SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA Y CULTURA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 25 A

EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CONCEPTO LÍMITE EN EL BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN EDUCACIÓN EN EL CAMPO DE LA INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA Y EL APRENDIZAJE ESCOLAR

PRESENTA
SILVIA EVELYN WARD BRINGAS

M. C. EFRAÍN ALEMÁN GARCÍA
DIRECTOR DE TESIS

CULIACÁN ROSALES, SINALOA, FEBRERO DE 2011.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA Y CULTURA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 25 A

EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CONCEPTO LÍMITE EN BACHILLERATO

SILVIA EVELYN WARD BRINGAS

Director de Tesis:

M. C. EFRAÍN ALEMÁN GARCÍA

CULIACÁN ROSALES, SINALOA, FEBRERO DE 2011.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA Y CULTURA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
UNIDAD 25 A

EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CONCEPTO LÍMITE EN BACHILLERATO

SILVIA EVELYN WARD BRINGAS

Director de Tesis:
M. C. EFRAÍN ALEMÁN GARCÍA

CULIACÁN ROSALES, SINALOA, FEBRERO DE 2011.

A mi esposo, compañero de camino
A mis hijos Douglas y Sofía, motor de mi vida
A mis padres y hermanas, esencia de mí ser
A la Compañía de María, guía de mí formación

AGRADECIMIENTOS

La gratitud, es un valor importante para la vida de todo ser humano; cuando se logra una meta, nunca se llega solo, detrás están todas aquellas personas que contribuyeron a que se lograra y este momento de la vida es ideal para dar gracias. Primero que nada le agradezco a Dios su presencia, pues con él todo es posible; el apoyo incondicional de mi esposo e hijos, es un motor que llena de amor la vida, el cariño de mis padres y hermanas, la compañía de familiares y amigos, la cercanía del personal de secundaria del Colegio Montferrant, el caminar con los compañeros de grupo de maestría, el acompañamiento de los docentes de la Universidad Pedagógica Nacional, todos ellos son motivos para agradecer y, a todos ellos, mil gracias, por ser compañeros de camino y parte fundamental para la realización de esta meta.

Secretaría de
Educación Pública y Cultura
Gobierno del Estado

UNIVERSIDAD
PEDAGOGICA
NACIONAL

DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Culiacán Rosales, Sinaloa, 28 de enero de 2011.

C. SILVIA EVELYN WARD BRINGAS
P r e s e n t e.

En mi calidad de Director de la Universidad Pedagógica Nacional y como resultado del análisis y dictaminación realizados a su trabajo de tesis **El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el bachillerato,** para obtener el grado de Maestra en Educación en el Campo de la Intervención Pedagógica y Aprendizaje Escolar, dirigida por el **MC. Efraín Alemán García,** manifiesto a usted que su trabajo ha sido dictaminado favorablemente y autorizado por el Comité de Posgrado de esta Unidad para presentar su examen de grado.

A T E N T A M E N T E
"Educar para Transformar"

S.E.P.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL
UNIDAD 25A

MC. ROGELIO HUMBERTO ELIZALDE BELTRÁN
Director de la Unidad 25 A Culiacán

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La historia de las matemáticas no ha sido igual desde la conquista intelectual que ha representando para ellas el nacimiento del Cálculo infinitesimal. El álgebra, la geometría, la aritmética y la trigonometría se han colocado en una nueva perspectiva teórica y todo ello gracias a un cúmulo de conocimientos que han desplegado y evolucionado a través de los años para provocar en algún momento a través de algunas personas el surgimiento de ideas que han dado lugar a una nueva teoría que ha revolucionado la ciencia, esto sucedió con el Cálculo infinitesimal pero para ello hubo que esperar a que tuviéramos la madurez social, científica y matemática que permitiera construir el cálculo que utilizamos hoy en día.

A través de las matemáticas el estudiante se desarrolla intelectualmente; aprende a reconocer elementos fundamentales de un problema, la forma de plantearlos y resolverlos, así como la selección de estrategias y herramientas para su solución. Este aprendizaje es de gran utilidad para los estudiantes tanto en estudios superiores como en la vida diaria. El Cálculo Diferencial específicamente debe contribuir a la comprensión de la matemática del cambio e insertarse en programas de ingeniería, economía y ciencias naturales y exactas; el concepto de límite le permite tener una primera aproximación al estudio del cambio.

> Se considera que “El cálculo es la matemática del cambio: velocidades y aceleraciones. Cálculo es también la matemática de las rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arcos, centroides, curvaturas y otros diversos conceptos que han hecho que los científicos, ingenieros y economistas puedan modelar situaciones de la vida real (Larson; 2005).

Para los alumnos el cálculo diferencial es diferente, para ellos no tiene nada que ver con la realidad y no lo visualizan como herramienta para modelar situaciones de la vida real, ellos lo consideran una de las materias más difíciles de la preparatoria y muchos prefieren carreras profesionales que según ellos no tengan nada que ver con las matemáticas. El gran temor de los estudiantes hacia el cálculo se debe a esa mitificación de lo complicado de las matemáticas pues el cálculo es parte de las matemáticas y al mismo tiempo está lleno de matemáticas, esto lo explica Edgar Morín (2002) como la primera complejidad; nada está realmente aislado en el universo y todo está en relación.

En la búsqueda de explicar algunas dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo del nivel medio superior, se inició el presente trabajo de investigación, para tratar de dar respuesta a algunas interrogantes en un principio muy generales sobre: ¿Qué dificultades se les presentan a los docentes en la enseñanza de Cálculo en la preparatoria?, ¿por qué se les dificulta aprender Cálculo a los estudiantes?, ¿cuáles teorías explican el aprendizaje de los conceptos del Cálculo?, ¿qué temas exhiben mayor dificultad en el proceso de enseñanza aprendizaje de Cálculo?, ¿cómo acontece el proceso de internalización de los conceptos de Cálculo?, estas y otras inquietudes se fueron desarrollando y delimitando durante el proceso de la investigación hasta llegar a identificar y explicar a través del contenido en el documento la problemática concreta del proceso de enseñanza aprendizaje de la teoría de límites, tanto conceptuales como procedimentales.

El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite no ocurre fácilmente y ha sido demostrando a través de su historia diferentes problemáticas, entre las que se pueden mencionar el sentido común que los estudiantes tienen sobre del concepto límite, las perspectivas de los programas de estudio, las orientaciones en los libros de texto de Cálculo del bachillerato, además, los diferentes enfoques de enseñanza que los docentes emplean, todo influye en el aprendizaje, ello probablemente puede obstaculizar el proceso de internalización del concepto límite impidiendo así, que lo empleen como herramienta descontextualizada.

El presente trabajo se denomina: *El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el bachillerato.* Tiene como objetivos analizar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite y explicar las relaciones dinámico-causales que se presentan en dicho proceso desplegando así los principales puntos que constituyen su historia, para identificar las dificultades que se presentan en el proceso de internalización del concepto límite y tratar de sugerir posibles guías de enseñanza, considerando el proceso de internalización.

Básicamente el trabajo de campo se realizó en dos preparatorias urbanas de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS), una ubicada en una colonia popular y la otra en el centro de la ciudad, además una matutina y la otra vespertina respectivamente. El levantamiento de la información se realizó en el semestre de septiembre a diciembre de 2009 correspondiente al quinto semestre de la preparatoria que es precisamente en el que se imparte la materia de Cálculo I y se realizaron otras visitas durante el periodo de enero a marzo de 2010 para completar datos y corroborar algunos resultados.

En el ambiente escolar el conocimiento matemático ha tenido forma piramidal, las bases de esa pirámide la constituyen aritmética, algebra y geometría que se forma en primaria, actualmente estos temas se dividen a lo largo de la primaria en tres ejes temáticos: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida y manejo de la información. El siguiente eslabón se forma en secundaria en estos mismos ejes pero avanzando en el grado de complejidad, al llegar al bachillerato el estudiante continua formando su pirámide de conocimientos matemáticos con un semestre de algebra, uno de geometría y trigonometría, uno de geometría analítica en el que se relacionan algebra y geometría y uno más de análisis de funciones, en la punta de la pirámide se encuentra en quinto y sexto semestre respectivamente el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral y con ello el inicio del estudio de las matemáticas modernas o también conocidas como temas post algebraicos pero en las que se tiene que utilizar todo el bagaje matemático construido con los temas que le preceden, en este sentido, el concepto de límite es el que da inicio a estos temas de Cálculo y contribuye a una mejor comprensión de la derivada y la integral, es por ello que el propósito de la presente investigación es identificar las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite.

El capítulo I, corresponde al *planteamiento del problema*, describe al mismo englobando el aprendizaje y la enseñanza, expone los antecedentes del problema, los motivos que despertaron el interés por el objeto de estudio y se destacan algunas investigaciones y trabajos del objeto de estudio a nivel mundial, nacional, estatal y local, se define el problema, en donde se explican las causas y/o factores que intervienen en el objeto de estudio y se contextualiza en cuanto a tiempo, espacio y teorías, muestra la justificación de la realización de la presente investigación, enuncia los objetivos que establecen los propósitos del presente trabajo, en las hipótesis se manifiestan los resultados esperados en el trabajo.

El capítulo II, es *El marco teórico*, expone bajo que paradigma se desarrolla el trabajo así como las teorías que explican y se relacionan con la presente investigación. En esta etapa del trabajo, el problema se explica desde lo que ha representando el nivel medio superior en los contextos mundial, nacional y estatal; se expone el concepto límite en la historia de el Cálculo, se analizan los programas de estudio de las preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS) y libros de texto para Cálculo I del bachillerato y se proporciona un juicio de valor de los mismos, se exponen también los enfoques de enseñanza en Cálculo y el aprendizaje del mismo; se ostenta lo que ha significado la teoría sociocultural en las matemáticas desde la zona de desarrollo próximo, el andamiaje y el proceso de internalización.

El capítulo III contiene *La metodología*, describe a grandes rasgos el enfoque de investigación, los sujetos participantes, las técnicas e instrumentos para recoger la información y el tratamiento para procesar los datos. Se muestran los detalles de la investigación cualitativa, se plantea el enfoque etnográfico como primordial soporte heurístico destacándose como técnicas fundamentales la observación y la entrevista a modo de herramientas para el desarrollo del trabajo, explicita el procedimiento que se empleó durante la investigación para la recolección y sistematización de los datos, así como la interpretación y análisis de los resultados obtenidos.

El capítulo IV presenta los *Resultados de la investigación*, explica unidades de análisis a través de las categorías: relaciones causales en el aprendizaje del concepto límite, relaciones dinámicas en las clases de Cálculo I, intercambios comunicativos en las clases y estilos de enseñanza; mismas que se construyeron a partir de patrones emergentes durante el análisis e interpretación de los registros realizados, cabe señalar que a cada categoría le corresponden una serie de subcategorias que le dan sentido a cada unidad de análisis. En cada descripción-explicación de protocolo se enlaza el análisis empírico con un análisis teórico a través del diálogo con los autores para el descubrimiento concreto, esto con la finalidad de consolidar el debate teórico de la tesis. Además se muestran fragmentos de las entrevistas realizadas a los participantes claves, docentes y alumnos de tercero de preparatoria de Cálculo I. Se concluye el capítulo con los rasgos generales de la problemática en estudio para lo que se seleccionan los nexos esenciales y comunes de las categorías de análisis.

Para finalizar el trabajo se dan a conocer las conclusiones del proceso seguido durante la investigación y se proponen algunas sugerencias para la internalización del concepto límite, además de la bibliografía que contiene las referencias consultadas durante la elaboración del trabajo y los anexos necesarios que evidencian el proceso seguido.

La presente investigación simboliza un esfuerzo personal significativo, pone de manifiesto situaciones escolares que se desarrollan comúnmente en algunas aulas de Cálculo, aun cuando para numerosos docentes puede ser algo habitual, la relevancia de los hallazgos que se manifiestan en esta tesis es que se encuentran documentados sistemática y cuidadosamente, lo que puede favorecer el fortalecimiento de la práctica docente y el diseño de posibles planeaciones que ensayen estrategias de intervención pedagógica para lograr la internalización del concepto límite en la preparatoria y de esta manera mejorar el aprendizaje del Cálculo en el nivel medio superior.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Antecedentes

El Cálculo Diferencial es el segundo avance de las matemáticas, después de la geometría euclidiana, históricamente registrada en la antigua Grecia. El Cálculo nace precisamente entre los siglos XVII y XVIII en el marco de la revolución científica, la que generó una visión progresista del mundo y constituyó la sociedad moderna de la que somos parte. Esta herramienta de las matemáticas se ha usado por más de tres siglos y desde entonces, los docentes enfrentan múltiples dificultades para que los alumnos aprendan, las razones son diversas entre las que se pueden destacar las de el proceso de enseñanza aprendizaje.

En la experiencia docente se considera que la enseñanza de Cálculo es complicada porque se requiere al mismo tiempo fusionar aritmética, algebra, geometría, funciones, graficación así como, una nueva estructura simbólica propia de la materia, todo ello posiblemente hace que para los estudiantes se convierta en algo sumamente complejo de comprender. Esta estructura simbólica mediada por signos propios contribuye, como lo menciona Vigotski, a las representaciones simbólicas y a la acción proyectada.

> La inclusión de signos en la percepción temporal no conduce a una simple prolongación de la operación, sino, al contrario, crea las condiciones necesarias para el desarrollo de un único sistema que abarca elementos efectivos del pasado, presente y futuro. Este sistema psicológico naciente en el niño rodea dos nuevas funciones: *las representaciones simbólicas y las determinaciones de la acción proyectada.* (Vigotski; 1979: 65).

Este sistema psicológico se presenta cada vez que el ser humano se enfrenta a nuevos conocimientos o estructuras mediadas por símbolos, como en el caso de las matemáticas, ya que las matemáticas son representaciones mediante símbolos, en Cálculo surge para los jóvenes de bachillerato una nueva estructura de símbolos matemáticos y estos signos deben modificar su sistema psicológico respecto a las representaciones simbólicas y la acción proyectada.

El Cálculo ha dado paso a las matemáticas modernas, también llamadas temas post algebraicos, ya que formalizó distintas nociones, como funciones, límites, derivadas e integrales, con una nueva simbología con sentido y significado, de ahí, que el interés al realizar esta investigación va encaminado a conocer que sucede en el proceso de enseñanza aprendizaje para tratar de explicar las dificultades que se presentan en el proceso de internalización del límite, porque el límite en matemáticas representa simbólicamente la aproximación, a través de los símbolos ε, δ, →, lim y | |[1]. Este interés surge de la experiencia como docente de matemáticas en bachillerato y de la formación de Licenciada en matemáticas.

Por otra parte, Cálculo en el bachillerato es una materia esencialmente propedéutica en el sentido de que sirve de base para estudios más avanzados en ingeniería y ciencias naturales y sociales, por lo que ha de contribuir en la inserción de los estudiantes en el nivel superior, es por esto, que se ubica en el quinto semestre del bachillerato, límites de funciones es uno de los temas de la primera unidad en el programa de la preparatoria, de ahí, también el

[1] Simbología para el desarrollo del presente trabajo.
ε = Épsilon.
δ = Delta.
$<$ = Menor que.
$>$ = Mayor que.
| | = Valor absoluto.
→ = Tiende.
lim = Límite.

interés por averiguar los factores que influyen en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite.

La asignatura de Cálculo Diferencial de la Educación Media Superior, sirve de puente para las matemáticas del nivel superior, por lo que ha sido objeto de estudio desde diferentes perspectivas; en el horizonte internacional, se pueden mencionar, por citar algunos trabajos: La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia, "la derivada un concepto a caballo entre las matemáticas y la física" (Badillo; 2003). Este trabajo aborda la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada, como concepto matemático y como objeto de enseñanza aprendizaje en el nivel bachillerato del sistema educativo colombiano. "El grado de reflexión de los alumnos de Cálculo Diferencial. Una experiencia". (Ramos; 2005). El trabajo expone un análisis comparativo sobre el grado de reflexión de los alumnos antes y después del curso de Calculo Diferencial de la Universidad Nacional de Tucumán en Argentina. Otro ejemplo es la "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?". (Artigue; 1998). En este trabajo se exponen las medidas adoptadas por Francia, en la enseñanza del bachillerato para superar las dificultades de los cursos de Cálculo identificadas a lo largo del siglo XX.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM; 2000: 20) menciona que, en la década de los noventa, investigaban problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas: Azcárate, Breitenberger, Ferrini-Mundy y Gaudard, Ferrini-Mundy y Geuther, Orton, entre otros y las conclusiones de distintos trabajos, ponen de manifiesto la existencia de serias deficiencias entre estudiantes, e incluso entre profesores, en relación con la comprensión de las ideas fundamentales del Cálculo.

Las investigaciones anteriores hacen referencia a deficiencias en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo, son muchos los trabajos que imputan las deficiencias a una enseñanza inadecuada, de marcado carácter algorítmico, que se ocupa exclusivamente del *dominio* de reglas de cálculo, sin atender a preguntas del tipo: ¿por qué?, ¿qué significa?... en este sentido el NCTM menciona los trabajos de: Artigue y Viennot; Ferrini-Mundy y Geuther; López; Nagy *et al*; Orton; Schneider; Thompson; Thompson y Thompson. Este enfoque algorítmico permite, si acaso, reproducir destrezas manipulativas, pero es claramente insuficiente para resolver problemas de aplicación, como lo hacen ver White y Mitchelmore (1996), y actúa como obstáculo para una futura comprensión conceptual, según las investigaciones de Ferrini-Mundy y Gaudard (1992). En USA, para superar la situación crítica que atraviesa la enseñanza del Cálculo, se plantea un movimiento de reforma que sustituya el enfoque algorítmico dominante por un enfoque conceptual, que se preocupe por conseguir una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace, esto se manifiesta en el NCTM en los trabajos de Jhonson; Ostebee y Zorn; Swann y Tucker, registrados a partir de mediados de los noventa. En esta misma línea, los *Principles and Standards for School Mathematics* denuncian que "(...) desgraciadamente, el aprendizaje de las matemáticas *sin* comprensión ha sido durante mucho tiempo el resultado de la instrucción matemática", y afirman que "(...) en el siglo XXI, todos los estudiantes deben tener expectativas de comprender y ser capaces de aplicar las matemáticas".

En la década de los noventa, también, se investigó desde el dominio puramente matemático, se han realizado trabajos sobre la derivada y la integral, o sobre conceptos anteriores como el de límite o función, buscando una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace, al respecto en el NCTM aparecen los trabajos de: Azcárate; Bartle; Calvo; Confrey y Smith; Ferrini-Mundy y Geuther; López; Orton; Schneider; Thompson y Turégano.

En el ámbito nacional se encontraron los siguientes trabajos: "Situación didáctica del concepto límite infinito. Análisis preliminar". (Camacho Aguirre; 2001), el trabajo presenta el diseño de una situación didáctica para el concepto de límite de los estudiantes de ingeniería del sistema tecnológico de Chihuahua, debido a las concepciones de matemáticas poco confiables que continuamente se observaban en los alumnos. "Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos de cálculo". (García; s/f), en el que se exponen las tendencias y problemas desde las dimensiones epistemológicas, didácticas y cognitivas en la enseñanza del cálculo. "Vinculación entre los niveles educativos medio superior y superior del IPN: el caso de Cálculo Diferencial". (Ruiz y Rodríguez; s/f), en donde se plantea la necesidad de vincular los estudios de nivel medio superior y superior del IPN para lo que se realiza una revisión de ambos planes de estudios. "Errores conceptuales y estilos de solución de problemas de límites en expertos y novatos. Sus implicaciones Metacognitivas a través del uso de tecnología". (Glaros; 2002), el cual define las concepciones erróneas típicas que tienen los alumnos en el aprendizaje del concepto límite y presenta recomendaciones para le enseñanza del mismo, considerando las concepciones erróneas.

Con los ejemplos citados, se puede observar que también a nivel nacional existe interés, entre las principales instituciones educativas del país por el estudio de las problemáticas que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo desde diferentes ámbitos.

En el estado de Sinaloa no se han encontrado investigaciones sobre la temática propuesta, lo que se puede explicar, posiblemente, por la gran variedad de subsistemas de Educación Media Superior lo que complica cualquier investigación, pues cada subsistema tiene sus planes y programas con características propias, en el entorno inmediato se pueden mencionar los siguientes sistemas de bachillerato: el Colegio de Bachilleres del Estado de Sinaloa (COBAES), Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP), Centro de Estudios Tecnológico Industrial y de Servicios (CETIS), preparatorias del CECYT, Particulares afiliados a la DGB o Particulares afiliados a las Universidades, las preparatorias del Tecnológico de Monterrey y las de la preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Las investigaciones realizadas en otros lugares y la experiencia como docente de la localidad, permiten considerar que la problemática se presenta en las aulas del bachillerato del contexto inmediato, por lo que es de vital importancia indagar qué es lo que sucede en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo en el nivel medio superior; ya que el concepto de límite, se puede considerar como la piedra angular del Cálculo Diferencial e integral porque de él se desprenden las derivadas, las integrales y la rigurosidad en las demostraciones de algunos de los teoremas más importantes como: el teorema de continuidad de una función, el teorema del valor medio, el teorema de los valores extremos y el teorema fundamental del Cálculo por mencionar algunos, y todo esto el alumno lo debe aprender en Cálculo del bachillerato. Por lo tanto, se puede asegurar que, es necesario realizar un análisis de las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite que permitan responder a las interrogantes: ¿Qué factores influyen en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite de la prepa?, ¿Cuáles son las dificultades del proceso enseñanza aprendizaje del concepto límite en el curso de cálculo I de la preparatoria? y ¿Cuáles de estas dificultades son las que impiden la internalización de dicho concepto?.

1.2. Definición del problema

Los resultados de las investigaciones exponen que la problemática se presenta en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Diferencial en el nivel medio superior, y que esta se manifiesta en las dificultades que poseen los estudiantes en el aprendizaje de los límites como conocimiento básico del cálculo, y las más frecuentes están ligadas por una parte al sentido común que se tiene del concepto límite como barrera o fin, las procedimentales al momento de resolver un límite, ya que los estudiantes no aplican adecuadamente los conocimientos de algebra y de conexión al no vincular los conceptos, esto sucede probablemente por lo difícil que resulta enseñar y aprender el concepto de límite, así como también propiciar un lenguaje propio del cálculo diferencial en el aula.

Como lo menciona Levina (1981), el uso del lenguaje es importante para regular las acciones y los procesos mentales, tanto de los compañeros como los propios, se trata de que utilicen el lenguaje como instrumento de aprendizaje (Coll y Colombina;1995:352); para ello es necesario que en el aula se propicie un lenguaje científico mediante la negociación de las distintas representaciones, por un lado, la que los estudiantes tienen sobre el límite, por el otro, la del docente y con ellas llegar a una definición intersubjetiva, esto es en el plano social, toda esta actividad conjunta, mediante intercambios comunicativos, influye sobre las representaciones y significados que construye cada sujeto, pasando así, a la representación intrasubjetiva, es decir en un plano individual; contribuyéndose de esta manera a la internalización del concepto. El intercambio comunicativo que se dé en el aula, a través del lenguaje, propio del Cálculo, influye en el proceso de enseñanza aprendizaje y es clave para el proceso de internalización.

> El lenguaje del aula no es tan sólo una lista de términos técnicos, ni siquiera una letanía de definiciones. Es el uso de esos términos relacionados unos con otros en una amplia variedad de contextos. Los alumnos tienen que aprender a *combinar los significados* de los diferentes términos según las formas aceptadas de hablar científicamente. Deben hablar, escribir y razonar en frases, oraciones y párrafos de lenguaje científico. (Lemke; 1997:28).

En este sentido interesa el lenguaje que se propicia en las aulas de Cálculo del bachillerato en el tema del límite y como aprenden a combinar los significados de la aproximación en matemáticas, por todo esto, es necesario realizar un análisis de las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el nivel medio superior.

Uno de los conceptos fundamentales del programa de Cálculo I es el del límite, se imparte en el quinto semestre de las fases especializadas de ciencias químico biológicas y la de ciencias físico matemáticas a los alumnos de tercer grado de preparatoria, por su ubicación curricular es necesario que los alumnos conozcan aritmética, algebra, trigonometría, geometría, funciones y graficación.

En esta etapa de desarrollo, los sujetos cuentan entre 17 y 19 años, los jóvenes de esta edad en cuanto a su sistema psicomotriz son socialmente maduros, su lateralidad es completa y tienen control de su físico, cognitivamente según la psicología del desarrollo son capaces de abstraer, generalizar y conceptualizar, en la dimensión socio afectiva se espera que sean capaces de, interactuar, comunicarse, relacionarse con coetáneos y se sientan parte de un grupo y, en lo referente a su desarrollo moral se autovalora, cumple normas y reconoce valores.

El soporte teórico a considerar en este trabajo es la teoría sociocultural, sobre todo lo que se relaciona con el proceso de enseñanza aprendizaje; en este sentido se reflexionó sobre la zona de desarrollo próximo, el andamiaje y el proceso de internalización, en relación con el concepto límite, para esto, se consideró necesario hacer una revisión general de las aportaciones de Lev Vigotsky, autor de esta teoría, así como las contribuciones de Bruner y Wertsch sobre el andamiaje; se analizó, cómo las distintas representaciones del límite y los intercambios comunicativos en la actividad conjunta en el aula, contribuyen en la resignificación cultural del concepto y con esto, se estructurará un corpus teórico que tienda un puente entre la problemática de la realidad y la teoría.

Con el propósito de fortalecer el análisis categorial y enriquecer la discusión teórica del trabajo se consultaron autores como los siguientes: Siegel & Cohen (1991), Ferreyra (1989), Bauleo (1989) y Morris (1989) sobre el contexto del aula, Doyle (1986) y Lemke

(1997) en lo referente al ambiente áulico, Coll y Solé (1995) acerca de la interacción educativa y el grado de ayuda del adulto, Coll y Colombina (1995) y sus contribuciones referentes a el proceso de socialización, los intercambios comunicativos y la colaboración entre iguales, Fenstermacher-Soltis (1998) y sus estudios sobre enfoques de enseñanza, Cantoral en los enfoques de enseñanza en Cálculo y Ferreyra (2007) en lo referente a prácticas pedagógicas, por mencionar algunos.

Por otra parte, no se puede negar que no se ha dado la gran reforma en el bachillerato, sin embargo en las investigaciones en la enseñanza de las matemáticas y particularmente en el Cálculo, se ha dejado de lado las explicaciones sobre los que aprenden, en cómo conocen e internalizan el saber los que aprenden, es por ello que el propósito de la investigación es analizar el proceso de enseñanza aprendizaje como unidad y no como identidades, para de esta manera, identificar las dificultades que se presentan en el concepto límite para que se den las transformaciones de lo interpersonal a lo intrapersonal, que como lo menciona Vigotsky son parte del proceso de internalización, y la clave de dicho proceso está en el análisis de los intercambios comunicativos y estos a su vez son parte de los sucesos que se dan en las aulas, en este caso del bachillerato.

1.3. Justificación

El curso de Cálculo I se encuentra situado en el quinto semestre de preparatoria; los alumnos ya cuentan con los antecedentes académicos y de desarrollo cognitivo adecuados para su aprendizaje. El contenido está distribuido en cuatro unidades, en la primera se aborda variación, límites y continuidad, en la segunda el concepto de derivadas; en la tercera fórmulas y técnicas de derivación y en la cuarta las aplicaciones de la derivada. Cabe señalar que cada unidad requiere de los conocimientos de la unidad previa, por lo que la teoría de límites, debe ser aprendida, por los alumnos, para facilitarles el acceso a las siguientes; en la realidad los alumnos tienen dificultades para aprender Cálculo I, esto, puede deberse a que no se comprende el concepto límite y que no se logra su internalización, lo que obstaculiza su evolución a niveles de desarrollo superiores.

> La internalización de las formas culturales de conducta implica la reconstrucción de la actividad psicológica en base a las operaciones con signos. (…) El uso de los signos externos se reconstruye también radicalmente. Los cambios evolutivos en las operaciones con signos son semejantes a aquellos que se producen en el lenguaje. Los aspectos del lenguaje externo o comunicativo, así como los del lenguaje egocéntrico, se "internalizan" para convertirse en la base del lenguaje interno.
> La internalización de las actividades socialmente arraigadas e históricamente desarrolladas es el rasgo distintivo de la psicología humana, la base del salto cualitativo de la psicología animal a la humana. (Vigotski; 1979: 93-94).

La internalización del concepto límite le permite al estudiante de bachillerato construir su propia representación del límite, esto es, mediante una representación semiótica de los signos matemáticos, que en un principio para este tema serán graficas, tablas y lim, hasta llegar a representar ε y δ, que son las herramientas utilizadas en la acción humana desarrollada en el aula de cálculo I, es en esta acción mediada que los estudiantes van a adquirir la capacidad de pensar en un nivel superior.

Para el aprendizaje del Cálculo I, se requiere que el alumno tenga ya, una formación en matemáticas y que sus funciones mentales, no sean elementales; por ello, hacer un análisis del proceso enseñanza aprendizaje, su influencia y el impacto en el proceso de internalización beneficia a los alumnos y maestros de bachillerato, en tanto que se identifiquen las dificultades y se intervenga para mejorar los procesos. En este sentido, el programa de Cálculo I, ubicado en quinto semestre para las áreas de Ciencias Químico Biológicas y Ciencias Físico Matemáticas (del plan de estudios 2006 de la Dirección General de Escuelas Preparatorias (DGEP) de la UAS) propone que los conceptos básicos del cálculo diferencial, sean abordados, considerando la experiencia previa en matemáticas y utilizando las diferentes representaciones, antes de llegar a la formalización rigurosa, desprovista de significado para los estudiantes, esto, quiere decir, que se debe considerar el nivel real de desarrollo del alumno en el aprendizaje de estos conceptos, para así, evolucionar a nuevos niveles de desarrollo.

Desde la experiencia, se observa que la enseñanza del Cálculo I, es necesaria para comprender la importancia de las matemáticas en la vida diaria. Y sin embargo, los procesos de enseñanza aprendizaje de los conceptos de Cálculo, como el del límite, no ocurren fácilmente y han develado, a través de su historia, diferentes problemáticas. Unas por ser parte de una ciencia exacta, como lo es la matemática y otras por la propia naturaleza de la asignatura, analizar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite permite identificar las dificultades que se presentan, para de esta manera modificar las prácticas y mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

La problemática del proceso de enseñanza aprendizaje de conceptos en matemáticas es aún más frecuente, en los conceptos de Cálculo, Según Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) la enseñanza de cualquier concepto de matemáticas se ha centrado en la introducción de las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas lejanos al estudiante; la construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas, el empleo prematuro de un lenguaje formalizado, a veces hermético y, en una enseñanza por lo general centrada en el discurso del maestro.

> A estas características no deseables se les puede agregar otros problemas en la enseñanza de conceptos matemáticos. Según Davis (1998), De la Cruz (1994) y Mason (1996), los alumnos por lo general no pueden realizar abstracciones profundas, presentan poca internalización de los conceptos estudiados, lográndose, en muchos casos, sólo retención de corto plazo; gran capacidad de memorización de mecanismos para resolver problemas tipo, sin comprensión de significados; dificultad para transferir conocimientos de un tema a otro y plantear y resolver problemas aplicando conceptos estudiados; mayores índices de reprobados y deserción que en materias de otras ciencias; así como el desarrollo de temor y aversión a la misma.(Glaros; 2002: 36-37).

Como lo menciona Artigue (1998) en lo que se refiere a límites, diferentes autores parecen estar de acuerdo en que el sentido común de la palabra límite, induce concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable, por lo que se le considera un obstáculo epistemológico en el sentido de que "se encuentra a la vez en el concepto y en el aprendizaje actual, a pesar de diferencias cognitivas y culturales evidentes, como si fuesen constitutivos de la génesis del concepto".

> No se trata de considerar los obstáculos extremos, como la complejidad o la fugacidad de fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Bachelard; 2000: 15).

El concepto de límite es un tema de la primera unidad del curso de Cálculo I de la preparatoria, tanto en el programa de estudio como en los libros de texto de este nivel educativo, se establece la noción intuitiva de límite, dejándose de lado, el concepto formal (Cauchy-Weirestrass), ello tal vez contribuye, a que se obstaculice el proceso de internalización, por lo que es necesario explicar las causas de las dificultades que se les presentan a los docentes y alumnos, en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en la preparatoria, para lograr identificar, las raíces del problema y sugerir posibles soluciones.

> Comprender las nociones intuitivas de límite y continuidad de una función. Fijar los teoremas y técnicas para el cálculo de límites de una función. Fijar los límites fundamentales algebraicos y trigonométricos. Conocer el número e y su carácter de número irracional y su valor aproximado. Reconocer que el límite de las funciones continuas se determina evaluando y que las funciones elementales son continuas en los puntos donde están definidas. (DGEP, Plan 2006:20).

El presente trabajo, tiene como finalidad, analizar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite para explicar las relaciones dinámico-causales de las dificultades que se presentan en la internalización del mismo. Existen pocas investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje y su efecto en el proceso de internalización de conceptos matemáticos, particularmente el del límite. Este estudio contribuirá a la investigación en esta área y el conocimiento que se forme tiene el potencial de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el Cálculo de la preparatoria.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Analizar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el curso de Cálculo I del bachillerato para explicar sus relaciones dinámico-causales y develar las dificultades que se presentan en la internalización de dicho concepto.

1.4.2. Objetivos específicos

Identificar las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en Cálculo I de la preparatoria.

Explicar las relaciones dinámico-causales de las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite desplegando los principales puntos que constituyen su historia.

Sugerir posibles actividades para la enseñanza del concepto límite de Cálculo I a partir de las dificultades encontradas en el proceso de internalización.

1.5. Hipótesis

- El enfoque de enseñanza de Cálculo I utilizado por el profesor para el tema de límites favorece un aprendizaje mecanicista de los límites lo que dificulta el proceso de internalización del concepto.

- La definición empírica que tienen los estudiantes de preparatoria del límite dificulta el aprendizaje del concepto límite de Cálculo I porque obstaculiza las transformaciones de la representación.

- La internalización del concepto formal de límite (Cauchy-Weierstrass) mejora el aprendizaje de Cálculo I al permitir explicar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite mediante las relaciones dinámico-causales de sus dificultades.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. El nivel medio superior o bachillerato

La educación media superior es el período de estudio que comprende entre dos y tres años en sistema escolarizado, por el que se adquieren competencias académicas medias para poder ingresar a la educación superior. El ciclo escolar se divide en semestres en la mayoría de los centros de estudios. Algunos de los programas de este nivel educativo consideran varias áreas de especialidad, en el último grado, con enfoque propedéutico en donde los estudiantes adquieren conocimientos básicos para posteriormente ingresar a la Universidad.

Las circunstancias de algunos momentos histórico-sociales, permitieron el desarrollo en el mundo del nivel educativo denominado educación media superior también conocida como bachillerato o preparatoria; se tiene el antecedente de que el creador de la enseñanza media clásica fue el alemán Joanes Sturmius o Sturm (1507-1589), que implantó los gymnasios. Los jesuitas en 1599, elaboraron un plan de estudios denominado Ratio studiorum, que comprendía dos ciclos: el inferior, que corresponde a los colegios y equivale a la educación preuniversitaria, y el superior, impartido en las universidades.

Desde la primera mitad del siglo XX se observa una doble vertiente en la educación media superior, por una parte los países desarrollados tienden una educación general más amplia para los estudios superiores con un enfoque propedéutico y por otra los países subdesarrollados enfatizan una preparación laboral, breve y práctica.

Al finalizar la Segunda Guerra Mundial se dan cambios en los sistemas educativos encaminados a educar en la reflexión y la formación de la personalidad. En Alemania se funden en uno solo los tres tipos de escuela de enseñanza media (gimnasio, gimnasio real y real escuela superior) con objeto de cultivar en los adolescentes todas las facultades humanas para su actividad futura. En los Estados Unidos la educación se orienta a desarrollar en el individuo los conocimientos, intereses, ideales, hábitos y capacidades que sirven para alcanzar un puesto en la sociedad y utilizarlos para perfilar su personalidad. En Italia se establece una escuela de carácter unitario que sustituye a los dos tipos de liceo (científico y clásico), cuyo objetivo es satisfacer la exigencia creciente de la industria y la administración, proporcionando al estudiante la capacidad de acceder a la instrucción superior con la única limitación de la selección basada en el mérito. En Francia, los diversos ciclos educativos se organizan de tal forma que un diploma de bachiller tiene tras de sí, por lo menos doce años de escolaridad, de los cuales tres pertenecen al bachillerato.

En 1967 con la finalidad de unificar el bachillerato en el mundo, se funda la Oficina de Bachillerato Internacional, que tres años después publica la primera Guía General de Bachillerato Internacional que señala la necesidad de dar al alumno una cultura general que le permita conseguir un sólido dominio de los instrumentos intelectuales necesarios para cualquier carrera universitaria o especialización profesional.

El bachillerato en México. Uno de los antecedentes más remotos de la enseñanza media en nuestro país se dio en 1537, con la fundación del estudio de humanidades en el Colegio de Santa Cruz de Tlatelolco; los jesuitas fundan los colegios de San Pedro y San Pablo, en 1574, y de San Ildefonso, en 1588, que al fusionarse, el 17 de enero de 1618, dan origen al

Real Colegio de San Pedro, San Pablo y San Ildefonso de México, antecedente de la Escuela Nacional Preparatoria.

Otro antecedente del nivel medio superior en México se encuentra en la constitución de Apatzingán, de 1814, en la que los constructores de la independencia nacional tienen clara conciencia de que la transformación de la sociedad pasa por la transformación de la educación. Otras fechas importantes en esta época son el decreto del 23 de octubre de 1833 que reforma la enseñanza superior (dos días antes se había creado la Dirección General de Instrucción Pública) y crea en el Distrito Federal dos establecimientos de educación preparatoria, y la Ley de Instrucción Pública del 27 de diciembre de 1865, durante el imperio de Maximiliano, que organiza la educación media al estilo de los liceos franceses.

El punto de partida de la organización de la educación media superior fueron: la Ley Orgánica de la Instrucción Pública del Distrito Federal y su Reglamento que se establecieron entre diciembre de 1867 y enero de 1868, en este ultimo año abre sus puertas la Escuela Nacional Preparatoria con el primer plan de estudios organizado por Gabino Barreda, que inicia con matemáticas y culmina con lógica; en 1901, surge el nuevo plan de estudios extiende a seis años y vuelve a la organización anual de los estudios de preparatoria. La Escuela Nacional Preparatoria atraviesa por nuevos planes de estudio en: el de 1916, que reduce el plan a cuatro años, el de 1918, que regresa el ciclo a cinco años, 1920, el de 1922, que es el primer plan aprobado por el Consejo Universitario.

En 1931, y como resultado del primer congreso nacional de Escuelas Preparatorias, surge el plan de estudios de 1931, en la Escuela Nacional Preparatoria, que establece el bachillerato especializado. Este plan de estudios es para toda la república con una duración de cinco años posteriores a la educación primaria. Se prevé un bachillerato no sólo como preparación a los estudios superiores, sino como preparación para la vida. El plan incluye el aprendizaje de un oficio. Del mismo congreso surge una reglamentación para la revalidación de estudios preparatorios. Fundada la escuela secundaria en 1926, este plan reduce el bachillerato a dos años posteriores a la secundaria. Un año después, un nuevo plan tiende a regresar al bachillerato único, sin descartar el especializado. En 1956 se impone la tendencia al bachillerato único.

Surgieron además hacia la mitad de ese siglo otros sistemas de bachillerato que enfatizan distintos aspectos de la formación de sus estudiantes, como por ejemplo, los estudios tecnológicos, a raíz de la fundación del Instituto Politécnico Nacional, que a nivel medio se dividen en pre-vocacionales y vocacionales, correspondientes a la secundaria y la preparatoria, respectivamente. http://www.sems.org.mx (2010).

Actualmente, en el país funcionan alrededor de 25 subsistemas de educación media superior, que ofrecen 200 carreras terminales y atienden cerca de cuatro millones de estudiantes. Algunos Sistemas de bachillerato son: los Centros de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales, los Centros de Bachilleratos Tecnológicos Agropecuarios, los Centros de Bachillerato Tecnológico, Industrial y de Servicios (CBTIS), los Colegios de Bachilleres, los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos de los estados, los Conalep, las preparatorias de las Universidades Autónomas estatales, las preparatorias de la UNAM, los bachilleratos de Artes del INBA y las escuelas privadas. De estos bachilleratos operan ocho en Sinaloa: CBTIS, COBAES, CONALEP, las particulares incorporados a la DGB, particulares incorporadas a COBAES, preparatorias de la UAS, particulares incorporadas a la UAS y preparatorias del Tecnológico de Monterrey.

La diversidad de subsistemas en la educación media superior a propiciado diversos problemas, entre ellos, la dificultad para revalidar estudios entre las diferentes instituciones de los niveles medio superior y superior, lo que ha obstaculizado el libre tránsito de los estudiantes y los limita en continuar los estudios, el bajo rendimiento en la enseñanza y el aprendizaje, la irregularidad y la deserción de alumnado.

Estos problemas son reflexionados en diferentes reuniones Nacionales y, en el Congreso Nacional del Bachillerato realizado en 1982, en Cocoyoc, Mor., se declara que el bachillerato constituye una fase de la educación de carácter esencialmente formativo y, por tanto, debe ser integral y no sólo propedéutico, con objetivos y personalidad propios. Se indica también que la finalidad del bachillerato es generar en el joven el desarrollo de una primera síntesis personal y social en orden a su integración en la sociedad, preparación para la educación superior y capacitación para el trabajo.

El bachillerato en Sinaloa. Paralelamente a lo que sucedía en el país, en Sinaloa fue naciendo el bachillerato y se llegaron a establecer a lo largo del siglo pasado ocho subsistemas, uno de los primeros antecedentes, sino es que el primero, data desde 1873, con la fundación del Liceo Rosales en Mazatlán, que, pretendía ofrecer una oportunidad de superación a la juventud y contribuir a la estabilidad política. La elevación de la cultura general formaría ciudadanos informados y fortalecería las instituciones republicanas. El establecimiento del Colegio Rosales en Culiacán al año siguiente, con oferta de educación preparatoria y profesional, sería un pilar muy importante para su desarrollo.

En la década de los setenta con el crecimiento de la demanda educativa en el Estado, surgen algunas preparatorias de UAS, en esa época no se contaba con programas de estudios para ninguna asignatura, así que, para impartir las clases a los alumnos, se seguían los estilos de enseñar de los profesores, como Modelo Educativos propios, las notas y apuntes eran la guía, tanto para los docentes como para los alumnos. Es hacia finales de los setenta, que se realiza el primer foro Estatal de preparatorias del que surge un nuevo plan de estudios y los primeros programas únicos para las asignaturas.

Es en los ochentas cuando la UAS amplía su plan de estudios de dos a tres años, incluye la capacitación para el trabajo y se da una reestructuración curricular, todas estas reformas curriculares, dan como resultado el Currículum del Bachillerato UAS 1994, el que se implementa en las preparatorias a partir del ciclo escolar 2000-2001.

Desde que fundaron las preparatorias de la UAS, han enfrentado tres reformas curriculares, la de 1994, la de 2006 y la del 2009. El proceso de reforma curricular del bachillerato de la UAS, iniciado en enero de 1991, da como resultado el Currículum del Bachillerato UAS 1994, en él se definía al nuevo bachillerato, el perfil del egresado y el propósito general de cada una de las áreas en 3 fases: 1) Fase de Introducción, donde se establecía claramente el enlace entre aquellos contenidos adquiridos en el Nivel Medio Básico y que permitieran a la vez, introducirlos al Nivel Medio Superior. 2) Fase de Profundización, en la cual los contenidos tuvieran carácter propedéutico para el Nivel Superior. 3) Fase de Especialización, donde los contenidos prepararan al estudiante en alguna área específica para proseguir sus estudios superiores en el área de su elección, es precisamente en esta fase especializada en donde se imparte matemáticas IV 'Cálculo diferencial e integral' y la fase se llamaba de ciencias físico matemáticas y estaba dirigida a todos los estudiantes que pensaran estudiar alguna ingeniería o ciencias naturales y exactas.

En el 2006 surge el plan 2006, con una nueva reforma curricular que sigue dejando las tres fases especializadas mencionadas en el plan anterior y divide los contenidos. En este plan se divide cálculo diferencial e integral (matemáticas IV, en el plan 1994), en cálculo I (matemáticas V) y cálculo II (matemáticas VI); la reforma del 2009 tiene como propósito unificar el bachillerato en México y propone un enfoque basado en competencias, dicha reforma empieza a implementarse en las preparatorias de la UAS, cabe mencionar que al momento de realizar la investigación no se contaba con los programas 2009 para Cálculo I ya que la reforma del bachillerato estaba en la fase del piloteo del primer grado y eran los únicos programas del 2009 que estaban a disposición.

Es importante señalar que la enseñanza del Cálculo en el bachillerato, se introdujo a finales del siglo XVIII, dos movimientos han marcado esta enseñanza, por una parte, las secuelas educativas de la matemática moderna, producto de la reforma francesa que básicamente modificó la estructura teórica de los contenidos curriculares, en programas de estudio y libros de texto, fue Cauchy el que marca las primeras diferencias entre las matemáticas y la enseñanza de las mismas en las aulas, define así la derivada, como el límite de un cociente y señala un nuevo rumbo en la enseñanza del Cálculo en la escuela y por el otro, la tecnología para la enseñanza propuesta por Estados Unidos que al parecer está movilizando las jerarquías de la argumentación discursiva.

2.2. El concepto límite

2.2.1. El límite en la historia del cálculo diferencial

El cálculo diferencial es una rama de las matemáticas que tiene sus orígenes en la necesidad del hombre de contar, los primeros descubrimientos se remontan a la época de Aristóteles, aunque es hasta el siglo XVII que las matemáticas estuvieron listas para los grandes avances. A mediados de este siglo destacaron cinco nombres, en la primera mitad: Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1655) y Pascal (1623-1662); durante la segunda: Leibniz (1646-1716) y Newton (1642-1727) a quienes se les atribuye la creación del cálculo infinitesimal, dando, sin lugar a dudas, la posibilidad a nuevas perspectivas de la matemática.

El cálculo infinitesimal, que se entiende como el proceso de manejar cantidades muy pequeñas, incluso más pequeñas que lo microscópico, tiene una historia que se remonta al siglo V AC, cuando Demócrito creó una teoría centrada en el concepto de átomo. Los átomos para Demócrito eran la materia prima de todo ser y debido a que eran indescomponibles e indestructibles, hacían que la materia no se destruyera, sino que se transformara, conservando por supuesto la energía que llevaba dentro. También Eudoxio y

Arquímedes, en el siglo III AC, trataron con cantidades infinitesimales. En un palimpsesto[2], recuperado a comienzos del siglo XX, se encontró mimetizado, en lo que aparentemente era un libro de oraciones, una de las obras consideradas desaparecidas de Arquímedes, conocida como "*El Método*". Este trabajo del gran matemático griego, tiene que ver, entre otras cosas, con el cálculo de áreas bajo curvas, usando el método exhaustivo, hoy equivalente en esencia a la integral de Riemann. (Pantoja, 2008: 59).

El método de Arquímedes carece de tres elementos fundamentales del cálculo infinitesimal, desarrollado en el presente:

1. El concepto de límite que involucra al infinito actual, idea completamente inalcanzable para la mente humana de esa época.
2. El proceso algorítmico del que se dispone hoy en día.
3. El conocimiento de la interrelación de los procesos de integración y diferenciación.

Arquímedes no contaba con el simbolismo matemático que facilitara los cálculos, fue Leibniz, quien introdujo los símbolos para manipular la integral "∫" y la diferencial "d". Esto refleja en sus ideas filosóficas el hecho de buscar un lenguaje simbólico y operacional para representar los conceptos e ideas del pensamiento, de tal manera que los razonamientos y argumentos se pudieran escribir con símbolos y fórmulas. Este nuevo descubrimiento o planteamiento revolucionó a las matemáticas.

[2] Un *palimpsesto* es un manuscrito que aparecía sobre un papiro o pergamino que previamente se había borrado o barnizado para permitir su reescritura. Esta práctica se siguió en la edad media debido a la escasez de papel o pergamino.

> El carácter matemático del conocimiento científico –esto es, el hecho de que es fundado, ordenado y coherente- es lo que hace racional. La racionalidad permite que el progreso científico se efectúe no sólo por la acumulación gradual de resultados, sino también por revoluciones. Las revoluciones científicas no son descubrimientos de nuevos hechos, ni son perfeccionamientos en la exactitud de las observaciones, sino que consisten en la sustitución de hipótesis de gran alcance (principios) por nuevos axiomas, y en el reemplazo de teorías enteras por otros sistemas teóricos.(Bunge; 1979: 25-26).

El cálculo aportó a las matemáticas una nueva racionalidad, en el sentido formal-instrumental ya que ha posibilitado la formalización de nuevos procedimientos que se venían estudiando desde Arquímedes, su surgimiento ha dado mejores explicaciones a problemas científicos y sus métodos han ampliado el horizonte de las matemáticas. En sus comienzos el cálculo fue planteado para resolver cuatro problemas científicos y matemáticos (cfr. p. 65):

1. Encontrar la tangente a una curva en un punto (derivada).
2. Obtener los valores máximos y mínimos de una función (aplicación de la derivada).
3. Encontrar la longitud de una curva, el área de una región, el volumen de un sólido (integral).
4. La velocidad y la aceleración instantáneas (aplicaciones de la derivada e integral).

Estos problemas fueron investigados, por diferentes científicos brillantes, quienes concluyeron esta obra, la creación del cálculo, fueron Leibniz y Newton, cada uno con un enfoque particular, de acuerdo a sus intereses científicos. Newton lo abordó, desde sus investigaciones físicas, por lo que habló de cantidades que "fluyen" y estudió fenómenos referentes a los cambios en las velocidades, mientras que Leibniz se enfocó en lo geométrico y trató a la derivada como un cociente de incrementos (ínfimos) y no como una velocidad.

> La invención del cálculo por Newton y Leibnitz (y del problema de la exclusión de algunos resultados paradójicos que sus propios métodos intuitivos no excluyeron) creó la necesidad de una nueva aritmetización, una nueva reducción a los números naturales. A pesar de los espectaculares éxitos del siglo XIX y los primeros años del XX, esta reducción no ha tenido un éxito completo. (Popper; 1996: 156)

Después de las aportaciones de Newton y Leibnitz sobre variación infinitesimal, no fue sino hasta el siglo XIX, que el cálculo tuvo un enfoque lógico diferente, en el que los matemáticos como Euler, Lagrange, Cauchy, Gauss, Weierstrass y Riemann entre otros dieron prioridad a la presentación final de los métodos más que a su utilización en la resolución de problemas concretos, todo esto gracias a la definición del significado de función y el concepto de límite (formalizado por Cauchy-Weirestrass).

El concepto de límite, es sin lugar a dudas el concepto más importante del cálculo infinitesimal y al mismo tiempo, el más difícil, pues se tiene la idea de límite como algo que está al borde o al final de algo, y no como la definición provisional que presenta Spivak (1998) al inicio del capítulo 5 de su libro Calculus: "la función ***f*** tiende hacia el límite **ℓ** **c**erca de ***a***, si se puede hacer que ***f***(x) esté tan cerca como queramos de **ℓ** haciendo que **x** esté suficientemente cerca de **a**, pero siendo distinto de ***a***". Está definición no permite expresar formalmente el límite de alguna función, ya que no precisa como hacer que *f(x)* esté cerca de **ℓ**, siempre que se *x* esté cerca de a, en este sentido Spivak explica cual es el defecto de esta definición provisional, lo que va indicando la importancia de comprender el significado de este concepto.

> El defecto está, no en nuestro razonamiento, sino en nuestra definición. No está claro cómo se puede "hacer" $\boldsymbol{f}$(x) próximo a $\boldsymbol{\ell}$ (cualquiera que sea el significado de la palabra próximo) "haciendo que" x esté suficientemente próximo a ***a*** (por muy próximo que tenga que ser el "suficientemente" próximo)." (Spivak, 1998:117).

El problema en esta explicación es que el significado de la frase 'hacer *f(x)* próximo a *L*, haciendo que *x* esté suficientemente próximo a *a'*, no es completamente claro, ¿Qué tanto es próximo y qué tanto es suficientemente próximo? Si se puede asignar un significado preciso a esta frase, entonces se puede dar un significado preciso al límite. Fue Cauchy, alrededor de 1820, quien le dio un significado matemático a *x* "suficientemente próximo" dado por un número δ y formuló la siguiente definición:

> *La función f(x) tiene el límite L cuando x tiende al valor a si correspondiendo a todo número positivo ε, sin importar qué tan pequeño sea, se puede encontrar un número positivo δ (que depende de ε) tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *para todo* $x \neq a$ *que satisfaga la desigualdad* $|x - a| < \delta$. (Courant, 2002: 341).

Es necesario aclarar que, en la definición ε - δ, el que *f(x)* 'se aproxime a' o 'tienda a' no significa movimiento en ningún sentido físico y fue precisamente Cauchy quien se dio cuenta de que en lo concerniente a conceptos matemáticos, cualquier referencia a una idea intuitiva previa de movimiento debe omitirse.

La clave de la definición de Cauchy está en la inversión del orden 'natural' en que se consideran las variables. Primero se fija la atención en un margen ε para *f(x)* y después se busca determinar un margen adecuado δ para *x*. Así '$f(x) \to L$ cuando $x \to a$' es sólo una forma breve de expresar, que esto se puede hacer, para todo número positivo ε. En particular, ninguna parte del enunciado tiene sentido por sí sola.

Esto indica que, primeramente se da el número ε y debe encontrarse el número δ. Además, como la definición dice "para todo ε>0" (no "para algún ε>0"), no se demuestra el límite si se encuentra un δ, para algún valor particular de ε, ni siquiera para varios de ellos. Se debe encontrar para cada ε un δ correspondiente. Por supuesto, que la δ que se encuentre depende de ε.

Para clarificar lo anterior, se ejemplifica el análisis preliminar y la prueba del límite de una función mostrando el δ que le corresponde a cada ε, considere el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}(3x-7)=5$$

Análisis preliminar. Sea ε un número positivo cualesquiera. Se debe encontrar δ>0 tal que

$$0<|x-4|<\delta \Rightarrow |(3x-7)-5|<\varepsilon$$

Considere la desigualdad de la derecha.

$$\begin{aligned}|(3x-7)-5|<\varepsilon &\Leftrightarrow |3x-12|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow |3(x-4)|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow |3||x-4|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow |x-4|<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Se debe ver ahora como escoger δ, en concreto δ = ε/3. Por supuesto, también funcionaría cualquier valor menor para δ.

Prueba. Sea ε>0. Escójase δ = ε/3. Entonces, $0<|x-4|<\delta$ implica

$$|(3x-7)-5|=|3x-12|=|3(x-4)|=3|x-4|<3\delta=\varepsilon$$

Esto es $|(3x-7)-5|<\varepsilon$.

De aquí se observa que para cualesquiera que sea ε>0 tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ se cumple que si $x \to 4$ entonces $(3x - 7) \to 5$. De donde se observa claramente que el δ depende de ε y que fue necesario encontrar el ε para elegir el δ y de esta manera, garantizar que a todo ε le corresponde un δ. Con lo que queda demostrado que el límite de la función existe.

La definición de límite ε – δ, es el resultado de más de cien años de investigación, y reúne en pocas palabras el esfuerzo de dotar a este concepto, de una base matemática sólida, sólo mediante el límite, pueden definirse las nociones fundamentales del Cálculo –derivada e integral–. Sin embargo, ha de mantenerse una discrepancia entre la idea intuitiva y el lenguaje matemático, diseñado para describir los rasgos científicamente relevantes de la intuición en términos lógicos exactos.

El concepto de límite, indica el valor al que se aproxima la función *f(x)*, cuando *x* se aproxima a "*a*" y este valor en algunas ocasiones coincide con el valor *f(a)*, es decir, el límite de *f(x)* cuando *x* se aproxima a "*a*" no necesariamente es *f(a)*. Como se muestra en el ejemplo de la tabla 1:

TABLA 1
EJEMPLOS DE LÍMITES

1. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	2. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
Sea $f(x) = 3x + 2$, se tiene que: $f(0) = 2$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$	Sea $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, se tiene que: $f(2)$ *no existe* $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

FUENTE: Documental, elaboración junio de 2009.

Los ejemplos en la tabla 1 muestran los casos que se presentan al resolver límites, en el ejemplo 1 se expone el caso de una función en la que el valor del límite y el de la función coinciden, esto no siempre sucede así, como lo demuestra el ejemplo 2, en el que la función no está definida para $x = 2$, sin embargo, cuando x se aproxima a 2, $f(x)$ puede aproximarse al límite 4 de tal manera que haya valores $x \neq 2$ para los cuales $f(x)=4$. Con los ejemplos se expresa que al hacer que x 'tienda a' a se puede permitir que x sea mayor o menor que a, pero se excluye terminantemente la igualdad al pedir que $x \neq a$, esto es, x tiende a 'a' pero nunca toma realmente el valor a, así pues, se puede aplicar la definición a funciones que no están definidas para $x = a$ pero que tienen límite definido cuando x tiende a 'a', esto es, al obtener el límite de una función, se analiza lo que pasa en ella cuando x se aproxima a un valor, sin ser necesariamente dicho valor.

Por otra parte, Courant (2002) menciona, la importancia del concepto límite en matemáticas radica, en que muchos números se definen sólo como límites –a menudo como límites de sucesiones monótonas acotadas–. Los números reales **e** y $\boldsymbol{\pi}$ constituyen un ejemplo de cómo pueden definirse mediante el límite de sucesiones, el primero de ellos, a partir del principio de las sucesiones monótonas y el segundo como el límite de una sucesión de perímetros de polígonos regulares con un número infinito de lados.

Así pues, el concepto límite[3] en matemáticas permite formalizar la aproximación, lo que contribuye a la abstracción de la representación y a la transformación del significado; a los

[3] Dado el nivel teórico requerido para esta problemática se considera hasta este nivel el presente concepto, sin embargo para mayor amplitud hay que considerar textos de análisis matemático como: Bartle, Haaser, Apóstol, Kuratoski, por mencionar algunos.

estudiantes de preparatoria les permite comprender mejor los temas de cálculo como la derivada y la integral y así, evolucionar a nuevos niveles de desarrollo.

2.2.2. Límite en el programa de Cálculo I

La enseñanza de conceptos de Cálculo Diferencial como límite y derivada, depende mucho del enfoque de enseñanza del Cálculo, del enfoque de los textos elegidos para tal efecto, así como, de los programas de estudio, es por ello que se vuelve necesario el análisis de estos componentes del proceso de enseñanza.

Como ya se mencionó, un elemento importante en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el bachillerato, lo constituye el enfoque desde el que lo plantea el programa de estudios, a continuación se exponen en las tablas 2A y 2B las características de los programa 1994 y 2006 de las preparatorias de la UAS, con la finalidad de identificar y explicar el enfoque de enseñanza que se propone en ellos.

TABLA 2A
CARACTERÍSTICAS DE LOS PLANES DE ESTUDIO
DE LAS PREPARATORIAS DE LA UAS

PROGRAMA 1994	**PROGRAMA 2006**
• La noción intuitiva de límite, es básicamente un concepto auxiliar para introducir la derivación, lo fundamental es preparar a los alumnos para comprender el concepto derivada y deducir las reglas de derivación.	• La noción intuitiva de límite, es básicamente un concepto auxiliar para introducir la derivación, lo fundamental aquí es preparar a los alumnos para comprender el concepto de derivada de una función y deducir las reglas de derivación.
• Para el cálculo de límites, lo fundamental es que los alumnos calculen los límites de las funciones elementales mediante evaluación y fijar las propiedades fundamentales de las operaciones con límites	• Para el cálculo de límites, lo central es que los alumnos calculen los límites de las funciones elementales mediante evaluación y fijar las propiedades fundamentales de las operaciones con límites.
• Se introduce el número **e** y se completa el estudio de las funciones elementales con la exponencial y la logarítmica de base **e.**	• Se introduce el número **e** y se completa el estudio de las funciones elementales con la exponencial y la logarítmica de base **e.**
• Se abordan los fundamentos conceptuales del Cálculo y los aspectos operativos básicos, desde una perspectiva tanto gráfica como numérica, utilizando donde sea posible la intuición, evitando caer en cualquier formalismo.	• Aspecto fundamental en el desarrollo de la clase que el maestro ilustre los “movimientos reales” que emplea cuando interactúa o resuelve problemas matemáticos. Esta es la forma más conveniente de incorporar la historia de las matemáticas a la didáctica de la misma.
	• Los conceptos de límite y continuidad, se introducen en un contexto empírico experimental (mediante ejercicios de evaluación de funciones) que sea familiar al estudiante, sin pretender necesariamente justificarlos rigurosamente desde un enfoque teórico-axiomático.
• Objetivos para el caso de los límites: -Comprender la noción intuitiva de límite. Fijar las propiedades fundamentales de las operaciones con límites. -Comprender la noción intuitiva de los límites en los que interviene el infinito. Fijar los límites fundamentales trigonométrico y algebraico. Conocer el número **e** y su carácter de número irracional y su valor aproximado. Conocer las funciones $y = e^x$, y = *lnx*, sus gráficos y sus propiedades fundamentales. -Comprender el concepto función continua y reconocer que el límite de las funciones continuas se determina evaluando. Reconocer que las funciones elementales son continuas en los puntos donde están definidas.	• Objetivos para el caso de los límites: Comprender las nociones intuitivas de límite y continuidad de una función. Fijar los teoremas y técnicas para el cálculo de límites de una función. Fijar los límites fundamentales algebraicos y trigonométricos. Conocer el número e y su carácter de número irracional y su valor aproximado. Reconocer que el límite de las funciones continuas se determina evaluando y que las funciones elementales son continuas en los puntos donde están definidas.

FUENTE: Programa 1994 y 2006 de la Dirección de Escuelas Preparatorias de la UAS, elaboración propia, octubre de 2009.

TABLA 2B
CARACTERÍSTICAS DE LOS PLANES DE ESTUDIO
DE LAS PREPARATORIAS DE LA UAS

PROGRAMA 1994	PROGRAMA 2006
• Plan temático y carga horaria: o Funciones, límites y continuidad (25 horas) o Cálculo diferencial (35 horas) o Cálculo integral (20 horas)	• Plan temático y carga horaria: o Funciones: variación, límites y continuidad (20 horas) o Concepto de derivada 20 horas) o Formulas y técnicas de derivación (25 horas) o Aplicaciones de la derivada (15 horas)
• Para la enseñanza se sugiere que se combine la exposición breve del profesor con la orientación de estudio independiente por parte de de los estudiantes.	• Metodología de enseñanza que equilibre los enfoques conceptual, intuitivo, operacional-algebraico y funcional (o de aplicaciones). Procurando que la formalización sea más frecuentemente un punto de llegada (cuando sea esta posible) y no de partida.
	• Desarrollar un "*microcosmos matemático en el salón de clase"*. Así, el aprendizaje de las matemáticas podrá generarse como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción.
• Contenidos de la unidad 1: -Límites y continuidad. Noción intuitiva de límite de una función en un punto. Reglas para las operaciones con límites. Unicidad del límite. Límite de una constante, límite de la identidad, límite de un radical. Límite de una función polinomial y límite de una función racional. Límite infinito de una función en un punto, asíntotas verticales. Límites al infinito de una función (cuando la variable del dominio de la función crece o decrece sin cota), asíntotas horizontales. -Límites fundamentales trigonométrico y algebraico. El número **e**. Funciones exponencial y logarítmica de base **e**, sus gráficos y propiedades. Concepto función continua. Interpretación geométrica de la continuidad. Propiedades de las funciones continuas. Continuidad de las funciones elementales.	• Contenidos de la unidad 1: Variación y cambio de funciones. Concepto y definición intuitiva de límite de una función en un punto. Límite de funciones por cálculos aproximados. Teoremas y técnicas para el cálculo de límites de funciones. Unicidad del límite. Límite de la función constante. Límite de la función identidad. Límite de la función $y = \sqrt{x}$. Límites de funciones polinomiales y racionales. Límite infinito de una función en un punto, asíntotas verticales. Límites al infinito de una función (cuando la variable del dominio de la función crece o decrece sin cota), asíntotas horizontales. Límites fundamentales trigonométricos: $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{tanx}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$ El número e. ($e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$).
	• La intervención docente que se propone se fundamenta en la observación (corroborada por la investigación educativa) de que si los estudiantes tienen la oportunidad de observar y practicar las actividades que muestran los miembros de una "cultura matemática", entonces entrarán en contacto con las diversas formas de utilizar el lenguaje, y podrán desarrollar pensamientos y acciones de los expertos de la disciplina y comenzarán gradualmente a actuar de acuerdo con sus normas y estrategias. (enfoque del liberador). • El profesor promoverá en el aula la interacción grupal cooperativa entre los alumnos, pues ella es una variante de enseñanza y de aprendizaje congruente con la idea de comunidad de practicantes o aprendices y resulta muy efectiva en el desarrollo de una psicopedagogía centrada en el estudiante y de una didáctica centrada en la resolución de problemas.

FUENTE: Programa 1994 y Plan 2006 de la Dirección de Escuelas Preparatorias de la UAS, elaboración propia, octubre de 2009.

De la tabla se observa que ambos programas tienen varias similitudes y que algunos elementos no se modifican en el plan 2006, se puede notar, por ejemplo, que en ambos programas, el plan temático y la carga horaria estimada para cada tema, se modificó pues el segundo tema del programa 1994 en el plan 1996 se divide en tres temas; los límites son una parte del primer tema y que a éste le corresponde el menor tiempo para su tratamiento, desde los objetivos se evidencia que los límites se reducen en el concepto a la noción intuitiva y para la parte procedimental a la evaluación de los mismos, esto en contra del significado matemático del límite; también se puede notar que, el programa 2006 presenta más sugerencias para el desarrollo de la práctica docente.

El plan 1994 de las prepas de la UAS, tiene un sustento teórico en la psicología cognitiva, se le da mucha importancia a los conocimientos previos, a la apropiación y transferencia de los aprendizajes; en el caso de los límites, se enfatizan los conocimientos previos sobre algebra, desigualdades y funciones, se propone el aprendizaje intuitivo del concepto límite y se aborda desde su representación numérica, por aproximaciones sucesiva y su representación gráfica, para la parte procedimental, se establecen reglas para las operaciones con los límites, lo que se reduce a evaluar límites con el propósito de la apropiación de las reglas para su transferencia en la derivación de funciones.

Por su parte, el programa 2006, plantea una didáctica centrada en la resolución de problemas, enfatiza en la interacción social de los grupos, para crear cultura y propone una metodología cooperativa, para favorecer la interacción, así mismo, se sugiere, se equilibre los enfoques conceptual, intuitivo, operacional-algebraico y funcional, de manera que el punto de llegada sea la formalización, esto es, llegar a formalizar el conocimiento, a través de las distintas representaciones, sean numéricas, gráficas o procedimentales, para el caso del concepto límite, se propone la noción intuitiva, ya que, se considera un concepto auxiliar para introducir la derivada, en lo referente a la parte procedimental, se centra en la obtención del límite por medio de la evaluación.

2.2.3. Límite desde los diferentes textos del bachillerato

Otro aspecto de estudio, en el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo, son los enfoques que contienen los libros de texto de la bibliografía básica del bachillerato, pues cada uno de ellos marca un determinado estilo de enseñanza, por esta razón se requiere analizar los textos de Cálculo Diferencial, para considerar a los autores de estos enfoques; Cantoral (1997) señala: "Los libros de texto en Cálculo son entidades protagónicas de las prácticas sociales en el ambiente de la escuela. Una visión crítica de sus principios y sus propuestas de articulación con otros elementos del proceso escolar resulta indispensable para hacer un balance adecuado de su funcionamiento". A continuación se presenta el cotejo de algunos textos de Cálculo Diferencial del bachillerato:

1) **Anfossi** (1954); el apartado 2 de la parte 1 está dedicada a límites, en la sección 21 se ve la idea de límite, mediante aproximaciones sucesivas, utilizando cuadrados encajados y el cálculo de áreas de triángulos; en la sección 22, describe la notación de límites; en la sección 23 se da siguiente definición: "se dice que una variable **v** tiene por **límite** una cantidad finita L cuando la diferencia $|L - v|$ **puede llegar a hacerse y conservarse** menor que cualquier número positivo, dado de antemano, por pequeño que se lo suponga, o sea, si $|L - v| < \varepsilon$."; en la sección 24 se explican algunas aclaraciones considerando funciones

racionales y trigonométricas; en la sección 25 se enuncian variables que tienen por límite cero; en la sección 26 se exponen diferentes clases de límites, se analizan tres casos, primero cuando la variable se conserva constantemente menor que su valor límite, segundo cuando la variable es siempre mayor que el límite y tercero cuando la variable oscile al tender a su límite; los dos primeros casos se ejemplifican por medio de expresiones racionales y el tercero mediante una trigonométrica; en la sección 27 se explica el límite de la razón del seno y de la tangente de un ángulo al ángulo; en la sección 28 se enuncian dos principios relativos a los límites, el de la suma y el del producto por una constante diferente de cero; en la sección 29 se demuestran tres propiedades relativas a los límites: el límite de la suma, el límite del producto y el límite del cociente, estas demostraciones se realizan utilizando variables, también se enuncian dos propiedades la de la potencia enésima y el de la raíz enésima. Para finalizar el apartado se proponen 25 ejercicios.

2) **Bosch** (1981); en el capítulo 2 se estable el concepto de límites en base al concepto abordado en el capítulo anterior de continuidad, se demuestran teoremas utilizando la continuidad de las funciones, se ejemplifica la resolución de límites detallando los procedimientos algebraicos.

