UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

SECRETARIA ACADÉMICA

COORDINACIÓN DE POSGRADO

MAESTRÍA EN DESARROLLO EDUCATIVO

Problemas de estructura aditiva con estudiantes de 2^{do} y 3^{er} grados de primaria de una escuela pública del Estado de Oaxaca: una propuesta de enseñanza

Tesis que, para obtener el Grado de

Maestro en Desarrollo Educativo

Línea: Educación Matemática

P r e s e n t a

Francisco Amado Cruz Ramírez

Directora de tesis: Dra. Cristianne Butto Zarzar

México, D.F. Mayo de 2012

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco a mi Mamá la perseverancia y el apoyo de siempre, mil abrazos… ta tsavini.

- A mis hermanos Vencho y Toño el cariño, allí donde nos hallemos…

- Agradezco a la Dra. Cristianne Butto Zarzar dirigir esta tesis y el apoyo brindado durante el desarrollo de esta investigación. También, por los regaños de ambos lados que nos tenía los pelos nublados, por las enseñanzas transparentes, por la espera y el hambre, por subir incontables números *et alii*. Na ntakita´an nuu tsika kue na kavi.

- Gracias a los alumnos de la escuela "Niños Héroes" la sabiduría y por sna´a [enseñar] a tejer juntos.

- A nuu nche´e nkutsilu, por atravesar sueños propios y ajenos. Por buscar na kavi ta nka kani ma´i sava ana ñu´un ncha´i.

- Agradezco a la Dra. Mariana Sáinz Roldán, a la Dra. Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres, a la Mtra. Edda Jiménez de la Rosa y Barrios y al Dr. José Luis Cortina Morfin las observaciones para mejorar esta tesis.

- Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para realizar la investigación *Problemas de estructura aditiva con estudiantes de 2do y 3er grados de primaria de una escuela pública del Estado de Oaxaca: una propuesta de enseñanza.*

RESUMEN

Los problemas de estructura aditiva representan dificultades para los estudiantes de educación primaria. Estas dificultades están relacionadas esencialmente con la manera en cómo se redactan o se estructuran los datos en el problema. Aguilar y Navarro (2000) y Maza (1991), argumentan que el tipo de problema, la ubicación de la incógnita, la relación entre los datos y el tipo de operación generan diferentes formas de entender el problema, lo cual conflictúa al estudiante para encontrar la solución. A partir de estas investigaciones, se plantearon problemas de estructura aditiva con alumnos de 2^{do} y 3^{er} grados de primaria, explorando el modelo matemático funcional. Para ello se aplicaron cuestionarios diagnósticos seguidos de una entrevista clínica individual en la resolución de problemas; después se diseñó y se llevó a cabo una secuencia didáctica y finalmente se aplicó un cuestionario final. Son objetivos de este trabajo: 1) Indagar el aprendizaje del sistema decimal, vigesimal e investigar la resolución de problemas de estructura aditiva de los estudiantes de 2^{do} y 3^{er} grados de educación básica; 2) Elaborar y aplicar una secuencia didáctica que considere aspectos cognitivos-matemáticos para el desarrollo del pensamiento matemático en la resolución de problemas de estructura aditiva; 3) Estudiar la evolución de las ideas matemáticas de los estudiantes. El marco teórico de esta investigación se fundamenta en el trabajo de Zhang y Norman (1994) sobre el sistema representacional de tareas cognitivas distribuidas. El tipo de estudio es descriptivo y la metodología utilizada es de corte cualitativo. Se trabajó con 7 estudiantes de educación primaria de una escuela pública del Estado de Oaxaca. Los resultados obtenidos en la primera etapa del estudio dan cuentan que, los estudiantes desarrollan conceptualizaciones propias (ideas intuitivas) sobre dos sistemas: decimal y vigesimal; en la resolución de problemas presentan más dificultades con los problemas de comparación y combinación. Lo anterior tiene que ver con las relaciones que caracterizan los tipos y subtipos de problemas aplicados. Los resultados de la segunda etapa muestran que, desarrollaron las nociones de decenas, centenas y unidades de millar del sistema de numeración decimal. También, se observó que alcanzaron a entender las relaciones contenidas en los problemas de estructura aditiva y a utilizar correctamente el algoritmo para resolverlos. Los resultados de la tercera etapa muestran que los alumnos pueden escribir de manera formal las notaciones del sistema de numeración decimal. Se puede decir que, los aprendizajes obtenidos dejan ver que los alumnos pueden desarrollar conocimientos muy favorables para la adquisición del sistema de numeración decimal indo-arábigo y la resolución de problemas de estructura aditiva.

