de cada uno de los grados escolares de Educación Primaria 2011.

¿Pero qué herramientas conceptuales matemáticas se deben desarrollar en los alumnos para la resolución de los problemas multiplicativos que se les presenten? Para que los alumnos se vayan apropiando de ciertas herramientas conceptuales es importante que los maestros conozcan e identifiquen los trabajos progresivos que conllevan dicho contenido.

Las dificultades que tuve en mi quehacer docente con el contenido de la multiplicación, la propuesta didáctica que viene en el libro de matemáticas para el alumno “veces-cantidad” que se propone para introducir la enseñanza de la multiplicación en un segundo año de Educación Primaria 2011 y las aportaciones identificadas en la literatura de la multiplicación fueron puntos centrales en el diseño del taller que llevó por título **“El orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema”**.

El taller tuvo como propósito principal proveer de herramientas matemáticas a los maestros de Educación Primaria para la enseñanza de la multiplicación. Se esperaba que los maestros se apropiaran de herramientas matemáticas que les ayudaran a complementar y rediseñar sus planes de trabajo. También se

**pretende** que los maestros **identifiquen** las virtudes y limitantes que tienen sus educandos en el contenido de la multiplicación. A partir de esta búsqueda el maestro diseñe estrategias didácticas que le permitan al alumno reflexionar, interpretar, razonar, criticar y debatir los problemas matemáticos que se le presenten tanto en la vida profesional como social. De esta manera, se le propicie al educando la curiosidad de investigar y proponer nuevas vías de solución para la aprehensión y trabajo con las matemáticas.

### **5.1 Información sobre los maestros que participaron en el taller de la multiplicación**

Los maestros que participaron en el taller **“El orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema”** pertenecen a una de las zonas céntricas del Distrito Federal. La zona escolar tenía a su cargo 8 escuelas de Educación Primaria. A cada una de las escuelas se les hizo formalmente la invitación para participar en dicho taller. Para llevar a cabo el taller, se tuvo que negociar con los maestros de grupo el día y horario de trabajo. Los acuerdos a los que llegamos fueron que los días jueves de cada semana se realizara el taller después de las 14:30 horas. El tiempo que se destinó a cada una de las sesiones fue de una hora con diez minutos aproximadamente. El taller se realizó en una de las escuelas primarias perteneciente a la zona escolar.

El taller se llevó a cabo en cuatro sesiones. La primera sesión del taller se realizó el 26 de mayo del 2011. Esta sesión contó con la participación de 18 maestros; la mayoría de ellos estaban frente a grupo. Los años de servicio académico de los maestros participantes fueron variados, ya que hubo maestros que era su primer año frente a grupo, así como también hubo maestros de 10 y hasta 30 años de servicio. La segunda sesión se trabajó el 2 de junio de 2011. En esta sesión participaron quince de los dieciocho maestros que estuvieron en la primera sesión. También, se integraron al taller tres maestras; teniendo un total de dieciocho participantes. La tercera sesión se trabajó el 9 de junio de 2011. En esta sesión participaron trece maestras que habían sido constantes desde que se inicio el taller. La última sesión fue el 16 de junio de 2011. La participación de los maestros

para esta sesión fue de ocho maestras de las cuales solamente cinco de ellas iniciaron el taller y lo concluyeron.

## **5.2 Objetivos y diseño del taller de la multiplicación**

Como se mencionó anteriormente, para el diseño del taller se consideró: las dificultades que tuvieron mis alumnos en la resolución de problemas multiplicativos, la propuesta didáctica de los libros de texto que emite la SEP y los fundamentos teóricos encontrados en la literatura. Estos referentes (teóricos-pedagógicos) brindaron elementos para diseñar: los objetivos generales, la estructura del taller y la primera sesión de trabajo, dirigido a los maestros de grupo de Educación Primaria.

Las tres sesiones restantes del taller fueron diseñadas a partir del análisis de la sesión anterior, con la finalidad de ejemplificar y responder las dudas que surgieron durante el desarrollo de cada sesión.

Los objetivos generales que se consideraron son:

- Profundizar en el conocimiento de la multiplicación como una operación cuantitativa<sup>5</sup>
- Apropiación de herramientas para apoyar el aprendizaje de los alumnos en la resolución de problemas multiplicativos

Objetivos para cada sesión:

- ❖ Analizar la estructura de la multiplicación y la función de cada uno de sus elementos dentro de un problema multiplicativo.
- ❖ Conocer las relaciones que existen en las tablas de multiplicar.
- ❖ Reflexionar sobre el uso de la multiplicación para estimar cantidades y resolver problemas de división.

---

<sup>5</sup> Nos referimos como operación cuantitativa al estrecho vínculo que tiene el multiplicando con el producto.

Primera sesión del taller: **“El orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema”**.

**Primera actividad.** La intención de esta actividad fue conocer las dificultades que identifican los maestros cuando sus alumnos resuelven problemas multiplicativos. La pregunta que se les planteó fue:

¿Qué problemáticas enfrentan cotidianamente los alumnos en la resolución de los problemas multiplicativos?

**Segunda actividad.** La intención de esta actividad fue identificar las estrategias que utilizan los maestros al buscar la respuesta al problema dado para reconocer que hay diferentes procedimientos que llevan al mismo resultado.

*“Un niño lee 6 páginas cada 3 días y va a leer durante 18 días ¿Cuántas páginas leerá en total?”*

**Tercera actividad.** La intención de esta actividad fue que los maestros, a partir de los problemas dados, mencionaran qué problemas son de multiplicación y cuáles no. A partir de esta situación, que los maestros identificaran que los problemas multiplicativos se pueden resolver con una multiplicación o una división (Ver anexo 8.1)

**Cuarta actividad.** La intención de esta actividad fue analizar y reflexionar los procedimientos que hicieron los maestros en la actividad anterior, (Ver arriba), considerando la propuesta pedagógica de los libros de la SEP “veces-cantidad”, así como las aportaciones que hacen los autores de la literatura.

### **5.3 Análisis del taller de matemáticas “el orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema” dirigido a los maestros de grupo de Educación Primaria.**

En este apartado mencionaré las reflexiones y confusiones que tuvieron los maestros en cada una de las sesiones trabajadas. Así como las dudas que emergieron al tratar de solucionar los problemas multiplicativos y las vías que propusieron para solucionarlos.

#### **5.3.1 Primera sesión**

En esta sesión se trabajó el primer objetivo de la estructura del taller: **“Analizar la estructura de la multiplicación y la función de cada uno de sus elementos dentro de un problema multiplicativo”**

A continuación se transcribe lo sucedido en la sesión uno<sup>6</sup>: Facilitador, J (Jessica), D (Deyanira), M (Maribel), H (Hilda), P (Petra), A (Aldo), G (Guadalupe), C (Carmen), V (Verónica), O (Olivia), Pa (Patricia), MG (Ma. Guadalupe), L (Luisa), B (Beatriz), E (Eleida), Gi (Gina), N (Norma) y Ar (Araceli).

**Primera actividad.** La intención fue conocer las dificultades que identifican los maestros cuando sus alumnos resuelven problemas multiplicativos.

Al comenzar el taller, a los maestros se les planteó la siguiente pregunta: ¿Qué problemáticas enfrentan cotidianamente sus alumnos en la resolución de los problemas multiplicativos?

J: Las tablas de multiplicar no se las saben

P: Suman en lugar de multiplicar

P: No identifican qué hacer en el problema

L: Tienen dificultad para plasmar su respuesta en el papel

---

<sup>6</sup> Los nombres de los maestros son seudónimos

**Facilitador:** ¿Cómo? puede explicar el porqué los alumnos tienen dificultad para plasmar se respuesta en el papel

L: Bueno, algunos de mis alumnos lo hacen mentalmente y como tal me dan la respuesta, pero cuando les digo que coloquen el resultado en la libreta no saben cómo hacerlo ¡Tienen dificultad!

**Facilitador.** ¿Pero qué hace usted para que sus alumnos puedan plasmar el resultado en la libreta?

L: Pues, que lo tienen que hacer para que se los pueda calificar

**Facilitador:** Al principio mencionó la maestra Jessica que los alumnos tienen problemas con las tablas de multiplicar ¿En qué momento de la Educación Primaria consideran que los niños deben aprender las tablas de multiplicar?

V: Cuando se encuentra una lección en donde se utilizan las tablas de multiplicar

A: Es una manera de simplificar la suma, es decir,  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ , entonces multiplicamos  $3 \times 4 = 12$ . Esto me sirve para ahorrar tiempo.

Las dificultades que identifican los maestros cuando sus alumnos resuelven problemas multiplicativos, son algunas hipótesis que se consideraron para el diseño del taller, por ejemplo: los alumnos tienen dificultad con las tablas de multiplicar, suman en vez de multiplicar,.... También, los maestros mencionaron que no hay un tema que indique el trabajo con las tablas de multiplicar. Sin embargo, los maestros trabajan las tablas de multiplicar cuando lo consideran pertinente y necesario.

**Segunda actividad.** La intención de esta actividad fue identificar las diferentes estrategias que utilizan los maestros al buscar la respuesta al problema dado y, por otro, que los maestros reconozcan que hay diferentes procedimientos que llevan al mismo resultado.

**Facilitador:** Un niño lee 6 páginas cada 3 días y va a leer 18 días. ¿Cuántas páginas leerá?

J: Yo lo resolví de la siguiente manera: X//, X//, X//, X//, X//, X// =  $6 \times 6 = 36$

**Facilitador:** Pero qué significan las equis “X” y las diagonales “/”

J: Las “X” son los días que se lee y las diagonales son los días que pasan para volver a leer

M: Yo hice casi lo mismo, por ejemplo:  $1/2/3, 1/2/3, 1/2/3, 1/2/3, 1/2/3, 1/2/3$   $6 \times 6 = 36$  páginas

Pa: Yo hice una división: si son 18 días que va a leer y cada 3 días lee 6 páginas, entonces  $18/3 = 6$  de los 18 días va a leer. Entonces,  $6 \times 6 = 36$  páginas

A: Yo hice una regla de tres  $6 - 3$   
X - 18  $6 \times 18 = 108/3 = 36$

MG: Yo obtuve el resultado con proporcionalidad:

Páginas	Días
6	3
12	6
18	9
24	12
30	15
36	18

L: De lo que acaban de hacer los compañeros me recuerda una anécdota que tuve con mis alumnos: teníamos que seguir una secuencia para resolver un problema, con los datos que había en el problema teníamos que hacer una resta. Hubo tres niños que estaban restando el resultado con las opciones que nos daban: a, b y c. En cambio hubo otros alumnos que obtuvieron la misma cantidad sin haber hecho una resta. Entonces, hay diferentes vía que pueden llevar al resultado.

Al término, los maestros mencionaron que depende del grado que se tenga (1 a 6 año) es la forma que se resuelve. La reflexión a la que llegaron los maestros es que hay varios procedimientos para llegar a un mismo resultado y que a veces como maestros solamente se pide que sea resuelto de cierta manera que se determina. También, los maestros reconocieron que por las premuras de tiempo se trabajan rápidamente los algoritmos y que hay poco tiempo para trabajar procedimientos que les permitan a los alumnos razonar lo que realizan.

Antes de iniciar la tercera actividad, a cada uno de los maestros se le entregó una hoja impresa que contiene problemas multiplicativos (Ver anexo 8. 2), para que los trabajen con sus alumnos en su salón de clase. Los maestros deberán de elegir uno o varios problemas según el grado que atienden. Este trabajo se revisará en la siguiente sesión.

**Tercera actividad.** La intención fue que los maestros mencionaran, de los problemas dados, cuáles son de multiplicación y cuáles no. A partir de esta situación, los maestros identifiquen que los problemas multiplicativos se pueden resolver con una multiplicación o una división.

La consigna que se les dio a los maestros fue la siguiente: En su opinión indique cuáles de estos problemas serían de multiplicación y cuáles no. Explique por qué y escriba su solución (Ver anexo 8.1). En este apartado los resultados se revisaron de manera general. En la cuarta actividad se analizarán las soluciones de cada uno de los problemas resueltos por los maestros.

**Facilitador:** El primer problema es de multiplicación, -Sí. Cómo lo resolvieron

1.- Por ayudar a su mamá a vender comida durante toda la semana, Javier recibió los siguientes billetes ¿Cuánto dinero recibió en total?



J: Si tenemos las imágenes de los billetes, entonces, se hace la suma del total de billetes

D: Para saber cuánto le dieron puede multiplicar el número de billetes por el valor de estos

B: Este ejercicio sí es de multiplicación pues los billetes son de igual denominación. Las formas que se podrían utilizar para obtener el resultado serían:  
 $20+20+20+20+20=100$

$$20 \times 5 = 100$$

$$5 \times 20 = 100$$

V: Se utiliza la multiplicación para minimizar o simplificar la suma

C: La multiplicación se utiliza para llegar más rápido al resultado

En este primer ejercicio la mayoría de los maestros mencionaron que es un problema de multiplicación. Otros maestros no mencionan nada, pero la respuesta que tienen en la hoja impresa es de suma iterada. En un primer momento puedo decir que los maestros no consideran importante la función del multiplicador y multiplicando por la colocación de los factores que representaron “5 x 20 y 20 x 5”.

**Facilitador:** El ejercicio dos cómo lo resolvieron

2.- En una caja hay 10 paquetes con 4 polvorones cada uno, ¿cuántos polvorones hay en la caja?

J: Este ejercicio también es de multiplicación y se utiliza para simplificar la suma

**Facilitador:** Cómo quedaría la representación del problema

J:  $10 \times 4 = 40$ . El 10 es el multiplicando y el 4 es el multiplicador. Por ejemplo:



La representación del algoritmo que hizo la maestra Jessica colocó primero el multiplicador y después el multiplicando  $10 \times 4$  que representó gráficamente. Esta representación es consistente con el planteamiento del problema dado. Pero, cuando la maestra mencionó que los 10 paquetes era el “multiplicando” y 4 polvorones era el “multiplicador”, el argumento que dio cambia la estructura del problema: En una caja hay 4 paquetes con 10 polvorones cada uno, ¿cuántos polvorones hay en la caja? Al parecer, la maestra conoce los nombres de los factores de la multiplicación “multiplicador y multiplicando” pero desconoce la función que tiene cada uno de ellos en los problemas multiplicativos. Los demás maestros hicieron las siguientes representaciones: dibujos, suma iterada y el algoritmo. En este último hubo dos representaciones:  $10 \times 4$  y  $4 \times 10$ .

**Facilitador:** El ejercicio tres es de multiplicación, ¿cómo lo resolvieron?

3.- Una silla tiene 4 patas. En el salón hay 20 sillas, ¿cuántas sillas hay en total?