3) **Flores Meyer** (1982); la unidad 2 está dedicada a los límites; en la sección 2.1 aparece el 'Concepto intuitivo de límite' se ejemplifica por medio de una función racional, la aproximación de $f(x)$ cuando x se aproxima a un determinado valor, para ello se utilizan aproximaciones sucesivas por la derecha y por la izquierda; en la sección 2.2 'Tender por la derecha, por la izquierda', se plantea la condición necesaria para la existencia de un límite;

en la sección 2.3 'Calcular numéricamente el límite de $\frac{sen\,x}{x}$ si $x \to 0$', se analizan las aproximaciones sucesivas por la derecha y por la izquierda y se presenta un ejemplo; en la sección 2.4 'Definición de Límite' se precisa la definición formal de límite de la siguiente manera: *Si se tiene una función f y los números a y L se dice que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Es decir que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.; en la sección 2.5 el 'Análisis de los valores absolutos de la definición de límite' para eso se analizan gráficamente los valores absolutos para ε y δ de la definición formal; en la sección 2.6 'Interpretación geométrica' se interpreta geométricamente los valores absolutos para ε y δ de la definición formal, se presenta un ejemplo y se proponen ejercicios a resolver; en la sección 2.7 las 'Propiedades de los límites' se enuncian y ejemplifican algunas propiedades de los límites, se prioriza en los procedimientos algebraicos; en la sección 2.8 las 'Diferentes clases de límites' se analiza una función racional y una trigonométrica; en la sección 2.9 el 'Límite de la razón del seno y de la tangente de un ángulo al ángulo', se explica el procedimiento para encontrar límites trigonométricos especiales como: $\frac{sen\,x}{x}$ y $\frac{Tan\,x}{x}$, se proponen ejercicios para resolver; en la sección 2.10 la 'Continuidad y Discontinuidad' aquí se establecen las condiciones para la continuidad de funciones, se enuncia la discontinuidad en la gráfica, se exponen algunos ejemplos y se proponen ejercicios para resolver.

4) **Leithold** (1987); en la sección 1.2 del capítulo 1 se aborda el concepto de límite primeramente a manera intuitiva, trabajando la noción de proximidad hasta llegar a la definición formal de límites con Épsilon-delta (Cauchy) de la siguiente manera: *Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a a, excepto, posiblemente, en el número a mismo. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si el siguiente enunciado es verdadero:

Dada cualquier ε > 0, sin importar cuán pequeña sea, existe un δ > 0 tal que si

$$0 < |x - a| < \delta$$

Entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se ejemplifican algunos límites algebraicos utilizando la definición; en la sección 1.3 se demuestran, utilizando la definición formal, los teoremas de límites, se desarrollan algunos ejemplos y se proponen ejercicios por resolver; en la sección 1.4 se exponen los límites laterales para lo que se define límite lateral derecho y límite lateral izquierdo, se enuncian y ejemplifican algunos teoremas y se proponen ejercicios a resolver; la sección 1.5 está dedicada a los límites infinitos, los que se explican primeramente mediante aproximaciones y el análisis de las gráficas de las funciones, se da la definición de cuando una función cree o decrece sin límite, se demuestran formalmente y ejemplifican teoremas que implican límites infinitos y se proponen ejercicios para su resolución; la secciones 1.6, 1.7 y 1.8 tratan sobre: la continuidad de una función en un número, la continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo y la continuidad de las funciones trigonométricas y teoremas de estricción, respectivamente, para ello se establecen las condiciones de continuidad, se demuestran y ejemplifican teoremas y se proponen ejercicios para resolver; en las secciones 1.9 y 1.10 (suplementarias) se demuestran algunos teoremas acerca de límites de funciones y se proponen ejercicios para resolver; al final del capítulo se proponen ejercicios de repaso.

5) **Leithold** (1988); en la sección 2.1, aborda el límite de una función para lo que explica la noción de límite de una función, mediante el cálculo del valor de una función en la proximidad de un número, a través de aproximaciones sucesivas, para luego dar la definición de límite de una función: S*ea* f *una función que está definida para todo número de un intervalo abierto I que contiene a* a, *excepto posiblemente para el número* a *mismo. El límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* a *es L, lo cual se escribe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si $|f(x) - L|$ *puede hacerse tan pequeño como se desee haciendo* $|x - a|$ *lo suficientemente pequeño, pero* $|x - a| > 0$. Se enuncian y ejemplifican teoremas sobre límites priorizando en los procedimientos algebraicos; en la sección 2.2 se exponen límites unilaterales e infinitos para lo que se define el límite por la derecha y el límite por la izquierda, se enuncian y ejemplifican algunos teoremas; en la sección 2.3 se trata la continuidad de una función, en la definición se establecen las tres condiciones para la continuidad y se enuncian y ejemplifican teoremas de continuidad, al finalizar cada sección se proponen algunos ejercicios sobre los temas abordados en la sección para que el estudiante los resuelva.

6) **Silva y Lazo** (1996), la sección 11.6 está dedicada a los límites y se pretende que el alumno sea capaza de: Definir el límite de una función, Interpretar gráficamente la definición de límite, enunciar el teorema de unicidad de límite, definir límite por la derecha y por la izquierda de un valor *a*, obtener límites unilaterales y demostrar que el límite de una función existe utilizando la definición; para ello se ejemplifica aproximaciones sucesivas de una función racional, de ahí se da la definición del límite como:

"Sea f una función que esté definida en todo punto de algún intervalo que contenga a *'a'*, excepto posiblemente en $x = a$. *El límite de* $f(x)$, *cuando x se aproxima a 'a' es L* y se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para todo ε > 0 existe δ > 0 (δ depende de ε) tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ } siempre \text{ } que \text{ } 0 < |x - a| < \delta.\text{"}$$

Se continúa con el significado geométrico de límite y se establece el teorema de unicidad, (no se demuestra), se exponen los límites unilaterales por medio de aproximaciones sucesivas y se da definición de límites laterales, su significado geométrico y se establece el teorema de la existencia del límite. Se demuestra la existencia de algunos límites de funciones (lineales, cuadráticas y una racional) utilizando la definición. En la sección 11.7 se demuestran algunos teoremas como el de la suma de funciones y el producto de una constante por una función, se enuncian los teoremas de límite para las funciones producto, cociente y potencia así como $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$, esta sección culmina encontrando el límite de diferentes funciones aplicando teoremas. En la sección 11.8 se abordan límites especiales, se explica el significado de expresiones como:

$$a) \lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

$$b)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

$$c)\ \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$d)\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Se enuncian teoremas para el cálculo de límites infinitos y se utilizan estos para calcular límites.

7) **González** (1997), el capítulo 2 está dedicado a límites de funciones algebraicas se proponen noventa ejercicios para hallar los limites de funciones algebraicas, en la sección de respuestas se da la solución de los límites propuestos, por otro lado al inicio del capítulo 2 se presenta una breve reseña de Nicole Oresme, no se da ninguna definición de límite ni se ejemplifica ningún procedimiento. El libro está orientado, a un curso introductorio, por lo que los ejercicios propuestos se limitan a la aplicación práctica del tema, en este caso a la resolución algebraica de los límites.

8) **Granvill** (1998), el capítulo II está dedicado a variables, funciones y límites; en el apartado 14 'límite de una variable', se precisa el concepto de límite como: *Se dice que la variable v tiende a la constante l como límite, cuando los valores sucesivos de v son tales que el valor numérico de la diferencia $v - l$ puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño como se quiera.* Se ejemplifica con una sucesión infinita de valores; el apartado 15 'Límite de una función', ahí se expone el límite mediante variables dependiente e independiente y se establece la notación para el límite:

$$\lim_{v \to l} z = a$$

Donde z es una función dada z de v; en el apartado 16 'Teoremas sobre límites', se enuncian, el teorema de la suma, el del producto y el del cociente y se presentan ejemplos de cada uno; en el apartado 17 'Funciones continuas y discontinuas', se define una función continua en a si cumple con:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Y discontinua si no satisface esta condición, además se analizan dos casos, uno en el que está definida la función en el valor y en el otro no; en el apartado 18 está dedicado a 'Infinito (∞)' se exponen los casos en los que aparecen límites infinitos y se dan algunos ejemplos, se proponen 20 problemas relacionados a los límites, en los apartados 19 'Infinitésimos', finalmente en la parte 20 está el 'Teorema relativos a infinitésimos y límites' se explica lo que se entiende por infinitésimo y se enuncian algunos teoremas.

9) **Pita** (1998), en el capítulo 2. 'Límites', trata el límite, iniciando con la idea de estudiar el comportamiento que tienen las imágenes de la función $y = f(x)$ cuando la variable x se encuentra cerca del valor $x=a$, que considera el concepto intuitivo de límite, para adentrarse en tema aborda ejemplos de funciones mediante tablas por aproximaciones sucesivas, ejemplifica la función polinomial $f(x) = x^2$ cuando $x \to 2$ para después retomar la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando $x \to 1$, se analizan los mismos gráficamente y luego se reflexiona sobre la función escalonada $f(x) = \begin{cases} 1 & si, x \neq 0 \\ 0 & si, x = 0 \end{cases}$ se discute sobre estos ejemplos y el significado de límite; en la siguiente sección del capítulo, se expone la definición rigurosa de límite para precisar la idea matemática de "tan cerca de" de la siguiente manera:

Sea $f \subseteq R \rightarrow R$ *una función con dominio en un intervalo abierto D, el cual contiene al punto x=a (aceptamos que el punto x=a no pertenezca a D). Se dice que el límite de la función f(x) cuando x tiende a* ***a****, es igual a* ***L****, lo cual se escribe como* $\lim_{x \to a} f(x) = L$. *Si dado cualquier ε>0 (por pequeño que sea) existe siempre un número δ>0 tal que:*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Se ven algunos ejemplos que se apoyan de sus gráficas y se pasa a los teoremas sobre límites, se demuestran algunos y se resuelven ejemplos, para pasar a algunas formas indeterminadas, se exponen varios ejercicios; se tratan los límites infinitos y los límites al infinito y por último explicar los límites laterales.

10) **Arquímedes Caballero** (2000), en el capítulo II, inicia con la noción intuitiva de límite, luego se ven unos ejemplos intuitivamente, se trata el infinito y lo infinitamente pequeño, se establecen algunos límites básicos, para el caso en que la variable tiende a cero o a infinito, enuncia tres propiedades fundamentales: el límite de una suma, el límite de un producto y el límite de un cociente; finalmente se obtienen límites de función, aplicando las propiedades enunciadas mediante la sustitución de la variable independiente por el valor al que tiende como un límite, por ejemplo si $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 9}$, $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9}{x + 9} = \frac{\lim(x^2 - 9)}{\lim(x + 9)} = \frac{4 - 9}{2 + 9} = -\frac{5}{11}.$$

Se abordan ejemplos y el caso de las indeterminaciones sólo para funciones algebraicas y se pasa al capítulo III, la derivada de una función.

11) **Purcell, Varberg** (2000); el capítulo dos está dedicado a funciones y límites, en el apartado 2.4 se aborda la introducción a los límites, mediante la noción intuitiva, para lo que se utilizan las aproximaciones sucesivas, además se expone el significado intuitivo de límite y se ejemplifica para siete diferentes funciones, se definen límites laterales para enunciar el teorema de la existencia del límite, para finalizar el apartado se proponen 53 ejercicios; el apartado 2.5, trata el estudio riguroso sobre límites, en el significado preciso de límite se presenta la siguiente definición: *Decir que*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

Significa que para cada $\varepsilon > 0$ *dada (sin importar qué tan pequeña sea), existe una correspondiente* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$*, siempre que* $0 < |x - c| < \delta$*; es decir,*

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se dan algunas pruebas de límites utilizando la definición, esto lo marcan como opcional, para finalizar el apartado se proponen 29 ejercicios; en el apartado 2.6, se demuestran teoremas sobre límites y se resuelven algunos ejemplos utilizando los teoremas, al final del apartado se proponen 51 ejercicios; en el último apartado del capítulo (2.7) se aborda la continuidad de funciones utilizando límites y al final del apartado se proponen 49 ejercicios; en el apartado 2.8 se proponen 30 ejercicios de diversos conceptos y 34 problemas diversos como problemas de repaso del capítulo.

12) **Fuenlabrada** (2001); el tema está ubicado en el capítulo 2 que trata de límites, en la sección 1, se expone el límite de una sucesión, en la sección 2 se ve el límite de una función, mediante aproximaciones sucesivas por la derecha y por la izquierda, se abordan dos ejemplos: una función lineal y una racional; en la sección 3 se da el concepto del límite

de la siguiente manera: " Cuando una variable x se aproxima cada vez más y más a una constante a, de tal manera que la diferencia x-a, en valor absoluto, puede ser tan pequeña como se quiera, se dice que la constante a es el límite de la variable x. Se expresa: $x \to a$ o también lím $x = a$."; en la sección 4 se enuncian proposiciones para el cálculo de límites (teoremas), no se demuestran y se ejemplifica cada una ellas con funciones algebraicas; en la sección 5, se enuncian los casos de los límites en tanto la variable tiende a cero, así como cuando tiende a infinito y se enlistan 10 ejemplos de funciones polinomiales y racionales; en la sección 6, se tratan las formas indeterminadas, considerando dos casos, primero la forma $\frac{0}{0}$ para la que se ven ejemplos de funciones racionales y con radical, luego la forma $\frac{\infty}{\infty}$ la cual se ejemplifica con funciones racionales y por último se enlista una serie de 25 ejercicios; este texto deja la definición como noción intuitiva, enuncia teoremas sin demostrarlos y en las ejemplificaciones se da prioridad a los procedimientos algebraicos para la resolución de los límites; cabe señalar que este es el libro de texto de los alumnos de la preparatoria A.

13) **Salinas y otros** (2002); en el libro se fundamenta la estrategia en el diseño de hojas de trabajo y la secuencia para abordar cada uno de los problemas por el estudiante consiste en: un primer enfrentamiento individual; posteriormente, discusión de la solución con dos o tres compañeros integrados en equipo y, por último, en una puesta en común de la respuesta del equipo; en las hojas de trabajo correspondientes a la U.III se abordan 'acercamientos' a graficas de funciones que representan velocidades y temperaturas y luego se utiliza

$$\lim_{\Delta x \to o} [\quad]$$

Para resolver problemas de rapidez y para tratar algunas funciones algebraicas se utiliza:

$$\lim_{\Delta x \to o} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right].$$

14) **Larson, Hostetler, Edward** (2005)**;** el capítulo 1 trata de límites y sus propiedades, al inicio del capítulo se presenta una breve reseña del artículo “¿Cuán alto? ¿Cuán rápido?” de Sharon Begley y Adam Rogers como introducción al concepto límite; en la sección 1.1 ‘Vista previa del Cálculo’, el que inicia con la interrogante ¿Qué es cálculo? Y presenta un comparativo de problemas de matemáticas abordados sin cálculo y con cálculo diferencial, señala la importancia de la noción de límite y describe los dos problemas clásicos del Cálculo: el de la recta tangente y el del área, para finalizar el capítulo se propone una investigación, ejercicios y aplicación del concepto; en la sección 1.2 ‘Forma de hallar límites gráfica y numéricamente’, se introduce los límites mediante aproximaciones sucesivas por la derecha y por la izquierda, utilizando para ello tablas en ejemplos de funciones racionales, luego enuncia la definición formal del límite de la siguiente manera:

Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contenga a c (excepto posiblemente en c) y sea L un número real. La expresión

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Significa que para cada $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que, si*

$$0 < |x - c| < \delta, entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se ejemplifica la obtención de un δ para cada ε de funciones lineales y cuadráticas, para finalizar la sección se proponen ejercicios y aplicación del concepto; la sección 1.3 ‘Evaluación de límites en forma analítica’ para la evaluación de los limites se expresan las propiedades sin su demostración rigurosa y se resuelven límites algebraicos y racionales, los más complicados, son los indeterminados y para resolverlos se tiene que factorizar o racionalizar; se establecen algunos teoremas como el de la composición y algunos límites de trigonométricas especiales, al terminar la sección se proponen ejercicios y aplicación del concepto; en la sección 1.4 ‘Continuidad y límites laterales’, el tema de continuidad se trata por medio de los límites y sus propiedades, por último se ven los límites infinitos para lo que se exponen algunas definiciones y teoremas para su resolución, al finalizar se proponen ejercicios de la sección y de repaso del capítulo; los límites, en este texto se explican a través de definiciones y axiomas, lo que lo sitúa en un enfoque axiomático del Cálculo.

15) **García, Juárez y Martínez** (2005); el capítulo II está dedicado a Funciones, Límites y continuidad, lo divide en cuatro secciones o apartados, el capítulo inicia con una biografía de Augutín Louis Cauchy, en la que se presenta una semblanza de su vida y se expresa que es él quien formaliza los conceptos de función, límite y continuidad; en el apartado 1. Discusión de una función, se establecen algunas definiciones para la gráfica de una función se ejemplifican y se proponen 10 ejemplos para resolver, en el apartado 2. Funciones, se define función como conjunto de parejas ordenadas y como relación de correspondencia de variables, se ejemplifica la evaluación de funciones algebraicas, se definen y exponen ejemplos de las operaciones: suma, resta, producto y cociente de funciones; se exponen la funciones compuesta e inversa, para finalizar el apartado se analizan la función exponencial y logarítmica; en apartado 3. Límites, inicia con la exposición de la idea de límite mediante la construcción de cuadros encajados sucesivamente y la paradoja de Zenón; continua con la determinación del límite de la función $f(x) = \frac{2x^2+7x-4}{x+4}$, cuando *x* tiende a -4, para lo que se resuelve por aproximaciones sucesivas por la derecha y por la izquierda, mediante tablas, luego se resuelve analíticamente por factorización del numerador y por último se gráfica; se

establece la siguiente definición de límite: “El límite de una función *f(x)*, es el valor al cual tiende o se aproxima la función, cuando la variable independiente ‘x’ tiende (o se aproxima por la izquierda o por la derecha) a un valor ‘a’; lo cual se generaliza de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Se enuncian teoremas de los límites, se ejemplifican límites por cálculos indirectos, se exponen límites infinitos y límites al infinito para lo que se muestra el procedimiento para su solución y se explican tres límites especiales trigonométricos con algunos ejemplos resueltos, para el apartado 4. Continuidad, se establecen las condiciones de continuidad, se definen la discontinuidad removible y la esencial, se proponen ejemplos resueltos, para finalizar el capítulo se exponen problemas de aplicación de los límites en: drogas ilegales, población, problema de la glucosa, agente cancerígeno, ingreso por voltaje vendido y reacción química. Es importante señalar que este texto es el principal apoyo del docente de la preparatoria B.

16) **Ortiz Campos** (2006); la unidad que aborda límites inicia con ‘en contacto con tus conocimientos’ en donde se proponen diez ejercicios sobre límites algebraicos, en uno se solicita encontrar δ para el ε establecido, en otro se pide la prueba de un límite de una función lineal, el resto de los ejercicios son para calcular el valor del límite, estos ejercicios tienen el propósito, como lo explica el autor, en la presentación: que los alumnos relacionen el conocimiento que poseen acera del punto a tratar y transiten de una situación conocida a una nueva, en condiciones de proponer el modelo matemático, cuya solución resuelve un problema y además podrán analizar la estructura básica de los problemas que se les

formulen, en la sección 2.1, se presenta la noción intuitiva de límites, mediante ejemplos geométricos y aproximaciones sucesivas que se van desarrollando gradualmente hasta establecer la siguiente definición:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Significa que la diferencia entre f(x) y L se puede hacer tan pequeña como se quiera siempre que x esté próximo a c con x≠c. Se explica que para expresar que la diferencia entre *f(x)* y *L* puede ser tan pequeña como se quiera se escribe $|f(x) - l| < \varepsilon$ y para expresar que *x* está próximo a *c*, pero *x≠c* se escribe $0 < |x - c| < \delta$; se resuelven siete límites de funciones algebraicas para los que se dan el ε y la δ, se proponen una serie de ejercicios a resolver utilizando la definición formal; se enuncian y ejemplifican teoremas sobre límites, se proponen cuarenta ejercicios para calcular límites, utilizando los teoremas, en los límites infinitos y límites en el infinito se ejemplifican las formas indeterminadas del tipo: $\frac{0}{0}\ y\ \frac{\infty}{\infty}$ y se proponen 85 ejercicios para resolver; en la sección 2.2 Teorema de continuidad de una función se estableen las condiciones para determinar la continuidad y discontinuidad de una función, se enuncian y ejemplifican el teorema del valor medio y el teorema de valores extremos, en la evaluación sumativa se proponen diez ejercicios sobre funciones algebraicas , dos de ellos para utilizar la definición formal y el resto para calcular el valor del límite; para ampliar el conocimiento se propone al final de la unidad un glosario de significados y bibliografía.

17) **Cuéllar** (2007)**;** utiliza una metodología a la que llama ‘metodología del máximo aprovechamiento y se fundamenta en cinco pasos:

1. Exposición teórica de un concepto.

2. Se presenta un ejemplo resuelto en donde el alumno puede ver la aplicación del concepto o fórmula.
3. Se pide al alumno aplique sus conocimientos para resolver un ejercicio o problema relacionado con su vida diaria.
4. En la sección de evaluación, el alumno pondrá en práctica sus habilidades para resolver un problema a partir del método que crea más conveniente.
5. El alumno comprobará su avance al corroborar que el resultado es el mismo aunque haya seguido un procedimiento diferente al expuesto originalmente.

Para el capítulo 1, 'Límites y continuidad', se inicia el tema de límites con la noción intuitiva de una variable que se aproxima a un valor límite, para ello, se utiliza el área de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia cuando n tiende a infinito, luego, se define limite de una variable mediante valores sucesivos, se expone el ejemplo de $1+\frac{1}{n}$; se aborda la noción intuitiva de límite a través de aproximaciones sucesivas para ello se utilizan tablas y graficas, se explica los límites laterales y se establece la condición para la existencia del límite, se enuncian algunas de las propiedades de los límites sin demostración y se dan las técnicas para calcular límites mediante tablas y por las propiedades, se resuelven varios ejemplos prioritariamente algebraicos, se abordan algunos límites trigonométricos y de funciones exponenciales; no se establece la definición formal ni se demuestran las propiedades, se da mayor énfasis a procedimientos algebraicos.

18) **Ibáñez** (2007), la unidad I es dedicada al tema de límites, inicia con el apartado ¿para qué sirven los límites? En él se da, una breve explicación, de la importancia del concepto y una reseña histórica, a continuación se proponen diez ejercicios en el apartado ¿Cuánto

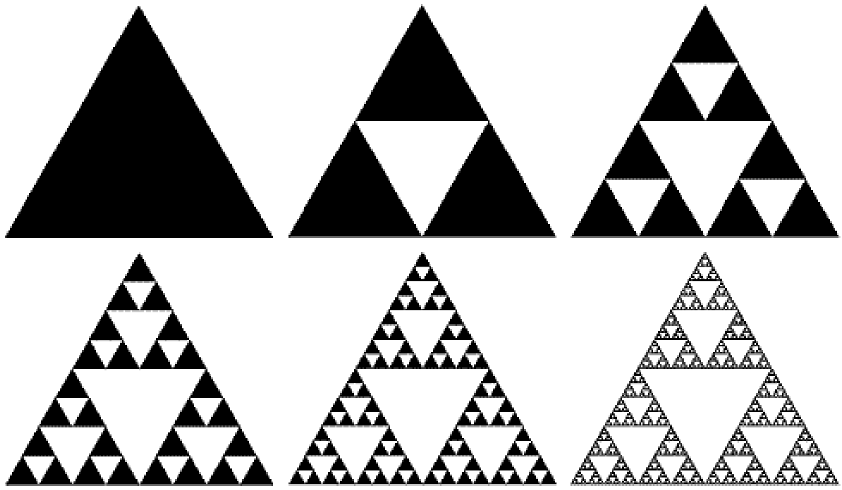
sabes?, en cuatro de ellos se solicita calcular límites algebraicos, así como una demostración utilizando límites laterales, se pide indicar la discontinuidad de una función racional, después con el valor del teorema del valor intermedio, mostrar una raíz de un polinomio de tercer grado, por último, se plantean tres limites especiales para resolver; la siguiente sección titulada “la práctica hace al maestro” se expresa la noción intuitiva de límites, a través de representaciones graficas, se enuncian y ejemplifican teoremas sobre límites, se analizan funciones: polinomiales, racionales, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, cada una de ellas se ve gráfica y analíticamente (procedimientos de límites), se encuentran límites infinitos y en el infinito, los que se explican gráfica y algebraicamente (procedimiento), se dan las condiciones de continuidad, enunciándose y explicándose gráficamente los teoremas del valor intermedio y el teorema de los valores extremos, luego se proponen ejercicios para resolver individualmente y por equipo, tanto gráficamente, por aproximaciones sucesivas, utilizándose teoremas o procedimientos, en el apartado, tecnología a tu servicio, se sugieren algunos sitios WEB para reforzar el aprendizaje, en el apartado, preparándote para el examen de admisión a la universidad, aparecen trece ejercicios de opción múltiple, los que muestran una estructura similar a los que presentan los alumnos para ingresar al nivel superior, en el apartado, integración del aprendizaje se sugiere la elaboración de un mapa sobre límite, en el apartado ¿Cuánto aprendiste? Se presentan de nuevo los diez ejercicios propuestos al principio de la unidad para saber cuánto sabes y de esta manera contrastar el avance de los estudiantes en los temas abordados en la unidad; para finalizar se contempla una evaluación formativa en la que se incluyen: guía de observación, listas cotejo y la retroalimentación, con la finalidad de tener distintas visiones del proceso de aprendizaje y poder triangular los distintos resultados.

19) **Glaros Dinaky** (2008), el capítulo 2 comprende a los límites; en la sección 2.1 ‘introducción al concepto límite’ está explicado el problema de la recta tangente y el problema de la velocidad instantánea, cerrándose con cuatro ejercicios; la sección 2.2. ‘Definición intuitiva de límites’ se ejemplifican cuatro funciones, en las que se observa el comportamiento de las funciones cuando x se aproxima a algún valor numérico mediante aproximaciones sucesivas, se explica el método gráfico para encontrar límites, se definen los límites unilaterales, se establecen unos teoremas y se ejemplifican, al final de la sección se proponen algunos ejercicios; en la sección 2.3 ‘Propiedades de los límites’, se enuncian y ejemplifican algunas propiedades de los límites para lo que se analizan las formas numéricas (aproximaciones sucesivas), gráficas y analítica (procedimientos algebraicos), al finalizar la sección se proponen ejercicios; en la sección 2.4 ‘límites infinitos y límites al infinito’, se definen: la asíntota vertical, límite infinito y asíntota horizontal, se enuncia un teorema sobre límite infinito, se ejemplifican límites infinitos de algunas funciones, se grafican funciones utilizando asíntotas verticales y horizontales y se proponen ejercicios. En este texto no se aborda la definición formal del límite, sin embargo, se tratan tres distintas representaciones de los límites, numérica, grafica y analítica, lo que contribuye a la resignificación de la definición empírica de los estudiantes.

20) **Jiménez** (2008), la unidad 1 se llama ‘Límites y continuidad’, inicia con una introducción en la que se presenta una breve reseña de que es el Cálculo, continúa con una presentación preliminar, en la que se expone el concepto límite para el desarrollo del Cálculo, en la sección ‘límites y continuidad’, se analiza el triángulo de Sierpinski, para una mejor comprensión del concepto límite, luego se define el límite de una variable como: la

diferencia $|A - \sum a_n|$ llega a ser menor que cualquier número positivo pensado de antemano, donde A es el área del Triángulo y $\sum a_n$ es el área de los triángulos encajados.

GRÁFICA 1
TRIÁNGULO DE SIERPINSKI



Fuente: Documental, elaboración propia abril de 2010.

En la sección 'límite de una función. Límites laterales', queda establecida la definición de límite, con base a las aproximaciones sucesivas por límites laterales; en la sección teoremas fundamentales de los límites, se enuncian cinco teoremas de límites; en la sección límites de funciones polinomiales, se ejemplifican límites de funciones polinomiales por aproximaciones sucesivas, gráfica y analíticamente (procedimiento algebraico); en la sección límites de funciones racionales se da el mismo tratamiento que a las funciones polinomiales, se ejemplifican límites por aproximaciones sucesivas, gráfica y analíticamente, priorizando en los procedimientos algebraicos para factorizar y racionalizar; de igual forma se abordan las funciones especiales en la sección: 'el cálculo de límites de funciones especiales'; en la sección 'continuidad' se establecen las condiciones de continuidad de una función y se ejemplifican algunas funciones racionales y escalonadas; en la sección 'Teorema del valor intermedio', se enuncia y ejemplifica el teorema; para finalizar en la sección 'El teorema del valor extremo', se expone el teorema.

21) **Mora y Del Río** (2008), la unidad 3, está dedicada a límites y derivadas, en la ficha 1 se ve el concepto intuitivo de límite I, para lo que se utilizan ejemplos físicos y secuencia de rectángulos, se hace un comparativo del concepto intuitivo de límite con las acepciones en el diccionario de la lengua española, en la ficha 2, se aborda el concepto intuitivo de límite II, utilizándose las aproximaciones sucesivas por la derecha y por la izquierda, mediante ejemplos de funciones algebraicas, la ficha 3: Definición formal de límite I, se expresa la siguiente definición: 'Sea c un punto en un intervalo abierto; *f(x)* una función definida en todo ese intervalo (con posible excepción de *c*), y M un número real.

$$\lim_{x \to c} f(x) = M$$

significa que para todo ε > 0, existe una δ > 0 tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - M| < \varepsilon$', se desarrollan dos ejemplos, uno sobre una función constante y el otro una lineal y se proponen tres ejercicios de funciones lineales para resolverlos utilizando la definición formal; en la ficha 4, titulada: Definición formal de límite II, se resuelven cuatro ejercicios de funciones algebraicas, utilizándose la definición formal y se proponen otros cuatro como ejercicios para los estudiantes; en la ficha 5, se ve la inexistencia de límites para lo que se abordan ejemplos de funciones escalonadas y racionales; en la ficha 6 'Teoremas sobre límites I', se enuncian y ejemplifican cinco teoremas de límites: la suma, el producto, función inversa, producto de constante por función y el del cociente; en la ficha 7 'Teoremas sobre límites II', queda demostrado el teorema de la suma, se enuncian y ejemplifican dos teoremas para radicales; la ficha 8 ‘ Comportamiento al infinito’, plantea la tendencia al infinito de algunas funciones: racionales, trigonométricas y logarítmicas; en la ficha 9 ‘Continuidad’, se establecen las condiciones para la continuidad de funciones y se dan algunos ejemplos; en la ficha 11 ‘Definición de derivada’ se define la derivada de una función mediante un límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Al finalizar la unidad 3, se propone 24 ejercicios adicionales, en la autoevaluación se plantean 21 problemas y por último se plantean 20 ejercicios complementarios.

No se puede negar que los libros de textos, en el bachillerato, son una herramienta primordial en el proceso de enseñanza aprendizaje, pues apoyan las prácticas sociales en el ambiente del aula; analizar crítica y objetivamente el enfoque propuesto en ellos, para el tema de límites, es necesario para hacer una exploración de su contribución al proceso de internalización del límite. Como lo mencionara Ricardo Cantoral (1997): los libros de texto de Cálculo son entidades protagónicas de las prácticas sociales en el ambiente de la escuela.

Existen tres enfoques en la enseñanza del Cálculo, por una parte está, el enfoque algorítmico que prioriza el dominio operativo de las reglas de Cálculo, en el caso de los límites se enfatiza en la resolución algebraica de los mismos y como ejemplos de este enfoque, están los textos de: Bosh, Flores Meyer, Leithold (1988), Silva y Lazo, González, Granville, Arquímedes Caballero, Fuenlabrada, Salinas, Ortiz Campos, Cuéllar, Ibáñez, García, Juárez y Martínez, Glaros y Jiménez. Por otra parte, el enfoque formal, da prioridad a los procedimientos ajustados a las formas establecidas del Cálculo, para el caso de los límites, a la definición épsilon-delta y establecer los resultados de acuerdo a ella, los textos con este enfoque son: Leithold (1987), Pita, Purcell-Varberg y Mora y Del Río. Por último, existe el enfoque axiomático, el cual enfatiza en la estructura abstracta, para el caso de los límites, éstos son tratados a través de definiciones y axiomas, los textos con este enfoque son: Anfossi y Larson, Hostetler y Edward. A continuación se muestra en la tabla 3, ejemplos del contenido de uno de los libros referente a cada enfoque mencionado.

TABLA 3
EJEMPLOS DE ENFOQUES DE ENSEÑANZA EN LIBROS DE TEXTO

Libro y enfoque	**Ejemplo**
Enfoque algorítmico (García, Juárez y Martínez; 2005: 57)	Límites por cálculos indirectos 8. $$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-2x-24}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-6)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = \lim_{x\to -4}(x-6) = -4-6 = -10$$
Enfoque formal (Purcell-Varberg; 2000: 76)	EJEMPLO 1 Encuentre el $$\lim_{x\to 3} 2x^4.$$ $$\lim_{x\to 3} 2x^4 = 2\lim_{x\to 3} x^4 = 2\left[\lim_{x\to 3} x\right]^4 = 2[3]^4 = 162$$
Enfoque axiomático (Anfossi; 1954: 34-35)	31. 3ª propiedad. *El límite del cociente de dos variables, es igual al cociente de los límites respectivos de dichas variable, siempre que el límite del divisor no sea cero.* Sean, como antes, v_1 y v_2 las dos variables; a_1 y a_2 sus límites respectivos. Considere la identidad: $$\frac{v_1}{v_2} \times v_2 = v_1$$ Tomando límites en cada miembro, se obtiene: $$lim\frac{v_1}{v_2} \times limv_2 = limv_1$$ O sea: $lim\frac{v_1}{v_2} = \frac{limv_1}{limv_2}.$

FUENTE: Anfossi (1954), García (2005) y Purcell (2000). Elaboración propia noviembre de 2010.

De los ejemplos expuestos en la tabla se observa que, el primero se resuelve mediante la aplicación de procedimientos algebraicos, la factorización de un trinomio, para luego simplificar y finalmente evaluar, lo que ejemplifica el enfoque algorítmico; en el segundo caso, se puede notar que, el límite se resuelve siguiendo las formas de los teoremas de límite, por lo que expone el enfoque formal; el tercer caso, muestra como una propiedad se demuestra utilizando identidades y teoremas, esto es, ejemplifica el enfoque axiomático.

Por otra parte, la perspectiva de los libros de texto de cálculo, según expongan las características en las que se centren las relaciones entre los conceptos primordiales, como lo ha mencionado Ricardo Cantoral pueden ser: relaciones entre variables, donde los conceptos se estructuran en la idea paramétrica de variable; relaciones entre funciones, aquí los conceptos se estructuran sobre la idea matemática de función real de variable real; o, relaciones entre estructuras, los conceptos se estructuran en la idea de estructura matemática de número real.

En este sentido, los textos de Anfossi, Granville, Arquímedes Caballero, Fuenlabrada y Cuellar, tienen un enfoque que especifica las relaciones entre variable; *Anfossi y Granville* se caracterizan por las relaciones entre variables; en el primero, se define y demuestran teoremas de límites de variables, se llega a la definición formal, utilizando ejemplos geométricos, por lo riguroso de las demostraciones, remite a un aprendizaje axiomatizado de los límites; mientras que en el segundo, los conceptos de función, límite, continuidad, derivada e integral, se estructuran sobre la idea paramétrica de variable, aunque utiliza ejemplos para establecer la noción intuitiva del límite, no llega a establecer la definición formal, ni se demuestran teoremas, lo que remite a un aprendizaje de limites algoritmizado por operaciones algebraicas. En este mismo sentido Arquímedes Caballero, Fuenlabrada, Cuellar y Jiménez, inician abordando límite de una variable y llegan al límite de funciones, a través de la sustitución de la variable independiente, lo que los encamina a un aprendizaje algorítmico de los límites.

Mientras que los textos de Bosch, Flores Meyer, Leithold (1987), Leithold (1988), Silva y Lazo, González, Pita, Purcell-Varberg, Salinas, Larson-Hostetler y Edward, Ortiz Campos, Ibáñez, Glaros y Mora y Del Río, tienen un enfoque basado en las relaciones entre funciones. Además *Glaros* y *Leithold* (1987), son los que siguen el enfoque de la historia del Cálculo, por una parte Glaros e Ibáñez llegan a la definición intuitiva pero no establecen la formal, se puede observar que después de abordar algunos ejemplos numéricos, para aproximaciones por la derecha y por la izquierda de diferentes funciones se establece la definición intuitiva de límite, se establecen las propiedades de los limites utilizando el método gráfico para su comprensión, en el texto no se aborda la definición formal épsilon-delta de los limites (de Cauchy), pero la utilización del método gráfico y la definición intuitiva del límite facilitan su comprensión formal, esto ayuda a que los alumnos cambien la percepción que tienen del concepto límite como barrera infranqueable y lo resignifiquen como aproximación, no obstante no se llega al conocimiento científico; por otra parte Leithold (1987), Pita, Purcell-Varberg, Larson-Hostetler y Edward, y Mora y Del Río, llegan de manera intuitiva a la definición de límite y después de hacer un análisis de diferentes situaciones al concepto formal del límite. Además Flores Meyer, Leithold (1988), Silva y Lazo, Ortiz Campos, llegan a establecer la definición formal del límite, después de abordar la noción intuitiva, en ambos casos aun cuando se llega a la definición formal, se le sigue dando prioridad a la resolución algebraica de los límites. Bosch, González, Salinas no establecen el concepto de límite plantean ejercicios dando prioridad a los procedimientos algebraicos.

En los libros de texto analizados, no se encontró ninguno, con enfoque basado en las relaciones entre estructuras, un ejemplo de texto con este enfoque es el de Kuratowski pero es un libro utilizado en niveles más avanzados y no es apto para usarse en el bachillerato. En la tabla 4 se exponen ejemplos de un libro con cada uno de los enfoques según las relaciones que se establecen, para este caso, entre el concepto de límite.

TABLA 4

EJEMPLOS DE ENFOQUES SEGÚN RELACIONES ENTRE CONCEPTO LÍMITE

Libro y enfoque	**Ejemplo**
Enfoque relaciones entre variables Granville (1998)	Definición de límite. *Se dice que la variable v tiende a la constante l como límite, cuando los valores sucesivos de v son tales que el valor numérico de la diferencia $v - l$ puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño como se quiera.*
Enfoque relaciones entre funciones Larson, Hostetler, Edward (2005)	Definición de límite. *Sea f una función definida sobre un intervalo abierto que contenga a c (excepto posiblemente en c) y sea L un número real. La expresión* $$\lim_{x \to c} f(x) = L$$ *Significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si* $$0 < \lvert x - c \rvert < \delta, entonces\ \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon.$$
Enfoque relaciones entre estructuras Kuratowski ( )	Definición de límite. *Un número g se llama límite de una sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ si para todo número positivo ε existe un número k tal que para $n > k$, se verifica la desigualdad* $\lvert a_n - g \rvert < \varepsilon,$ *esto es a_n está entre $g - \varepsilon$ y $g + \varepsilon$.* *Designamos el límite de una sucesión con el símbolo* $$g = \lim_{n=\infty} a_n$$

FUENTE: Granville (1998), Larson (2005) y Kuratowski ( ). Elaboración propia noviembre de 2010.

De la tabla se puede notar que: en el primer ejemplo el límite se define mediante variables, en el segundo, el limite se define por medio de una función definida en un intervalo de valores reales y, en el tercero se expone el límite como una sucesión infinita, lo que remite a la estructura de los números reales.

Por todo lo anterior es posible deducir, respecto de los libros de cálculo usados como texto en el bachillerato, que: a) Existe una fuerte tendencia, por parte de los profesores, de usarlos como herramienta básica de contenido en el proceso de enseñanza aprendizaje; b) En la mayoría de los textos está planteado el concepto formal de límite; c) La totalidad de los textos de cálculo, hacen énfasis en los procedimientos algebraicos; d) En su generalidad plantean un estilo algorítmico, lo que, implícitamente favorece el enfoque algorítmico para la enseñanza del Cálculo, e) Casi en su totalidad, los textos del bachillerato proponen un enfoque que centra los conceptos en las relaciones entre funciones, ningún libro de este nivel educativo plantea las relaciones entre estructuras y, f) Es susceptible usar los textos como herramienta didáctica, elemento pedagógico implícito.

Además es importante mencionar que muchos de los autores de los libros de texto son extranjeros, lo que implica una marcada delantera en la producción de conocimientos del cálculo respecto a México, esto va más allá, en tanto que los contenidos expresan rasgos culturales y tradicionales científicos sobre las matemáticas. Entonces las traducciones que se hacen están matizadas de una diversidad cultural que dificulta en los estudiantes del cálculo la comprensión, es decir, el sentido y los significados de los conceptos abordados en ellos, “Es un secreto a voces el que los libros de texto que usamos son en su abrumadora mayoría estadounidenses, franceses y rusos. En este sentido, una especie de transposición transcultural aparece como contribución agregada al fenómeno de transponer los saberes al sitio didáctico". Cantoral Ricardo (1995), de esta manera queda aún un trabajo de interpretación que realizan los profesores para poder enseñar.

Para abordar el concepto de límite existe una gran variedad de bibliografía para el bachillerato, el concepto de límite es uno de los más complejos en matemáticas, representa simbólicamente la aproximación, para ello se utilizan símbolos propios que permiten la formalización, y eso no quiere decir que el enfoque de enseñanza debe ser formalizado, pues cuando se inicia formalizando, además de ir en contra de la historia de las matemáticas, trae dificultades en el aprendizaje, en este sentido, es importante formalizar la definición de límite, lo ideal es llegar a ello, más no partir de lo formal.

> La definición de límite en términos de ε y δ es el resultado de más de cien años de ensayo y error, e incorpora en unas pocas palabras el fruto de un esfuerzo persistente para dotar a este concepto de una base matemática sólida. Solo mediante procesos límite pueden definirse las nociones fundamentales del Cálculo –derivada e integral– Sin embargo, una comprensión clara y una definición precisa estuvieron bloqueadas durante largo tiempo por una dificultad aparentemente insuperable. (Courant y Robbins, 2002: 342).

La formalización del límite permite al estudiante continuar la construcción de conocimientos de Cálculo y comprender las definiciones de derivada e integral, esto no es fácil, requiere negociar la formalización del límite a través de la mediación entre el enfoque del programa de estudios, el enfoque de enseñanza del docente, el enfoque del libro del texto y la representación del alumno.

2.3. Enseñanza y aprendizaje de Cálculo

2.3.1. Enfoques de la enseñanza del Cálculo

La enseñanza del Cálculo es complicada, pues es necesario fusionar la aritmética, el algebra, la geometría, la continuidad de funciones, los infinitésimos, entre otros elementos; si a ello se le añade una nueva estructura simbólica, el resultado de todo esto se transforma en algo sumamente complejo de comprender. La representación simbólica, propia del Cálculo, es necesario enseñarla al mismo tiempo que se enseña Cálculo (Antolín, 1999). Así, surgen los símbolos de los límite, derivada e integral, además del simbolismo algebraico, ya conocido por los estudiantes.

Es importante que el docente tenga en cuenta que el alumno requiere aprender en la escuela el conocimiento científico, esto es, comprender conceptos abstractos, para ello se requiere que el docente, por medio del diálogo, medie entre el conocimiento común de los alumnos, para que a medida que avance la actividad conjunta, se logre el conocimiento científico, esto lo menciona Mercer (2001) en lo que tiene que suceder para que un maestro enseñe y el alumno aprenda.

> Para que un enseñante enseñe y un estudiante aprenda deben emplear la conversación y la actividad conjunta para crear un espacio de comunicación compartido, una “zona de desarrollo intermental” (ZDI) sobre la base contextual de sus conocimientos y sus objetivos comunes. En esta zona intermental, que se reconstruye constantemente a medida que avanza el diálogo, el enseñante y el alumno negocian el desarrollo de la actividad en la que están participando. (Mercer; 2001: 181).

Para la enseñanza de los límites, el docente necesita identificar el significado que tiene para los alumnos esta palabra y negociar en la zona de desarrollo intermental, utilizando ejemplos numéricos, gráficos y analíticos sobre límites para lograr, como un primer paso la definición intuitiva de límite pues esto contribuirá a que el alumno vaya modificando el significando, y así seguir mediando hasta lograr el concepto formal (abstracto) del límite, pues ello contribuye al proceso de internalización que lleva a una significación cultural al alumno.

La visión y el propósito que cada maestro tienen del quehacer docente son elementos determinantes en la forma de estructurar la enseñanza. Como es sabido, existen tres enfoques básicos de la enseñanza, Fenstermacher y Soltis (1998), los mencionan como el del ejecutivo, el del terapeuta y el del liberador. El primero, promueve un manejo efectivo y eficiente del aprendizaje, mediante las mejores habilidades y técnicas disponibles, en este enfoque, cada nuevo aprendizaje se construye sobre el anterior; el segundo, se centra en la persona desde el tratamiento terapéutico de la personalidad, cada aprendizaje debe ser significativo en la vida de las personas y ayudarle en su crecimiento personal, emocional y afectivo; el último enfoque, da prioridad al desarrollo de la mente, imitando el trabajo de los expertos en cada una de las áreas, esto es, aprender historia debe significar ser historiador, así en este enfoque aprender matemáticas, debe ser para los alumnos, convertirse en matemáticos.

En este sentido cuando un maestro de cálculo utiliza el enfoque del ejecutivo para la enseñanza, considera importantes los materiales curriculares, como el programa y libro de texto, por lo que, elije con mucho cuidado el libro, buscando que, por un lado se cumpla con el programa y al mismo tiempo propiciar ciertos aprendizajes; también presenta materiales que le ayuden a guiar paso a paso a los estudiantes y, de esta manera, ellos puedan pronto desarrollar estrategias para manejarlos, parte de la premisa de que en matemáticas, todo conocimiento nuevo debe parecerse al anterior, por lo que, para cada nuevo aprendizaje necesitan el aprendizaje anterior, el docente ejecuta procedimientos y técnicas que contribuyan a lograr resultados efectivos en los alumnos, por ejemplo, cuando resuelve límites, primero los obtiene de funciones lineales y los límites indeterminados se resuelven de tal forma que se reduzcan a una expresión lineal. Esto se ejemplifica a continuación:

Primero resuelve,

$$\lim_{x \to 3}(x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Para luego,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Para el caso del maestro que maneja el enfoque terapeuta, el principal propósito es que el estudiante se desarrolle como persona, para ello, dispone experiencias con significado en la vida de los estudiantes y sabe despertar empatía en los alumnos, un ejemplo de esto en la enseñanza de cálculo del bachillerato es:

Se plantea el problema. Una colonia de bacterias duplica su tamaño cada día, actualmente hay una onza de bacterias (1 onza es aproximadamente 28.75 gramos).

a) Llena la columna derecha de la siguiente tabla que se refiere a la cantidad ***y*** de las bacterias (en onzas) al transcurrir el tiempo ***t*** (medido en días).

t	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

b) Obtén una fórmula para la cantidad de bacterias $\boldsymbol{y}$ (en onzas) en función del tiempo $\boldsymbol{t}$ (en días).

$$\boldsymbol{y(t) = 2^t}$$

Por su parte un docente de cálculo que recurre al enfoque liberador, es ante todo, un matemático, está convencido de que la mejor manera de aprender cálculo es aprender a ser matemático, trata a los alumnos como personas capaces de pensar, los estudiantes aprenden que, la solución a los problemas y los procedimientos algebraicos, están respaldados por teoremas, axiomas, que validan los resultados, también aprenden que no hay un solo camino para llegar a la solución y que las matemáticas han sido creadas por el hombre para facilitar la vida; y esto se puede ver, por ejemplo, cuando los alumnos resuelven una derivada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{senx}{\mathrm{cosx}}\right) = \frac{cosx\,\frac{d}{dx}(senx) - senx\,\frac{d}{dx}(cosx)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)\cos x - senx(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \csc^2 x$$

Y cuando se les pregunta qué si es la única manera de llegar a la solución, surge la siguiente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{senx}{\mathrm{cosx}}\right) = \frac{d(\tan x)}{dx} = \csc^2 x$$

Se dan cuenta, entonces, que las matemáticas no son complicadas.

En la enseñanza de las matemáticas particularmente para el caso del Cálculo, Cantoral menciona tres enfoques para su enseñanza: el algorítmico, el formal y el axiomático, los que dependen del énfasis que se le dé a los temas del Cálculo.

Los diferentes enfoques de enseñanza del Cálculo, pueden contribuir a facilitar u obstaculizar el proceso de internalización del concepto límite, por lo que se requiere reflexionar sobre los paradigmas que han estado presentes en la enseñanza del cálculo, los cuales son:

a) **El enfoque algorítmico,** pone énfasis en el dominio operativo de las reglas de cálculo (formulas de derivación e integración), dejando de lado su comprensión y significado, este enfoque permite la manipulación operativa pero dificulta su aplicación en la resolución de problemas.

b) **Enfoque formal,** se refiere a que los procedimientos usados (límites, derivadas e integrales) y sus deducciones, deben ser juzgadas únicamente si son conformes a lo señalado en las reglas, es decir, si los procedimientos se ajustan a la "forma" preestablecida por Cálculo Diferencial para enfocar determinado problema.

c) **Enfoque axiomático,** postula que el tratamiento axiomático, da solidez al cálculo, pues trata con estructuras algebraicas abstractas, que pueden ser conceptos, definiciones, teoremas y/o teorías.

Analizando todo lo expuesto anteriormente sobre enfoques, se puede considerar que el maestro que promueve un enfoque del ejecutivo, en cuanto a los de cálculo, requiere utilizar tanto el algorítmico, como el formalizado, ya que, busca los mejores métodos y procedimientos para que los alumnos aprendan, mientras que, el docente que favorece un enfoque del terapeuta, hace énfasis en lo algorítmico, dejando la parte formal y axiomática, en la búsqueda de vinculación con la vida cotidiana y, por su parte él que desarrolla el enfoque del liberador se sitúa desde lo axiomático al emular el trabajo científico; A continuación en la tabla 5, se muestra las coincidencias de los enfoques de enseñanza y los de enseñanza del cálculo.

TABLA 5
CARACTERÍSTICAS DE LOS ENFOQUES DE ENSEÑANZA

Enfoques de enseñanza	**Enfoques de la enseñanza del Cálculo**
ENFOQUE DEL EJECUTIVO • Ve al docente como ejecutor • Produce ciertos aprendizajes • Utiliza las mejores habilidades y técnicas • Son muy importantes los materiales curriculares • Se investiga sobre los efectos de la enseñanza • El docente es el gerente de los tiempos de clase	ENFOQUE ALGORITMICO • Dominio operativo de la reglas de Cálculo ENFOQUE FORMAL • Procedimientos usados conforme a las reglas
ENFOQUE DEL TERAPEUTA • Ve al docente como persona empática • Ayuda a cada individuo en se crecimiento personal • El objetivo es que el estudiante desarrolle su propio ser • Utiliza experiencias educativas con significado personal • Psicoterapia, psicología humanista y filosofía existencial	ENFOQUE ALGORITMICO • Deja de lado sentido y significado matemático
ENFOQUE DEL LIBERADOR • Ve al docente como liberador de la mente • Promotor de seres humanos morales, racionales, entendidos e íntegros • Educación liberal	ENFOQUE AXIOMÁTICO • Da solidez al Cálculo

Fuente: Elaboración propia en base a Cantoral (1997) y Fenstermacher-Soltis (1998); junio de 2010.

Del cuadro anterior, se pueden observar algunas coincidencias entre los enfoques de enseñanza, el enfoque del ejecutivo, concibe al docente como un excelente planificador, que busca las mejores técnicas para producir ciertos aprendizajes, en este sentido coincide con el enfoque algorítmico, en cuanto al dominio procedimental y con el enfoque formal en el ajuste de los procedimientos conforme a reglas y formas; en el enfoque del terapeuta, el docente se preocupa por el desarrollo del propio ser de los estudiantes, incentivando su motivación y autoestima, para ello presenta actividades educativas significativas, en este caso se podría decir que coincide con el enfoque algorítmico, en tanto se deja de lado el sentido matemático; por su parte el enfoque del liberador promueve saberes racionales e íntegros con el propósito de liberar la mente, en este punto tiene coincidencia con el enfoque axiomático, el cual busca la solidez del Cálculo mediante la racionalización de los saberes y que los alumnos aprendan a ser matemáticos.

Por su parte, los libros de texto implícitamente favorecen un enfoque de enseñanza, ya que son una de las herramientas didácticas de los docentes que les ayuda a organizar las clases, de esta manera, lo propuesto en cada texto y el énfasis que le da a los temas, permea el estilo de enseñanza de los profesores. En la tabla 6 se muestra la relación de los libros de texto con los enfoques de enseñanza.

TABLA 6
CORRESPONDENCIAS ENTRE ENFOQUES DE ENSEÑANZA
Y LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

Enfoques de enseñanza	**Libros de texto de Cálculo**
ENFOQUE DEL EJECUTIVO • Ve al docente como ejecutor • Produce ciertos aprendizajes • Utiliza las mejores habilidades y técnicas • Son muy importantes los materiales curriculares • Se investiga sobre los efectos de la enseñanza • El docente es el gerente de los tiempos de clase	Bosch, Purcell-Varberg Flores Meyer, Fuenlabrada Leithold (1988), Ortiz Campos Silva y Lazo, Cuellar González, Ibáñez Granville, Glaros Arquímedes Caballero
ENFOQUE DEL TERAPEUTA • Ve al docente como persona empática • Ayuda a cada individuo en se crecimiento personal • El objetivo es que el estudiante desarrolle su propio ser • Utiliza experiencias educativas con significado personal • Psicoterapia, psicología humanista y filosofía existencial	Salinas y otros
ENFOQUE DEL LIBERADOR • Ve al docente como liberador de la mente • Promotor de seres humanos morales, racionales, entendidos e íntegros • Educación liberal	Anfossi Mora y Del Río Leithold (1987) Pita Larson, Hostetler, Edward Jiménez

Fuente: Elaboración propia en base a Fenstermacher-Soltis (1998) y libros de texto Cálculo; junio de 2010

En el cuadro anterior se muestran los libros de texto que pueden favorecer a cada enfoque de enseñanza, por ejemplo se considera que Silva y Lazo favorece el enfoque ejecutivo pues es un texto que utiliza diferentes representaciones antes de establecer la definición formal de límite, lo que permite al docente organizar las clases y promover aprendizajes procedimentales, analíticos y conceptuales; Salinas favorece el enfoque del terapeuta pues propone ejercicios físicos y geométricos apegados a lo que sucede en la vida cotidiana buscando experiencias significativas en los estudiantes; por su parte Anfossi presenta distintas representaciones de límites fundamentadas en teoremas y definiciones con el fin de racionalizar la temática.

2.3.2. El aprendizaje en Cálculo

Los alumnos de bachillerato, tienen diferentes opciones para aprender límites, ya que existe la definición intuitiva (o noción intuitiva) y la formal Épsilon-delta (o Cauchy-Weirestrass), en el nivel medio superior se contempla en el programa de estudios y en la mayoría de los libros de texto, únicamente la noción intuitiva, aunque el ideal debería ser, establecer la definición formal. Para la idea intuitiva de límite, por ejemplo, Glaros expone que el límite de una función puede encontrarse por medio de diferentes formas, llamadas numérica, gráfica y analítica. En la forma numérica se tabula para encontrar el valor al que se aproxima una función, cuando x se acerca cada vez más a un número. En la forma gráfica, se observa el comportamiento de la gráfica de una función para encontrar el valor al que se aproxima la función, cuando x se acerca a un número. Finalmente, en la forma analítica se utilizan las propiedades de los límites y, si es necesario, se utiliza el algebra o cálculo para encontrar el valor al que se aproxima la función, cuando x se aproxima a un número. (Glaros; 2008:97). Esto según el enfoque del programa de estudios o del texto que se aborde en el curso.

> El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente, como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e idiosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición. (Ramos; 2005: 54).

Para Carmen María Valvidé Fernández (2008), las dificultades en la comprensión de los conceptos del cálculo se ubican en "entorno a las nociones de función (proceso-objeto; diferentes registros de representación) y límite (obstáculo-el sentido común de la palabra límite, sobre generalización de los procesos- dimensión proceso-objeto; característica del concepto-de lo intuitivo a lo formal)." (Valvidé; 2007: 533). En las clases de cálculo en la preparatoria, el alumno se encuentra con la dificultad de aprender el concepto de límite por la definición empírica que tiene del mismo, lo que representa un obstáculo epistemológico, de esta manera, es pues, más complicado el transito del concepto empírico al teórico, ya que el significado del connotativo que el alumno trae sobre límite se refieren a él como barrera o fin, en la medida que interactué con las representaciones del límite, surgirán los significados científicos que llevaran al alumno a nuevos niveles de desarrollo y por consiguiente a la resignificación cultural del concepto, lo que propiciará su aprendizaje.

En este sentido, cada uno aprende de acuerdo a su interés y motivación, por lo que toda estrategia de aprendizaje es válida y ella tiene mucho que ver con el contexto en el que se desenvuelve la persona; existen diferentes estilos de aprendizaje y estos se educan por lo que no hay una mejor estrategia, pero sí un buen o mal aprendizaje como lo mencionan Nisbet y Shucksmith (1987), "El factor que distingue un buen aprendizaje de uno malo o inadecuado es la capacidad de examinar las situaciones, las tareas y los problemas y responder en consecuencia". Cada contenido curricular le brinda a los alumnos la posibilidad de aprender y, no sólo el contenido declarativo de la materia, sino también a desarrollar técnicas y estrategias que le ayuden a aprender.

El aprendizaje es fundamental para el desarrollo del ser humano, Aprender es el acto por el cual el alumno intenta captar y elaborar los contenidos expuestos por el profesor, o por cualquier otra fuente de información. Él lo alcanza por medio de técnicas de estudio o de trabajo intelectual, así como utilizando estrategias de aprendizaje. El proceso que realiza el estudiante para aprender es complementario al de enseñanza y se realiza en función de objetivos, estos pueden ser diferentes para los alumnos y el profesor, más sin embargo, están relacionados, ya que, en el tipo de aprendizaje que el alumno realiza, como lo afirma Monereo (2004), son decisivas las siguientes cuestiones: las diferencias individuales, la interacción entre profesor y cada uno de sus alumnos o entre los diferentes grupos de trabajo, el conocimiento y las características de los contenidos conceptuales, procedimentales o actitudinales en cada tarea concreta e incluso los contenidos priorizados por el profesor.

En los objetivos que persiguen los profesores, como lo menciona Monereo (2004), se pueden presentar tres casos, un primer caso, enseñar a los alumnos a seguir instrucciones al pie de la letra; un segundo caso, conocer y utilizar de forma adecuada los procedimientos curriculares específicos de la tarea en cuestión; y un tercer caso, utilizar los procedimientos necesarios para resolver la tarea, reflexionando sobre qué hay que hacer, cómo hay que hacerlo y por qué, antes, durante y una vez terminado el trabajo. El tercer objetivo, comprende el que los alumnos aprendan estrategias para mejorar su aprendizaje y gestionarlo de forma autónoma y eficaz.

Es necesario entonces, definir qué son estrategias. Existen varias definiciones como: procesos ordenados, articulados y cíclicos que sirven de base a la realización de las tareas intelectuales, serie de habilidades utilizadas con determinado propósito, cualidad de flexibilidad, apreciación e imaginación que se necesita para conjuntar habilidades y tácticas en respuesta a un problema que se presenta. Para el trabajo se considera la definición de Monereo (2004): las estrategias de aprendizaje son procesos de tomas de decisiones (conscientes e intencionales) en los cuales el alumno elige y recupera de manera coordinada los conocimientos que necesita para cumplimentar una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción.

Esto requiere que el estudiante tenga una verdadera disposición a aprender de manera activa y estratégica, esto es, la disposición para enfrentar y mantener la concentración y el esfuerzo a lo largo de la tarea para lograr los objetivos de aprendizaje; el esfuerzo en el sentido de poner en juego “elementos costosos”, esto es:

> Ante una tarea, planificar los pasos que deberán realizarse, anticipar sus consecuencias, pensar en indicadores de progreso, supervisar la actividad mientras se realiza, revisar los resultados intermedios, introducir correcciones necesarias, buscar alternativas de solución a un incidente no previsto, evaluar la adecuación del proceso seguido y la pertinencia del producto obtenido, aprender de los errores cometidos para próximas tareas, y todo ello sostenido por mecanismos automotivacionales: alimentar el propio interés, controlar la ansiedad, reducir los sentimientos de miedo a fracasar, persistir en el empeño o pedir apoyo y ayuda cando sea necesario (Monereo; 2003:pp. 44-47).

Por su parte los docentes, con el pretexto de los contenidos de cada materia, enseñen estrategias de aprendizaje, pues el aprendizaje de ninguna manera puede ser solamente declarativo y de esta forma favorecer, desde cada asignatura, estrategias para que los alumnos aprendan. En este sentido cuando un alumno es capaz de utilizar una determinada estrategia en distintos contextos se puede decir que ha aprendido a aprender.

2.4. Teoría sociocultural

El cálculo surgió como producto del trabajo conjunto de muchos matemáticos que contribuyeron para ello, lo importante aquí, es la necesidad de recalcar que ha surgido como una construcción social, por ello se ha considerando, para el presente trabajo algunos conceptos de la teoría socio cultural, cuyo principal exponente fue Lev Vigotsky, y uno de sus principios fundamentales, es la consideración del individuo como el resultado de un proceso histórico y social, donde el lenguaje desempeña un papel esencial; el conocimiento en este caso del Cálculo, es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero entendiendo el medio desde un punto de vista social y cultural, esto es, los otros (compañeros, escuela y familia). "En el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero, entre personas (de manera interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (de manera intrapsicológica)… Todas las funciones psicológicas superiores se originan como relaciones entre los seres humanos". (Vigotsky, 1979, p. 94). Así pues, los estudiantes de bachillerato en la interacción con los demás en el aula aprenden cálculo, primeramente en el grupo, para luego hacer propio el conocimiento.

La teoría sociocultural está sustentada en el desarrollo de los individuos en sociedad, se ha sistematizado en elementos conceptuales, tales como:

- Las funciones mentales
- Las habilidades psicológicas
- La zona de desarrollo próximo
- Las herramientas psicológicas y la mediación.

A partir de estos conceptos existe la opción de conocer y comprender el desarrollo psicosocial del alumno.

La tarea de estudiar el proceso de internalización del concepto límite, esto es, analizar el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos científicos y en este rubro, la teoría sociocultural interesa desde la zona de desarrollo próximo, las herramientas psicológicas y la mediación, en tanto a las contribuciones de la misma al Cálculo. Así mismo, se considera la perspectiva de Wertsch, sobre el enfoque de la teoría sociocultural que permite explicar cómo se sitúa la acción del ser humano en ámbitos culturales, históricos e institucionales y que la clave para tal explicación está en el uso de la acción mediada, como unidad de análisis y de la persona que actúa con instrumentos mediadores como descripción adecuada del agente de esta acción.

Los conceptos científicos para ser enseñados desde la teoría sociocultural, requieren partir de los niveles reales de desarrollo de los alumnos, el que en ocasiones tiene su origen en la experiencia de la vida cotidiana, fuera del ámbito académico, proceso que sirve de antecedente para la generalización y formalización, para con ellos lograr la construcción de abstracciones. En el caso particular del concepto límite, requiere del proceso de enseñanza, la imperiosa necesidad que conduzca a la abstracción y esto se apoya en la noción intuitiva del límite. Los procesos evolutivos reales de los conceptos, están sustentados cuando:

> La enseñanza representa el medio a través del cual progresa el desarrollo; esto es, el contenido socialmente elaborado del conocimiento humano y la estrategia cognoscitiva necesaria para su internalización son evocados en los estudiantes de acuerdo con sus “niveles evolutivos reales”. (Vigotski; 1979: 197).

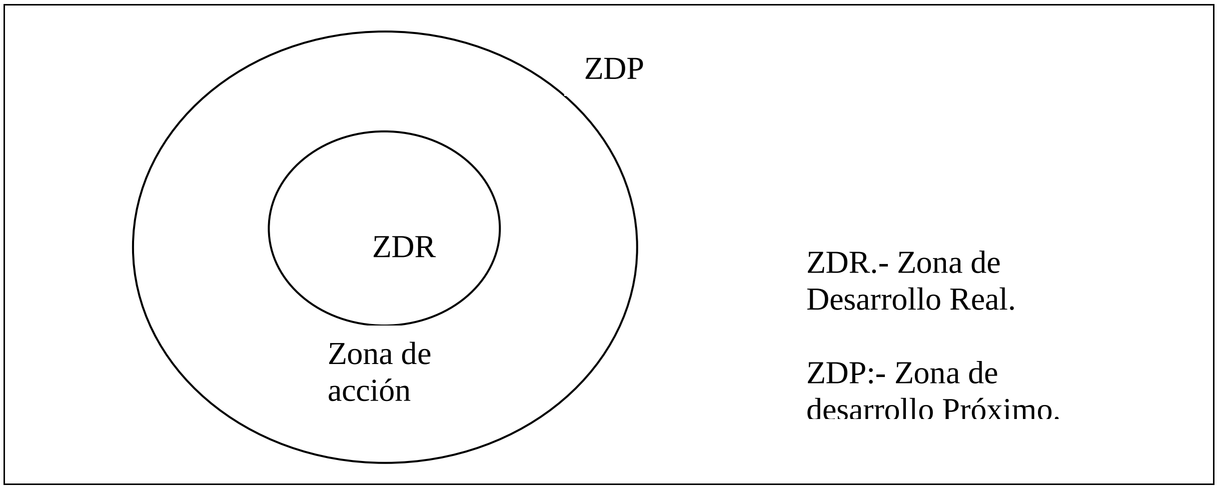
Solo de ésta manera se lleva a cabo la construcción individual del concepto. Desde la teoría sociocultural el alumno que aprende cálculo, debe ser visto como un ente social, protagonista y producto de diversas interacciones que, precisamente mediante esas interacciones consigue aculturarse y socializarse, al mismo tiempo que se individualiza y auto realiza. El alumno es una persona que internaliza (reconstruye), el conocimiento del cálculo, primero en el plano interindividual y luego en el plano intraindividual.

Para el caso del proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite, los docentes exploran, mediante diferentes técnicas los conocimientos que los alumnos tienen sobre el tema, esto le ayuda a los alumnos a tomar conciencia de su estado actual de desarrollo y se espera que con la mediación del maestro y/o los compañeros, a través de las distintas representaciones de los límites, se logre la construcción individual del concepto y pasar a un nuevo nivel de desarrollo.

2.4.1. Zona de desarrollo próximo

La zona de desarrollo próximo (ZDP, ver figura de la gráfica 2), Vigotsky la definió como la distancia que existe entre el nivel real del desarrollo del niño. Es decir, lo que es capaz de hacer por sí solo y el nivel de desarrollo que logra con ayuda de otro más apto que él.

GRÁFICA 2
ZONAS DE DESARROLLO DE VIGOTSKY



FUENTE: Documental. Elaboración propia, abril de 2009.

Cole (1983), menciona que hay que buscar el mecanismo del cambio individual en la interacción entre individuos, quienes al mismo tiempo constituyen la sociedad a través de sus interacciones, pero además en estas interacciones transforman sus percepciones, debido a la experiencia en el conocimiento científico, pues sólo así se puede resignificar la cultura.

De acuerdo con esta perspectiva general, el concepto de ZDP permite comprender lo siguiente:

1. Que los niños puedan *participar* en actividades que no entienden completamente y que son incapaces de realizar individualmente.

2. Que en situaciones reales de solución de problemas, no haya *pasos predeterminados* para la solución, ni *papeles fijos* de los participantes, es decir, que la solución está distribuida entre los participantes y que es el cambio en la distribución de la actividad con respecto a la tarea lo que constituye al aprendizaje.

3. Que en las ZDP reales, el adulto *no* actúa sólo de acuerdo con su *propia definición de la situación*, sino, a partir de la interpretación de los gestos y habla del niño, como indicadores de la definición de la situación por parte de éste.

4. Que las situaciones que son "nuevas" para el niño, no lo son de la misma manera para los otros presentes y que el conocimiento faltante para el niño, proviene de un *ambiente organizado socialmente.*

5. Que el *desarrollo* está íntimamente relacionado con el rango de *contextos que pueden negociarse* por un individuo o grupo social.

Como puede observarse, Cole toma el concepto de ZDP básicamente en el sentido con que lo habían propuesto Wood, Bruner y Ross (1976), para entender el tipo de apoyo que proporciona un adulto, cuando ayuda al niño a realizar una tarea que no podría realizar por sí mismo. La zona de desarrollo próximo de Vigotsky, relaciona una perspectiva psicológica general sobre el desarrollo infantil, con una perspectiva pedagógica sobre la enseñanza. El desarrollo psicológico y la enseñanza se encuentran socialmente implantados.

Cabe señalar, que el desarrollo psicológico se presenta a lo largo de la vida de los individuos, en el caso de los alumnos de cálculo, la ZDP permite comprender porque los alumnos pueden participar con los otros en actividades que se les complica realizar solos, pues en la medida que se dan los intercambios con los otros se logra la acción conjunta y aun cuando la nueva situación no es igual para todos, proviene de un ambiente generado socialmente, en este caso, el grupo; todo ello gracias a que la ZDP, es precisamente la zona de desarrollo de los individuos que diferencia lo que se puede hacer con la ayuda de otros y lo que es capaz de realizar solo.

Así pues, la zona del desarrollo próximo es la distancia entre la capacidad individual de un estudiante y la capacidad para hacer con ayuda de otros, o lo que es lo mismo, la distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la resolución de problemas de manera individual y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de solución de problemas con la guía de un adulto o en colaboración de compañeros más capaces. De esta manera, la ZDP precisa aquellas funciones que no han evolucionado pero, que están en proceso de evolucionar.

La característica principal de la enseñanza es que crea la zona de desarrollo próximo, estimulando una serie de procesos de desarrollo interiores. Así es como la ZDP constituye una herramienta analítica a la hora de planificar la enseñanza y explicar sus resultados. Se consideran cuatro etapas de la ZDP: Etapa 1, donde la ejecución es ayudada por otros más capaces. Etapa 2, donde la ejecución es ayudada por sí mismo. Etapa 3, donde la ejecución es desarrollada, automatizada y fosilizada y Etapa 4, donde la desautomatización de la ejecución lleva a la recursión a través de la ZDP.