ÍNDICE

Capítulo VII. TERCERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIO FINAL

Lista de tablas Página

Lista de figuras Página

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son fundamentales para el desarrollo del hombre y en educación se consideran una herramienta básica para construir y desarrollar el pensamiento. A pesar de esta importancia otorgada a las matemáticas, diversas evaluaciones educativas nos muestran que los estudiantes de nivel básico no han adquirido los conocimientos y habilidades matemáticas correspondientes al grado escolar en el cual se encuentran.

El Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (*Programme for International Student Assessment*, PISA), aplicado cada tres años por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), se propone determinar si los estudiantes de 15 años, a punto de concluir o al terminar su educación obligatoria adquirieron conocimientos y habilidades relevantes para participar activa y plenamente en la sociedad moderna. Este programa muestra que el perfil de la mayoría de los estudiantes en México no alcanza la media (500 puntos) en lectura, ciencias y matemáticas. Otra prueba, denominada *Exámenes para la Calidad y el Logro Educativos* (Excale), evalúa el logro educativo de acuerdo con lo que establece el currículo nacional; reconoce los contenidos curriculares que dominan los estudiantes de tercer grado de educación primaria e identifica los conocimientos y habilidades que no adquieren en matemáticas, pero, muestra que cuatro de cada diez estudiantes se encuentran por debajo del nivel básico de cuatro niveles de logro (Avanzado, Medio, Básico y Debajo del básico); esto significa que no manejan los conocimientos y las habilidades básicas de los planes de estudio de matemáticas en ese nivel, (Backhoff y otros autores, 2007).

Estas evaluaciones permiten reflexionar sobre cómo es la enseñanza en la escuela, pues sabemos que a menudo los estudiantes aprenden contenidos matemáticos memorizando y mecanizando procedimientos. Por ejemplo, usan el algoritmo para mecanizar el procedimiento de sumas y restas, cuando muchas veces desconocen el por qué de la expresión “se lleva uno”. La suma y la resta son parte medular del proceso de enseñanza y aprendizaje en educación primaria, además, éstas forman parte de los problemas de estructura aditiva y no son sólo algoritmos.

Desde 1993, la enseñanza de las matemáticas se fundamenta en el enfoque de resolución de problemas, con el cual la Secretaria de Educación Pública (SEP, 2003), en el *Libro del maestro* de segundo grado, propone que en los primeros grados de educación escolar el alumno tiene que adquirir las habilidades de analizar, planear, razonar, predecir, verificar y generalizar resultados así como elaborar conjeturas, comunicarlas, validarlas, identificar patrones, situaciones similares y desarrollar la imaginación espacial para resolver problemas.

También, en el *Plan y Programa de estudios de Educación Primaria* de segundo grado de matemáticas (SEP, 2009), considera que los alumnos; 1) desarrollen el pensamiento (matemático) que les permita interpretar y comunicar situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales; 2) utilicen técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; 3) creen una actitud positiva hacia el estudio de la disciplina [la matemática], en colaboración, que sean críticos tanto en el ámbito social y cultural, donde se desempeñen, como en otros. Este nuevo *Plan y Programa* sostiene que los estudiantes deben de adquirir esas "competencias matemáticas"; además, *resolver problemas de forma autónoma,* comunicar la información, validar procedimientos y resultados, y manejar técnicas eficientemente.

Sin embargo, antes de entrar a la escuela los niños han ido desarrollando algunas de estas habilidades, así como también nociones del sistema numérico decimal indo-arábigo. Al respecto Pontecorvo (1996), menciona que estas situaciones las enfrenta el sujeto a muy temprana edad y antes de ingresar a la escolarización los niños ya reproducen e interpretan los números.