E: No es un problema de multiplicación, sólo se necesita leer con atención

V: Es pregunta capciosa, la respuesta es 20 sillas

En esta actividad muy pocos maestros escribieron el resultado 20 sillas. Otros maestros mencionaron que era una pregunta capciosa. Al pasar a sus lugares observé que algunos maestros hicieron operaciones de multiplicación y división.

$$4 \times 20 = 80$$

$$20 \times 4 = 80$$

$$80 / 4 = 20$$

**Facilitador:** El problema cuatro es de multiplicación

4.-Rubén compró 5 yogurts y pagó 35 pesos. ¿Cuánto vale cada yogurt?

M: En este problema se utiliza la división

D: Sí es de multiplicación porque para dividir debe saber multiplicar.  $35/5 = 7$

J: Se busca un número que multiplicado x 5 nos de 35.

En este ejercicio hubo dos maestras que mencionaron que sí era de multiplicación porque se utiliza para resolver problemas de división para los demás maestros es un problema que se resuelve con la división. Probablemente, los maestros desconocen que los problemas multiplicativos se resuelven con una multiplicación o una división, por tal motivo los maestros ven dos operaciones diferentes, por un lado, la multiplicación y, por otro, la división.

**Facilitador:** Por último, el ejercicio cinco es un problema de multiplicación

5.- A Juana le dieron 56 pesos para que comprara refrescos. Si cada refresco vale 7 pesos ¿Para cuántos refrescos le alcanza?

J: Sí es problema de multiplicación porque se busca un número multiplicado x 7 que nos de 56

D: Requiere división para su solución pero implica la multiplicación  $56/7=8$

En este problema como en el otro, la mayoría de los maestros mencionó que se resuelve con una división. Nuevamente las dos maestras mencionaron que los dos últimos problemas son de multiplicación. Sus argumentos fueron que para obtener la respuesta se debe buscar un número que multiplicado x 7 de 56.

**Cuarta actividad.** El objetivo fue analizar y reflexionar los procedimientos que hicieron los maestros en la actividad anterior (tres), considerando la propuesta pedagógica de los libros de la SEP “veces-cantidad” y las aportaciones encontradas en la literatura.

**Facilitador:** Bien, vamos a analizar las representaciones que hicieron para obtener los resultados de cada uno de los problemas

1.- Por ayudar a su mamá a vender comida durante toda la semana, Javier recibió los siguientes billetes ¿Cuánto dinero recibió en total?



V: Maestro, en el ejercicio uno, ¿la semana es inglesa o de siete días?

**Facilitador:** No especifiqué cuantos días, simplemente consideré toda la semana. De los 5 problemas que acaban de resolver hay algunos de multiplicación.

Ar: Sí, solamente los dos primeros

D: No, pero el 4 y 5 tal vez si sean de multiplicación

**Facilitador:** Entonces los problemas 3, 4 y 5 son o no son problemas de multiplicación

D: Solamente los ejercicios 4 y 5 sí podrían ser problemas de multiplicación

De los cinco problemas que se les presentaron a los maestros (anexo 8.1), ellos afirmaron que los dos primeros problemas son de multiplicación, y que en el

problema tres no se hace ninguna operación, solamente se tiene que leer con mucho cuidado. Los problemas cuatro y cinco la mayoría de los maestros dudaron que sean problemas de multiplicación por la estructura que tienen.

**Facilitador:** Quién de ustedes nos quiere compartir el procedimiento que hizo para obtener el resultado del problema uno

J: El resultado lo obtuve de dos maneras diferentes:

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ + 20 \\ 20 \\ \hline 20 \\ \hline 100 \end{array}$$

Primeramente así lo harían los alumnos y nosotros lo haríamos de esta manera  $20 \times 5 = 100$

**Facilitador:** Hay algún otro procedimiento que hayan hecho, -No. Este procedimiento puede ser correcto  $5 \times 20$ , -Sí. En las dos representaciones que tenemos  $20 \times 5$  y  $5 \times 20$ , cuál nos representa lo que nos está pidiendo el problema

J: La segunda representación está relacionada con el problema porque nos dice que son 5 veces 20.

**Facilitador:** Y por qué la representación  $20 \times 5$  no es correcta con relación a lo que nos pide el problema

J: Porque, recordemos que en la multiplicación el primer número nos dice las veces. Entonces, en la otra representación nos diría 20 veces 5, y cómo está representado el problema, no tenemos 20 monedas de 5 pesos

**Facilitador:** Bien, la maestra acaba de mencionar la palabra “veces”. Informalmente llamamos a uno de los factores de la multiplicación veces y al otro número cantidad

MG: Pero también podríamos colocar  $20 \times 5$

**Facilitador:** Sí, pero como está redactado el problema no nos representa 20 veces 5 o si

J: Es correcto lo que dice porque si leemos tal cual lo menciona la maestra diría 20 veces 5 y en el problema no hay billetes de 5 pesos

P: Aquí es donde los niños se confunden. Ellos confunden la cantidad con las veces. Y cuando nos lo dicen también a nosotros nos confunden

La mayoría de los maestros representaron  $20 \times 5$ , probablemente hicieron esa representación porque primeramente encuentran la cantidad que representa el billete y después colocan la cantidad de billetes que hay. Después de analizar las dos representaciones  $20 \times 5$  y  $5 \times 20$ , los maestros identificaron la representación correcta con relación al problema uno que fue, 5 veces 20.

Las dudas que expresaron los maestros en la solución del Problema Uno son centrales porque me indicaron (facilitador) que no hay una claridad de la función que tienen los factores de la multiplicación (multiplicador y multiplicando) en los problemas multiplicativos.

Otro punto importante que me llamó la atención fue el comentario que se hizo la maestra Petra al decir que los alumnos confunden las veces con la cantidad. Probablemente, los alumnos desconocen la función que tienen los factores (multiplicador-multiplicando) en los problemas multiplicativos o quizás no conozcan el nombre de los factores de la multiplicación. Por tal motivo, es importante que los maestros conozcan la función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos para que cuando trabajen dicho contenido con sus alumnos, ellos construyan cuantitativamente el significado de la multiplicación y entiendan la relación que tiene el multiplicando con el producto.

**Facilitador:** Anteriormente, se mencionó que el segundo problema también es de multiplicación

2.- En una caja hay 10 paquetes con 4 polvorones cada uno, ¿Cuántos polvorones hay en la caja?

J: Sí es de multiplicación, son 10 paquetes y cada uno tiene 4 polvorones  $10 \times 4 = 40$

**Facilitador:** Es la única forma que puede representarse

MG: No, también se puede representar  $4 \times 10$

D: Pero en la representación que hace la maestra sí altera el problema

**Facilitador:** ¿Cómo lo altera?

D: Con la representación  $4 \times 10$ , ya no estamos representando lo que nos pide el problema, entonces, tendríamos 4 paquetes de 10 polvorones cada uno

**Facilitador:** Conocen los factores de la multiplicación, -sí, ¿cuáles son? – multiplicando, multiplicador y producto (parcial o total). En el problema de los polvorones, ¿cuál sería el multiplicador y cuál el multiplicando?

V: El multiplicando es 10, el multiplicador 4 y el producto es 40

**Facilitador:** Pero el multiplicador nos dice las veces y el multiplicando nos dice la cantidad

J: Entonces, lo que mencionó la maestra nos dice que hay 4 paquetes y tiene cada uno 10 polvorones porque el multiplicando nos dice la cantidad y el multiplicador las veces. Es decir, hay que dibujarle al niño 10 paquetitos y en cada uno 4 polvorones. Para simplificar esta suma vamos a realizar una multiplicación

**Facilitador:** Pero si nosotros simplificamos las operaciones, ¿creen que los alumnos entiendan por qué se resuelve de esta manera?

P: Es cierto, algunos alumnos suelen confundir los factores

A: Porfirio, en las operaciones horizontales que tú escribes,  $-5 \times 20-$ , los niños sí tienen problemas para identificar el multiplicador y multiplicando, pero si lo colocamos en forma vertical los niños sí pueden identificar el multiplicador y multiplicando

5

X 20

**Facilitador:** Tal vez sí.

La última pregunta que hizo el maestro Aldo y que contesté que “tal vez sí”, en ese momento no entendí la analogía que hizo el maestro cuando mencionó que en el algoritmo vertical es más fácil para el niño identificar el multiplicador y multiplicando. Al analizar esta pregunta puedo decir que no creo que sea tan fácil que los alumnos coloquen el multiplicando y multiplicador correctamente en el algoritmo. Más bien, probablemente, los alumnos colocan los números como se les ha dicho, el número grande va arriba (multiplicando) y el número pequeño va abajo (multiplicador). Por otro lado, si representamos el algoritmo vertical como mecanizaciones no hay por qué preguntar quién es quién. Sin embargo, cuando se les presenta un problema multiplicativo a los alumnos suelen tener dificultad para elegir la operación matemática que les ayude a obtener el resultado del problema. Como, por ejemplo, lo que sucedió en uno de los reactivos de Excale (Ver página 47).

Para terminar la sesión del día, se les planteó el siguiente problema: En la granja hay 3 conejos. Si cada conejo tiene 4 patas, ¿cuántas patas hay en total? que no estaba programado, pero por las situaciones que se vivían creí conveniente abordarlo. Los problemas 3, 4 y 5 del anexo 8.1 se analizarán más adelante.

La consigna que se les dio a los maestros fue la siguiente: que en el problema dado identificaran el número que nos dice las veces y el número que nos dice la cantidad en el problema.

V: Creo que el 3 es la cantidad y el 4 son las veces

J: No, yo digo que no. Las veces es el 3 y la cantidad es 4 porque el 3 nos dice las veces que se van a contar las patas, entonces, vamos a repetir 3 veces el 4

**Facilitador:** Si nosotros representáramos  $4 \times 3$ , estaríamos diciendo que hay 4 conejos de 3 patas cada uno. Es algo ilógico que ocurra al menos que el conejo tenga una malformación o le hayan cortado una pata. Entonces, cómo quedó la representación

M: 3 conejos de 4 patas cada uno, 3 veces 4

Al terminar de analizar el problema, observé que para algunos maestros la función de los factores de la multiplicación –multiplicador y multiplicando- iba cobrando sentido en la resolución de los problemas multiplicativos. Ya que ellos hicieron reflexiones sobre las respuestas que mencionaron sus compañeros, argumentando la relación que tiene la representación “veces-cantidad” con la estructura del problema. Por otro lado, me surgió una interrogante. En varias ocasiones observé que algunos maestros tomaron el primer número que encuentran en el problema como el multiplicador y el segundo como multiplicando. Pensé en ese momento que era porque desconocían la función de los factores, pero en esta última actividad lo volvieron hacer. Decidí poner atención en la siguiente sesión sobre esta situación.

La participación de los maestros, sus anécdotas y sus reflexiones que hicieron en cada uno de los problemas multiplicativos nos dieron elementos para diseñar la segunda sesión de este taller que se trabajaría la semana del 2 de junio de 2011.

### **5.3.2 Segunda sesión**

Para el diseño de la segunda sesión del taller, se consideraron las participaciones, dudas, reflexiones y soluciones que hicieron los maestros ante los problemas que se les presentaron. Los aspectos que se consideraron para esta sesión fueron: la dificultad que tuvieron la mayoría de los maestros para identificar la función del multiplicador y multiplicando en la resolución de problemas multiplicativos y el trabajo con la propiedad conmutativa después de haber identificado la función de los factores de la multiplicación.

Los objetivos para esta sesión fueron: **“Analizar la estructura de la multiplicación y la función de cada uno de sus elementos dentro de un problema multiplicativo”** y **“Conocer las relaciones que existen en las tablas de multiplicar”**

A partir de lo mencionado, la segunda sesión quedó conformada de la siguiente manera:

**Primera actividad.** La intención fue que los maestros identificaran en los problemas multiplicativos el número que nos dice las “veces” que se itera la cantidad y el número que nos dice la “cantidad” que se itera. (Ver anexo 8.3)

**Segunda actividad.** La intención fue que los maestros revisaran los procedimientos que utilizaron sus los alumnos al resolver los problemas dados. A partir de las actividades realizadas, hasta el momento, en el taller. Esta actividad se les entregó la sesión anterior a los maestros (Ver anexo 8.2)

**Tercera actividad.** La finalidad fue que los maestros “con material concreto”, representaran las “veces y la cantidad” de los objetos que se les mencionaron en un solo conjunto. Por ejemplo:

Realicen 5 pulseras con 3 cascabeles

**Cuarta actividad.** La finalidad fue que a partir de la convención “veces-cantidad” los maestros resolvieran e identificaran en hojas impresas la tabla del 2 comparándola con su representación gráfica. (Ver anexos 8.4, 8.5, 8.6 y 8.7)

**Quinta actividad.** La intención fue que los maestros resolvieran el problema multiplicativo y que argumentaran qué tabla de multiplicar los llevó al resultado. (Ver anexo 8.8)

A continuación se transcribe lo sucedido en la sesión dos: Facilitador, J (Jessica), D (Deyanira), M (Maribel), H (Hilda), P (Petra), A (Aldo), G (Guadalupe), C (Carmen), V (Verónica), Pa (Patricia), MG (Ma. Guadalupe) L (Luisa), B (Beatriz) O (Olivia) y Ar (Araceli). En esta sesión se integraron tres maestras Amparo, Águeda y Janet. Las siglas que se utilizaron para mencionar su participación fueron Am, Ag y J en el orden que se mencionaron.

**Primera actividad.** Analizar e identificar en la estructura de los problemas multiplicativos el número que nos dice las “veces” que se itera la cantidad y el número que nos dice la “cantidad” que se itera. (Ver anexo 8.3)

1.- Alicia compró 4 montones de 3 manzanas cada uno. ¿Cuántas manzanas compró?

**Facilitador:** ¿Qué número nos dice las veces y qué número nos indica la cantidad?

Ar: 3 son las veces y 4 es la cantidad

**Facilitador:** La respuesta que nos comparte la maestra, todos están de acuerdo

M: Lo que comenta la maestra no está bien

Am: Pero por qué ¿qué pasa con el concepto, “el orden de los factores no altera el producto”

**Facilitador:** Maestra en la sesión anterior se enfatizó el porqué es importante conocer la función de los factores de la multiplicación y que al invertir la representación de las cantidades “veces-cantidad” modificamos la estructura del problema dado. ¿Qué pasa si se invierte el valor de los factores en el problema? ¿Cómo quedaría la estructura del problema?

MG: Alicia compró 3 montones de 4 manzanas cada uno. ¿Cuántas manzanas compró?