Es conocido que los docentes emplean diferentes técnicas para explorar los conocimiento que los alumnos tienen, ya sea por sentido común o recuperar la experiencia de cursos anteriores, a continuación se expone un ejemplo de esto, sucedió en un grupo de tercero del área de ciencias físico matemáticas de un bachillerato del sistema particular incorporado, durante el ciclo escolar 2008-2009, para la unidad de límites, el docente siguió la sugerencia indicada en el programa de estudios de la Dirección General del Bachillerato (DGB) sobre una lluvia de ideas para activar los conocimientos previos y se logró, en las conclusiones grupales establecer un concepto de límites, éste difería de la noción intuitiva contemplada en el libro de texto utilizado por el grupo (Silva y Lazo, 1996), ya que la idea del grupo de estudiantes estaba de acuerdo con el sentido común, a esto se refiere Bruner como significado social de los conceptos.

> Dónde reposa el significado de los conceptos sociales –en el mundo, en la cabeza de la persona que los posee, o en la negociación interpersonal– uno se ve empujado a pronunciarse a favor de la última de estas alternativas. Según este punto de vista, el significado no es (tal como hubiera afirmado Davidson –p.e., Davidson, 1970–) la suma de proposiciones verdaderas que pueden formarse acerca de un acontecimiento que está teniendo lugar, ni la anidación semántica de proposiciones en la cabeza del alguien, sino aquello sobre lo que podemos estar de acuerdo o al menos aceptar como punto de partida para buscar un acuerdo acerca del concepto en cuestión. (Bruner, 1989, p. 198).

Para el ejemplo citado, la definición grupal de límite fue la siguiente:

Límite.- Una barrera que pone un alto al final de algo y prohíbe pasar de ahí.

El concepto intuitivo de límite en el libro de texto (Silva y Lazo 1996, p. 798) es:

Límite.- Sea f una función que esté definida en todo punto de algún intervalo que contenga a “a”, excepto posiblemente en x=a. El límite de f(x), cuando x se aproxima a “a” es L y se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En este ejemplo se puede observar la diferencia del lenguaje para Piaget y Vigostky, mientras que “Piaget tomó el lenguaje como un agente socializado del niño con su ambiente de hecho debido al constante intercambio con los demás, podemos descentrarnos y coordinar internamente relaciones que derivan de puntos de vista diferentes”. (Osorio, S/f). En la teoría de Vigotsky, la palabra permite operar en la mente los objetos, en este caso el concepto de límite al establecer la conclusión grupal y contrastarla con la noción intuitiva del mismo, el docente está mediando en la zona de desarrollo próximo de los alumnos y está es una mediación semiótica, en el sentido de Bruner. Se puede decir que los alumnos en la lluvia de ideas socializan los diferentes puntos de vista y llegan a una conclusión grupal gracias a la negociación de significados y al ambiente que se propicie en el aula.

> Se trata de ambientes educativos con unas características muy precisas: integra desde el principio al alumno en la realización de la tarea; le proporcionan un nivel de ayuda que se ajusta a las dificultades que encuentra y a los progresos que realiza; ofrece una ayuda temporal, que se retira progresivamente a medida que el alumno asume la responsabilidad; y sitúan la influencia educativa en la zona de desarrollo próximo, tomando como punto de partida lo que el alumno aporta a la situación –su nivel real de desarrollo, en términos vygotskyanos– y respetando la dinámica de construcción o reconstrucción del conocimiento que exige el verdadero aprendizaje. (Coll y Solé, 1995, p. 326).

Identificar el nivel real de desarrollo, permite graduar la ayuda de acuerdo con el desarrollo de los alumnos, así pues, lo primero es conocer el nivel real de desarrollo para en la zona de desarrollo intermental mediar la ayuda y propiciar la construcción o reconstrucción del conocimiento; en el caso de los límites, el sentido común del límite como nivel real de desarrollo, por lo que, la ayuda del docente debe contribuir a transitar al concepto científico.

2.4.2. Andamiaje

El Cálculo ha sido creado en la actividad humana conjunta, y considerando que es un aprendizaje piramidal, cada estudiante debe construir su pirámide con la ayuda de otros, ya sea su maestro o un compañero más capaz, a esas ayudas que se dan generalmente mediante intercambios comunicativos, es lo que se considera como andamiaje y ello contribuye al desarrollo tanto social como personal.

Bruner es el que introduce el concepto de andamiaje o ayuda, que consiste en graduar la dificultad de la tarea y el grado de ayuda, de manera que no sea tan fácil, como para que el sujeto de aprendizaje pierda el interés por hacerla, ni tan difícil que renuncie a ella. En este sentido Coll (1995) menciona cinco niveles de ayuda, según sea la intervención del más capaz.

> Las acciones y verbalizaciones de las madres son clasificadas en cinco categorías atendiendo al nivel creciente de directividad, intervención, ayuda que proporcionan para resolver la tarea: desde el nivel 1, en el que la ayuda es mínima (palabras de estímulo, aliento), hasta el nivel 5, que representa en mayor grado de ayuda (demostración de cómo se resuelve la tarea), pasando por tres niveles intermedios (llamar la atención sobre aspectos importantes de la tarea; ayudar a seleccionar el material; proponer el material a utilizar en cada momento). (Coll y Solé, 1995, p. 325).

A través de la enseñanza, los conceptos científicos se relacionan con los conceptos cotidianos o empíricos de los alumnos, convirtiéndose en conceptos de ese tipo. Si no se incluyen conceptos científicos en la enseñanza, todo el desarrollo se verá afectado. Cuando los alumnos ingresan en la escuela, el maestro los confronta con la ZDP, mediante las tareas de la actividad escolar, para guiar su progreso hacia la etapa de aprendizaje formal. Estas tareas ayudan a los estudiantes a adquirir motivos y métodos para dominar el mundo, con la mediación del docente.

En las clases de Cálculo, cuando los docentes indagan el concepto empírico de los estudiantes sobre límites, median entre ese concepto que traen los alumnos y el concepto intuitivo de límites, para ello utilizan como ayudas o andamios las distintas representaciones de los límites, estas tareas escolares, deben tener como finalidad el concepto científico de límite, el cual es conocido por el docente y no por los estudiantes, en este sentido el andamiaje presenta cierta asimetría, en toda situación siempre hay alguien que sabe más y es quien proporciona la ayuda.

> Una propiedad especial de los formatos en los que participan niño y adulto, y que también puede ser una propiedad de los formatos en general, es que son asimétricos con respecto a la "conciencia" de los miembros: existe uno que "sabe lo que está pasando", mientras que el otro sabe menos o nada en absoluto. "conciencia", en este sentido, no se refiere a ningún problema psicológico profundo –espero poder aclarar esto más adelante–; uso este término en el sentido en el que lo emplea Vigotsky (1962) al discutir cómo el adulto ayuda al niño a alcanzar la Zona de Desarrollo Proximal. El adulto sirve como modelo, organizador y monitor hasta que el niño pueda asumir responsabilidades por sí mismo. (Bruner, 1989, p. 180).

En el quehacer educativo del aula se pueden considerar tres componentes: el docente, el alumno y la ambiente creado por la interacción. La Mediación pretende asegurar el proceso, colaborar con la transformación e incrementarla; su objetivo es producir un nivel más abstracto de pensamiento. De esta manera las preguntas se centran en el qué o cambio cognoscitivo; el por qué o propósito que se persigue; y el cómo o método que permite transformación del pensamiento sistemáticamente. Así pues, la pregunta ayuda a definir problemas, a realizar inferencias, a hacer hipótesis, a extraer reglas y principios... con tendencia a elevar el nivel de desarrollo a partir de las tareas.

Se necesita como lo menciona Monereo (2003), un docente que se esfuerce reflexiva y autorregulativamente, para que sus alumnos aprendan, a su vez, a autorregular su aprendizaje y su esfuerzo, lo que es lo mismo, aprendan a entender el sentido y significado de una tarea, a tomar decisiones sobre los conceptos y procedimientos que van a necesitar, a planificar el tiempo que van a dedicar a su realización, a disponer las condiciones que favorecerán su concentración, interés y persistencia, a superar los momentos de duda, frustración y desánimo, etc. (p. 3). Y de esta manera sea un buen andamio para sus alumnos.

De los párrafos anteriores, se puede comentar que se considera al andamiaje como la actividad, acción o tarea que se realiza en colaboración con otros, en donde, en un principio va haber alguien que sabe más, pero esto va cambiando gradualmente, durante el desarrollo de la acción, en este sentido, el andamiaje debe poseer las siguientes características:

- *Es ajustable*, de acuerdo con el nivel de competencia del sujeto menos experto y de los progresos que se produzcan.
- *Es temporal*, ya que como se ha mencionado, un andamiaje que se torne crónico no cumple con otorgar autonomía en el desempeño al sujeto menos experto.
- El andamiaje debería ser *audible y visible*, es decir, a efectos de que se delegue un control gradual de las actividades sobre el sujeto menos experto y que éste reconozca, desde un inicio, que su proceso de adquisición se refiere a una actividad compleja.
- *Es asistido* o auxiliado en la ejecución de la actividad. Corresponde conocer que los logros a los que accede son producto de una actividad intersubjetiva.

2.4.3. Proceso de internalización

Para el concepto de límite en Cálculo, la noción intuitiva del límite, es la actividad externa que se va a reconstruir y a comenzará a suceder internamente, pasando del plano social o interpersonal al individual o intrapersonal, esta transformación que va a ser el resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos, que pueden darse mediante la mediación del docente o alumnos más capaces utilizando las formas numéricas, gráficas o analíticas; ello depende del nivel de desarrollo de los estudiantes y del andamiaje. La transformación que sucede de la actividad externa a la interna es lo que se considera en la teoría sociocultural como proceso de internalización.

El proceso de internalización consiste en una serie de transformaciones:

a) *Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente.*
b) *Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal.*
c) *La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es resultado de una prolongada serie de sucesos evolutivos.* (Vigotski; 1979: 93-94).

Por otra parte en Lev. S. Vigotsky (1979), la adquisición del Lenguaje se enmarca en el concepto de internalización, que es considerado, por él, como un proceso de transformación de los procesos sociales interpsicológicos, en procesos individuales o intrapsicológicos, es decir, de la función interpsicológica que se da en el exterior, o en el plano social, en la interacción en pequeños grupos, a la interna que se da en el individuo. A decir de Wertsch;

“Es preciso que todo aquello que es interno en las formas superiores haya sido externo, es decir, que fuera para otros lo que ahora es para uno mismo”. (Wertsch, 1998, p. 79).

La internalización, transforma el proceso en sí mismo cambiando su estructura y funciones. Las relaciones sociales o relaciones entre personas, subyacen genéticamente a todas las funciones psicológicas superiores. Vigotsky defiende que las funciones psicológicas superiores se presentaban, en principio en forma externa, puesto que son procesos sociales. Considera que toda función psicológica superior, atraviesa necesariamente por una etapa externa. El gesto inicial del sujeto para alcanzar un objeto, es interpretado por el adulto como proceso interpsicológico, convirtiéndose en interacción social comunicativa, cuando el adulto le da respuestas, se interiorizan y luchan para ser externas al repetirlas y hacerlas rutinarias.

El proceso de internalización posee algunas características:

- El comportamiento es creado.
- El significativo comunicativo del comportamiento no existe hasta que es creado en la interacción adulto-sujeto (plano interpsicológico).
- El significativo comunicativo del comportamiento es creado con la ayuda del adulto.
- El plano interpsicológico implica el dominio del sujeto de los signos externos para establecer la comunicación y participar en la tarea.
- El mundo externo es de naturaleza social transaccional o de concertación de los signos comunicativos descontextualizados por el sujeto, en forma de ideas dándole

una interpretación propia (cada individuo lo interpreta de manera diferente, por eso hay distintas formas de pensar).

Para Vigotsky, el lenguaje es el ejemplo paradigmático de Procesos Psicológicos Superiores (PPS) donde se describen los procesos de internalización que es lo mismo que la reconstrucción interna de los PPS, constituyéndose en el elemento central. Por lo que un sujeto a partir del lenguaje, centrado en aspectos referenciales y comunicativos, pasa a estructurarlo a nivel intelectual e interno, formando así el lenguaje interior. Este proceso significa la creación de la conciencia. En el proceso de internalización se desarrolla el pensamiento, la capacidad de argumentación, el desarrollo de los afectos y de la voluntad.

Así pues, los docentes para propiciar el proceso de internalización necesitan identificar la ZDP de los alumnos y mediar entre este desarrollo y el siguiente a través de ayudas que sean pertinentes, ajustables, temporales y comprensibles y, de esta forma los estudiantes construyan en lo social y reconstruyan en lo individual, para ello, necesitan diseñar estrategias de enseñanza, que pueden ser: para le interacción con la realidad, la activación de conocimientos previos y generación de expectativas, para la solución de problemas y abstracción de contenidos conceptuales, para el logro de la permanencia de los conceptos y para la transferencia; las que a su vez pueden lograr a través de distintos métodos y técnicas, por ejemplo, discusiones guiadas, solución de problemas, algoritmos, preguntas intercaladas, señalizaciones, diagramas, graficas, analogías, juegos, ambientes, por mencionar algunos de ellos, y estos dependen del tipo de estrategia de enseñanza elegida por el docente para desarrollar la clase.

Los elementos teóricos expuestos, son necesarios para el trabajo de investigación en lo referente a la interpretación y análisis de los datos que surjan durante el proceso recolección de campo, ya que permiten contrastar y debatir los hallazgos, así como explicar, desde los autores lo que se encuentra en las aulas de cálculo del bachillerato y su repercusión en el aprendizaje del concepto límite.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Enfoque metodológico

La presente investigación analiza el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite para explicar las causas que se les presentan a los estudiantes de bachillerato en el proceso de internalización del dicho concepto, para lo que se considero en un principio, realizar un estudio microgenético, a través de una investigación del tipo cualitativa y más que descriptiva, explicativa; utilizando herramientas de la etnografía debido a que este enfoque permite captar tanto las características generales esenciales, así como los detalles más finos de la interacción de un grupo de personas, además presenta algunas bondades que no tienen otras perspectivas metodológicas, como lo mencionan Vásquez y Martínez (1996), "Una de las ventajas de la perspectiva etnográfica es que no exige que todos los aspectos de una investigación se desarrollen con el mismo ritmo, lo que permite profundizar en la problemática" (p. 152). El profundizar en el problema que se está investigando permite explicar las posibles causas y no solo describir la problemática.

El propósito principal de la investigación es identificar y explicar las dificultades en el proceso de internalización del concepto límite en el bachillerato por lo que se pretendía realizar un análisis fino y detallado de la relación del proceso de enseñanza aprendizaje, la interacción social y las conductas de ejecución, Coll (2000) menciona que el análisis microgenético, parece a priori, el instrumento más adecuado para lograr este objetivo que otros métodos de análisis, pues es susceptible de proporcionar información interesante sobre una diversidad de factores aún no resueltos. Además en el presente trabajo se realiza un análisis sobre las transformaciones en el sentido y significado de los estudiantes sobre el concepto límite.

> El análisis microgenético (Wertsch y Stone, 1978; Zinchenko, 1981; etcétera) consiste en analizar en detalle la constitución y las modificaciones sucesivas de una destreza, concepto o estrategia en el transcurso de una unidad temporal más o menos amplia. El punto de partida de este tipo de análisis reside en identificar las unidades funcionales, los componentes básicos de la destreza, concepto o estrategia que son objeto de estudio y en examinar cómo estas unidades interactúan y evolucionan durante el periodo temporal prefijado. (Coll, 2000, pp. 123-124).

En el presente trabajo no se realizó un análisis microgenético, pues no se creó artificialmente un proceso de desarrollo psicológico, entonces, se optó por la etnografía en el aula, como "microetnografía concedida está, como la indagación reflexiva de las significaciones implícitas en la interacción institucional". (Ríos, 1991) que permitió identificar la problemática, y a través de la observación se fueron obteniendo datos y construyendo relaciones teóricas que ha permitido explicarlos.

Las observaciones se apuntaron en registros de campo, para los que se utilizó dos libretas de taquigrafía, en las que se anotaban todos los acontecimientos de las clases, se registró todo lo posible en cuanto a contexto, gestos, expresiones e interacciones de los sujetos participantes, a este tipo de registros algunos autores los llaman "descripción densa", por otra parte, el diario del investigador se realizó en una libreta de pasta dura en donde se tomó nota de distintas situaciones, emociones y aventuras del día a día del investigador durante el trabajo.

De esta manera, las herramientas etnográficas, como las notas de campo y el diario del investigador, permitieron hacer más que explicable, comprensible la problemática y contribuyeron a sistematizar de modo que se percibiera la realidad desde los otros, es decir, en el sentido que lo menciona Maturana (1997) el fenómeno de conocer se da en un ser vivo por medio de las interacciones, relaciones humanas y el lenguaje que el observador explica a través de la experiencia y su realidad mediante un proceso cognitivo en el que si la experiencia es explicada como dominio de objetos que existen independientes de él, esto es, en consenso de realidades, el conocimiento se da con objetividad.

Cabe mencionar que la etnografía es parte del paradigma cualitativo como perspectiva interpretativa, lo mismo que el estudio de casos, el método clínico y la investigación hermenéutica por citar otros enfoques; no se puede dejar de lado su rasgo constructivista y estructuralista, constructivista porque permite la obtención de teoría explicativa que consiente la comprensión de los sucesos educativos en estudio y estructuralista, ya que considera estructuras macro y micro sociales, y para los sujetos participantes las estructuras de pensamiento y de la tarea son parte del contexto social en investigación.

La investigación es del tipo cualitativo exploratoria con herramientas de la etnografía en la investigación educativa, para el análisis e identificación de dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje, en este caso, sobre el concepto límite de Cálculo I del bachillerato, se consideraron dos preparatorias urbanas, escolarizadas, cada una con sus contextos y características propias. Las técnicas a utilizadas fueron: observación participante, entrevistas tanto formales como informales, análisis de documentos e instrumentos diseñados durante la investigación.

La observación participante es la herramienta fundamental de la etnografía, para estudiar el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite fue necesario que la investigadora fungiera como observador participante y permaneciera en los grupos el mayor tiempo posible, recabando, la mayor cantidad de información mediante las notas de campo, el ojo y el oído atento, así como, realizar una evocación de los hechos. Cuidando el rigor metodológico de la investigación, los registros de las observaciones se realizaron, atendiendo la recomendación de diferentes etnógrafos, sobre todo, que el tiempo de limpieza no exceda a las 48 horas, en todos los casos de la presente investigación los registros se limpiaron en el transcurso de las 12 horas posteriores a la observación.

> El etnógrafo entra en el mundo, sumergiéndose en *la vida de las cosas*, tomando nota cada dos por tres, elaborando diarios, escribiendo memorias, experimentando con análisis, esbozando borradores, haciendo correcciones, registrando ideas. El investigador nunca está sin una pluma o un bolígrafo. Los datos se aglomeran en la memoria invadiéndola, y las ideas se forman y flotan por la mente, casi jugando, *a ver si me pillas*. La pluma permite que la mente se concentre maravillosamente. (Woods; 1998: 160).

Durante la investigación nunca le faltó al investigador su diario de campo y pluma, con ellos registró sentimientos y vicisitudes del trabajo, así como las ideas que afloraban en distintos lugares como estacionamientos o parques cercanos a los escenarios de la investigación, y en los que se reflexionaba a solas sobre el trabajo que se estaba realizando.

También se realizaron entrevistas formales a los docentes de cada grupo, así como a algunos alumnos elegidos como informantes clave, del mismo modo se realizaron entrevistas informales, tanto a los docentes como a los estudiantes, con la finalidad de corroborar algunos hallazgos de las observaciones o de los documentos, éstas se realizaron con más frecuencia en los pasillos y los patios de las instituciones, se procedió como en las observaciones, cuidando el rigor metodológico de la investigación, cada entrevista formal o informal se transcribió, para su análisis, en las 12 horas posteriores a su realización.

Los documentos analizados durante la investigación fueron: los programas de estudio de las preparatorias participantes, algunos de los libros de texto de Cálculo, propuestos para los estudiantes, los apuntes de los estudiantes y exámenes sobre límites, resueltos por los alumnos, estos documentos se utilizaron para contrastar o corroborar lo observado en las aulas.

Las investigaciones etnográficas, se piensan como interpretaciones de lo social con validez científica, dicha validez se sustenta en el retrato de la realidad y no en interpretaciones subjetivas; reside también en la recolección de los datos, por ello la recolección debe ser sistemática, mediante las técnicas de observación participante, entrevistas con informantes claves, registros, textos interpretativos, documentos, cuestionarios, etcétera. No se puede pasar por alto que para la validez de la investigación, se debe garantizar la veracidad de los resultados, que los mismos no han de ser impresionistas, subjetivos o tendenciosos, para ello, es bueno tener en cuenta que uno de los recursos más importantes de confirmación, tanto de entrevistas y de observaciones, y en general del trabajo etnográfico yace en la triangulación; como lo menciona Woods (1987), "la utilización de tres métodos o más para explorar un problema aumenta enormemente las posibilidades de exactitud" (p. 102). En la presente investigación se utilizó la triangulación de datos obtenidos mediante observación, entrevistas y documentos.

En la presente investigación el enfoque etnográfico, representa un recurso metodológico que contribuye a la descripción de los sucesos educativos desarrollados en las aulas del bachillerato, con el propósito de concebir teoría, a su vez, interpretar y explicar el fenómeno observado. Así pues, lo primero fue definir el escenario y los sujetos.

3.2. Selección de los sujetos

En un principio, se pretendía estudiar la problemática en el grupo de tercer grado del área de ciencias físico matemáticas, de una preparatoria particular incorporada a la Dirección General del Bachillerato (DGB). En dicho bachillerato la población estudiantil era únicamente femenina y el grupo en el que se proyectaba el trabajo, la docente de Cálculo Diferencial era la propia investigadora, considerando esta situación y sus implicaciones éticas, se decidió buscar otros escenarios, cuidando así el rigor metodológico. De ahí que se analizó el subsistema de bachillerato en Sinaloa, eligiéndose el de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS), debido a que es la casa de estudios más grande del noroeste del país, que cuenta con 64 bachilleratos en todo el Estado, tiene la matrícula más grande de estudiantes, atendiendo alrededor de 20,000 alumnos por aproximadamente 1500 docentes, por otra parte, es la primera institución en México en acreditar a más del 80 por ciento de su matrícula del nivel medio superior.

Una vez elegidas las preparatorias de la UAS, como escenarios para la realización del trabajo, se eligió la unidad regional centro por ser la más grande, ya que atiende 25 bachilleratos del total de bachilleratos universitarios. Elegido el sistema de bachillerato, se opto por los grupos de tercer grado de la fase especializada de ciencias físico matemáticas, pues las clases de Cálculo las abordan con mayor profundidad que los alumnos en la fase especializada de químico biológicas y éstos son los únicos grupos que llevan la materia de Cálculo I en las preparatorias de la UAS.

3.3. Ruta de la investigación

Con la finalidad de obtener el grado de Maestra en Educación del programa de la Maestría en Educación en el campo de la intervención pedagógica y el aprendizaje escolar, se llevó a cabo la presente investigación, titulada "El proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite en el bachillerato". Para ello se realizaron 20 observaciones de clases de Cálculo en dos preparatorias de la UAS, se entrevistó a dos maestros y 30 estudiantes de tercero de preparatoria de la fase especializada de ciencias físico matemáticas.

La investigación consiste en integrar una explicación pormenorizada al explorar las dificultades que se presentan en el proceso de internalización del concepto límite, mediante una investigación cualitativa de corte etnográfico, utilizando las técnicas y herramientas que se muestran en la tabla 7:

TABLA 7
TÉCNICAS Y HERRAMIENTAS DE LA INVESTIGACIÓN

Técnica	Herramienta	Cantidad	Aplicada en:	Procesada
Observación participante	Notas de campo Diario del investigador	20	Aulas de escuelas A y B	Registros de observación Registros analíticos Sabanas de análisis
Entrevista	Diario del investigador Guías Grabadora	32	Docentes y alumnos de las escuelas A y B	Transcripción Análisis
Análisis documental	Diario del investigador	30-40	Libros de texto, programas de estudio, libretas y exámenes	Registros

Fuente: Elaboración propia, mayo de 2010.

En la tabla se detallan las técnicas utilizadas, se enumeran las herramientas de cada una de ellas, se expresa la cantidad de veces que se aplicó, se especifica a quien se le aplicó y se describe la técnica para procesarlas. Ya con las herramientas listas y diseñados los formatos de registro, la investigadora estaba lista para ingresar al campo.

La entrada a campo, fue un verdadero peregrinar, que inició en agosto de 2009, como ya se menciono, se tomó la decisión de realizar la investigación en dos preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa, de la unidad regional centro, para lo que se eligieron las más grandes, ubicadas en Culiacán, un primer intento para entrar a realizar la investigación se realizó en la prepa que atiende a la mayor población de estudiantes, ahí la investigadora se contacto primero con las autoridades de la institución, atendiéndola la secretaria académica, fue muy amable y proporcionó todas las facilidades para la realización de la investigación, para ello contactó a la investigadora con los coordinadores del turno matutino y vespertino, con el propósito de que le ayudaran a contactar a los docentes y de esta manera, se les explicara el propósito de la investigación y solicitarles su autorización para observar sus clases, después de diez días de insistir se logró contactar al docente del turno vespertino, él concedió una cita para dentro de dos días más; esta situación era un tanto estresante pues el tiempo corría y el tema a observar estaba ya por iniciar, para los fines de la investigación era importante entrar antes al campo, para lograr estar en el escenario lo más natural posible, durante el tema a investigar. Desde un principio, el docente de esta preparatoria del turno vespertino se mostró a la defensiva y un tanto renuente, sentía que iba a ser evaluado y por más que se le explicó no se logró convencerlo, en la dirección de la preparatoria expresaron que podían obligarlo, sin embargo no se optó por esta forma pues el escenario iba a estar contaminado de entrada, lo que no era bueno para la investigación; por otra parte al docente del turno matutino de la misma preparatoria nunca se le contactó y, como eran los únicos profesores de cálculo en la preparatoria, se tomó la decisión de buscar otros escenarios.

En la búsqueda de nuevos escenarios, la investigadora cambio la estrategia de entrada y por varios días visitó las cuatro preparatorias de la unidad regional centro restantes en Culiacán, para elegir el nuevo escenario, en ellas se platicó en patios y pasillos con los docentes y coordinadores, todo fue diferente, todos estaban en la mejor disposición de participar, así que se eligieron dos preparatorias, estas fueron elegidas por la cantidad de matrícula que atienden. Una, matutina ubicada en una colonia popular, el acceso en este caso fue realmente fácil, se habló primero con el docente por los pasillos y se mostró muy interesado, luego se expuso el proyecto al coordinador de turno y finalmente se le solicitó autorización a la directora, la que expresó no tener ningún inconveniente; la otra preparatoria elegida, fue del turno vespertino, ubicada en el centro de la ciudad, en ella también el docente proporcionó todas las facilidades para entrar a su aula y se habló en atención con el director quien manifestó su acuerdo para la realización de la investigación.

Con todo lo expuesto, en la presente investigación participaron alumnos y docentes de dos preparatorias de la UAS, los que estuvieron involucrados en las acciones educativas que se desarrollaron en las aulas de tercero, correspondientes a la fase especializada de ciencias físico matemáticas, el contexto histórico, social, económico y educativo de cada una se describen a continuación:

Preparatoria pública de la UAS, urbana matutina, para fines de la investigación denominada A, se localiza en el municipio de Culiacán, Sinaloa; en una colonia popular de situación económica baja – media-baja. Atiende aproximadamente a 1277 alumnos y 43 de planta magisterial. En la investigación participo un docente con más de 20 años de experiencia en la asignatura y los 24 alumnos del grupo de tercer grado del turno matutino de la fase especializada de ciencias físico matemáticas, designado durante la investigación, grupo 3CFM1.

Preparatoria pública de la UAS, urbana vespertina, para fines de la investigación denominada B, se localiza en el municipio de Culiacán, Sinaloa; en el centro de la ciudad, con una situación económica media y en realidad múltiple, ya que por su ubicación acuden a ella estudiantes de diferentes colonias. Atiende aproximadamente a 1300 alumnos por 60 profesores. En la investigación participó un docente con más de 25 años de experiencia en la asignatura y los 14 alumnos del grupo 5CFM1 de tercer grado, del turno vespertino de la fase especializada de ciencias físico matemáticas, nombrado durante la investigación, grupo 5CFM1.

Así pues, se involucraron dos docentes, uno de cada preparatoria, la totalidad de los alumnos (37) de la fase especializada de ciencias físico matemáticas, distribuidos en cada escenario de la siguiente manera: para el plantel A del turno matutino, 23 alumnos del grupo 3CFM1 en el aula 9 y para el caso de la escuela B del turno vespertino, 14 alumnos del grupo 5CFM1 en el aula 3. Cabe mencionar que el personal en la entrada de ambas preparatorias identificó desde un principio a la investigadora y siempre le facilitaron el acceso a los escenarios.

El primer día en las aulas fue emocionante, en la preparatoria matutina los alumnos estaban esperando la llegada de la investigadora y la recibieron bien, al grado de que a los tres días de observación la invitaban a integrarse a uno de los equipos de trabajo; mientras que en la preparatoria vespertina a los alumnos les sorprendió e inquieto un poco la presencia de la investigadora, sobre todo en la primera semana de observaciones, los alumnos se mostraban un tanto a la expectativa, pero en la segunda semana, como al cuarto día de observación se acercaron a entablar una plática y manifestaron que la investigadora les gustaba para tía. A manera de anécdota en la escuela B el primer día de observación con toda la angustia y emociones de la investigadora, cuando se llegó al escenario, fue precisó esperar al maestro en el pasillo, al salir el maestro de la clase anterior le pregunta que si va con el grupo, a lo que se le responde que esperaba al maestro de Cálculo I; los alumnos salen del salón y se ponen a jugar con bolitas de papel en el pasillo y le tiran una a la investigadora, los muchachos se disculpan un tanto apenados, codeándose unos a otros y la investigadora solo les sonrió. (RIB, 30-09-09, 17:40, p.20).

La negociación para la entrada a campo la realizó directamente la investigadora en las instituciones, en ambos casos se habló con los docentes sobre el proyecto a realizar, una vez que los docentes accedieron, se acudió a las coordinaciones y direcciones las que manifestaron su interés y acuerdo en participar en la investigación, las direcciones de las preparatorias solicitaron una copia del trabajo para la escuela, en las dos escuelas facilitaron la entrada a campo y proporcionaron toda la ayuda necesaria para la realización de la investigación en detalles, tales como la entrada a las instalaciones de la escuelas, espacios para realizar las entrevistas, acceso a documentación requerida y la información de los horarios de los grupos y docentes en los que se llevaría a cabo el trabajo de campo para la recolección de los datos.

A los alumnos de Cálculo de la fase especializada de ciencias físico matemáticas de tercer grado, la investigadora les explicó en qué consistía la investigación, así como su participación en la misma, antes de iniciar las observaciones de las clases, los estudiantes se manifestaron interesados y dispuestos a colaborar. En la escuela A todo fue natural desde la primera observación mientras que en la escuela B hasta la cuarta observación se logró un escenario de lo habitual.

Con el propósito de cuidar las implicaciones éticas de la investigación, se acordó realizar las observaciones y entrevistas en los lugares y el horario señalado por las autoridades institucionales, así como de intervenir lo menos posible en la jornada normal de clases, además de mantener el anonimato de los participantes, utilizar los resultados únicamente con finalidades académicas y hacerles llegar una copia de los resultados finales a cada una de las instituciones involucradas.

3.4. Extensión de la investigación

La presente investigación se realizó en el ciclo escolar 2009-2010, inició en agosto de 2009 y concluyó en julio de 2010, desde la negociación para entrar al campo hasta el procesamiento de los datos; las observaciones se realizaron de septiembre a noviembre de 2009, tiempo en el que se impartieron las clases sobre límites, ubicadas en el curso de Cálculo I, correspondiente al quinto semestre de la fase especializada de ciencias físico matemáticas del bachillerato de la UAS; las entrevistas formales e informales, se llevaron a cabo de noviembre de 2009 a marzo de 2010, el análisis de documentos de octubre de 2009 a mayo de 2010, considerando programa de estudios, exámenes, libretas de apuntes y libros de texto; el procesamiento de los datos se llevó a cabo desde septiembre de 2009 a julio de 2010, tomándose en cuenta, la limpieza de los registros de observación, la transcripción de las entrevistas, la elaboración de registros analíticos y sábanas para análisis, los análisis de las entrevistas y de los documentos, así como las triangulaciones e interpretaciones de los resultados. El reporte de la investigación, comenzó a escribirse en febrero de 2008 como anteproyecto de investigación, para junio de 2009 ya se había transformado en proyecto de investigación y durante julio, agosto y septiembre de 2010 se hicieron los últimos ajustes para el primer borrador, en octubre y noviembre de 2010 se realizaron algunas correcciones y la versión final quedó lista en diciembre de 2010.

3.5. Técnicas, instrumentos y herramientas utilizadas para recabar la información

3.5.1. Observaciones

En tanto que se desarrollaba la investigación, se realizaron 20 observaciones, en los salones de clase, 9 de ellas en la preparatoria A al grupo 3CFM1 y las otras 11 en la preparatoria B al grupo 5CFM1; el tiempo que se permaneció en las aulas, en cada observación fue durante los 50 minutos correspondientes a las clases de Cálculo I, para las observaciones se tomaron notas de campo siguiendo la sugerencia de Herskovits: “Observa lo que más puedas”, y registrarlo despojándose del yo; para los registros de observación se siguió el modelo propuesto por María Bertely (2000).

Las notas de campo se limpiaban y se generaban los registros de observación de acuerdo al modelo de Bertely (2000); el rigor metodológico válida a la investigación etnográfica, es por ello que el tiempo para la limpieza de los registros de observación, no debe exceder de 48 horas una vez realizadas las mismas, es la recomendación más común de algunos etnógrafos experimentados. En la presente investigación la limpieza de los registros se realizó durante las 12 horas posteriores a la observación, cabe señalar que se limpio un registro a la vez. En los anexos 1 se presenta uno de los registros de observación.

3.5.2. Entrevistas

Durante el desarrollo de la investigación se realizaron entrevistas formales e informales, solo a los informantes clave, las formales con la finalidad de obtener información y generalmente las informales para corroborar algún suceso observado; a los docentes, se les realizó una entrevista formal a cada uno, 4 informales al maestro de la preparatoria A y 6 al docente de la preparatoria B; se entrevistó formalmente a 6 alumnos de la escuela A y a 4 alumnos de la preparatoria B, además se llevó a cabo una entrevista grupal con los alumnos del grupo 3CFM1 de la escuela A, participaron 22 alumnos; de manera informal, se entrevisto a 4 alumnos de la preparatoria A y 3 de la preparatoria B, así pues se realizaron un total de 30 entrevistas, se pueden ver transcripciones de ellas en la sección de anexos. Cabe señalar que se prepararon guiones de entrevista indicando estos únicamente temas a platicar, mismos que se pueden observar en los anexos; por otra parte es necesario aclarar que la mayoría de las entrevistas se grabaron, es importante indicar que todos los entrevistados autorizaron el uso de la grabadora, pero aun cuando siguiendo las recomendaciones de los expertos sobre el uso de aparatos en la investigación educativa, en probarlos antes y tenerlos listos para el momento de ser utilizados, la grabadora se probó antes de las entrevistas, y aun así, fallo en cuatro, afortunadamente se tuvo la precaución de tomar notas en todas; las entrevistas se realizaron a manera de plática logrando entablar rapport con cada entrevistado.

Para realizar las entrevistas se busco lugares tranquilos, cómodos y con privacidad para evitar las interrupciones, las entrevistas formales se llevaron a cabo en el cubículo del docente, sala de maestros, bibliotecas escolares y en salón de usos múltiples, mientras que las entrevistas informales generalmente fueron con los alumnos en el salón de clases, pasillos de la escuela o en las mesitas de la lonchería; con los maestros las entrevistas informales se dieron por los pasillos, en el estacionamiento y afuera de la sala de maestros. Es importante señalar que todas las entrevistas se realizaron sin interrupciones o distracciones externas y en un ambiente armónico y de confianza que favoreció el desarrollo de las mismas.

Como se mencionó, para la investigación se entrevistaron solo aquellos sujetos que podrían proporcionar información; a los docentes desde un inicio se les consideró informantes clave, con ellos se tuvieron muchas charlas en los pasillos, camino a los salones o a los automóviles, para familiarizarse con ellos y generar confianza, lo que ayudó en el desarrollo de las entrevistas; con los alumnos fue un poco distinto, con ellos se entablaron pláticas en las aulas, en el pasillo o patio de la escuela, antes de iniciar o al finalizar la clase, el acercamiento fue cuidadoso y respetuoso, con la finalidad de ganar la confianza de los estudiantes; entre la tercera y cuarta observación, ellos mismos se acercaban a entablar conversación con la investigadora; para la elección de los informantes, por parte de los alumnos, durante las observaciones y cada día en el campo la investigadora puso mucha atención a las conductas y la interacción con el grupo para de esta manera detectarlos.

Del mismo modo que en las observaciones, las entrevistas se transcribieron una a la vez y dentro de las 12 horas posteriores a su realización, esto con la finalidad de cuidar el rigor metodológico de la investigación; en la sección de anexos se muestran dos de las transcripciones, una de los docentes y otra de los alumnos.

3.5.3. Análisis de documentos

En el desarrollo de la investigación, fue necesario analizar algunos documentos como: programas de estudio, libros de texto, libretas de apuntes de los alumnos, exámenes, entre otros; para estos análisis se tomó nota en el diario del investigador, unos se transcribieron, otros se escanearon y de algunos se realizaron cuadros, los cuales se muestran a modo de tablas en el presente trabajo; en los anexos se pueden observar escaneados algunos de los documentos analizados.

3.6. Procesamiento de los datos

3.6.1. Procesamiento de las observaciones

Lo primero en el procesamiento de las observaciones, fue la limpieza de los registros y para ellos se siguió el modelo de registro de observación propuesto por María Bertely (2000), en los anexos se pueden observar uno de ellos.

Una vez realizados los registros, se elaboraron los del tipo analítico, en el mismo formato de registro de observación pero conjuntando dos o tres registros de observación, en los anexos se puede ver un registro analítico, para los primeros indicadores todos los registros se subrayaron utilizando colores, luego se recortaron por colores y se formaron sábanas de análisis, en los anexos se muestran fotografías de las sábanas realizadas para los análisis, con todo esto se diseñaron dos cuadros para las recurrencias y uno más para los patrones emergentes de las categorías de análisis, este último según modelo propuesto por María Bertely (2000) en los anexos se pueden observar los cuadros de algunas de las categorías de análisis.

Después de subrayar de colores los registros y hacer las primeras interpretaciones, surgieron los 17 indicadores que se concentraron en un cuadro de recurrencias, se elaboró otro cuadro con el propósito de obtener las recurrencias totales y de esta manera construir las primeras categorías para lo que se diseñó un cuadro analítico según modelo ya mencionado, esto permitió identificar las recurrencias de los patrones emergentes e interpretarlos como unidades de análisis. Todos los cuadros de recurrencias y patrones emergentes, así como las sábanas de análisis permitieron generar los primeros textos interpretativos a manera de primeras aproximaciones analíticas.

3.6.2. Procesamiento de las entrevistas

Las entrevistas se transcribieron una a la vez en las doce horas posteriores a su realización, previendo el rigor metodológico de la investigación, una vez realizada la transcripción se diseñó un formato para su análisis, en él se consideran los datos generales del entrevistado, la hora, la transcripción completa, las primeras conjeturas e interpretaciones y comentarios u observaciones del investigador; en los anexos se muestra uno de los análisis de algunas entrevistas realizadas a los docentes y a los alumnos.

Algunas de las entrevistas se diseñaron en base a los indicadores y patrones emergentes que iban surgiendo de las observaciones, de manera que se confirmara la información que se iba obteniendo, esto permitió construir las primeras categorías de análisis.

3.7. Triangulación

Hasta este momento, el procesamiento de datos permitió hacer los primeros constructos teóricos, que con los análisis se han vinculado con las categorías sociales de los sujetos participantes, faltaba hacer la disertación con las categorías teóricas para ello se siguió el procedimiento de triangulación teórica sugerida por María Bertely (2000) con la finalidad de validar o confrontar los constructos del investigador con los de autor, para ello se diseñó un cuadro de triangulación teórica, en los anexos se pueden observar algunas triangulaciones teóricas realizadas en la investigación.

Las categorías se construyeron durante la interpretación recurriendo a la triangulación de las observaciones, las respuestas de los entrevistados y la discusión teórica, las que se conformaron como unidades de análisis y que han permitido explicar la problemática abordada en el planteamiento.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. Mecanización causal del aprendizaje del concepto límite en las prepas de la UAS.

En el presente apartado, se explican las causas de los procesos de cambio que se producen en la clase de Cálculo, en particular los cambios que se dan en el tema de límites, pero estos cambios están enmarcados en un contexto, el del aula que se puede entender en relación a los procesos de cambio que se producen en ella, aunado a los procesos entre docentes y estudiantes, estos pueden ser dimensiones que explican ampliamente el éxito o fracaso del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

En la unidad de análisis *relaciones causales del aprendizaje* se expresan las tradiciones del grupo durante la clase de Cálculo, las metas o propósitos que el grupo tiene sobre sus procesos, los conocimientos previos, las interrogantes de los alumnos, así como, la forma en que se organizan las actividades en la clase, en este sentido la forma en la que los estudiantes se acomodan, día con día, son parte de las tradiciones que a su vez enmarcan un contexto del aula; todo esto se discute en la categoría relaciones causales del aprendizaje.

De esta forma la categoría relaciones causales del aprendizaje involucra entonces, según los datos obtenidos en los registros de observación los siguientes patrones emergentes: tradiciones, metas o propósitos, conocimientos previos, interrogantes de los alumnos y la organización de las actividades. (La construcción de esta unidad de análisis se muestra en el apartado de anexos).

El aula es un contexto constituido por personas, lo esencial en un contexto son los actores, metas y recuerdos, esto es precisamente lo que lo distingue de un entorno, el aula está inmersa en procesos colectivos que involucran metas y recuerdos, sobre todo, recuerdos académicos, para el caso de Cálculo, los actores son los estudiantes de tercero de preparatoria de la fase especializada de ciencias físico matemáticas; el propósito que tienen ellos de aprender o no, de participar, de involucrarse en las actividades propuestas por el docente o sus compañeros están implícitas las metas, y en Cálculo juegan un papel importante los recuerdos académicos, con esto se refiere a los aprendizajes de aritmética, algebra, geometría, trigonometría y funciones; además de que en el aula se manejan recuerdos académicos de clases anteriores, se involucran los sentimientos y emociones de los integrantes del grupo, en muchos casos estos sentimientos están sustentados por los valores del grupo familiar y permean el momento de la enseñanza, en tanto:

> Un hogar connota actores humanos que mantienen relaciones con otras personas, organizaciones idiosincráticas de las pertenencias en el espacio, recuerdos (tradiciones), y metas. Son justamente estas cosas esenciales lo que distingue “los contextos” de los “entornos” y da una nueva apariencia a sus características topográficas. (Siegel & Cohen, 1991).

El contexto del aula entonces, se expresa en la situación física o infraestructura del salón, las metas que el grupo pueda tener sobre sus propios procesos, en los conocimientos previos, las tradiciones explicitas e implícitas que se tienen debido al diario interactuar entre los individuos y los saberes, así como en las interrogantes que surgen durante la clase y la forma en que se organizan las actividades; todo esto está influenciado por el grupo familiar al que pertenecen.

4.1.1. Tradiciones del grupo en clases de Cálculo

Las tradiciones en los grupos se manifiestan en los usos y costumbres, en el quehacer cotidiano y en las formas de expresarse, éstas precisamente son las que diferencian al aula de un entorno y la definen como un contexto, en el que los involucrados precisan las características culturales del grupo; dentro de las costumbres se pueden distinguir ciertas rutinas que forman parte de las actividades normales que suceden en las aulas, como por ejemplo el saludo a la hora de entrada, el pase de lista, la forma en que se acomodan, el horario en el que se desarrolla la clase, por mencionar algunas de ellas y estas pueden suceder de manera práctica y sin razonarlas. Se inicia el estudio de la presente unidad de análisis, describiendo los contextos de los escenarios.

La escuela A, ubicada en una colonia popular de Culiacán, Sinaloa; cuenta con un terreno amplio en el que está una cancha de básquet boll con una estructura de gradas de tres niveles, un patio central, una cafetería con mesas, cuatro edificios de construcción, el primero de dos pisos en donde se encuentra la dirección, oficinas administrativas y el salón de cómputo, dos de un piso en los que se ubican las aulas, sala de maestros, biblioteca y los baños y uno circular que funciona como salón de usos múltiples. La escuela B, ubicada en el centro de la ciudad cuenta con dos edificios, uno de dos pisos, a la entrada, en el que se encuentra, del lado derecho oficinas administrativas y la dirección y del lado izquierdo los cubículos de los maestros, en la parte de arriba un salón de proyecciones y el aula de computación; el otro edificio es de tres pisos en forma de ele, en el que se encuentran los salones, laboratorios y la biblioteca, en el centro de la escuela se ubica el patio y junto a las escaleras del salón de computación la lonchería y una papelería.

Cada grupo tiene su historia, sus rutinas, desde cómo se acomodan físicamente, el saludo al entrar el profesor, la despedida, los silencios, las risas y no se puede pasar por alto su horario, esto es, cada clase ocurre en un tiempo determinado diario, semanal, mensual y semestral.

En la preparatoria A de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS) en el aula 9 ubicada en el medio del último edificio, se encuentra el grupo 3CFM1, el cual es el grupo de tercer grado de la fase especializada de ciencias físico matemáticas, son 23 estudiantes, una mujer y 22 hombres, la mujer es la jefa del grupo; la gran mayoría (más del 80%) trabajan saliendo de la preparatoria; 16 quieren estudiar alguna ingeniería (mecánica, industrial o eléctrica) ya sea en la UAS o en el Tecnológico de Culiacán; 4 se interesan en estudiar arquitectura, uno administración y uno gastronomía todos ellos en la UAS. El grupo acude a la escuela por la mañana al aula 9 en un horario de 7:00 hrs. a 12:30 hrs, la distribución diaria de las horas se muestra en la tabla 8.

Tabla 8
Horario del grupo 3CFM1

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Hora	7:00 - 7:50	7:50 – 8:40	7:00 - 7:50	7:50 – 8:40	7:00 - 7:50

Fuente: Elaboración propia, junio de 2010.

En la preparatoria B de la Universidad Autónoma de Sinaloa ubicada en el centro de Culiacán, Sinaloa; en el aula 3 ubicada al final del pasillo a la izquierda de las escaleras en el segundo piso, se encuentra el grupo 5CFM1 de tercer grado de la fase especializada de ciencias físico matemáticas, este grupo está integrado por 14 estudiantes, tres mujeres y once hombres, entre ellos hay una pareja de novios que siempre se sientan juntos en la segunda mesa de la fila frente al escritorio del maestro; una mujer es la jefa de grupo, dos estudiantes quieren estudiar arquitectura en la UAS, dos no saben que estudiar todavía y los otros diez quieren estudiar alguna ingeniería. El grupo acude a la escuela por la tarde en un horario de 13:00 hrs. a 18:30 hrs, mismo que se muestra en la tabla 9.

Tabla 9
Horario del grupo 5CFM1

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Hora	4:50 – 5:40	1:50 – 2:40	5:40 – 6:30	1:50 – 2:40	4:50 – 5:40

Fuente: Elaboración propia, junio de 2010.

El horario de clases sitúa el ambiente áulico en cuanto a la historicidad del grupo pues marca un tiempo determinado al día, a su vez en la semana, mes y semestre; en el que se desarrollan los eventos en los que está involucrado el grupo, el conocer el horario de los grupos permite establecer un tiempo histórico en el que se desarrollan los eventos y de esta manera seguir las transformaciones que se van dando en el grupo.

En cuanto al contexto físico de las aulas en las que se realizó el estudio, es adecuado pues son amplias con suficiente ventilación, están cuidadas, recién pintadas en color claro lo que aunado a sus grandes ventanas en ambos lados del salón proporcionan buena iluminación, una cuenta con alrededor de 30 butacas (individuales) grises distribuidas en siete filas, otra con 30 mesas blancas cada una con dos sillas y distribuidas en cinco filas; siempre estuvieron algunas butacas o sillas en desorden, lo que se puede apreciar en el sociograma de cada observación, en ellos se puede notar la tradición de cada grupo sobre el acomodo, pues tienen asignados implícitamente los lugares, los estudiantes suelen sentarse regularmente en la misma área del salón de clases, de hecho durante las observaciones sólo se cambiaron de lugar ocasionalmente y por lo general para trabajar en equipos.

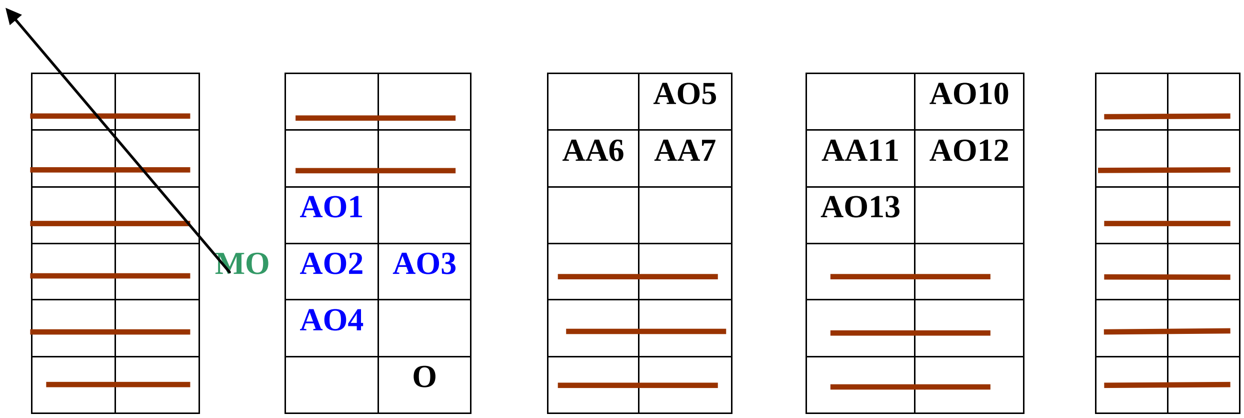
La forma en la que los estudiantes se acomodan, día con día, se expresa en los sociogramas de las observaciones, que como lo menciona Bauleo (1989), “En el sociograma, diagrama de una situación grupal, se ubicaran las posiciones de cada integrante de un grupo, la interacción con los demás, el grado de sentimiento, atracciones y rechazos;” (p. 14.), estos son parte del contexto físico del aula, pues permiten ubicar físicamente el lugar de los estudiantes, implícitamente en ellos está la tradición que los alumnos tienen por ocupar un espacio físico dentro del aula; (en el apartado de anexos se incluyen registros de observación en los que se aprecian los sociogramas de los grupos), a continuación se muestra un ejemplo de cada escuela.

	AO	AO	AA			
	AO	AO	AO	AO		AO
-	-	AO	AO	AO	-	AO
AO	AO	AO	-	AO	-	-
AO	AO	AO	AO	O	AO	AO

Escuela A (R3A, p. 1: 9-10-09)[4]

[4] Es necesario clarificar la notación que se utiliza en la realización del trabajo, así pues, la simbología fue la siguiente: **AO.-** Alumno; **AA.-** Alumna; A**S.-** Alumnos; - **.-** Butaca vacía; **M.-** Maestro; **O.-** Observadora; **MA.-** Muchacha; **MO.-** Muchacho; **I.-** Investigadora; **AO1,…, AO14.-** Alumno uno,…,catorce de la escuela A; **AOa, AOb y AOc.-** Alumnos informantes claves de la escuela B; **R1A,…, R9A.-** Registro uno escuela A,…, Registro nueve escuela A y **R1B,…, R11B.-** Registro uno escuela B,…, Registro once escuela B; **EDA**.-Entrevista al docente A, **EDB**.-Entrevista al docente B; **EAA**.-Entrevista alumno escuela A; **EAB**.-Entrevista alumno escuela B.

Del sociograma de la escuela A, se aprecia que el salón cuenta con butacas individuales para los alumnos. Las líneas cafés indican la forma en la que los estudiantes se movieron para trabajar en binas y triadas, los alumnos señalados en otro color llegaron tarde a la clase, también se puede notar que el alumno de la quinta fila, sentado en la tercer butaca no se integro a trabajar con ningún compañero.



Escuela B (R3B, p. 1: 13-10-09)

En el sociograma de la escuela B se nota la distribución del salón en mesas por pares de alumnos, en este caso los alumnos tienen un número pues siempre se colocaron en los mismos lugares y como era un grupo pequeño, la investigadora los ubico individualmente desde la entrada al escenario; los alumnos marcados en azul, el día en que se realizó la observación estaban escuchando música con un muchacho de otro grupo (indicado en verde), hasta que el docente les llamó la atención y el joven que no pertenecía al grupo salió, el movimiento está indicado por la flecha negra.

De esta manera, la concepción del átomo social que representa el contexto del aula, en la cual cada individuo no es sólo él, sino el conglomerado de relaciones interpersonales en una situación determinada, posibilita los pasos que permiten visualizar los sucesos del movimiento grupal. Los movimientos que se dieron en los grupos durante las clases observadas quedaron marcados en los sociogramas de cada observación, con colores si se hace alguna referencia del alumno en la observación, con flechas negras los desplazamientos de los alumnos y flechas cafés para indicar los movimientos de los maestros.

Una vez ubicados los grupos en el tiempo y espacio, se pudo notar que el momento de pasar lista, es una rutina, pues es un acto repetitivo que se realiza día con día; por ejemplo en un aula sucedió que el maestro pasa lista hasta después de poner a trabar al grupo, ya sea en copiar del pizarrón, lo que se explicó del tema, la elaboración de una gráfica por aproximaciones sucesivas, o la realización de ejercicios en equipos, entonces, hasta que el grupo está completamente organizado y trabajando el maestro pasa lista, y se pudo constatar que son precisamente estos momentos, en los que el grupo está en silencio.

A continuación se muestran algunos fragmentos de las observaciones en donde se aprecian los sucesos mencionados:

> M.- Ahora podemos gráficar la función seno, basta con saber las equivalencias y los valores del seno hasta tresceinetos sesenta grados. ¿puedo borrar aquí? Para hacer la gráfica.
> O.- (en coro, los alumnos).
> AS.- No.
> M.- Pasen esto para hacer la gráfica de seno.
> O.- (El grupo en silencio se ponen a copiar lo del pizarrón, de manera individual y no comentan entre ellos).
> O.- (Participaron en el diálogo de las equivalencias dos alumnos, el sentado en la esquina a mi derecha y uno de adelante hacia mi izquierda (marcados en el sociograma en azul. Me preguntó si el resto de los estudiantes comprenden las equivalencias).
> O.- (El maestro en su escritorio pasa lista, un alumno se para y le muestra un papel al maestro) (R1A, p. 9; 6-10-09, 8:20 hrs.).

El fragmento anterior corresponde a una clase sobre graficación de funciones, se realizaron algunas equivalencias de grados a radianes antes de graficar, se puede notar que los alumnos le piden al maestro que no borre lo del pizarrón para copiarlo, el maestro aprovecha este memento para pasar lista. Algo similar se muestra en el siguiente fragmento de observación.

> M.- ¿ya tienen tanto el valor de la izquierda como el de la derecha?
> AO1.- Siete.
> M.- ¿Siete?, ¿Quién da más?
> O.- (Silencio)
> M.- Si hicieran un bosquejo de la gráfica, ¿Cómo sería?, ¿Quién quiere pasar?
> O.- (Silencio, alumno frente a mí, cuchichea con su compañero sobre una salida para el fin de semana).
> O.- (El estudiante sentado a mi lado izquierdo, ya terminó y trata de hacer la gráfica con la ayuda de un lápiz como regla, habla para sí mismo, mueve los labios).
> M.- ¿Están de acuerdo con que *f(x)* se aproxima a siete?
> AO.- Sí.
> M.- Haber, están muy callados.
> O.- (Los alumnos junto a la ventana comentan algo).
> O.- (El maestro pasa lista, el estudiante a mi lado, que trataba de hacer la gráfica se dice a sí mismo 'quién sabe no sale' y borra).
> M.- J… nada más vino se anotó y se fue.
> AO.- Maestro, ¿Qué J….?
> M.- D….
> AO.- Soy yo.
> O.- (Levanta la mano).
> M.- ¿Qué paso hijo?, que J… esperabas, ¿veniste ayer?
> AO.- Si, y antier, y …
> O.- (hace movimientos con las manos).
> (R2A, pp. 12-13; 7-10-09, 8:18 hrs.).

En el fragmento anterior se nota que, el maestro hasta que los alumnos están tratando de hacer una gráfica, pasa lista; es la primera clase de límites y se puede notar en el diálogo, que se está abordando gráficamente, aprovechando de esta manera el tema anterior sobre graficación de funciones. Por otra parte cabe señalar que las clases citadas en los dos fragmentos de observación anteriores iniciaron a las 7:50 hrs. de la mañana y el pase de lista se llevó a cabo después de las ocho; al maestro se le preguntó al respecto y el diálogo con él fue el siguiente:

> I.- ¿Todos los días pasa lista?
> Sí, pues cuando los estudiantes se dan cuenta que uno pasa lista diario, se preocupan por no faltar, para mí es una estrategia para evitar el ausentismo.
> I.- ¿En qué momento de la clase pasas lista?
> Generalmente en medio, por dos cosas, primero me gusta empezar la clase y cuando están concentrados en una tarea aprovecho para pasar lista y al terminar se concluye la actividad y segundo, como mi clase es a primera y segunda hora tengo alumnos que llegan tarde y de esta manera ya están en el salón cuando paso lista. (EDA, 1-12-09; p. 3).

Los diferentes momentos de la clase van marcando las costumbres de los grupos, para este caso, el maestro se percató que algunos de sus estudiantes llegan tarde por lo que decide dejar el pase de lista para después de la entrada y mientras los alumnos realizan una tarea, de esta manera aprovechar al máximo el tiempo de la clase. El maestro implícitamente usa como dos estrategias el momento de pasar lista todos los días, por una parte evitar el ausentismo y por otra optimiza el tiempo efectivo de clase.

Por otra parte, en el otro grupo se encontró que el docente pasa lista al entrar al salón, casi mecánicamente, el maestro todos los días pasa al escritorio a dejar sus cosas, se sienta y pasa lista. Esto se observa en los siguientes tres fragmentos de registro.

> O.- (Eran las 17:45 hrs. Cuando el maestro entra al salón, se dirige al escritorio saludando a los alumnos).
> M.- Buenas tardes, y ¿los demás?
> AS.- Buenas tardes, somos todos profe, no falta nadie.
> O.- (El maestro se sienta y les pregunta que si están seguros de ser todos)
> M.- ¿Seguros, me parecen pocos?, ¿Qué vimos la clase anterior?
> AO.- Operaciones con funciones.
> M.- (insiste) ¿Qué fue lo que vimos?
> AO.- Operaciones con funciones (hace una pausa y dice) sumas y restas.
> M.- Ya ven que no es lo mismo.

O.- (Alumna, replica).
AA.- ¿Cómo que no es lo mismo?
O.- (El maestro empezaba a pasar lista, había mencionado a tres alumnos suspende).
M.- Lo que pasa es que una coma puede cambiar el significado.
O.- (Continua pasando lista, al nombrar un alumno nadie responde)
M.- Ya ven que alguien faltaba, ya decía yo.
(R1B, pp. 2-3; 30-09-09).

13:50 O.- (El maestro va a su escritorio y pasa lista).
M.- ¿Alguna duda o comentario de la clase de ayer?
(R2B, p. 2; 6-10-09).

En los fragmentos de registro de observación citados, se puede notar que, la rutina del maestro es de llegar, pasar lista y preguntar de qué se trato la clase anterior.

M.- Buenas tardes, ¿Qué pasó porque no habían venido?
AA11.- Usted no había venido.
M.- Cierra la puerta.
O.- (Le dice a una alumna, AA7) .
O.- (Alumna AA7, haciendo una mueca va a cerrar la puerta).
O.- (El maestro pasa lista)
O.- (Los muchachos frente a mí, marcados en azul en el sociograma, tienen música alta que se escucha en todo el salón).
O.- (El maestro deja de pasar lista).
M.- Apaguen eso por favor.
O.- (Dirigiéndose a donde están los muchachos).
M.- haber usted no es del salón, por favor salga.
O.- (Señalando a un muchacho, marcado de verde en el sociograma, que estaba con los alumnos, el muchacho se para).
M.- Acomode la silla donde estaba.
O.- (El muchacho acomoda la silla y sale del salón).
O.- (El maestro regresa a su escritorio y continúa pasando lista).
(R3B, pp. 2-3; 13-10-09).

De acuerdo a su rutina diaria el maestro llega y pasa lista, en esta ocasión un grupo de alumnos, no le deja tomar la asistencia, están en el salón de clases con un muchacho de otro grupo escuchando música y no dejan de hacerlo, hasta que el maestro se los solicita y, le pide al joven que los acompaña que salga del aula. Los alumnos se disponen para la clase hasta que el maestro termina de pasar lista, mientras tanto, platican, escuchan música, ven celulares, en fin, es tiempo de alguna manera muerto de la clase.

4.1.2. Metas o propósitos del grupo

En el aula se pueden manifestar, las metas del grupo, como cuando el maestro encontró cerrado el salón, ese día jugaba México y los estudiantes estaban más interesados en el partido que en la clase de Cálculo, su meta era no tener clases por eso, ese día cerraron el salón de clases y esperaron al maestro en el pasillo jugando, el propósito de los muchachos era, que al ver el maestro el salón cerrado desistiera de dar clases y ellos así se podrían ir a ver el juego de México.

> O.- Hoy subí al aula tres, la puerta estaba cerrada los muchachos estaban afuera bromeando, llega el maestro y le dicen que no puede haber clases que el salón está cerrado, el maestro trata de abrirlo y no puede, les dice a los alumnos ustedes saben cómo abrirlo vamos ábranla a lo que un alumno contesta es que no traje mi ganzúa todos se ríen y se ven con complicidad, el maestro llama al guardia, si ellos saben cómo abrirla, el guardia corre la ventana de al lado mete su carpeta y abre la puerta, listo profesor pueden pasar.
> (R4B, p. 2; 14-10-09).

Ese día (14-10-09), México jugó contra Trinidad y Tobago dentro del marco de los partidos eliminatorios para el Mundial del 2010, el mencionado partido empezaba a las 18:00 hrs y la clase se estaba desarrollando de 17:40 a 18:30 hrs. Después de que abren la puerta y entran al salón, los alumnos están inquietos, el maestro les entrega unos ejercicios para resolver de manera individual y los estudiantes tratan de persuadir al maestro.

AO5.- Maestro hoy juega México a las seis.
M.- ¿Qué México, que?
AO10.- juega hoy.
M.- Concéntrense en eso.
(R4B, p. 4; 14-10-09).

Con la intensión de que los alumnos se pusieran a trabajar, el maestro organiza los ejercicios, pero la meta del grupo ese día era irse a ver el partido de México, cuando suceden estas situaciones en el grupo, en el que los propósitos del enseñante y del aprendiz no son los mismos, se establece una negociación en el grupo, durante la negociación se forma una transacción, dicha transacción, es un acuerdo pedagógico que pone de manifiesto los roles del maestro y del alumno, por su parte el docente tiene que tomar numerosas decisiones sobre el desarrollo de cada clase, producto de la interacción de los procesos de enseñanza aprendizaje, las que están en función de la dinámica propia que se establece en el grupo; de esta forma, el comportamiento del grupo es el resultado de la interacción puesta en juego.

El día mencionado los alumnos resolvieron los ejercicios, entre plática y plática, pero se resolvieron, además se abordó la noción intuitiva del límite, salieron temprano pues ambas partes tuvieron que ceder, por una parte los alumnos accedieron a resolver los ejercicios y tener clases y el docente por su parte concedió salir temprano.

En el salón de clases la interacción de los alumnos y el docente manifiesta negociaciones que contribuyen a alcanzar las metas o los propósitos del grupo, en unas ocasiones esas metas son propuestas por el docente y en otras por los alumnos; pueden variar desde lo académico y lo cultural según el propio contexto en el que está inmerso el grupo.

4.1.3. Conocimientos previos al Cálculo

A los conocimientos de cursos anteriores, es a los que se les llama conocimientos previos al Cálculo y hacen referencia a contenidos teórico-prácticos de matemáticas previas al Cálculo. Estos conocimientos indican el nivel de desarrollo de los estudiantes, ya sea que se trate de un concepto o algún procedimiento.

En Cálculo I, los conocimientos previos más solicitados sobre algebra, son referentes a leyes de exponentes, productos notables, factorización, simplificación de expresiones algebraicas y radicación, para la parte procedimental de límites en la que los resuelven por sustitución directa y llegan a una indeterminación, ya que uno de los procedimientos más utilizados para tratar de determinar un límite es mediante la factorización.

Algunos ejemplos de este tipo de conocimientos previos solicitados son los siguientes, en el pizarrón, el maestro escribió las siguientes leyes de exponentes:

$\frac{ax^{m}}{bx^{n}} = \frac{a}{b}x^{m-n}$ (R1B, p. 13; 30-09-09).

$\frac{t^{2}}{t} = t^{2-1} = t^{1} = t$ (R1B, p. 14; 30-09-09).

$\frac{t}{t} = t^{1-1} = t^{0}$ (R1B, p. 15; 30-09-09).

Estas leyes se escribieron con el propósito de que los estudiantes se acordaran de ellas y las aplicaran en funciones; en otra ocasión para recordar el desarrollo del binomio al cuadrado, para aclarar la duda de un alumno el maestro asentó en el pizarrón:

> M.- Nos estamos apoyando en esto:
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> $(x+y)^2 = x^2$
> $(x-y)^2 = doble \quad xy\ )$
> $\quad\quad y^2$
> M.- Por eso. (R2B, 6-10-09; p. 7).

Para el tema de composición de funciones el maestro hizo referencia al teorema visto en primer año para elevar al cuadrado un polinomio, y solicita al grupo que lo recuerden, pues en la composición de funciones se requería elevar al cuadrado un trinomio. A continuación se cita el hecho mencionado.

> M.- Pero no es una ecuación, vamos a acordarnos del teorema que vieron en primero, a ustedes les dijeron lo siguiente
> O.- (Escribe en el pizarrón
> $(x+y+z-w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz - 2xw - 2yw - 2zw\ )$
> M.- El cuadardo de cada término y luego el doble de los productos que se suceden, tomando primero la x, luego la y y así sucesivamente. Este es el teorema pero si no se acuerdan, ¿Qué respuesta esperaba de ustedes? Que cualquier cuadrado es la multiplicación por si mismo, esto es,
> O.- Escribe en el pizarrón
> $(6x^2+10x-5)^2 = (6x^2+10x-5)(6x^2+10x-5)$
> (R2B, 6-10-09; p. 10).

En la clase se resolvió el problema aplicando el teorema y el maestro les expresó a los alumnos que después lo comprobaran multiplicando por sí mismo el polinomio. Los conocimientos previos a los que se hace referencia el docente, son mayoritariamente de algebra y se solicitan formalizados, es decir, de acuerdo a su forma matemática establecida, ya sea ley, teorema o principio, como en el caso de elevar al cuadrado un polinomio citado en el fragmento de observación anterior.

Para los conocimientos previos algebraicos, esto es, todos aquellos que tienen que ver con algebra se enfatiza en los principios y reglas, lo que hace referencia a la matemática formalizada, pues después de ejemplificar se explica la regla que se utiliza, como en el ejemplo para resolver un límite de forma analítica, a continuación se cita el fragmento de observación en donde se muestra esto.

> O.- (Escribe en el pizarrón)
>
> $$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(2x-3)}{x}$$
>
> M.- No escriban, haber pongan atención.
> M.- Aquí en este ejemplo.
> O.- (señalando lo que escribió en el pizarrón)
> M.- Estamos usando factor común, este principio que ustedes vieron en primero.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> Factorización de polinomios con factor común
>
> $$ax + bx + cx - dx = x(a + b + c - d)$$
>
> $$\frac{ax}{a} = x$$
>
> $$\frac{bx}{x} = b$$
>
> M.- Este principio estamos usando.
> O.- (Señala el principio que escribió en el pizarrón)
> M.- Así que en el ejemplo aplicamos este principio de esta forma.
> (R8B, pp. 8-9; 26-10-09).

Otros conocimientos previos más recientes que se solicitan son los de la clase anterior, con la intensión de iniciar la clase y conectarla con el conocimiento anterior, como cuando se continúa con un nuevo ejemplo que se pone en el pizarrón o se le pregunta al grupo “¿Qué pasaría sí sustituimos directamente?”, para estos casos el maestro llega a clase y solicita los conocimientos de lo aprendido en la anterior, con frases como las que se citan en los siguientes fragmentos de registro:

> M.- ¿Qué vimos la última clase? Saquen su apunte (R1B, 30-09-09; p. 2), (R7B, 19-10-09; p.2), (R8B, 26-10-09; p.2), (R10B, 9-11-09; p.4).
> M.- ¿Qué fue lo último que vimos? Chequen sus notas.
> (R6B, 16-10-; p. 3).
> M.- ¿Cuántos ejemplos hicimos de buscar la función equivalente?
> (R9B, 28-10-09; p. 4).