Barocio (1996), sostiene que cuando los alumnos ingresan a la vida escolar poseen en su estructura cognoscitiva nociones acerca del sistema de numeración decimal que han adquirido fuera de la escuela. En la cotidianidad interactúan con números (que les son transmitidos como un conocimiento social) y los integran a su estructura cognoscitiva.

Gallego y otros autores (2005), plantean que el uso de las “matemáticas” se asocia a la experiencia de la vida cotidiana, pues ésta posee un aspecto relevante con el cual se vive y se desarrollan experiencias necesarias para aprender, por ejemplo, a contar.

En este trabajo se revisan investigaciones de cómo el alumno comienza a adquirir el sistema de numeración decimal indo-arábigo durante el proceso de escolarización. Por ejemplo, Lerner y Sadovsky (1994), describen el proceso de adquisición del sistema de numeración decimal de niños en sus primeros años de vida escolar. Encontraron que los niños forman hipótesis propias que se acercan a las reglas formales de dicho sistema. En este mismo sentido, en el estudio de Brizuela y Cayton (2010), realizado desde un acercamiento psicológico, ellas descubrieron que los niños van desarrollando concepciones intuitivas sobre las reglas del sistema de numeración indo-arábigo; algunas de estas concepciones se acercan a las reglas formales del sistema de numeración decimal.

Estas investigaciones evidencian que antes de entrar a la escuela los alumnos crean y desarrollan representaciones de notaciones numéricas. Además, muestran cómo los niños están entendiendo y apropiándose de las reglas del sistema de numeración decimal. Dichas nociones, a veces, no se retoman en la escuela para introducir las reglas formales del sistema numérico decimal. Esto podría representar una ruptura en el desarrollo del pensamiento numérico del niño para la apropiación de este contenido matemático.

Para adquirir el sistema de numeración decimal se necesita entender las reglas del sistema de base 10, por ejemplo, composición y descomposición de unidades, decenas, centenas, la noción de valor relativo, valor absoluto, entre otras nociones. En este proceso varios obstáculos impiden al niño adquirir las reglas del sistema de numeración decimal; por ejemplo, se enseña primero a contar sin tener en cuenta la cardinalidad y luego se enseña a operar sin establecer ningún vínculo con las reglas del sistema de numeración decimal.

Esta problemática es mayor cuando los niños son bilingües; por ejemplo, cuando hablan una lengua originaria, por ejemplo la lengua mixteca, además del español. Aquí cabe señalar que la lengua mixteca tiene un sistema de numeración vigesimal, que no es enseñado en la escuela; por ello, aprender primero el sistema de numeración vigesimal de la lengua mixteca, que es propio de su cultura y de su lengua materna, podría facilitar a los niños el aprendizaje del sistema decimal indo-arábigo.

En el sistema de numeración oral mixteco (base veinte) hay dos "bases aditivas o bases auxiliares" de suma: la base aditiva diez y la base aditiva quince; después aparece la base multiplicativa veinte que permite desarrollar cantidades más grandes. El estudio, que aquí se reporta indagó el uso del sistema vigesimal dentro del aula escolar: se encontró que a los alumnos se les dificulta reconocer y nombrar cantidades con la base aditiva 15, que se utiliza para formar cantidades mayores, por ejemplo 35, 55, 75,95 y así sucesivamente.

De Bengochea (1997), señala que los profesores que enseñan en escuelas bilingües indígenas del país han reflexionado y analizado poco el sistema oral de sus comunidades. Lo anterior es consecuencia de que muchos de los profesores que enseñan en educación indígena no tienen la preparación formal para educar en este contexto. Ellos toman un curso de inducción a la enseñanza de tres meses para integrarse como maestros frente a grupo (De Bengochea, 2008).