P: Es diferente la información

Am: Aquí, entonces, se manejaría que la variante es 4 y la constante 3, porque en matemáticas utilizamos las variantes y constantes

**Facilitador:** Así es, entonces cómo queda la representación del problema

V: 4 veces 3 manzanas

Cuando la maestra Amparo mencionó que “**El orden de los factores no altera el producto**” hubo maestros que estuvieron de acuerdo con lo que había mencionado la maestra, ya que se obtiene el mismo resultado. En el Capítulo uno de este trabajo de tesis se mencionó que este concepto podría ser aceptado en los problemas de combinación que es una de las cuatro personalidades que se identificaron en la multiplicación, pero también se mencionó que este concepto puede ser desafortunado, ya que en otros problemas multiplicativos sí es

importante entender que cada uno de los factores de la multiplicación tiene una función diferente.

En otro aspecto, la relación que hizo la maestra Amparo sobre variantes y constantes, en un primer momento no entendí lo que me dijo. Después de reflexionar sobre las variantes y constantes, puedo decir lo siguiente: para la maestra las veces es la variante y la cantidad es la constante, esta relación es correcta. Es importante que los maestros de grupo entiendan y utilicen el lenguaje matemático en el desarrollo de sus clases pero con un sentido cuantitativo y no como algo dado. De esta manera se estará familiarizando al alumno con los términos matemáticos que más adelante en su educación estarán trabajando.

**Facilitador:** En el siguiente problema, ¿Qué número nos dice las veces y qué número nos dice la cantidad?

2.- Una pecera tiene 26 peces y en un acuario hay 15 peceras. ¿Cuántos peces hay en total?

D: 15 son las veces y 26 es la cantidad

**Facilitador:** Bien, y el problema tres cómo quedaría representado

3.- En una granja hay 5 conejos. Cada conejo tiene 4 patas, ¿cuántas patas hay en total?

V: El resultado es 20

**Facilitador:** Es correcto el resultado, pero cuál sería la representación del problema

D: 5 son las veces y 4 es la cantidad.

**Facilitador:** ¿Es correcto? –sí, y el siguiente problema

4.- En el puesto de frutas hay 7 cajas con 8 melones cada una, ¿cuántos melones hay en total?

L: 8 melones son la cantidad y 7 son las veces

**Facilitador:** Y el último ejercicio cómo quedó representado

5.- Carlos contó las llantas de 7 automóviles. Si cada automóvil tiene 4 llantas, ¿cuántas llantas contó en total?

A: 7 serían las veces y 4 sería la cantidad

**Facilitador:** Para ustedes ¿Por qué sería importante que sus alumnos puedan identificar la función de los factores de la multiplicación en un problema multiplicativo?

V: Para que los alumnos puedan hacer un mejor planteamiento del problema

Am: Cuando los alumnos no identifican las partes del problema o los datos que tienen en el problema no pueden llegar a una solución. También, se confunden en este tipo de situaciones

P: Antes de darles un problema a los alumnos hay que reflexionar qué se les está pidiendo

Al plantearles la pregunta “¿Por qué sería importante que sus alumnos puedan identificar la función de los factores de la multiplicación en un problema multiplicativo?”, los maestros consideraron importante que los alumnos conozcan e identifiquen la función de los factores de la multiplicación para obtener mejores resultados. También mencionaron que el diseño de los problemas debe ser con contextos reales para el alumno y, por último, que antes de trabajar un problema como maestro se debe tener claro qué es lo que se está pidiendo.

**Segunda actividad.** El desarrollo de esta actividad consistió en compartir las experiencias y procedimientos que utilizaron los alumnos al tratar de resolver los siguientes problemas multiplicativos. Esta actividad se les entregó a los maestros en la sesión pasada (Ver anexo 8.2)

**Facilitador:** Cómo resolvieron el primer problema sus alumnos

1.- Juan compró los siguientes sobres, en cada sobre hay 3 estampas ¿Cuántas estampas tiene en total?



A: Mi alumno de quinto año lo resolvió  $3 \times 5$

L: Mi niño de cuarto año lo hizo mentalmente 15

**Facilitador:** La representación que hizo su alumno mentalmente se la compartió

L: No, solamente me dio el resultado

**Facilitador:** Algún otro maestro que nos quiera compartir su experiencia

J: Yo,

**Facilitador:** Grupo

J: Sexto grado, primero les dicté el problema pero los alumnos me preguntaron -¿cuántos sobres son?, espéreme un momento ahorita los dibujos en el pizarrón. Ya que los alumnos vieron los sobres sumaron 5 veces 3,  $3+3+3+3+3$ , al ladito los alumnos hicieron la multiplicación para corroborar el resultado  $5 \times 3$

**Facilitador:** Como podemos observar hay varias representaciones del problema. Con lo que hemos trabajado en el taller ¿cuál es la representación que da cuenta del problema dado?

A:  $5 \times 3$ , porque nos dice que hay 5 sobres y cada uno tiene 3 estampas.

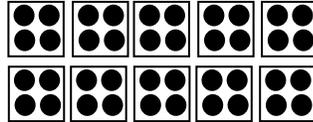
Al resolver este problema, varios niños de diferentes grados escolares, realizaron las siguientes representaciones  $3 \times 5$  y  $5 \times 3$  para obtener el resultado. Pero debemos preguntarnos si hay un significado atrás de estas dos representaciones para el alumno o simplemente son números que se utilizan para representar una operación.

**Facilitador:** Y en el problema dos, ¿qué hicieron sus alumnos?

2.- En una caja hay 10 paquetes con 4 polvorones cada uno, ¿Cuántos polvorones hay en la caja?

A: Mi niña puso  $10 \times 4$

L: Mis alumnos me contestaron 40, pero les pregunté ¿cómo le hicieron? ellos contestaron: que solamente tenían el resultado. Les pedí que representaran su solución –Bueno, Si cada paquete tiene 4 polvorones y hay 10 paquetes entonces el resultado es 40



**Facilitador:** Representaron alguna operación

L: Sí,  $10 \times 4$

**Facilitador:** Alguien más nos quiere compartir los resultados que obtuvieron sus alumnos

J: Yo, como la mitad de mis alumnos representaron  $4 \times 10$ ; otros comentaron lo siguiente: también se puede resolver el problema mediante una suma, pero si utilizamos la multiplicación ahorramos tiempo.

La experiencia que compartió la maestra me llamó la atención ya que los alumnos ven a la multiplicación como una vía para ahorrar tiempo. ¿Pero realmente esa es la función de la multiplicación “ahorrar tiempo” en la resolución de los problemas multiplicativos? Probablemente, se le ha hecho creer a los niños que la multiplicación sirve para ahorrar tiempo.

**Facilitador:** El ejercicio tres, ¿cómo quedó?

3.-Pepe fue al comedor 8 veces. En cada visita se comió tres gelatinas, ¿cuántas visitas hizo en total al comedor?

A: Mi niña puso lo siguiente: “El problema está mal planteado. La pregunta debe ser así; ¿Cuántas gelatinas comió en total? Porque si pregunta ¿Cuántas visitas

hizo en total al comedor? Pues 8". Todos mis demás alumnos hicieron una operación  $8 \times 3$  ó  $3 \times 8$

**Facilitador:** La respuesta que nos comparte la niña, ¿qué nos dice?

D: Que la niña sí está leyendo el problema y la prueba es que argumenta su respuesta.

La reflexión que hizo la niña sobre el problema que se le planteó: Pepe fue al comedor 8 veces. En cada visita se comió tres gelatinas, ¿cuántas visitas hizo en total al comedor? Y los procedimientos que hicieron sus compañeros  $3 \times 8$  ó  $8 \times 3$  para dar respuesta al problema puedo inferir lo siguiente: por un lado, la alumna entendió lo que le estaba pidiendo el problema y así pudo argumentar su respuesta. Por otro, probablemente los alumnos al ver que los dos primeros problemas de la actividad se resolvieron con una multiplicación intuyeron que todos los ejercicios se resolverían con la multiplicación. Pero solamente una niña de 30 niños del grupo pudo identificar que el ejercicio tres no se resolvía con una multiplicación.

**Facilitador:** ¿Y el problema cuatro?

4.- Un niño lee 6 páginas cada 3 días y va a leer durante 18 días ¿Cuántas páginas leerá en total?

J: Al aplicarles este ejercicio, mis alumnos me empezaron a decir: "¿qué hago? ¿Una suma, resta, multiplicación o división? Al escuchar las inquietudes de mis alumnos la verdad es que no estaban pensando más bien le estaban atinando. Lo mucho que llegaron hacer fue  $6 \times 3 = 18$ . Lo que me da a entender es que les hace falta mucha comprensión y razonamiento matemático para que mis alumnos puedan resolver este tipo de problemas

L: Mis alumnos lo representaron, 3-6, 6-12, 9-18, 12-24, 15-30 y 18-36. Y después lo representaron con el algoritmo  $6 \times 6 = 36$

**Facilitador:** ¿Qué habilidades matemáticas deben desarrollar los alumnos para dar respuesta a este tipo de problemas?

V: Sin duda es la comprensión lectora, porque si el alumno no entiende qué hacer, entonces va a realizar- otros procedimientos. Por eso yo les digo que lean bien porque el problema nos dice qué hacer

**Facilitador:** La comprensión lectora es un punto importante pero, ¿qué opinan los demás?

M: Puede haber un niño que entiende el problema pero al momento de representar la operación lo puede hacer mal

**Facilitador:** Entonces, la comprensión lectora y el razonamiento matemático son dos puntos importantes para que el alumno aprenda matemáticas, -sí. Este problema que acabamos de revisar fue tomado de la prueba de enlace que se les aplicó a los alumnos de tercer año de primaria

J: ¡De verás!

**Facilitador:** Sí

Al parecer, las dificultades que tienen los alumnos al resolver los problemas multiplicativos son: cuando los alumnos no entienden el problema hacen otro procedimiento que no lleva al resultado que se pide o simplemente no hacen nada; otra dificultad que se identifica es que el maestro con el afán de ayudar a sus alumnos les dice que todo problema tiene palabras claves y que solo hay que identificarlas para saber qué operación se debe realizar. En el problema multiplicativo: Un niño lee 6 páginas cada 3 días y va a leer durante 18 días ¿Cuántas páginas leerá en total? no se identifica cuál es la palabra clave, probablemente sea el motivo por el cual la mayoría de los alumnos no lo hayan podido resolver. Si la enseñanza matemática se enfocara en identificar palabras claves ¿qué herramientas requeriría el alumno para dar solución a un problema matemático en donde no hay palabras claves que determinen la operación a realizar?

**Tercera actividad.** Para esta actividad los maestros formaron equipos. A cada equipo se le entregó varios cubitos con la finalidad de familiarizar a los maestros con los elementos de un conjunto.

La consigna fue la siguiente: Un cubo  representa un elemento de un conjunto. Por ejemplo, para representar un automóvil de 4 llantas debemos ensamblar las 4 llantas –cubitos- para representarlo (Ver figura 5.1)



Figura 5.1 Representación gráfica de un automóvil con cuatro llantas

es importante imaginar el objeto que vayamos a construir. En este ejemplo fue un automóvil con 4 llantas. En las siguientes actividades, ustedes tendrán que representar con los cubos lo que se les pida.

**Facilitador:** Una maestra para el festival del día de las madres les pidió a 5 alumnas hacer una pulsera con 3 cascabeles cada una

L: Yo hice lo siguiente, primeramente coloqué las 5 niñas y después hice 5 pulseras con 3 cascabeles cada una (Ver figura 5.2)

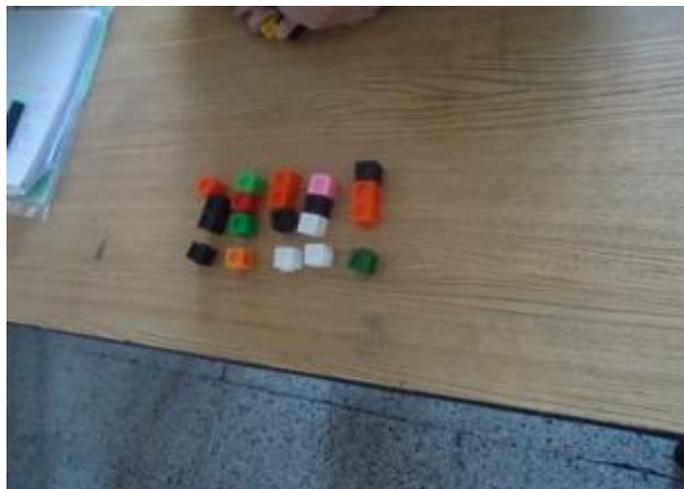


Figura 5.2 Representación gráfica de las 5 pulseras con tres cascabeles cada una.

Pa: Yo realicé 5 tiras con 3 cascabeles cada una

**Facilitador:** Las representaciones que hicieron las maestras corresponden a la actividad que se les pidió

J: Sí, porque tienen 5 tiras con tres cubitos cada una, es decir, 5 veces 3

**Facilitador:** Bien, continuemos, cómo representaríamos la siguiente actividad. En una granja hay 7 conejos con 2 orejas cada uno

V: Esta actividad puede servir para trabajar la motricidad gruesa

D: 7 veces 2 cubitos

**Facilitador:** Y el siguiente actividad. Un paquete tiene 4 galletas. Si Pedro compró 6 paquetes ¿Cuántas galletas tiene en total?

H: 6 veces 4

G: No, queda de la siguiente manera 4 veces 6

**Facilitador:** Con la representación que plantea la maestra ¿cómo representaríamos el problema?

J: Si consideramos lo que menciona la maestra, habría 4 paquetes con 6 galletas cada una. Cambia el problema

El material concreto ayudó a los maestros a imaginar y representar la función que tiene cada uno de los factores –multiplicador y multiplicando- de la multiplicación. Por otro lado, el trabajo en equipo contribuyó para que los maestros que todavía no tenían claro cómo identificar el número que indica las veces y el número que indica la cantidad, entre ellos, buscaran las estrategias para explicarles a sus compañeros para identificarlos. También se pudo observar que algunos maestros tuvieron problemas con el material concreto para representar la solución que se les pedía.

Al término de la actividad, se le pidió a cada equipo diseñar un problema. El problema que diseñaron lo compartieron con los demás equipos. Los equipos representaron la solución del problema con el material concreto (cubitos)

E1: María tiene 3 cajones con 5 playeras cada uno ¿cuántas playeras tiene en total?

E3: La cantidad son 5 playeras y las veces son los 3 cajones.

$3 \times 5$  es la representación correcta

E2: La maestra Paty tiene 10 cajas con 2 zapatos cada una, ¿cuántos zapatos tiene en total?

E3: 10 veces 2, por tal motivo queda representado  $10 \times 2$

E3: 6 libros caben en una caja. Si la maestra tiene 8 cajas, ¿Cuántos libros podrá guardar en las cajas?