De estos registros, se puede destacar que, el docente inicia la clase solicitando lo que se trato en la anterior, esto con el propósito de enlazar el nuevo conocimiento; uno de los principios básicos en la enseñanza de las matemáticas es que todo conocimiento nuevo debe parecerse al anterior y con la solicitud de los conocimientos vistos en la clase anterior, se contribuye a que los alumnos establezcan esas analogías y relacionen los conocimientos; por otra parte los conocimientos previos al Cálculo I son fundamentales, dado que, su aprendizaje es como un edificio en construcción que necesita de cimientos y pisos anteriores bien construidos. De ahí la importancia de solicitar estos aprendizajes previos y sobre todo que el alumno transfiera todos esos conocimientos en los nuevos temas, así que no está demás la insistencia de los docentes en recordar estos temas.

> M.- Muchachos para mañana traten de recordar lo de factorización.
> O.- (Escribe en el pizarrón).
> Factorizar:
> 1.- Un polinomio con término común.
> 2.- Un trinomio cuadrado perfecto.
> 3.- Una diferencia de cuadrados.
> 4.- Un trinomio cuadrado no perfecto.
> 5.- Un trinomio de la forma $acx^2 + (ad + bc)x + bd$.
> (R2A, p. 19; 7-10-09).

Los conocimientos previos son una gran preocupación de los maestros de Cálculo I, y por más que se les recuerde a los alumnos o se les solicite el manejo adecuado de las matemáticas previas al Cálculo, este punto sigue inquietando a los docentes, esta preocupación la expresó el docente en su entrevista, de la siguiente manera:

> I.- ¿Cuáles son las dificultades que usted identifica para que los alumnos comprendan el límite?
> Inicialmente con el concepto que tiene el muchacho del límite, para él un límite es una frontera, no más allá, no hay, límite es que hasta aquí llega, el te habla del límite de la mesa, es hasta aquí (señala en borde de la mesa), es el final de ella y el no confine que hay más allá y eso lo trunca, ya en el procedimiento, la falta de las herramientas que tienen que ver para el cálculo de límites, como son los productos notables, la factorización, esos son los problemas que hay en límites, esas faltas de herramientas son lo que les dificulta más.
> I.- ¿Qué estrategias utiliza para que los alumnos utilicen los temas previos al Cálculo?
> A cada generación les hago una relación de los temas que deben de dominar cuando llegan a Cálculo, y lo mismo al iniciar cada unidad, en la de límites, los tipos de factorizaciones y los productos notables que les corresponden a cada factorización y que hagan ejercicios de cómo desarrollarlos, es lo fundamental que ellos dominen esa herramienta para poder que sea más fácil el calcularlos, el ver la parte operativa de los límites y lo que es también fracciones porque es el otro gran coco del alumno, las fracciones.
> (EDA, 1-12-09; pp. 4-5).

De la esntrevista docente se puede notar que, los temas de mayor preocupación corresponden a los de álgebra en lo referente a productos notables y factorización, el maestro menciona que con todas las generaciones es lo mismo, año con año, se les tiene que recordar lo de productos notables y factorización, lo mismo ocurre con fracciones, ya que es un tema que les cuesta mucho trabajo; en este sentido el otro docente menciona que, cuando algún tema les causa alguna dificultad, es porque hubo algo previo que quedo sin resolver o que no entendieron, a esto se refiere cuando expresa que los alumnos no pueden aprender las nuevas formulas, que son mera mecanización, por las deficiencias en aritmética, algebra y funciones, lo que se cita a continuación.

> I.- ¿Cuál es el tema que a usted se le hace más complicado para enseñar?
> A ver… de Cálculo I…pues el tema de derivadas porque la mayoría de los alumnos aun cuando es un, un… mera mecanización de formulas de derivación, la mayoría no alcanza a comprender como funciona la formula, como mecanizarla, como ubicar el problema, la función que se les da, acomodarla en el modelo matemático que la contempla y ahí también repercuten sus deficiencias aritméticas, algebraicas, geométricas, trigonométricas inclusive, que ya no se acuerdan que ya se les olvido, en su momento no lo comprendieron bien y siempre que hay un problema que no podemos resolver es porque atrás hubo otro más sencillo que tampoco pudimos resolver y se va acumulando, entonces aun cuando las, las formulas de derivación, las algebraicas, las trigonométricas, las exponenciales son sencillas ellos batallan para, para interiorizarlas y poderlas aplicar.
> (EDB, 27-11-09; p. 2).

El docente B menciona en la entrevista, que a los alumnos les cuesta trabajo aplicar las formulas, y esto, tiene que ver con la manera de aprender, pues si para los estudiantes es mecanización, les cuesta trabajo transferir, ya que lo que saben hacer es repetir pasos, así la mecanización los priva del sentido y significado y por lo tanto de buscar las alternativas en donde se puede aplicar lo aprendido o vincularlo con algún otro conocimiento.

Para los docentes es complicado enseñar Cálculo I por las deficiencias que traen los estudiantes sobre los temas algebraicos y esto no es nada nuevo, como ya lo menciona el maestro A, generación tras generación le ha ocurrido, tiene que recordar los temas algebraicos; por otra parte los docentes coinciden en que el Cálculo es como un edificio que necesita de los pisos anteriores y están de acuerdo en que una buena parte del problema en la internalización de los conceptos de Cálculo como el del límite es esa carencia en el nivel anterior. La propuesta para solucionar esta problemática, los decentes la plantearon en su entrevista de la siguiente manera:

I.- ¿Qué se puede hacer para que los alumnos lleguen a dominar las matemáticas previas al Cálculo I?
Yo digo que sí se puede hacer algo y hay mucho por hacer y no lo hemos afrontado, la verdad, y es que muchas veces los alumnos de primer año y de segundo no saben que es lo que quieren estudiar y en todas las materias, no nada más en matemáticas y a lo mejor las pasan porque tiene que pasarlas pero sin darles la atención que requiere cada una de ellas, cuando, específicamente en el caso de matemáticas, tu sabes que es más complicado la conceptualización de las ideas, de las operaciones que tiene el alumno que realizar, no le ha visto la utilidad todavía, cuando llega a tercero, que dice, esto es lo que quiero estudiar y necesita irse a una de las fases donde llevan Cálculo. El alumno ya viene con las deficiencias y nosotros no hacemos nada, lo tomamos al alumno como viene y empezamos a darle el programa de Cálculo, de Cálculo I, con todo los problemas que el trae, y a lo mejor no recibir a ningún alumno en las fases, no recibirlo en agosto, recibirlos en julio, todo el alumno que quiera esas fases debería entrar en julio, porque su trabajo de orientación educativa ya lo hizo, ya lo que pudo hacer lo llevó a cabo, lo que no pues ni modo y darles cursos a los muchachos.
I.- ¿Cómo propedéuticos?
Propedéuticos, en donde no decirle al alumno tienes que utilizar estas herramientas, es darles las herramientas, volver a abordar el algebra que se llevó en primer año, la trigonometría del segundo.
I.- Te refieres a ¿Enseñarles a que aprendan a utilizarla?
Si, ya está consciente de lo que quiere ser y cuál va a ser su fase, va a llevar Cálculo, ahora sí, es otra tu misión, otro tu compromiso y que sea un requisito para entrar a las fases.
I.- Bueno y si eso pasará, si se les diera así en julio y ya llegará muy bien, poniendo una situación ideal, ya llegan excelentes en algebra, pueden utilizar todas las herramientas, crees que se llegara a abordar el concepto formal, el del límite de Cauchy-Weierstrass, el de Épsilon-delta, para que vean lo que es matemáticamente una aproximación, ¿ayudaría a mejorar su aprendizaje en el Cálculo?
Considero que si, si el alumno no trae esas herramientas y al momento que uno aborda el tema de límites o cualquier otro de Cálculo, se aburre y está presente pero mentalmente en otra parte, porque no logra ligar el tema que uno está abordando con conocimientos previos o usas terminología y operaciones que a él lo dejas sin nada, lo dejas en abstracto, no logra ligarlo con nada, hablamos de una factorización y dice lo he escuchado pero no sabe en qué.
(EDA, 1-12-09; pp. 9-10).

Si bien es cierto que si el estudiante posee los conceptos de algebra, geometría, trigonometría y funciones que requiere para el conocimiento de Cálculo, éste sería más fácil para él, pero en muchas ocasiones es complicado apropiarse del nuevo conocimiento ya que resulta más difícil combatir las antiguas concepciones puesto que el concepto que las origina es correcto; ¿qué maestro de Cálculo no se ha enfrentado a los siguientes errores por parte de los alumnos?: $\frac{a^8}{a^2} = a^4$, en este caso lo que el alumno aprendió en aritmética interfiere en el aprendizaje de algebra, pues el estudiante tiende a dividir los exponentes, debido que aprendió primero que $\frac{8}{2}$ significa dividir 8 entre 2, algo similar ocurre cuando los alumnos resuelven $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, este error lo cometen los estudiantes porque aprendieron primero la propiedad distributiva: $2(a + b) = 2a + 2b$, como se ve, los alumnos poseen un conocimiento terminado que han utilizado frecuentemente, y que ante la nueva situación se convierte en un obstáculo epistemológico.

Se debe plantear el problema del conocimiento en términos de obstáculos epistemológicos en el sentido de las dificultades que se tienen para adquirir nuevos conocimientos, se conoce en contra de un conocimiento anterior destruyendo los mal adquiridos o superando los que tenemos.

> No se trata de considerar los obstáculos extremos, como la complejidad o la fugacidad de fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Bachelard, 2000; p. 15).

Así pues, los conocimientos acabados de algebra y que han utilizado los estudiantes en los cursos anteriores, representan en Cálculo I una dificultad que entorpece su evolución a un nuevo nivel de desarrollo y ocasiona confusión con el nuevo conocimiento, entonces, ¿Qué hacer para superar esta dificultad en los estudiantes?, mediar en la zona de desarrollo actual a través de las diferentes representaciones para resignificar el nuevo conocimiento; una manera de realizar esta mediación es conocer las dudas o interrogantes de los alumnos, para de esta manera identificar su representación y lograr transformarla a fin de que evolucione de nivel.

4.1.4. Interrogantes de los alumnos para resolver límites

Las dudas o interrogantes influyen en las decisiones y acciones que se realizan, tienen que ver con las creencias, la validez del conocimiento; la duda a veces implica inseguridad en la validez. En las dudas se expresa lo que ocasiona ambivalencia en los individuos, también se exponen lo que no se tiene seguridad de estar en lo correcto, en un salón de clase los estudiantes expresan sus dudas respecto a conceptos, procedimientos o significados; las interrogantes resueltas correctamente pueden ayudar a pasar a nuevos niveles de desarrollo, los alumnos tienen diferentes maneras de consultar sus dudas, a continuación se muestran algunos.

M.- Multiplicamos y nos da. (Escribe en el pizarrón)

$$= \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} \bullet \frac{x^3 - 1}{x + 2} = \frac{\frac{1}{x^3}\left(x^3 - 1\right)}{\frac{1}{x^3}\left(x + 2\right)} = \frac{\frac{x^3 - 1}{x^3}}{\frac{x + 2}{x^3}} = \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

AO2.- ¿Por qué da x^2?
M.- ¿Dónde?, ¿aquí? (Señala el ejercicio en el pizarrón).
AO2.- No en la x^2 antes. (Apunta al pizarrón).
AO1.- Porque x entre x^3 da x^2. (Lo dice en tono de voz muy bajito).
O.- (El maestro escribe en el pizarrón tres x bajo x^3 en la expresión del pizarrón)
M.- Porque x^3 es x por x por x.
O.- (AO1 se ríe y pone cara de extrañeza, como si le pareciera demás lo que escribe el maestro).
(R4A, 13-10-09; p. 8).

Se aprecia la duda de un alumno respeto al procedimiento de simplificación de fracciones algebraicas, en este caso la formada por $\frac{x}{x^3}$, que se simplifica como $\frac{1}{x^2}$, el maestro con su respuesta no aclara del todo la duda, la respuesta es incompleta, si x^3 es, x por x por x, y después ¿Qué? y, este es un procedimiento de simplificación que si no conocen los alumnos les dificulta su aprendizaje en límites, la duda es totalmente algebraica y procedimental. Otro ejemplo de interrogante procedimental se muestra en el siguiente registro, la duda es referente a la parte operativa de algebra.

> AA.-¿Por qué 100*x*?
> M.- Porque es el doble de 10*x* por -5. Ahora acompletemos con lo siguiente de la operación. (Escribe en el pizarrón:
> $36x^4 + 100x^2 + 25 + 120x^3 - 60x^2 - 100x - 30x + 15$).
> (R2B, 6-10-09; p. 12).

El maestro responde porque el 100*x* y continua desarrollando la operación, en la misma, los alumnos siguen manifestando dudas, no comprenden de donde está saliendo el resultado, lo que se les explica de la siguiente manera:

> AO.- Pero porque $36x^4 + 100x^2 + 25 + 120x^3 - 60x^2 - 100x \ldots$
> M.- Aplicamos el teorema y se lo explica señalándolo en el pizarrón.
> ($(x + y + z - w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz - 2xw - 2yw - 2zw$)
> M.- Es el cuadardo de cada término y luego el doble produto de los términos subsiguientes.
> (R2B, 6-10-09; p. 12).

En este ejemplo la respuesta es formalizada, en el primer caso por la resolución de un binomio al cuadrado y en el segundo, se expone el teorema de elevar al cuadrado un polinomio, al parecer la duda es aclarada, aunque este tipo de respuesta de los docentes manifiestan un nivel de ayuda, según lo considera Coll (1995), es de grado cuatro o cinco no es mínima, ya que se les dice como resolver la tarea; por otra parte los alumnos también presentan las siguientes interrogantes sobre los significados, esto se puede ve en los siguientes fragmentos de registro:

> AO3.- ¿Qué es esboza?
> M.- Un trazo de la gráfica.
> (R8A, 19-10-09; p. 3).

Esta pregunta, el alumno la realizó durante una evaluación previa a los límites, sobre graficación de funciones, el estudiante no podía terminar los ejercicios pues no sabía que tenía que hacer cuando le pedían esbozar, también en este caso, la ayuda es de grado 5, se le dice que es, no se ve que entiende él por esbozar ni se media para que cambie de representación y llegue a la correcta. Algo similar se observa en el siguiente fragmento de observación, más la respuesta docente fue diferente:

> AO.- ¿Por qué todas las funciones tienen límite?
> M.- ¿Por qué se te ocurre esa pregunta?
> AO.- No sé, porque no hay funciones que no tienen límite.
> M.- Si, algunas no tienen límite. Precisamente la unidad que iniciamos hoy es límites.
> (R4B, 14-10-09; p. 8).

Se aprecia la duda del alumno sobre el límite, como hizo esta pregunta antes de iniciar el tema y surge cuando contesta la hoja de conocimientos previos, hasta ahí se queda el diálogo, no se le contesta del todo, ya que el tema apenas va a iniciar, por ello, el maestro le expresa que la hoja “es como una introducción a lo que vamos a ver”, esta duda le surge al alumno en la ficha de diagnóstico y lo motiva a querer saber, pero hay diferentes tipos de dudas, porque también pueden surgir de algo que no se entendió de clase como aprecia en el siguiente registro de observación.

AO3:- Profe, ¿cero entre cero, es menos tres?
M.- ¿Cuándo dijimos eso?
AO3.- La clase pasada cuando los límites por la derecha y por la izquierda; límite de x tiende a cero, de equis cuadrada menos tres equis entre equis

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-3)}{x} = \lim_{x \to 0}(x-3) = 0 - 3 = -3$$

M.- Pero eso es una equivalencia tal que tienen el mismo límite, así que cuando tienen una indeterminación matemática, se busca la función equivalente ¿para qué?, para quitar la división entre cero que nos complica.
(R8B, 26-10-09; pp. 5-10).

El maestro explica el ejercicio y le dice: el límite de la función es menos tres, eso no quiere decir que cero entre cero sea menos tres, pues eso es una indeterminación matemática que se soluciona con la función equivalente en este caso x-3, en el acto se ve cómo se va desarrollando paso a paso, lo que indica un nivel elevado de ayuda por parte del docente.

En este sentido, en las respuestas o soluciones del maestro intervienen los niveles de ayuda, en ellas se aprecia la ayuda necesaria para que los alumnos logren resolver la tarea, Ferreyra (2007) menciona las soluciones docentes que según Schön son de dos tipos, la racionalidad técnica o la racionalidad práctica.

Según Schön, el docente puede acercarse a solucionar los problemas de dos maneras distintas: una, a través de la *racionalidad técnica.* Se trata del profesor técnico-especialista que aplica las reglas y procedimientos preestablecidos científicamente y enfrenta los problemas aplicando los instrumentos adquiridos de manera científica. La otra manera es la de la *racionalidad práctica:* el docente es considerado un artista, una persona que reflexiona continuamente sobre su propia práctica para adoptar decisiones propias coherentes con la problemática planteada y no meras recetas aportadas por otros.
(Ferreyra, 2007: p. 29).

A esto que se refiere Schön de las maneras en las que el docente resuelve los problemas, en el registro 2B citados en la página 149 muestran ejemplos de lo que es la racionalidad técnica, se aplica la regla para elevar al cuadrado un binomio y el teorema de elevar un polinomio al cuadrado para resolver la duda de los alumnos. Mientras que el fragmento de registro de observación citado a continuación muestra un ejemplo de la racionalidad práctica.

> AO13.- No entendí lo de un cuarto.
> M.- ¿Cuánto vale n aquí?
> AO13.- cinco cuartos.
> O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
> $n - 1$
> $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$
> AO13.- Haaa!!!!!!! (Sonriente)
> (R11B, 23-11-09; p.10).

El docente aclara la duda del estudiante ayudándole a expresar matemáticamente la problemática y resolverla, lo hace reflexionar en los valores de las variables y visualizar su duda de manera aritmética de modo que él puede resolverla.

4.1.5. Individual y por equipos la organización de las actividades en clases de Cálculo

La organización de las actividades del grupo es la forma en cómo se dispone el proceso enseñanza aprendizaje para la construcción y reconstrucción de los saberes. En ella intervienen las acciones mayoritariamente del docente, es él quien las diseña, las pone en práctica, por su parte los alumnos interactúan con esta organización en el contexto escolar o en el ambiente áulico. Las actividades de enseñanza permiten explicar el aprendizaje de los alumnos, a través del tipo de estructura que se organice en el grupo, en este sentido Coll y Colombina (1995) mencionan estructuras meta, según sean: cooperativa, competitiva o individualista, las actividades organizadas.

> Se da una estructura *cooperativa* cuando los objetivos que persiguen los participantes están estrechamente vinculados entre sí, de tal manera que cada uno de ellos puede alcanzar sus objetivos si, y solo si, los otros alcanzan los suyos. (…) los resultados que persigue cada miembro del grupo son igualmente beneficiosos para los restantes miembros con los que está interactuando cooperativamente. En la estructura *competitiva*, los objetivos o metas de los participantes están relacionados de manera que existe una correlación negativa entre su consecución por parte de los implicados; a saber un alumno puede alcanzar la meta que se ha propuesto si, y sólo si, los demás alumnos no pueden alcanzar la suya. (…) en una estructura *individualista* no existe relación alguna entre el logro de los objetivos o metas que se proponen alcanzar los participantes. (…) cada alumno persigue resultados individuales siendo irrelevantes los resultados obtenidos por los otros miembros del grupo. (Coll y Colombina, 1995: pp. 339-340).

En las actividades de enseñanza se presentan las tres estructuras metas, en ocasiones se observaron clases completamente individualistas en las que los logros de uno no influían en los de los demás, cuando los grupos se organizaban por equipos se piensa en un estructura meta cooperativa pues todos los integrantes pretenden el mismo fin, realizar la tarea encomendada, y sin embargo se observaron las dos estructuras metas, en una ocasión se puso a competir a los equipos entre ellos, de esta manera los integrantes de cada equipo tenían el mismo propósito, concluir la tarea antes que el resto de los equipos, así, el que un equipo logrará el objetivo significaba que el resto de los equipos no lo logró, el equipo que terminara primero explicaba en el pizarrón y ganaba puntos, son ejemplos de cada una de las estructuras meta, primero observemos una situación cooperativa:

> M.- Muchachos, ayer vimos que podemos encontrar límites directos y que en otros obtenemos una indeterminación cuando tenemos división entre cero. Vamos a organizarnos en equipos, no multitudinarios porque luego hacen puro relajo. ¿Ya vieron los cinco tipos de factorización que deje?

> AS.- Si. (En coro la mayoría).
> M.- En parejas máximo tríos van a resolver los ejercicios de la página 40 en donde dice formas indeterminadas. ¿Se forman o yo formo los equipos?
> AO.- ¿De cuantos profe?
> M.- De dos, si acaso uno o dos de tres.
> O.- (Los alumnos se empiezan a acomodar, (en el sociograma se indica cómo se reunieron con líneas cafés) mueven algunos lugares, los equipos están indicados en el sociograma para el trabajo en equipos en distintos colores).
> (R3A, 9-10-09; pp. 4-5).

En la actividad anterior se busca una actividad conjunta, al respeto Johnson (1981 a) ha definido, "en una situación cooperativa donde los objetivos de los participantes están estrechamente vinculados, de tal manera que cada uno de ellos pueda alcanzar sus objetivos si y solo si los otros alcanzan los suyos" (Coll, 2000: 107)., en este caso, el equipo alcanza el objetivo una vez que todos resuelven los ejercicios y durante esa clase se observó como los equipos se apoyaron entre ellos para realizar la tarea. Otra forma de situación para el trabajo se ejemplifica a continuación:

> M.- Resuelvan para ver cuánto les da.
> AO.- ¿de las dos maneras?
> AA.- no de una, de esa. (Indicando lo del pizarrón con su mano).
> O.- Los alumnos resuelven el ejercicio de manera individual y en silencio.
> (R1B, 30-09-09; p. 8).

Lo anterior que Johnson (1981 a) lo definió como situación individualista, "en la situación individualista no existe relación alguna entre los objetivos que se proponen alcanzar los participantes: el hecho de que un participante alcance o no el objetivo fijado no influye sobre el hecho de que los otros participantes alcancen o no los suyos" (Coll, 2000: 107)., en el ejemplo citado se aprecia cómo se propone una tarea a resolver y se resuelve de manera individual sin comentarios entre los alumnos, cada quien logra lo que puede sin importar lo que realice el otro.

Otro ejemplo de situación en equipos se observa en el siguiente fragmento de registro:

> M.- Haber muchachos formen equipos multitudinarios de tres.
> AO.- ¿De cuántos?
> M.- De tres si acaso, dos de dos. El equipo que vaya terminando pasa y explica.
> (Escribe en el pizarrón los siguientes ejercicios).
>
> 1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{8x^4 - 9x^3 + 7x^2}{4x^2}$
>
> 2) $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x^2 + 9x + 14}{x + 7}$
>
> 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2 - 3x + 1}{x - 3}$
>
> 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 7x}$
>
> M.- Haber formen los equipos o los formo.
> AO.- No profe.
> M.- No los veo acomodarse.
> O.- (El maestro continúa escribiendo en el pizarrón).
>
> 6) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$
>
> 7) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{3x - 1}$
>
> M.- El equipo que vaya terminando pasa y explica. Si les gana un equipo tendrán que explicar otro, cada equipo tiene obligación de explicar uno al grupo pero los van a hacer todos, el equipo que vaya terminando uno lo explica y gana, pero todos tienen que explicar uno.
> (R5A, 14-10-09; pp. 4-8).

La indicación es terminar en un tiempo corto, se aprecia lo que Johnson (1981 a) ha definido como situación competitiva, "en una situación competitiva , por el contrario, los objetivos de los participantes están relacionado, pero de forma excluyente, un participante puede alcanzar la meta que se ha propuesto sí y sólo si los otros no consiguen alcanzar las suyas" (Coll, 2000: 107)., en este caso, el ejemplo expone una situación competitiva entre equipos, esto es, cada equipo logra su meta, siempre que los otros no lo logren, pero el trabajo en equipo es una situación cooperativa, desde el punto de vista de la perspectiva teórica operativa, un solo equipo recibe la mayor compensación y esa recompensa va disminuyendo según van resolviendo la tarea, así pues se tiene una cooperación en intragrupos y una competición intergrupo, esto lo señalan Coll y Colombina (1995) en las principales conclusiones de Johnson y sus colegas respecto a la organización social de las actividades.

> i) Las situaciones cooperativas son superiores a las competitivas en cuanto al rendimiento y la productividad de los participantes.
> ii) Las situaciones cooperativas son superiores a las individualistas en cuanto al rendimiento y la productividad de los participantes.
> iii) La cooperación intragrupo con competición intergrupo es superior a la competición interpersonal en cuanto al rendimiento y la productividad de los participantes.
> iv) La cooperación sin competición intergrupos es superior a la cooperación con competición intergrupos en cuanto al rendimiento académico y la productividad de los participantes.
> v) No se constatan diferencias significativas entre la competición interpersonal y los esfuerzos individuales en cuanto al rendimiento académico y la productividad de los participantes. (Coll y Colombina, 1995: p. 341).

En estas conclusiones de Johnson y sus colegas exponen un comparativo de las estructuras metas para la organización de las actividades de los grupos, expresan también el rendimiento académico y la productividad que promueven, y esto se pudo constatar durante la investigación en el diario quehacer de las clases, se observaron las tres estructuras en los salones observados pero cada uno de los docentes expone la explicación acerca de la forma de organización de las actividades en los grupos.

Por un lado algunos registros de observación de la escuela B indican que la organización de las actividades gira alrededor del docente, es él quien expone, quien utiliza el pizarrón y quien dirige toda actividad que se realiza en el aula. Las explicaciones parecen ser muy formalizadas están basadas en definiciones, teoremas, axiomas, formulas y/o principios, con cierto énfasis en la mecanización de los procedimientos, cumpliéndose la regla de los dos tercios mencionada por Coll y Solé (1995), la que señala que durante una clase dos tercios del tiempo es el docente el que explica, habla, expone; con estas acciones el maestro promueve el aprendizaje individualista, se ponen ejercicios para que cada alumno los resuelva en sus cuadernos, cuando los alumnos dan la respuesta se confrontan varios resultados hasta que finalmente, es el mismo profesor que los resuelve en el pizarrón, los alumnos, corroboran así quien tiene razón, durante el tiempo que duro la investigación no se observó que se dejaran tareas, ni que los alumnos trabajaran en equipos o pasaran al pizarrón a resolver algún ejercicio. El docente media con el diálogo para lo que utiliza la pregunta como disonante cognitivo y se apoya de anécdotas, cuentos y analogías en sus explicaciones.

El docente B, expresa que su forma de trabajo es tradicional y que la estructura de organización es individualista y que prefiere que toda tarea la realicen en el salón durante la clase, para él a los alumnos no les gusta pasar el pizarrón, como actividad.

> 14:17 hrs. I.- Y para ver todos los temas, promueve con ellos el trabajo y la organización del grupo de alguna manera en especial
> No, no, este ellos aun cuando me insisten mucho no están impuestos a trabajar en equipos, a veces ellos, le piden ayuda a un compañero, ya es criterio de cada quien, si los ponemos a trabajar en equipo no van a querer porque hay estudiantes que flojean y alguno que le pone ganas pues no quiere cargar con la flojera del otro porque no está trabajando, son raros salvo que a veces hay algunos que si se ponen de acuerdo pero la mayoría de las veces no.
> 14:18 hrs. I.- Y ¿para pasar al pizarrón, participar a resolver ejercicios?
> No se resisten, hay resistencia a pasar al pizarrón, les dejo tareas de casa, no me la traen o me la trae uno y ese se la pasa a todos o la copian.
> I.- Y todas son iguales
> Todas iguales entonces mejor no les dejo tarea de casa procuro mejor ponerlos a trabajar aquí en el grupo y aun así de todas maneras hay muchos que están ahí esperando que el otro la termine para hacerla él o está ahí

pegadito echando ojo para copiar lo que el otro hace, al último que pasa pues que haciendo uno, los otros terminar de pasar y ya lo traen y yo me doy cuenta que todos iguales, los mismos errores, aun así, eso si lo hago más seguido, tareas de salón.
I.- Para que la hagan de manera individual
Así es.
14:19 hrs. I.- ¿Por qué se resisten a pasar al pizarrón?
Si se resisten, algunos no todos, yo si le dijo alguno que pase pero en lo que pasa uno al pizarrón los otros están platicando, esa es otra, se ponen a platicar los otros mientras el otro está sufriendo allá, no ponen atención en ayudarle, en preguntarle, en participar, no, se ponen a hacer otras cosas porque la atención está centrada en el que está en el pizarrón salvo algunos pero no es la mayoría, esa es una actividad que yo he dejado también de lado porque creo que no funciona se me hace que funciona mejor lo otro, que trabaje cada quien en su cuaderno.
I.- De forma individual
Si, yo les digo pregúntense entre ustedes pero no copien, las dudas que tengan pueden preguntarse pero no copien pero de todas maneras copian se las ingenian, vamos a suponer que alguien tenga diez en todas las tareas del salón eso se corrobora el día del examen, si alguien tiene diez en todas las tareas del salón y en el examen sale con cero fue un alumno que a la mejor estuvo copiando, puede ser, está bajo sospecha que así sucedió, si un alumno que me entrego todas las tareas de salón en el examen hace un buen examen entonces concuerda su trabajo diario con el examen.
(EDB, 27-11-10; pp. 8-9).

En la entrevista el maestro confirma que la estructura para organizar las actividades del grupo es individualista, no importan los logros como grupo, sino los logros de cada uno de los alumnos, esto dificulta el proceso de internalización algo fundamental es la interacción social y los intercambios comunicativos con los que se logra transformar la representación, por otra parte el límite es un símbolo matemático que tiene diferentes representaciones, el interactuar con ellas, pasar de una a otra en actividad conjunta, contribuye a significarla en el plano individual.

En el siguiente fragmento de registro de observación, se nota como el docente motiva a un alumno a pasar al pizarrón y la ayuda que proporciona el maestro para que se resuelva el ejercicio de composición de funciones:

M.- Pero, ¿Cómo lo harían?.
AOa.- (Señalado de verde en el sociograma). Sacar raíz este con este y luego con aquel. (Señalando la expresión en el pizarrón).
M.- Pasale al pizarrón no te entiendo.
AOa.- Mejor no, no se si este bien.
O.- (¿Por qué el alumno tiene miedo de equivocarse en el pizarón?).
M.- Que tiene pasale, si esta bien tienes un punto. (En tono de voz muy entusiasta).
O.- El maestro trata de motivarlo para que pase y explique en el pizarrón lo que dijo.
AOa.- Bueno (Se dirije al pizarrón temeroso y escribe:

$$k(x) \circ h(x) = (6x^2 + 10x - 5)^2 - 3(6x^2 + 10x - 5))$$

$$(6x \quad)(x \quad)$$

O.- (El alumno permanece en el pizarrón).
M.- ¿Qué opinan los demás?
AO.- Parece que esta factorizando.
M.- Nadie se acuerda del teorema.
AO.- Saca raíz y multiplica.
M.- Pero no es una ecuación, vamos a acordarnos del teorema que vieron en primero, a ustedes les dijeron lo siguiente (Escribe en el pizarrón

$$(x + y + z - w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz - 2xw - 2yw - 2zw)$$

O.- (El alumno regresa a su lugar)
M.- El cuadardo de cada término y luego el doble de los productos que se suceden, tomando primero la *x*, luego la y y así sucesivamente. Este es el teorema pero si no se acuerdan ¿Qué respuesta esperaba de ustedes?. Que cualquier cuadrado es la multiplicación por si mismo, esto es (escribe en el pizarrón

$$(6x^2 + 10x - 5)^2 = (6x^2 + 10x - 5)(6x^2 + 10x - 5))$$

(R2B, 6-10-09; p. 9).

El alumno que pasa al pizarrón, no logra resolver el ejercicio, sus compañeros no saben lo que está haciendo y por las respuestas se nota que, no comprenden lo que tienen que hacer, por su parte el maestro proporciona un grado de ayuda elevado y además formalizado, ya que les dice que es lo que tienen que aplicar para responder el problema, y es un teorema establecido para elevar al cuadrado un polinomio, también le señala al grupo que él al menos esperaba de respuesta que, elevar al cuadrado es multiplicar por sí misma una cantidad; en este ejemplo también se nota como los alumnos no manejan los conocimientos previos al cálculo y esto a su vez obstaculiza el nuevo aprendizaje.

Para la siguiente clase el maestro expone la idea intuitiva del límite y se dan las leyes o principios de la división entre cero, con exposición mayoritariamente del doente como lo muestra el siguiente fragmento de registro de observación.

> M.- Vamos a recordar la división entre cero, juega un papel importante en el caso de los límites. (Se para y se dirige al pizarrón)
> M.- Hay tres casos, primero cero entre número. (Escribe en el pizarrón)
> La división entre cero
> 1.- $\frac{0}{x} = 0, \quad x \neq 0$
> AO5.- otro, cero entre cero.
> M.- Quien se acuerda ¿Cuánto es cero entre cero?. (Silencio)
> M.- Caso dos número entre cero. (Escribe en el pizarrón)
> 2.- $\frac{x}{0} \to \infty, \quad x \neq 0$
> M.- ¿Qué significa la flechita? (Silencio)
> M.- Tiende a; quiere decir que crece, que no tiene límite, eso viene de un señor Möhebius, yo creo que es Alemán pues la ‘o’ tiene dos puntitos, el invento la tira que hoy conocemos con su nombre, el señor unió un listón y se dio cuenta que al recorrer las tiras no se pasa por las aristas, al torcer o unir se forma algo como esto (toma una tira delgada de papel y les muestra), entonces nunca se termina el recorrido. El se imaginó un animal que camina y camina, pues eso se usa para representar el infinito, algo que no tiene límite. Hoy no se sabe si el universo tiene límite. Einstein dijo que el universo es inconmensurable.
> AO1.- ¿Qué quiere decir eso?
> M.- Que no es medible, imagínense ¿Qué hay más allá? Es un problema de ver qué pasa con el espacio, es una condición filosófica para la existencia de la materia, eso nos lleva a fronteras, que son un límite, apropósito de límite aquí no es cero, si ustedes ponen en la calculadora cinco entre cero su máquina los va a insultar. (R6B, 14-10-09; pp. 4-5).

En el registro de observación se nota que mayoritariamente el maestro es el que habla y explica la clase, realiza preguntas que el sólo se contesta, esto ocasiona que los alumnos estén mucho tiempo en silencio y a la expectativa, lo que impide de alguna manera la interacción entre ellos, con el maestro y, con el contenido de aprendizaje; lo que convierte el aprendizaje en información que debe retener pero carente de sentido y significado.

La organización de actividades en este salón es individualista, se resolvieron de manera individual algunos ejercicios de matemáticas previas al Cálculo, sobre funciones así como la definición empírica de límite y lo mismo se puede observar con la resolución de ejercicios. Generalmente se resuelven de manera individual y el docente pregunta "¿ya terminaron?", "¿Cuánto llevan?", "¿en cuál van?", "más, más o más menos". Después generalmente el maestro resuelve en el pizarrón, durante las explicaciones el grupo está en silencio, al finalizar copian lo del pizarrón, en pocas ocasiones expresan dudas y cuando esto ha sucedido han versado sobre el nombre de los objetos matemáticos, como cuando un alumno en el concepto de límite pregunta "¿Por qué se llama Épsilon?", otro en el tema de las derivadas "y usted, ¿Quién cree que lo hizo?" refiriéndose a Newton y Leibniz. A continuación se ejemplifica en el siguiente fragmento de registro de observación, la estructura individualista de la organización de las actividades del grupo, a las que se está haciendo referencia.

> M.- Veamos este
> (Escribe en el pizarrón)
> $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$$
> M.- ¿Qué pasa si sustituimos directamente?
> AO1.- Cero entre cero.
> M.- ¿Tendrá función equivalente?
> AO3.- Le buscamos.
> M.- Si, tienen 10 minutos ¿Les parece?
> O.- (No contestan y se ponen a trabajar de manera individual)
> (R9B, 28-10-09; p. 4).

Se puede observar una estructura individualista y competitiva, el maestro es el que expone los ejercicios en el pizarrón, solicita que los resuelvan en sus cuadernos y después va preguntando, como ya se menciono que, si ya los tienen listos o cuanto les da; y cuando algún alumno le da la respuesta pregunta al grupo, el maestro pregunta: "¿están de acuerdo?", "¿alguien más?", "¿tienes algo?" y finaliza con "se acabo el tiempo, ¿lo hacemos entre todos?" a lo que el grupo responde generalmente en coro que "si" y, es el propio docente quien resuelve en el pizarrón y pregunta "¿están de acuerdo?", "¿comprenden?". Y por otra parte, se considera competitiva pues en los registros se pueden constatar frases como: "¿Por qué no le dijiste tu, AO10?, perdiste un punto". En el fragmento de registro que se muestra a continuación, es otro ejemplo de la organización individual del las actividades:

> M.- ¿Cuánto sería esta derivada?, deriven eso cada quien.
> (Escribe en el pizarrón)
> $\frac{d - 4t^5}{dt} =$ (O.- Abuso de notación, faltan paréntesis.)
> (Los alumnos trabajan en silencio de manera individual.)
> (R11B, 23-11-09; p. 4).

Después de que docente explicó y resolvió algunos ejercicios en el pizarrón, aplicando las reglas de derivación, les puso uno similar a los alumnos para que lo resolvieran en su cuaderno de manera individual, cabe señalar que en el ejercicio propuesto se abusa de la notación, no se encierra entre paréntesis a $-4t^5$, y esto puede ocasionar confusión, ya que los alumnos pueden pensar que a *d* se le está restando $4t^5$, esto no es así, el ejercicio pide la derivada de la cantidad mencionada; los símbolos son claros, en matemáticas le dan significado a las expresiones por lo que es importante utilizarlos adecuadamente, van dirigidos al sistema de representaciones de los estudiantes.

Por otra parte en la escuela A, se observó que la organización de actividades indican que el docente promueve el trabajo en equipo, organizado de tal manera que sean de dos o tres integrantes, ya se citó al inicio de este apartado dos fragmentos de registro de observación en donde se puede constatar esto y además que la estructura de organización utilizada por el profesor es tanto la cooperativa como la competitiva, pero la competencia que se organiza es intergrupos, esto es, entre los equipos; en diferentes registros de observación se puede observar cómo se organizan los equipos y que más de tres integrantes le parecen multitud al maestro; para formar los equipos el docente da libertad al grupo de formarlos, nada más se mantiene atento a que todos se integren en un equipo, esto se señala en los siguientes fragmentos de registro:

> AO.- ¿De cuantos profe?
> M.- De dos, si acaso uno o dos de tres.
> (R3A, 9-10-09; p. 5).

> AO.- ¿De cuantos?
> M.- De tres si acaso dos de dos, el equipo que vaya terminando pasa y explica.
> (R5A, 14-10-09; p.5).

De las citas anteriores se puede notar que, el maestro los organiza en binas o triadas, y aun cuando lo indica el docente, los alumnos preguntan para confirmar la cantidad de integrantes.

En otros registros, como los que se muestran a continuación, se nota la forma en la que el docente está al pendiente de la integración de los equipos.

> M.- ¿Con quién?
> AO.- No se.
> M.- ¿Por qué no se han integrado a un equipo, ustedes?
> AO.- No se.
> (R3A, 9-10-09; p. 7).

M.- ¿Cuáles son los equipos, allá?
AO.- Nosotros.
M.- ¿Y, ustedes?
AO.- No se.
M.- Así que tengo que formar los equipos también.
(R5A, 14-10-09; p. 6).

Estos registros ponen de manifiesto que, el docente después de indicar la organización por equipos, supervisa la forma en que se forman los equipos y verifica que todos se integren a uno de ellos; en la entrevista que se le realizó, el docente explica, la forma en que organiza las actividades del grupo, que para propiciar la estructura cooperativa propone tareas por equipos y, así favorece la interacción entre iguales; a continuación se presenta un fragmento de la transcripción de entrevista:

I.- En algunas clases organizas al grupo en equipos, ¿con alguna intensión haces que trabajen en equipos?
Si, uno de los objetivos es la adquisición de los conocimientos, lo cognitivo, pero también viene lo procedimental, lo actitudinal, trabajar en equipo es una actitud, una actitud de adquirir, va a trabajar, se va a desenvolver en la sociedad y la sociedad no es aislada, es un elemento de todo un conjunto de individuos en la escuela, en su casa, en la colonia, en el trabajo cuando vaya a desenvolverse profesionalmente ya tiene que saber relacionarse con los demás, ser tolerante y confrontar sus ideas con los demás, escuchar a los otros compañeros y si no está de acuerdo con el punto de vista o el punto de vista de los demás y, creo que eso lo logramos propiciando el trabajo en equipo, esa es una, la otra, la construcción del conocimiento dice Vigotsky es social también, el aprendizaje es social, al interaccionar con los demás aprendemos, habrá algunos que sepan el tema que estamos abordando y que alguno de los muchachos no lo domine y al relacionarse con los demás va aprender.
9:15 hrs. I.- Y con los demás que son su igual
Es su igual, porque es distinto la postura y la actitud del alumno entre él y el maestro y entre él y sus compañeros, ahora al maestro nunca lo verá como su igual, por más agradable que se presente el maestro hay barreras que ellos mismos establecen incluso, desde las aulas si te das cuenta el maestro está en una altura superior en un templete y eso está marcando ahí básicamente una diferencia, una jerarquía, tu arriba y yo abajo y cuando estás trabajando en equipos pues no, es igual, es entre pares.
I.- Entonces es para propiciar El trabajo entre pares
Así es.
I.- Y ¿logras que todos los alumnos del grupo se integren en los equipos?
No todo el grupo, siempre habrá alguno o algunos por ahí que no quieren trabajar en equipos.

> I.- ¿Por qué será?
> Les cuesta más trabajo, el lugar en el que está ubicada la colonia si te das cuenta hay mucha disparidad en el nivel económico, hay más o menos una heterogeneidad entre ellos y bueno pues aquí se refleja, en los grupos también, los alumnos de diferentes estratos, diferentes situaciones familiares, se refleja en el trabajo del grupo, hay algunos tímidos, otros extrovertidos y tenemos de todo, hay algunos, por ejemplo ahorita tengo en este grupo a dos muchachitos que están muy renuentes a trabajar, renuentes en el sentido de que ellos quieran hacerlo, si a ellos les asigno grupo trabajan pero que de ellos salga quiero integrarme algún equipo, no, no lo hacen.
> (EDA, 1-12-09; pp. 14-15).

El docente tiene una intensión en la forma que organiza las actividades, indicando los ejercicios que van a resolver y como los van a resolver, esto es, individual o por equipos, esto se observa en expresiones como: “los primeros cinco”, “todo lo que puedan, pidan un libro de algebra de la biblioteca o de primero”, “¿puedo borrar?”, “¿Qué dice la número7?”, “¿y la 8?”; y al mismo tiempo permite que los alumnos formen los equipos de trabajo y la forma en la que avanzan, al parecer esta forma de organizar las actividades en la que los estudiantes tienen cierta autonomía para elegir con quien trabajar y cómo hacerlo hace suponer un modelo de profesor como lo menciona Pla (1990), observador-interventor.

> El modelo observador-interventor, según el cual el profesor crearía situaciones de aprendizaje con las condiciones necesarias para que el alumno llegue a construir el conocimiento. La observación le permitiría analizar el nivel de partida del alumno y éste le marcaría al profesor cuando y como intervenir. El profesor decidiría qué y cuándo estudiar y el alumno decidiría el cómo, posibilitándosele así la actividad autoestructurante necesaria para la construcción del conocimiento (Echeita y Martín; 1995: 54).

En los ejemplos citados de la escuela A se constata como el maestro elije los contenidos a tratar, los ejercicios a resolver y la estructura organizacional del grupo, y los estudiantes por su parte deciden cuando estudiar y como formar los equipos, esto genera actividad conjunta que contribuye a la resignificación y a la reconstrucción del conocimiento.

4.2. Dinámicas individuales y grupales en las clases Cálculo I de las prepas de la UAS

En este apartado se explican los factores de las dinámicas individuales y grupales que se generan en las aulas de Cálculo I y que influyen en el proceso de enseñanza aprendizaje, para lo que se considera la cultura del grupo en clases, la sucesión de eventos en clases de Cálculo I, la interacción dialógica en el aula y el desarrollo de la clase de cálculo I, todo ello enmarca las relaciones dinámicas en el aula que tienen su impacto en el proceso enseñanza aprendizaje de la asignatura.

La unidad de análisis *Relaciones dinámicas en el aula*, permite explicar desde la cultura del grupo durante la clase, la que se aprecia en las costumbres grupo; los múltiples sucesos que ocurren rápida y simultáneamente, en lo impredecible de los mismos pero en sí, fácilmente observables porque transcurren en un tiempo determinado. En el aula suceden muchas situaciones al mismo tiempo, se pasa lista, se discute algún tema, se tienen diálogos, surgen interrogantes, se proponen tareas, se presentan interrupciones, se resuelven problemas, etc.; todo ello sucede con mucha rapidez, de forma impredecible y transcurre en un tiempo prolongado diario, semanal y anual. Generando de esta manera rutinas, experiencias.

La categoría relaciones dinámicas en el aula implica según los datos obtenidos en los registros de observación los siguientes patrones emergentes: la clase, propósitos, organización de las actividades, sucesión de eventos, diálogos, rapidez en el cambio y el horario; la configuración de esta categoría de análisis se presenta en el apartado de anexos.

Se le llama relaciones dinámicas en el aula a todo lo que sucede en el salón de clases y la forma en que se van manifestando, ya sean procesos, tareas, trabajos, preguntas, etc. En el salón de clases suceden muchas cosas al mismo tiempo, se puede presentar la discusión de algún concepto y en ella se dan opiniones individuales, la resolución de ejercicios en la que un alumno lo resuelve en el pizarrón mientras los demás simultáneamente lo hacen en sus cuadernos o están platicando, también ocurre que se pasa de preguntas o discusiones a exposiciones en el pizarrón y no falta la interrupción por alumnos ajenos al grupo o por otros maestros que llegan al salón solicitando algo, ya Doyle (1986) lo llama ambiente áulico y menciona seis características.

> Multidimensionalidad: se refiere a la gran cantidad de procesos, tareas, propósitos. La clase es una ida y venida se conforman subgrupos.
> Simultaneidad: es cuando en un mismo instante suceden muchas cosas distintas que no se unifican en una misma acción. Por ejemplo en una discusión hay preguntas individuales.
> Inmediatez: es la rapidez en que trascurren los sucesos del aula, generando poco tiempo para reflexionar antes de actuar.
> Impredictibilidad: los hechos del aula toman un giro inesperado. Distracciones, interrupciones frecuentes.
> Publicidad: las conductas son visibles para todos los participantes.
> Historicidad: la clase transcurre en un tiempo prolongado diario, semanal y anual. Generando rutinas, experiencias. (Doyle, 1986).

La vida en el aula está llena de eventos impredecible, pasan tantas cosas al mismo tiempo, como por ejemplo, los alumnos pueden estar contestando unos ejercicios, el maestro escribe en el pizarrón, comentan entre ellos y con el docente, se piden materiales prestados y así la clase transcurre, en el aula todo es impredecible, ningún día es igual a otro, el grupo puede estar muy silencioso hoy y completamente activo mañana, lo cierto es que no se puede predecir si se van a tener distracciones y/o interrupciones, pero las conductas son visibles para todos; y todo ello va generando un ambiente en el aula, la dinamiza, se crea una cultura por los involucrados.

4.2.1. Cultura del grupo en clases

En el contexto cultural del grupo están implícitos los usos y costumbres, éstos se expresan de diversas maneras, un ejemplo es de la expresión artística, para el 24 de octubre realizaron un cartel sobre las naciones unidas, en él pintaron un mundo rodeado de personas y en el centro del él escribieron la frase “el mundo depende de: la paz”, ello permite entender la preocupación de los jóvenes por la violencia del mundo; cabe señalar que esta preparatoria está ubicada en una de las ciudades más violentas de México (Culiacán) y en una colonia con problemas de vandalismo, con todo ello tienen que convivir los jóvenes pues es el macrocontexto en el que está inmerso el contexto de su aula.

> 7:50 hrs. O.- El aula tiene en la pared de atrás un cartel que no estaba ayer, al parecer hecho por los estudiantes, en papel estraza dibujado con gis un mundo rodeado de jóvenes tomados de las manos y tenía escrito: <el mundo depende de: (dentro del mundo y resaltado) la paz>, por el lado derecho físico matemático 301. ¿Será con motivo de las naciones unidas?, ¿Para qué lo habrían hecho? (R3A, 9-10-09; p.3).

Los estudiantes expresan en un cartel sus sentimientos hacia la violencia y de esta manera se manifiestan como grupo, que está inmerso en un contexto y que como tal le afectan diferentes factores y situaciones, por ejemplo, las interrupciones y éstas a su vez también forman parte de la cultura del grupo, pues señalan la costumbre de los involucrados; las interrupciones se ocasionan por: interferencias de alumnos de otros grupos, el ruido (por lo general gritos y juegos) en el pasillo, se asoman constantemente por las ventanas, se abre la puerta, llaman a los estudiantes del grupo o por retardos de los propios estudiantes.

Los retados de los estudiantes se deben al horario de las clases o por que vienen de otra aula, lo que causa que lleguen por turnos a clase, que entren a diferentes tiempos y que estén solicitando permiso para pasar al salón, interrumpiendo la clase; esto se aprecia en el siguiente fragmento de registro de observación:

> 7:50 hrs.
> O.- Hoy estaba solo el salón en eso sale el maestro de otra aula y me dice que ya casi empezamos que los alumnos están en clase de dibujo y que como las butacas están muy chicas se van a las mesas de la biblioteca para esa clase.
> M.- vamos pasando a esperarlos.
> 7: 52 hrs. (Entra un alumno y nos da los buenos días, deja sus cosas y va para la puerta).
> AO.- Buenos días.
> M.- Buenos días.
> 7:54 hrs. (Se asoma una muchacha)
> MA.- ¿y los plebes?
> AO.- (el alumno que está en la puerta) en 'dibujo'. (El alumno sale con la muchacha del salón)
> 7:57 hrs. (llegan seis alumnos)
> 7:58 hrs. (Llegan tres más)
> (Se abre la puerta)
> AO.- ¿puedo entrar profe?(Entran dos)
> 7:59 hrs. (Entra uno)
> 8:00 hrs. (Entra uno)
> (Entra uno)
> (Uno sentado a mi lado ve su celular y lo guarda)
> 8:01 hrs. (Se asoman dos muchachos)
> 8:05 hrs. (Pasan dos alumnos y se sientan).
> (R2A, 7-10-09; pp.2- 5).

En el registro de observación se manifiesta que alumnos vienen de clases de dibujo y que después de la clase de dibujo el grupo va llegando al salón por tandas, de uno, de dos, de tres o cuatro o de seis, lo cierto es que el docente tiene que esperar para iniciar la clase pues no llegan todos juntos, en lo que van llegando al salón, unos se acomodan y se disponen para la clase de Cálculo, otros checan su celular, otros ven pendientes de alguna otra materia o simplemente platican con el compañero, estas acciones dan cuenta de cómo viven su tiempo personal los estudiantes y como afecta este el desarrollo de la clase de

Cálculo, los alumnos no son conscientes de la importancia de su clase y de aprovechar cada minuto de la misma, ellos se preocupan por esto, únicamente para pasar un examen, o cuando ven un beneficio tangible inmediato.

Por otra parte, también alumnos de otros grupos piden permiso para entrar, como el día que el maestro iniciaba el tema de límites y fue interrumpido en varias ocasiones para pedirle sacar butacas del salón, ante estas interrupciones el profesor les autorizó que sacaran unas tres al pasillo para que no estuviesen interrumpiendo la clase; esa situación se observa en el siguiente fragmento de registro:

> M.- ¿Qué otra cosa entienden por límite?, en lenguaje coloquial.
> O.- (Se abre la puerta y entran dos alumnos).
> M.-¿Qué nos dice mamá o la novia cuando salimos?, ¿nos ponen hora?
> O.- (Una muchacha se asoma al salón y le pide al maestro una butaca y pasa).
> MA.- ¿puedo tomar una silla?
> M.- ¿Nada más una, por docena son más baratas?
> (La muchacha se ríe, toma la butaca y sale del salón).
> (R2A, 7-10-09; p. 6).

Se puede notar que en la clase a que hace referencia el fragmento de registro de observación, el docente iniciaba con el tema de límite, trataba de indagar el concepto empírico de los estudiantes y las interrupciones provocan que el maestro no termine la idea, lo que complica la negociación que debe darse en este punto de los conceptos, ya que es aquí en donde el maestro media entre la definición del alumno y la de él; las interrupciones cortan esa negociación y el maestro finalmente les dice que es el límite, esta dinámica del grupo afecta el proceso de enseñanza aprendizaje en lo referente al tránsito del concepto empírico al teórico; primer paso en la sucesión de eventos evolutivos para la internalización del concepto, ya que ese tránsito modifica la representación del alumno.

Así pues, las costumbres, rutinas y tradiciones en los grupos van señalando el contexto cultural en el que se encuentran inmersos; el contexto cultural, son el conjunto de metas, propósitos, expectativas, afectos, emociones, motivaciones, intereses, tradiciones, costumbres, rutinas, representaciones, etc. construidas por los grupos y compartidas en mayor o menor grado por todos ellos, influyen en no pocas ocasiones, más que el contexto físico, pues el contexto del aula es dinámico e influenciado por todos y cada uno de los integrantes del grupo. Si existe un interés grande por aprender y enseñar un determinado contenido, siempre se pueden buscar recursos para alcanzar los objetivos, aunque estos no sean los más modernos y actualizados, ya que finalmente el objetivo último sigue siendo enseñar y transmitir una serie de valores y conocimientos, a la vez que se ayuda a los alumnos a pensar por ellos mismos.

Otra preocupación de los estudiantes, en la que se manifiesta la cultura del grupo, es la hora de salida, los estudiantes apuran el cierre de la clase ya sea por un partido de futbol de la selección Mexicana, porque no han tenido clases en todo el día y quieren irse, porque ya llegó el maestro de la siguiente hora, porque se está haciendo de noche o porque es la última hora. Da la impresión de que para los alumnos es más importante alguna otra actividad, lo que sea, que la clase de Cálculo I, es por ello que lo alumnos insisten por uno u otro motivo al maestro a la hora de salida que termine su clase, o a la hora de entrada su deseo de no tener la clase, en estas dinámicas grupales de entrada y salida, se manifiesta el mito de las matemáticas como algo, muy complicado, difícil, aburrido y sin ningún sentido para los estudiantes, pues ellos no le ven razón de ser, y esto se manifiesta en los siguientes fragmentos de registros de observación.

Como primer ejemplo observe que un alumno interroga al maestro para salir, con una expresión parecida a: la ultima y nos vamos, el maestro le aclara que van a ver más y otra alumna sugiere que se vea mañana, en este registro es claro que los alumnos lo que quieren es que la clase se termine:

> AO10.- ¿Y nos vamos?
> M.- No, vamos a ver eso (Señala lo escrito en el pizarrón).
> AA11.- ¿Y mañana?
> M.- Mañana es el examen.
> (R4B, 14-10-09; p. 9).

En otra ocasión, precisamente la clase en que se vio la noción intuitiva del límite, el maestro mediante varios ejemplos de diferentes contextos, negoció la representación de los alumnos, al final de la clase utilizaron eso para salir temprano, ya que se pararon y le señalaron al maestro que era el límite de la clase, esto muestra que los alumnos no modificaron su representación, para ellos siguió siendo el fin o barrera de algo, en este caso la clase:

> O.- (Los alumnos se paran)
> M.- Hey, ¿A dónde van?
> AO12.- Es el límite de clase.
> (R4B, 14-10-09; p. 9).

También suplican para que el maestro concluya la clase, en esta ocasión el pretexto perfecto era que el maestro de la siguiente hora ya estaba esperando:

> AA7.- Ya llegó el otro profe.
> AS.- Ya profe (en coro, como súplica)
> (R6B, 16-10-09; p.13).

La obscuridad por el nuevo horario es una excusa más para salir temprano de clases de Cálculo I:

> AO3.- Profe, ya se está haciendo de noche.
> M.- En el horario anterior ya hubieramos salido.
> AO8.- ¿Qué piensa del nuevo horario?
> (R8B, 26-10-09; p. 18).

Y ni se diga de los sagrados alimentos, el hambre también ocasiona que los alumnos no quieran clase, esto se muestra en el siguiente fragmento de registro:

> AA6.- ¿Qué está planeando profe?
> M.- Dar clase.
> AS.- Hay que irnos.
> M.- Ustedes siempre quieren irse.
> AO8.- Hace hambre.
> M.- Está bien que tengas hambre pero no que te quieras ir ¿Para qué se quieren ir?, si mañana tienen que venir.
> (R9B, 28-10-09; pp.2-3).

El apuro por salir de clases se expresa en las múltiples opciones que los estudiantes le procuran al profesor para terminar la clase, todas ellas expuestas al docente cerca de la hora de salida con la intensión de que se dé por terminada la clase; en estos casos el maestro y los alumnos negociaban la hora de salida y siempre se propusieron actividades para terminar en su tiempo la clase, esto sugiere acuerdos y cierta organización del trabajo o estructura grupal en el aula, que como lo menciona Bauleo (1989), “El comportamiento grupal, por lo tanto, va a ser el resultado de la estructura interaccional puesta en juego en los sujetos. La interacción que se establece constituye una estructura, que es la convergencia de las estructuras de interacción puestas en movimiento en los sujetos integrantes del grupo”. (p. 23). Así pues el apuro por salir de clase caracteriza un uso y costumbre o tradición del grupo, en la que se hace notorio el acuerdo implícito del grupo sobre que son más importantes otras actividades que la clase de Cálculo I, lo que dificulta aún más el proceso de enseñanza aprendizaje.

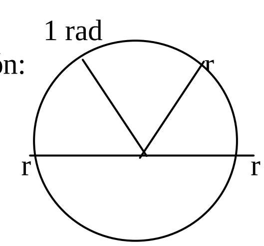
4.2.2. Sucesión de eventos en clases de Cálculo I

Se llama sucesión de eventos a la secuencia en la organización y desarrollo de la clase por el maestro, los registros de observación indican que el maestro utiliza una sucesión de eventos para la enseñanza del Cálculo I, por ejemplo, cuando aborda gráficas de funciones trigonométricas, inicia con gráficas de circunferencias solicitando a los alumnos el perímetro de la misma, el maestro ve gráficamente lo de la circunferencia y las funciones trigonométricas seno y coseno (el resto se las deja a los alumnos de tarea por equipos), los eventos observados son:

(El maestro deja sus cosas en el escritorio, saluda a los muchachos y dibuja una circunferencia en el pizarrón)

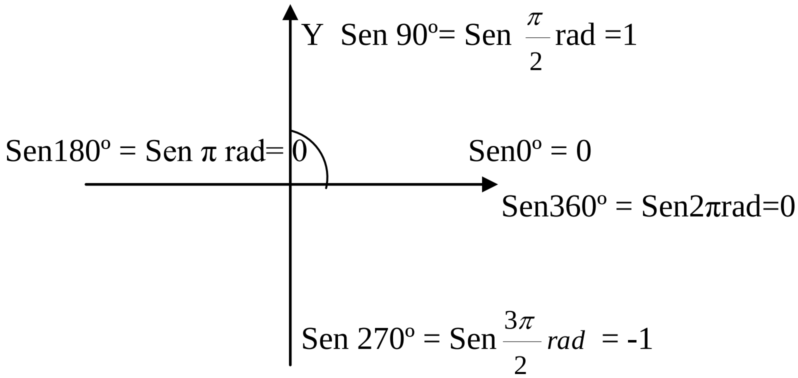
M.- ¿Cuál es el perímetro de la circunferencia?
AO.- Pi por radio al cuadrado (πr^2).
M.- Esa es el área.
(Silencio)
M.- Haber hace mucho que lo vieron, desempólvense

(El maestro dibuja en el pizarrón:



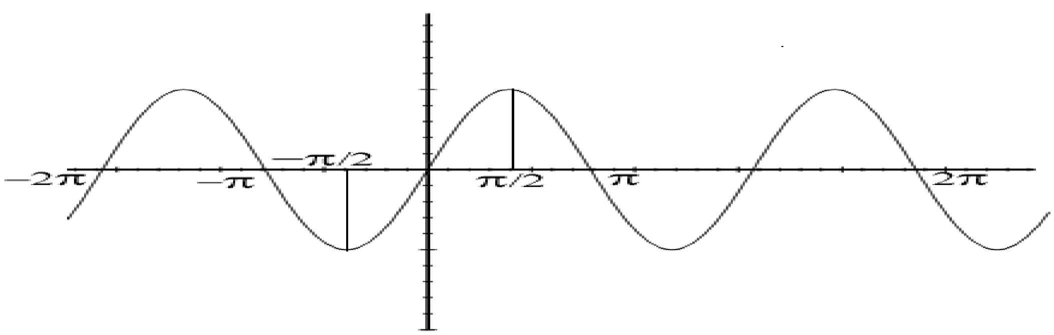
)

M.- Ustedes continúen con las equivalencias. Esto era un pequeño recordatorio. Vamos a ver funciones trigonométricas. Escribe en el pizarrón
$f(x) = senx$, x medido en radianes.
M.- Entonces el seno de 270º es lo mismo que tres medios de pi. Radianes (Dibuja la siguiente gráfica:



M.- Seno de trescientos sesenta grados, cuando se da la vuelta completa ¿Cuánto será?
AO.- Son dos pi. Radianes.
(R1A, 6-10-09; pp.3-8).

Después de analizar gráficamente el perímetro de la circunferencia, el maestro proporciona la fórmula para la equivalencia de grados a funciones lo que permite formalizar, y esta formalización la acompaña de graficas hasta que se construyen la del seno y el coseno.



Para los límites, el maestro solicita la idea de límite y se comenta en grupo, hasta que el docente les dice "*en matemáticas eso es el límite, una aproximación*" (R2A, p.7). Inmediatamente después de esto se afronta un ejemplo por aproximaciones sucesivas y luego se comentan gráficamente estas aproximaciones vinculando así el conocimiento nuevo (límites por aproximaciones sucesivas) con el conocimiento anterior (graficación de funciones). El diálogo del profesor con los alumnos es elocuente:

M.- Haber muchachos vamos a ver que entienden por límite, en lenguaje coloquial, que entienden.
AO.- que llega a un punto determinado y que de ahí no pasa.
O.- (Susurra 'en lenguaje coloquial', lo escuchan sus compañeros y se sonríen).
AA.- Frontera.
M.- ¿Qué otra cosa entienden por límite?, en lenguaje coloquial.
O.- (Se abre la puerta y entran dos alumnos).
M.- ¿Qué nos dice mamá o la novia cuando salimos?, ¿nos ponen hora?
O.- (Mientras se daba el diálogo anterior el maestro escribe en el pizarrón:

LÍMITE

FRONTERA

Un punto determinado no pasa

M.- Haber a partir de la lectura ¿Qué nos queda de límite?
AO.- Que te vas acercando.
AO.- Es como una aproximación.
AO.- Si, te aproximas.
M.- ¿Qué tanto te puedes aproximar?
AO1 (Marcado de rojo en el sociograma).- 'Hasta el infinito'.
M.- En matemáticas eso es el límite, una aproximación, por ejemplo sea la función: (Escribe en el pizarrón $f(x) = x + 4$) Qué pasa cuando x se aproxima a 2. Vamos a tabular 1, 1.5, 1.8, ¿Qué otro valor le doy?
AO.- 1.9.
M.- ¿Qué más?
AO.- 1.99.
M.- ¿Cómo me puedo aproximar más?
(R2A, 7-10-09; pp.6-7).

De lo anterior se infiere que el maestro sigue cierta evolución de eventos sucesivos para afrontar los temas de Cálculo I, algunos de estos son: definiciones espontáneas (o empíricas, seudoconceptos), para el caso de graficación de funciones el docente requiere el perímetro de una circunferencia, para los límites solicita lo que entienden por límite en lenguaje coloquial; luego se ejemplifica mediante un algoritmo, equivalencias entre grados y radianes para graficación de funciones y aproximaciones sucesivas para el caso de límite; y gráfica para finalmente formalizar.

No se ve la definición formal de límite (Cauchy-Weierstrass) pero se formalizan los límites con las propiedades, mismas que se comentan mediante ejemplos, las propiedades se ven del libro de texto, en este caso Cálculo Diferencial de Fuenlabrada, de la página 33, en el pizarrón el maestro va explicando ejemplos de cada una de ellas y les comenta a los estudiantes "*de eso se trata, de sustituir pero con ciertas reglas"* (R2A, 7-10-09; p. 15). La forma de inducir al conocimiento del límite, está ejemplificada así:

M.- Hay unas propiedades de los límites, por favor abran su folleto en la página 33.
AA.- ¿Qué página dijo profe?
M.- 33, vean las propiedades.
O.- (Los estudiantes en silencio ven el libro).
M.- No siempre se va a resolver los límites con tablas, utilizaremos esos teoremas. ¿Qué pasa si sustituimos el 3, en la expresión, cuanto da?.
AO.- Siete.
M.- De eso se trata de sustituir pero con ciertas reglas, ¿Qué dice el primero?
AA.- Teorema de una constante (lee lo que dice el libro), *El límite de una constante c, cuando x tiende a un valor a*, es la constante.
O.- (El maestro escribe los siguientes ejemplos en el pizarrón

$$\lim_{x \to a} -3 = -3$$

$$\lim_{x \to 10} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to -1} 4 = 4$$

M.- El del inciso b ¿Qué dice?
O.- (La alumna lee del libro, los estudiantes tienen su libro abierto al parecer siguiendo la lectura; el maestro escribe en el pizarrón lo siguiente $\lim_{x \to a} x = a$)
AA.- *El límite de x cunado x tiende al valor a es a.*
M.- Ejemplos, ¿límite de *x* tiende a cero?.
AO1.- Cero.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón:

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to -7} x = -7\ )$$

$$\lim_{x \to 5} x = 5$$

M.- ¿El inciso c que dice?.
AA.- *El límite de la suma de un número finito de funciones cuando x tiende al valor a, es igual a la suma de los límites*.
O.- (La Alumna lee y maestro escribe en el pizarrón

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) + h(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} h(x)\ )$$

AO1.- (En su lugar y en voz baja dice) límite de f de *x* más límite de g de *x* más límite de h de *x*.
M.- Ejemplo: límite de *x* tiende a tres de *x* más nueve.
O.- (lo escribe en el pizarrón).

$$\lim_{x \to 3} (x + 9) =$$

AO1:- límite de x más límite de 9.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x \to 3} (x + 9) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 9$$

M.- Pero, ¿Cuánto dijimos que es el límite de *x*?
AO1.- Tres.
M.- ¿Y el de nueve?
AO1.- Nueve.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x \to 3} (x + 9) = \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 9 = 3 + 9 = 12$$

M.- ¿Inciso d, que dice?
AA.- *El límite del producto de un número finito de funciones cuando x tiende al valor a, es igual al producto de sus límites.*
O.- (Alumna lee y maestro escribe en el pizarrón).

D. $\lim_{x \to a} cf(x) = \lim_{x \to a} c \bullet \lim_{x \to a} f(x)$

M.- Ejemplos.
O.- (Escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x \to 2} 3x = \lim_{x \to 2} 3 \bullet \lim_{x \to 2} x = 3(2) = 6$$

M.- Por el teorema de la constante es tres (señalando en el pizarrón), y este (señalando en el pizarrón) por el inciso b es 2; así el límite es 6. Este es el límite del producto falta el del cociente pasen esto para explicarlo.
O.- (Los estudiantes copian lo del pizarrón, en silencio).
M.- Dudas, ¿Se entendio todo o no se entendio nada?
O.- (Camina hacia la puerta, se recarga por un momento junto a ella y luego va al pizarrón y escribe).

E. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

O.- (A un alumno sentando al frente se le cae el lápiz, el maestro lo recoge y se lo da).
M.- Este es el último de los teoremas, el límite de un cociente es igual al cociente de los límites siempre que el límite del denominador no sea cero, ¿Por qué?.
AA y AO1.- Porque no esta definida la división entre cero.
O.- (Lo dicen casi a coro).
(R2A, 7-10-09; pp. 15-19).

Hasta aquí se podría pensar que la clase tiene un orden, como en la matemática misma; si se recuerda que en matemáticas hasta el final se formaliza, los límites se formalizaron con los teoremas aun cuando no se dieron las condiciones, ni se demostraron los teoremas de la constante, la identidad, la suma, el producto y el cociente, cada uno de ellos se ejemplifica para que se apliquen, pero estas reglas fueron dadas como algo ya establecido falto el análisis de las diferentes representaciones de las mismas para que se significaran.

A esto se refiere Lemke (1997) como lo que no se le enseña a los alumnos, los docentes en algunas ocasiones dan por hecho que el aprendizaje se va a dar porque así esta la regla, la norma, el axioma y no se detiene en reflexionar que ello no tiene ni sentido ni significado para los alumnos y eso es presiamente lo que se debe enseñar pues ello permite establecer relaciones específicas de significados e integrar el conocimiento.

> A los alumnos no se les enseña a *cómo hablar* científicamente: cómo elaborar frases y párrafos científicos, cómo combinar términos y significados, cómo hablar, argumentar, analizar o escribir en idioma científico. Parece que se da por hecho que simplemente "van a caer en la cuenta" de cómo hacerlo y de los patrones temáticos de la materia. (Lemke, 1997:37).

El ejemplificar los teoremas de límites como algo ya establecido en las matemáticas, le impide al estudiante la oportunidad de combinar las definiciones espontáneas, las aproximaciones sucesivas y la graficación para establecer sus significados, así el docente da por hecho que los alumnos van a comprender el límite; esto mismo lo manifestó el maestro en la entrevista que se le realizó.

> I.- En límites, ¿Se les da el concepto formal de Épsilon-delta?
> No, antes, yo no manejo Épsilon-delta, he, con ellos, no están muy familiarizados con la simbología la verdad, el abecedario griego,… les hablas de esos Épsilon y más todavía se complica.
> I.- O sea…
> El Épsilon-delta, son símbolos complicados.