Ello explica que los sistemas de conteo oral de los pueblos originarios, muchas veces no sean retomados como contenido para enseñar en el salón de clases. Por otro lado, Caballero (2005), afirma que: "recuperar, socializar y aplicar" el conocimiento del sistema de numeración vigesimal mixteco evitaría que sea desplazado por la lengua castellana y gradualmente desaparezca. Además, en 2003 se publicó la *Ley General de Derechos Lingüísticos de los Pueblos Indígenas*, en la cual se establece que el Estado reconocerá, protegerá y promoverá la preservación, desarrollo y uso de las lenguas indígenas nacionales.

Pocas investigaciones abordan las nociones que los niños desarrollan sobre el sistema vigesimal en escuelas bilingües indígenas; esto no ha sido suficientemente desarrollado ni analizado. Desde un enfoque etnográfico, Micalco (2009), encontró que los jóvenes tseltales y mayas, ubicados en el sureste de México, usan dos sistemas de numeración, el vigesimal y el decimal, cuando tratan de resolver problemas matemáticos. En la escuela, una de las causas de las dificultades de aprendizaje del sistema de numeración decimal indo-arábigo probablemente sea la falta de integración de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes bilingües, quienes usan un sistema numérico oral distinto al decimal.

Barriga (2005), señala que el hombre fue desarrollando el conteo a partir de su actividad social, de acuerdo con sus necesidades; dicha técnica le permitió contar de forma práctica sus principales actividades. A partir de estas formas de conteo, desde un enfoque lingüístico, este autor estructura y analiza varios sistemas de numeración de diferentes grupos sociales y sostiene que hay distintos procesos en la forma como se desarrollan los sistemas de numeración y al mismo tiempo comparten principios comunes.

Por otra parte, se plantea en la escuela que la enseñanza del sistema de numeración decimal (SND) debe propiciar a los alumnos situaciones variadas mediante las cuales adquieran, entre otras cosas, crear, desarrollar y probar hipótesis de manera empírica para apropiarse del sistema decimal; por ello, de igual forma, sería pertinente propiciar situaciones en la enseñanza que permitan la adquisición de sistema vigesimal.

Este trabajo pretende estudiar el proceso por el cual el niño accede al sistema de numeración decimal y vigesimal, que los lleve a crear sus propias reglas para entender su funcionalidad; al respecto, se retoma a Lerner y Sadovsky (1994), quienes describen cómo los alumnos interpretan y desarrollan las primeras nociones del sistema de numeración decimal antes y después de ingresar a la escuela. La investigación esta basada en la observación de cómo los niños crean hipótesis acerca del sistema decimal y cómo esas hipótesis se van consolidando a través de la instrucción escolar. En este sentido se considera que las producciones de numerales constituyen una forma de apropiación y representación del sistema de escritura numérica del niño.

La investigación de Lerner y Sadovsky (ob. cit[1].) enfatiza la producción, interpretación y comparación de escrituras convencionales sobre el sistema de numeración decimal; las autoras encontraron cuatro reglas que los alumnos elaboran: 1ª: *La cantidad de cifras se corresponde con la magnitud del número representado*; entre más cifras tiene la cantidad mayor es el número; 2ª, *la posición de las cifras como criterio de comparación* (el primer número es el que manda); se le atribuye un valor a la cifra dependiendo el lugar que ocupa y si hay un número con la misma cantidad de cifras es mayor el que tenga la cifra mayor; 3ª, *la numeración escrita corresponde con la numeración hablada;* los niños escriben la cantidad como lo escuchan, salvo los números ubicados entre intervalos; 4ª, *el rol de los números nudos* (decenas, centenas y unidades de millar) que son los que pueden escribir de forma convencional. El conflicto se presenta cuando los números que corresponden a intervalos tienen más cifras que los nudos, por ejemplo: 21000710085 [dos de mil, siete de cien, y ochenta y cinco] para 2785 no puede ser mayor que 3000. En el ejemplo anterior se observa como el alumno esta entendiendo los nudos en las unidades de millar y en las unidades de centenas. Las mismas autoras aclaran que en un primer momento esto no genera conflicto; pero posteriormente sí. Entonces el niño tiene que corregir su escritura numérica y tratar de hacerla corresponder con la escritura convencional.