E1: Las 8 cajas son las veces y los 6 libros son la cantidad, entonces  $8 \times 6$

Para finalizar la sesión del día, los maestros contestaron las siguientes actividades.

**Cuarta actividad.** A cada uno de los maestros se le entregaron dos hojas impresas, cada una por separado, con la finalidad de analizar y reflexionar sobre la solución de la tabla de multiplicar del 2. (Ver anexos 8.4 y 8.5)

**Facilitador:** ¿Qué dificultades tuvieron al resolver las actividades?

J: La primera hoja que nos diste es la tabla del 2 pero a la inversa

**Facilitador:** ¿Cómo es a la inversa?

J: Las tablas que se enseñan son  $2 \times 1 = 2$ ;  $2 \times 2 = 4$ ;  $2 \times 3 = 6 \dots$ , y las actividades de la primera hoja empiezan  $1 \times 2 = 2$ ;  $2 \times 2 = 4$ ;  $3 \times 2 = 6 \dots$ , por eso digo que es a la inversa

**Facilitador:** Los demás maestros qué opinan

D: La primera hoja la contesté mecánicamente, pero después no tenía forma de contestar el segundo ejercicio

V: La primera hoja no es la tabla del 2, la segunda hoja sí es la tabla del 2

**Facilitador:** Bueno, a continuación veremos qué nos representa cada una de las actividades (Ver anexos 8.6 y 8.7)

Am: Oye, entonces aprendí al revés las tablas de multiplicar

MG: Yo las aprendí: dos por una, dos por dos, dos por tres..., entonces hasta ahorita descubro que tengo ese error

V: -¡Todos tenemos ese error!

A: He vivido engañado por 30 años

M: Lo más chistoso es que lo seguimos transmitiendo

J: He vivido engañada

**Facilitador:** Con lo que hemos trabajado en el taller ¿cuál es la tabla del 2? En ese momento hubo confusión para decir cuál era la tabla del 2. Podríamos hacer un problema con las tablas que venimos enseñando

V: Sí, 2 x10, dos pies con 10 zapatos cada uno, no quedaría

P: Si se podría, en dos pies 10 dedos cada uno, no olvídelo

Am: Sí, se puede hacer, en mis dos pies tengo 5 dedos en cada uno ¿cuántos dedos tengo en total?

**Facilitador:** Pero se nos facilitó diseñar el problema con las tablas de multiplicar que enseñamos

J: No, es importante el contexto para entender el problema

El desarrollo de esta actividad propició en los maestros dudas e inquietudes de la forma que, hasta el momento, han enseñando las tablas de multiplicar. El asombro

que reflejaron los maestros me hizo pensar que no es tan fácil aceptar, que ya pasados ciertos años de servicio, la enseñanza de las tablas de multiplicar no sea la que se ha estado enseñando. También, se identificó que con las tablas de multiplicar que hemos venido enseñando,  $2 \times 1=2$ ;  $2 \times 2=4$ ;..., es más difícil diseñar un problema ya que, la manera de dar respuesta a los problemas multiplicativos que se nos presentan utilizamos las tablas de multiplicar en donde el multiplicador es el que cambia y el multiplicando es el que se conserva, ( $1 \times 2$ ,  $2 \times 2$ ,  $3 \times 2$ ...)

El análisis de esta sesión nos dio elementos que nos ayudaron a diseñar la tercera sesión de este taller. También es importante señalar que la última actividad que se tenía programada para esta sesión (Ver anexo 8.8) por situación de tiempo, se les pidió a los maestros que la trabajaran con sus alumnos. En la próxima sesión se retomó.

### **5.3.3 Sesión tres**

Como se mencionó, en las sesiones pasadas, al término de cada sesión se analizaron las participaciones, dudas, reflexiones y soluciones que hicieron los maestros ante los problemas que se les presentaron. A partir de este análisis se diseñó la tercera sesión del taller. Los elementos que se consideraron para su diseño fueron: fortalecer el trabajo sobre la función de los factores de la multiplicación, uso del material concreto como apoyo en la resolución de problemas multiplicativos y, por último, analizar y reflexionar sobre la enseñanza de las tablas de multiplicar.

Los objetivos que se consideraron para esta sesión: **“Analizar la estructura de la multiplicación y la función de cada uno de sus elementos dentro de un problema multiplicativo” “Conocer las relaciones que existen en las tablas de multiplicar”**

A partir de lo mencionado, el diseño de la tercera sesión quedó de la siguiente manera:

**Primera actividad.** La intención fue que a partir de los problemas multiplicativos dados, los maestros recuperaran y reforzaran la información de la función de los factores de la multiplicación “veces-cantidad”. (Ver anexo 8.9)

**Segunda actividad.** Se les pidió a los maestros que los siguientes problemas multiplicativos los representaran mediante la representación horizontal de la multiplicación  $3 \times 4$  respetando la convención “veces-cantidad”. (Ver anexo 8.10)

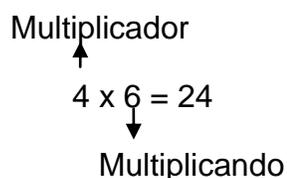
**Tercera actividad.** La intención fue, que a partir de las representaciones gráficas de la tabla del 2, los maestros recordaran la función que tienen los factores de la multiplicación en la enseñanza y aprendizaje de las tablas de multiplicar. (Ver anexos 8.4 y 8.5)

**Cuarta actividad.** La intención fue familiarizar a los maestros y ver la relación que tiene la convención “veces-cantidad” con las definiciones teóricas de la multiplicación y sus factores “multiplicador y multiplicando”.

- Multiplicación: Es una de las tres operaciones que existen en la aritmética, siendo las otras la adición y la exponenciación. Cada una de ellas tiene su inverso: la sustracción, la división y la radicalización.

En su uso más común, como operación, la multiplicación implica obtener cierto tanto (multiplicador) de una cantidad o tamaño (multiplicando).

- Multiplicando: “Es la cantidad o magnitud que es transformada por la multiplicación”
- Multiplicador: “Indica el tamaño de la transformación que sufre la magnitud o cantidad”



**Quinta actividad.** Después de ver la relación que hay en “veces-multiplicador” y “cantidad-multiplicando” se trabajó nuevamente con los problemas multiplicativos para que los maestros identificaran el multiplicador y multiplicando en el problema. (Ver anexo 8.10)

A continuación se transcribe lo sucedido en la sesión tres: Facilitador, J (Jessica), D (Deyanira), M (Maribel), H (Hilda), P (Petra), C (Carmen), V (Verónica), Pa (Patricia), MG (Ma. Guadalupe), L (Luisa), B (Beatriz), O (Olivia) y Ar (Araceli).

**Primera actividad.** La sesión inició con el análisis de 4 problemas; con el fin de recordar la función que tienen los factores de la multiplicación en un problema multiplicativo.

**Facilitador:** Los problemas multiplicativos que a continuación se presentan, en ellos, vamos a encontrar el número que nos dice las veces y el número que nos indica la cantidad.

1.- Martha quiere hacer 8 ramos de flores. Si en cada ramo pone una docena, ¿cuántas flores necesitará?

J: 8 son las veces y 12 es la cantidad

**Facilitador:** Bien, y en el siguiente problema

2.- Un edificio tiene 3 pisos. En cada piso viven 10 personas. ¿Cuántas personas viven en el edificio?

O: 3 son las veces y 10 es la cantidad

**Facilitador:** En el problema tres cómo queda su representación

3.- En mi clase hay 8 mesas, en cada mesa se sientan 5 niños. ¿Cuántos niños hay en mi clase?

D:  $8 \times 5$ , 8 son las veces y 5 es la cantidad

**Facilitador:** ¿Se puede representar la solución de este problema de la siguiente manera  $5 \times 8$ ?

J: No, porque el problema cambiaría, habría 5 mesas con 8 niños cada una y eso no dice el problema

**Facilitador:** Cómo se representa el siguiente problema

4.- La mamá de Juan va a comprar sellos y le pide al vendedor que le dé 5 sellos de 16 pesos. ¿Cuánto tendrá que pagar al vendedor la mamá de Juan?

O: Las veces serían 5 y la cantidad es 16

En esta primera actividad observé que los maestros tienen mayor claridad para identificar el número que nos dice las veces y el número que nos dice la cantidad. Y que cuando se les invierte el orden de los factores los maestros argumentan por qué no pueden representarse de esa manera ya que modifica el diseño del problema.

**Segunda actividad.** En esta actividad se les pidió a los maestros que los siguientes problemas multiplicativos (Ver anexo 8.10) los representaran con la multiplicación de manera horizontal  $3 \times 4$  respetando la convención “veces-cantidad”. En esta actividad nuevamente se consideró el trabajo con el material concreto.

**Facilitador:** Analicemos el siguiente problema

1.- En el salón de 4º. año, la maestra repartió 4 tiras de madera a cada uno de sus alumnos, para que formen un cuadrado. Si su grupo tiene 48 alumnos, ¿cuántas tiras de madera repartió en total?



Figura 5.3 Maestros participantes representando la actividad con material concreto  
V:  $4 \times 48$

J: Así no es la representación, la representación correcta es  $48 \times 4$

**Facilitador:** Entonces, ¿Cuál de las dos representaciones es la que nos representa el problema?

J: Es 48 veces 4, porque sino diríamos que hay 4 niños y a cada uno le tocaron 48 tiras de madera

M: Yo también estoy de acuerdo con la representación  $48 \times 4$  porque me imagino a los 48 alumnos y a cada uno de ellos les doy sus 4 varitas

**Facilitador:** Bien, el siguiente problema cómo quedó representado

2.- Queremos hacer 24 trajes para un grupo musical. Para cada traje necesitamos 5 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitamos para hacer los trajes?

D:  $24 \times 5$

**Facilitador:** ¿Cómo quedaría el problema si se invierten las cantidades?

J: Quedaría de la siguiente manera, 5 trajes con 24 metros de tela cada uno, es muchísima tela para cada traje

O: Es importante que los alumnos lean el problema; hasta para nosotros hay veces que se nos dificulta entender qué es lo que pide el problema

Ar: Es importante que los alumnos razonen para entender el problema

V: La mayoría de los alumnos toman el primer número y después colocan el segundo número y así lo resuelve

Al escuchar los comentarios de la maestra, recordé la interrogante que me hice en la primera sesión: [...]“en varias ocasiones observé que algunos maestros toman el primer número que encuentran en el problema como el multiplicador y el segundo como multiplicando...”]. A partir de esta información creo que hay un estrecho vínculo entre la representación que hacen los maestro para obtener el resultado y las estrategias que usan los alumnos para obtener su resultado.

Otro elemento importante que mencionaron los maestros para la resolución de problemas multiplicativos es que hay que hacerlos gráficamente. Es decir, que los alumnos vean el vínculo que hay entre las actividades que realizan cotidianamente –compra de objetos, pago de servicios básicos, problemas ambientales, de salud, política, vivienda...-, con las matemáticas que se trabajan en el salón de clases y que en muchas ocasiones toman rumbos diferentes.

El uso del material concreto, nuevamente, propició la reflexión a partir de la representación del problema ya que, ayudó a contextualizar y representar los procedimientos “multiplicador-multiplicando” que propició el problema.

**Facilitador:** Bien, continuemos con el análisis del siguiente problema

3.- En una caja tenemos 18 botellas de agua. Cada botella contiene 2 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay en la caja?

D:  $18 \times 2$  18 botellas con 2 litros de agua

**Facilitador:** Y el siguiente problema

4.- El Sr. Ramírez la mayor parte de su vida arregla las llantas de las motocicletas. Si un grupo de 10 amigos llevaron su motocicleta para que le revisaran las 2 llantas de cada motocicleta, ¿cuántas llantas revisara el Sr. Ramírez en total?

O: Este problema está curioso

M: Esta capciosa, por el rollo que avienta

**Facilitador:** ¿Pero, si los alumnos ven un problema con mucho texto tendrán problemas para identificar lo que les están pidiendo?

V: sí

**Facilitador:** Pero qué pasa con los problemas de Enlace, también tienen mucho texto

V: Entonces, hay que dividir el problema en partes para entenderlo. Hay que dedicarle tiempo

**Facilitador:** ...bien, cómo quedó la representación del problema

O:  $10 \times 2$

**Facilitador:** Cómo representaríamos el último problema

5.- En la escuela primaria “Niños Héroe” se están remodelando sus 8 salones para que haya una mejor ventilación en cada uno de ellos. En cada uno de los salones se colocarán 5 ventanas, ¿cuántas ventanas necesita comprar la escuela en total?

J: Este problema se parece al que acabamos de analizar, pero por lo que ya comentamos la representación es  $8 \times 5$

Al buscar la representación –veces-cantidad- en los dos últimos problemas multiplicativos, los maestros tuvieron las siguientes dificultades y reflexiones:

- En un primer momento, al leer el problema no fue fácil identificar lo que les pedía

- Vieron en el problema mucha información que en vez de ayudar, dificultaba su solución
- El trabajo con la estructura de los problemas ayudaría a los alumnos a desarrollar otras habilidades matemáticas
- Cuando no se entiende el problema, se hace otra operación o no se hace nada

**Tercera actividad.** Para esta actividad se consideró nuevamente mostrarles a los maestros la tabla del 2. La finalidad fue que los maestros recordaran la función que tienen los factores de la multiplicación –multiplicador y multiplicando- en la enseñanza y aprendizaje de las tablas de multiplicar. (Ver anexo 8.6 y 8.7)

**Facilitador:** ¿Qué pasa con las dos tablas de multiplicar?

D: En la primera representación el multiplicador es el que cambia y el multiplicando se conserva; en la segunda representación el multiplicador se conserva y la cantidad se cambia. Esta representación no tiene sentido con el crecimiento de los objetos

**Facilitador:** ¿Será importante conocer la función de los factores de la multiplicación?

J: Sí, porque nos ayudaría a entender los procedimientos que hacen los alumnos y de esa manera poderlos ayudar

**Cuarta actividad.** La intención fue familiarizar a los maestros y ver la relación que tiene la convención “veces-cantidad” con las definiciones teóricas de la multiplicación y sus factores “multiplicador y multiplicando”.

- Multiplicación: Es una de las tres operaciones que existen en la aritmética, siendo las otras la adición y la exponenciación. Cada una de ellas tiene su inverso: la sustracción, la división y la radicalización.

En su uso más común, como operación, la multiplicación implica obtener cierto tanto (multiplicador) de una cantidad o tamaño (multiplicando).