I.- ¿A qué te refieres con complicados?
A que son símbolos que no tienen significado para ellos, no lo relacionan con un conocimiento previo.
I.- ¿Cuál es el concepto que se da de límite?
De hecho los programas si lo toma, el cálculo de límites por aproximaciones, el cálculo de límites primeramente aproximándonos poco a poco al punto límite como una aproximación.
I.- Y ¿se ven tablas?
Si, así es.
8:47 hrs I.- Las tablas de…
Las tabulaciones de funciones, si.
I.- Y ¿geométricamente, también se ven los límites?
Si, también, si.
I.- ¿Qué actividades realizas para enseñar límites?
Pues mira ahí hay muchas deficiencias que tengo como docente, no encuentro muchas herramientas, de cómo poder diversificar la forma de que ellos capten el concepto de límite no de la manera popular, de que lo puedan interiorizar desde el punto de vista matemático, se me dificulta y te confieso trato de verlo lo más, pasarlo lo más rápidamente posible, llevármelos a la práctica de cómo calcular el límite, de hacer ejercicios de manera directa y de forma indeterminada, tratar de que los transformen en una función equivalente y no me centro a que, he, entiendan bien el concepto de límite.
I.- ¿En qué te centras para enseñar límites?
En la parte operativa.
I.- O sea, al procedimiento del calcular límites
Así es, de calcular límites.
(EDA, 1-12-09; pp. 5-6).

De las respuestas del docente se puede observar como se ve interrumpida la sucesión de eventos evolutivos que con su ayuda deben contribuir a que el signo externo se transforme en un signo interno y de esta manera tenga sentido y significado para el alumno, el desviar de esta manera el aprendizaje de los límites, lleva a lo que el maestro menciona como la parte operativa, que no es, más que mecanización de procedimientos sin sentido y significado matemático para el estudiante.

Desde otro ángulo en las observaciones, en la otra aula de Cálculo I ponen de manifiesto algo similar en la sucesión de eventos pues indican: formalización, algoritmos y graficación, además el docente utiliza como recursos la analogía, cuentos, recuerdos académicos, mecanización y el dictado, la evidencia es:

> M.- ¿Falto alguien?, ¿nombre a todos?, ¿Qué es lo último que tienen en el apunte?
> AO10.- Biyectiva.
> M.- Entonces vamos a ver el concepto de función inversa de una función.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> Función inversa de una función
> M.- Copien eso, por favor.
> AO2.- ¿Qué día es hoy?
> M.- Ayer fue lunes, ¿Qué día será hoy?
> AA6.- 13.
> AA7.- 13.
> O.- (Exclamando sorprendida).
> M.- ¿Listos?
> AS.- Sí.
> M.- Escriben así.
> O.- (Dicta)
> M.- Sea *f* de *x* una función de los números reales en los números reales.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> Sea $f(x):\Re \rightarrow \Re$
> M.- Coma, ¿ya copiaron?
> AS.- Si.
> M.- Escriban: (dicta) coma, *f* de *x* posee una función inversa y escriben así: *f* a la menos uno de *x*.
> O.- (escribe en el pizarrón $f^{-1}(x)$) sí y sólo sí, el maestro les dice: es una doble condicional, ustedes llevaron en primer año lógica).
> M.- ¿se acuerdan?
> AO1.- Sí.
> M.- ¿Es una bicondicional?
> AO10.- Sí y sólo sí.
> (R3B, 13-10-09; pp. 4-5).

El maestro solicita el conocimiento anterior e inicia el nuevo formalizado a través del dictado del concepto de función biyectiva, luego dicta el concepto de función inversa y se continúa con el ejemplo de la función $f(x) = 3x + 1$ para lo que se analiza verbalmente si es biyectiva y como es su gráfica, tabulan algunos valores y los expresan en parejas ordenadas para concluir que la función es biyectiva y que por tanto tiene inversa, calculan la inversa mediante el algoritmo de despejar *x*, se concluye que la función tiene como inversa $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$ y se aborda de manera similar, como siguiente ejemplo la función $f(x) = x^2$.

Para el tema de límites el maestro realizó la siguiente sucesión de eventos: conocimientos previos, definición espontánea, formalización, aproximaciones sucesivas, formalización, gráficamente y se finaliza de nuevo con formalización, esta sucesión de eventos que pasa de una a otra representación contribuye a la transformación de la representación, ya que indagar los conocimientos previos permite establecer el nivel real de desarrollo del alumno, el trabajar la definición espontánea brinda la posibilidad a través de la negociación transitar a la definición teórica, misma que favorece la formalización, por medio de las aproximaciones sucesivas, se ayuda a representa el acercamiento, gráficamente se contribuye a la percepción visual, así pues, pasar por las distintas representaciones debe significar una transformación en la representación de los estudiantes. A continuación se presenta evidencia de cada uno de los eventos y se comenta que fue lo que resulto de ello. Lo primero fue la preparación del grupo sobre los conocimientos previos.

> M.- Les voy a dar una hojita para que la vayan contestando mientras yo paso lista.
> O.- (El maestro les entrega una hoja con ejercicios)
> AO1.- ¿Es examen?
> M.- No el examen es mañana, es introductoria para ver los conocimientos anteriores y la idea que tienen del tema que vamos a iniciar. Mientras yo paso lista contesten, tienen unos 10 minutos.
> (R4B, 14-10-09; p. 3).

La hojita a la que se refiere el maestro en el fragmento de observación, contenía cinco ejercicios de factorización, tres de productos notables, cuatro cuestionamientos sobre funciones, un ejercicio de evaluación de funciones, tres funciones para encontrar su dominio e imagen, una lineal, una racional y una radical, se le solicitaba que ejemplificara cinco diferentes tipos de funciones y las últimas dos eran sobre el concepto de límite (en los anexos se puede observar uno de ellos); los resultados no fueron muy alentadores, se puede afirmar que los alumnos no manejan los conocimientos previos y expresan que el límite es barrera o fin. Una vez lograda la primera fase, el maestro continúa con el propósito de rescatar los referentes basados en conocimientos anteriores, para dejar situado el concepto.

> O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
> Idea intuitiva de límite
> M.- ¿Qué entienden ustedes de manera intuitiva por límite?
> AO10.- La terminación, final, el alcance máximo…
> M.- ¿Han oído esa palabra?
> AA6 y AO3.- Si.
> O.- (A coro)
> M.- ¿En donde?
> AA6.- límite de tiempo.
> AO1.- Límite de velocidad.
> M.- ¿Lo han visto aplicado en otra parte?
> AO9.- En una carrera la meta es un límite.
> AO4.- En la frontera.
> AO13.- El velocimetro.
> AO8.- Los grados.
> (R4B, 14-10-09; pp. 11-12).

En este registro de observación se puede notar que, el docente indaga la definición empírica de los estudiantes, para ello se proporcionaron ejemplos de la vida cotidiana, este tipo de ejercicio contribuye al aprendizaje significativo, ya que se establece un vinculo real; por otra para entrar al conoimiento operativo del límite se tiene que recordar lo siguiente, como condición para interiorizar el concepto.

> M.- Vamos a recordar la división entre cero, juega un papel importante en el caso de los límites.
> O.- (Se para y se dirige al pizarrón)
> M.- Hay tres casos, primero cero entre número.

(Escribe en el pizarrón)
La división entre cero
1.- $\frac{0}{x} = 0, \quad x \neq 0$
AO5.- Otro, cero entre cero.
M.- Quien se acuerda ¿Cuánto es cero entre cero?
O.- (Silencio)
M.- Caso dos número entre cero.
O.- (Escribe en el pizarrón)
2.- $\frac{x}{0} \rightarrow \infty, \quad x \neq 0$
(R6B, 16-10-09; p.4).

Finalmente se puede observar que los casos de división entre cero se presentan formalizados y con ello quedan establecidas las condiciones de conocimientos previos, la tarea ahora, es acceder al conocimiento del límite, esto se hace de la siguiente manera:

O.- (Escribe en el pizarrón)
M.- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$,,
M.- ¿Qué pasa si la variable vale uno?
AA11.- Es cero entre cero.
M.- ¿Cuánto es cero entre cero?
AO4.- Cero.
M.- ¿Están de acuerdo todos?
AO3.- No está definido.
M.- Lo vimos la clase pasada, es una indeterminación matemática, y se acuerdan que les dije que la respuesta común es decir que cero entre cero es cero, aunque nos lo expliquen, pues el sentido común es lo que nos dice: nada entre nada pues nada, ¿se acuerdan?
AS.- Sí.
O.- (En coro).
M.- Mucho cuidado con eso; ahora vamos a ver la definición de límite de una variable. Escriban, esperen dejen construir la definición, bueno, escriban.
O.- (dicta)
M.- Un número ‘*k*’ es el límite de una variable independiente ‘*x*’, si en un proceso de variación de ‘*x*’, (coma) ésta (con acento en la e porque es pronombre) ¿Quién ésta? ‘*x*’, se aproxima infinitamente al número ‘*k*’, de tal manera que, a partir de cierto momento el valor absoluto de la diferencia ‘*x* menos *k*’ es infinitamente pequeña y es menor que un número positivo infinitamente pequeño el cual se representa como y escriben así.
O.- (escribe en el pizarrón) ε
M.- Una especie de E manuscrita y es Épsilon, es como la abuelita de la E. ¿Saben ustedes escribir la letra pegada, manuscrita?

AS.- Siii...
O.- (En coro)
M.- Antes podía escribir así, ahora ya no puedo, por ejemplo.
O.- (Escribe en el pizarrón)
escuela
M.- Por eso mi desorden en la escritura, miren pegada, despegada.
O.- (Señala el pizarrón).
M.- Esta E los matemáticos la llaman Épsilon y representa cantidades infinitamente pequeñas. Si el valor absoluto de '*x* menos *k*' es menor que Épsilon, entonces '*k*' es el límite de '*x*' y se dice '*x* tiende a *k*'.
M.- (escribe en el pizarrón).
$x \to k$
M.- ¿Qué representa la flechita?
AO12.- Tiende.
(R7B, 19-10-09; pp. 7-9).

En este registro de observación se pude destacar que se proporciona la definición formal del límite, es decir, la de Cauchy- Weirestrass (ε - δ), debe notarse que se aborda con enfoque por las relaciones entre variables y formalizado, para establecerlo, el maestro lo dicta y después se continua con el ejemplo siguiente ejemplo por medio de aproximaciones sucesivas:

M.- Sí; variemos un poco, por ejemplo.
O.- (Escribe en el pizarrón)
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$
M.- ¿Cuál sería el límite?
AO10.- dos.
M.- La variable puede tomar 1.9999.
AO12.- Si.
M.- Se está aproximando por la izquierda y puede valer 2.0000001, ¿nos estamos aproximando por?
AO3.- La derecha.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

1.99999 2.0000001
0 1 2 3

AO12.- ¿Por qué se llama Épsilon?
M.- Creo que así se llama la E en griego, acuérdense que nuestros orígenes son grecorromanos. ¿Nosotros tenemos algo que ver con los alemanes históricamente?
AA7.- Tal vez si. (R7B, 19-10-09; p. 10).

Durante la solución del ejemplo, un alumno pregunta, por qué se llama épsilon, y como se observa en el registro, se le responde porque es letra griega y se le plantea otra pregunta, el maestro continua con el dictado de la definición:

O.- (Sigue con el dictado)
M.- Punto y aparte y escriben: La variable independiente puede aproximarse a su límite ‘*k*’ por la izquierda y por la derecha; ya quedamos en eso, ya lo habíamos platicado, se puede aproximar por cualquiera de los lados.
O.- (sigue el dictado) (hace pausa para prenguntar)
M.- Punto y aparte ¿A ver tiene clara la idea de límite de una variable; AO8?
AO8.- No.
O.- (Los alumnos comentan entre ellos el maestro no escucha)
AO4.- Dile Huey, que tienes dudas.
O.- (platicando on AO2).
AO2.- ¡No!
O.- (El maestro no escucha que AO2 tienen dudas sobre el límite de una variable y no le responde a AO8 para que le quede clara la idea de límite de una variable. El docente continua con lo siguiente).
M.- Pasemos al límite de una función; punto y aparte y escriben: Un número ‘L’ es el límite de una función *f* de *x*, coma, si cuando ‘*x*’ tiende a su límite ‘*k*’, *k* entre parentesis, *f* de *x* tiende al número ‘*L*’.
AO1.- ¿*f* de *x* tiende?
M.- Al número ‘*L*’.
AO2.- ¿Al número que?
AO4.- *L*, Huey.
M.- Haber, punto y aparte (el dictado sigue), escriben: Para representar esta idea se hace uso de las siguientes simbologias; fijense bien, en lugar de poner límite completo vamos a usar las tres primeras letras de la palabra, esto es, *lim*; *lim* es límite; aquí *f* de *x* es *f* parentesis *x* (*f(x)*) o *f* de *k*, como sea la función; *x* tiende a ‘*k*’ va a se *x* flechita *k* es igual a *L*.
O.- (Escribe en el pizarrón)
M.- Coma, si cuando ‘*x*’ tiende a su límite ‘*k*’, *k* entre parentesis, *f* de *x* tiende al número ‘*L*’”. $\lim_{x \to k} f(x) = L$
M.- ¿Cómo se lee esto?, se puede leer de varias formas, no hay una forma única; ¿Cuál es el límite de la variable independiente?
AO1.- *k*.
M.- ¿Y el de la función?
AO9.- *L*.
M.- Ven el límite de la función es diferente al de la variable, aunque pueden ser iguales. Ahora no me acuerdo de un ejemplo.
O.- (Continua el dictado)
M.- Escriben: Esto se lee. El límite de *f* de *x* cunado *x* tiende a *k* es igual a *L*. Así se lee, en matemáticas tratamos de ahorrar muchas palabras por eso en matemáticas hay un lexico que sólo entienden los matemáticos; por ejemplo la función está en r dos, eso quiere decir que esta en el plano cartesiano; en r

tres le aumentan un eje; pero los matemáticos pueden decir r cuatro o r cinco aunque ya no se pueda representar.
Cuando esten en la carrera, dependiendo de en cual están en alguna de ellas van a ver gráficas en r tres, ¿Se acuerdan cómo se representa la distancia entre dos puntos en r dos?
O.- (Silencio)
(R7B, 19-10-09; pp. 12-14).

En el registro se observa que se da la definición formal del límite, ahora con enfoque por las relaciones entre funciones, se expresa que para representar la idea de límite se usa esta simbología y que en matemáticas se trata de ahorrar palabras, por eso el léxico que nada más los matemáticos entienden, y de eso se trata precisamente que los símbolos tengan sentido y significado para los estudiantes, ya que las matemáticas es un sistema de representaciones simbólicas.

Después de todo ese tratamiento para los límites, en el que se llego a formalizar al menos de manera dictada, se comienzan a operar de la siguiente manera:

M.- Por ejemplo.
(Escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x((2x-3)}{x}$$

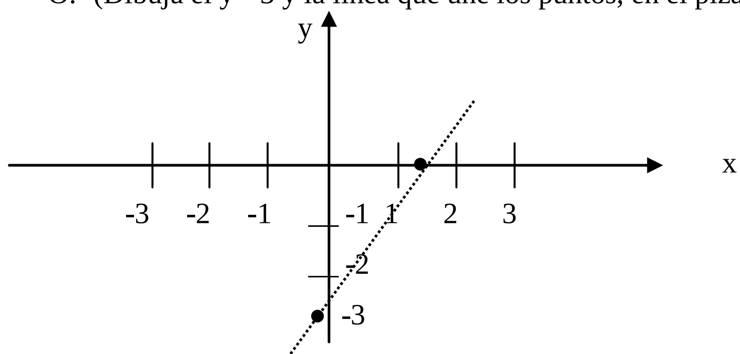
M.- No escriban, a ver pongan atención.
M.- Aquí en este ejemplo.
O.- (señalando lo que escribió en el pizarrón)
M.- Estamos usando factor común, este principio que ustedes vieron en primero.
O.- (Escribe en el pizarrón)
Factorización de polinomios con factor común

$$ax+bx+cx-dx=x(a+b+c-d)$$

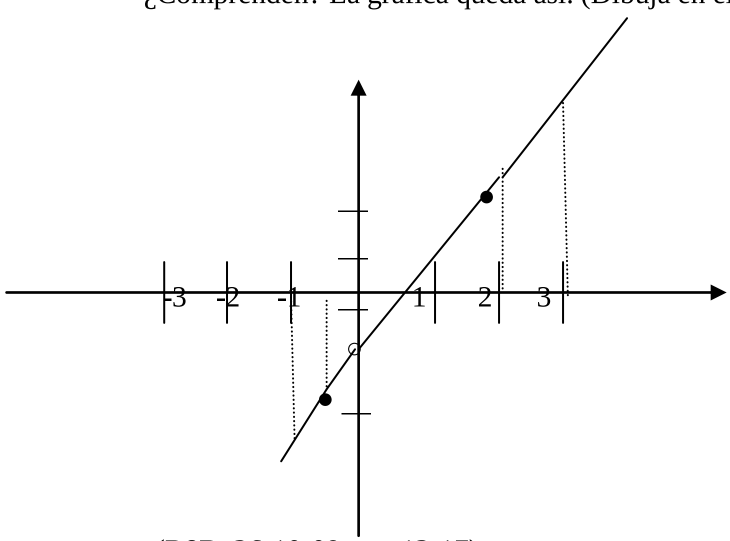
(R8B, 26-10-09; p. 8).

El límite abordado en el fragmento de registro, es un límite indeterminado, que se puede resolver al eliminar la indeterminación, el procedimiento para esto es por factorización, en este sentido el conocimiento previo es recordado en forma formalizada. Para continuar con el ejercicio se realiza gráficamente, esto se muestra en los siguientes fragmentos de registro:

> M.- Haber vamos a graficar la función, por eso vimos muchas gráficas, se estaban entrenando para lo que venía.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> Gráfica de $f_1(x) = 2x - 3$
> M.- Entonces queda más o menos así.
> O.- (Dibuja el y=-3 y la línea que une los puntos, en el pizarrón)



> M.- Ahora si graficamos $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x}$.
> O.- (Dibuja en el pizarrón)
> M.- A cero no podemos llegar pues no está definida, es un hueco.
> ¿Comprenden? La gráfica queda así. (Dibuja en el pizarrón)



(R8B, 26-10-09; pp. 13-17).

En este fragmento de registro se puede observar que, se utiliza la graficación con el propósito de que los estudiantes comprendan que las funciones son equivalentes, más no iguales, y esto se nota en el hueco que tiene la función original en $x = 0$, y no así la función equivalente, este es el mismo sentido que tiene la expresión ‘tan próximo a, pero diferente de a’, la definición del límite y es importante hacerlo notar a los alumnos como parte de la negociación de los significados para que de esta manera se logre la resignificación.

En la sucesión de eventos se va de lo espontáneo a lo formal, de lo formal a las aproximaciones sucesivas y de las aproximaciones sucesivas a la formalización y a la graficación, con la intención de que los alumnos internalice el concepto de límite, pues el docente está mediando entre las diferentes representaciones de límite y la propia representación de límite de los estudiantes, la mediación realizada en este caso no tiene éxito, ya que aun, cuando se abordan distintas representaciones, se ven todas por separado, como si no tuvieran nada que ver una con la otra, esto dificulta el cambio en la representación del alumno, obstaculizando así la internalización del concepto, entonces, para el alumno, límites es una serie de procedimientos que le ayudan a obtener un resultado.

Por otra parte, los registros de observación indican que en la sucesión de eventos de clase el docente da prioridad a la parte algorítmica de los límites y a la formalización, como cuando se disertan los ejemplos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \quad y \quad \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x}{x} = \frac{5}{-1} = -5$$ (R8B, 26-10-09; p. 6).

Con el propósito de explicar que si se cambia el valor de la variable, el valor del límite cambia; si se considera que x→0, se tiene una indeterminación matemática, la que se resuelve en este caso por factorización (factor común):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2x-3)}{x} = \lim_{x\to 0} 2x - 3 = 2(0) - 3 = -3$$ (R8B, 26-10-09; p. 10).

El docente en la sucesión de eventos utiliza el algoritmo, la formalización, las aproximaciones sucesivas, así como, la solución analítica y gráfica, pues la negociación de las diferentes representaciones contribuye a la interepresentación de los significados, son las diferentes representaciones del límite, las que favorecen el sentido y significado lo que beneficia la internalización del concepto. Aun cuando se negocian diferentes representaciones del límite, en este caso, el proceso de internalización se ve interrumpido al faltar la representación formal del concepto, pues ésta se dicta y no se relaciona con las otras representaciones, lo que indica un nivel intuitivo de la definición.

Este ir y venir (una interacción dialógica) con la intensión de negociar a través de las diferentes representaciones de límite, la definición intersubjetiva de los estudiantes para pasar a la intrasubjetiva, permite explicar el proceso de internalización del concepto límite mediante la evolución de eventos, dicha sucesión de eventos ayuda al proceso de internalización, pero no se pasa al siguiente nivel evolutivo para renegociar el significado, entonces se vuelve mecanización de pasos algebraicos, sin significado matemático de aproximación, límites se reduce a sustitución, “llenar huecos”. En su entrevista el maestro comenta algo de esto.

I.- En los límites, ¿se ven límites de funciones o de variables?

Las dos cosas, primero el límite de la variable, de una variable y después el límite de una función que en caso de la función no es otra cosa que el límite de la variable dependiente depende del de la variable independiente y la relación que en un momento le llaman función es la relación funcional o la regla de qué manera se relaciona una variable con la otra, entonces dejamos el límite de una variable y pasamos al límite de una función o variable dependiente; pero antes primero siempre tengo una introducción con ellos, una plática sobre que entienden ellos por límite, el límite así como palabra genérica que tiene muchas acepciones.

I.- Y ¿Qué ha encontrado ahí con ellos?

Algunos tienen las ideas un poco vagas, pero las tienen; yo siempre les pongo el límite de la paciencia del individuo, les platico, pero esta vez una alumna dijo cuando la paciencia se acaba, o sea como que tiene idea que en la paciencia hay un límite; yo les hablo de la mamá que estaba renegando con el niño que al último termina pegándole o ejerciéndole violencia física, entonces la señora a la primera no hace eso, está tolerando y llega un momento en que ya no lo aguanta, y lo agrede para que se calme, ahí su paciencia llegó a un límite que es cero, después de que lo golpeo a la mejor recupera su paciencia, ya descargó toda su energía negativa y enseguida como que le dio un cargo de conciencia, algunas veces va a ir a consolar al niño, ¡ya mi hijo, no llore! Recuperó su paciencia pero después de que descargó su energía negativa en el niño o la niña al estar agrediendo, ¿Cuántas nalgadas le ha dado o cuántos jalones de oreja le ha dado? (risas), les pongo ese ejemplo; les pongo el ejemplo de un depósito de gasolina de los automóviles pues eso creo que lo entienden bien, ahí manejo el volumen con el tanque, cuando el volumen de gasolina tiende a cero como límite, el volumen del aire tiende l máximo y al revés si se acaba de llenar el tanque el volumen del líquido tiende al máximo y el volumen del aire tiende a cero como límite, el tanque nunca deja de estar completamente lleno siempre hay algo de aire ahí, nunca se llena totalmente.

I.- Así ¿Cómo historias?

Así, ya después me meto con límites matemáticos que es lo que nos interesa, límite de una variable, límite de una función y enseguida el cómo calcularlos, el método general que hay, por el método de cómo se llama, de aproximaciones sucesivas y ya después el método de sustitución directa que ellos se den cuenta que hay un método más rápido que es lo mismo nada más teniendo claro que los valores que ahí se manejan son valores límite, el concepto de límite, se puede aproximar una variable infinitamente a ellos pero el concepto exactamente no.

I.- Y en la definición ¿Ve la definición formal del límite?

No, no aplico eso porque ellos no lo comprenden y creo que les complicaría más las cosas, les doy la definición y les hablo que esa diferencia en valor absoluto entre el límite y la variable es un número positivo infinitamente pequeño el cual se llama Épsilon pero hasta ahí no me meto con mucha profundidad porque pienso que a la mejor esos son temas para los chavos de físico-matemáticas o los de ingeniería a otro nivel.

I.- ¿para expertos?

Si, yo pienso que ellos, con que lograran manipular lo que corresponde a límite es suficiente porque es lo que ellos van a ocupar en la profesional, los

profesores se darían muy bien servidos si ellos supieran eso, pero a la mayoría se les olvida otra vez.
I.- Y en eso de la sustitución directa que menciona ¿para qué funciones?
Vemos funciones algebraicas fundamentalmente.
I.- Y de las trascendentales que mencionaba
Ahí solamente les menciono casi siempre dos o tres límites los muy específicos, los pongo a hacer ejercicios porque tampoco lo van a comprender, con que ellos lograran asimilar los cálculos de los límites algebraicos sería más que suficiente desde mi punto de vista pero pues como que no, yo considero que no tiene caso meternos con mayor profundidad con lo demás como los trigonométricos que son los que fundamentalmente marca el programa y algunos límites trigonométricos no todos, este y hasta ahí le dejo.
I.- Verlos así, usted, ¿Cuál considera que es la dificultad más grande de ellos?
Ellos batallan en los casos del límite en donde aparece un hueco, una…
I.- y en funciones discontinuas
Funciones discontinuas que tienen que factorizar y buscar una función equivalente.
I.- ¿Dónde aparecen indeterminaciones?
Si, ahí ellos batallan para factorizar, por más que se les dice, un cero entre cero no es cero, ni tiende al infinito, ellos siguen diciendo que cero entre cero es igual a cero y en el examen que les apliqué ayer, ya me di cuenta que varios del grupo llegaron al cero entre cero y ya no hallaron que hacer algunos pusieron cero y algunos indeterminación matemática y dieron el problema por terminado, pero esa no era la intención por más que se les explicó, se les explicó con mucho detalle cuando les aparezca un cero entre cero eso no quiere decir que el límite de la función no exista a la mejor si existe, hay que buscar una función equivalente que el límite sea el mismo aunque la función no sea completamente igual, les expliqué muy bien que si una, una función que les diera en la sustitución directa un cero entre cero o una indeterminación matemática, que si ese mismo problema lo hicieran por aproximación sucesiva se iban a dar cuenta que el límite de la función sí existe y, bueno que no fuera demasiado largo, entonces el método de la función equivalente es cuestión de que hicieran una factorización, y ¡ya! pero su problema es factorizar no alcanzan los objetivos ellos, la mayoría no, uno que otro sí, pero la gran mayoría no.
(EDB, 27-11-09; pp. 5-8).

Se confirma que el maestro ve tanto el límite de una variable como el de una función, que inicia el tema de límites en forma de plática con la intensión de saber que entienden los alumnos por límite, como palabra genérica de múltiples acepciones, en la plática se tratan varios ejemplos para después formalizarlos mediante los métodos de aproximaciones sucesivas y el de sustitución directa, comenta que se explica la definición y les habla de la diferencia del valor absoluto, infinitamente pequeña a la que se llama épsilon y que hasta ahí se llega, no se profundiza más, en su opinión lo más importante es la manipulación operativa de los límites; lo que reduce el aprendizaje de los limites a la mecanización, después de analizar las distintas sucesiones de eventos en clase y haber observado que el concepto formal se había dictado, se hizo prioritario ver las libretas de los alumnos para ver cómo escribían el concepto de límites, a , continuación se transcribe un fragmento de la redacción del concepto dictado por el docente y anotado en una de las libretas de los alumnos, en los anexos se pude observar las notas escaneadas del alumno.

> Límite de una variable
> Un número k es límite de una variable independiente (x) si en un proceso de variación de x ésta se aproxima infinitamente al número k de tal manera que a partir de cierto momento en valor absoluto de la diferencia $k - x$ es infinitamente pequeño y es menor que un número positivo infinitamente pequeño el cual se representa como (ε) épsilon
> Si $|k - x| < \varepsilon$
> entonces, (k) es el límite de (x)
> y se dice $x \to k$
> La variable independiente puede aproximarse a su límite k por la izquierda y por la derecha.
> (Apuntes de libreta de AO12, alumno de escuela B).

Durante la investigación fue una sorpresa encontrar que en el aula de la preparatoria se abordara el concepto formal de límites, más aún que éste se dictara por el profesor, del apunte se puede destacar que los alumnos escriben matemáticas textualmente como se dictan y usan los símbolos hasta que el maestro los escribe en el pizarrón, por eso se ve que escriben valor absoluto de la diferencia k - x en lugar de utilizar el símbolo $|k - x|$, esto indica según Vigotski (1979), que en este nivel aún no han logrado incluir los símbolos matemáticos en la percepción temporal, lo que impide el desarrollo de las representaciones simbólicas y las determinaciones de la acción proyectada y esto hace más difícil que el signo externo se transforme en signo interno.

Para verificar esto se entrevistó algunos alumnos de los que se tenía su libreta de apuntes para que explicaran lo que entendieron del concepto, al preguntar sobre Épsilon la respuesta fue:

> I.- Mira aquí tienes esta definición (le muestra copias de sus apuntes) ¿Qué es Épsilon?
> AO12.- Es una aproximación ya sea por la derecha o por la izquierda, como por ejemplo si el límite es 1 puede ser 0.99, 0.999, 0.9999,…. Y así, o puede ser 0.001, 0.0001, 0.0000001,….. pero con muchos ceros o muchos nueves depende de por donde se aproxime, creo, no sé. (Lee la definición) límite de una variable. Un número *k* es límite de una variable independiente (*x*) si en un proceso de variación de *x* ésta se aproxima infinitamente al número *k* de tal manera que a partir de cierto momento en valor absoluto de la diferencia *k* - *x* es infinitamente pequeño y es menor que un número positivo infinitamente pequeño el cual se representa como (ε) Épsilon, si $|k - x| < \varepsilon$ entonces (*k*) es el límite de (*x*) y se dice $x \to k$. La variable independiente puede aproximarse por la izquierda y por la derecha.
> Ve como Épsilon es un número infinitamente pequeño en las aproximaciones por eso con muchos nueves o ceros dependiendo de por donde se aproxima".
> I.- Pero Épsilon ¿Es el número con muchos nueves o ceros en el ejemplo del uno que dices o la diferencia entre el uno y el número con muchos nueves o ceros?
> AO12.- Es como el resultado de las restas, que son las aproximaciones y si se fija esas diferencias van siendo números muy pequeños, entonces Épsilon es un número más pequeño que esas diferencias que son las aproximaciones, como dice infinitamente pequeño o sea muy muy pequeño.
> I.- ¿Cuánto vale, entonces?
> AO12.- Depende, no es un número fijo, varía, bueno eso es lo que yo entiendo, pero no usamos la definición, nunca dimos el valor de Épsilon, resolvimos los límites por aproximaciones sucesivas, con tablas o directamente por sustitución.
> I.- ¿Y, entonces Épsilon?
> AO12.- Pues es de la definición, pero nada más ahí lo vimos, no lo usamos ni nada, los límites los resolvimos sin la definición.
> (EAB, 10-03-10; p. 3).

Para los estudiantes, el que se les proporcione la definición de esta manera no contribuye a transformar el signo externo, en este caso épsilon (ε) en un signo interno que les ayude a recordar el significado de aproximación en Cálculo I, para ellos épsilon no es más que una parte de la definición que no se utiliza para nada en límites, pues los obtienen sin la definición, lo que lleva de nueva cuenta a la parte operativa, mecanización de procedimientos algebraicos sin sentido y significado.

4.2.3. Interacción dialógica en el aula

Otra parte de los sucesos que ocurren en el aula son las pláticas o los diálogos entre el profesor y los alumnos, así como entre los alumnos. Se considera a las pláticas como las interacciones comunicativas a través del lenguaje, entre los integrantes de un grupo y los temas abordados son diversos. Las pláticas forman parte de la mutidimensionalidad de acciones que suceden en el aula y que enmaran la cultura del grupo. Para vigostki (1979) el lenguaje humano es fundamental para el desarrollo, pues prepara para el uso de los signos que una vez internalizados son importantes en los procesos psicológicos superiores.

> El lenguaje humano es, con mucho, la conducta más importante relativa al uso de signos en el desarrollo infantil. A través del lenguaje el niño se libera de muchas de las limitaciones inmediatas de su entorno. Se prepara, con ello, para una actividad futura; proyecta, ordena y controla su propia conducta, así como la de los demás. El lenguaje es también un excelente ejemplo del uso de los signos que, una vez internalizado, se convierte en una parte importante de los procesos psicológicos superiores; el lenguaje actúa para organizar, unificar e integrar los distintos aspectos de la conducta de los niños, como la percepción, la memoria y la resolución de problemas. (Vigotski; 1979: 190).

Así pues, el lenguaje utilizado en las pláticas y diálogos en el aula permiten observar las dificultades del entorno que se están rebasando y su contribución en el uso de los signos del Cálculo I, así como la forma en que se organizan, unifican e integran los nuevos conocimientos y la cultura que se va generando en el grupo.

Los diálogos son de diferentes temas que van desde el avance de la clase, los segundos apellidos de personajes ilustres, el uso de palabras, la corrección de la postura del sentado, situaciones del contexto físico inmediato, religión, festejos, escritura, sueños, hombres, relaciones de pareja, entre otros. Los diálogos y las pláticas son utilizados por el docente, para relajar un poco la clase y liberar la tensión que genera la materia, la diversidad de temas que van surgiendo se debe a las propias inquietudes de los alumnos, comúnmente esta diversidad de contenidos versan, como los que siguen:

Estados de ánimo, la muchacha del grupo, llegó triste ese día, y expresa:

> AA.- No sé porque así son todos.
> O.- (Le comenta a su compañero al parecer molesta o desconcertada).
> M.- No hija no todos son así.
> O.- (Sonriendo).
> AA.- Si profe, todos son así. (Con tono fuerte).
> (R3A, 9-10-09; p. 3).

Indicaciones de algún ejercicio, en ocasiones los compañeros están al pendiente de lo que hacen otros para corregirlos:

> AO1.- ¿ya te salió esa?
> O.- (le señala un ejercicio en su libro).
> AO.- No.
> O.- (El alumno AO1 borra)
> AO.- ¿Lo sustituiste?
> AO1.- (borra) Lo estás factorizando Huey.
> AO.- (mueve la cabeza). Sí.
> (R3A, 9-10-09; p. 19).

No falta el grupo de amigos que organiza la diversión, en esta ocasión con una visión pesimista de los adultos y machista sobre la sexualidad de la mujer:

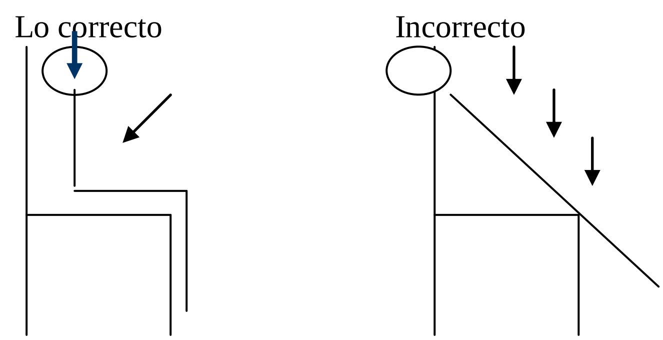
AO.- ¿Qué vamos a hacer, nos vamos de juerga o de antro?
AO.- Lo que sea pero con morritas o chamaquitas.
AO.- Hay que disfrutar la vida antes de hacernos veteranos.
AO.- La vida se acaba pronto.
AO.- Cuando llegas a veterano la vida se acaba.
AO.- Para ti Huey.
AOa.- Ponte a pensar Huey, las viejas tienen sus amantes, las jóvenes también.
(R7A, 16-10-09; p.10).

Interés aparente por el apellido de Colón, con el fin oculto de evidenciar a los interrogados:

AO2.- Maestro, ¿se sabe el segundo apellido de Cristóbal Colón?
M.- No lo sé.
AO2.- ¿Quién me puede decir, ningún profe me lo ha dicho.
M.- Es cuestión de buscar la biografía.
AA6.- ¿De quién?
M.- De Cristóbal Colón.
(R4B, 14-10-09; p. 5).

Intento por evadir un nuevo tema sobre límites:

M.- Vamos a ver ahora el concepto de límite.
AS.- ¡Ay!, profe.
O.- (Dicen a coro como enfadados).
M.- ¿Cómo que ¡Ay!?
AA6.- Es viernes.
M.- ¿Y?
AO2.- Ya estamos cansados.
M.- El ser humano es el que se cansa en situaciones de confort, aquí están con aire.
AO4.- Pero el cerebro se cansa.
M.- Y miren a AO2, como está sentado, es porque se cansa en esta posición.
O.- (Dibuja en el pizarrón)



(R6B, 16-10-09; p. 11).

Respecto a los diálogos estos y otros registros parecen indicar que existen pláticas al inicio de clases, durante la clase y al final de la clase, estas versan sobre diversos temas, tanto relativos a la clase, como no relacionados con los contenidos de Cálculo I, pero que hacen referencia a la forma de pensar de los jóvenes respecto a la religión, significados de nombres, relaciones con otras culturas, personajes históricos, horarios, calificaciones, etc. Lo cierto es que el lenguaje del aula expresa la cultura en la misma y contextualiza el proceso de enseñanza aprendizaje, ya Lemke (1997) menciona que el lenguaje del aula es más que los conceptos y los contenidos de la materia.

> El lenguaje del aula no es tan sólo una lista de términos técnicos, ni siquiera una letanía de definiciones. Es el uso de esos términos relacionados unos con otros en una amplia variedad de contextos. Los alumnos tienen que aprender a *combinar los significados* de los diferentes términos según las formas aceptadas de hablar científicamente. Deben hablar, escribir y razonar en frases, oraciones y párrafos de lenguaje científico. (Lemke; 1997:28).

Es importante que los docentes estén atentos al lenguaje usado en el aula, procurar que este sea lenguaje científico, de manera que permita ir relacionando los términos, para darles sentido y significado y de esta manera mejorar su aprendizaje. De otra manera se corre el riesgo de relajar demasiado la clase; de eso precisamente dan la impresión los fragmentos de registro citados, en ninguno de ellos se aprecia lenguaje científico.

4.2.4. Desarrollo de la clase de cálculo I

El desarrollo de la clase de cálculo I se lleva a cabo mediante actividades en el aula, generalmente ocurren con rapidez en el cambio de las acciones que se realizan, suceden casi inmediatamente; en el salón se desarrolla una la gran cantidad de eventos como procesos, actividades que realizan, pláticas, silencios, interrupciones y muchos más, en no pocas ocasiones se puede observar que ocurren al mismo tiempo, es decir, en un mismo momento una parte del grupo puede estar en silencio mientras otra realiza una tarea y el resto platica, además estos eventos transcurren rápidamente y por lo general en 50 minutos que dura la hora clase. Un ejemplo de esto se muestra en el siguiente fragmento del registro de una observación.

> O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
> Límite de funciones
> O.- (AO2 está recostado sobre la mochila, ve la hoja y raya)
> O.- (El maestro pasa por los pasillos)
> M.- ¿Cuánto llevan?
> AO9.- Cuánto va a valer?
> M.- Pongan ahí lo que traigan en la cabeza.
> O.- (AO1 pide borrador a AA6, ella se lo pasa)
> O.- (Algunos comentan, se escuchan murmullos, están un poco inquietos)
> O.- (AO7 y AO13 comentan)
> AO13.- No sé nada de trigonométricas.
> AO7.- seno, coseno, esos.
> O.- (AO2 y AO3 comentan con AO1)
> M.- ¿Listo?
> AO7.- Más o menos.
> M.- Más, más o más menos.
> AO13.- Más, más.
> M.- Busquen en la memoria profunda intenten otro ratito, contéstenlo todo, no afecta su calificación.
> AO7.- No tiene nombre.
> M.- Fíjate en el tema que vamos a ver.
> AO8.- ¿Por qué todas las funciones tienen límite?
> M.- ¿Por qué se te ocurre esa pregunta?
> AO8.- No sé, porque no hay funciones que no tienen límite.
> (R4B, 14-10-09; pp. 7-8).

En el fragmento de registro de observación citado se puede ver que los alumnos responden unos ejercicios sobre el tema que van a iniciar, límites, y al mismo tiempo están conversando con el maestro, el docente escribe en el pizarrón, comentan entre ellos sobre los ejercicios, se piden borrador, tratan de recordar conocimientos anteriores. Otro ejemplo de una situación similar es:

> M.- Son los tres casos que se pueden presentar en límites infinitos, exponente mayor en el numerador el límite es infinito; exponentes iguales en el numerador y denominador el límite queda definido y cuando el exponente mayor está en el denominador da cero. Esto viene en las páginas que faltan pero con esto pueden resolver los problemas 2, 8 y 9.
> O.- (Los alumnos anotan lo del pizarrón y ven los ejercicios del libro, el maestro camina hacia la puerta).
> M.- ¿Qué horas son?
> AO.- Ocho y media.
> M.- ¿Qué hora?
> AO.- Ocho y media.
> O.- (El maestro sigue caminando hasta llegar a la puerta y se recarga en ella, los alumnos continúan copiando lo del pizarrón).
> O.- (Se escuchan algunos murmullos sobre todo en la esquina izquierda donde comentan los ejercicios, el maestro se acerca a ellos (con asterisco en el sociograma)).
> M.- ¿Qué pasa?
> AO.- Nada estamos comentando los ejercicios.
> (R4A, 13-10-09; p.11).

En este caso se puede observar que cuando el docente concluye la explicación de los tres casos de límites infinitos, mientras los estudiantes copian lo del pizarrón, algunos están en silencio otros comentan los ejercicios, el maestro camina por el salón verificando el trabajo de los alumnos y al mismo tiempo pregunta la hora, son muchas cosas que se realizan en el aula, al mismo tiempo y rápidamente.

4.3. Intercambios comunicativos en la clase de cálculo I

En la unidad de análisis *Intercambios comunicativos en cálculo I* se enuncia como se dan las indicaciones o explicaciones que se proporcionan los alumnos, se discute la manera en la que los estudiantes le solicitan ayuda al maestro y las distintas pláticas entre el profesor y los alumnos; el andamiaje permite explicar cómo se transita a diferentes niveles de desarrollo, a través de la ayuda entre iguales y la solicitud de ayuda al docente.

La categoría *Intercambios comunicativos en Cálculo I*, implica de acuerdo a los datos obtenidos en los registros de observación, los siguientes patrones emergentes: ayuda entre pares, solicitud de ayuda al maestro, recuerdos académicos y las pláticas; la integración de esta categoría de análisis se presenta en el apartado de anexos.

Se considera a los intercambios comunicativos como los diálogos a través del lenguaje humano, ya sea entre iguales o con el profesor; los diálogos acompañados durante las actividades cotidianas que realizan los integrantes de los grupos, contribuyen a generar una cultura del aula, con significados propios encaminados a las diferentes representaciones que se generan en el grupo.

> La clave del proceso de interiorización ha de buscarse en el análisis de los intercambios comunicativos que tienen lugar durante la actividad conjunta y, más concretamente, en la manera de cómo dichos intercambios influyen sobre las representaciones y significados que construyen los participantes. (Coll y Colombina, 1995: 352).

El proceso de internalización expresa las transformaciones que ocurren durante una sucesión (evolutiva) de eventos que van de lo inter a lo intra, en Cálculo I interesa analizar cómo son las transformaciones que se presentan en el aprendizaje del concepto límite, es decir, cómo va evolucionando la representación intersubjetiva del límite en una representación intrasubjetiva, y en cómo a través de los diálogos en la clase, se van construyendo los significados.

En la clase, se puede observar que cuando los grupos trabajan en equipo, los alumnos se preguntan mutuamente y utilizan el diálogo, tanto en la ayuda entre iguales, como en las ayudas del profesor. Los estudiantes tienen una manera particular de ayudarse entre ellos, el lenguaje, es entre iguales, mientras que el docente es el adulto con mayor experiencia, este acude a los llamados de los alumnos; las ayudas pueden darse en equipo o de forma individual; un ejemplo de esto se puede ver cuando al final del trabajo en equipo se acercó un estudiante al escritorio del docente, al parecer, a consultarle algo, poco a poco se le fueron acercando más y se escuchaban dudas de los ejercicios del tema de límites, al finalizar todos los estudiantes se alejaron sonriendo del escritorio del maestro.

> O.- (cinco muchachos y la muchacha van al escritorio del maestro, algo les explica).
> O.- (otros alumnos salen del salón).
> O.- (AO1 y su compañero se quedan comentando los ejercicios).
> O.- (Se van algunos de los alumnos que están con el maestro, se quedan tres muchachos y la muchacha).
> O.- (AO1 resuelve ejercicios y su compañero de equipo lo ve, en eso cierra el libro y van al escritorio del maestro con los demás).
> AA.- ¿Por qué da séptimo?
> AO1.- No la ve.
> M.- Esto es igual a 1 más 2 más un tercio más tres tercios.
> AA.- Pensaba en dolor de cabeza.
> O.- (Los alumnos se ríen y se retiran del escritorio del maestro).
> (R3A, 9-10-09 ;pp. 20-21).

En el fragmento de registro se observa cómo los estudiantes solicitan ayuda al docente y la forma en que ellos tratan de ayudarse, se puede notar que para los estudiantes las fracciones representan un problema y que hasta dolor de cabeza les causan, esto se debe a que al no poder transferir el conocimiento anterior, se dificulta más la comprensión del nuevo.

En el siguiente dialogo se observa el ambiente que se genera para la clase de Cálculo y la forma en que establecen comunicación los alumnos con el docente.

AAa.- No manche profesor por eso no avanzamos.
M.- ¿Qué es eso de no manche?
O.- (La expresión de su rostro seria y el tono de voz me pareció a la defensiva).
AAa.- Sí, no manche, le preguntan dudas y seguimos con lo mismo y no avanzamos con el programa, ya hubiéramos terminado, si no nos hubiera juntado ayer.
AO.- Es cierto.
M.- Pero eso de no manche es un insulto.
O.- (Su expresión y tono de voz son serios).
AAa.- No maestro. (Muy tranquila y tono de voz sereno).
AO.- Es como que no, se pasa.
(R2B, 6-10-09; p.4).

En los diálogos escuchados está implicada la forma de cómo en la actividad conjunta el grupo construye el conocimiento, los fragmentos de registro anteriores muestran como los alumnos tienen la confianza de acerarse y dialogar con el profesor sobre los temas de clase, lo que tienen que recordar y manejar de los cursos anteriores, así como del avance de la clase, y la charla se desarrolla en un ambiente relajado y de libertad, lo que propicia confianza en el grupo.

Los diálogos también muestran la ayuda que se brindan los iguales, así como la proporcionada por el docente y, como lo mencionan Coll y Colombina (1995) se requieren ciertos requisitos para que ésta pueda ser benéfica, primeramente se requiere necesitarla, que se proporcione en el grado de la necesidad, de acuerdo a la complejidad, que sea clara y que la pueda utilizar quien la solicita, esta ayuda proporcionada por los iguales y el docente es lo que se llama andamiaje como lo define Bruner y se menciona en el apartado 2.3.2 del presente trabajo, en este sentido, la ayuda, no debe ser tan sencilla que quien la solicita pierda el interés pero tampoco tan difícil que no motive a quien la ha solicitado.

4.3.1. Ayuda entre pares

La ayuda entre pares son las indicaciones o explicaciones que se proporcionan los alumnos, en una clase ocurre de distintas maneras, puede sobrevenir mediante la corrección de una operación con frases como: "2 por 5, 10, huey", "Es un ejemplo de cómo sería la gráfica ahí huey". Cuando los estudiantes hacen uso del pizarrón para resolver un ejercicio también, se puede observar la ayuda entre pares, a continuación se aprecia esto, un alumno resuelve un ejercicio en el pizarrón y se equivoca los compañeros le ayudan a corregirlo:

AO1.- (en el pizarrón) $\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{(\cancel{x+2})(x-2)}{\cancel{x-2}}=x+2$

$2+2=4$

AA.- Es 4 y el resultado es 2.
AO1.- (borra lo del pizarrón).
AO.- Chale.
O.- (Se escuchan algunas risas).
AO.- Te equivocaste.
AO1.- (escribe en el pizarrón) $\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=x=2$
AO1.- (Regresando a su lugar) "No se cómo se llama eso".
M.- ¿Te convencieron?
AO1.- Si. (Parecía apenado, frustado).
M.- Nunca duden del poder de convencimiento de las mujeres.
AA.- Es factor común.
M.- Aquí nada más estamos buscando la función equvalente, que es *x*, el límite si es 2, mira fijate. (dirijiendose a AO1 y escribe en el pizarrón $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}x=(2)=2$)
(R3A, 9-10-09; pp. 14-15).

En este ejemplo se observa como el estudiante, en un primer intento por resolver el ejercicio lo realiza mal, dos compañeros le hacen ver que no es correcta la solución, la analiza mentalmente, coincide con ellos, borra y vuelve hacerlo, lo resuelve correctamente; en este caso el maestro está atento a lo que sucede, pero son los estudiantes los que se corrigen y encuentran la solución; en ejemplos como este, en el que pasan al pizarrón y se corrigen, escriben y borran, resuelven bien y mal los ejercicios, se aprecia la ayuda entre pares y ella permite explicar cómo los alumnos van construyendo sus andamiajes y transitan a diferentes niveles de desarrollo.

Sobre el heho de pasar al pizarrón, los docentes expresan que les gusta hacer pasar a los alumnos al pizarrón, para que pierdan el miedo. Por su parte los estudiantes en la estrevista expresaron que les gusta participar pero una vez que están seguros que lo que han resuelto ésta correcto, y aunque son concientes de que si se equivocan y los corriguen, les ayudan a aprender, prefieren pasar a resolver una vez que se sienten seguros. Con la intensión de averiguar que opinan los estudiantes sobre pasar al pizarrón, se les interrogó al respeto.

> I.- Y ¿pasar al pizarrón, les gusta?
> AO.- No. (Risas)
> AO.- Cuando estoy bien seguro si.
> I.- y ¿Qué quiere decir bien seguro?
> AO.- Pues que está bien, y estar bien seguro de cómo va lo que tengo que resolver, que nada más llegues y la pongas y que no te salga mal, bueno pero si sale mal no importa, me corrigen, pero es más seguridad saber que está bien.
> AO.- Primero hacerlo en la libreta y que el maestro diga que está bien, entonces paso al pizarrón.
> I.- Ha, prefieren hacerlo primero
> AA.- Como un borrador y pues ya pasar con todo y libreta.
> AO.- Da más confianza pasar cuando lo hacemos primero en la libreta, así al pasar y explicar cómo que le entiendes más, pero estando seguro, sino te puedes confundir más.
> (EAAS, 02-03-10; pp. 3-4).

> I.- ¿Te gusta pasar al pizarrón?
> AO.- Si.
> I.- ¿Por qué?
> AO.- Pues para resolver y darme cuenta si está bien lo que hice o está mal.
> (EAA, 02-03-10; p. 3).

I.- Y pasar al pizarrón te gusta.
En veces, si, pero si.
(EAB, 10-03-10; p.5).

De los fragmentos de registro anteriores se puede notar que, en general a los alumnos les gusta pasar al pizarrón, pues es un forma de reafirmar lo que saben y explicarlo a sus compañeros, pero lo cierto es que necesitan sentir seguridad de lo que van a pasar a resolver para no confundirse. Es preisamente en esas correciones entre iguales que se pueden ayudar a pasar a nuevos niveles evolutivos pues quien corrige es par y al mismo tiempo más capaz y ayuda a que los otros construyan, esta ayuda es diferente a la que realizan en los lugares donde están sentados, al pareccer les da más confianza pues hasta el lenguaje es diferente, en sus lugares van viendo unos los avances de los otros, si se percatan de algun error, se corrigen con un lenguaje muy de ellos, como por ejemplo: cuando trabajan en equipo y se consultan sobre los ejercicios que van resolviendo, o si ya tienen la solución, y si se dan cuenta que alguno tiene algún procedimiento incorrecto usan palabras como el huey:

AA.- ¿Om, x-4 en la parte de abajo?
AOm.- (le responde a su compañera) Si.
AA.- Y la seis ¿es como la de ayer?
AOm.- Nosotros vamos en la cuatro apenas.
AA.- (insiste) "Pero es como la de ayer un trinomio cuadrado no perfecto porque esa regla me tocaba sacarla.
O.- (AO1 se para y va con su compañera y conversan)
AA.- ¿Le entendiste al 4 y 5?
AO1.- Porque esta el dos, no podemos despejar.
AO.- (Compañero de equipo de AA) El 5 tambien.
(R3A, 9-10-09; p.12).

En este registro se observa la forma en la que los estudiantes analizan los ejercicios que tienen que resolver, para identificar el procedimiento que deben aplicar en la solución, también se ayudan supervisándose unos a otros, lo que se observa en el registro siguiente:

AO1.- ¿ya te salio esa?
O.- (le señala un ejercicio en su libro).
AO.- No.
O.- (El alumno AO1 borra)
AO.- ¿Lo sustituiste?
AO1.- (borra) Lo estas factorizando Huey.
AO.- (mueve la cabeza). Sí.
M.- ¿Qué pasa aquí? (dirijiéndose a los alumnos del equipo junto a mi derecha).
AO.- Ya me salió.
(R3A, 9-10-09; p. 19).

La ayuda entre pares se desarrolla a través de una actividad conjunta, mediante la colaboración de compañeros más capaces se logra ejecutar la tarea, como cuando expresa el alumno 'ya me salió'; ello sitúa a los estudiantes en la primera etapa de la zona de desarrollo próximo (ZDP), esto es, la ejecución es ayudada por otros más capaces; la ZDP Vigotski la definió como la distancia entre lo se puede realizar sin ayuda (desarrollo real) y lo que se logra con la ayuda de uno con mayor desarrollo; el medio de ayuda es el signo que está internamente dirigido y cambia tanto a la persona que lo utiliza, como su interacción con el entorno.

O.- (Se alcanza a escuchar a AO2 quien al parecer explica a compañero)
AO2.- No, pero fíjate, suma aquí.
O.- (Señalando el libro de su compañero).
O.- (Su compañero borra y le pasa el lápiz al estudiante sentado atrás de él).
(R4A, 13-10-09; p. 11).

En este fragmento de registro se observa como la indicación de un compañero hace que el alumno corrija, en este sentido, los medios de ayuda más comunues son los signos: instruir, preguntar y estructuración cognositiva. Respecto a la ayuda entre pares, en la entrevista los estudiantes expresaron, que se preguntan entre ellos, aunque también indicaron, que no le preguntan a todos sino presisamente a aquellos que ellos consideran más capaces.

I.- ¿Le preguntas tus dudas a tus compañeros?
Si, a los que le entienden bien, si, como a Rubí y a Juan, les dijo aquí no le entiendo y ya ellos me dicen, es que tienes mal la fórmula, aplica ésta y ya.
I.- ¿Cómo sabes qué compañeros le entienden bien?
Porque cuando les pregunto, me dicen has esto y esto y si no me queda claro pues al profe y le dijo Rubí y Juan me dijeron que le hiciera así y así y él me dice pues sí, así hazle o ya me explicaba, pero Rubí, Juan y Miguel me ayudan. El profe es muy accesible, hace que le entendamos muy bien, yo le dijo que se vaya a la Universidad porque hace que le entendamos muy bien, pero dice que nada más da en prepa.
(EAA1, 01-03-09; p.3).

En el registro se puede notar que el alumno identifica a los más capaces según la ayuda que le proporcionen, esto es, solicita ayuda a quienes le van a proporcionar la que necesita y lo motiva a seguir a delante; también se presenta el caso de estudiantes que solicitan ayuda a quienes le tienen confianza:

I. ¿Le pides que te explique a tu maestro o a tus compañeros?
A mis compañeros, a M…, a él le tengo confianza porque los otros no sé que me van a decir y él y yo nos explicamos.
I.- ¿Se explican?
Si, en ocasiones cuando se le dificulta a uno o al otro.
(EAA3, 01-03-10; p.3).

La confianza es importante para solicitar ayuda, ya que eso le permite al estudiante pedir la que requiere para avanzar, así pues, el estudiante además de identificar quién lo puede ayudar, necesita sentir la seguridad de que así será.

I.- ¿Le preguntas dudas a tus compañeros?
A uno que otro, alguno, rara vez, pero si les he preguntado.
I.- Y, ¿Cómo a quienes?
¿El nombre?
I.- O, ¿Por qué le preguntas a unos y no a todos?
Pues le pregunto a la persona que se ve que le entiende, igual cuando yo le entiendo y nos explicamos, pero le tiene confianza a esa persona.
(EAA3, 01-03-10; pp. 2-3).

Por otra parte hay quienes solicitan ayuda para comprobar lo que están resolviendo, de esta manera comparan resultados.

> I.- ¿Tus dudas, se las preguntas a tus compañeros?
> Si, a veces también les preguntaba para comparar el resultado o ver el procedimiento que utilizó.
> I.- ¿Algún compañero al que le ayudes a que entiendan?
> Así a que entienda a ninguno, a veces nos apoyamos algunos compañeros, por ejemplo yo y Juan nos preguntamos sobre lo que hacemos.
> (EAA4, 02-03-10; pp.4- 5).

Este tipo de ayuda, es conjunta, ya que se preguntan para comprobar, ambos se están ayudando para avanzar, en la comprobación los estudiantes reflexionan en las formas de abordar la tarea, contrastan resultados y buscan las mejores alternativas de solución.

De las narraciones se puede notar como los alumnos identifican a los más capaces, precisamente son a los que buscan para que les ayuden a resolver dudas; las ayudas entre pares son apreciadas por los estudiantes, les permite pasar a nuevos niveles de desarrollo; en el siguiente fragmento de observación se ejemplifica como aparece el andamiaje, es una ayuda precisa que requiere cada sujeto, no debe ser de más, se debe proporcionar sólo la requerida.

> AOb.- ¿Ya entregaste el trabajo de cálculo?
> O.- (Le grita a AOa que está en el otro extremo del salón).
> AOa.- No, ¿Lo hiciste todo?
> O.- (Le responde desde su lugar).
> AOb.- Me falta el del dominio.
> O.- (AOa va hacia el lugar de AOb y le explica lo que debe hacer).
> AOa.- Mira es una raíz cuadrada, fíjate en el radicando, no puede ser negativo por lo que hay que resolver la desigualdad.
> AOb.- ¿Qué desigualdad?
> AOa.- ¿Cuál es el radicando?
> AOb.- $x - 1$.
> AOa.- Para que no sea negativo, se tiene que garantizar que $x - 1$ sea mayor o igual que cero.
> AOb.- ¡Ha!, ya.
> O.- (Expresa con alivio y se pone a resolver, AOa regresa a su lugar).
> (R5A, 14-10-09; pp. 3-4).

En la conversación entre dos alumnos se devela el andamiaje, la ayuda proporcionada por un igual contribuye a que un alumno pase a un nuevo nivel de desarrollo, cuando el estudiante exclama "¡Ha!, ya" es porque comprende lo que tiene que hacer, y ya lo puede hacer solo, a esto se refieren Coll y Colombina (1995), las condiciones para el beneficio de la ayuda es que se proporciona en el momento y en la medida requerida por el alumno.

> Para que un participante pueda beneficiarse de la ayuda recibida de sus compañeros, parece necesario que se cumplan varias condiciones: 1) que necesite realmente la ayuda ofrecida; 2) que la ayuda se corresponda con la necesidad de quien la recibe, es decir, que sea relevante para la dificultad encontrada; 3) que la ayuda se formule en un nivel de elaboración ajustado al nivel de elaboración de la dificultad; 4) que se proporcione tan pronto como se manifiesta la dificultad; 5) que el receptor pueda entenderla; 6) que el receptor tenga una oportunidad para utilizar la ayuda recibida y que aproveche esta oportunidad. (Coll y Colombina, 1995; p. 349).

La ayuda recibida es puesta en práctica, además de cumplir con las condiciones señaladas para que pueda ser benéfica: realmente necesitaba ayuda, se dio en el grado de dificultad requerido, correspondía con la necesidad, se proporcionó en el momento indicado y fue comprendida, lo que indica que se aprovechó la oportunidad, y todo ello favorece el proceso de internalización se pasa de la regulación exterior a la interior, Coll y Colombina (1995) expresan que: "el proceso de interiorización puede ser entendido como el tránsito desde una regulación externa, social, interpsicológica de los procesos cognitivos mediante el lenguaje de los demás, a una regulación interiorizada, individual, intrapsicológica de los procesos cognitivos mediante el lenguaje interno". (p. 351), en el ejemplo mencionado se puede observar como el lenguaje de un compañero le ayuda a otro a comprender lo que tiene que realizar en la tarea y todo ello está en el diálogo social o exterior y en la comprensión pasa al plano interior.

4.3.2. Solicitud de ayuda al maestro

La solicitud de ayuda al maestro se muestra en las formas en la que los estudiantes solicitan ayuda a los docentes, tiene lugar en el ambiente áulico y sucede por la petición de los alumnos. En este apartado se muestran algunas de las formas vebales que los estudiantes utilizan para solicitar ayuda al docente, algunas veces mediante frases, tales como: “no entiendo esto”. “maestro, haber profe”, “mire este profe”, “profe”, “profe, la 6”, “maestro”. A continuación se muestran algunos fragmentos de observación que ejemplifican cómo inicia la solicitud de ayuda.

La ayuda solicitada puede ser para aclarar el significado de algún símbolo:

> AO1.- Maestro, ¿Qué significa f bolita g?
> M.- Compuesta.
> (R3A, 9-10-09; p. 6).

También puede referirse a procedimientos que debe realizar para resolver algún ejercicio:

> AA.- Profe.
> M.- Mande.
> O.- (va al equipo de la muchacha).
> AA.- No entiendo esto.
> M.- Lo que esta arriba, ¿Qué es?
> AA.- ¿Aquí?
> O.- (Señalando en su libro).
> M.- No, no el número 4 en el denominador, un trinomio de la forma
> $ax^2 + bx + c$.
> AA.- No me acuerdo.
> M.- No importa divide.
> AA.- ¿Para eliminar?
> M- Divide y te va a dar el otro binomio.
> (R3A, 9-10-09; pp. 9-10)

Se observa como los estudiantes le consultan al maestro las dudas, sobre el significado de símbolos y expresiones, y no en pocas ocasiones los maestros de matemáticas se enfrentan a este tipo de solicitudes, por lo general es común que los estudiantes no recuerden o no conozcan la simbología, por ello es importante el papel del maestro en las respuestas, éstas deben ser de tal forma que ayuden al alumno a pasar a un nuevo nivel, esto es, debe ser únicamente la necesaria, a este respecto, en la ayuda del docente, el rol del maestro en la mediación entre el conocimiento matemático y los alumnos juega un papel importante, ya que, ella puede o no, favorecer el nuevo nivel de desarrollo.

> El verdadero papel del profesor consiste en actuar de intermediario entre los contenidos de aprendizaje y la actividad constructiva que desplieguen los alumnos para asimilarlos. Es el profesor quien determina en gran medida, con sus actuaciones, que la actividad del alumno sea más o menos constructiva, que se oriente en uno u otro sentido y, en definitiva, que genere unos determinados aprendizajes. (Coll y Solé; 1995: p. 322).

El rol del maestro, como intermediario, entre los saberes y la actividad de los alumnos para comprenderlos; debe ser un acuerdo con el grupo, por medio del diseño de actividades y la mediación, cabe aclarar que el acuerdo entre docentes y alumnos no necesariamente es explícito, pero se da en el quehacer diario del aula; por otra parte como lo mencionan Coll y Solé la ayuda del docente se brinda en diferentes grados y estos depende del tipo de ayuda proporcionado.

> Las acciones y verbalizaciones de las madres son clasificadas en cinco categorías atendiendo al nivel creciente de directividad, intervención, ayuda que proporcionan para resolver la tarea: desde el nivel 1, en el que la ayuda es mínima (palabras de estímulo, aliento), hasta el nivel 5, que representa en mayor grado de ayuda (demostración de cómo se resuelve la tarea), pasando por tres niveles intermedios (llamar la atención sobre aspectos importantes de la tarea; ayudar a seleccionar el material; proponer el material a utilizar en cada momento). (Coll y Colombina, 1995: p. 325).

De acuerdo con esto, se puede decir que el primer fragmento de registro de observación corresponde a un nivel 4 de la ayuda del adulto (docente en este caso) no se le motiva a que el alumno encuentre por él mismo el significado, sino que se le dice directamente lo que representa “la bolita”; en el segundo fragmento el nivel puede considerarse como 2 se dan indicaciones de que hacer para resolver el problema, sin resolverlo, incluso se le dan pistas hacia una alternativa para la solución cuando el docente le indica que divida para encontrar el otro binomio, pues la alumna no se acuerda de factorizar.

Por otra parte cuando el grupo trabaja en equipos se preguntan más entre ellos y al docente, la solicitud de ayuda al profesor empieza en estos casos, desde la forma de organizar el trabajo por equipos hasta la realización de la tarea, en los siguientes fragmentos de registro se muestra como se atiende a cada equipo acudiendo a sus llamados.

> AO.- Mire este profe.
> M.- ¿Les dio el resultado?
> AO.- Mire.
> O.- (Le muestra el libro).
> M.- Bien.
> AO.- Profe.
> O.- (Le hablan de otro equipo).
> M.- Voy.
> AO.- Profe.
> O.- (De otro equipo)
> M.- Voy.
> O.- (El maestro va con el primer equipo que le llamó).
> M.- ¿Por qué x-3?
> AO.- De aquí del ejemplo.
> M.- Bueno eso era para ese ejemplo. A ver ¿es cierto eso que escribieron?
> O.- (Silencio)
> M.- No, no es cierto esto, ustedes van a buscar algo de manera que tengan algo equivalente.
> AO.- ¿Cómo?
> M.- Vas a transformar la función en otra equivalente, factorizando, tienes que identificar diferencia de cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, trinomios cuadrados no perfectos, ¿Qué tienes ahí?
> AO.- No sé.
> M.- A ver tienes que checar lo de las factorizaciones.
> (R3A, 9-10-09; p. 11).

Se observa la acción mediada del docente y como va proporcionando distintos grados de ayuda (andamiaje) según las necesidades de cada equipo, se puede notar que el maestro también les responde a los estudiantes con preguntas como lo menciona Becco (s/r), el andamiaje proporcionado por el docente debe ser tal que favorezca la trasformación del pensamiento y el alumno pueda avanzar a un nuevo nivel de desarrollo.

> La Mediación quiere asegurar el proceso, favorecer la modificabilidad e incrementarla; su objetivo es producir un nivel más abstracto de pensamiento. Las preguntas se centran en el qué o cambio cognoscitivo; el por qué u objetivo que se persigue; y el cómo o método que permite el cambio cognitivo de un modo sistemático. La pregunta ayuda a definir problemas, a realizar inferencias, a hacer hipótesis, a extraer reglas y principios... con tendencia a elevar el nivel cognitivo a partir de las tareas. (Becco, s/r: 14).

Un recurso bastante utilizado por los docentes en la acción mediada, es la pregunta, según se utilice tiene varias intensiones, puede ser para motivar, para generar interés, provocar controversia, pero en sí, el fin último de la pregunta es favorecer el paso a nuevos niveles de desarrollo, en la entrevista al docente se le interrogó al respecto, sobre el porqué y el para qué de las preguntas en clase, el punto de vista docente:

> I.- ¿usted utiliza preguntas para los alumnos?
> Sí, es una estrategia mía estarles preguntando; mi clase es tradicionalista por eso uso mucho el pizarrón, yo soy el que me muevo, pero siempre trato de provocar la disonante cognitiva a veces ellos se quejan de que no se animan a preguntar porque yo les respondo con otra pregunta, se quejan mucho de eso y hace poquito hubo reunión de padres de familia y pusieron esa queja los padres de familia.
> 14:21 hrs.
> I.- Pero usted, ¿con qué intensión les hace la pregunta?
> Provocar la disonancia cognitiva, que ellos se pongan a pensar, no darles la respuesta a ellos, porque si no les doy la respuesta a ellos se den cuenta de, un tanto usando el constructivismo, darse cuenta de lo que sucede, a veces me detengo y les hago: haber prueben este valor, para ver si se cumple lo que están diciendo, denle un valor a la variable a ver qué pasa, les da flojera hacerlo, lo vamos a hacer entre todos; constantemente les estoy preguntando haber que hay aquí, por qué esto o aquello, a veces al que quiera contestar a veces al que esta distraído o platicando para ver si lo jalo, ese es el fin.

14:22 hrs.
I.- Y ¿Qué resultados ha obtenido con esta estrategia?
Los resultados son los mismos a la hora del examen a ellos se les olvida una buena parte, pero pienso que no se pierde del todo algo le queda al estudiante, al menos algo le ha de quedar aunque en el examen responda algo incorrecto, tengo la esperanza de que algo les queda.
(EDB, 27-11-10, pp. 9-10).

La disonancia cognitiva a la que hace referencia el maestro, representa un conflicto con los conocimientos de los alumnos o sus creencias, la ayuda del docente es una acción mediada, debe de ir graduando los niveles de ayuda, la pregunta utilizada de forma que conflictue su sistema interno de pensamiento, contribuye a modificar su percepción, ya que es inadecuado dos cogniciones referentes a lo mismo simultáneamente, un ejemplo de esto se puede ver cuando el maestro aborda el tema de la división entre cero, para el caso cero entre cero.

M.- Y si alguien dice cero entre cero menos 10.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

$$\frac{0}{0} = -10, \quad (-10)(0) = 0$$

M.- ¿Por qué menos diez por cero?
AS.- Cero. (en coro)
M.- Y alguien también puede decir cero entre cero un millón.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

$$\frac{0}{0} = 1000000, \quad (1000000)(0) = 0$$

AO3.- Pues yo digo cuatro mil.
O.- (Risas)
M.- Es cero, ¿Cuántas soluciones hay?
AO3, AO5 y AO8.- Infinitas. (al mismo tiempo)
M.- Entonces no está determinada la solución, así cero entre cero es una indeterminación matemática. Hay una infinidad de soluciones, no está definida.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

$$\frac{0}{0} = \text{Indeterminación matemática}$$

(R6B, 16-10-09; p. 10).

El docente a través de las preguntas pretende que los estudiantes cambien su representación de la división entre cero, pues su conocimiento al respecto es que cero entre cero es cero, por medio de las preguntas se lleva a los alumnos a situación de conflicto, que llegan a resolver cuando responden "infinitas", esto de alguna manera les hace ver que su representación no es la correcta aunque no la lleguen a modificar por completo.