También, se hace referencia a investigaciones donde se mencionan que los niños comienzan a pensar y aprender los números cuando inician la escolarización, (Brizuela, 2004; Brizuela, 2006; Brizuela y Cayton, 2010);

[1] Obra citada

aprenden a leerlos y escribirlos en la medida en que desarrollan conceptos numéricos.

Por otra parte, se toma en consideración las recomendaciones de Terigi y Wolman (2007), sobre las estrategias de enseñanza del sistema de numeración decimal. Ellas sostienen que la escuela se caracteriza por implantar el aprendizaje como reproducción de modelos y procedimientos; desconocen los requerimientos necesarios para el aprendizaje del sistema de numeración decimal e ignoran el proceso de apropiación del sistema por los niños, las hipótesis que ellos elaboran y la manera cómo organizan sus conocimientos para darles significado; y, aunque reconocen la condición constructiva del conocimiento, según ellas la escuela sólo enfoca su atención al aspecto formal del sistema de numeración decimal, sin considerar cómo los niños construyen y descubren el sistema cuando se incorporan a la educación básica.

Es pertinente investigar las ideas acerca del sistema de numeración decimal que desarrollan los niños en los primeros grados, para identificar y conocer a profundidad su desarrollo cognitivo. De igual forma, es importante investigar las nociones de los niños sobre el sistema vigesimal propio de su lengua materna. Cabe aquí advertir que la enseñanza de las matemáticas en escuelas bilingües indígenas es compleja, sobre todo cuando dos sistemas (decimal y vigesimal) coexisten; éste es un reto doble para el trabajo docente.

Este estudio pretendió, indagar cómo los niños (de 2do y 3er grados de educación primaria) resuelven los problemas de estructura aditiva, e identificar los errores que usualmente cometen en el proceso de resolución de problemas aditivos, con la intención de buscar otras alternativas para plantearlos.

Frente a ese reto, se plantearon las siguientes preguntas:

¿Cómo evolucionan las ideas intuitivas de los alumnos de 2do y 3er grados hacia las reglas formales del sistema de numeración decimal indo-arábigo y vigesimal?

¿Cómo se desarrollan las ideas matemáticas en la resolución de problemas aditivos, en los alumnos de 2do y 3er grados de educación primaria?

Objetivos del estudio

El presente trabajo de investigación tiene como objetivos:

1. Indagar e identificar el aprendizaje del sistema decimal, el vigesimal e investigar la resolución de problemas de estructura aditiva de los estudiantes de 2do y 3er grados de educación básica.
2. Elaborar y aplicar una secuencia didáctica que considere aspectos cognitivos-matemáticos para el desarrollo del pensamiento matemático.
3. Estudiar la evolución de las ideas matemáticas en el proceso de aprendizaje de los problemas de estructura aditiva, en dichos niños.

La metodología del estudio fue cualitativo-explicativa. Se trabajó con siete alumnos de educación primaria bilingüe de una escuela pública del Estado de Oaxaca: cuatro de segundo año y tres de tercer grado, de una escuela multigrado. Este trabajo de investigación comprende tres etapas: la primera comprende el diseño y aplicación de tres cuestionarios diagnósticos sobre: escritura numérica decimal y vigesimal y problemas de estructura aditiva, seguidos de una entrevista clínica individual; en la segunda se aplica y experimenta una secuencia didáctica, y en la tercera se aplican los cuestionarios finales.

En el capítulo uno de esta tesis se describen diferentes sistemas de numeración. El capítulo dos describe los problemas de estructura aditiva, sus modelos matemáticos y diferentes tipos y subtipos de estos problemas. En el capítulo tres se describe el marco teórico de la tesis: la teoría de Zhang y Norman (1994) sobre representaciones de tareas distribuidas. También, se exponen los planteamientos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud 1990; 2007), aplicados a problemas de estructura aditiva en educación básica.

El capítulo cuatro describe la metodología utilizada en esta investigación. En el capítulo cinco, se reportan los resultados obtenidos en la primera etapa del estudio. El capítulo seis, describe resultados de la segunda etapa: secuencia didáctica. En el capítulo siete, se describe la tercera etapa del estudio: cuestionarios finales. Finalmente, se presentan los apartados de discusión, conclusiones y consideraciones finales.