- Multiplicando: “Es la cantidad o magnitud que es transformada por la multiplicación”
- Multiplicador: “Indica el tamaño de la transformación que sufre la magnitud o cantidad”

$$\begin{array}{c}
 \text{Multiplicador} \\
 \uparrow \\
 4 \times 6 = 24 \\
 \downarrow \\
 \text{Multiplicando}
 \end{array}$$

**Facilitador:** En las definiciones que acabamos de leer, ¿cómo se relacionan con las actividades que hasta el momento hemos realizado en el taller?

V: Pues, sí es importante reflexionar lo que estamos enseñando

J: Antes del taller no importaba la función del multiplicando y multiplicador, ya que el concepto “el orden de los factores no altera el producto” nos permitía obtener el mismo producto

M: El multiplicador lo colocamos primero para mencionar las veces y luego colocamos el signo (X) y después el multiplicando que es la cantidad

**Quinta actividad.** Después de ver la relación que hay entre “veces-multiplicador” y “cantidad-multiplicando” se trabajó nuevamente con los problemas multiplicativos para que los maestros identificaran el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos. (Ver anexo 8.10)

**Facilitador:** En los siguientes problemas multiplicativos vamos a identificar el multiplicador y multiplicando

1.- En el salón de 4º. año, la maestra repartió 4 tiras de madera a cada uno de sus alumnos, para que formen un cuadrado. Si su grupo tiene 48 alumnos, ¿cuántas tiras de madera repartió en total?

**Facilitador:** ¿Cuál es el multiplicador y cuál es el multiplicando?

Y: El 48 es el multiplicador (veces) y el 4 es el multiplicando (cantidad)

MG: Para mí 48 es el multiplicando y 4 es el multiplicador

**Facilitador:** ¿Por qué?

MG: Porque el multiplicador me dice las veces y el multiplicando la cantidad

**Facilitador:** Pero en este problema, ¿qué número nos dice las veces y cuál nos dice la cantidad?

MG: 48 son las veces y 4 es la cantidad, ¡ah!, me confundí

Al presentarse esta situación, consideré pertinente hacer nuevamente una comparación entre la tabla del 2 que se ha venido enseñando con la propuesta del taller –multiplicador y multiplicando-. Con el fin de enriquecer la función que tienen los factores de la multiplicación en el problema.

**Facilitador:** Observemos las tablas de multiplicar

(1)	(2)
$2 \times 1 = 2$	$1 \times 2 = 2$
$2 \times 2 = 4$	$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$	$3 \times 2 = 6$
$2 \times 4 = 8$	$4 \times 2 = 8$

**Facilitador:** A partir del multiplicador y multiplicando, ¿la primera representación qué significado tiene?

J: Si leemos como está representado, nos dice 2 veces 1 que es la cantidad, si recordemos lo que le pasa a los conejos; son dos conejos con una oreja. Si yo lo represento de la otra manera, 1 vez 2 que es la cantidad, nos dice que hay un conejo con 2 orejas. Esta última representación nos permite unir conjuntos.

**Facilitador:** ¿Qué se nos viene a la mente cuando vemos el signo “x” (por)?

V: La multiplicación o una suma abreviada

**Facilitador:** Tendrá algún significado el signo “x” (por)

O: Con lo que he venido descubriendo, tal vez sí

**Facilitador:** Bueno, el signo “x” (por) en una de sus significados se le conoce como “multiplicado por”. Por ejemplo, si les digo representen dos por uno, cómo lo representarían

V:  $2 \times 1$

**Facilitador:** Pero qué nos dice esta representación

V:  $2 \times 1$ , 2 por 1

**Facilitador:** Qué pasa si el signo “x” (por) lo expresamos como “multiplicado por”. ¿Cómo quedaría la representación dos por uno?

D: 2 multiplicado por 1

**Facilitador:** Podemos identificar lo que nos representa el signo “x” (por)

V: Sí, pero con respecto a las tablas de multiplicar es más fácil mantener las veces que la cantidad

P: Se escuchan bonito las tablas como nos las aprendimos,  $2 \times 1=2$ , (dos por una)  $2 \times 2=4$ ...

J: Para mí es importante el razonamiento porque si ellos se dan cuenta de la función del multiplicador y multiplicando podrán resolver el problema. Al no tener este conocimiento todo lo que hagan lo verán igual.

V: Les comparto una experiencia de trabajo de una maestra. Ella dice: “cuando hay un conflicto hay un conocimiento-”. “Cuando más se pregunta más se conoce”. Si nosotros seguimos esta postura haremos a los niños críticos y reflexivos

**Facilitador:** Las tablas que nosotros hemos aprendido  $2 \times 1=2$ ;  $2 \times 2 =4$ ;  $2 \times 3=6$ ;..., nosotros podemos entender que 2 pesos cuesta una paleta, pero en el

libro de texto para el alumno de segundo año nos dicen otra cosa. Al revisar el libro del alumno de matemáticas de segundo año 2010 se identificó la propuesta pedagógica que se emplea para introducir la enseñanza de la multiplicación 4 veces 8 duraznos es = 32 duraznos y no lo representan  $8+8+8+8$ . La convención que nos muestra es que primero son las veces y luego es la cantidad. En otra lección del mismo libro nos invierten la información. (Ver anexo 8.11 y 8.12)

MG: Se van a confundir con las tablas.

J: Aquí ya lo invirtieron.

O: ¿Y cómo quieren que los niños no se confundan?

**Facilitador:** Por tal motivo, es importante conocer qué función tienen los números en los problemas multiplicativos para que cuando se nos presenten estas confusiones tengamos los elementos para poder explicarlas. Pero, ante esta doble explicación ¿qué pasa con los alumnos?

M: Sí, es cierto. Los niños preguntan por qué un maestro les dice una cosa y nosotros le decimos otra, llega un momento en que los confundimos.

Es fundamental el conocimiento del maestro para el diseño y desarrollo de las actividades para la enseñanza de la multiplicación porque la información que se tenga de la multiplicación y sus factores, en ese momento, es todo y verdadero para el alumno.

Para finalizar la sesión, se analizaron los procedimientos que hicieron los maestros y sus alumnos de la actividad seis propuesta en la sesión dos. (Ver anexo 8.8)

**Facilitador:** Cómo resolvieron el problema sus alumnos

L: Mis alumnos no tuvieron dificultad para resolverlo, pero cuando se les preguntó: “¿Cuál tabla de multiplicar representa la resolución del problema?”, la mayoría de mis alumnos no supo que decir; solamente una de mis niñas me dijo que las

tablas de multiplicar que están del lado derecho  $3 \times 1=3$ ;  $3 \times 2=6$ ;.... Pero no sabía el porqué.

J: Una de mis niñas me comentó que las dos tablas sirven para resolver esta actividad

V: La mayoría de los alumnos eligió la tabla de multiplicar que está a la derecha  $3 \times 1=3$ ;  $3 \times 2=6$ ;....

M: Mis niños de primer año lo resolvieron como una suma, 3 peso un tiro, 6 pesos dos tiros..., no les pregunté las tablas de multiplicar porque no la saben

Cuando los maestros les preguntaron a sus alumnos sobre la tabla de multiplicar que utilizaron para obtener los resultados; la mayoría de los alumnos dijo  $3 \times 1=3$ ;  $3 \times 2=6$ ;..., solamente una niña mencionó que las dos servirían para obtener el resultado. Se puede decir, que la tabla de multiplicar que se encuentra a la izquierda del problema  $1 \times 3=3$ ;  $2 \times 3=6$ ;..., no tiene sentido para ellos; en cambio, la tabla de multiplicar de la derecha  $3 \times 1=3$ ;  $3 \times 2=6$ ;..., es todo porque maestros, padres de familia y las canciones de las tablas de multiplicar influyen en su aprendizaje.

Mientras más se conoce la función que tiene el multiplicador y multiplicando en la resolución de problemas multiplicativos la aceptación que tienen los maestros de este taller pareciera que en algunos momentos reconocen lo importante que es identificarlos. Pero, por otro lado, hay incertidumbre y resistencia para aceptar la propuesta pedagógica “veces-cantidad”.

#### **5.3.4 Sesión cuatro**

Para esta última sesión del taller, se realizó una investigación de los libros de texto gratuito para el alumno de Educación Primaria –1972, 1988, 1993 y 2010-; con la finalidad de dar a conocer las propuestas pedagógicas que se han trabajado en la enseñanza de la multiplicación. El motivo por el cual se hizo esta investigación es porque al trabajar con los maestros la función de los factores de la multiplicación –multiplicador y multiplicando- en los problemas multiplicativos, y

estos, a su vez, llevarlos a la reflexión y análisis con la enseñanza de las tablas de multiplicar, me pareció ver en los maestros: desconcierto y preocupación al identificar cuál fue la tabla de multiplicar que se utilizó en la resolución de los problemas multiplicativos.

En esta sesión, se continuó con el trabajo de la función de los factores de la multiplicación, así como el trabajo con las tablas de multiplicar en la tabla pitagórica. Este taller terminó con el análisis de los problemas multiplicativos para identificar los dos tipos de divisiones que hay: División de reparto (por el multiplicador) y División de asignación (por el multiplicando).

Los objetivos que se consideraron para esta sesión: **“Analizar la estructura de la multiplicación y la función de cada uno de sus elementos dentro de un problema multiplicativo”, “Conocer las relaciones que existen en las tablas de multiplicar” y “Reflexionar sobre el uso de la multiplicación para estimar cantidades y resolver problemas de división”.**

**Primera actividad.** La intención fue que los maestros vieran la importancia que tiene la función del multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos ya que, en el libro del alumno de segundo año de educación primaria, hay definiciones contradictorias sobre la convención “veces-cantidad”. Al encontrar estas contradicciones, es importante que maestros y alumnos identifiquen en los problemas multiplicativos el multiplicador y multiplicando. (Ver anexo 8.11 y 8.12)

**Segunda actividad.** Para esta actividad se realizó una investigación en los libros de texto gratuitos para el alumno de Educación Primaria –1972, 1988, 1993 y 2010-; con la finalidad de dar a conocer las propuestas pedagógicas que se han trabajado en la enseñanza de la multiplicación (Ver anexos 8.13, 8.14, 8.15 y 8.16)

**Tercera actividad.** La finalidad de esta actividad fue que los maestros identificaran las relaciones que tienen las cantidades “multiplicador-multiplicando” en los problemas multiplicativos (Ver anexo 8.17)

**Cuarta actividad.** La finalidad de esta actividad consistió en identificar las dificultades que tienen los alumnos para aprenderse las tablas de multiplicar, así como encontrar las relaciones de las cantidades que hay en las tablas de multiplicar (Ver anexo 8.18)

**Quinta actividad.** La intención fue que los maestros, a través de la función de los factores de la multiplicación “multiplicador-multiplicando”, identifiquen los dos tipos de división que hay de “reparto y asignación” (Ver anexo 8.19)

A continuación se transcribe lo sucedido en la sesión tres: Facilitador, J (Jessica), D (Deyanira), M (Maribel), H (Hilda), G (Guadalupe), L (Luisa), O (Olivia) y Ar (Araceli).

**Primera actividad.** La intención fue que los maestros vieran la importancia que tiene la función del multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos, ya que, en el libro del alumno de segundo año de Educación Primaria, hay definiciones contradictorias sobre la convención “veces-cantidad”. Al encontrar estas contradicciones, es importante que maestros y alumnos identifiquen en los problemas multiplicativos el multiplicador y multiplicando.

**Facilitador:** ¿Cuál es la función del multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos?

J: El multiplicador nos dice las veces y el multiplicando la cantidad

**Facilitador:** Recordemos qué nos dice el libro de matemáticas de segundo año de primaria 2010. En la lección 25 nos dice  $4 \times 8 = 32$ ,  $8+8+8+8$  (Pág. 49). En la lección 36 encontramos  $3+3+3+3+3+3+3 = 3 \times 7 = 21$  (Pág.114). Si nosotros respetamos la convención veces-cantidad, al encontrar esta doble representación qué dificultades provocaremos en los niños

L: Provocaremos confusión

**Facilitador:** ¿Por qué?

J: Porque la representación  $3 \times 7$ ,  $3+3+3\dots$ , está mal, debería ser  $7 \times 3=21$ , fueron invertidos los números 7 y 3

**Facilitador:** Pero, recordemos qué significa el signo “x” (por)

O: Significa “multiplicado por”

**Facilitador:** Si nosotros leemos la representación 3 multiplicado por 7, es correcta su representación  $3+3+3+3+3+3$

J: ¡Guau!, el trabajo del maestro es importante para decirles a los alumnos que el signo “x” (por) tiene un significado, es decir,  $3 \times 7$  si lo leemos, nos dice, 3 multiplicado por 7, nos está diciendo que sumemos 7 veces 3

Quizás para los maestros al ver el signo “x” (por) los remite directamente al trabajo de la multiplicación. Al no tener un referente del significado del signo los maestros pasan desapercibido la relevancia e importancia que tiene el signo de la multiplicación en los problemas multiplicativos. Pero, nuevamente encontramos la confusión que por un lado nos dicen que el multiplicador va primero y a continuación lo encontramos después del signo “x”. Ante esta confusión es importante que maestros y alumnos puedan diferenciar la función del multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos.

**Segunda actividad.** Anteriormente se mencionó el desconcierto que hubo en los maestros cuando se trabajó la convención –veces-cantidad-, con las tablas de multiplicar. Para esta actividad se realizó un análisis de las propuestas pedagógicas de los diferentes libros de texto para el alumno de educación primaria editados por SEP -1972, 1988, 1993 y 2010-. Con la finalidad de ver y entender la constante de trabajo que se ha propuesto para la enseñanza de la multiplicación (Ver anexos 8.13, 8.14, 8.15 y 8.16)

O: Es el de la ranita

**Facilitador:** ¿Qué estructura de trabajo tienen las lecciones de trabajo que acabamos de revisar?

O: Primero está el multiplicador y después el multiplicando

J: Todos los libros tienen la misma estructura, veces-cantidad

**Facilitador:** Por ejemplo, para calcular el perímetro de un rectángulo encontramos una de sus fórmulas que dice  $P = 2a + 2b$

J: Si tiene sentido lo que hemos venido trabajando: 2 veces a + 2 veces b. Si lo leemos de diferente forma diría: **a** veces 2 + **b** veces 2, esto no tiene sentido

En el desarrollo de la actividad, al ir revisando cada una de las imágenes de los libros de texto para el alumno de los diferentes años (1972, 1988, 1993 y 2010), los maestros identificaron que la primera cantidad le corresponde al multiplicador y la segunda al multiplicando. Y que en la actualidad se sigue conservando la propuesta –veces-cantidad- en los libros de la SEP 2011.