En la acción mediada del docente de matemáticas intervienen las representaciones semióticas debido a que los objetos matemáticos no son directamente observados o percibidos, en matemáticas juegan un papel importante los símbolos matemáticos, y los símbolos son fundamentales en la constitución de los procesos psicológicos superiores, ya lo menciona Radford (2000), el mismo signo matemático media dos procesos: el desarrollo del concepto matemático en el individuo y la interacción del individuo con el ya codificado y socialmente establecido mundo matemático citado en Blanco (2001). Así pues, en el ejemplo citado, el símbolo $\frac{0}{0}$ media el desarrollo del concepto "indeterminación matemática", a través de la interacción entre el cero socialmente establecido por los estudiantes y la indeterminación en el mundo matemático; y esta mediación del símbolo matemático se debe de tener en cuenta en la acción mediada del docente.

4.4. Estilos de enseñanza en Cálculo I

Los estilos de enseñanza están marcados por las actividades del docente, son todas las acciones que el maestro realiza en el quehacer diario del aula, tienen que ver con la práctica pedagógica, el docente desde antes de llegar al aula ya está realizando actividades propias de su labor, desde que planea la clase, al llegar al salón saluda a sus alumnos, pasa lista, organiza de la estructura del grupo, propone tareas, explica, aclara dudas, propicia la interacción de los contenidos con los alumnos, así como la de los propios alumnos, realiza exámenes, etc., los estilos de enseñanza marcan el enfoque que utiliza el docente, la metodología empleada en clases así como las técnicas de enseñanza.

> El docente, en la faz de diseño del currículo, toma numerosas decisiones (qué va a enseñar, cómo organizar los contenidos y las estrategias didácticas acordes con cada caso, los medios evaluativos, etc.). Sin embargo, en el momento en que el currículo entra en su fase de desarrollo (reflexión en la acción), se conjugan otros factores, productos interacción propia del proceso de aprendizaje y enseñanza, que obligan al docente a revisar (reflexión sobre la acción) lo programado en función de la dinámica propia que se entabla entre los estudiantes y el profesor y entre éstos y sus otros compañeros. (Ferreyra, 2007: p. 30).

En este sentido, cuando entran en interacción lo que se va enseñar, la organización de las actividades y el grupo, es necesario hacer ajustes, constantemente se debe reflexionar sobre la acción y estar atento a la dinámica del grupo para realizar las actividades docentes de la mejor manera.

En la unidad de análisis *Estilos de enseñanza en cálculo I*, se presenta la evolución de eventos para afrontar los temas de Cálculo, se exponen los enfoques de enseñanza utilizados en Cálculo, así como los métodos y las técnicas usadas para la enseñanza; la mediación del docente permite, a través de la interacción dialógica, la negociación de las diferentes representaciones de los estudiantes para pasar de lo intersubjetivo a lo intrasubjetivo; el análisis de los enfoques de enseñanza del Cálculo permite comprender el énfasis que se le da a las clases y los métodos y técnicas empleadas por el docente indican cómo el maestro organiza las actividades del grupo y las variaciones de las mismas de acuerdo al tema o al propósito de cada clase.

La categoría estilos de enseñanza en Cálculo se explica según los datos obtenidos en los registros de observación, por los siguientes patrones emergentes: dudas, organización de las actividades, recuerdos académicos, algorítmico, formalizado, mecanización, definiciones espontaneas, gráficamente, aproximaciones sucesivas, analogías, cuento y dictado; la construcción de esta categoría de análisis se muestra en el apartado de anexos.

Las actividades de enseñanza se encuentran implícitas en la visión que cada maestro asume de su quehacer, los propósitos son elementos determinantes para estructurar la enseñanza, como se ha mencionado, existen tres enfoques básicos de la enseñanza, Fenstermacher y Soltis (1998) los señalan como el del ejecutivo, el del terapeuta y el del liberador; en cuanto a la enseñanza del Cálculo, se han citado tres enfoques según el énfasis que se le dé a las clases, y estos pueden ser: algorítmico, formalizado o axiomático. Por otra parte para la enseñanza de los límites algunos autores entre ellos Glaros (2008), han identificado tres métodos para su enseñanza, los cuales son: definiciones espontaneas, aproximaciones sucesivas y gráficamente; durante la investigación se pudieron observar como técnicas de enseñanza: la analogía, el cuento y el dictado.

Así pues en este apartado llamado estilos de enseñanza en Cálculo I se discuten, las acciones puestas en juego por los docentes, el enfoque de enseñanza que utilizan, el método, así como las técnicas empleadas, dándole énfasis a la enseñanza del concepto límite en el bachillerato.

El maestro organiza las actividades del grupo, dicha organización varía de acuerdo al tema o al propósito de cada clase, como lo mencionan Coll y Colombina (1995), "En la organización grupal de las actividades de aprendizaje en el aula influye la interdependencia entre los alumnos que participan en las mismas respecto a la tarea a realizar o el objetivo a conseguir". (p. 339). De donde se ve que efectivamente en el proceso de enseñanza aprendizaje están íntimamente relacionados y en interacción mutua, los contenidos, las tareas y los alumnos.

En la entrevista del docente A, comenta las actividades que realiza en clase y la intensión de ésta en el proceso enseñanza aprendizaje, lo que delinea su estilo de enseñanza.

> I.- ¿Qué actividades realizas para trabajar en clases?
> Trabajar de todas las maneras porque si yo estoy explicando solamente, aburro y luego tenemos diferentes formas de aprender, visuales, auditivos y quinestésicos, al trabajar de maneras diferentes estoy propiciando que aprendan de las tres maneras, haciendo cuando están en equipos o mirando cuando explico o pasan al pintarron.
> I.- Respecto a las tareas extraclase, ¿qué tal cumplen con ellas los alumnos?
> Si cumplen, la gran mayoría pero como en todo hay algunos que por situaciones diversas no la traen.
> I.- ¿Cuál es la intensión al dejar tarea?
> Es reforzar lo que miramos, el tema que se miró en clase ya sea en exposición en el pintarron o en el trabajo que realizaron por equipos, eso me permite a mí al momento de revisar las tareas, si en verdad está comprendido el concepto o el problema, las limitantes es el que algunos no la hacen y se la piden prestada a sus compañeros.
> 9:25 hrs. I.- En ocasiones dejabas que revisaran el tema en el libro previamente a la clase, ¿Con qué intensión dejabas esto?

> Para no partir de la nada, no partir de cero, en el momento que ellos leen algo se queda o les surge a la mente, puede que no lo aprenda y le genere un conjunto de dudas y eso ya es aprendizaje, el hecho de que tengas dudas, ya aprendiste algo, aprendiste que no sabes aquello y puede surgir el interés al momento de estar abordando la clase en lugar de estar aburrido, y les estás hablando de que es o para que sirve ya hiciste una lectura previa y quedaron dudas estas interesado en despejar esa duda.
> I.- ¿Les gusta pasar al pizarrón?
> Cuando no están en clase, si (Risas), fuera de clase, usan el pizarrón para resolver problemas, me he fijado en otras generaciones y ha sido así, los muchachos usan el pintarron para resolver problemas, pero estando en clases es otra cosa.
> I.- Y van y te preguntan antes de resolver un ejercicio en el pizarrón
> Como que tienen temor a equivocarse y temor a que los señalen, necesitan estar bien seguros de que lo hicieron bien y entonces pasan al pizarrón, de los errores se aprende también dicen ellos pero que sean en la libreta no en el pizarrón.
> I.- Pero si pasan al pizarrón y se explican entre ellos
> A claro y ponen más atención cuando lo está haciendo uno de ellos y los demás le están diciendo: te falta el igual, el signo, el denominador no está bien, fíjate en la factorización, por eso como que quieren estar bien seguros antes de pasar, pero con todo eso aprenden mucho tanto el que pasa al pizarrón como los que lo están corrigiendo, es una forma de ayudarse entre iguales.
> (EAA, 1-12-09; pp. 16-17).

El docente varía la forma de dar clases para no ser monótonas y aburridas y atender los distintos estilos de aprendizaje, se dejan tareas extraclase para que se reafirmen los conocimientos de las clase, y también para que revisen algún tema por tratar y e esta manera no iniciar en cero, se propicia tanto el trabajo individual como por equipos y la participación de los alumnos en el pizarrón.

En los análisis a los registros de observación se encontró que las actividades del docente B giran alrededor de él mismo, él expone, utiliza el pizarrón, dirige toda actividad que se realiza en el aula. Las explicaciones tienden a ser formalizadas, se basan en definiciones, teoremas, axiomas, fórmulas y/o principios, con cierto énfasis en la mecanización de los procedimientos. En la entrevista el maestro comentó que sus clases son tradicionalistas, que él es que se mueve y que trata de provocar la disonante cognitiva por medio del interrogatorio.

> 14:20 hrs. I.- ¿Cómo desarrollas la clase?
> Mi clase es tradicionalista por eso uso mucho el pizarrón, yo soy el que me muevo pero siempre trato de provocar la disonante cognitiva a veces ellos se quejan de que no se animan a preguntar porque yo les respondo con otra pregunta.
> (EDB, 27-11-09; p. 9).

En las clases de la escuela B se puede comprobar la regla de los dos tercios que enuncia que en una clase las dos terceras partes del tiempo, el docente es quien tiene uso de la voz, ya sea explicando, atendiendo alguna duda, interrogando algún tema, por su parte el docente expresa que sus clases son tradicionalistas, lo que contribuye a trasmitir los contenidos curriculares y deja de lado la interacción del grupo.

4.4.1. Enfoque algorítmico en las aulas de Cálculo I de las prepas de la UAS

El enfoque de enseñanza depende del énfasis que los docentes le den a las clases de Cálculo, puede ser algorítmico, esto es, se prioriza la manipulación operativa; o puede ser formal, se refiere a las reglas y formas establecidas, o puede ser axiomático, en caso de tratar con axiomas y estructuras abstractas.

En este apartado se va a mostrar lo que se encontró en las aulas de Cálculo I en las preparatorias de la UAS, en la entrevista que se les realizó, los docentes expresan la forma en que visualizan su práctica, específicamente para el tema de límites; en la realidad utilizan los tres enfoques en distintos momentos de la clase y lo cierto es que en este nivel se hace énfasis en la parte procedimental. A continuación se presentan los fragmentos de transcripción de las entrevistas realizadas.

> I.- ¿Cuál es el enfoque de enseñanza que utilizas para Cálculo I?
> Cuando, veo límite, pues le doy énfasis a lo procedimental, pero en las derivadas cuando vemos máximos y mínimos resolvemos problemas prácticos de construcciones, optimización de materiales, de biología cuando vimos el crecimiento de una población de células o de una población de un habitad, ahí sí, pero no es muy variado, la gran mayoría de mis ejercicios y ejemplos son del área de la ingeniería, a lo mejor por mi formación, de rapidez de movimiento puras aplicaciones.
> (EAA, 1-12-09; p.6).

> I.- Para los límites ¿Qué enfoque de enseñanza utilizas?
> Yo pienso que ellos con que lograran manipular lo que corresponde a límite es suficiente porque es lo que ellos van a ocupar en la profesional, los profesores se darían muy bien servidos si ellos supieran eso, pero a la mayoría se les olvida otra vez.
> (EAB, 27-11-09; p.7).

De las respuestas de los decentes se puede señalar que el enfoque que se favorece en la enseñanza del Cálculo, especialmente para el tema de límites, se da prioridad a la parte operativa, esto es, a que los alumnos lo manipulen operativamente hablando, esto sitúa a los límites en un enfoque de enseñanza algorítmico. A continuación se exponen la enseñanza algorítmica, la formalizada y la mecanización.

4.4.1.1. Enseñanza algorítmica

La enseñanza algorítmica es la que pone énfasis en el dominio operativo de las reglas de cálculo (determinación de límites, fórmulas de derivación e integración) dejando de lado su comprensión y significado, este enfoque permite la manipulación operativa pero dificulta su aplicación en la resolución de problemas. El docente prioriza la parte algorítmica de la enseñanza de límites al resolver en el pizarrón:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x}{x}=\frac{-1}{1}=-1 \quad y \quad \lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x}{x}=\frac{5}{-1}=-5$$

(R8B, 26-10-09; p. 6).

Con el propósito de explicar que, si se cambia el valor de la variable, el valor del límite cambia; si se considera que $x\to 0$, se tiene una indeterminación matemática, la que se resuelve en este caso por factorización (factor común)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x-3)}{x}=\lim_{x\to 0}2x-3=2(0)-3=-3$$

(R8B, 26-10-09; p. 10).

Esto es conocimiento procedimental, se realizan ejercicios de límites, siguiendo un método, como el de sustitución directa y buscar la función equivalente siguiendo sus respetivos algoritmos.

M.- Haber.
O.- (Escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$$

M.- ¿Qué pasa con x+1 que multiplica y x+1 que divide?
AA6.- Se eliminan.
M.- ¿Qué significa eso de se elimina? Es uno, no confundan con cero.
Entonces la función equivalente queda.
(R9B, 28-10-09; p. 6).

En el registro se aprecia que se utiliza la factorización para resolver la indeterminación y encontrar el valor del límite, al responder los alumnos “se elimina”, lo hacen mecánicamente, ya que, no responden lo que esto significa y el maestro tiene que responderles; algo similar pasa en el siguiente registro:

> M.- ¿Cuánto queda dos equis cuadrada entre equis?
> AS.- Dos equis.
> O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
> $$\frac{2x^2}{x} = 2x$$
> M.- y, ¿Tres equis entre equis?
> AS.- Tres.
> O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
> $$\frac{3x}{x} = 3$$
> M.- ¿Para qué?, para quitar la división entre cero que nos complica.
> (R8B, 26-10-09; p. 9).

En los ejercicios de límites el docente pone énfasis en el algoritmo de los métodos algebraicos de resolución con la intención de que los alumnos mecanicen un procedimiento algorítmico. Un algoritmo según Ballester (2000) es “una regla exacta sobre la ejecución de cierto sistema de operaciones, en un determinado orden, de modo que resuelvan todos los problemas de un tipo dado”. Los procedimientos algorítmicos son los que utilizan una regla para resolver un mismo tipo de ejercicios. De aquí que se obtiene el concepto de sucesión de indicaciones con carácter algorítmico (SICA).

Una SICA para los límites algebraicos con indeterminación es:

$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$	Factorizar
$\lim_{x\to -1} \frac{(x - 3)(x + 1)}{x + 1}$	Simplificar
$\lim_{x\to -1} (x - 3)$	Sustituir
-1-3= -4	

La SICA se puede aplicar en otros temas, y de hecho en las observaciones a las clases se pudo constatar que incluso en las derivadas se enfatiza en la parte operativa cuando se procedió a:

> M.- Primero: Incrementando la variable en delta *x*.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> $y + \Delta x = f(x + \Delta x)$
> M.- Incrementamos las dos, porque incrementar una me lleva a incrementar la otra y como dijo AA6, el incremento es el valor final menos el inicial.
> Segundo: Restando de la función incrementada la función inicial.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> $$\begin{array}{l} y + \Delta x = f(x + \Delta x) \\ - \; y = -f(x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$
> M.- ¿De acuerdo?
> O.- (Silencio)
> M.- Tercero: comparando los incrementos.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
> M.- Si comparamos aquí (señala la expresión que acaba de escribir en el pizarrón), comparamos acá, ¿De acuerdo?
> O.- (Silencio)
> M.- Cuarto: aplicando el límite cuando delta equis tiende a cero.
> O.- (Escribe en el pizarrón)
> $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
> M.- Esto de aquí es lo mismo de acá (señala lo escrito debajo del concepto de derivada p. 8 r.24 R10B) ¿De acuerdo?
> O.- (Silencio)
> (R10B; 9-11-09; pp. 10-11).

En el registro se aprecian los pasos para encontrar la derivada de una función, de donde se puede afirmar que en las clases de Cálculo I de las preparatorias de la UAS se utiliza un enfoque algorítmico para su enseñanza; la SICA para este procedimiento sería la siguiente:

$y = f(x)$	Incrementar las variables
$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$	Restar la función
$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ $- y = - f(x)$ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	Comparar los incrementos
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	Aplicar límite cuando $\Delta x \to 0$
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	

Así, siempre que se resuelvan una serie de ejercicios utilizando una procedimientos sucesivos se pueden establecer la SICA para ellos, entonces, se promueve así un enfoque algorítmico.

4.4.1.2. Enseñanza formalizada

La enseñanza formalizada se refiere a que los procedimientos usados (límites, derivadas e integrales) y sus deducciones, deben ser juzgadas únicamente por si son conformes a lo señalado en las reglas, es decir, si los procedimientos se ajustan a la "forma" preestablecida por Cálculo Diferencial para enfocar determinado problema. La enseñanza a través de formas ya establecidas en matemáticas, es un recurso observado así:

M.- Pero no es una ecuación, vamos a acordarnos del teorema que vieron en primero, a ustedes les dijeron lo siguiente (Escribe en el pizarrón
$(x+y+z-w)^2 = x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz-2xw-2yw-2zw$).
O.- (El alumno regresa a su lugar).
M.- El cuadardo de cada término y luego el doble de los productos que se suceden, tomando primero la x, luego la y y así sucesivamente. Este es el teorema pero si no se acuerdan ¿Qué respuesta esperaba de ustedes? Que cualquier cuadrado es la multiplicación por si mismo, esto es" (escribe en el pizarrón.
$(6x^2+10x-5)^2 = (6x^2+10x-5)(6x^2+10x-5)$).
(R2B, 6-10-09; p. 10).

En este ejemplo se utiliza el teorema para elevar al cuadrado un polinomio, el cual es una regla ya establecida en algebra; en la siguiente clase el maestro esribe en el pizarrón de manera formal los tres casos de la división entre cero.

M.- Hay tres casos, primero cero entre número.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
La división entre cero
1.- $\frac{0}{x} = 0, \quad x \neq 0$
M.- Caso dos número entre cero.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
2.- $\frac{x}{0} \to \infty, \quad x \neq 0$ (R6B, 16-10-09; p. 4).
3.- $\frac{0}{0}$ (R6B, 16-10-09; p. 8).

Se muestra las formas establecidas en matemáticas para las indeterminaciones y los límites infinitos.

M.- El tercer caso es como decía AO5 cero entre cero y aquí ni es cero ni tiende al infinito, aquí también la calculadora te insulta.
AO2.- No existe.
M.- "El sentido común tiende a decir al resultado cero pues nada entre nada es nada, pero aquí tiene que ver lo de la división porque la solución de una división es única esto es $a \div b = c$, y nada más 'c', no hay otra y por la reversibilidad $a \div b = c$ es $bc = a$. ¿Captan?
O.- (Silencio). (El maestro escribe en el pizarrón)

3.- $\frac{0}{0}$

$\frac{a}{b} = c\,, \quad bc = a$

(R6B, 14-10-09; pp. 7-8).

En otra ocasión se enuncian o establecen las tres condiciones que se deben de cumplir para que una función sea continua, lo que se muestra en el siguiente fragmento de observación.

M.- Una función es continua si cumple con tres condiciones, ¿Las recuerdan?
AOb.- f de a existe.
M.- Y ¿la segunda?
O.- (Silencio)
M.- Esta en su libro página 42.
O.- (Buscan página en el libro)
AOb.- Si límite de x tiende a 'a' de f de x, existe. (Lee).
M.- Y ¿la tercera?
AOb.- Si f de a es igual al límite de x tiende a 'a' de f de x (Lee).
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
Una función es continua en x=a si

- $f(a)$ existe
- $\lim_{x \to a} f(x)$ está definido
- $f(a) = \lim_{x \to a}$

(R7A, 16-10-09; pp. 6-7).

Lo mismo sucede para ejemplificar la continuidad de una función, se siguen las tres condiciones de continuidad, como regla establecida, lo que formaliza la solución, por otra parte el ejemplo es sobre una función cuadrática, los estudiantes ya vieron funciones y graficación por lo que debían de saber que la función es continua sin corroborar las tres condiciones, es cierto que, se está manejando de manera formalizada pero con la intensión de mecanizar las condiciones de continuidad, y sin la reflexión de los estudiantes al comprobarlas, como se muestra en el siguiente registro.

M.- Y es discontinua si no cumple con alguna de estas condiciones, veamos por ejemplo.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
Ejemplo.- Diga si $f(x) = x^2 + 3$ es continua en x = -2.

1. $f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$
2. $\lim_{x \to -2} x^2 + 3 = (-2)^2 + 3 = 7$
3. $f(-2) = \lim_{x \to -2}$

M.- La función $f(x) = x^2 + 3$ es continua en x = -2.
M.- En la primera condición necesitamos ver que f de x este definida en -2, para lo que sustituimos el -2, entonces -2 al cuadrado con 2 más tres 7, por lo que la función está definida en -2. La segunda condición requiere que el límite exista por lo que, veamos si existe, para lo que sustituimos y obtenemos 7, por lo que se cumple la segunda condición y si nos damos cuenta también la tercera pues la primera y la segunda son iguales, de lo que se puede concluir que la función es continua.
(R7A, 16-10-09; pp. 7-8).

Se puede notar que, el maestro comprobó las tres condiciones de continuidad, el alumno mientras tanto sólo las conoció, para él no representan más que procedimiento a seguir, sin sentido y significado. La formalización en matemáticas contribuye a representar simbólicamente las conceptualizaciones y proporciona símbolos matemáticos propios, los que son utilizados como herramienta para que ayuden a mediar las representaciones de los alumnos.

4.4.1.3. Mecanización

La mecanización hace referencia a convertir en automáticos los actos o movimientos humanos, en matemáticas, mecanizar un procedimiento es realizarlo sin reflexionar, el enfoque algorítmico y la SICA contribuyen a que se mecanicen los procedimientos, pero ello implica la no compresión de lo que se realiza, únicamente se hacen automáticos y nada más se pueden resolver ejercicios de un mismo tipo.

La resolución de un límite algebraico similar para el de la SICA, quiere decir que se resuelven ejercicios del mismo tipo, aprendiendo la sucesión de pasos que lleva a la solución, se realizan varios ejercicios del mismos tipo y con el mismo grado de complejidad, la intensión es que los estudiantes puedan manejar los límites operativamente, sin sentido y significado matemáticos y ello lleva a la mecanización de los procedimientos, esto se aprecia cuando existen incertidumbres y se procede a la ejecución, como ésta:

O.- (El maestro escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

M.- ¿Qué pasa si sustituimos directo?
AOa.- Cero entre cero.
M.- Busquemos una expresión equivalente, ¿ $x^2 - 16$ es? (Señalando el pizarrón).
AOa.- Diferencia de cuadrados.
M.- ¿Cómo lo factorizamos?
O.- (Silencio)
M.- Lo acabamos de ver en el primer ejercicio. (admirándose).
AO.- Binomios conjugados. (levanta la voz emocionado)
O.- (El maestro lo resuelve en el pizarrón)

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4$$

M.- Entones, ¿da?
AO3.- Ocho.
O.- (El maestro escribe)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x \qquad)(x \qquad)}{x - 1}$$

M.- Luego dos números que multiplicados den el tercer término y sumados el segundo, -2 y -1, entonces queda.
O.- (Escribe en el pizarrón)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x - 2 = -1$$

(R6A, 15-10-09; pp.8-10).

Para los ejercicios abordados en el registro de observación se puede elaborar una SICA como la que se realizó en la sección anterior, se puede notar que son dos ejercicios del mismo tipo lo que indica la mecanización de los límites algebraicos. No nada más límites mecanizan los alumnos, debido al enfoque algorítmico se mecanizan derivadas también:

> M.- Estos son los símbolos para derivadas, ¿comprenden?
> AO1.- La neta NO.
> AA6.- Más o menos, pero menos que más.
> M.- Espero que cuando empecemos a mecanizar quede más claro.
> (R10B, 9-11-09; p. 12).

El docente les afirma a los alumnos que cuando mecanicen, va a quedar más claro, sin tomar en cuenta que la mecanización deja de lado el sentido y significado de lo que se realiza, por lo mismo, el alumno le respondía que no comprende.

También en los exámenes se nota el enfoque algorítmico de la enseñanza y el aprendizaje mecanizado:

> M.- Muchachos antes de que pase más tiempo vamos programando la evaluación de límites.
> O.- (Silencio).
> M.- ¿El examen el lunes?
> AO.- ¿Examen o actividad?
> M.- Examen.
> AO1.- Inga tu.
> M.- ¿Tienen dudas en límites?, va a venir lo que hemos visto o la duda es en productos notables y factorización.
> O.- (El maestro ve en su escritorio el libro, los alumnos en silencio).
> (R7A, 16-10-09; p. 8).

Los exámenes a que hace referencia el docente son los que aplicó como evaluación parcial de límites, la que consistió en dos problemas, el primero era resolver cinco limites algebraicos, el primero se resolvía por sustitución directa, los siguientes tres se factorizaban y el último era un límite infinito; en el segundo era determinar la continuidad de una función cúbica. Se muestra en los anexos un examen escaneado de uno de los alumnos; es importante notar que esta evaluación solo considera la parte operativa de los límites, esto es la mecanización de procedimientos algebraicos.

En la preparatoria B, para el examen de límites y continuidad de funciones el docente diseño dos tipos que consideraban lo siguiente: para el tipo A, los tres primeros ejercicios solicitaban explicar con las propias palabras los conceptos de límite de una variable y límite de una función, así como cuando una función es continua y cuando es discontinua, en el cuarto había que resolver seis límites algebraicos que se resolvían directamente o factorizando, en el examen tipo B, consistía en cuatro ejercicios similares a los del tipo A, pero en el uno se resolvían los nueve limites y el dos, tres y cuatro se solicitaban las mismas explicaciones de los conceptos de límite y continuidad; este examen contempla la parte conceptual del límite y en las respuesta de los alumnos a estas preguntas se puede observar que la conceptualización no se transformo respecto a la representación de sentido común que los estudiantes traían sobre límites y se le sigue dando mayor énfasis a la parte operativa de los límites, lo que conduce a un aprendizaje mecanizado carente de sentido y significado matemático. En los anexos se pueden observar exámenes contestados por los alumnos.

De los enfoques de enseñanza, como ya se mencionó, el enfoque algorítmico cae en el enfoque ejecutivo que caracteriza al docente por: ser ejecutor, Producir ciertos aprendizajes, preocuparse por utiliza las mejores habilidades y técnicas, para ellos son muy importantes los materiales curriculares, investiga sobre los efectos de la enseñanza y ve al docente como el gerente de los tiempos de clase, el enfoque algoritmizado es el que se encontró en las aulas de Cálculo I y concuerda con las características del docente ejecutivo señaladas por Festermacher y Soltis, ya que en las aulas observadas se encontró que los docentes son los que elijen los contenidos a tratar y como abordarlos mientras que los estudiantes deciden el cuándo y cómo de los aprendizajes.

4.4.2. Métodos de enseñanza para los límites

Existen varias sugerencias sobre los métodos para abordar los límites en los cursos de Cálculo del bachillerato como se ha mencionado pueden verse mediante: definiciones empíricas o espontaneas, analíticamente, gráficamente, por aproximaciones sucesivas y formalizados, el trabajar con las diferentes representaciones y familiarizarse con ellas, así como pasar de una a otra contribuye a la internalización del concepto límite, en este apartado se presentan los métodos encontrados en las aulas de Cálculo I observadas.

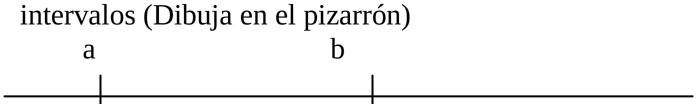
4.4.2.1. Definiciones espontáneas

Se consideran definiciones espontaneas aquellas que por sentido común o por la experiencia tienen los estudiantes, estas definiciones hacen que los alumnos tengan ciertas representaciones de los conceptos, y no necesariamente son las mismas, en las clases, pero sobre todo en las de matemáticas, se trabaja con símbolos propios, el docente tiene que indagar las representaciones que traen los estudiantes para mediar con ellas y la definición que se quiere abordar, para negociar los significados y lograr compartir la representación.

Wertsch (1984) sugiere que el adulto y el niño – el profesor y el alumno – que abordan conjuntamente la resolución de una tarea tienen cada uno por su parte, una representación de dicha tarea y de lo que implica su ejecución y resolución. Cada uno posee pues la definición intrasubjetiva de la situación. Para poder conseguir sus propósitos respecto de la tarea, para poder cooperar conjuntamente – aunque cada uno desde su responsabilidad y competencia –, es necesario que ambos protagonistas compartan y sepan además que comparten, total o parcialmente, la misma definición de la situación. A esta definición compartida, intersubjetiva, se accede a través de una negociación en la que cada participante renuncia en parte a su propia representación. (Coll y Solé, 1995: 327-328).

Para el caso del límite los docentes indagaron la representación que traían los alumnos sobre el concepto de límite, la idea era mediar entre esa representación de los alumnos y el significado matemático del límite, estas indagaciones se muestran en seguida:

O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
Idea intuitiva de límite
M.- ¿Qué entienden ustedes de manera intuitiva por límite?
AO10.- La terminación, final, el alcance máximo…
M.- ¿Han oído esa palabra?
AA6 y AO3.- Si. (A coro)
M.- ¿En dónde?
AA6.- Límite de tiempo.
AO1.- Límite de velocidad.
M.- ¿Lo han visto aplicado en otra parte?
AO9.- En una carrera la meta es un límite.
AO4.- En la frontera.
AO13.- El velocímetro.
AO8.- Los grados.
M.- Haber vamos a pensar en la idea de AO8.
AO8.- La temperatura.
M.- Las personas tienen un límite, por ejemplo, para los mayores es de 35º.
AO9.- En el estacionamiento he visto el límite de altura.
AO1.- En el puente negro también.
AO12.- El dice que hay límite inicial y límite final (Señalando a A010)
M.- Lo que ustedes están tratando de acordarse es de intervalos, cuando veían intervalos (Dibuja en el pizarrón)



M.- AO10 está tratando de rescatar de su memoria profunda, esa es la idea matemática con los intervalos abiertos (Escribe en el pizarrón)
$a < x < b$
M.- La variable no llega a tocar los extremos, eso no pasa con los intervalos cerrados (Escribe en el pizarrón)
$a \leq x \leq b$

M.- En los que la variable toca los extremos. Eso es matemáticas pero ¿En lo cotidiano?
(R4B, 14-10-09; pp.11-13).

Para la definición del límite el docente negocia, a través de preguntas, la definición empírica del límite con los estudiantes, se comentan ejemplos de dónde ellos ven o perciben límites, el docente continua con el analísis de ejemplo psicológico sobre la madre y el hijo para afirmar y precisar, con este concepto el profesor continuó su proceso de esta forma:

M.- ¿Qué pasa cuando en una casa la señora está ocupada y el niño llora, la señora le dice ¡esperate!, el niño insiste y llora, la señora ahora le dice al niño ¡que te calles!, y así que pasa cuando la señora…
M.- Llega un momento en que la señora pierde la paciencia.
AO13.- Y le pega.
M.- ¿Qué pasa con el fenómeno psicológico de la señora?
AO13.- Se le acaba la paciencia.
AA11.- La tolerancia llegó a su límite.
M.- ¿A dónde llego?, ¿Qué pasa cuando la pierde totalmente?; cuando la tolerancia/paciencia llegó a cero, conforme le empezó a pegar ¿Qué paso en el interior de la señora?
AO13.- Le entró el diablo. (Risas)
M.- Le descargó la energia negativa y ¿Qué le pasó al niño?
AO3.- Se murió.
M.- Ya que la señora se cansó y descargó su energia negativa, su tolerancia se recupera y empieza a negociar la situación que se dio en ese momento puede ser que deje al niño/a. Entonces sí algo llega al límite puede haber problemas tengan eso encuenta. Tenemos unos vecinos del norte y nos gusta mucho ir.
AA11.- Límite fronterizo.
M.- Una frontera es un límite matemático, luego lo vamos a ver. Si estamos en la frontera y nos recargamos ¿Qué pasa?
AA11.- Nada.
M.- Pero si entramos sin permiso puede haber problemas.
(R4B, 14-10-09; pp. 13-15).

Luego comentan un ejemplo físico sobre la bomba de gasolina:

M.- Haber que pasa cuando la aguja del carro llega a la línea roja.
AO4.- La reversa.
M.- ¿Qué pasa si llega a cero, hay problemas?
AO9.- Más si estas sobre el zapata.
(R4B, 14-10-09; p. 15).

En seguida de estos ejemplos el docente expresa “Eso es la idea intuitiva de límite”. Al parecer los alumnos no comprenden el sentido matemático y le expresan al maestro el fin de la clase de la siguiente manera:

> O.- (Los alumnos se paran)
> M.- Hey, ¿A dónde van?
> AO12.- Es el límite de clase.
> (R4B, 14-10-09: p. 16).

Del ejemplo se puede concluir que los alumnos no renuncian a su representación intrasubjetiva, con lo que no se logra llegar a la representación intersubjetiva de definición compartida que menciona Wertsch. Los conceptos empíricos son el resultado de la propia formación del lengauje.

> el concepto empírico es efectivamente una imagen del concepto científico, un concepto incompleto que puede ser efectivamente identificado como un seudo concepto; el concepto empírico es producto de la observación de los aspectos externos de los objetos que lo conforman sin llegar a profundizar en sus aspectos esenciales, es un concepto a priori con el cual se trabaja hasta que el aprendiz se logra apropiar de todos los rasgos esenciales que conforman el verdadero concepto o concepto científico. (Blanco, 2001: p. 8).

Así pues, el concepto empírico, es un concepto construido por imágenes concretas y por el primer contacto con la realidad, según la teoría sociocultural, el proceso de formación de conceptos se fundamenta en tres postulados: 1) Tránsito del concepto empírico al teórico, 2) El proceso de internalización y 3) La acción mediada. Estos tres postulados deben interactuar entre ellos para la formación de conceptos.

El otro docente para la definición empírica solicita a los estudiantes lo que entienden por límite en lenguaje coloquial, las respuestas de los estudiantes fueron:

> M.- Haber muchachos vamos a ver que entienden por límite, en lenguaje coloquial, que entienden.
> AA.- Frontera.
> AO.- Que llega a un punto determinado y que de ahí no pasa.
> Tal vez con la intensión de negociar los significados el docente solicita "a partir de la lectura, ¿Qué nos queda de límite?", a lo que los estudiantes responden: "que te vas acercando", "es como una aproximación", "si, te aproximas" y surge la siguiente interrogante:
> M.- ¿Qué tanto te puedes aproximar?
> AA.- Hasta el infinito.
> (R2A; 7-10-09; p. 5).

También para el tema de continuidad el docente solicita las definiciones espontaneas de los alumnos, con la finalidad de establecer la definición compartida con significado intersubjetivo.

> M.- Haber muchachos, ¿Qué entienden por continuidad?
> AOb.- f de x es continua en un punto dado si cumple unas condiciones, si no es discontinua". (Hojeando su libro).
> M.- ¿Pero en sentido común, ¿Qué entienden?
> AA.- Que tiene seguimiento, continuidad.
> AO3.- Seguimiento.
> AO.- Lo contrario a límite.
> (R7A, 16-10-09; pp. 3-4).

En lo citado arriba se aprecia el significado intrasubjetivo de los estudiantes acerca de la continuidad de funciones, además no se logra compartir significado intersubjetivamente, el docente termina diciendo lo que significan los objetos matemáticos tratados, interrumpiendo de esta manera la acción mediada en la interacción entre el concepto empírico y el teórico.

4.4.2.2. Aproximaciones sucesivas

El método de las aproximaciones sucesivas consiste en acercarse a la variable independiente, para lo que se elaboran tablas con los acercamientos por la derecha y por la izquierda, este método es muy utilizado en los límites, permite ir representando la aproximación e ir analizando el comportamiento de la función en las cercanías de la variable independiente, relacionar esta representación de límite por aproximaciones y el concepto empírico contribuye a que los estudiantes resinifiquen al límite.

El método de aproximaciones sucesivas se utiliza para establecer el concepto de límite, se ejemplifican algunas funciones por este método, antes de definir el límite de una función, en la aplicación de este método en clase, se utiliza una función lineal y se indaga que pasa con la función cuando la variable se aproxima al dos.

M.- (escribe en el pizarrón $f(x) = x + 4$) ¿Qué pasa cuando x se aproxima a 2? Vamos a tabular 1, 1.5, 1.8, ¿Qué otro valor le doy?.
AO.- 1.9.
M.- ¿Qué más?
AO.- 1.99.
M.- ¿Cómo me puedo aproximar más?
AO.- 1.999.
M.- ¿Por dónde nos estamos aproximando a dos?, por la derecha o por la izquierda?
AO.- Por la izquierda.
M.- ¿Y por la derecha como nos aproximamos?
AO1.- Con valores que pasen del dos.
O.- (El maestro escribe en el pizarrón dos tabla que llenan entre todos:
$f(x)= x+4$, $x=2$
(Se van llenando las siguientes tablas)

X	**Y**
1	5
1.5	5.5
1.8	5.8
1.9	5.9
1.99	5.99
1.999	5.999
1.9999	5.9999

$x \to 2$ $f(x) \to 6$

$f(x) = x+4$

X	Y
3	7
2.5	6.5
2.1	6.1
2.01	6.01
2.001	6.001
2.0001	6.0001
2.00001	6.00001

$x \rightarrow 2$ $f(x) \rightarrow 6$

f(x) = *x*+*4*

M.- ¿Cuándo se aproxima x a dos, a donde se aproxima f de x?
AO.- A seis.
M.- Y esto se escribe así.
O.- (Escribe en el pizarrón

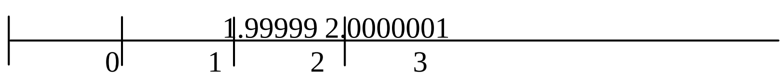
$\lim_{x \to 2} (x + 4) = 6$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

(R2A, 7-10-09; pp. 7-9).

En este ejemplo se ve como la función se aproxima al seis, tanto por la derecha como por la izquierda, cuando la variable se aproxima al dos, la representación de los límites por aproximaciones sucesivas contribuye a que se visualice la aproximación en matemáticas, después se analiza otra función algebraica por aproximaciones sucesivas.

Por su parte el docente B utiliza las aproximaciones sucesivas para los límites infinitos, después de tratar los tres casos de la división entre cero, el maestro utiliza la función $f(x) = \frac{1}{x}$ para ejemplificar por medio de aproximaciones sucesivas cuando "*x*" se acerca a cero por la izquierda y por la derecha, la función crece indefinidamente y se apoya así de las aproximaciones sucesivas para explicar las indeterminaciones matemáticas a que llevan estos casos, durante el diálogo se formalizan las propiedades de la división y se aborda gráficamente el caso particular de $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando *x* se acerca a cero. Se prosiguió con la explicación de ejemplos de funciones racionales del tipo $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ con aproximaciones sucesivas y gráficas, antes de que el docente dictará el concepto formal del límite (Cauchy-Weierstrass o $\varepsilon-\delta$), luego de que se dicta el concepto formal de límite de una variable se analiza mediante aproximaciones sucesivas el ejemplo $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ cuando *x* tiende a dos, como se muestra seguidamente:

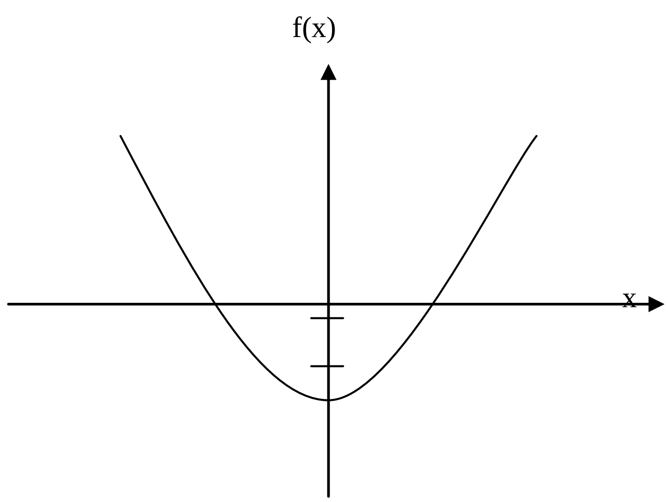
> M.- Si; variemos un poco, por ejemplo. (Escribe en el pizarrón)
> $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$
> M.- ¿Cuál sería el límite?
> AO10.- Dos.
> M.- La variable puede tomar 1.9999.
> AO12.- Si.
> M.- Se está aproximando por la izquierda y puede valer 2.0000001, ¿nos estamos aproximando por?
> AO3.- La derecha.
> O.- (El maestro escribe en el pizarrón)
>
> 
>
> (R7B, 19-10-09; p. 10).

De los ejemplos citados cabe destacar que en ambos grupos observados se encontró que utilizan el método de aproximaciones sucesivas para el tratamiento de los límites, nada más que en una escuela se analizaron solo ejemplos algebraicos y las aproximaciones tienen sentido en matemáticas para funciones racionales, para las que la gráfica es una asíntota, pues es en ellas en donde se aprecia gráficamente la aproximación de la variable sin que se tenga que ser el propio valor, lo que no sucede con las algebraicas, entonces queda un tanto confusa la aproximación. También se puede notar como el docente B va y viene entre las diferentes representaciones del límite incluso con la formalización matemática de aproximación, ésta acción mediada entre la definición empírica, la científica y las distintas representaciones de los límites permiten la interacción entre las concepciones y las representaciones, lo que favorece el proceso de internalización.

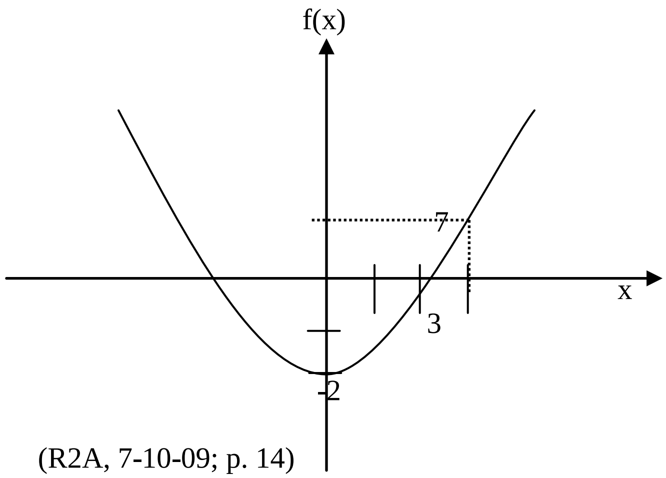
4.4.2.3. Gráficamente

El método gráfico es el que permite mediante una representación gráfica visualizar el problema, para el caso de las funciones, el que las represente gráficamente admite que se tenga la representación gráfica de la aproximación, en seguida se aprecian las representaciones graficas utilizadas en clases.

M.- Un bosquejo de la gráfica, ¿Cómo sería? (Dibuja en el pizarrón:

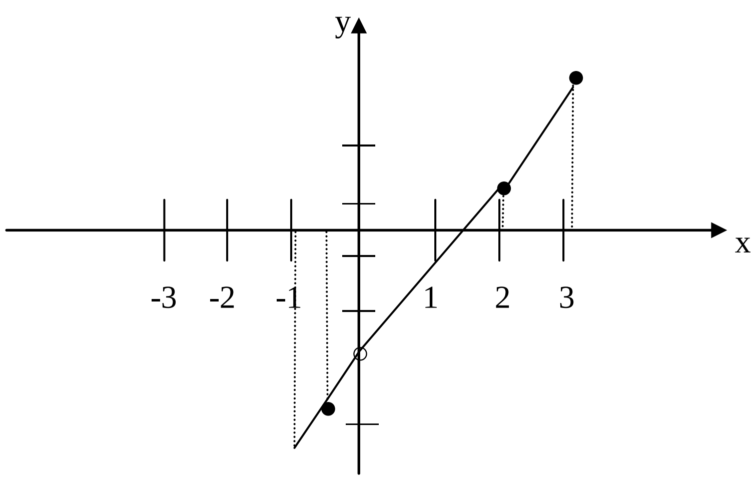


M.- ¿Cuánto para abajo?
AO1.- Dos.
M.- ¿Para arriba o para abajo?
AO1.- Para abajo (señala con las manos).
M.- ¿Así? (Dibujando la gráfica en el pizarrón). Cuando x se aproxima a 3, *f(x)* se aproxima a 7.

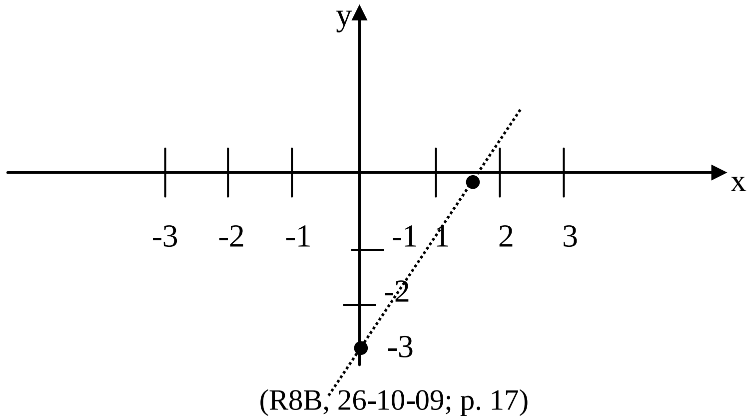


(R2A, 7-10-09; p. 14)

El fragmento de registro anterior muestra la representación gráfica de una función cuadrática, cuando la variable se aproxima a dos, la función se aproxima a siete, lo que está punteado en la última gráfica, como ya se mencionó, las funciones algebraicas son de las sencillas y las representaciones gráficas empiezan a tener sentido para las funciones escalonada, racionales o las que tiene algún hueco, estas últimas corresponden a racionales con alguna indeterminación que se factoriza para resolver el límite en el siguiente ejemplo, el maestro grafica la función en el pizarrón y la de su equivalente una vez realizada la factorización.



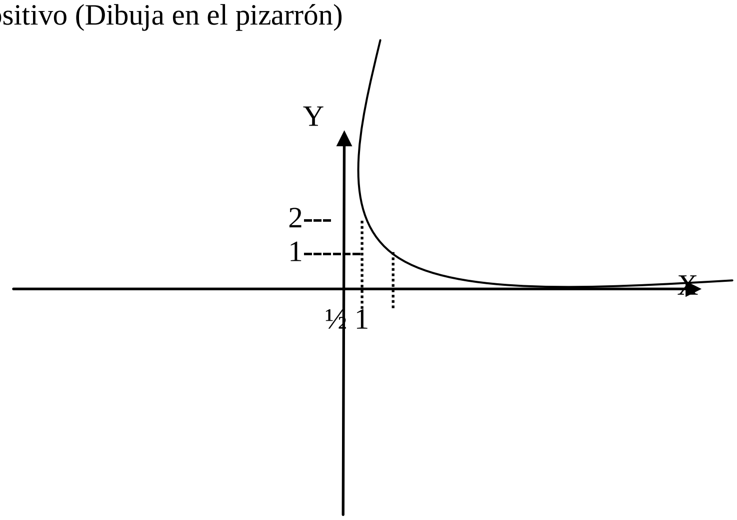
Y también grafica la función equivalente f(x) = 2x – 3



(R8B, 26-10-09; p. 17)

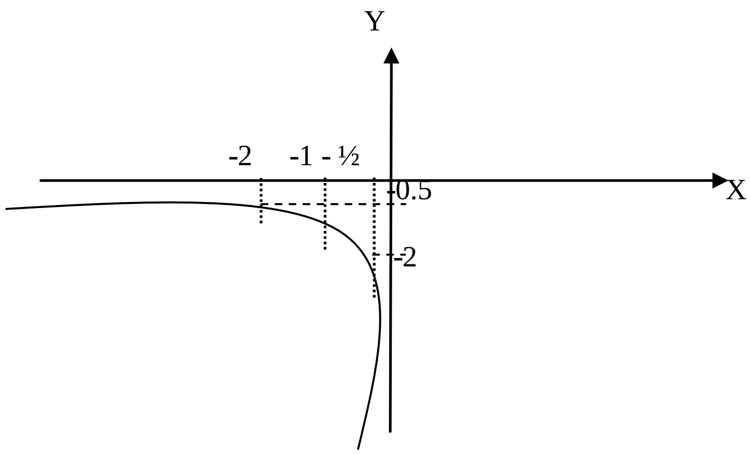
En los ejemplos citados se puede observar que para representar gráfiamente la aproximación es necesario haber resuleto el límite, ya sea por aproximaiones sucesivas o analíticamente, esto permite que esten interactiuando las distintas representaciones de los límites y ello favorece la transformación en la representación, a continuación se muestra gráficamente el ejemplo discutido en las aproximaciones sucesivas para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, en el fragmento de registro de observación, veáse como se procedió:

M.- Eso es por el lado derecho (ve un momento la gráfica) por el lado positivo (Dibuja en el pizarrón)



M.- ¿Qué pasaría si nos acercamos por la izquierda?, ¿Qué pasaría si fuera 3?

AA7.- 0.3.
M.- ¿Qué pasaría si la variable es 2?
AO8.- Cero punto cinco.
M.- ¿Y si fuera un medio?
AO9.- Dos.
M.- ¿Qué pasa crece o decrece?
AO5.- Decrece.
M.- Así. (Dibuja en el pizarrón)



(R7B, 19-10-09; pp. 5-6).

Estas gráficas asintóticas muestran claramente que cuando *x* se aproxima a cero la función crece o decrece infinitamente, según se aproxime por la derecha o por la izquierda, y revelan la aproximación sin que la variable sea cero.

4.4.3. Técnicas de enseñanza para los límites

Las técnicas de enseñanza son las múltiples formas de actuar de los docentes para responder a las necesidades pedagógicas y deben ser acordes a los recursos con los que se cuente, en las observaciones realizadas durante la investigación destacaron tres técnicas de enseñanza: la analogía, el cuento y el dictado.

4.4.3.1. La analogía en las clases de Cálculo

Uno de los principios heurísticos generales en la analogía y consiste en un recurso de búsqueda de la idea principal de solución de un ejercicio sobre la base de resolver primero los casos especiales o de utilizar ejercicios conocidos para establecer semejanzas y diferencias y poder transferir la vía de solución a otros ejercicios. En las clases de Cálculo se observó este principio para la multiplicación y división de funciones, para las que se utilizaron las operaciones aritméticas para la transferencia en la solución.

En los siguientes fragmentos de registro de observación se puede percatar que para las operaciones con funciones, en este caso para la multiplicación y división de funciones se utiliza la analogía con respeto a la operación aritmética; en el caso de la multiplicación el docente lo abordó de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 874 \\ \underline{\times\ 36} \\ 5244 \\ \underline{2622} \end{array}$$

(R1B, 30-09-09; p.8)

Y se iba resolviendo simultáneamente:

$$\begin{array}{l} 3x^2+5x+4 \\ \underline{2x-4} \end{array}$$

O.- (El maestro esribe en el pizarrón)

$$\begin{array}{l} 3x^2+5x+4 \\ \underline{2x-4} \\ 6x^3+10x^2+8x \\ 12x^2+20x-16 \end{array}$$

AO.- Ya.

AO.- Maestro esta mal acomodado lo del pizarrón, usted dijo de allá para acá
O.- (señala con la mano lo del pizarrón).
M.- Haber, ¿Cuál es el error ahí?.
AO.- Se tiene que recorrrer para acá
O.- (mueve su mano de izquierda a derecha)
O.- (El maestro borra la expresión y escribe:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x + 4 \\ 2x - 4 \\ \hline 6x^3 + 10x^2 + 8x \\ 12x^2 + 20x - 16 \\ \hline \end{array}$$

M.- ¿Luego?.
AO.- Sumamos desde el seis x cúbica.
(R1B, 30-09-09; pp. 8-10).

El ejemplo utilizado en la división fue:

$$\begin{array}{r} 120 \\ 36\,\sqrt{4328} \\ -36 \\ \hline 72 \\ -72 \\ \hline 08 \end{array}$$

(R1B, 30-09-09; p. 17).

Al mismo tiempo se dividian las siguientes funciones:

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x-3\,\sqrt{x^2 - 2x - 3} \\ -x^2 + 3x \\ \hline x - 3 \\ -x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

(R1B, 30-09-09; p.18)

El maestro utilizó la analogía de la operación aritmética para hacer ver a los alumnos que en matemáticas "todo conoimiento nuevo debe parecerse al anterior" y las que vías de solución de unos problemas permiten ser transferirdas para solucionar otros más complejos.

4.4.3.2. El cuento en las aulas de Cálculo I

El cuento es una narración de hechos imaginarios que se presenta en múltiples versiones, en algunas de las clases de Cálculo observadas se encontró que el docente narra a sus alumnos diferentes historias, unas relacionadas con la materia, otras con los valores y actitudes de los seres humanos, como ejemplo se cita una historia sobre el pensamiento lateral, en el siguiente fragmento de observación.

> AO.- Es fácil por este (señala la multiplicación).
> M.- Por eso se tienen varios métodos y ustedes usan el que más les guste, eso es pensamiento lateral y es importante y los diferentes métodos lo activan. Yo no sé si los animales lo tienen pero el otro día en casa pasó algo chistoso teníamos carne asada tapada con papel aluminio, yo no sé porque pero la carne asada trae mucha mosca, y una mosca buscó un hueco y por ahí se intentaba meter, como si buscara una alternativa, como si fuera inteligente, ninguna otra lo hacía, así que no se les olvide el pensamiento lateral cuando estén haciendo la tarea, sino me sale por aquí le busco por otra parte.
> (R2B, 6-10-09; p. 11).

En la entrevista realizada al docente comenta que utiliza el cuento en clases pues debe contribuir a la formación de los estudiantes en todos los sentidos y que con las historias los hace reflexionar sobre distintos temas de la vida cotidiana.

> I.- ¿Cuál es la intensión de las historias utilizadas en clases?
> Si, una intensión de que mi clase contribuya en algo a su formación porque ellos a la mejor no van a ser matemáticos o van a salir con cero en matemáticas pero de las experiencias que nosotros tenemos de la vida y podemos platicar con ellos, y si a ellos algo les queda también es ganancia, les checo la ortografía eso desde un principio les dijo la ortografía se las voy

> a checar, les doy ocho aspectos a evaluar primero conocimiento, participación en clase, actitudes en la materia entre otras, ortografía, ahí pero esta clase no es de español y que tiene pero tienen que escribir bien su nombre porque algunos no escriben bien ni su nombre porque no lo quieren hacer entonces les dijo si termina de escribir tu nombre ya es ganancia algo les quedo del curso aunque de matemáticas no les quede nada, entonces otro es que la matemática no les parece atractiva, es tan aburrida, tan tediosa, tan sombría valla, normalmente tengo mucho tiempo trabajando en cursos de matemáticas, 30 años cumplí ahora en noviembre y este nos perciben como que somos profesores de otro mundo, aburridos, muy exigentes , muy rígidos y yo trato de que se den cuenta que no, yo les cuento chistes, hago bromas, este me dejo que me hagan bromas a veces les pido que el que se sepa el mejor chiste lo cuente, si quieren pasar a cantar que pase a cantar, no hay problema, el que pase a cantar una canción le voy a poner un punto a la hora del examen, de alguna manera eso los va formando a ellos al menos un chico que se anima a pasar a cantar o a decir una declamación o a contar un chiste pues al menos está venciendo la timidez.
> (EDB, 27-11-09; pp.10-11).

Estos cuentos o historias juegan un papel importante en el ambiente del aula, si bien es cierto es una técnica de enseñanza del docente que podría pensarse que no tiene nada que ver con el aprendizaje del Cálculo, pero genera un ambiente favorable en el aula, la enmarca en un contexto y todo ello influye en el proceso de enseñanza aprendizaje.

4.4.3.3. El dictado de conceptos de Cálculo I

El dictado por definición es un texto hablado para que otra u otras personas lo copien por escrito, es una técnica de enseñanza utilizada mayoritariamente en el área de español, la verdad encontrar clases de matemáticas dictadas fue sorprendente y más aun cuando se dicta el concepto formal de límite, eso tenía que analizarse muy de cerca pues los alumnos estaban copiando por escrito la representación formal del límite, una vez que ya habían transitado por representaciones de límite analíticas, graficas y de aproximaciones sucesivas.

Los momentos en los que se observó el dictado fueron los siguientes: las condiciones para la existencia de la inversa de una función, el concepto formal del límite, las condiciones matemáticas para la existencia del límite considerando los límites laterales y el concepto de derivada.

En los siguientes fragmentos de registro de observación se muestran las condiciones para que una función tenga inversa.

> M.- Escriben así.
> (Dicta)
> M.- Sea f de x una función de los números reales en los números reales.
> (Escribe en el pizarrón)
> Sea $f(x): \Re \to \Re$
> M.- Coma, ¿ya copiaron?
> AS.- Si.
> M.- Escriban: (dicta) coma, *f* de *x* posee una función inversa y escriben así: f a la menos uno de *x* (escribe en el pizarrón $f^{-1}(x)$) si y sólo si (el maestro les dice: es una doble condicional, ustedes llevaron en primer año lógica, ¿se acuerdan?)
> AO1.- Si.
> M.- (Continua con dictado) Sólo cuando la función es biyectiva tiene inversa, punto y aparte. Escriban: para encontrar la función inversa f a la menos uno de *x* de *f* de *x* (escribe en el pizarrón: $f^{-1}(x)$ de $f(x)$) coma, se procede de la siguiente manera dos puntos y aparte. Número uno, escriben: dada la función 'y' igual a *f* de *x* se despeja *x* en función de y quedando la expresión x igual a f de y. número dos: en la expresión encontrada se cambia 'y' por '*x*'. Número tres: la función encontrada en el paso anterior es la función inversa de *f* de *x*. punto y aparte ejemplos.
> O.- (En el pizarrón escribe:
> Función inversa de una función
> Sea $f(x): \Re \to \Re$
> $f^{-1}(x)$
> $f^{-1}(x)$ de $f(x)$
> 1. $y = f(x)$
> $x = f(y)$
> 2. (y) por (x)
> 3.
> (R3B, 13-10-09; pp.5- 6).

El siguiente tema que se dictó en clase fue el concepto formal del límite, y se realizó como se muestra en los fragmentos de registro de observación siguientes:

> M.- Ahora vamos a ver la definición de límite de una variable. Escriban, esperen dejen construir la definición, bueno, escriban: (dicta) Un número '*k*' es el límite de una variable independiente '*x*', si en un proceso de variación de '*x*', (coma) ésta (con acento en la e porque es pronombre) ¿Quién ésta? '*x*', se aproxima infinitamente al número '*k*', de tal manera que, a partir de cierto momento el valor absoluto de la diferencia '*x* menos *k*' es infinitamente pequeña y es menor que un número positivo infinitamente pequeño el cual se representa como (y escriben así, escribe en el pizarrón) ε una especie de E manuscrita y es Épsilon, es como la abuelita de la E.
> M.- Esta E los matemáticos la llaman Épsilon y representa cantidades infinitamente Pequeñas. Si el valor absoluto de 'x menos k' es menor que Épsilon, entonces '*k*' es el límite de '*x*' y se dice '*x* tiende a *k*'. (Escribe en el pizarrón).
> $x \rightarrow k$
> M.- ¿Qué representa la flechita?
> AO12.- Tiende.
> M.- ¿Comprenden?. (Los alumnos en silencio)
> M.- Este es el concepto matemático, tienen que reflexionar pues este es el límite matemático de una variable, hay límites que no son matemáticos. ¿Comprenden?
> O.- (Silencio de los estudiantes).
> (R7B, 19-10-10; pp. 8-9).

En este punto se hizo imprescindible conseguir libretas de los alumnos para analizar la representación que le estaban dando al límite y como simbolizaban las matemáticas, se consiguieron algunas, el escáner de una de ellas se encuentra en el apartado de anexos. Los alumnos escribieron tal como se les dictó y en las libretas se pudo constatar que los símbolos matemáticos no tienen significado para ellos, lo que dificulta el proceso de internalización de los objetos matemáticos, pues estos son sistemas de representaciones que designan significado, por lo que, mediante las representaciones semióticas es que se puede actuar sobre los objetos matemáticos, debido a esto es usual que el estudiante no sólo confunda el objeto con su representación sino que la representación muchas veces sustituye al objeto y el estudiante trabaja solamente a nivel de símbolo y es la causa de respuestas aparentemente absurdas en la solución de problemas.

En las libretas los estudiantes escribieron textualmente: “Un numero k es limite de una variable independiente (x) si en un proceso de variación de variación de x esta se aproxima infinitamente al número k. de tal manera que a partir de cierto momento en valor absoluto de la diferencia k-x es infinitamente pequeño y es menor que un numero positivo infinitamente pequeño el cual se representa como (ε) épsilon. Si $|k - x| < \varepsilon$ entonces (k) es el límite de (x) y se dice que x→k.

La variable independiente puede aproximarse a su límite k. Por la izquierda y por la derecha”. Aquí se puede corroborar que para los estudiantes los símbolos matemáticos no tienen significado, esto mismo, ellos lo expresan en la entrevista que se les realizo, a continuación se muestra un fragmento de una de ellas.

> I.- ¿entonces, Épsilon qué significa?
> AO12.- Pues es de la definición, pero nada más ahí lo vimos, no lo usamos ni nada, los límites los resolvimos sin la definición.

Con todo lo aquí tratado se puede concluir que en las aulas de Cálculo I falta trabajar en la mediación entre los conocimientos de sentido común y el conocimiento científico, para que se internalicen conceptos matemáticos como el del límite.

4.5. Aspectos generales en la enseñanza del límite en el bachillerato

La clase de Cálculo I en el bachillerato permite a los estudiantes de ese nivel aplicar las matemáticas que han aprendido durante su vida escolar, al mismo tiempo inician el estudio de temas post algebraicos, es en este curso donde los alumnos analizan una función más allá de las gráficas, con los conocimientos de Calculo I es, que logran identificar para qué valores la función está definida, si es creciente o decreciente, los intervalos en los que es positiva, si tiene límite, si es continua, si es derivable y además resuelven problemas de optimización; derivado de esto, se reconoce que el proceso de enseñanza aprendizaje de esta materia no es sencillo, intervienen en él varios factores, como el programa de estudios, los libros de textos, los conocimientos previos de los alumnos, los enfoques de enseñanza, entre otros.

En el presente trabajo se analizó el proceso de enseñanza aprendizaje para el concepto de límite en Cálculo I, aunque el propósito no es generalizar los resultados, es importante comentar algunos de los aspectos generales del proceso enseñanza aprendizaje derivados de la investigación.

En cálculo I los alumnos deben transitar del concepto empírico del límite, al concepto teórico, esto no se logra del todo en el bachillerato, sin embargo existe la preocupación pedagógica en los docentes por prevenir el dominio operativo de los límites en el proceso de enseñanza aprendizaje, esto, con la finalidad de que los alumnos se inserten fácilmente en el nivel superior, y es ahí, ya con el dominio operativo que los alumnos transitan al concepto científico de límite, esta cultura de prever el dominio operativo de los límites es notoria desde el programa de estudios que marca en los objetivos la noción intuitiva del límite y enfatiza el dominio operativo para su aplicación en la derivada e integral, de manera similar sucede con los libros de texto de cálculo para bachillerato, ya que la mayoría de ellos prioriza el dominio operativo de los límites, enfatizando de esta manera lo algorítmico.

Por otra parte los libros de texto de cálculo para el bachillerato lleva a los docentes a buscar alternativas para el desarrollo de la clase, como la elaboración de notas preparadas por ellos mismos y considerando distintos autores, o también antologías construidas por la academia, esto se debe a que aún cuando los textos son una herramienta para el desarrollo de la clase, la mayoría de ellos son de autores estadounidenses, alemanes o rusos y las traducciones que se encuentran están permeadas de una diversidad cultural que afecta el sentido y significado de los conceptos.

En el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite la definición empírica de los estudiantes representa un obstáculo epistemológico, es una imagen del concepto científico que se encuentra limitada en cuanto a la abstracción, en las clases de cálculo se negocia a través de la mediación del docente la representación cotidiana del alumno sobre el límite, para ello se analizan los límites por aproximaciones sucesivas, por gráficas y por procedimientos analíticos mayoritariamente algebraicos, en el bachillerato, el concepto se deja a manera de noción intuitiva debido a que se da prioridad a la parte operativa de los límites lo que trunca la mediación de los significados del concepto científico.

CONCLUSIONES

En lo referente al enfoque de enseñanza, el programa 2006 del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS), propone: El **modelo pedagógico**, considerado como el más pertinente y congruente para el logro de los propósitos curriculares, se fundamenta epistemológicamente en el paradigma constructivista, y psicopedagógicamente está **centrado en el aprendizaje del estudiante**, así como en su desarrollo personal y social.

Dentro de los propósitos y contenidos cognitivos, conceptuales y procedimentales, la intervención didáctica del docente de este programa, se enfoca inicialmente a la **problematización del contenido de aprendizaje,** con el objetivo de generar, facilitar, gestionar y evaluar procesos de aprendizaje que tengan que ver con la resolución de ejercicios y con la formulación y resolución de problemas matemáticos escolares contextualizados

El modelo pedagógico y la intervención didáctica, propuestas en el programa 2006 implican que, los componentes y elementos didácticos, que deben estar presentes en las estrategias de enseñanza, parten primeramente de la concepción de que la matemática no es un cuerpo de conocimiento estático, sino una disciplina dinámica en proceso de construcción en donde es posible que el estudiante desarrolle idas novedosas y reformule o diseñe, y resuelva, sus propios problemas. Por ende, los problemas que se discutan durante la clase deben ser considerados como puntos de partida para una exploración más global de las ideas matemáticas.

En segundo término, la intervención docente que se propone se fundamenta en la observación (corroborada por la investigación educativa) de que si los estudiantes tienen la oportunidad de observar y practicar las actividades que muestran los miembros de una "**cultura matemática"**, entonces entrarán en contacto con las diversas formas de utilizar el lenguaje, y podrán desarrollar pensamientos y acciones de los expertos de la disciplina y comenzarán gradualmente a actuar de acuerdo con sus normas y estrategias. Esto no quiere decir que se espera que todos los estudiantes lleguen a ser matemáticos, sino que se parte de la idea de que para aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollarse dentro de una situación escolar que refleje de manera auténtica la actividad de los matemáticos, a este enfoque de enseñanza lo llaman Festermancher-Soltis el enfoque del liberador.

Como se señala anteriormente, de la investigación educativa se sabe que si se comparan las actividades que realizan los estudiantes y los maestros durante la fase de aprender o resolver algún problema nuevo, se observa que existe gran similitud entre las actividades que emprenden ambos. Esta afinidad entre las actividades de los expertos y las que realiza la gente común al enfrentarse a algún problema, respalda la importancia de desarrollar un "***microcosmos matemático en el salón de clase"***. Así, el aprendizaje de las matemáticas podrá generarse como una práctica que se desarrolla dentro de una comunidad en constante interacción, en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de participar como miembros activos de esa comunidad.

De todo lo anterior, es importante señalar que en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo I (Cálculo Diferencial), con un enfoque problematizador, es recomendable que el estudiante, como el profesor, conozca y aplique las siguientes estrategias heurísticas: ***representar de***

diversas formas la información de los conceptos y problemas, que reformule el problema o recurra a problemas similares para avanzar propuestas de solución; que use tablas o diagramas, o que descomponga el problema en casos más simples. Estas estrategias no son solamente importantes en la fase de entendimiento del problema, sino también en el diseño de un plan de ataque y su implantación. (http://dgep.uasnet.mx/programas2006/semestreV.html).

Lo mencionado anteriormente se refiere al programa de las preparatorias de la UAS, cabe señalar, que en comparación con otros bachilleratos, la situación no es desigual, por lo general los programas de estudio para Cálculo I o Cálculo Diferencial no difieren significativamente unos de otros, por ejemplo la Dirección General del Bachillerato (DGB), organiza el curso en tres unidades: 1) Límites, 2) La razón de cambio y la derivada y 3) Valores máximos y mínimos relativos y sus aplicaciones; mientras que en las preparatorias de la UAS, el curso se organiza en cuatro unidades: 1) Funciones: variación, límites y continuidad; 2) Concepto de derivada; 3) Fórmulas y técnicas de derivación y 4) aplicaciones de la derivada; lo anterior pone de manifiesto que el concepto límite es uno de los primeros temas de la asignatura de Cálculo I, y en este sentido interesa conocer ¿Qué factores influyen en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite de la preparatoria?, ¿Cuáles son las dificultades del proceso enseñanza aprendizaje del concepto límite en el curso de cálculo I de la preparatoria? y ¿Cuáles de estas dificultades son las que impiden la internalización de dicho concepto?.

Analizar el proceso de enseñanza aprendizaje en el área determinada requiere tomar en cuenta los contenidos curriculares, la instrumentación didáctica, entre otros, como factores que influyen en el mismo, en el presente trabajo se analizó dicho proceso para el concepto límite en bachillerato, para ello se utilizaron herramientas etnográficas, ya que mediante la observación se registro el contexto, el ambiente áulico y la interacción de los participantes, se realizaron también entrevistas con la finalidad de profundizar en los hechos encontrados, se revisaron documentos y se triangularon los datos encontrados, para identificar y explicar las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje que obstaculizan la internalización del concepto límite en bachillerato.

Desde un principio se planteo el problema de investigación para el proceso de enseñanza aprendizaje en el curso de Cálculo de bachillerato, debido a que desde la experiencia docente y de algunos alumnos, es un curso difícil y al mismo tiempo imprescindible en el proceso de inserción del estudiante en niveles superiores, todo esto despertó el interés por explicar lo que pasa en el proceso de enseñanza aprendizaje de dicho curso y durante la investigación se fue delimitando hasta definir que se explicaría lo que pasa en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto límite, tomando en cuenta los resultados, una de las debilidades de esta investigación es que en ciertos momentos de la interpretación, ésta se sesga en la enseñanza, no se deja de lado el aprendizaje y se interpreta heurísticamente lo que sucede en las aulas de Cálculo, sin embargo, para dar mayor razón del proceso de aprendizaje y cuidando el rigor metodológico, cabe señalar que no se diseñó ningún experimento, sino que se explica lo que pasa en el proceso de enseñanza aprendizaje de los límites en bachillerato de acuerdo a lo encontrado en los salones de clases, así pues, un área de oportunidad para este tipo de investigaciones es el diseño de algún experimento que permita dar cuenta de la evolución del concepto límite.