Capítulo I. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO:
DESARROLLO DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

En este capítulo se describe el sistema de numeración decimal indo-arábigo: sus características principales, la evolución y comparación con otros sistemas. También, se describe cómo el alumno elabora diferentes reglas “intuitivas” sobre el sistema de numeración decimal en el salón de clase. De igual forma, aquí se presenta la estructura de otro sistema de numeración: *el sistema vigesimal mixteco*.

1.1 Sistemas de numeración

Cuando el hombre empezó a contar, usó los dedos, otras veces piedras, a menudo marcas en objetos, así como nudos en una cuerda como una forma para representar “la cantidad”. A medida que la cantidad se hacía más grande, tuvo necesidad de buscar un sistema de representación más práctico.

En un inicio, la numeración tuvo periodos de evolución que le permitieron llegar al sistema que usamos hoy día. Éste llegó a representarse mediante signos; cuando se alcanza un determinado número de objetos, por ejemplo 5, primero se hacía una marca [**IIIII**] para representarlo (Gómez, 2006). Se siguió añadiendo unidades hasta alcanzar por segunda vez el número anterior y se vuelve a añadir otra marca de segunda clase. En el caso de la base 10, cuando se alcanza un número determinado de unidades de segundo orden, las decenas, se añade una de tercer orden, y así sucesivamente.

Gómez (1988), afirma que el hombre comprendió que, apilando piedras o haciendo un *hueco* sobre un palo podía escribir y representar una cantidad; tantos objetos como marcas o tantas piedras como ovejas, era el inicio de un primer sistema de numeración. Esta forma se conoce como representación simple y se caracteriza por la escritura uniforme con un sólo símbolo, y a la vez es un registro concreto de cantidad. Posteriormente, el hombre recurrió al agrupamiento: amontonaba piedras en grupos de cinco; a ésta se le denomina *agrupación simple*.

De acuerdo con Bourbaki (citado por Gómez, 1988), un sistema de numeración consiste en establecer de manera individual, para cada número natural, *un nombre y una representación escrita*: ésta permite formar combinaciones con un reducido número de signos, siguiendo leyes más o menos regulares. Pero, ¿qué pasa con los números más grandes? Si hay necesidad de representar problemas con cantidades más grandes ¿qué tipo de representación utilizar?

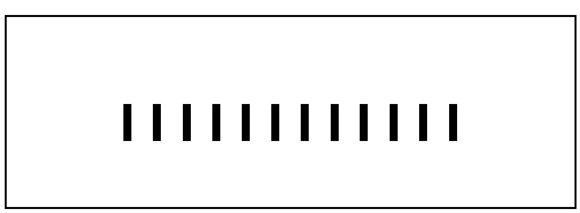
Ante estas interrogantes se buscó extender el agrupamiento. El sistema de numeración decimal indo-arábigo tiene la característica de ser aditivo y multiplicativo. Un sistema aditivo se caracteriza por la presencia de un símbolo distinto para cada una de las potencias de la base, y es denominado *agrupamiento múltiple*. A continuación mostraré los sistemas de numeración desarrollados en diferentes culturas.

1.2 El sistema de numeración decimal: desarrollo y comparación de sistemas

En el presente apartado, se analiza el desarrollo del sistema de numeración decimal, con el fin de hacer notar cómo fue la evolución que tuvo al de uso actual, a partir de los sistemas de numeración que la antecedieron.

Sistemas aditivos: se basan en una adición constante, es decir, se van aumentando y anotando símbolos en relación con la cantidad que se desea representar.

Representación simple: Se caracteriza por la repetición uniforme de un sólo símbolo, y es a la vez un registro concreto del aspecto cuantitativo del número (Gómez, 1988).



Agrupamiento simple: En éste se elige una base para formar el agrupamiento con presencia de dos clases de símbolos: unidades y agrupamiento de unidades; por ejemplo, cada cierta cantidad de unidades hace un grupo, esto permite que contar sea más sencillo.