**Tercera actividad.** La finalidad de esta actividad fue que los maestros identificaran las relaciones que tienen las cantidades “multiplicador-multiplicando” en los problemas multiplicativos. (Ver anexo 8.17)

**Facilitador:** ¿Cómo resolvieron esta actividad?

J: Los paquetes son del 1-6 y los precios son 4, 8 y 10 pesos. La forma que lo entendí fue de la siguiente manera: un paquete de dos piezas vale 4 pesos, 2 paquetes 8 pesos y así sucesivamente hasta llegar a 6 paquetes que serían 24 pesos. Se haría lo mismo con los precios de las demás donas

**Facilitador:** ¿Qué podemos observar con relación a los resultados?

D: Van en pares

M: Van de 4 en 4; de 8 en 8

L: de 10 en 10

O: Son series numéricas

**Facilitador:** ¿Qué observamos en la columna del 4 y la del 8?

H: Es lo doble

**Facilitador:** ¿Qué pasa con la segunda actividad? (Ver la segunda actividad del anexo 8.17)

M: Es la misma situación que la anterior, lo que cambia es que buscamos la cantidad de donas y no el precio

O: Son series numéricas

**Facilitador:** ¿En qué momento se enseñan las tablas de multiplicar?

J: Yo no tengo mucha experiencia, pero cuando encontramos en el libro de matemáticas una actividad que nos pide utilizar las tablas de multiplicar y veo que no se las saben mis alumnos; les hago hincapié todos los días que se las aprendan. Al término de la primera sesión del taller, consideré importante colocar en mi salón de clases las tablas de multiplicar tamaño carta, para que los alumnos se paren a ver el resultado. Creo que los niños se vuelven mañosos, por así decir.

Una de las hipótesis que se tuvo al inicio del taller fue: “en qué momento se considera importante enseñar las tablas de multiplicar, ya que no hay un tema específico que indique cuándo trabajarlas”. Al parecer, los maestros les piden a sus alumnos que se aprendan las tablas de multiplicar cuando encuentran una actividad en el libro de matemáticas que requieran de su uso, en cambio, otros maestros les piden a sus alumnos que se las aprendan al inicio del ciclo escolar. Pero, al parecer, las tablas de multiplicar solamente se utilizan para obtener el resultado, no es vista como la multiplicación.

**Cuarta actividad.** La finalidad de esta actividad consistió en identificar las dificultades que tienen los alumnos para aprenderse las tablas de multiplicar, así como encontrar las relaciones de las cantidades que hay en las tablas de multiplicar. (Ver anexo 8.18)

**Facilitador:** Escriban las tablas de multiplicar que más se les dificulta a los alumnos aprendérselas

O: La del 8

L: la del 6

D: Yo creo que la del 6, 7, 8 y 9

**Facilitador:** Si a los alumnos se les diera un problema que se resuelve con la tabla del 6 y si no se la saben, ¿podrían resolverlo?

O: Sí, que vayan a la tabla de multiplicar y que busquen el resultado. Haga de cuenta que es un plano cartesiano, de esa manera, los alumnos puedan encontrar el resultado

**Facilitador:** Hagamos de cuenta que la tabla pitagórica no está llena, cómo se obtendría el resultado

D: Pues, como lo hemos venido trabajando en el taller, 6 veces 1 es 6;...

**Facilitador:** ¿Habría otra forma de llegar al resultado?

M: Sí, cuando los niños se saben las tablas de multiplicar del 1 al 6, invierten los números, es decir,  $6 \times 1$  ó  $1 \times 6$ , de esta manera podrán obtener el resultado

**Facilitador:** Otra forma

O: Creo que no

**Facilitador:** Veamos las relaciones de los números que hay en la tabla pitagórica. Si los niños se saben la tabla del 2 y la del 4 podríamos obtener el resultado de la tabla del 6, es decir, si sumamos los primeros resultados de la tabla del 2 y la del 4 obtenemos el resultado del  $1 \times 6$

L: Sí es cierto,  $2 + 4 = 6$ ,  $4 + 8 = 12$ ,...

**Facilitador:** Para que el alumno pueda ver estas relaciones, es importante que no se aprenda las tablas de multiplicar por separado, ésta es la del 5 y ésta es la del 6.... Por ejemplo, vamos a pensar que la tabla de multiplicar del 3 no se la saben los niños, pero sí se saben la tabla del 1 y la del 2, al sumar los primeros resultados de las primeras tablas obtenemos el resultado de  $1 \times 3$

O: Mira esto, no me lo sabía

**Facilitador:** Dígame una tabla de multiplicar

H: La del 7

**Facilitador:** Si nos sabemos las tablas de multiplicar del 1 al 5 cómo se puede obtener el resultado de la tabla del 7

J: Con la tabla del 2 y la del 5  $(1 \times 2) + (1 \times 5) = 2 + 5 = 7$

**Facilitador:** Bien, ¿Cómo nos podría ayudar la tabla del 10 para obtener el resultado de la tabla del 7?, nadie dice nada, qué pasa si a 10 le restamos 3 -obtenemos 7, 20 menos 6, -son 14.... Y para obtener la tabla del 4

D: Hay que duplicar la tabla del 2

**Facilitador:** Este trabajo sería una herramienta para el cálculo mental

O: Sí, sería muy importante trabajarlas

**Facilitador:** Entonces, cómo se podrían aprender los alumnos la tabla de multiplicar del 8 que es una de las más difíciles

J: Duplicar la tabla del 4 o la tabla del 6 y la del 2

O: Oh, qué bien

**Facilitador:** También es importante que los alumnos hagan patrones. Por ejemplo; cómo se puede construir el número 9, por ejemplo,  $9+0=9$

M:  $10-1$ ;  $8+1$

D:  $3 \times 3$ ;  $7+2$ ;  $18/2$

J: Raíz cuadrada de 81

El trabajo de los maestros con la tabla pitagórica parece que permitió entender las relaciones que existen en los números. Este trabajo, también permitió la construcción de patrones que difícilmente se trabajan para obtener un número. Cuando los números se ven como cantidad toman otro significado, se puede cuantificar la magnitud, se crea una imagen de lo que se está hablando.

**Quinta actividad.** La intención fue que los maestros a través de la función de los factores de la multiplicación “multiplicador-multiplicando” identifiquen los dos tipos de división que hay de “reparto y asignación” (Ver anexo 8.19)

**Facilitador:** Para contestar los ejercicios solamente deben utilizar lo que se ha trabajado en el taller ¿Cómo quedó la representación de solución del problema uno?

Y: Yo lo resolví con una multiplicación  $4 \times 2 = 8$ . Esto quiere decir que a cada uno de los amigos le toca dos chocolates

**Facilitador:** Pero de dónde obtuvo el 2. ¿Por qué quedó  $4 \times 2$  y no  $2 \times 4$ ? Por ejemplo el problema uno dice: Tengo 8 chocolates y los quiero repartir entre mis 4 amigos. ¿Cuántos chocolates le toca a cada uno?

O: Yo coincido con lo que comenta la maestra, porque lo que se ha trabajado en este taller consistió en identificar qué número nos dice las veces y cuál nos dice la cantidad. Las veces es el 4 y la incógnita es la cantidad

**Facilitador:** Pero el 2 de dónde se obtiene

O: De repartir los chocolates

**Facilitador:** Bien, el segundo ejercicio cómo quedó representado

2.- Tenía 8 chocolates, si los repartí entre mis amigos y a cada uno de ellos les tocaron 2 chocolates. ¿Cuántos amigos tengo?

J: En el segundo problema tenemos la cantidad y nos falta las veces

**Facilitador:** Lo que mencionó la maestra es correcto, -sí, veamos por qué. En el primer problema encontramos:

1.- Tengo 8 chocolates y los quiero repartir entre mis 4 amigos. ¿Cuántos chocolates le toca a cada uno?

$$4 \times \boxed{2} = 8$$

**Facilitador:** En este primer ejercicio tenemos las veces pero desconocemos la cantidad. A este tipo de problema se le llama de “reparto”. Porque tenemos las personas –que son las veces-, y cada una de ellas les vamos a repartir la cantidad de chocolates que tenemos. En el ejercicio dos:

2.- Tenía 8 chocolates, si los repartí entre mis amigos y a cada uno de ellos les tocaron 2 chocolates. ¿Cuántos amigos tengo?

$$\boxed{4} \times 2 = 8$$

**Facilitador:** En este problema, como lo mencionó la maestra Jessica, tenemos la cantidad y nos hacen falta las veces. A este diseño de problema se le conoce como “asignación, tasa o agrupamiento”. Como podemos ver existen dos tipos de división que son: de reparto y asignación.

L: ¡Ya entendí! Es interesante. Si falta las veces es de asignación y si falta la cantidad es de reparto

O: No lo sabía, en mi formación nunca me mencionaron que existían dos diferentes estructuras de problemas de hacer divisiones

**Facilitador:** En el ejercicio tres qué división es, de reparto o de asignación

3.- Por comprar 5 cajas con lápices pagué 80 pesos. ¿Cuánto costó cada caja de lápices?

$$5 \times \boxed{16} = 80$$

D: Es de reparto, tenemos las veces y nos hace falta la cantidad

**Facilitador:** Y el ejercicio cuatro

4.- Cada caja de lápices cuesta 16 pesos, si pagué 80 pesos por varias cajas. ¿Cuántas cajas de lápices compré?

$$\boxed{5} \times 16 = 80$$

O: Es una división de asignación, tenemos la cantidad y nos hace falta las veces

**Facilitador:** Cuando se identifican las cantidades, el niño puede estimar. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}1 \times 16 &= 16 \\2 \times 16 &= 32 \\3 \times 16 &= 48 \\4 \times 16 &= 64 \\5 \times 16 &= 80\end{aligned}$$

J: Sí es cierto, podemos estimar cantidades para obtener el resultado

**Facilitador:** En el siguiente ejercicio cómo quedó su representación

5.- De un palo de madera de 48 cm, ¿cuántos pedazos de 6 cm se pueden cortar?

$$\boxed{8} \times 6 = 48$$

D: Es un problema de asignación, tenemos la cantidad que es la medida del tamaño del pedazo de madera 6 cm y nos faltan las veces que se pueden obtener del total de la madera

**Facilitador:** Y el último ejercicio

6.- Se cortaron 8 pedazos de madera de un palo de 48 cm de largo. ¿Cuánto midió cada pedazo de madera?

$$8 \times \boxed{6} = 48$$

L: Este problema es de división de reparto porque tenemos el total de pedazos que se obtuvieron de toda la madera, que son 8, lo que nos hace falta saber cuánto mide cada pedazo de madera.

En los primeros problemas de la actividad, los maestros mostraron inseguridad para resolverlos, ya que no se les permitió utilizar el algoritmo de la división. Sobre el algoritmo de la división, es importante mencionar que los problemas multiplicativos se resuelven mediante una multiplicación o una división. Pero, cada algoritmo tiene su propia estructura que se debe trabajar en su tiempo y espacio. Es decir, la división se compone por un dividendo, divisor, cociente y residuo; además, en su procedimiento se utiliza la multiplicación y la sustracción. También, es importante recordar que la esencia del taller consistió en identificar la función del multiplicador y multiplicando en la resolución de problemas multiplicativos. El papel que juegan los factores es fundamental para lograr una buena comprensión de los dos tipos de división que hay: división por multiplicador (reparto) y división por multiplicando (asignación) también conocidos como tasativos. Esto último no hubiera sido posible sin que antes hubieran comprendido la diferencia entre multiplicador y multiplicando.

#### **5.4 Comentario final del Capítulo**

La participación de los maestros, sus experiencias y preocupaciones que tienen en la enseñanza de la multiplicación, fueron los que guiaron el diseño de cada una de las sesiones del taller. Espero que las herramientas que se hayan apropiado los maestros en el desarrollo del taller sean de gran utilidad para la resolución de los problemas multiplicativos con sus alumnos.

## VI. CONCLUSIONES

El trabajo realizado para la elaboración de la presente tesis permitió reconocer que el contenido de la multiplicación cubre, aproximadamente, una tercera parte de todas las lecciones de 1° a 6° año la implican. Como se explicó en el Capítulo 1, algunas lecciones la abarcan de manera directa y otras la utilizan para tratar diversos temas. Además, fue posible notar que en los libros sólo se utiliza una lección, en segundo año de primaria, para introducir el contenido de la multiplicación. Le toca entonces al maestro, a través de la enseñanza, lograr que los alumnos conozcan la función y uso de las cantidades en los problemas multiplicativos. Esto es, lograr que entiendan que en un problema de multiplicación típicamente hay un número que dice las veces (multiplicador) que se va iterar una cantidad y, por el otro, la cantidad (multiplicando) que se va a iterar.

También se identificaron cuatro personalidades didácticas que tiene la multiplicación: suma iterada, arreglos rectangulares, combinaciones y método para calcular. Cada una de las personalidades de la multiplicación requiere de análisis y reflexión para entender las implicaciones que emergen en cada una de ellas. Por tal motivo, el contenido de la multiplicación va más allá de una simple operación, por la complejidad conceptual que conlleva su enseñanza-aprendizaje en el salón de clase.

La frase “el orden de los factores no altera el producto” se deriva de la propiedad conmutativa de la multiplicación. Esta frase, probablemente, puede ser desafortunada si se utiliza indistintamente en todas las actividades que involucran a la multiplicación. Pero lo que realmente implica esta propiedad es que en la multiplicación la inversión en los valores de los factores mantiene el producto. Por ejemplo, en el plano numérico se podría pensar que su fin es invertir los valores de los factores pero en el desarrollo de su proceso denota un significado, es decir, Citlalli tiene 5 bolsas de dulces. Cada bolsa tiene 3 dulces ¿Cuántos dulces tiene en total? El resultado que da cuenta del problema dado –según la propuesta veces-cantidad-, es  $5 \times 3 = 15$  si invertimos el valor de los factores  $3 \times 5 = 15$  el

significado que produce es que la cantidad de dulces de cada bolsa (5 bolsas con 3 dulces) son suficientes para representar la cantidad de bolsas con la misma cantidad de dulces (3 bolsas con 5 dulces).

En el plano conceptual, los números representan cantidades, es decir, Emanuel compró 5 bolsas de estampas. Si cada bolsa cuesta 9 pesos ¿Cuánto pagó por todas las bolsas que compró? La representación de su solución –según la propuesta veces-cantidad-, es  $5 \times 9$ , que son cinco iteraciones de nueve,  $9 + 9 + 9 + 9 + 9$  dándonos un total de pesos. Si se invierten las cantidades  $9 \times 5$  la iteración de bolsas de estampas no nos puede dar pesos. No es equivalente, conceptualmente, partir de nueve y multiplicar por cinco, y partir de cinco y multiplicar por nueve, a pesar de la equivalencia de los dos procedimientos a nivel numérico. Por otra parte, si se invierten los valores de los factores se estaría modificando el problema inicial. A partir de lo que se mencionó, la frase “el orden de los factores no altera el producto” por un lado, tendría un significado diferente si se entendiera como: “al invertir el valor de los factores mantienen el producto”. Por otro, tanto en el plano numérico como en el conceptual, en el trabajo de la multiplicación, los números representan cantidades que ayudan a entender la función del multiplicador y multiplicando en la resolución de los problemas multiplicativos.