En las clases de Cálculo I de las preparatorias de la UAS involucradas en la investigación se observó que en el proceso de enseñanza aprendizaje del límite influyen para la internalización del mismo: el programa de estudios, que marca el tratamiento en forma intuitiva del concepto, lo que prioriza la parte procedimental y no conceptual del límite; por otra parte los libros de texto, ya que la gran mayoría de los textos de cálculo para el bachillerato enfatizan igualmente la parte operativa y procedimental de los límites; así, de la misma manera, la definición intuitiva (espontanea o empírica) que los estudiantes tienen del concepto, ya que lleva a un obstáculo epistemológico; y no se puede dejar de lado el enfoque de enseñanza, debido a que las actividades de enseñanza que realiza el docente, favorecen o dificultan el aprendizaje; todo esto se lleva a cabo en un contexto determinado y se refleja en la interacción que se genera en el interior del aula.

En lo referente al programa de estudios se encontró que en él se considera sólo la noción intuitiva del límite para el bachillerato, lo que trunca la internalización del concepto, el plan 2006, Cálculo I para ciencias químico biológicas y ciencias físico matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, en la página 13 expresa que la metodología de enseñanza debe equilibrar los enfoques conceptual, intuitivo, operacional-algebraico y funcional para procurar llegar a la formalización, más no partir de ella y que los conceptos básicos del cálculo diferencial sean abordados inicialmente desde una perspectiva tanto gráfica como numérica, promoviendo y utilizando donde sea posible la intuición y la visualización, para evitar caer en formalismos carentes de experiencia matemática previa. El plan propone para los límites, la noción intuitiva, es básicamente un concepto auxiliar para introducir la derivación y, por tanto, lo fundamental es preparar a los alumnos para comprender el concepto de derivada de una función y deducir las reglas de derivación y en cuanto al cálculo de límites, lo fundamental es calcular mediante la evaluación los límites de funciones elementales; en el plan 2006, no se propone llegar a la formalización del límite y se le da prioridad al aprendizaje procedimental para que sea utilizado como herramienta en las derivadas; de este modo se deja de lado el sentido y significado del concepto.

Aun cuando el plan 2006 plantea la noción intuitiva del límite, en los salones de clases se abordan distintas representaciones de los límites y ello contribuye a la internalización del concepto, en las aulas se encontró que se trasmite en forma intuitiva, cabe señalar que en una de las aulas se llegó a formalizar el concepto de límite, y esta formalización fue únicamente verbal y escrita, en entrevista realizada a los estudiantes se constató que no tuvo sentido ni significado para ellos y fue nada más información que deberían tener, pero que no ayudaba para nada en los límites, los podían resolver sin ella.

Esto no es una dificultad exclusiva del plan 2006 de las prepas de la UAS, también el programa 2006 de la DGB, señala para la unidad de límites, la noción intuitiva del límite y considera distintas representaciones de los mismos sin llegar a la formalización, el objetivo primordial es aplicarlos en conocimientos posteriores, lo que prioriza lo procedimental de los mismos y deja de lado el sentido y significado del concepto.

Una dificultad más en el proceso de enseñanza aprendizaje es la definición empírica de los estudiantes sobre el límite porque representa un obstáculo epistemológico, en el sentido de que este concepto cotidiano se encuentra limitado en cuanto a la abstracción, luego es una imagen del concepto científico, un concepto incompleto, que puede transformarse mediante la negociación de las representaciones del alumno (cotidianas) y la del maestro (científica); en los escenarios observados se encontró que la transformación no se da del todo en los límites, los alumnos comentan lo que entienden por límite, ven la representación por aproximaciones sucesivas a través de tablas, gráficamente observan la aproximación y analíticamente aplican algún procedimiento para encontrar el límite, es más, en algunos casos con la misma función van de una representación a la otra, lo que indudablemente contribuye en la transformación para llegar al concepto científico, sin embargo, al priorizar la parte operativa de los límites no se transita del concepto empírico al teórico.

Una vez que en límites se llega a la representación analítica se le da prioridad a los procedimientos para determinarlos, los alumnos mecanizan lo que se tiene que hacer para encontrar el límite de una función y puedan aplicarlos en los temas siguientes; por ello se dedica bastante tiempo de clases a la resolución de límites analíticamente mientras que la representación en tablas y gráficas se utiliza para establecer la noción intuitiva del límite, pero esto ocasiona que los estudiantes no modifiquen la representación que tienen y ven los límites como un procedimiento más de matemáticas.

Otra dificultad más, encontrada durante la investigación fueron, los enfoques de los libros de texto, pues en su mayoría promueven un enfoque algorítmico que da prioridad a la parte procedimental de los límites dejando de lado la conceptualización y por consiguiente el significado del límite en matemáticas. Y como ya se menciona en el capítulo 2, los libros de texto de Cálculo son una herramienta básica en el proceso de enseñanza aprendizaje y que casi en la totalidad de los libros analizados se puede notar el énfasis en los procedimientos algebraicos; cabe mencionar que los libros llevados en las aulas observadas tienen su énfasis en lo procedimental; tanto Fuenlabrada como García, Duarte y Martínez (2005) proponen la definición como noción intuitiva y se da prioridad a los procedimientos algebraicos para la resolución de los límites.

En los escenarios observados se encontró que el enfoque de enseñanza predominante para el caso del límite fue el algorítmico, en las aulas se pudo constatar la prioridad en el dominio operativo de las reglas y fórmulas, las clases tuvieron un énfasis explícito en la determinación de los límites y no en la comprensión de su significado, era más importante que pudieran resolver aun cuando no comprenden lo que están resolviendo, esto favorece un aprendizaje mecanicista, en el que a través de una Sucesión de Indicaciones de Carácter Algorítmico (SICA) se obtiene el límite de una función y de esta manera más que un concepto, para el estudiante, es un procedimiento que tiene que realizar y que va utilizar más adelante.

Los alumnos entrevistados dejan ver que saben resolver un límite y que procedimiento utilizar dependiendo de la función, pero no comprenden lo que es un límite, de hecho las respuestas a la pregunta ¿Qué entiendes por límite? No tuvo mucha variante a lo que contestaron en el salón de clases el día que iniciaron con el tema y establecieron la noción intuitiva, en las respuestas en la entrevista los alumnos expresaron, no saber qué eran, sin embargo, los utilizaban para sacar máximos y mínimos o que no los utilizaban, más aun, los estudiantes manifestaron que tienen que hacer si el límite es determinado, indeterminado o infinito, lo que corrobora un aprendizaje mecanicista apoyado en un enfoque de enseñanza algorítmico.

Los docentes en las aulas utilizan diferentes estrategias para ver los límites, en los escenarios de la investigación se observó que aun cuando uno de ellos favorece el aprendizaje individualista y el otro el cooperativo, ambos enfatizan en la parte operativa de los límites, las actividades realizadas por el docente durante el tema del límite fue primeramente indagar la definición empírica de los estudiantes, posteriormente analizar un par de ejemplos algebraicos por aproximaciones sucesivas y graficación, el cual establece la definición intuitiva del límite a manera de enunciado, sobre todo para denotar simbólicamente el límite y de ahí, resolver repetidamente límites ya sea individual o por equipos, enfatizando en los procedimientos necesarios a realizar para determinarlos, de esta manera para el estudiante el límite es un procedimiento más, no le da significado y aún cuando ve distintas representaciones no logra modificar la que trae, obstaculizando así el proceso de internalización.

Los docentes entrevistados expresan que en bachillerato lo principal es que aprendan límites de manera intuitiva, coinciden en que la definición formal es para estudiantes de niveles más avanzados o expertos en matemáticas, que en la prepa es suficiente con que aprendan el procedimiento para determinarlos, con ello pueden entonces resolver derivadas e integrales; los límites son una herramienta que deben utilizar para los siguientes temas, así que lo importante es que sepan cómo manejarla no que comprendan lo que es, entonces en las clases se vuelve prioridad los algoritmos de resolver más que la parte conceptual.

Para finalizar, vale la pena mencionar que el trabajo realizado abre posibles líneas de investigación en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en las que se dé respuesta a cuestiones, tales como: ¿Cómo establecer los niveles de conceptualización matemática necesarios en los distintos grados?, si bien es cierto que la escuela es la última responsable del aprendizaje científico ¿Por qué los programas de estudio establecen nociones intuitivas para algunos conceptos de matemáticas?, y en este sentido ¿Qué papel juega la mediación semiótica en el aprendizaje de conceptos matemáticos? Por otra parte las matemáticas son el resultado de la creación humana para dar respuesta a diferentes necesidades y problemáticas, por lo que se han establecido socialmente, entonces, ¿Por qué se enseñan como algo establecido muy lejano al hombre?, ¿Por qué se da prioridad a procedimientos y reglas en lugar de la creatividad? y ¿bajo qué paradigma se diseñan las mejores propuestas de intervención? Estas son sólo algunas de las inquietudes que representan la mínima parte del amplio campo que se tiene en lo referente a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; es una de las materias que más preocupa a todos, ya que a casi nadie le gusta estudiarlas y/o aprenderlas, en la que se tienen los mayores índices de reprobación desde edades muy tempranas y que según se va avanzando en los temas la problemática se va complejizando; así que, visto de esta manera, el presente trabajo representa un pequeño paso, en el amplio camino que hay por recorrer en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Sugerencias para internalizar el concepto límite en el bachillerato.

Derivado del trabajo de investigación, se reflexionó sobre lo que sucede en las aulas de Cálculo en lo referente al tratamiento del concepto límite en la preparatoria y se pudieron establecer algunas conclusiones que se tienen que considerar al momento de dar clases:

- El límite es un concepto que se representa por símbolos que no se basan en la realidad concreta, como ε, δ y | |.
- El aprendizaje del límite debe mediarse por el uso de los símbolos (ε, δ y | |) mencionados en el punto anterior como sus representantes semióticos.
- El nexo símbolo (ε, δ y | |) objeto (límite) se produce en la acción mediada durante la interacción social y se forma de manera individual.
- Formar el concepto de límite debe transitar de las imágenes, a la abstracción y luego al propio concepto.

De esta manera y considerando también lo que menciona González F (2005), que entre los factores que afectan la adquisición de conceptos es "la aplicación práctica de los mismos", para propiciar el proceso de internalización del límite y trabajar primero en el plano inter psicológico; para que posteriormente el concepto pase al plano intrapsicológico:

1. Transitar del concepto empírico al teórico para lo que se le tiene que presentar al estudiante las diferentes formas de representar el límite, esto es, las formas analíticas y gráficas, incluyendo la formalización. En este punto sólo se ve en los salones de clase, una lluvia de ideas sobre el concepto límite, algunas

aproximaciones sucesivas de funciones algebraicas y la graficación de otras funciones como si fueran cosas distintas, es aquí en donde se pueden presentar al estudiante todas las representaciones y pasar de una a otra con las mismas funciones hasta llegar a la formalización.

2. Utilizar el límite de manera procedimental, ya que se trabaja en el plano inter psicológico. A esto es a lo que se le da énfasis en las aulas de Cálculo I, en este punto los alumnos tienen que resolver procedimentalmente los límites, y esto lo debe hacer con los otros, cuando se resuelven ejercicios la interacción es mayor, el trabajo es conjunto, aquí se presenta precisamente la construcción interpsicológica.

3. Resolver problemas en donde se tenga que aplicar límites, podrían ser de continuidad o derivación, pero no como regla establecida que da prioridad al procedimiento, sino como el significado, para la consolidación del nexo, asegurar que se ha pasado al plano intrapsicológico. Este punto es el que se necesita fortalecer en el bachillerato.

BIBLIOGRAFÍA

ÁLVAREZ, Pérez Martha, ET AL, (2008). Notas: Seminario metodológico Didáctica de la matemática para docentes de bachillerato. Sinaloa, México.

ANFOSSI, Agustín y M. A. Flores Meyer. (1954). Cálculo Diferencial e Integral. 1ª Edición, 14ª reimpresión en el 2001. Editorial Progreso. México D. F. 2001.

ANTOLÍN, A. (1999, Octubre). Problemas en la enseñanza del Cálculo. Primer foro de discusión sobre la enseñanza del cálculo del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey campus León, León, México.

ARTIGUE, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.). (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

ARTIGUE, Michèle (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 1, Núm. 1, pp. 41-56. México. Ed. International Thompson.

BACHELARD, Gastón (2000). La formación del espíritu científico. ed. siglo veintiuno, México.

BADILLO, Jiménez, Edelmira Rosa (2003); La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia, “la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física”. Tesis doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona; Bellaterra.

BALDERAS, P. E. (1993). Experiencias con el uso de un graficador en la enseñanza del Cálculo en la Escuela Nacional Preparatoria. Educación Matemática, 5(3), 125-141.

BALLESTER, S., Et. Al., (2000). Metodología de la enseñanza de las Matemática. Tomos I y II. Editorial Pueblo y Educación, La Habana,.

BAULEO, A. (1989), Ideología, grupo y familia, En antología Grupos y Desarrollo. México. 1989. UPN.

BERENGUER; Alonso, Isabel; Martínez Sánchez, Noemí. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. Universidad de Oriente. Revista Pedagogía Universitaria Vol. 8 No. 3.

BERTELY, María. (2000). Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar. Ed. Paidós, Barcelona, España.

BOSCH Carlos, Guerra, Manuel; Hernández, Carlos; De Oteyza, Elena; (1981). “Cálculo Diferencial e Integral”. Primera edición, décima novena reimpresión, Editorial Publicaciones Cultural, México.

BRUNER, J. (1989). Acción, pensamiento y Lenguaje. Ed. Alianza. Madrid.

BUNGE, Mario; (1979).La ciencia su método y su filosofía. Ed. Siglo veinte, Argentina.

CAMACHO, Alberto y Aguirre Mónica. (2001). Situación didáctica del concepto límite infinito. Análisis preliminar. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. Vol. 4, Núm. 3, noviembre, 2001, pp. 237-265. http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2.pdf.

CANTORAL, Ricardo. (1995). Matemática Educativa. Revista Especializada en Educación, Pedagogía. Tercera época, Vol., 10, Núm. 5, invierno de 1995. Universidad Pedagógica Nacional, México, D. F. 1995.

CANTORAL, Ricardo. (1997). Los textos de cálculo: Una visión de las reformas y contrarreformas. Revista EMA, Vol., 2 Nº 2, 1997. http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Ema1997.pdf.

COLE, M., & Griffin, P. (1983). A socio-historical approach to re-mediation. The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition, 5(4), 69-74.

COLE, M. (1983). Psicología cultural. [Revisión del libro psicología cultural]. PsycCRITIQUES-Psicología contemporánea: revisión de APA de 2 libros , 28, 162. Recuperado 07/16/2007, de la base de datos PsycCRITIQUES.

COLL, C., y Colomina, R. (1995). **“**La interacción entre alumnos y aprendizaje escolar” En Marchesi, Coll y Palacios Desarrollo psicológico y Educación II. Psicología de la educación. Ed. Alianza-psicología. España, 1995.

COLL, C., y Solé, I. (1995). La interacción profesor/alumno en el procesos de enseñanza y aprendizaje En Marchesi, Coll y Palacios Desarrollo psicológico y Educación II. Psicología de la educación. Ed. Alianza-psicología. España, 1995.

COURANT, Richard; Robbins Herbert. (2002). ¿Qué son las matemáticas? *Conceptos y métodos fundamentales.* Prefacio y avances recientes. Ian Stewart”. Fondo de Cultura Económica; México.

CUELLAR, Juan Antonio. (2007). Matemáticas V, Cálculo Diferencial. Editorial Mc. Graw Hill, México; D. F.

DAVIS, G. (1998). Connections between counting and Reading. Center for Research in Mathematics Education-Southampton.

DE LA CRUZ, R. (1994). Una metodología instruccional por fichas para el aprendizaje significativo de la física. Memorias. XII Reunión de intercambio de experiencias en estudios sobre la educación. Centro para la excelencia académica, dirección de desarrollo y servicios académicos. Monterrey, N.L.: ITESM.

DGB, (2006). Programa de estudios de Calculo Diferencial.

ECHEITA, G. y Martín, E. (1995). Interacción social y aprendizaje. En Marhesi, Coll y Palacios. Desarrollo psicológico y Educación III. Psicología de la educación. Ed. Alianza-Psicología. España.

FAJARDO, U. Luz Amparo (2005). Aproximación a los Fundamentos Neurológicos de la Metáfora, Forma y Función, enero-diciembre, N° 018, Universidad Nacional de Colombia. http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=21901804.

FENSTERMACHER, Gary y Jonas Soltis. (1998). Enfoques de la enseñanza. Tercera edición. Amorrortu Editores, Buenos Aires, Argentina. 1998.

FERREYRA, Ferreiro, Gravié, Ramón. (2007). Nuevas alternativas de aprender y enseñar. Aprendizaje cooperativo. Ed. Trillas. México, D.F.

FLORES, Meyer Marco A. y Eugenio L. Fautsch Tapia. (1982). Cálculo básico, estudiante. Primera Edición. Editorial Progreso, México, D. F. 1982. Cuarta reimpresión 2000.

FUENLABRADA DE LA VEGA, Trucíos Samuel. (2001). Cálculo Diferencial Segunda Edición. Ed. McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. México, D.F., 2001.

GARCÍA, Silvia; Munafó, Lidia Estela. (2002). “Matematicando”: Un aporte para enriquecer el proceso de aprendizaje de la matemática universitaria.

GARCÍA, O., Gloria, Serrano, Celly, Díaz Hernán. (s/f). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos de cálculo. Universidad Pedagógica Nacional.

GASCÓN, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1), pp. 129-159.

GLAROS, Koyama, Diamandina. (2002). Errores conceptuales y estilos de solución de problemas de límites en expertos y novatos. Sus implicaciones Metacognitivas a través del uso de tecnología. Universidad virtual del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Monterrey, Nuevo León; México. 2002.

GLAROS, Dinaky; Licón, Linda. (2008). Cálculo Diferencial. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Ed. Limusa. México.

GODINO, J. D. (2003). Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/02_MarcosCM.pdf.

GONZÁLEZ, Cabrera Víctor M. (1997). Cálculo 4000 problemas con respuestas. 1ra. Edición. Editorial Progreso, México, D. F. 1ra. Reimpresión 2000.

GRANVILLE, William Anthony. (1998). Cálculo Diferencial e Integral. Limusa, Noriega Editores. México. D. F.

IBÁÑEZ, Carrasco Patricia y Gerardo García Torres. (2007). Matemáticas V, Cálculo Diferencial. Editorial Thomson, México D.F. 2007.

JIMÉNEZ, René. (2008). Cálculo diferencial. Primera Edición. Editorial Pearson Educación, México.

KURATOWSKI, Kazimierz. (1970). Introducción al cálculo. Primera edición, Editorial Limusa, México, D.F. Quinta reimpresión 1984.

LARSON, Ron; Hostetler Robert P. y Edwards Bruce H. (2005). Cálculo Diferencial e Integral. 7ma. Edición. Ed. Mc Graw Hill, México.

LEITHOLD, Louis; (1987). El Cálculo con geometría analítica. Quinta edición, Ed. Harla, México. 1987.

LEITHOLD, Louis; (1988). El Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales. Primera edición, Ed. Oxford, México. 1988. Alfaomega Grupo Editor, México, D.F. Segunda reimpresión 2006.

LEMKE, Jay L. (1997). Aprender a hablar de ciencia, Lenguaje, aprendizaje y valores. Temas de Educación. Primera Edición. Editorial Paidós. Barcelona, España. 1997.

LÓPEZ-GAY, R., Martínez Torregrosa, J. y Gras Martí, A. análisis de la utilización y comprensión del cálculo diferencial en la enseñanza de la física. Dpto. de didáctica general y didácticas específicas. U. de Alicante.

LURIA, A. R. (2000).Conciencia y lenguaje. Aprendizaje Visor. España.

MAJMUTOV, J. (1983). La resolución problemica. Ed. Quinto sol. Cuba.

MASON, J. (1996). Mi comprensión de la comprensión en matemáticas. Reseña del libro de Anna Sierpinska (1994): Understanding in Mathematics. Available: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/revistaema/vol1num3/ryr.htm

MARTÍNEZ, M. Miguel. (1994). La investigación cualitativa etnográfica en educación. Manual Teórico-Práctico. Editorial Trillas, segunda edición, México, 1994.

MATURANA, Humberto; (1997). la realidad: ¿objetiva o construida? ed. antrhopos, 1ra edición, España.
MAYOR, Juan; Aurora Suengas y Javier González Marqués, (1995). Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar. España. Editorial Síntesis.
MERCER, Neil; Palabras y mentes. (2001). Como usamos el lenguaje para pensar juntos. Editorial Paidós. Barcelona España.
MONEREO, Carles. (2003). Estrategias para autorregular el esfuerzo en el aprendizaje. Contras el culturalismo del esfuerzo. Aula e Innovación Educativa No. 120, marzo.
MORA, Valladares Emiliano y María del Río Francos. (2008). Cálculo Diferencial e integral, Ciencias Sociales y Económico-administrativas. Preuniversitario. Editorial Santillana, México, D.F. 2008.
MORENO, Clemente y Pablo Ríos. (2006). Concepciones en la enseñanza del Cálculo. Sapiens, diciembre, año/vol.7, número 002. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Caracas, Venezuela. 2006. Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Redalyc. Universidad Autónoma del Estado de México. http://redalyc.uaemex.mx. Consultado en junio de 2009.
NISBET, J. P y Shucksmith, J. (1987). Estrategias de Aprendizaje. Santillana, Madrid.
ORTIZ, Campos Francisco. (2006). Cálculo Diferencial, Bachillerato General. Grupo Editorial Patria, México, D. F. 2006. Primera reimpresión 2007.
OSMANY; Laffita, Aspiazú, Pedro; Guerrero, Seide, Eloy; Nicó, Pérez, Dora, Emma; Campos; Alcides, Cabrera; Chávez, Jiménez, Mercedes. (2004). Pilares del perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de una disciplina matemática en la formación de profesionales. Revista ciencias matemáticas Vol. 22, No. 1, Facultad Agroforestal, Centro Universitario de Guantánamo, Cuba.
OSORIO R. E. (s/f). El lenguaje. Contrastes entre el conductismo, Vigotsky y Piaget. Recuperado de: http://www.sid.cu/galerias/pdf/sitios/rehabilitacion-logo/el_lenguaje_contrastes_entre_el_conductismo,_Vigotsky_y_piaget.pdf.
PALOMINOS; V, Fredi; Barrera C., Rosa; Patricio Montero L. (2006). Diseño y construcción de ambientes de aprendizaje para las especialidades de álgebra y cálculo en la enseñanza superior universitaria.
PANTOJA, Heredia; Diego. (2008). Aproximación a la epistemología de las matemáticas. Capítulo 4. El cálculo según Newton y según Leibnitz. La versión digital se encuentra en el sitio: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info consultada en el mes de julio de 2008.
PIFARRÉ, Manoli y Sanuy, Jaume. (2001). La enseñanza de estrategia de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. En la enseñanza de las Ciencias, Revista, 19(2), 297-308. http://www.bib.uab.es/pub/ensenanza delasciencias/02124521v19n2p297.pdf.
PITA, Ruiz; Claudio. (1998). Cálculo de una variable. Editorial Prentice Hall, México.
PLAN 2006. Programa de Cálculo I, quinto semestre, tercer grado, ciencias químico biológicas, ciencias físico matemáticas. Coordinadores estatales del área:

Arturo Ylé Martínez y José Alfredo Juárez Duarte. Dirección General de Escuelas Preparatorias. Culiacán, Sinaloa; marzo de 2008.

POPPER, Karl; (1996). El universo abierto. Un argumento a favor del indeterminismo. Ed. Tecnos, Madrid, España.

PURCELL, Edwin J. y Varberg Dale. (2000). Cálculo Diferencial e Integral 6ta. Edición. Ed. Pearson Educación, Prentice Hall, México 2000.

RAMOS, Carolina, (2005). El grado de reflexión de los alumnos de Cálculo Diferencial. Una experiencia. REIEC,

RÍOS, Pérez; José Abelardo. (1991). La miroetnografía… una aproximación metodológica apropiada para el estudio y transformación de la práctica educativa. En revista PEDAGÓGICA. Núm. 3. UPN. Sinaloa, septiembre de 1991.

ROSALES, López Miguel. El lenguaje matemático de los textos escolares. (Primer ciclo de EGB).

ROBLES; Villa, Sergio. (s/f). La Resolución De Problemas Un Punto Convergente De Los Enfoques Actuales En La Enseñanza De Las Matemáticas.

RUIZ, Ledesma, Elena, Fabiola, Rodríguez, Peralta María de Lourdes. (s/f). Vinculación entre los niveles educativos medio superior y superior del IPN: el caso de Cálculo Diferencial. Instituto Politécnico Nacional.

SALINAS, Patricia, Juan Antonio Alanís, Ricardo Pulido, Francisco Santos, Julio César Escobedo y José Luís Garza. (2002). Elementos de Cálculo, cuaderno de apoyo: reestructuración conceptual para el aprendizaje y la enseñanza. Editorial Trillas, México, D. F. ITESM, 2002. Reimpresión 2008.

SIEGLER, R.S. y CROWLEY, K. (1991). The microgenetic method: a direct means for studying cognitive development. *American Psychologist*,

SILVA Y LAZO. (1996). Fundamentos de Matemáticas, 3ra. Edición. Ed. Limusa, México.

SPIVAK, Michael; (1998). Calculus. Cálculo Infinitesimal, 2da. Edición. Ed. Reverté, México.

STAKE, R. E. (1999). Investigación con estúdio de casos. Segunda edición. Ediciones Morata. Madrid, España.

VALDIVÉ, Fernández Carmen María; (2007). Los infinitesimales del Cálculo: Un punto de vista sistémico. http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/26310/1/articulo13.pdf.

VÁSQUEZ, Bronfman Ana, y Martínez Isabel. (1996). La socialización en la escuela. Una perspectiva etnográfica. Ed. Paidós, 1996, Barcelona, España.

VIGOTSKY, Lev, S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Ed. Crítica. Barcelona, España.

VIGOTSKY, Lev, S. (2006). Pensamiento y lenguaje. Ed. Alfa y Omega. Ediciones quinto sol. México.

WERTSCH, James V. (1988). Vigotsky y la Formación Social de la Mente, Paidós, España.

WOODS, P. (1998). Investigar el arte de la enseñanza. Ed. Paidós, Barcelona, España.

WOODS, P. (1998). La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa. Ed. Paidós, Barcelona, España.

http://dgep.uasnet.mx/programas2006/semestreV.html Programa 2006. Consultado en febrero de 2009.

http://www.sep.gob.mx La educación Media Superior. Consultado en noviembre de 2010.

http://www.sems.org.mx La educación media superior. Consultado en noviembre de 2010.

ANEXOS

1. Registro de observación

Registro 3A Observación

SOCIOGRAMA

	AO	AO	AA			
	AO	AO	AO	AO		AO
-	-	AO	AO	AO	-	AO
AO	AO	AO	-	AO	-	-
AO	AO	AO	AO	O	AO	AO

PARA TRABAJO EN EQUIPOS

	AO AO		AO AA			
	AO			AO AO	-	AO AO
-	-	AO	AO	AO	-	-
AO			AO	AO	-	-
AO	AO	AO	AO AO	O	AO	AO

SIMBOLOGÍA

AO.- ALUMNO

AA.- ALUMNA

AS.- ALUMNOS

M.- MAESTRO

O.- OBSERVADO

MA.- Muchacha

MO.- Muchacho

- **.-** Butaca vacía

FECHA DE REALIZACIÓN: 9 de octubre de 2009
INSTITUCIÓN: A
LOCALIDAD: Culiacán, Sinaloa
NIVEL EDUCATIVO: Medio superior
MAESTRO: XXXXXX
GRADO: Tercero de bachillerato fase especialiaza
CLASE OBSERVADA: Cálculo I
LUGAR DE LA OBSERVACIÓN: Aula 9
CLASE ECONÓMICA: Media baja
TIEMPO DE LA OBSERVACIÓN: De 7:50 a 8:40
OBSERVADOR: EW

Comentarios	*Inscripción*
	O.- Hoy llegue a la preparatoria con bastante tiempo de anticipación, el guardia de la puerta ya me saluda como alguien conocido, los muchachos en los pasillos me dan los buenos días. Yo espero frente al aula 9 a que empiece la hora de la clase. El salón está sólo pero no entró prefiero esperar al maestro, el sale del aula 8 y lo alcanzó, entramos juntos al salón, los alumnos de nuevo están en la biblioteca en clase de dibujo hay que esperar a que lleguen, el maestro va al escritorio y yo a una butaca de atrás.

Comentarios	*Inscripción*
	O.- El aula tiene en la pared de atrás un cartel que no estaba ayer, al parecer hecho por los estudiantes, en papel estraza dibujado con gis un mundo rodeado de jóvenes tomados de las manos y tenia escrito: <el mundo depende de: (dentro del mundo y resaltado) la paz>, por el lado derecho físico matemático 301. ¿Será con motivo de las naciones unidad?, ¿Para qué lo habrían hecho? (Entran seis alumnos platicando y se acomodan, casi inmediatamente entra otro grupo de seis estudiantes y se dirigen a su lugar, luego entran cuatro entre ellos la muchacha y por último otros cuatro). AA.- 'No sé porque así son todos'. (Le comenta a su compañero al parecer molesta o desconcertada). M.- 'No hija no todos son así'. (Sonriendo). AA.- 'Si profe, todos son así'. (Con tono fuerte). M.- 'No, algunos somos peores'. (Sonriendo). (Se abre la puerta) AO.- '¿puedo pasar?' (Parado en la puerta). M.- 'Adelante'. (Detrás entra otro alumno, el no pide permiso).

Comentarios	*Inscripción*
	O.- Me pregunto a quienes estaba refiriendo la alumna ¿A los hombres o a los maestros?, ¿Qué le pasaría, que se expresaba tan molesta? M.- Muchachos ayer vimos que podemos encontrar límites directos y que en otros obtenemos una indeterminación cuando tenemos división entre cero. Vamos a organizarnos en equipos, no multitudinarios porque luego hacen puro relajo. (Se abre la puerta y una muchacha llama al maestro, el maestro se acerca) MA.- 'Profe'. (la muchacha le da algo) M.- 'Pero no traigo feria'. MA.- 'Se lo dejo así y luego me da la feria, o al rato voy a la tienda a feriar y se lo doy después'. M.- 'Mejor me lo das después'. (La muchacha se va). M.- '¿Ya vieron los cinco tipos de factorización que deje?'. AS.- 'Si'. (En coro la mayoría). M.- 'En parejas máximo tríos van a resolver los ejercicios de la pagina 40 en donde dice formas indeterminadas. ¿se forman o yo los formo los equipos?'.

Comentarios	Inscripción
	AO.- ‘¿De cuantos profe?’ M.- ‘De dos, si acaso uno o dos de tres’. (Los alumnos se empiezan a acomodar, (en el sociograma se indica cómo se reunieron con líneas cafés) mueven algunos lugares, los equipos están indicados en el sociograma para el trabajo en equipos en distintos colores). M.- ‘¿Con quién?’ AO.- (mueve los hombros). M.- (El maestro insiste a los mismos). ‘¿Con quien?’. AO.- ‘No se’. M.- (nuevamente a los mismos, ya acercándose a con ellos). ‘¿Con quién?’. AO.- (Mueve la cabeza). M.- ‘Escoge’. (Le toca el hombro al de más atrás). (Señala a tres alumnos, (marcados de azul en el sociograma), ellos comentan le hablan al de atrás y no les dice nada, le hablan al de adelante y se reúnen para lo que mueven un poco sus butacas (sombreados de amarillo fuerte en el sociograma del trabajo en equipo)).

Comentarios	*Inscripción*
	(Alumna le pregunta al maestro algo respecto al orden de las operaciones y lo llama a su lugar, el maestro se explica en lugar y luego dice para todos). M.- 'Muchachos recuerden de la jerarquía de operaciones, a ver si tienen una suma, multiplicación y potencia ¿Cuál es primero?'. AO1.- 'Potencia'. (Lo dice muy bajo). O.- Me parece que no escucharon la respuesta del alumno y no se insiste en el tema. AO1.- 'Maestro, ¿Qué significa f bolita g?'. M.- 'Compuesta'. (Los alumnos están trabajando en binas y triadas, algunos haciendo algo de ruido, todos traen el libro). (En la esquina a mi izquierda un muchacho levanta la voz). AO.- 'Cállate a al Verga'. M.- '¿Qué pasa?'. AO.- 'Es para concentrarnos'. M.- 'Tranquilos'.

Comentarios	*Inscripción*
	O.- Tal vez el ruido y las platicas de los equipos más cercanos a ellos, le impedía al alumno concentrarse en la tarea. Me llama la atención el lenguaje que usa dentro del salón para pedir silencio. (El grupo guarda silencio, se escuchan murmullos sobre x, binomios, trinomios, más, menos, etc.). M.- '¿Por qué no se han integrado a un equipo ustedes? (Señalando a dos muchachos con la cabeza (marcados de azul claro en el sociograma). AO.- 'No se'. M.- 'Acomódense'. (El de adelante se acerca con dos compañeros, el de atrás se queda solo, no se integra con nadie). O.- Observar interacción de este alumno con el grupo. ¿Por qué no se integra a los equipos? Posible entrevista. (El maestro va a su escritorio y pasa lista). AA.- 'Profe, ¿Cuántos dijo?'. M.- 'Los primeros cinco'. (Deja de pasar lista para contestarle, luego continúa). (Al terminar de pasar lista el maestro va al equipo de la alumna y les explica algo).

Comentarios	*Inscripción*
	AO.- ‘Profe, ¿Puede venir por favor?’. M.- ‘Si, un momento’. (Sale un alumno de uno de los equipos ubicados en la esquina de mi izquierda). (El maestro va con los estudiantes que lo llamaron y explica). (Regresa el alumno que salió). (El maestro va al pizarrón, un alumno se para y va con el). M.- ‘Hagan el 1, 2, 3, 5 y 6, muchachos’. AO.- ‘¿El dos por qué no?’. M.- ‘El de infinito aquí lo vamos a hacer’. (El maestro se mueve por todo el salón pasando por los equipos, se escuchan murmullos del tipo: x por x, pon menos dos más cuatro, menos 2x, x más 4, un número que te de x cuadrada,…). AO.- ‘2 por 5 10, Huey’ (golpea a su compañero de equipo y se ríe, voltea a verme, esta junto a mi por la izquierda (marcado en el sociograma de equipo de verde). O.- ¿Con que intención golpea a su compañero?

Comentarios	*Inscripción*
	AO.- ‘Profe, ¿Esta bien?’. M.- ‘ajá’ (acercandoce al equipo). AO.- ‘Pero, esta ¿es la solución?’. M.- ‘Bien, te están dando la solución para que llegues al resultado, si te das cuenta lo importante es como llegas a esa respuesta’. O.- Parece que los ejercicios traen la solución y como que confunde a los estudiantes. Ver el libro. AA.- ‘Profe’. M.- ‘Mande’ (va al equipo de la muchacha). AA.- ‘No entiendo esto’. M.- ‘Lo que esta arriba, ¿Qué es?’ AA.- ‘¿Aquí?’ (Señalando en su libro). M.- ‘No, no el número 4 en el denominador, un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ ’. AA.- ‘No me acuerdo’. M.- ‘No importa divide’.

Comentarios	*Inscripción*
	AA.- ‘¿Para eliminar?’. M- ‘Divide y te va a dar el otro binomio’. O.- Ver el libro para buscar problema de la conversación de la alumna y el maestro. (Alumno se para con su librea, va con el maestro y le pregunta algo). (El maestro camina por el salón). M.- ‘Incorpórate a un equipo hijo’ (Le toca el hombro). (El alumno esta sentado frente a mi, o hace nada, no se incorpora y parece que no trabaja en los ejercicios, sólo ve el libro, los compañeros de al lado mío a la derecha le llaman para que trabaje con ellos y el no va). O.- Estar al pendiente de la interacción con el grupo, ¿Por qué no se integra a ningún equipo? (Los muchachos de la esquina izquierda se ríen). AO.- ‘¿Qué Huey?’ (Se escucha de donde vienen las risas y estas aumentan). AO.- ‘Ándale Huey’. AO.- ‘Maestro, a ver profe’. (El maestro va hacia allá).

Comentarios	*Inscripción*
	AO.- ‘Mire este profe’. M.- ‘¿Les dio el resultado?’ AO.- ‘Mire’ (Le muestra el libro). M.- ‘Bien’. AO.- ‘Profe’ (Le hablan de otro equipo). M.- ‘Voy’. AO.- ‘Profe’. (De otro equipo) M.- ‘Voy’. (El maestro va con el primer equipo que le llamo). M.- ‘¿Por qué x-3?’. AO.- ‘De aquí del ejemplo’. M.- ‘Bueno eso era para ese ejemplo. A ver ¿es cierto es que escribieron?’. (Silencio) M.- No, no es cierto esto, ustedes van a buscar algo de manera que tengan algo equivalente. AO.- ‘¿Cómo?’. M.- ‘Vas a transformar la función en otra equivalente, factorizando, tienes que identificar diferencia de cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, trinomios cuadrados no perfectos, ¿Qué tienes ahí?’. AO.- ‘No se’. M.- ‘A ver tienes que checar lo de las factorizaciones’. O.- Revisar libro, por el dialogo parece que los alumnos están mecanizando un procedimiento algebraico. (Se va al otro equipo que lo había llamado).

Comentarios	*Inscripción*
	M.- '¿Cómo logran que se elimine x-2?'. AO.- 'Factorizamos'. M.- 'No lo pueden eliminar si no es x-2'. (El maestro escribe en el pizarrón $\frac{x^2-2x}{x-2}$) (El maestro ve su celular y sale del salón) (Se da la siguinte AA.- '¿AOm, x-4 en la parte de abajo?'. AOm.- (le responde a su compañera) 'Si'. AA.- 'Y la seis ¿es como la de ayer?'. AOm.- 'Nosotros vamos en la cuatro apenas'. AA.- (insiste) 'Pero es como la de ayer un trinomio cuadrado no perfecto porque esa regla me tocaba sacarla'. (AO1 se para y va con su compañera y conversan) AA.- '¿Le entendiste al 4 y 5?'. AO1.- 'Porque esta el dos, no podemos despejar'. AO.- (Compañero de equipo de AA) 'El 5 tambien'.

Comentarios	*Inscripción*
	AA.- ‘El 1, 3, 4, 5 y 6, el dos no’. AA.- (le pregunta a AO1 quien sigue parado junto a ella). ‘¿Está bien?’ (le muestra su libro). AO1.- ‘Creo’ (Regresa a su lugar). AA.- ‘No se pero tiene que salir’. AO.- (Compañero de equipo). ‘Pon el resultado’. AA.- ‘No manches’ (y lo empuja). O.- Los alumnos tienen algunas dudas sobre productos notables y factorización que les dificulta realizar la tarea encomendada. Al parecer reducen límites a procedimientos algebraicos. Ver libro de texto y programa. (El maestro regresa al salón). M.- ‘Ya todos factorizaron la expresión de esa manera’. O.- ¿a qué manera se refiere? AA.- ‘Si’. AO1.- ‘Diferencia de cuadrados’. M.- ‘¿Están de acuerdo todos?’ AA.- ‘Es factor común’. M.- (Dirigiéndose a AO1) Acá no están de acuerdo y es mujer y ¡la única! (Como sorprendido o admirado). AO1.- ‘Le paso ahí’ AO.- ‘Es factor común’. (AO1 pasa al pizarrón). M.- ‘A ver convéncenos’. (AO1 escribe en el pizarrón).

Comentarios	*Inscripción*
	$\frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = x + 2$ $2 + 2 = 4$ AA.- 'Es 4 y el resultado es 2'. (AO1 borra lo del pizarrón). AO.- 'Chale'. (Se escuchan algunas sonrisas). AO.- 'Te equivocaste'. (AO1 escribe en el pizarrón) $\frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = x = 2$ AO1.- (Regresando a su lugar) 'No se como se llama eso'. M.- '¿Te convensieron?'. AO1.- 'Si'. (Parecia apenado, frustado). (Algunos alumnos comentan en voza baja se equivoco como sorprendidos entre risas). O.- Me da la impresión de que el grupo considera que AO1 es bueno para cálculo pues causo mucha sorpresa su equivocación. El primer intento de factorizar, lo hace como

Comentarios	*Inscripción*
	si la expresión en el númerador fuera una diferencia de cuadrados tratando de ajustarlo al ejmplo tratado anteriormente. Al parecer se estan mecanizando procedimientos algebraicos. M.- ‘Nunca duden del poder de convencimiento de las mujeres’. AA.- ‘Es factor común’. M.- ‘Aquí nada más estamos buscando la función equvalente, que es x, el límite si es 2, mira fijate (dirijiendose a AO1 y escribe en el pizarrón $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x = (2) = 2$) AA.- ‘En la 3 y 4 me confundi’. (El maestro ecribe en el pizarrón $\frac{5x^3 - 4x + 2}{x + 5} = -$) MO.- (De la ventana pregunta) ‘¿Puedo pasar?’ (riendose). M.- ‘¿Están estudiando?’ MO.- (DE la ventana) ‘Yo si, este ya se salio’. M.- ‘Ya ven pues’. MO.- ‘Nos vemos profe’. (Se van de la ventana).

Comentarios	*Inscripción*
	O.- Los exalumnos regresan a ver su escuela, van dos días que vienen alumnos diferentes a ver como esta tercero de prepa. M.- (dirijiendose al grupo). 'Hagan la división'. AA.- 'No me acuerdo'. (El maestro escribe en el pizarrón $x+5\sqrt{5x^3-4x+2}$). M.- 'A ver hay que resolver' (Escribe en el pizarrón: $\lim_{x\to 1}\frac{5x^3-4x+2}{x+5}=$ M.- '¿Cómo vamos?'. AO.- 'Dos, tres'. M.- 'Vamos no esta tan dificil como parece'. AA.- 'Es más facil si la hago directa'. M.- 'Aquí factorizamos, ¿Por qué?'. (señalando el pizarrón). AO.- 'Sale división entre cero'. M.- 'Eso es un indeterminación y tenemos que tratar de resolverla, pero si sustituimos aquí'. (Señala el pizarrón).

Comentarios	*Inscripción*
	AA.- '¿Entonces, se puede hacer directo?'. M.- 'Claro'. AO.- 'Nos da división entre cero'. (El maestro ve su celular). M.- '¿Ya terminaron los cinco?'. AO.- 'Ya casi'. M.- '¿Por qué no han terminado?'. AO.- 'Es que algunos están dificiles'. M.- 'Así de facil'. AA.- 'Pues luego'. (risas de los estudiantes). (Alumno se acerca al maestro y le explica algo). O.- Me parece que hay muchas dudas pero sobre todo en lo que es algebra. Ver los ejercicios del libro. M.- 'A ver muchachos, ¿dificultades?'.

Comentarios	*Inscripción*
	AO.- (riendose) 'No le entiendo a nada'. (El maestro lo ve sonrie y va a su lugar, es un muchacho del equipo que esta a mi izquierda). M.- 'A ver tienes que transformar, ¿Qué herramienta tienes?, la factorización de difeencia de cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, trinomios uadrados no perfectos, factor común, ¿Cuál de ellos vas a usar? Te acuerdas la tarea de repasar los productos notables y factorización es porque lo vas a necesitar aquí para entenderle. Vamos hacer una cosa, el fin de semana ustedes repasan productos notables y factorizaciones, los tres y el martes resolvemos estos ejercicios'. (el maestro esta parado junto al equipo). AO.- (Un integrante del equipo donde esta el maestro) '¿Qué tanto?'. M.- 'Todo lo que puedan pidan un libro de algebra de la biblioteca o el de primero. (Se va a otro equipo). M.- (viendo el libro de uno de los integrantes). 'Esta más facil de lo que crees, ¿Qué pasa aquí si en lugar de x se pone el dos?'. (El alumno le dice al maestro muy bajo, ellos comentan) (El alumno a mi lado derecho AO1, le pregunta a su compañero)

Comentarios	*Inscripción*
	AO1.- ‘¿ya te salio esa?’ (le señala un ejercicio en su libro). AO.- ‘No’. (El alumno AO1 borra) AO.- ‘¿Lo sustituiste?’. AO1.- (borra) ‘Lo estas factorizando Huey’. AO.- (mueve la cabeza). ‘Si’. M.- ‘¿Qué pasa aquí? (dirijiendose a los alumnos del equipo junto a mi derecha). AO.- ‘Ya me salio’. M.- ‘Es de los faciles nada más hay que sustituir, les dije, el problema aquí son los productos notables no es la interpretación de límite tienen que desenpolvarse. O.- El problema son productos notables pero no se ha dado oportunidad de interpretar límite se ha reducido a algebra, por eso el problema. M.- ‘Para el martes muchachos 2, 7, 8 y 9 para ello tienen que leer pagina 39’. AS.- ‘No viene’ (en coro).

Comentarios	*Inscripción*
	M.- ‘No tiene la 39’. AS.- ‘Ni la 38’. (El maestro toma un libro de los alumnos y lo ve) M.- ‘El maertes les traigo esas hojas, las van a tener que pegar o a ver que hacen’. AO.- ‘Entonces, ¿No hacemos la tarea?’. AA.- ‘La del lunes’. M.- ‘El lunes no hay clases, el martes lo hacemos aquí, muchachos nos vemos el martes, portense como quieran pero cuidense mucho’. (cinco muchachos y la muchacha van al escritorio del maestro algo les explica) (otros alumnos salen del salón). (AO1 y su compañero se quedan comentando los ejercicios). (Se van algunos de los alumnos que están con el maestro, se quedan tres muchachos y la muchacha). (AO1 resuelve ejercicios y su compañero de equipo lo ve, en eso cierra el libro y van al escritorio del maestro con los demás) AA.- ‘¿Por qué da septimo?’.

Comentarios	*Inscripción*
	AO1.- 'No la ve'. M.- 'Esto es igual a 1 más 2 más un tercio más tres tercios'. AA.- 'Pensaba en dolor de cabeza', (Los alumnos se ríen y se retiran del escritorio del maestro). M.- 'Ya saben muchachos repasen' (caminando hacia la puerta y todos entre risas). O.- El maestro me espera en la puerta, lo alcanzo y salimos juntos, me acompaña al carro mientras conversamos. M.- 'Siempre es un problema los productos notables y la factorizaión'. O.- 'Así es, lo que debemos pensar es en que podemos hacer?'. M.- 'Lo malo es que por el tiempo muchas veces los muchachos se nos quedan atrás y uno tiene que seguir con el programa aunque no lo alcancen a uno'. O.- 'Pues si, eso es malo'. O.- Nos despedimos y quedamos de vernos el martes para la siguiente observación el lunes no tienen clases las prepas de este sistema educativo.

2. Categorización de la observación

Registro 10B Observación

SOCIOGRAMA

				AO5		**AO10**			
				AA6	**AA7**	**AO12**	**AA11**		
		AO1				**AO13**	**AO14**		
		AO2	**AO3**	**AO8**	**AO9**				
		AO4							
				O					

SIMBOLOGÍA

O.- OBSERVADOR **MO.-** Muchacho

AA.- ALUMNA

AO.- ALUMNO

AS.- ALUMNOS

M.- MAESTRO

FECHA DE REALIZACIÓN: 9 de noviembre de 2009

INSTITUCIÓN: B

LOCALIDAD: Culiacán, Sinaloa

NIVEL EDUCATIVO: Medio superior

MAESTRO: XXXXXX

GRADO: Tercero de bachillerato fase especializada

CLASE OBSERVADA: Cálculo I

LUGAR DE LA OBSERVACIÓN: Aula 3

CLASE ECONÓMICA: Media

TIEMPO DE LA OBSERVACIÓN: 16:50 a 17:40 hrs.

OBSERVADOR: EW

Comentarios	*Inscripción*
	O.- Entre al salón y platique un poco con los muchachos. (Dialogo con los muchachos)
Pregunta de alumno	AO3.- "¿No ha venido, ya se ha pinteado varias clases?".
Ambiente del aula	(Sale del salón entre risas)
	O.- "Si, se me ha dificultado un poco venir, ¿Quién me podrá prestar los apuntes para ponerme al corriente?"
Respuesta de alumno	AO9.- "AA6, tiene muy bien sus apuntes pero no esta"
	O.- "Y, ¿me los prestará?"
Respuesta de alumno	AO9.- "Yo creo que si".
	O.- "¿Y los tuyos, no me los prestas?"

Comentarios	*Inscripción*
Respuesta de alumno	AO9.- "Huy, nos les va entender tengo un relajo"
	O.- "No importa, los temas que han visto ¿han estado muy complicados?"
Respuesta de alumno	AO8.- "Yo le presto los apuntes, los tengo todos" (Pasándome su libreta)
	O.- "Muchas gracias"
Respuesta de alumno	AO8.- "Los temas son sobre lo mismo, si no le entiende le explicamos".
	O.- "Voy a sacarle copias a tu libreta"
Respuesta de alumno	AO8.- "No se apure luego me la trae, no la ocupo".
	O.- "Pero y examen ¿Cuándo va a ser?"
Respuesta de alumno	AO9.- "No ha dicho nada el profe".
Ambiente del aula	(En eso entra el maestro al salón, 17:02 hrs)
Comentario del docente	M.- "Buenas tardes".
Comentario de alumno	AS.- "Buenas tardes".
Ambiente del aula	(Entran detrás de el dos alumnos, AO2 y AO3; se sonríen conmigo. Cuatro muchachos que no estaban en su lugar se acomodan, AO4, AO5, AO13 y AO14)

<table>
<tr><th>Comentarios</th><th>Inscripción</th></tr>
<tr><td>Pregunta del docente
Indicación del docente
Ambiente del aula</td><td>M.- “¿Qué vimos la clase de ayer?, Chequen su apunte”.

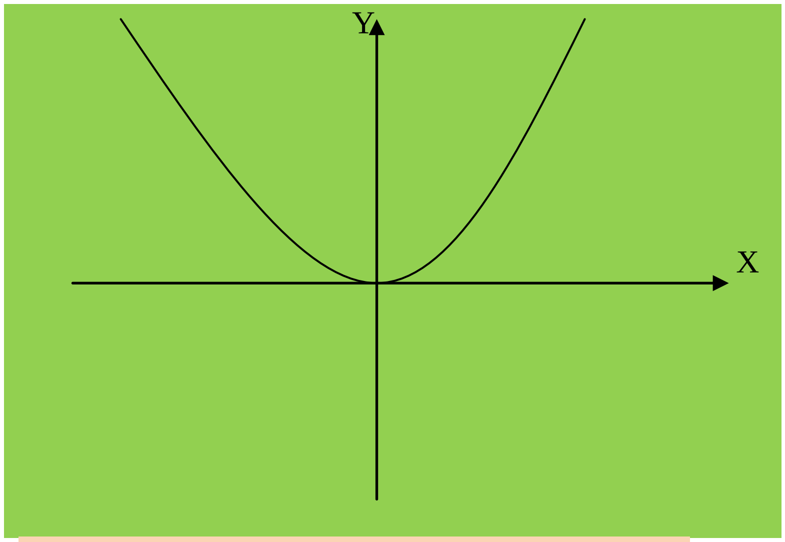
(le regrese su libreta a AO8 para la clase)</td></tr>
<tr><td>Indicación del docente
Pregunta del docente
Respuesta de alumno</td><td>M.- “Préstame tu apunte AA6, ¿En que nos quedamos?”

AO1.- “Variabilidad”.</td></tr>
<tr><td>Indicación del docente
Uso del pizarrón docente</td><td>M.- “Veamos esta función”
(Escribe en el pizarrón)
$f(x) = x^2$
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Ambiente del aula</td><td>(El maestro se sienta en su escritorio y pasa lista, al terminar, se para y continua llenando la tabla)</td></tr>
<tr><td>Pregunta del docente</td><td>M.- “Para equis igual a cero, ¿Cuánto vale f de equis?”</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AO3.- “cero”</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AA6.- “Para equis igual a uno la función vale uno”</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Comentarios</th><th>Inscripción</th></tr>
<tr><td>Pregunta del docente</td><td>M.- ¿Y para el dos?</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AO5.- “La función vale cuatro”.</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AO8.- “Para el tres, la función vale nueve”</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AO1.- “Y para el cuatro es 16”</td></tr>
<tr><td>Uso del pizarrón docente</td><td>(El maestro va llenando la tabla en el pizarrón)
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Pregunta del docente</td><td>M.- “Si comparamos los incrementos, ¿Cómo sería? Cuando comparamos incrementos, comparamos como se mueve la función. Veamos”.</td></tr>
<tr><td>Comentario de alumno</td><td>AO8.- “Esos plumones como huelen”</td></tr>
<tr><td>Pregunta del docente</td><td>M.- “En el ejemplo como son los incrementos”

O.- El maestro ignora el comentario del alumno sobre el olor de los plumones, tal vez el alumno lo hace con la intención de distraer la clase.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Comentarios</th><th>Inscripción</th></tr>
<tr><td>Uso del pizarrón docente</td><td>(El maestro escribe en el pizarrón)
Comparando incrementos
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>
$\left.\begin{matrix}\Delta x = 1 \\ \Delta f(x) = 1\end{matrix}\right\} \longrightarrow \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{1} = 1$
$\left.\begin{matrix}\Delta x = 1 \\ \Delta f(x) = 3\end{matrix}\right\} \longrightarrow \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{3}{1} = 3$
$\left.\begin{matrix}\Delta x = 1 \\ \Delta f(x) = 5\end{matrix}\right\} \longrightarrow \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{5}{1} = 5$
$\left.\begin{matrix}\Delta x = 1 \\ \Delta f(x) = 7\end{matrix}\right\} \longrightarrow \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{7}{1} = 7$</td></tr>
<tr><td>Explicación del docente
Pregunta del docente</td><td>M.- “El incremento de una función puede ser positivo o negativo. ¿Cómo es la gráfica de está función?</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AO1.- “Es una parábola”.</td></tr>
<tr><td>Respuesta de alumno</td><td>AO14.- “Parábola”.</td></tr>
</table>

Comentarios	*Inscripción*
Uso del pizarrón docente	(El maestro la dibuja en el pizarrón) O.- ¿Por qué el maestro no deja que la dibujen los alumnos? 
Ambiente del aula	(AA6 esta tocando a su compañero de enfrente por la espalda)
Pregunta del docente	M.- "AA6, ¿Qué paso contigo?, tan seriecita que te vez, nunca lo hubiera imaginado, y AO5 ¿te dejas?"
Respuesta de alumno	AA6.- Ja ja ja (Risa)
Respuesta de alumno	AO5.- "A mi no me molesta"
Respuesta de alumno	AO1.- "No le molesta"
Ambiente del aula	(Risas)
Respuesta de alumno	AS.- Auchhhh (En coro)
Indicación del docente	M.- "Vamos a ver ahora el concepto de derivada"
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) Concepto de derivada
Pregunta de alumno	AO8.- "¿Qué tanto va a dictar? Para saber el espacio que voy a ocupar"

Comentarios	*Inscripción*
Respuesta del docente	M.- "Depende de cada quien lo que dejen de espacio;
Uso del cuento	(platica la siguiente anécdota) a una niña en el kinder le pidieron una plana de la letra 'a' y la niña hizo lo siguiente en la hoja
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $\boxed{A}$ Con una 'a' lleno la plana, así que depende de cada quien el espacio"
Ambiente del aula	(Risas)
	O.- Me da la impresión de que el maestro utiliza el platicar anécdotas en clase para hacerla mas amena y les agrade a los alumnos.
Pregunta del docente	M.- "Se llama derivada, no esperen, esperen"
Respuesta de alumno	AS.- "Chale, Uhhh…. (En coro)
Pregunta del docente	M.- "Voy a empezar de otra manera; se llama función derivada o simplemente derivada al límite del incremento de la función respecto al incremento de la variable independiente cuando éste (este con acento porque es pronombre) tiende a cero. (Punto).
Explicación del docente	De acuerdo con esto la derivada es un límite cuando el incremento de la variable es infinitamente pequeño. Eso que les acabo de dictar se escribe así".
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$
	O.- El maestro dicta los conceptos, y los alumnos escriben bien las matemáticas eso indica que tienen un lenguaje simbólico (ya revise tres libretas)

Comentarios	*Inscripción*
Explicación del docente	M.- "Les dije que es una razón, también se puede escribir así".
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$
Explicación del docente	M.- "Esté (Señalando $f'(x)$ en el pizarrón) es el que más se usa y dicen que lo empezó a utilizar un matemático alemán de la época de Newton que se llamaba algo así como Godofredo Leibniz, se escribe así"
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) G. Leibniz
Explicación del docente	M.- "Creo que así se escribe y Godofredo es como Guillermo por acá. En los matemáticos hay una discusión sobre quien inició los estudios de Cálculo Diferencial, si Newton o esté alemán Leibniz; pues a cualquiera de ellos dos se les atribuye, por allá en los siglos XVI y XVII".
	O.- Me llama la atención que el maestro les de los datos históricos del surgimiento del calculo.
Pregunta de alumno	AO10.- "Y usted, ¿Quién cree que lo hizo?"
	O.- El alumno pide al maestro una postura teórica del surgimiento, pues uno fue desde la geometría y el otro desde la física.

Comentarios	*Inscripción*
Respuesta del docente	M.- “No importa quien, lo importante es que está aquí y que muchos más matemáticos lo siguen trabajando y quien sabe si ellos le pusieron Cálculo Diferencial; para Newton eran fluctuaciones. Pero este símbolo el que lo uso (Señalando $f'(x)$ en el pizarrón) fue Leibniz.
Explicación del docente	Fíjense bien, si tenemos una función, ye igual a f de x”
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $y = f(x)$
	O.- El maestro no se compromete, pero les habla de la simbología que utilizo cada uno de ellos y de sus perspectivas de estudio. Tengo que checar la simbología pues me parece que el maestro las tiene al revés.
Explicación del docente	M.- “Primero: Incrementando la variable en delta x”
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $y + \Delta x = f(x + \Delta x)$
Explicación del docente	M.- “Incrementamos las dos, porque incrementar una me lleva a incrementar la otra y como dijo AA6, el incremento es el valor final menos el inicial. Segundo: Restando de la función incrementada la función inicial”
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $$\begin{array}{l} y + \Delta x = f(x + \Delta x) \\ \underline{-\ y = -\ f(x) \qquad\qquad} \\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$
Pregunta del docente	M.- “¿De acuerdo?”

Comentarios	*Inscripción*
Silencio	(silencio)
	O.- Interpretar el momento de silencio, una de dos, o lo entienden perfectamente o no entienden nada.
Explicación del docente	M.- "Tercero: comparando los incrementos"
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Explicación del docente Pregunta del docente	M.- "Si comparamos aquí (señala la expresión que acaba de escribir en el pizarrón), comparamos acá, ¿De acuerdo?"
Silencio	(Silencio)
Explicación del docente	M.- "Cuarto: aplicando el limite cuando delta equis tiende a cero"
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Explicación del docente Pregunta del docente	M.- "Esto de aquí es lo mismo de acá (señala lo escrito debajo del concepto de derivada p. 8 r.24 R10B) ¿De acuerdo?"
Silencio	(Silencio)
	O.- Lo más seguro es que el silencio de los alumnos sea por que no entienden de lo que se les está hablando.

Comentarios	*Inscripción*
Uso del pizarrón docente	(El maestro escribe en el pizarrón) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Explicación del docente	M.- “Esto, es un modelo matemático general que representa la función derivada de una función primitiva. Lo que hemos hecho del paso primero al cuarto es el proceso de derivación”
Uso del pizarrón docente	(Escribe en el pizarrón) $\frac{dy}{dx}$; $f'(x)$; y'; $\mathring{Y}$
Explicación del docente Pregunta del docente	M.- “Estos son los símbolos para derivadas, ¿comprenden?”
Respuesta de alumno	AO1.- “La neta NO”
Respuesta de alumno	AA6.- “Más o menos, pero menos que más”
	O.- El silencio del grupo ya indiaba esto
Respuesta del docente	M.- “Espero que cuando empecemos a mecanizar quede más claro”.
	O.- ¿para que dar el procedimiento si se va a mecanizar?
Indicación del docente	M.- “Aquí vamos a dejar la clase. Quedamos en hacer examén, esta semana nos ponemos de acuerdo pues en la dirección hay problemas para las copias”.
Respuesta de alumno	AO10.- “No se preocupe”

Comentarios	*Inscripción*
Ambiente del aula	(El maestro sale del salón).
Ambiente del aula Ambiente del aula	O.- Los alumnos estibieron la mayor parte del tiempo en silencio, en la clase se les dio el procedimiento fromal de derivación eso me podría hacer pensar en un enfoque formal, el que se refiere a los procedimietos usados y sus deducciones; pero los alumnos fueron solo expectadores de la deducción del procedimiento de derivadas lo que tal vez proboco el silencio los ultimos comentarios sobre que no entendieron nada. En la entrevista con los alumnos ver este punto. Cuando el mestro mensiona a los alumnos que lo van a comprender cuando lo mecanicen situa a la enseñanza en el enfoque algoritmico, poniendo enfasis en el dominio operativo careciendo de comprensión y significado. Ver esto en la entrevista con el maestro.

3. Cuadro de indicadores

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
INTERVENCIÓN PEDAGOGÍCA Y APRENDIZAJE ESCOLAR

REGISTRO DE OBSERVACIÓN: 2B FECHA DE REALIZACIÓN: 6/oct/2009

INDICADOR	PAGINA 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	TOTAL
Contexto del aula																						
Uso del pizarrón docente					1	2	2	2		2	3	2										14
Uso del pizarrón alumno									1													1
Pregunta del docente			4	2	1	4	2	4	1	3	1	1	2	2								27
Pregunta del alumno			1		1		2					2	2	1								9
Respuesta del docente			1		2		3		2			1	2	3	1							15
Respuesta del alumno			5	4	1	8	2	2	3	2	1	1	3	5	1							38
Silencio								1														1
Explicación del docente			1	1	1		3	2		2	2	3										15
Uso de analogía																						
Indicación del docente				1	1				1		2	1	3									9
Ambiente del aula		3	1							2			2	2								10
Avance programático					1																	1
Comentario de alumno				1																		1
Comentario del docente					1										2							3
Uso del cuento											1											1
Tareas para los alumnos																						
Dictado																						
TOTAL		3	13	9	10	14	14	11	8	11	10	11	14	13	4							

1

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO LIMITE

4. cuadro de recurrencias

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
INTERVENCIÓN PEDAGOGÍCA Y APRENDIZAJE ESCOLAR

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Recurrencias ~~FRECUENCIAS~~ DE LOS INDICADORES

INDICADOR	Recurrencias ~~FRECUENCIAS~~ ESCUELA A (9)	Recurrencias ~~FRECUENCIAS~~ ESCUELA B (11)	TOTAL	
Contexto del aula	R1A(1), R2A(2), R3A(1) → 4	R1B(1) R4B(1) R11B(1) → 3	7	
Uso del pizarrón docente	R1A(15), R2A(18), R3A(7) R4A(18), R5A(6) R6A(16) R7A(7), R9A(2) → 89	R1B(33) R2B(14) R3B(22) R4B(5) R6B(16) R7B(16) R8B(18) R9B(21) R10B(16) R11B(25) → 186	275	
Uso del pizarrón alumno	R3A(2) R5A(8) → 10	R2B(1) → 1	11	1 ⊖
Pregunta del docente	R1A(30) R2A(42) R3A(27) R4A(20) R5A(23) R6A(37) R7A(11) R8A(1) → 191	R1B(32) R2B(27) R3B(40) R4B(30) R6B(26) R7B(37) R8B(20) R9B(32) R10B(14) R11B(10) → 268	459	2 ⊕
Pregunta del alumno	R1A(6) R2A(11) R3A(27) R4A(6) R5A(18) R6A(5) R7A(7) R8A(6) → 86	R1B(7) R2B(9) R3B(14) R4B(19) R6B(7) R7B(6) R8B(9) R9B(8) R10B(3) R11B(6) → 88	174	
Respuesta del docente	R1A(11) R2A(8) R3A(25) R4A(5) R5A(24) R6A(12) R7A(6) R8A(7) → 98	R1B(9) R2B(15) R3B(14) R4B(19) R6B(11) R7B(10) R8B(14) R9B(10) R10B(3) R11B(11) → 116	214	
Respuesta del alumno	R1A(34) R2A(41) R3A(49) R4A(32) R5A(35) R6A(39) R7A(21) R8A(3) R9A(2) → 256	R1B(37) R2B(38) R3B(44) R4B(41) R6B(30) R7B(40) R8B(33) R9B(24) R10B(23) R11B(19) → 329	585	1 ⊕
Silencio	R1A(2) R2A(7) R3A(2) R6A(5) R7A(4) → 20	R1B(3) R2B(1) R3B(1) R6B(3) R7B(5) R8B(2) R9B(11) R10B(3) R11B(5) → 34	54	
Explicación del docente	R1A(6) R2A(11) R3A(13) R4A(11) R5A(13) R6A(13) R7A(10) → 77	R1B(15) R2B(15) R3B(12) R4B(11) R6B(21) R7B(17) R8B(22) R9B(20) R10B(14) R11B(9) → 156	233	
Uso de analogía	/	R1B(3) → 3	3	
Indicación del docente	R1A(6) R2A(6) R3A(17) R4A(10) R5A(11) R6A(3) R7A(5) → 58	R1B(5) R2B(9) R3B(13) R4B(15) R6B(4) R7B(9) R8B(10) R9B(10) R10B(5) R11B(7) → 87	145	
Ambiente del aula	R1A(1) R2A(17) R3A(40) R4A(25) R5A(29) R6A(9) R7A(12) R8A(16) R9A(2) → 151	R1B(14) R2B(10) R3B(9) R4B(19) R5B(1) R6B(15) R7B(6) R8B(22) R9B(13) R10B(11) R11B(8) → 128	278	
Avance programático	R2A(2) → 2	R2B(1) → 1	3	
Comentario de alumno	R3A(11) R5A(5) R6A(2) R7A(3) R8A(6) R9A(1) → 28	R1B(2) R2B(1) R4B(10) R6B(8) R7B(1) R8B(3) R9B(7) R10B(2) R11B(1) → 35	63	
Comentario del docente	R3A(3) R4A(2) R5A(1) R6A(2) R7A(2) R8A(1) → 11	R1B(4) R2B(3) R3B(1) R4B(6) R6B(5) R7B(2) R8B(2) R9B(4) R10B(1) → 28	39	
Uso del cuento	/	R1B(1) R2B(1) R8B(1) R10B(1) → 4	4	
Tareas para los alumnos	R1A(2) → 2	/	2	2 ⊖
Dictado	/	R3B(6) R7B(10) R8B(1) → 17	17	

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN
EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO LÍMITE
INVESTIGADOR: EVELYN WARD

5. Cuadro de categoría

Categoría: **Ayuda entre pares**									
Escuela:	A	A	A	A	A	A	A	A	A
Día:	6 R1A	7 R2A	9 R3A	13 R4A	14 R5A	15 R6A	16 R7A	19 R8A	13 R9A
Mes:	10	10	10	10	10	10	10	10	11
Año:	2009	2009	2009	2009	2009	2009	2009	2009	2009
Investigador:	EW	EW	EW	EW	EW	EW	EW	EW	EW
Patrones emergentes	Página								
Preguntas del docente	30	42	27	20	23	37	11	1	
Preguntas de alumno	6	11	27	6	18	5	7	6	
Respuestas de alumno	34	41	49	32	35	39	21	3	2
Comentario de alumno			11		5	2	3	6	1
Uso del pizarrón alumno			2		8				

Categoría: **Ayuda entre pares**									
Escuela:	B	B	B	B	B	B	B	B	B
Día:	30 R1B	6 R2B	13 R3B	14 R4B	15 R5B	16 R6B	19 R7B	26 R8B	28 R9B
Mes:	9	10	10	10	10	10	10	10	10
Año:	2009	2009	2009	2009	2009	2009	2009	2009	2009
Investigador:	EW	EW	EW	EW	EW	EW	EW	EW	EW
Patrones emergentes	Página								
Preguntas del docente	32	27	40	30		26	37	20	32
Preguntas de alumno	7	9	14	19		7	6	9	8
Respuestas de alumno	37	38	44	41		30	40	33	24
Comentario de alumno	2	1		10		8	1	3	7
Uso del pizarrón alumno		1							

6. Tabla de Categorías y subcategorias

Categoría propia	**Categoría de autor**	**Patrones emergentes**	**Indicadores**
Intercambios comunicativos	Andamiaje	Ayuda entre pares	Preguntas del docente Preguntas de los alumnos Respuestas del docente Respuestas de los alumnos Comentarios del docente Comentarios de alumnos Explicación del docente Indicación del docente
		Solicitud de ayuda al maestro	
	Interacción en el aula	Uso de tiempo personal	Uso de tiempo Preguntas del docente Preguntas de los alumnos Respuestas del docente Respuestas de los alumnos Comentarios del docente Comentarios de alumnos
		Recuerdos académicos	
		Organización de las actividades	

Fuente: Documental. Elaboración propia mayo de 2010

Categoría propia	Categoría de autor	Patrones emergentes	Indicadores
Estilo de enseñanza	Mediación	Interrogantes	Preguntas del docente Preguntas de los alumnos Respuestas del docente Respuestas de los alumnos Comentarios del docente Comentarios de alumnos Risas Tarea para los alumnos Indicación del docente Interrupciones Explicación del docente Trabajo en clase
		Organización de la actividades	
		Recuerdos académicos	
	Enfoques de enseñanza en Cálculo (Matemáticas)	Algoritmo	Preguntas del docente Preguntas de los alumnos Respuestas del docente Respuestas de los alumnos Uso del pizarrón docente Uso del pizarrón alumno Explicación del docente
		Formalización	
		Mecanización	
	Métodos de enseñanza	Gráficamente	Preguntas del docente Preguntas de los alumnos Respuestas del docente Respuestas de los alumnos Uso del pizarrón docente Uso del pizarrón alumno Explicación del docente Indicación del docente
		Aproximaciones sucesivas	
		Definición espontanea	
	Técnica de enseñanza	Analogía	Uso de analogía Uso del cuento Dictado Indicación del docente Explicación del docente
		Cuento	
		Dictado	

Fuente: Documental. Elaboración propia mayo de 2010

7. Tabla de triangulación teórica

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	***Categorías teóricas*** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Contexto del aula Comprensión (explicación) de las diferentes situaciones que se presentan en el aula. Se expresa en la situación física o infraestructura del salón, las metas que el grupo pueda tener sobre sus propios procesos y en los recuerdos académicos en los que están inmersos, así como en las tradiciones explicitas e implícitas que se tienen debido al diario interactuar entre los individuos y los saberes.	(Siegel & Cohen, 1991) Contexto. Un hogar connota actores humanos que mantienen relaciones con otras personas, organizaciones ideosincráticas de las pertenencias en el espacio, recuerdos (tradiciones), y metas. Son justamente estas cosas esenciales lo que distingue “los contextos” de los “entornos” y da una nueva apariencia a sus características topográficas. (Ferreyra, 1989: 18) Habitus El habitus no es una categoría psicológica, puesto que se forma como resultado de condiciones objetivas, exteriores a la persona, propias del medio social. La persona incorpora el contenido social – constituido por gustos, valores, costumbres, hábitos, creencias- que, una vez internalizado, se transforma en un esquema que permite valorar y generar prácticas sociales. Este esquema es producto tanto de una historia personal como colectiva.
Sociograma Descripción física de los lugares que ocupan los integrantes de un grupo.	(Bauleo, 1989: 14) Sociograma. “En el sociograma, diagrama de una situación grupal, se ubicaran las posiciones de cada integrante de un grupo, la interacción con los demás, el grado de sentimiento, atracciones y rechazos;”
Metas o propósitos del grupo Intensiones de un grupo por lograr un cometido, pueden ser implícitas o explicitas. Están involucrados alumnos y docentes, las metas son así, el resultado de los comportamientos, conductas y representaciones de los integrantes del grupo.	(Bauleo, 1989: 23) Estructura resultante. La estructura resultante y responsable de la conducta grupal sería consecuencia de las coincidencias, divergencias, y oposiciones de las diversas representaciones del Yo y del Otro puestas en juego en los distintos momentos del movimiento grupal.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete	***Categorías teóricas*** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Tradiciones Usos y costumbres del quehacer cotidiano de los grupos, sus formas de comportarse y de expresarse. Las tradiciones le dan al grupo una estructura particular propia, construida por los comportamientos de los integrantes del grupo.	(Bauleo, 1989: 23) El comportamiento grupal. El comportamiento grupal, por lo tanto, va a ser el resultado de la estructura interaccional puesta en juego en los sujetos. La interacción que se establece constituye una estructura, que es la convergencia de las estructuras de interacción puestas en movimiento en los sujetos integrantes del grupo. (Morris,1989: 77) La interacción de la clase. La interacción de la clase se puede considerar como un proceso de iniciación social mediante el cual, el individuo aprende las diversas formas de comportamiento según los diversos contextos sociales y las consecuencias de adoptar una u otra forma.
Recuerdos académicos Recuerdos de cursos anteriores, hacen referencia a contenidos teórico-prácticos que los alumnos deben conocer para poder adquirir el nuevo conocimiento.	(Vigotski; 1979: 133) Nivel de desarrollo real. Si nos preguntamos ingenuamente qué es el nivel real de desarrollo, o, para decirlo de modo más simple, qué es lo que revela la resolución independiente de un problema, la respuesta más común será que el nivel de desarrollo real del niño define funciones que ya han madurado, es decir, los productos finales del desarrollo. Si un niño es capaz de realizar esto a aquello de modo independiente, significa que las funciones para tales cosas han madurado en él.
Uso del tiempo personal Forma en que los estudiantes utilizan o distribuyen la hora clase.	(Vigotski; 1979: 104) Estudio Histórico. Estudiar algo desde el punto de vista histórico significa, por definición, estudiar sucesos pasados. Por ello imaginan que existe una barrera infranqueable entre el estudio histórico y el estudio de las formas de conducta actuales. *Estudiar algo desde el punto de vista histórico significa estudiarlo en su proceso de cambio.* Esta es la exigencia básica del método dialéctico.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	***Categorías teóricas*** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Ambiente áulico Todo lo que sucede en el salón de clases y la forma en que se van manifestando, ya sean procesos, tareas, trabajos, preguntas, etc. Lo enmarca: el tiempo en el que se desarrolla la clase, el cual está establecido en un horario escolar, los diálogos que se dan en el salón de clases, la evolución de los eventos y la rapidez con la que se dan los mismos.	(Doyle, 1986) Características del ambiente áulico: Multidimensionalidad: se refiere a la gran cantidad de procesos, tareas, propósitos. La clase es una ida y venida se conforman subgrupos. Simultaneidad: es cuando en un mismo instante suceden muchas cosas distintas que no se unifican en una misma acción. Por ejemplo en una discusión hay preguntas individuales. Inmediatez: es la rapidez en que trascurren los sucesos del aula, generando poco tiempo para reflexionar antes de actuar. Impredictibilidad: los hechos del aula toman un giro inesperado. Distracciones, interrupciones frecuentes. Publicidad: las conductas son visibles para todos los participantes. Historicidad: la clase transcurre en un tiempo prolongado diario, semanal y anual. Generando rutinas, experiencias. Coll y Solé (1995) Interacción educativa Interacción educativa evoca situaciones en las que los protagonistas actúan simultánea y recíprocamente en un contexto determinado, en torno a una tarea o un contenido de aprendizaje, con el fin de lograr unos objetivos más o menos definidos. Los componentes intencionales, contextuales y comunicativos inherentes a la interacción educativa se presentan mal a ser estudiados mediante los sistemas de categorías. (p. 320).