El trabajo con las propiedades de la multiplicación –conmutativa, asociativa y distributiva-, me ayudó a entender la multiplicación desde un punto de vista más cuantitativo. Por ejemplo, en la tabla pitagórica identifiqué las relaciones que hay en las tablas de multiplicar y que en la mayoría de las veces no se pueden ver estas relaciones porque las tablas de multiplicar se memorizan cada una por separado. Por ejemplo: para obtener el resultado de la tabla de multiplicar de  $6 \times 6$ , -basado en la convención del libro de texto para el alumno de Educación Primaria veces-cantidad-, se puede obtener el resultado por diferentes vías: si se saben la tabla del 1 y la del 5, entonces, los resultados de  $6 \times 1$  y  $6 \times 5$ , al sumarlos  $6 + 30$  nos da 36 que es el resultado de multiplicar  $6 \times 6 = 36$ ; o si se saben la tabla del 2 y 4,  $6 \times 2$  y  $6 \times 4$  al sumarlos  $12 + 24$  nos da 36 o dos veces la tabla del 3,  $6 \times 3$  y  $6 \times 3$

nos da  $18 + 18 = 36$ . Es decir que, la memorización no es la única forma de que los alumnos se aprendan las tablas de multiplicar.

En la intervención que le da fundamento a este trabajo de tesis se identificó por qué sí es importante conocer la función del multiplicador-multiplicando a partir de la suma iterada, ya que como lo mencionan Fischbein et al. (1985) este modelo, implícitamente afecta el significado y uso de la multiplicación. Los autores explican cómo desde la interpretación de la suma iterada,  $4 \times 3$  significa ya sea “ $3 + 3 + 3 + 3$ ” ó “ $4 + 4 + 4$ ”. Para ellos, en esta interpretación no ven a la multiplicación como conmutativa, porque un factor (el número de series equivalente) se toma como el *operador (multiplicador)*; el otro (la magnitud de cada serie), como el *operando (multiplicando)*. A partir de esta explicación y como se mencionó en los Capítulos 1 y 3 ante la confusión de quién es y en dónde se coloca el multiplicador y multiplicando, es importante que maestros y alumnos conozcan cuantitativamente la función que tienen los factores en la resolución de los problemas multiplicativos para que cuando empleen el método para calcular los números les representen cantidades.

El análisis de los resultados del taller “El orden de los factores no altera el producto, pero sí el problema” sugiere que la mayoría de los maestros que participaron, en un primer momento, no reconocían un porqué identificar la función que tiene el multiplicador y multiplicando en la resolución de problemas multiplicativos, ya que la expresión “el orden de los factores no altera el producto” estaba encarnado como un todo y, al parecer, lo único que importaba era el resultado. Las actividades que se propusieron para el trabajo con los maestros permitieron entender conceptualmente la función del multiplicador y multiplicando y que al invertir el valor de los factores mantiene el producto, pero modifica el problema inicial. El trabajo con el multiplicador y multiplicando, permitió entender la lógica cuantitativa que tienen las tablas de multiplicar que cuando se agrega 1 en el multiplicador se agrega un conjunto de la misma cantidad en el multiplicando. También, el papel que tienen el multiplicador y multiplicando es fundamental para lograr una buena comprensión de los dos tipos de división que hay: división por

multiplicador (reparto) y división por multiplicando (asignación) también conocidos como tasativos. Esto último no hubiera sido posible sin que antes hubieran comprendido la diferencia entre multiplicador y multiplicando.

En términos generales, el desarrollo particular de los factores de la multiplicación (multiplicador y multiplicando) nos sirve como herramienta para otros contenidos matemáticos. Por ejemplo, nos ayuda a:

- Diferenciar los problemas multiplicativos de los aditivos

La estructura de los problemas aditivos, las cantidades que los conforman, son de la misma naturaleza. Es decir: las dos cantidades son sumadas una con otra y dan como resultado una cantidad de la misma naturaleza. Por ejemplo:

Emanuel tiene 15 pesos. Si de domingo su mamá le dio 10 pesos, ¿cuánto dinero tiene?

La naturaleza de las cantidades que están presentes en el problema es de “dinero” que al sumarlos se obtiene como resultado “dinero”.

$$\begin{array}{r} 15 \text{ pesos} \\ + \underline{10 \text{ pesos}} \\ 25 \text{ pesos} \end{array}$$

En la estructura de los problemas multiplicativos “suma iterada” se identifican dos tipos de cantidades de diferente naturaleza. En donde, cada cantidad (multiplicador-multiplicando) tienen una función diferente. Por ejemplo:

En el salón de 4º año, la maestra repartió 4 tiras de madera a cada uno de sus alumnos, para que formen un cuadrado. Si su grupo tiene 48 alumnos, ¿cuántas tiras de madera repartió en total?

La naturaleza de las dos cantidades que hay en el problema son: 48 alumnos y 4 tiras de madera. En donde una de las cantidades es el multiplicador “48 alumnos” que nos dice la *veces* que se va iterar la cantidad y el multiplicando “4 tiras de madera” que nos dice la *cantidad* que se itera. Al buscar la solución del problema

identificamos que la iteración de *tiras de madera* da como producto tiras de madera.  $48 \times 4 = 192$  tiras de madera.

Por tal motivo, la función de los factores de la multiplicación “multiplicador-multiplicando” son una herramienta que pueden ayudar a diferenciar los problemas multiplicativos de los aditivos.

- Identificar los dos tipos de división que hay: división por multiplicador (reparto) y división por multiplicando (asignación).

La función que tiene el multiplicador y multiplicando en los problemas multiplicativos de “suma iterada” nos ayuda, por un lado, a entender el significado de la multiplicación. Por otro, a diferenciar las dos divisiones que se proponen en la Educación Primaria. Por ejemplo:

En mi clase hay 8 mesas, en cada mesa se sientan 5 niños. ¿Cuántos niños hay en mi clase?

El problema multiplicativo que se propone se resuelve con una multiplicación porque se tiene el multiplicador “8 mesas” y el multiplicando “5 niños en cada mesa”. La convención matemática para su solución es:  $8 \times 5$ ,  $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40$  niños.

A partir de esta información podemos modificar el problema inicial que dé cuenta de la estructura de la división de reparto y de asignación.

En mi salón de clases hay 40 niños. Si hay 8 mesas para todos, ¿cuántos niños habrá en cada mesa?

Las cantidades que hay en el problema son: 8 mesas “multiplicador” y 40 niños que es el “producto”. A partir de la convención matemática (multiplicador y multiplicando) la representación de su solución queda de la siguiente manera:

$$8 \times \underline{\quad} = 40$$

Esta representación corresponde a la división de “reparto” porque tenemos el total de niños que van a ser distribuidos en 8 mesas.

Para la división de “asignación” el problema es el siguiente: En mi salón de clases hay 40 niños. Si se desean colocar 5 niños en cada mesa, ¿cuántas mesas se necesitarán?

Las cantidades que hay en el problema son: 5 niños “multiplicando” y 40 niños “producto”. A partir de la convención matemática (multiplicador y multiplicando) la representación de su solución queda de la siguiente manera:

$$\underline{\quad} \times 5 = 40$$

En esta representación, identificamos el total de niños que va haber en cada mesa.

- Entender la lógica cuantitativa que siguen las tablas de multiplicar

El aprendizaje de las tablas de multiplicar, en la mayoría de las veces, se da de manera mecanizada y sin ningún contexto. Probablemente, con el paso de los años, los alumnos de Educación Primaria manifiesten olvido o duda cuando la actividad propuesta requiere de dicho conocimiento. A partir del multiplicador y multiplicando la lógica cuantitativa que siguen las tablas de multiplicar es la siguiente:

1 x 2, esta representación se lee 1 vez 2. ¿Pero qué pasa si le agregamos “1” al multiplicador? 2 x 2, si le agregamos “1” al multiplicador le estaremos agregando al multiplicando un conjunto de la misma cantidad. Es decir:

1 x 2 =  un conejo con 2 orejas

2 x 2 =  dos conejos con 2 orejas cada uno

Si se sigue agregando “1” al multiplicador también se agrega un conjunto de la misma cantidad en el multiplicando.

- Entender a la proporción como un concepto multiplicativo. Por ejemplo:

La formula de la proporcionalidad es  $A = KB$  en donde  $A$  y  $B$  son medidas y  $K$  una constante. En donde  $A$  es el producto;  $K$  el multiplicador y  $B$  el multiplicando.

- Al ubicar al multiplicador a la izquierda del símbolo “x” (por) es consistente con el lenguaje algebraico. Por ejemplo:  $3y$  (3 veces  $y$ ) o una de las formulas que se utilizan para obtener el perímetro del cuadrado  $4a$  (4 veces  $a$ ) y el perímetro del rectángulo  $2a+2b$  (2 veces  $a$  + 2 veces  $b$ ). En las representaciones algebraicas encontramos primero el multiplicador y después al multiplicando.

Como podemos ver, la función del “multiplicador-multiplicando” en los problemas multiplicativos (suma iterada) no solamente nos ayuda a entender el significado de la multiplicación sino que también se vuelven una herramienta en el trabajo con otros contenidos matemáticos.

## VII. BIBLIOGRAFÍA

- Ávila, A. (1988). La comprensión del algoritmo de la multiplicación. La matemática en la escuela III. Antología. Universidad Pedagógica Nacional. SEP.
- Botello, H., Álvarez. A., Balbuena. H., Block. D., González. N., Jarillo. P., Martiradoni. Z., Múños J. y Velázquez I. (1988). Estrategias pedagógicas para niños de primaria con dificultades en aprendizaje de las matemáticas. Problemas de operaciones de multiplicación y división. Dirección General de Educación Especial. México.
- Brian, G. (1992). Multiplication and division as models of situations. En Douglas A. Grouws (ed.) Handbook af research on mathematics teaching and learning. A project of the national council of teachers of mathematics. Macmillan Plublishing Company: New York.
- Castillo, P., García, V., Hernández, J., Hernández, D., Perrusquía, E., León. M., Vázquez. E., Cantón, A. y Osorio, M. (2011). *Matemáticas. Primer Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.
- Castillo, P., García, V., Perrusquía, E., León. M., Hernández, D., Hernández, J., Cantón, A. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas. Cuarto Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.
- Chamorro, M. C. (2001). Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Col. Aula de Verano. Instituto superior de formación del profesorado. Madrid. pp. 189-228.

- Courant, R. y Robbins H. (2008). ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. México: FCE.
- Fischbein, E., Deri, M. Nello, M. & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Jurnal for research in mathematics education*, 16, 3-17.
- Hernández, D., García, V., León. M., Hernández, J., Perrusquía, E., Castillo, P. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas. Quinto Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.
- Hernández, D., García, V., Perrusquía, E., León. M., Castillo, P., Hernández, J. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas. Sexto Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.
- Hernández, J., García, V. M., Hernández, D., Perrusquía, E., León. M., Castillo, P., Vázquez. E., Cantón, A. y Osorio, M. (2011). *Matemáticas. Segundo Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.
- Hernández, J., García, V., Perrusquía, E., León. M., Castillo, P., Hernández, D., Cantón, A. y Arredondo, C. (2011). *Matemáticas. Tercer Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (S.F.) *Explorador del Excale*. Recuperado el 13 de enero de 2011, de <http://www.inee.edu.mx/explore/>.
- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). El estudio de clases y las demandas curriculares. La enseñanza de la multiplicación. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Kamii, C. y Jones S. (1995). Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget. Madrid. Aprendizaje visor.

Lerner, D. (1988). ¿Qué es la MULTIPLICACIÓN? La matemática en la escuela III. Antología. Universidad Pedagógica Nacional. SEP.

Maza, C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y la división. Madrid. Síntesis.

Nesher, P. (1988). What children tell us about multiplication Word problems. Journal of mathematical behavior 7, 239-262.

Perrusquía, E., García, V., Hernández, D., Hernández, J., Cantón, A., Castillo, P., Osorio, M. y Arredondo, C. (2010). *Matemáticas. Segundo Grado*. México. D. F.: Secretaria de Educación Pública.

Secretaria de Educación Pública (2011). *Programa de estudio. Educación Básica. Primaria*. México. D. F.: Autor.

Vergnaud, G. (1991). El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. México. Trillas.

ANEXOS

## VIII. ANEXOS

### Anexo 8.1 Problemas multiplicativos

En su opinión indique cuáles de estos problemas serían de multiplicación y cuáles no. Explique por qué y escriba su solución

1.- Por ayudar a su mamá a vender comida durante toda la semana, Javier recibió los siguientes billetes ¿Cuánto dinero recibió en total?



2.- En una caja hay 10 paquetes con 4 polvorones cada uno, ¿Cuántos polvorones hay en la caja?

3.- Una silla tiene 4 patas. En el salón hay 20 sillas, ¿cuántas sillas hay en total?

4.-Rubén compró 5 yogurts y pagó 35 pesos. ¿Cuánto vale cada yogurt?

5.- A Juana le dieron 56 pesos para que comprara refrescos. Si cada refresco vale 7 pesos ¿Para cuántos refrescos le alcanza?

## Anexo 8.2 Problemas multiplicativos

Indicaciones: Los maestros identificarán los procedimientos que hicieron sus alumnos para obtener los resultados. Ejemplo:

$$3+3+3+3+3=15$$

$$3 \times 5 = 15$$

$$5 \times 3 = 15$$

1.- Juan compró los siguientes sobres, en cada sobre hay 3 estampas ¿Cuántas estampas tiene en total?



2.- En una caja hay 10 paquetes con 4 polvorones cada uno, ¿Cuántos polvorones hay en la caja?

3.- Pepe fue al comedor 8 veces. En cada visita se comió tres gelatinas, ¿cuántas visitas hizo en total al comedor?

4.- Un niño lee 6 páginas cada 3 días y va a leer durante 18 días ¿Cuántas páginas leerá en total?

### Anexo 8.3 Problemas multiplicativos

En los siguientes problemas identifique qué número nos dice las veces y qué número la cantidad.

1.- Alicia compró 4 montones de 3 manzanas cada uno. ¿Cuántas manzanas compró?

2.- Una pecera tiene 26 peces y en un acuario hay 15 peceras. ¿Cuántos peces hay en total?

3.- En una granja hay 5 conejos. Cada conejo tiene 4 patas, ¿cuántas patas hay en total?

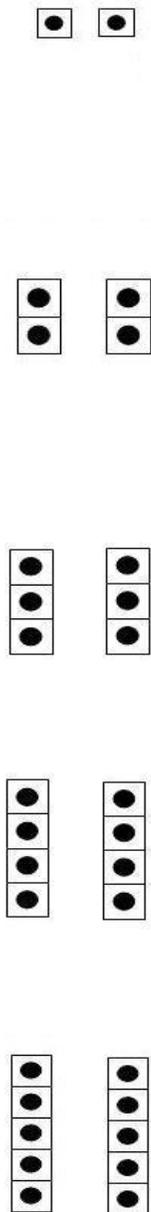
4.- En el puesto de frutas hay 7 cajas con 8 melones cada una, ¿cuántos melones hay en total?

5.- Carlos contó las llantas de 7 automóviles. Si cada automóvil tiene 4 llantas, ¿cuántas llantas contó en total?

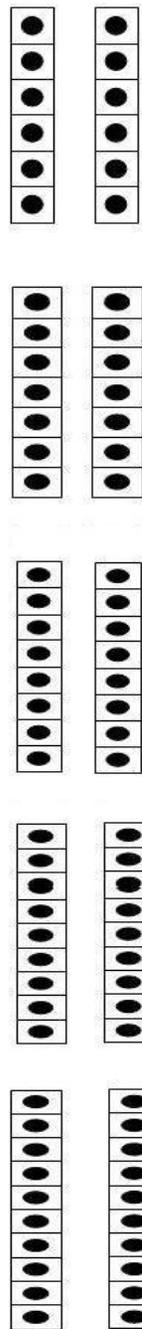


### Anexo 8.5 Tabla de multiplicar

Escriba la multiplicación que representa la cantidad de los cubitos



OPERACIÓN	RESULTADO



OPERACIÓN	RESULTADO

### Anexo 8.6 Tabla de multiplicar

Escriba la multiplicación que representa la cantidad de orejas de los conejos

OPERACIÓN	RESULTADO	
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		



### Anexo 8.8 Problemas multiplicativos “Tiro al blanco”

En la feria del pueblo Santiago Michac; Paola jugó tiro al blanco. Por cada tiro que hizo pagó \$3 pesos. Para saber cuánto dinero pagó por los tiros realizados llena la siguiente tabla.

TIRO	PRECIO
1	\$ 3
2	
	\$ 9
4	
5	
6	\$18

Cuál tabla representa la resolución de este problema

1x3	3
2 x 3	6
3 x 3	9
4 x 3	12
5 x 3	15
6 x 3	18
7 x 3	21
8 x 3	24
9 x 3	27
10 x 3	30

3 x 1	3
3 x 2	6
3 x 3	9
3 x 4	12
3 x 5	15
3 x 6	18
3 x 7	21
3 x 8	24
3 x 9	27
3 x 10	30

### **Anexo 8.9 Problemas multiplicativos**

1.- Martha quiere hacer 8 ramos de flores. Si en cada ramo pone una docena, ¿cuántas flores necesitará?

2.- Un edificio tiene 3 pisos. En cada piso viven 10 personas. ¿Cuántas personas viven en el edificio?

3.- En mi clase hay 8 mesas, en cada mesa se sientan 5 niños. ¿Cuántos niños hay en mi clase?

4.- La mamá de Juan va a comprar sellos y le pide al vendedor que le dé 5 sellos de 16 pesos. ¿Cuánto tendrá que pagar al vendedor la mamá de Juan?

## **Anexo 8.10 Problemas multiplicativos**

1.- En el salón de 4º. año, la maestra repartió 4 tiras de madera a cada uno de sus alumnos, para que formen un cuadrado. Si su grupo tiene 48 alumnos, ¿cuántas tiras de madera repartió en total?

2.-Queremos hacer 24 trajes para un grupo musical. Para cada traje necesitamos 5 metros de tela. ¿Cuántos metros de tela necesitamos para hacer los trajes?

3.- En una caja tenemos 18 botellas de agua. Cada botella contiene 2 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay en la caja?

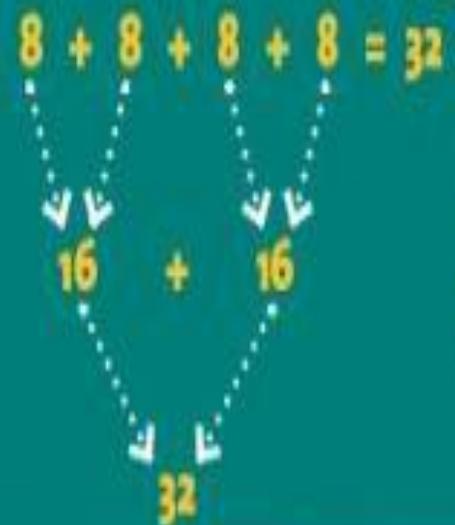
4.- El Sr. Ramírez la mayor parte de su vida arregla las llantas de las motocicletas. Si un grupo de 10 amigos llevaron su motocicleta para que le revisaran las 2 llantas de cada motocicleta, ¿cuántas llantas revisara el Sr. Ramírez en total?

5.- En la escuela primaria Niños Héroes se están remodelando sus 8 salones para que haya una mejor ventilación en cada uno de ellos. En cada uno de los salones se colocaran 5 ventanas, ¿cuántas ventanas necesita comprar la escuela en total?

Anexo 8.11 Explicación de la función de los factores de la multiplicación tomado del libro de segundo año de Educación Primaria 2010

En esta lección aprendimos

**que** mientras más piezas de fruta haya en los montones y mientras más montones se tengan, es más difícil saber cuántas frutas se tienen en total. Para saberlo, se puede sumar el número de frutas de los montones. Por ejemplo, Alicia compró 4 montones de 8 duraznos cada uno:



The diagram illustrates the process of finding the total number of peaches. It starts with the equation  $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ . Dotted lines with arrows connect the four 8s to two 16s, representing the first step of addition. Another set of dotted lines with arrows connects the two 16s to the final result 32, representing the second step of addition.

También se puede decir que se tienen 4 veces 8 duraznos = 32 duraznos y se representa así:  $4 \times 8 = 32$

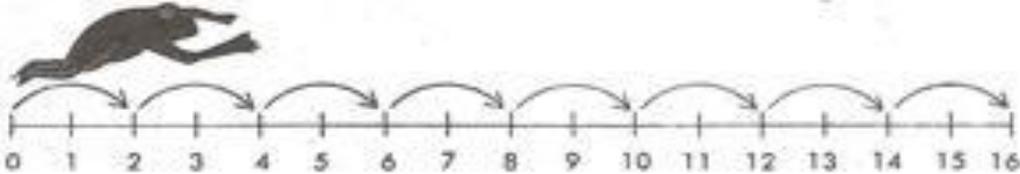
Sigue los mismos pasos del ejemplo de los duraznos para saber cuántas frutas hay en total en cada una de las imágenes anteriores. Escríbelos en tu cuaderno.

Para hacer una suma de números iguales, cuenta los sumandos y multiplica el sumando por el número de veces que aparece, por ejemplo,

$$3+3+3+3+3+3+3 = 3 \times 7 = 21$$

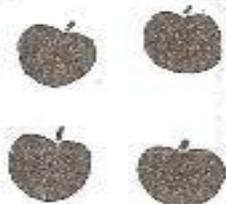
Anexo 8.13 Actividades del libro del alumno de 1972 correspondiente a la multiplicación

La rana da saltos de 2.



Si da 4 saltos llega al	<input type="text"/>
4 veces 2 es	<input type="text"/>
$4 \times 2 =$	<input type="text"/>
Si da 1 salto llega al	<input type="text"/>
1 vez 2 es	<input type="text"/>
$1 \times 2 =$	<input type="text"/>
Si da 2 saltos llega al	<input type="text"/>
2 veces 2 es	<input type="text"/>
$2 \times 2 =$	<input type="text"/>
Si da 0 saltos llega al	<input type="text"/>
0 veces 2 es	<input type="text"/>
$0 \times 2 =$	<input type="text"/>

Multiplicación por 4.



2 veces 4 es 8, lo escribimos  $2 \times 4 = 8$

Forma sobre tu mesa tres montones con cuatro corcholatas cada uno, ¿cuántas corcholatas tienes en total?

3 veces 4 es

¿Y si agregas un montón con cuatro corcholatas?

4 veces 4 es

¿Y si fuesen 10 montones?

10 veces 4 es

$$3 \times 4 = \underline{\quad}$$

$$4 \times 4 = \underline{\quad}$$

$$10 \times 4 = \underline{\quad}$$

Anexo 8.14 Actividad del libro del alumno de 1988 correspondiente a la multiplicación

**Lección 8**



Gloria tiene 3 blusas y 4 faldas. ¿De cuántas maneras distintas se puede vestir?

Completa la tabla donde aparecen las distintas maneras como puede vestirse Gloria:

Gloria se puede vestir de 12 maneras distintas.

La tabla tiene 3 renglones de 4, y 4 columnas de 3.

Esto lo escribimos  $3 \times 4 = 12$  ó  $4 \times 3 = 12$   
y se lee

"3 veces 4 es igual a 12" ó "4 veces 3 es igual a 12"

20

## Anexo 8.15 Actividad del libro del alumno de 1993 correspondiente a la multiplicación



### Tonatiuh multiplica



En el salón de Tonatiuh hacen la actividad de la empaadora.

Para saber cómo formar los paquetes de chocolates usan tarjetas. Unas tarjetas dicen cuántos paquetes hay que formar y otras dicen cuántos chocolates deben ir en cada paquete.

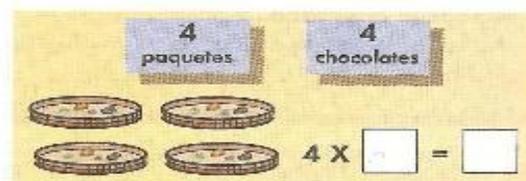
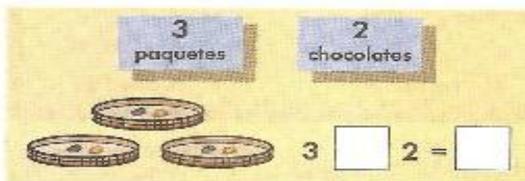
- A Tonatiuh le sale el 5 en la tarjeta de paquetes y el 2 en la tarjeta de chocolates.



Tonatiuh anota lo que hizo de la siguiente manera:  $5 \times 2 = 10$

Dice: el 5 es el número de paquetes y el 2 el número de chocolates que hay en cada paquete; el 10 es el total de chocolates que se utilizaron. La operación que anotó Tonatiuh se llama multiplicación.

- Fíjate en los dibujos y calcula el total de chocolates. Completa la multiplicación para que quede como lo hace Tonatiuh.



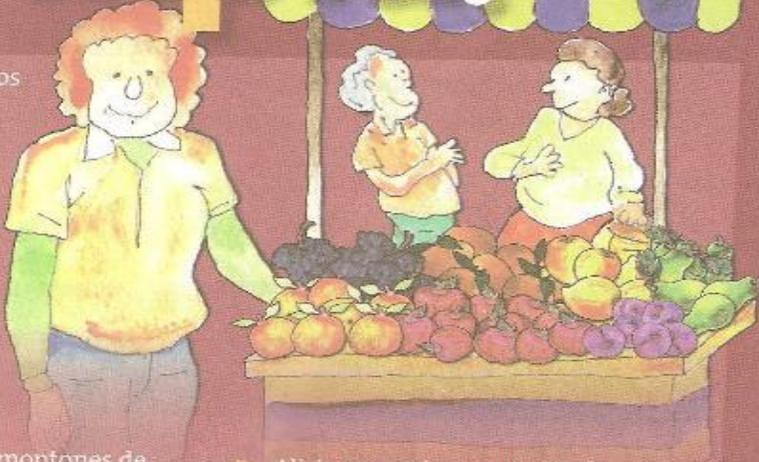
Anexo 8.16 Actividad del alumno de 2010 correspondiente a la multiplicación

**25** Significado y uso de los números

Problemas multiplicativos  
Resuelve problemas de multiplicación mediante sumas repetidas.

# ¿Cuánta fruta compra?

1. Laura vende distintos montones de fruta.



Si Juanita compra 3 montones de 7 naranjas cada uno. ¿Cuántas naranjas compró? \_\_\_\_\_

Dibuja las naranjas que compró Juanita. 

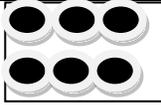
Alicia compró 4 montones de 3 duraznos cada uno. ¿Cuántos duraznos compró? \_\_\_\_\_

Dibuja los duraznos que compró Alicia. 

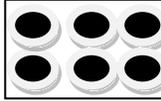
78

### Anexo 8.17 Problema multiplicativo “Venta de paquetes de donas”

La tía de Perla tiene una tiendita y Perla le ayuda a vender. A Perla se le ocurrió hacer una tabla de precios por cada uno de los paquetes de donas que vende. La tabla fue de gran utilidad. Resolvamos la tabla para entender que hizo Perla para obtener los precios de los paquetes de donas.

Paquetes Precio	 4 pesos	 8 pesos	 10 pesos
1	4	8	10
3	12	24	30

Perla también se puso a contar cuantas donas vendía dependiendo de la cantidad de donas que tenía el paquete.

Paquetes			
1	2	4	6
4	8	16	

### Anexo 8.18 Tabla pitagórica

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1						6	7	8	9	
2						12	14	16	18	
3						18	21	24	27	
4						24	28	32	36	
5						30	35	40	45	
6						36	42	48	54	
7						42	49	56	63	
8						48	56	64	72	
9						54	63	72	81	
10						60	70	80	90	

## **Anexo 8.19 Problemas multiplicativos “División por multiplicador y multiplicando”**

Resuelve los siguientes ejercicios con las estrategias vistas en el taller. Utiliza el algoritmo de la multiplicación para plantear la solución.

- 1.- Tengo 8 chocolates y los quiero repartir entre mis 4 amigos. ¿Cuántos chocolates le toca a cada uno?
  
- 2.- Tenía 8 chocolates, si los repartí entre mis amigos y a cada uno de ellos les tocaron 2 chocolates. ¿Cuántos amigos tengo?
  
- 3.- Por comprar 5 cajas con lápices pagué 80 pesos. ¿Cuánto costó cada caja de lápices?
  
- 4.- Cada caja de lápices cuesta 16 pesos, si pagué 80 pesos por varias cajas. ¿Cuántas cajas de lápices compré?
  
- 5.- De un palo de madera de 48 cm, ¿cuántos pedazos de 6 cm se pueden cortar?
  
- 6.- Se cortaron 8 pedazos de un palo de madera de 48 cm de largo. ¿Cuánto medía cada pedazo de madera?