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	***Categorías teóricas*** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Horario (escolar) Tiempo establecido por la institución para el desarrollo de la clase.	(Doyle, 1986) Características del ambiente áulico. Historicidad: la clase transcurre en un tiempo prolongado diario, semanal y anual. Generando rutinas, experiencias.
Sucesión de eventos Secuencia en la organización y desarrollo de la clase por el maestro, se expresa en la forma en que se emprenden los temas: gráficamente, formalización, mecanización, algoritmos, aproximaciones sucesivas, definiciones espontáneas, etc.	(vigotski, 1979) Sucesos evolutivos. El proceso de internalización consiste en una serie de transformaciones: d) *Una operación que inicialmente representa una actividad externa se reconstruye y comienza a suceder internamente.* e) *Un proceso interpersonal queda transformado en otro intrapersonal.* f) *La transformación de un proceso interpersonal en un proceso intrapersonal es resultado de una prolongada serie de <u>sucesos evolutivos.</u>* La internalización de las formas culturales de conducta implica la reconstrucción de la actividad psicológica en base a las operaciones con signos. (…) El uso de los signos externos se reconstruye también radicalmente. Los cambios evolutivos en las operaciones con signos son semejantes a aquellos que se producen en el lenguaje. Los aspectos del lenguaje externo o comunicativo, así como los del lenguaje egocéntrico, se “internalizan” para convertirse en la base del lenguaje interno. La internalización de las actividades socialmente arraigadas e históricamente desarrolladas es el rasgo distintivo de la psicología humana, la base del salto cualitativo de la psicología animal a la humana.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Platicas Son las interacciones comunicativas a través del lenguaje que se dan entre los integrantes de un grupo (profesor-alumno, alumnos-alumnos).	(vigotski, 1979) Lenguaje humano El lenguaje humano es, con mucho, la conducta más importante relativa al uso de signos en el desarrollo infantil. A través del lenguaje el niño se libera de muchas de las limitaciones inmediatas de su entorno. Se prepara, con ello, para una actividad futura; proyecta, ordena y controla su propia conducta, así como la de los demás. El lenguaje es también un excelente ejemplo del uso de los signos que, una vez internalizado, se convierte en una parte importante de los procesos psicológicos superiores; el lenguaje actúa para organizar, unificar e integrar los distintos aspectos de la conducta de los niños, como la percepción, la memoria y la resolución de problemas. (Lemke, 1997) Lenguaje del aula El lenguaje del aula no es tan sólo una lista de términos técnicos, ni siquiera una letanía de definiciones. Es el uso de esos términos relacionados unos con otros en una amplia variedad de contextos. Los alumnos tienen que aprender a *combinar los significados* de los diferentes términos según las formas aceptadas de hablar científicamente. Deben hablar, escribir y razonar en frases, oraciones y párrafos de lenguaje científico.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Rapidez en el cambio de las actividades Es el tiempo en el que suceden las actividades en el salón de clases y por lo general son inmediatas.	(Doyle, 1986) Simultaneidad: es cuando en un mismo instante suceden muchas cosas distintas que no se unifican en una misma acción. Por ejemplo en una discusión hay preguntas individuales. Inmediatez: es la rapidez en que trascurren los sucesos del aula, generando poco tiempo para reflexionar antes de actuar. Impredictibilidad: los hechos del aula toman un giro inesperado. Distracciones, interrupciones frecuentes.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Diálogos Son los intercambios comunicativos a través del lenguaje humano ya sea entre iguales o con el profesor; se dan en el aula durante las actividades cotidianas que realizan los integrantes de los grupos.	(Coll y Colombina, 1995: 35) Intercambios comunicativos. La clave del proceso de interiorización he de buscarse en el análisis de los intercambios comunicativos que tienen lugar durante la actividad conjunta y, más concretamente, en la manera de cómo dichos intercambios influyen sobre las representaciones y significados que construyen los participantes. (vid. Aguilera, 2000) Dialogo Interacción verbal entre dos o más sujetos, caracterizada por la existencia de turnos, escucha usualmente atenta y discusión abierta, la cual implica procesos cognitivos inferenciales de carácter individual y social (cognición compartida y construida) y la emisión de opinión por los sujetos. En "Un sistema para el análisis de la interacción en el aula"; Antonio Velasco Castro, Universidad de los Andes, Venezuela.
Ayuda entre pares Se le llama ayuda entre pares a las indicaciones o explicaciones que se proporcionan los propios alumnos.	(00012986. Pdf, p.14) Interacciones entre pares. • Otras modalidades de los intercambios lingüísticos en clase, se relacionan con las interacciones entre pares en el seno de las actividades escolares. • La interacción entre pares ameriza, un tratamiento particular dentro y fuera de los contextos escolares. En el contexto escolar cobran gran relevancia en el dominio de formas cursivas particulares, por el hecho de que las interacciones docente‒alumno no presentas usualmente. • En la interacción entre pares es frecuente que los niños alternen los roles de indagar y responder, suministrar información o solicitarla, seguir indicaciones y darlas.

Coll y Colombina (1995: 343) La colaboración entre iguales

En la *colaboración entre iguales,* dos –o eventualmente más- alumnos relativamente novatos en una tarea trabajan juntos de forma interrumpida en su desarrollo y resolución. Contrariamente a lo que sucede en el caso de las relaciones tutoriales, los participantes poseen aproximadamente el mismo nivel de habilidad y competencia; y, contrariamente también a lo que suele ser habitual en el aprendizaje cooperativo, los participantes trabajan juntos durante todo el tiempo en la ejecución de la tarea en lugar de hacerlo individualmente o por separado en los diferentes componentes de la misma. Las relaciones de colaboración se caracterizan, pues, en principio, por un elevado grado de igualdad entre los miembros y por un elevado grado de mutualidad en las transacciones comunicativas.

(Coll y Colombina, 1995: 337) El proceso de socialización.

El proceso de socialización. (…) los iguales conforman el medio ambiente inmediato que causa mayor impacto sobre el alumno en la escuela, puesto que, en comparación con la interacción profesor-alumno, la interacción entre iguales es mucho más frecuente, intensa y variada. (…) tiene la oportunidad de elaborar pautas de comportamiento comunicativo, agresivo, defensivo y cooperativo que serán esenciales en su vida adulta. (…) los niños y adolescentes aprenden las habilidades y comportamientos que deben adquirirse y exhibirse en un ambiente determinado, el modo de hablar, el tipo de indumentaria, el estilo de corte de pelo, la música que se prefiere, lo que es definido como agradable y desagradable, etc.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Solicitud de ayuda al docente Son las formas en la que los estudiantes requieren ayuda a los docentes. La solicitud de ayuda al docente tiene lugar en el ambiente áulico y sucede por la propia petición de los alumnos.	Coll y Solé (1995) Grado de ayuda del adulto Las acciones y verbalizaciones de las madres son clasificadas en cinco categorías atendiendo al nivel creciente de directividad, intervención, ayuda que proporcionan para resolver la tarea: desde el nivel 1, en el que la ayuda es mínima (palabras de estímulo, aliento), hasta el nivel 5, que representa en mayor grado de ayuda (demostración de cómo se resuelve la tarea), pasando por tres niveles intermedios (llamar la atención sobre aspectos importantes de la tarea; ayudar a seleccionar el material; proponer el material a utilizar en cada momento). (p. 325). (Becco, s/r: p. 14) Mediación. La Mediación quiere asegurar el proceso, favorecer la modificabilidad e incrementarla; su objetivo es producir un nivel más abstracto de pensamiento. Las preguntas se centran en el qué o cambio cognoscitivo; el por qué u objetivo que se persigue; y el cómo o método que permite el cambio cognitivo de un modo sistemático. La pregunta ayuda a definir problemas, a realizar inferencias, a hacer hipótesis, a extraer reglas y principios... con tendencia a elevar el nivel cognitivo a partir de las tareas. (Coll y Solé, 1995: 322) Papel del profesor. El verdadero papel del profesor consiste en actuar de intermediario entre los contenidos de aprendizaje y la actividad constructiva que desplieguen los alumnos para asimilarlos. Es el profesor quien determina en gran medida, con sus actuaciones, que la actividad del alumno sea más o menos constructiva, que se oriente en uno u otro sentido y, en definitiva, que genere unos determinados aprendizajes. (Bruner) Andamiaje.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	Categorías teóricas (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Organización de las actividades Es la manera en que se dispone el proceso enseñanza aprendizaje para la construcción y reconstrucción de los saberes. En ella intervienen las acciones tanto de los alumnos como las del docente y la forma en que estas interactúan en el contexto escolar o el ambiente áulico.	(Ferreyra, 2007: 28) Prácticas Pedagógicas. En la práctica pedagógica se concentra el proceso de aprendizaje y enseñanza que implica dos dimensiones interdependientes, con características diferentes y específicas, en torno a la construcción y reconstrucción del conocimiento. Es decir, el proceso está compuesto por los intercambios funcionales que se establecen entre los docentes y los estudiantes acerca de los contenidos que unos desean enseñar y otros aprender, en un contexto determinado que posee características propias que lo condicionan (Gvirtz y otros, 1998). (Coll y Colombina, 1995). Estructuras meta. Se da una estructura *cooperativa* cuando los objetivos que persiguen los participantes están estrechamente vinculados entre sí, de tal manera que cada uno de ellos puede alcanzar sus objetivos si, y solo si, los otros alcanzan los suyos. (…) los resultados que persigue cada miembro del grupo son igualmente beneficiosos para los restantes miembros con los que está interactuando cooperativamente. En la estructura *competitiva*, los objetivos o metas de los participantes están relacionados de manera que existe una correlación negativa entre su consecución por parte de los implicados; a saber un alumno puede alcanzar la meta que se ha propuesto si, y sólo si, los demás alumnos no pueden alcanzar la suya. (…) en una estructura *individualista* no existe relación alguna entre el logro de los objetivos o metas que se proponen alcanzar los participantes. (…) cada alumno persigue resultados individuales siendo irrelevantes los resultados obtenidos por los otros miembros del grupo”. (pp. 339-340).

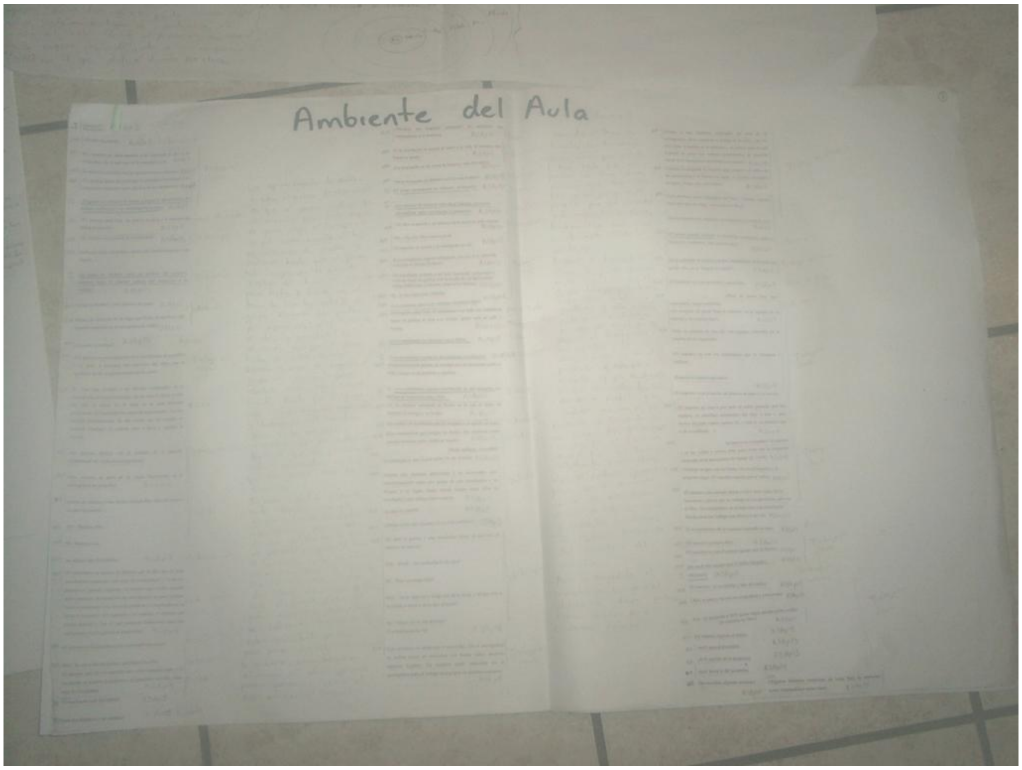
Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
	(Coll y Colombina, 1995). Principales conclusiones de Johnson y sus colegas vi) Las situaciones cooperativas son superiores a las competitivas en cuanto al rendimiento y la productividad de los participantes. vii) Las situaciones cooperativas son superiores a las individualistas en cuanto al rendimiento y la productividad de los participantes. viii) La cooperación intragrupo con competición intergrupo es superior a la competición interpersonal en cuanto al rendimiento y la productividad de los participantes. ix) La cooperación sin competición intergrupos es superior a la cooperación con competición intergrupos en cuanto al rendimiento académico y la productividad de los participantes. x) No se constatan diferencias significativas entre la competición interpersonal y los esfuerzos individuales en cuanto al rendimiento académico y la productividad de los participantes. (p. 341).

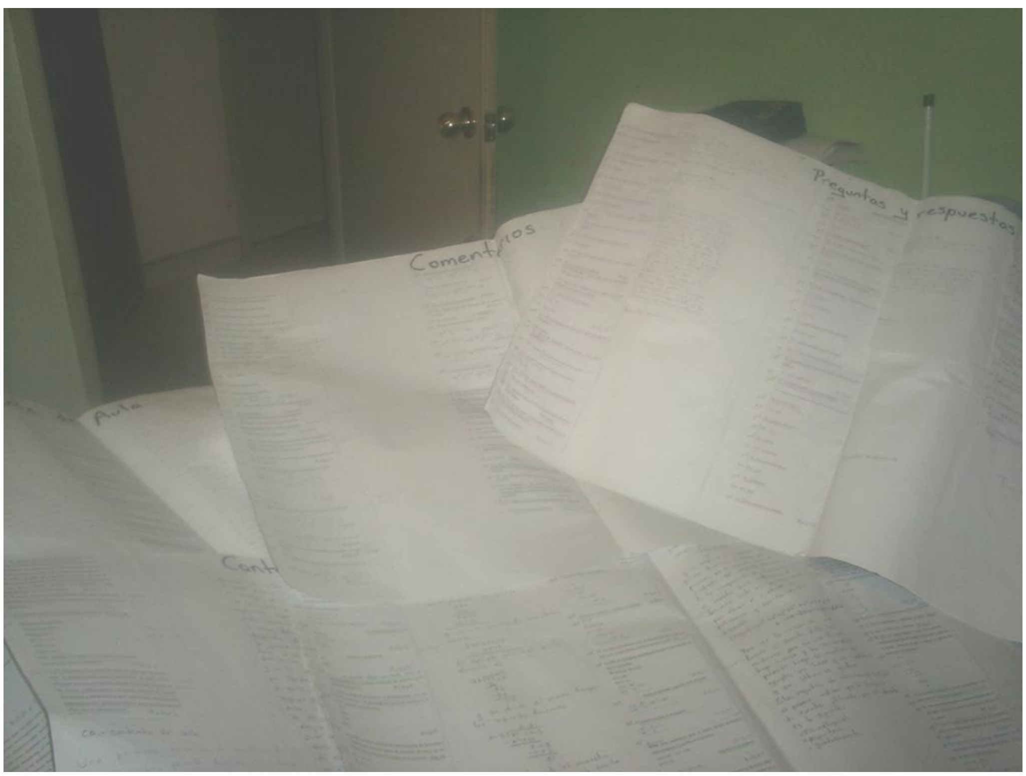
Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Actividades del docente Son todas las acciones que el docente realiza en quehacer diario del aula, desde pasar lista, planificación de actividades, organización de la estructura del grupo, tareas, exámenes, etc. Dentro de las actividades del docente esta el enfoque de enseñanza que utiliza, la metodología empleada en clases así como las técnicas de enseñanza.	(Ferreyra, 2007: p. 29) Soluciones docentes. Según Schön, el docente puede acercarse a solucionar los problemas de dos maneras distintas: una, a través de la *racionalidad técnica.* Se trata del profesor técnico-especialista que aplica las reglas y procedimientos preestablecidos científicamente y enfrenta los problemas aplicando los instrumentos adquiridos de manera científica. La otra manera es la de la *racionalidad práctica:* el docente es considerado un artista, una persona que reflexiona continuamente sobre su propia práctica para adoptar decisiones propias coherentes con la problemática planteada y no meras recetas aportadas por otros". (Ferreyra, 2007: p. 30). Conjugación de tres procesos. El docente, en la faz de diseño del currículo, tal como lo venimos afirmando, toma numerosas decisiones (qué va a enseñar, cómo organizar los contenidos y las estrategias didácticas acordes con cada caso, los medios evaluativos, etc.). sin embargo, en el momento en que el currículo entra en su fase de desarrollo (reflexión en la acción), se conjugan otros factores, productos interacción propia del proceso de aprendizaje y enseñanza, que obligan al docente a revisar (reflexión sobre la acción) lo programado en función de la dinámica propia que se entabla entre los estudiantes y el profesor y entre éstos y sus otros compañeros". (Fenstermacher-Soltis,1998) Enfoques de enseñanza. Métodos de enseñanza. Técnicas de enseñanza.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
Dudas Son las decisiones y acciones que tienen que ver con las creencias y la validez del conocimiento, la duda a veces implica inseguridad en la validez.	(Leon Festinger, 1957). Teoría de la disonancia cognitiva. señala que en la mente de los sujetos se puede distinguir una serie de conocimientos o elementos (cogniciones) "... es decir todo lo que una persona sabe acerca de sí misma, de su conducta y de sus circunstancias" y que algunos de estos conocimientos pueden ser contradictorios, no sólo desde el punto de vista lógico, sino también desde el psicológico, entre sí, p. ej., la idea de que el código de la circulación ha de ser respetado puede estar en contradicción con el conocimiento de que en este momento me estoy saltando un semáforo rojo. Esta contradicción es lo que el autor denomina disonancia cognitiva. Cuando hay disonancia cognitiva, el sujeto se ve motivado a reducirla. Para ello ha de cambiar su conducta, si ello es posible, y si no lo es, lo cual ocurre en muchos casos, entonces tratará de cambiar sus cogniciones o la valoración de las mismas. Hemos de entrar en un conflicto con respecto a nuestra toma de decisión, pero para que ésta sea disonante necesita ser forzosamente relevante para nosotros. Es decir, las personas nos seleccionamos aquellas percepciones que nos confirman nuestros pensamientos independientemente de si son hechos reales o no con tal de reducir nuestra disonancia cognitiva.

Categorías del investigador (composición de las categorías sociales y categorías de interprete)	**Categorías teóricas** (Categorías teóricas y descubrimientos de otros investigadores)
	(Coll y Colombina, 1995: p. 346). Controversias. La controversia se distingue de la confrontación en que en la primera existe una voluntad de superar las discrepancias entre las ideas, creencias, informaciones, opiniones o puntos de vista en presencia. Cuando se resuelven satisfactoriamente, las controversias pueden tener un efecto positivo sobre la socialización, el desarrollo intelectual y el aprendizaje escolar. En caso contrario, es decir, cuando no se manejan y no se resuelven adecuadamente, las controversias pueden tener efectos negativos.

8. Fotos de sabanas de análisis





9. Fragmento de texto interpretativo de sábana de análisis

ANÁLISIS DE SABANA: Ambiente del aula, escuela A-1

Una aproximación de análisis a estos registros de observación es que al parecer indican que el maestro pasa lista después de poner algo de trabajo al grupo, como cuando ve las equivalencias de grados a radianes, hasta que el grupo esta copiando lo que se explico del tema, el maestro pasa lista; o cuando ve el tema de límites solicita al grupo elaboren una gráfica por aproximaciones sucesivas a tres, y mientras los alumnos trabajan el pasa lista, de modo similar sucede cuando se organiza al grupo en equipos para resolver unos ejercicios de límites, hasta que el grupo esta completamente organizado y trabajando el maestro pasa lista, en estos registros se puede observar también que son precisamente estos momentos, en los que el grupo esta en silencio.

Así mismo en estos registros e puede notar que el grupo sufre de constantes interrupciones por retardos de los estudiantes, lo que probablemente sea por la hora de la clase, pues es a la primera hora (7:00 hrs.) tres días y a la segunda (7:50 hrs.) los otros dos días mismos que toa después de dibujo y se retrazan mucho recogiendo los materiales, lo que ocasiona que lleguen por turnos a clase, que entren a diferentes tiempos y que estén solicitando permiso para pasar a clase, interrumpiendo lo misma; pero también alumnos de otros grupos piden permiso para entrar, como el día en que el maestro iniciaba el tema de límites y lo interrumpieron varias veces para pedirle butas, hasta que el profesor les dijo que sacaran unas tres al pasillo para que no estén interrumpiendo mi clase., por otra parte llegan exalumnos e interrumpen desde la ventana.

Respecto al trabajo de clase, se puede observar en los registros que el grupo trabaja preguntándose entre ellos y esto es más notorio en el trabajo en equipo, en el que se observa el diálogo en los equipos y la solicitud de ayuda al profesor, él atiende a cada equipo acudiendo a sus llamados, así como a la hora de salida ya sea en el pizarrón o en su escritorio, siempre los atiende. Ese mismo día del trabajo en equipos al final se acerco a su escritorio un estudiante al parecer a consultarle algo, poco a poco se le fueron acercando más y se escuchaban dudas de los ejercicios, al finalizar todos los estudiantes se alejaron sonriendo del escritorio del maestro.

Para la despedida el maestro por lo general utiliza la frase “pórtense como quieran pero cuídense mucho”.

10. Fragmento de texto analítico

Contexto del aula

Se pretende explicar los procesos de cambio que se producen en el aula de Cálculo en particular los cambios que se dan en el tema de límites, pero estos cambios están enmarcados en un contexto, el del aula.

El aula es un contexto constituido por personas, lo esencial en un contexto son los actores, metas y recuerdos, y esto es precisamente lo que lo distingue de un entorno, y el aula esta inmersa en procesos colectivos que involucran metas y recuerdos sobre todo recuerdos académicos, para el caso de Cálculo, los actores son los estudiantes de tercero de preparatoria de la fase especializada de ciencias físico-matemáticas; el propósito que tienen ellos de aprender o no, de participar, de involucrarse en las actividades propuestas por el docente o sus compañeros están implícitas las metas, y en Cálculo juegan un papel importante los recuerdos académicos de aritmética, algebra, geometría, trigonometría y funciones.

> “Un hogar connota actores humanos que mantienen relaciones con otras personas, organizaciones ideosincráticas de las pertenencias en el espacio, recuerdos (tradiciones), y metas. Son justamente estas cosas esenciales lo que distingue “los contextos” de los “entornos” y da una nueva apariencia a sus características topográficas”. (Siegel & Cohen, 1991).

El contexto del aula entonces se expresa en la situación física o infraestructura del salón, las metas que el grupo pueda tener sobre sus propios procesos y en los recuerdos académicos en los que están inmersos.

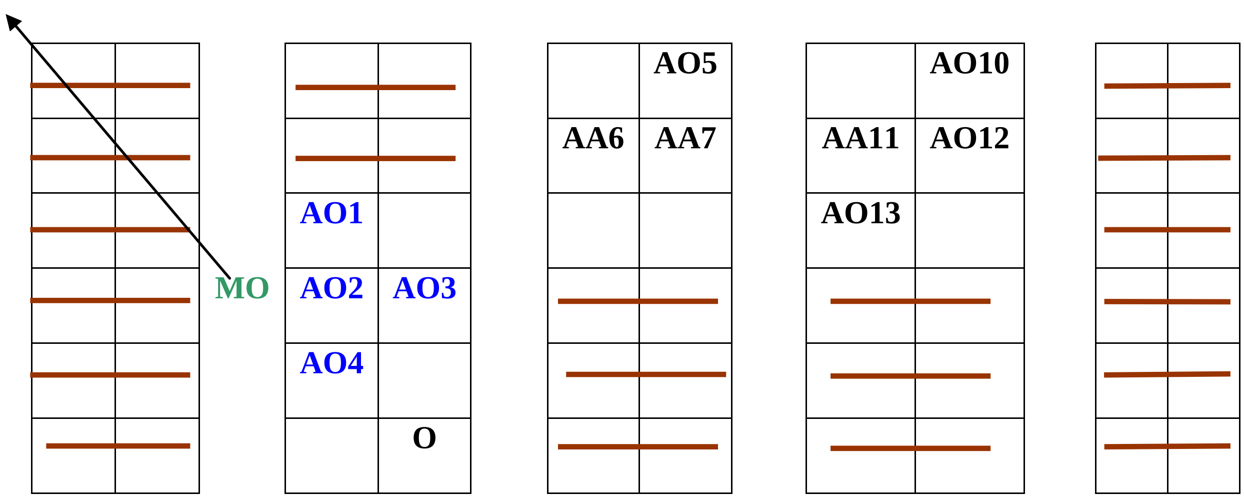
El contexto físico de las aulas es adecuado pues son amplias con suficiente ventilación, están cuidadas, recién pintadas en color claro lo que aunado a sus grandes ventanas en ambos lados del salón proporcionan buena iluminación, una cuenta con alrededor de 30 butacas (individuales) grises distribuidas en seis filas, otra con 30 mesas blancas cada una con dos sillas y distribuidas en cinco filas; siempre estuvieron algunas butacas o sillas en desorden, lo que se puede apreciar en el sociograma de cada observación, en ellos mismos se puede notar la tradición de cada grupo sobre el acomodo pues tienen asignados implícitamente los lugares, los estudiantes suelen sentarse regularmente en un área del salón de clases, de hecho durante las observaciones sólo se cambiaron de lugar ocasionalmente y por lo general para trabajar en equipos.

> "En el sociograma, diagrama de una situación grupal, se ubicaran las posiciones de cada integrante de un grupo, la interacción con los demás, el grado de sentimiento, atracciones y rechazos;" (Bauleo, 1989: 14).

La forma en la que los estudiantes se acomodan día con día y que se expresa en los sociogramas de las observaciones son parte del contexto físico del aula, a continuación se muestra un ejemplo de cada escuela

	AO	AO	AA			
	AO	AO	AO	AO		AO
-	-	AO	AO	AO	-	AO
AO	AO	AO	-	AO	-	-
AO	AO	AO	AO	O	AO	AO

Escuela A (R3A, p. 1: 9-10-09)



Escuela B (R3B, p. 1: 13-10-09)

11. Transcripción de entrevista de alumno

TRANSCRIPCIÓN DE ENTREVISTA ALUMNO (1) ESCUELA A

DATOS GENERALES

NOMBRE DEL ENTREVISTADO: XXXXXXX

EDAD: 19 años **SEXO:** Masculino

GRADO: Tercero de bachillerato

GRUPO: 3CFM1

FASE ESPECIALIZADA: Ciencias físico- matemáticas

INSTITUCIÓN: Preparatoria de la Universidad Autónoma de Sinaloa

LUGAR: Colonia, Culiacán, Sinaloa

CLASE: Media baja - baja

ASIGNATURA: Cálculo I

FECHA DE REALIZACIÓN: 1 de marzo de 2010

LUGAR DE LA ENTREVISTA: Salón de maestros

HORA DE INICIÓ: 7:10 hrs.

HORA QUE FINALIZO: 7:28 hrs.

ENTREVISTADOR: EW

TRANSCRIPCIÓN: EW

FECHA DE LA TRANSCRIPCIÓN: 1 de marzo de 2010

Simbología:
I.- Investigador (Entrevistador)

ENTREVISTA

La sala de maestros es un lugar que está ubicado al final del pasillo donde se encuentra el salón 301**,** es un lugar agradable**,** no tiene ventanas, la puerta es de metal, está pintado de amarillo muy claro, en cuanto entras de frente a la puerta se encuentra un librero y una computadora, a la izquierda un escritorio, en el medio del salón una mesa de madera con cuatro sillas, le siguen dos muebles con sus computadoras y al fondo se puede observar un mueble con televisión y video o DVD. Nos colocamos en la mesa redonda y nos acomodamos de frente. La grabadora me fallo por lo que tuve que registrar toda la entrevista en mi diario.

I.- Hola, buenos días.

“Buenos días”.

I.- ¿Cómo has estado?

“Bien, pasándola”.

I.- ¿ya decidiste lo que vas a estudiar?

“Si, gastronomía”.

I.- ¿En la UAS?

“Yo creo, pero voy a ir hoy a ver la Universidad de Durango a ver qué tal”.

I.- (El alumno trae su libreta de Cálculo I y me la da en cuanto llega conmigo) Sobre el tema de límites, ¿Qué recuerdas?

“No mucho, pero si, algo se me ha de ver quedado”.

I. A ver, ¿Qué fue lo que te quedo?, ¿Qué recuerdas que es un límite?

“Nada”.

I.- Bueno vamos a recordar un poco de aquí de tu libreta se observa que son aproximaciones por tablas, hay sustituciones directas y también factorizaciones cuando da cero entre cero (hojeando la libreta mostrándosela al alumno) ¿Cómo se llama a eso?

“Sabe”.

I.- ¿Cuáles se te hicieron más difíciles?

“Los que tendían a infinito, esos me fallaban, se me dificultaba para hacerlos despejar”.

I.- bueno y, ¿Qué es un límite?

“Nos ayuda, este no sé, a sacar los máximos y mínimos de este (hojea su libreta), de hecho ya no me acuerdo”.

I.- ¿En donde los puedes utilizar?

“No sé”.

TRANSCRIPCIÓN DE ENTREVISTA ALUMNO ESCUELA B

DATOS GENERALES

NOMBRE DEL ENTREVISTADO: XXXX

EDAD: ____________ **SEXO:** Masculino

GRADO: Tercero de bachillerato

GRUPO: 5CFM1

FASE ESPECIALIZADA: Ciencias físico- matemáticas

INSTITUCIÓN: Preparatoria de la Universidad Autónoma de Sinaloa

LUGAR: Colonia Centro; Culiacán, Sinaloa

CLASE: Media-Media baja

ASIGNATURA: Cálculo I

FECHA DE REALIZACIÓN: 10 de marzo de 2010

LUGAR DE LA ENTREVISTA: Aula 3 (Segundo piso)

HORA DE INICIÓ: 17:50 hrs.

HORA QUE FINALIZO: 18:18 hrs.

ENTREVISTADOR: EW

Simbología:

I.- Investigador (Entrevistador)
AO12.- Alumno entrevistado
AA11.- Alumna

ENTREVISTA

Al llegar a la prepa Flores Magon los muchachos estaban saliendo, pero alcanzó a Luis en las escaleras, viene con su novia (AA11), le pido que si me puede explicar algo de los apuntes en su libreta que le quito sólo unos minutos, el voltea a ver a la novia y accede, subimos y entramos al primer salón (aula 502). Me atiende de buena manera, la novia esta triste pues al parecer le fue mal en un examen que acaban de presentar.

I.- Hola, ¿ya salieron?

AO12.- "Si tuvimos examen". (Viene con la novia, AA11)

I.- ¿Te puedo hacer unas preguntas de tus notas?, no te quito mucho tiempo

AO12.- (Voltea a ver a la muchacha, ella asienta con la cabeza) **"Bueno, vamos a un salón".**

I.- ¿De que fue el examen? (subiendo por las escaleras)

"De Cálculo".

I.- ¿Cómo les fue?

AO12.- "Yo creo que bien".

AA11.- "A mi, mal" (Abraza a Luis)

I.- ¿Por qué dices que te fue mal?

AA11.- "No, factorice bien".

AO12.- "Yo si factorice bien, pero borre y luego lo hice mal, no te preocupes".

17: 54 en el salón 502

I.- ¿estas son tus notas? (muestra unas copias)

AO12.- "Si".

I.- Esta es la definición de límite

AO12.- "Son aproximaciones sucesivas el método que vimos"

I.- Mira aquí tienes esta definición (le muestra copias de sus apuntes) ¿Qué significa Épsilon?

AO12.- "Es una aproximación ya sea por la derecha o por la izquierda, como por ejemplo si el límite es 1 puede ser 0.99, 0.999, 0.9999,…. Y así, o puede ser 0.001, 0.0001, 0.0000001,….. pero con muchos ceros o muchos nueves depende de por donde se aproxime, creo, no se. (Lee la definición) límite de una variable. Un número k es límite de una variable independiente (x) si en un proceso de variación de x ésta se aproxima infinitamente al número k de tal manera que a partir de cierto momento en valor absoluto de la diferencia k-x es infinitamente pequeño y es menor que un número positivo infinitamente pequeño el cual se representa como (ε) Épsilon, si

$|k - x| < \varepsilon$ **entonces (k) es el límite de (x) y se dice x→k. La variable independiente puede aproximarse por la izquierda y por la derecha. Ve como Epsilon es un número infinitamente pequeño en las aproximaciones por eso con muchos nueves o ceros dependiendo de por donde se aproxima".**

I.- Pero Épsilon ¿Es el número con muchos nueves o ceros en el ejemplo del uno que dices o la diferencia entre el uno y el número con muchos nueves o ceros?

AO12.- "Es como el resultado de las restas, que son las aproximaciones y si se fija esas diferencias van siendo números muy pequeños, entonces Épsilon es un número más pequeño que esas diferencias que son las aproximaciones, como dice infinitamente pequeño o sea muy muy pequeño".

I.- ¿Cuánto vale, entonces?

AO12.- "Depende, no es un número fijo, varia, bueno eso es lo que yo entiendo, pero no usamos la definición, nunca dimos el valor de Épsilon, resolvimos los límites por aproximaciones sucesivas con tablas o directamente por sustitución".

I.- ¿Y, entonces Épsilon?

AO12.- "Pues es de la definición, pero nada más ahí lo vimos, no lo usamos ni nada, los límites los resolvimos sin la definición"

AA11.- "Tengo ganas de llorar".

18:08

I.- ¿Por qué?

AA11.- "Porque me fue mal en el examen".

AO12.- "Pero el maestro toma en cuenta el procedimiento"

AA11.- "Pero no se, me salio mal"

I.- ¿Sobre que era el examen?

AO12.- "Máximos y mínimos"

I.- ¿Qué tenían que hacer?

AO12.- "Graficar una cúbica".

AA11.- "Aplicando un método".

I.- ¿Cuál aplicaste?

AO12.- "El de la segunda derivada".

12. Transcripción de entrevista docente

TRANSCRIPCIÓN DE ENTREVISTA DOCENTE ESCUELA B

DATOS GENERALES

NOMBRE DEL ENTREVISTADO: XXXXXX

EDAD: 48 años **SEXO:** Masculino

ÚLTIMO GRADO ACADÉMICO: Maestría

ANTIGÜEDAD: Más de treinta años

GRADO QUE TRABAJA: Bachillerato y profesional

INSTITUCIÓN: Preparatoria de la Universidad Autónoma de Sinaloa

LUGAR: Colonia; Culiacán, Sinaloa

CLASE: Media-Media baja

ASIGNATURA: Cálculo I

GRUPO: 5CFM1

FECHA DE REALIZACIÓN: 27 de noviembre de 2009

LUGAR DE LA ENTREVISTA: Cubículo del maestro

HORA DE INICIÓ: 14:00 hrs.

HORA QUE FINALIZO: 14:33:47 hrs.

ENTREVISTADOR: EW

Simbología:

I.- Investigador (Entrevistador)

ENTREVISTA

I.- ¿Maestro cuántos años tiene usted dando…?

"¿Ya le puso la fecha?".

I.- Ya

I.- ¿Cuántos años tiene usted dando el curso de Cálculo aquí con los muchachos?

"Unos cinco años, más o menos".

I.- Y ¿Cuál es el tema que a usted se le hace más complicado para enseñar?

"A ver… de Cálculo I…pues el tema de derivadas porque la mayoría de los alumnos aun cuando es un, un… mera mecanización de formulas de derivación, la mayoría no alcanza a comprender como funciona la formula, como mecanizarla, como ubicar el problema, la función que se les da acomodarla en el modelo matemático que la contempla y ahí también repercuten sus deficiencias aritméticas, algebraicas, geométricas, trigonométricas inclusive, que ya no se acuerdan que ya se les olvido, en su momento no lo comprendieron bien y siempre que hay un problema que no podemos resolver es porque atrás hubo otro más sencillo que tampoco pudimos resolver y se va acumulando, entonces aun cuando las, las formulas de derivación, las algebraicas, las trigonométricas, las exponenciales son sencillas ellos batallan para, para interiorizarlas y poderlas aplicar".

I.- ¿Así como menciona el cálculo, es como un edificio pues si queda algo con deficiencia es muy difícil para ellos seguir avanzando y en cuanto al primer tema que viene en el curso este de Cálculo, ustedes empiezan con funciones, gráficas y límites?

"Así se llama la primera unidad es funciones, eh, funciones, límites de funciones y continuidad de funciones".

I.- ¿Y en esa unidad que dificultades más comunes identifica usted o ha tenido para enseñar el tema de límites?

“Los problemas que hay ahí son los algebraicos, por ejemplo cuando estamos viendo las funciones, tabulación, localización de puntos y trazos de la gráfica, una buena parte de los estudiantes no lo puede hacer se quedan paralizados porque no lo pueden hacer porque en su momento no aprendieron a tabular, no aprendieron a aplicar o el significado de por ejemplo tres equis elevada al cuadrado o dos equis elevada al cubo, al momento de sustituir el valor de la variable independiente en la relación funcional a veces no hayan que hacer, a veces tienen ellos tres por tres al cuadrado, supongamos que equis valga tres o la variable independiente valga tres entonces hay unos que hacen tres por tres, nueve por dos dieciocho, esos errores son muy comunes, entones es un problema anterior al tema que estamos viendo ahora, es un problema, ellos ven mucha tabulación en primero de bachillerato, lo ven en secundaria también, ellos empiezan a ver tabulaciones en secundaria claro también lo ven en primer año, está el tema de función de primer grado y segundo grado, en segundo año pues esta un tema completo que se llama graficación de ecuaciones le llaman donde vienen las dos variables pero en donde para poder graficar ocupan despejar una variable en función de la otra y esta un tema muy general que se llama intercepto, simetría, asintotas,… he tabulación, localización de puntos en el plano y trazo de la gráfica, esta ese tema completito casi todo lo dan y la mayoría de los profesores se la pasan ahí, y bueno algunos aprueban pero llegan a tercero y ya se les olvido ya no se acuerdan, nosotros suponemos que ya saben tabular, que saben localizar puntos y todo eso, son estudiantes que no saben localizar puntos”.

I.- ¿Se les dificulta?

“Lo hacen al revés, lo hacen al revés es decir les da un punto que tenga tres, coordenadas tres dos, ellos lo hacen en dos tres, al revés, están batallando, he a la mejor no lo entendieron bien, se les olvido, están con sus bases muy endebles, eso repercute en el tema de funciones, graficación de funciones y en cálculo porque nosotros suponemos que esa base en la que nos estamos apoyando, que el alumno ya lo sabe y resulta que no lo sabe, suponemos aunque tenemos claro que a la mejor no los

saben, abra algunos que si pero la mayoría no entonces no nos ponemos a explicárselo otra vez al menos que se los recordamos de pasadita porque este nuestro problema es otro, hacer un repaso general de cómo graficar funciones algebraicas, funciones logarítmicas, funciones exponenciales y funciones trigonométricas; ellos es segundo año ven funciones algebraicas y ven funciones trigonométricas no ven logarítmicas ni exponenciales pero nosotros lo vemos acá; ya entramos a otros conceptos como he funciones continuas, algo de teoría de funciones que sería funciones inyectiva, biyectiva todo eso de funciones, función par, impar, todo eso pero a nivel conceptual el problema que tenemos ahí es que ellos no se acuerdan como tabular o no se acuerdan de cómo localizar puntos y a veces localizan los puntos y no se animan a unirlos para que les de la grafica se quedan ahí con miedo y ahí lo deja, y bueno por que no grafican no pues dicen hasta ahí llegue y no se anima teme que al momento de unir le va a salir mal y ahí se le ponga todo mal, a veces los puntos están bien pero no se animan a unir por la inseguridad que ellos tienen".

I.- Ahora que mencionaba eso de las conceptualizaciones, ¿ve las definiciones de estos temas que menciono de función, de función biyectiva; cual es el primer concepto, se define o se le da a nivel de noción al alumno en Cálculo?

"Nosotros partimos de que él ya tiene el concepto de función, una relación una función, ahí a veces se les recuerda pero así de pasadita estamos supuestamente apoyados en lo que ellos ya llevaron, este el concepto de función en el sentido de que podemos hacer una grafica, podemos dibujarla y como se ve la relación que hay entre lo algebraico y lo geométrico y más delante pues nosotros decimos hay diferentes tipos de funciones según su comportamiento, he, la… "

I.- Y **¿**esas se definen?

"Pues si, se les da la definición de que es una función inyectiva, he que es un a función sobreyectiva, que es una función biyectiva y me parece que hasta ahí llega el programa, esos tres conceptos los ven, se los decimos, ha función inversa también, he se los décimos y hacemos ejemplos y enseguida los ponemos a que ellos definan que es una función inyectiva, biyectiva…"

I.- Y ellos lo definen ¿Cómo?, los muchachos como las definen, ¿Cómo definen ellos estas funciones?

"Pues como nosotros se las definimos, he en el examen que hice eso no lo escribí pues considere que no se lograron los objetivos, ninguno lo logro, en los ejemplos de clase ellos decían si era inyectiva, biyectiva o sobreyectiva"

I.- ¿Qué identificaran más que decir la definición este textual?

"Así es, la mayoría no logro, como es algo que le resto importancia porque hay cosas más sustanciales que eso, no lo contemple lo deje fuera"

I.- ¿Más sustanciales que las definiciones?

"Sí, claro"

I.- En los límites define usted límites, se ejemplifica, ¿Cómo se empieza a abordar este tema en el curso de Cálculo? Con los muchachos ¿ve usted límite de funciones o de variables?

"Las dos cosas, primero el límite de la variable, de una variable y después el límite de una función que en caso de la función no es otra cosa que el límite de la variable dependiente depende del de la variable independiente y la relación que en un momento le llaman función es la relación funcional o la regla de que manera se relaciona una variable con la otra, entonces dejamos el límite de una variable y pasamos al límite de una función o variable dependiente; pero antes primero siempre tengo una introducción con ellos, una platica sobre que entienden ellos por límite, el límite así como palabra genérica que tiene muchas acepciones".

I.- Y ¿Qué ha encontrado ahí con ellos?

"Algunos tienen las ideas un poco vagas, pero las tienen; yo siempre les pongo el límite de la paciencia del individuo, les platico, pero esta vez una alumna dijo cuando la paciencia se acaba ósea como que tiene idea que en la paciencia hay un límite; yo les hablo de la mamá que estaba renegando con el niño que al último termina pegándole o ejerciéndole violencia física entonces la señora a la primera no hace eso, esta tolerando

y llega un momento en que ya no lo aguanta y ya lo agrede para que se calme, ahí su paciencia llegó a un límite que es cero, después de que lo golpeo ala mejor recupera su paciencia, ya descargó toda su energía negativa y enseguida como que le dio un cargo de conciencia, algunas veces va a ir a consolar al niño, ya mi hijo no llore, recupero su paciencia pero después de que descargo su energía negativa en el niño o la niña al estar agrediendo, cuantas nalgadas le ha dado o cuantos jalones de oreja le ha dado (risas), les pongo ese ejemplo; les pongo el ejemplo de un depósito de gasolina de los automóviles pues eso creo que lo entienden bien, ahí manejo el volumen con el tanque, cuando el volumen de gasolina tiende a cero como límite, el volumen del aire tiende l máximo y al revés si se acaba de llenar el tanque el volumen del líquido tiende al máximo y el volumen del aire tiende a cero como límite, el tanque nunca deja de estar completamente lleno siempre hay algo de aire ahí, nunca se llena totalmente".

I.- Así ¿Cómo historias?

"Así, ya después me meto con límites matemáticos que es lo que nos interesa, límite de una variable, límite de una función y enseguida el cómo calcularlos, el método general que hay, por el método de cómo se llama, de aproximaciones sucesivas y ya después el método de sustitución directa que ellos se den cuenta que hay un método más rápido que es lo mismo nada más teniendo claro que los valores que ahí se manejan son valores límite, el concepto de límite, se puede aproximar una variable infinitamente a ellos pero el concepto exactamente no"

I.- Y en la definición ¿Qué definición es la que se llega a ver con los muchachos?, la de aproximaciones sucesivas o se llega a establecer la definición formal de Epsilon y delta

"No, no aplico eso porque ellos no lo comprenden y creo que les complicaría más las cosas, les doy la definición y les hablo que esa diferencia en valor absoluto entre el límite y la variable es un número positivo infinitamente pequeño el cual se llama Epsilon pero hasta ahí no me meto con mucha profundidad porque pienso que a la mejor esos son temas para los chavos de físico-matemáticas o los de ingeniería a otro nivel"

I.- Ya como más especializado

“Si yo pienso que ellos con que lograran manipular lo que corresponde a límite es suficiente porque es lo que ellos van a ocupar en la profesional, los profesores se darían muy bien servidos si ellos supieran eso, pero a la mayoría se les olvida otra vez”.

14:14 hrs.

I.- Y en eso de la sustitución directa que menciona ¿hasta dónde llega con ellos en los límites?

“Vemos funciones algebraicas fundamentalmente”

I.- De las trascendentales que mencionaba que grafican como las trigonométricas

“Ahí solamente les menciono casi siempre dos o tres límites los muy específicos, los pongo a hacer ejercicios porque tampoco lo van a comprender, con que ellos lograran asimilar los cálculos de los límites algebraicos sería más que suficiente desde mi punto de vista pero pues como que no, yo considero que no tiene caso meternos con mayor profundidad con lo demás como los trigonométricos que son los que fundamentalmente marca el programa y algunos límites trigonométricos no todos este y hasta ahí le dejo”

14:15 hrs.

I.- Verlos así, usted ¿Cuál considera que es la dificultad más grande de ellos?

“Ellos batallan en los casos del límite en donde aparece un hueco, una…”

I.- En funciones discontinuas

“Funciones discontinuas que tienen que factorizar y buscar una función equivalente”

I.- Donde aparecen indeterminaciones

“Si, ahí ellos batallan para factorizar, por más que se les dice un cero entre cero no es cero ni tiende al infinito ellos siguen diciendo que cero entre cero es igual a cero y en el examen que les aplique ayer ya me di cuenta que varios del grupo llegaron al cero entre cero y ya no hallaron que hacer algunos pusieron cero y algunos indeterminación matemática y dieron el problema por terminado pero esa no era la intención por más que se les explico, se les explico con mucho detalle cuando les aparezca un cero entre cero eso no quiere decir que el límite de la función no exista

ala mejor si existe, hay que buscar una función equivalente que el límite sea el mismo aunque la función no sea completamente igual, les explique muy bien que si una, una función que les diera en la sustitución directa un cero entre cero o una indeterminación matemática, que si ese mismo problema lo hicieran por aproximación sucesiva se iban a dar cuenta que el límite de la función si existe y bueno que no fuera demasiado largo entonces el método de la función equivalente es cuestión de que hicieran una factorización y ya pero su problema es factorizar no alcanzan los objetivos ellos, la mayoría no, uno que otro si, pero la gran mayoría no".

14:17 hrs.

I.- Y para ver todos estos temas, promueve con ellos el trabajo y la organización del grupo de alguna manera en especial

"No, no, este ellos aun cuando me insisten mucho no están impuestos a trabajar en equipos a veces ellos le piden ayuda a un compañero, ya es criterio de cada quien, si los ponemos a trabajar en equipo no van a querer porque hay estudiantes que flojean y alguno que le pone ganas pues no quiere cargar con la flojera del otro porque no esta trabajando son raros salvo que a veces hay algunos que si se ponen de acuerdo pero la mayoría de las veces no"

14:18 hrs.

I.- Y para pasar al pizarrón, pasan fácilmente a participar a resolver

"No se resisten, hay resistencia a pasar al pizarrón, les dejo tareas de casa, no me la traen o me la trae uno y ese se la pasa a todos o la copian"

I.- Y todas iguales

"Todas iguales entonces mejor no les dejo tarea de casa procuro mejor ponerlos a trabajar ahí en el grupo y aun así de todas maneras hay muchos que están ahí esperando que el otro la termine para hacerla él o está ahí pegadito echando ojo para copiar lo que el otro hace al último que pasa pues que haciendo uno los otros terminar de pasar y ya lo traen y yo me doy cuenta que todos iguales, los mismos errores, aun así eso si lo hago más seguido, tareas de salón"

I.- Para que la hagan de manera individual

“Así es”.

14:19 hrs.

I.- Y la revisen, porque se resisten ellos a pasar al pizarrón

“Si se resisten, algunos no todos, yo si le dijo alguno que pase pero en lo que pasa uno al pizarrón los otros están platicando, esa es otra, se ponen a platicar los otros mientras el otro está sufriendo allá, no ponen atención en ayudarle, en preguntarle, en participar, no se ponen a hacer otras cosas porque la atención esta centrada en el que está en el pizarrón salvo algunos pero no es la mayoría, esa es una actividad que yo he dejado también de lado porque creo que no funciona se me hace que funciona mejor lo otro que trabaje cada quien en su cuaderno”

I.- De forma individual

“Si, yo les dijo pregúntense entre ustedes pero no copien, las dudas que tengan pueden preguntarse pero no copien pero de todas maneras copian se las ingenian, vamos a suponer que alguien tenga diez en todas las tareas del salón eso se corrobora el día del examen, si alguien tiene diez en todas las tareas del salón y en el examen sale con cero fue un alumno que a la mejor estuvo copiando, puede ser esta bajo sospecha que así sucedió, si un alumno que me entrego todas las tareas de salón en el examen hace un buen examen entonces concuerda su trabajo diario con el examen”.

14:20 hrs.

I.- Y para activar los conocimientos o para ver cómo están o si recuerdan la clase anterior usted utiliza preguntas, ¿utiliza el interrogatorio? Para con los alumnos

“Si es una estrategia mía estarles preguntando; mi clase es tradicionalista por eso uso mucho el pizarrón, yo soy el que me muevo pero siempre trato de provocar la disonante cognitiva a veces ellos se quejan de que no se animan a preguntar porque yo les respondo con otra pregunta, se quejan mucho de eso y hace poquito hubo reunión de padres de familia y pusieron esa queja los padres de familia”.

14:21 hrs.

I.- Pero usted con que intensión les hace la otra pregunta

“Provocar la disonancia cognitiva, que ellos se pongan a pensar, no darles la respuesta a ellos porque si no les doy la respuesta a ellos se den cuenta de, un tanto usando el constructivismo, darse cuenta de lo que sucede, a veces me detengo y les hago a ver prueben este valor a ver si se cumple lo que están diciendo, denle un valor a la variable a ver qué pasa, les da flojera hacerlo, lo vamos a hacer entre todos; constantemente les estoy preguntando a ver que hay aquí porque esto o aquello a veces al que quiera contestar a veces al que esta distraído o platicando para ver si lo jalo ese es el fin”.

14:22 hrs.

I.- Y ¿Qué resultados ha obtenido con esta manera?

“Los resultados son los mismos a la hora del examen a ellos se les olvida una buena parte pero pienso que no se pierde del todo algo le queda al estudiante, al menos algo le ha de quedar aunque en el examen responda algo incorrecto tengo la esperanza de que algo les queda”

I.- También me he fijado que a veces platica historias en clases y esto ¿lo hace con alguna intensión?

“Si, una intensión de que mi clase contribuya en algo a su formación porque ellos ala mejor no van a ser matemáticos o van a salir con cero en matemáticas pero de las experiencias que nosotros tenemos de la vida y podemos platicar con ellos, y si a ellos algo les queda también es ganancia, les checo la ortografía eso desde un principio les dijo la ortografía se las voy a checar, les doy ocho aspectos a evaluar primero conocimiento, participación en clase, actitudes en la materia entre otras, ortografía, ahí pero esta clase no es de español y que tiene pero tienen que escribir bien su nombre porque algunos no escriben bien ni su nombre porque no lo quieren hacer entonces les dijo si termina de escribir tu nombre ya es ganancia algo les quedo del curso aunque de matemáticas no les quede nada, entonces otro es que la matemática no les parece atractiva, es tan aburrida, tan tediosa, tan sombría valla, normalmente

tengo mucho tiempo trabajando en cursos de matemáticas 30 años cumplí ahora en noviembre y este nos perciben como que somos profesores de otro mundo, aburridos, muy exigentes , muy rígidos y yo trato de que se den cuenta que no, yo les cuento chistes, hago bromas, este me dejo que me hagan bromas a veces les pido que el que se sepa el mejor chiste lo cuente, si quieren pasar a cantar que pase a cantar, no hay problema, el que pase a cantar una canción le voy a poner un punto a la hora del examen, de alguna manera eso los va formando a ellos al menos un chico que se anima a pasar a cantar o a decir una declamación o a contar un chiste pues al menos esta venciendo la timidez"

14:24 hrs.

I.- Pues sí, a la mejor mañana pasa y resuelve un límite ¿verdad?

"A la mejor"

I.- Pierde el pánico escénico

"Pudiera ser y a veces esa forma de ser me perjudica a veces algunos alumnos no están de acuerdo platican en su casa y viene mamá y papá a veces molestos y ya se tiene que dar chanza, si un padre de familia se queja de eso tal vez tiene razón, abra que ver como se lo contó su hijo allá pero hay que arriesgar es parte de la estrategia, pienso"

14:25

I.- A parte de cálculo la matemáticas en bachillerato, ¿Qué otra materia da?

"Si, Algebra"

I.- A ¿Cuál materia cree que tengan más dificultades los muchachos, en algebra o cálculo? ¿Cuál les genera más temor? Ven a las matemáticas como algo que no les agrada que le tengan miedo como usted ya lo menciono además que siempre reprueban

"Que no sirve para nada"

14:26 hrs.
I.- Que son difíciles, lo ven bien desvinculado de la realidad, eso es, no lo podemos negar los maestros de matemáticas pero cree que ese temor, todo estos sentimientos o emociones que sienten ellos hacia las matemáticas se enfatiza en cálculo o es similar al de algebra o lo ven como algo mucho más complicado que algebra

"Lo ven en el mismo nivel, el estudiante ya está más maduro, tiene menos miedo, son un poco más serios, no son tan crueles con sus compañeros como los de primer año, los de primer año son muy crueles con sus compañeros por eso muchos niños no se animan a hablar porque le temen a la burla de los demás, en tercero ya es diferente además se supone que ellos, los que van en esta fase van a una carrera que tiene que ver con las matemáticas se supone están más perfilados hacia lo que quieren ser, entonces obviamente se batalla menos en tercero en cuanto a jalar la atención de ellos en primero hay que ponerles orden como que se preocupan menos son más, como decir, indiferentes, son más indiferentes la mayoría".

14:27 hrs.
I.- Pero son más numerosos en primero que en tercero

"A claro, en primero tenemos grupos de cuarenta, cincuenta alumnos, en tercero…"

I.- ¿En cálculo?

"Los de cálculo"

I.- El grupo más numeroso de cálculo

"Pues el grupo de químico-biológica son cuarenta, nunca había tenido un grupo tan numeroso de cálculo, nunca, he inclusive un día llegue a tener ocho alumnos en cálculo, me la pase a todo dar"

I.- Y de este de cuarenta, están así relajados hacia la materia o siente usted alguna tensión de parte de ellos

"La mayoría no, la mayoría es indiferente pero no producen problemas de conducta ósea son serios lo que pasa es que no tienen la base"

I.- Y mucho menos los grupo numerosos, usted cree que se puede lograr menos con ellos, por ejemplo ese grupo de ocho que usted menciona siente que se logro más con ellos que cuando ha tenido grupos más numerosos

“No, es la misma, en ese grupo de ocho alumnos había uno nada más que entendía todo muy bien, así, que tenia buena bases, factoriza, factorizaba, resuelve esta ecuación para derivar y resolvía la ecuación, tenía todo el conocimiento, todo ese bagaje matemático que ocupaba para cálculo, los demás no, pero era uno de ocho”

14:28 hrs.

I.- Se mantienen más o menos la proporción si van aumentando los alumnos

“Si, aquí por ejemplo de dieciséis en ese grupo que usted está entrando y pues hay unos cuatro o cinco que si, los demás pues casi no y acá en el otro grupo donde son cuarenta ahí nada más hay dos, tres personas, los demás…”

I.- Que no les gustan a los del grupo que yo veo porque dicen que son muy gritones (risas)

“Les parecen muy flojos” (risas)

I.- Me he fijado, el grupo es muy callado, el trabajo es individual y si participan pero los noto así como que serios, y a veces hasta preocupados porque lo apuran por el programa ¿verdad?

“Si”

14:29 hrs.

I.- Sobre todo las mujeres

“Si hay un problema ahí con el programa, tiene el avance programático una de ellas entonces por eso nosotros sufrimos mucho ahí porque a veces no podemos avanzar porque el alumno no tiene las bases que debe tener y cada vez tenemos que estar regresándonos otra vez para recordar aquello que ellos ya deberían de saber para poder alcanzar el nivel que ellos asimilen y eso lo logramos al final, a veces”

I.- Por lo general alcanza a cubrir el programa con el tiempo

“Si, si, el año pasado hasta me sobro tiempo”

I.- Con el grupo de ocho

“A ver ¿fue el grupo de ocho?..., no era un grupo que tenía como unos doce o trece, en ese tiempo tenía un grupo nada más ahora me dieron dos entonces era un grupo como de doce, el grupo de ocho lo tuve el año antepasado, el del año pasado era de unos doce o trece alumnos y ahí me sobro tiempo y casi todos lograron pasar el examen del ceneval porque yo les pedí que me avisaran por favor como les fue y casi todos se colocaron”

14:30 hrs.

I.- Y ahora va más o menos igual con el grupo que estoy observando y el de cuarenta

“En cuanto al avance programático, si más o menos llevamos los mismos temas, hace días iba muy atrasado con el de cuarenta pero no se qué paso que estos chicos se la pintearon que el otro grupo los alcanzo, más o menos con una diferencia de una clase o dos”

I.- Ya están a punto de cerrar el semestre, en diciembre o en enero lo cierran

“El cuatro de diciembre se cierran las clases y del 7 al 18 son los exámenes”

14:31 hrs.

I.- Y regresan ellos en enero

“En enero, la primer semana de enero yo creo pero vamos a quedar muy atrasados por la suspensión que hubo de la influenza, los ciclones y otras cosas que hubo suspensión y la dirección no está contemplando esos días nada más está dando una semana extra, de acuerdo con el programa, el curso acaba el 30 de noviembre y empezamos exámenes iniciando diciembre y el consejo técnico acordó alargar una semana más hasta el cuatro de diciembre pero lo ideal sería irnos hasta el 18 de diciembre con clases y que no haya exámenes semestrales que cada profesor haga la evaluación pero no lo tomaron en cuenta eso, no se porque, las fechas de regreso no

las conozco pero vamos a regresar en enero a cerrar el cálculo I y seguir con cálculo II"

14:32 hrs.

I.- Usted continúa con el grupo con el cálculo II

"Si por eso empiezo de donde me quede pues los temas están concatenados, no se pueden dejar de ver entonces hay que continuar y hacemos el ajuste al final del semestre ahí vemos si cancelamos algunos temas o alargamos el tiempo"

I.- Pero eso es para mayo más o menos

"Si, además de que tercer año tiene que terminar en mayo porque ellos se van, los terceros años siempre terminan como una quincena antes"

I.- Y cuáles son las carreras comunes de estos grupos

"Las profesionales, pues se supone que van a carrera como arquitectura, ingenierías o escuela de química a la mejor contabilidad, esas son las carreras bases que les llaman a los que les gustan las matemáticas de cierto nivel los demás son las de ciencias sociales los que van a derecho, trabajo social, enfermería y esas cosas, pero a los que van a medicina también les dan cálculo, están ahí en el grupo de cuarenta"

14:33 hrs.

I.- Les hacen el ceneval

"Pues sí, se los hacen parejo hayan llevado cálculo o no" (risas)

I.-Bueno maestro pues le agradezco mucho

"¿Ya terminamos?"

I.- Si, ya terminamos

"Espero le sirva de algo" (risas)

14:33:47 hrs.

13. Imagen Scaneada de apunte de alumno

Apuntes de libreta de alumno AO12 de la escuela B

Limite de una variable

Un numero K es limite de una variable independiente (X) si en un proseso de variacion de X ésta se apro-xima infintamente al numero K. de tal manera que apartir de ciertomomento er valor absoluto de la diferencia K−X es infinitamente pequeño y es menor que un numero positivo infintamente pequeño el cual se representa como (ε) epsilon

si $|K-X| < \varepsilon$

entonces (K) es limite de (x)

y se dice $x \to K$

La variable independiente puede aprosimarse a su limite K por la isquierda y por la derecha

* Limite de una funcion un numero (L) es limite de una funcion f(x), si cuando x tiende A su limite (K) f(x) tiende al numero L

Para representar esta idea se ase uso de la siguiente simpologia:

$$\lim_{x \to K} f(x) = L$$

Se lee" el limite de f(x) cuando $x \to K$ es igual A L

Para que el limite de la funcion f(x) esista es necesario que el limite de la variable independiente (x) por la isquierda y por la derecha considan, esto es el limite con isquier y derecho

14. Formato de examen diagnóstico

Examen diagnóstico para el nivel actual de desarrollo

Nombre: ____

Instrucciones: Lee con atención lo que se te pide y responde escribiendo todo los pasos en la resolución de cada ejercicio**.**

I. Factoriza completamente la expresión dada

1) $x^2 - 16 =$

2) $x^2 + 6x + 9 =$

3) $x^2 + x - 6 =$

4) $x^3 + 8 =$

5) $2xa + 3a - 2xb - 3b =$

II. Desarrolla cada una de las siguientes expresiones

1) $(m - 6)^2 =$

2) $(a+7)(a-7)=$

3) $(x-3)(x-4)=$

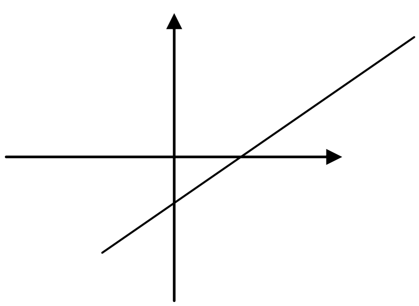
III. Contesta las siguientes preguntas:

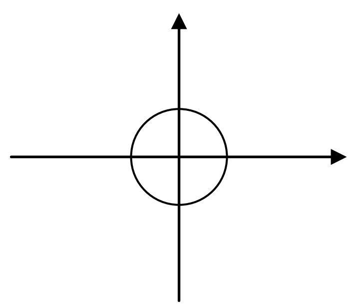
1) ¿Cuáles son las diferencias entre una función y una relación?

2) ¿Qué entiendes por función?

3) Menciona o ejemplifica las formas que conoces para denotar una función

4) Señala la gráfica que representa una función





5) Dada la función f definida por $f(x)=x^2+2$, evaluar lo siguiente

$f(0)$

$f(x+h)-f(x)$

6) Obtener el dominio y la imagen de las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 8}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

7) Escribe un ejemplo de la función que se te pide

a) Polinomial: ____

b) Trigonométrica: ____

c) Trascendental: ____

d) Racional: ____

e) Constante: ____

7) ¿Qué entiendes por aproximación?

8) Para ti que sería el límite de una función

Diagnostico final.

NOMBRE: ____

INSTRUCCIONES: Lee con atención, analiza tu respuesta y contesta lo que se te pide.

I. ¿Qué entiendes por aproximación?

II. Para ti que sería el límite de una función

III. ¿Cuáles son tus expectativas para el curso de Cálculo I? (¿Qué esperas del curso?).

IV. Completa y analiza la tabla de la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ para responde lo que se te pide.

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
f(x)							

a) ¿Qué sucede con $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando x se acerca a 1?

b) Esboza la grafica del problema:

c) ¿Qué se puede concluir?

V. ¿Explica la definición intuitiva de límite?

VI. ¿Cuál es la diferencia entre lo que entiendes por límite de una función y la definición intuitiva de límite?

VII. Resuelve los siguientes límites

1) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} =$

2) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} =$