~~IIIII~~ ~~IIIII~~ ~~IIIII~~ ~~IIIII~~ II

Sin embargo, este sistema de agrupamiento tiene un inconveniente; es poco práctico para su escritura, y no se puede escribir números muy largos porque resulta tedioso.

Agrupamiento múltiple: de manera similar al sistema anterior, se elige una base y no hay un límite para la cantidad de símbolos pero si para el número de repeticiones de símbolos, como máximo los que indica la base elegida. Por ejemplo, si elegimos la base 5, el símbolo **[**I**]** sólo se podrá escribir 5 veces y a partir de ahí se deberá elegir otro símbolo, y así sucesivamente.

V= 11111= 5

W= VVVVV=5^2

X= WWWWW=…

Como se ha descrito en el párrafo anterior, este sistema se caracteriza por tener un símbolo distinto en cada una de las potencias de la base; este ejemplo se puede ver en el sistema egipcio, que utilizaba la base 10 y representaba cada potencia de ésta con un símbolo; por ello, en ese sistema era fácil la escritura de números grandes.

Sistemas multiplicativos: Los sistemas multiplicativos utilizan dos clases de símbolos: uno para las potencias de la base y otro en función de multiplicador. Por ejemplo:

Sistema oral.- Se caracteriza porque se leen o se dicen las potencias de las bases; es un sistema multiplicativo ordenado y, a la vez, un sistema escrito posicional.

Sistema ático griego: en este sistema se representaban las unidades con palos verticales y para las potencias de base diez las letras iníciales de las palabras: D *Deka* △(diez), H *Hekaton* (cien), X *Xilioi* (mil) y M *Myriori* (diez mil). Para el número cinco usaban la primera letra de la palabra *pente* □Γ□□ , y para evitar repeticiones de símbolos adoptaron un criterio multiplicativo que consistía en una combinación de símbolos, palos y letras.

Sistema babilónico. Los antiguos babilonios se dieron cuenta de que sus símbolos podían representar una función doble, triple o cuádruple, asignando diferentes valores que dependían de su posición. Utilizaban la cuña vertical y la horizontal, pero también una pieza de madera o de metal muy aguda que servía como herramienta para marcar cantidades de objetos. La marca vertical representaba unidades del uno hasta el diez, y la horizontal representaba las decenas. Esta forma de anotar las cantidades denotaba un agrupamiento simple para números menores al 59, y a partir de este número se utilizaba el criterio posicional.

Sistema multiplicativo ordenado. Consiste en ordenar los numerales en unidades, decenas y centenas, pues su uso ahorra símbolos y espacio, como lo hacemos con el sistema de numeración decimal.

Estos dos últimos sistemas multiplicativos comienzan a usar un criterio posicional, mismo que se caracteriza por representar potencias de la base con la adopción de un criterio de orden.

Sistemas posicionales*:* Un riesgo de los sistemas posicionales es que, si no están bien colocados y separados, se pueden confundir los símbolos. Un ejemplo de este tipo de sistema es:

El sistema maya. Los mayas utilizaron un sistema de niveles, éste consistió en escribir símbolos en forma vertical de abajo hacia arriba, de acuerdo con criterios de agrupamiento simple para los números menores a 20; a partir de ahí se ponían hacia arriba. Cambiaban su valor dependiendo de la posición donde se escribían.

El paso del sistema multiplicativo al posicional trajo consigo el problema de representar la no existencia de una determinada potencia de la base; por ello, al adoptar un sistema posicional con círculos multiplicadores, el círculo al quedar vacío subsanaba dicho problema.

Los sistemas posicionales tienen como ventaja un número limitado de símbolos fáciles de aprender; la humanidad ha preferido adoptar un sistema posicional donde cada multiplicador tiene su propio aspecto (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9…).

El sistema de numeración decimal indo-arábigo fue idea de los hindús, desarrollado y transmitido por los árabes. Su gran mérito es introducir el concepto y símbolo *cero,* que permite que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número, por grande que sea, y simplificar la forma de efectuar operaciones. A este conjunto de símbolos se le ha denominado números indo-arábigos o numeración de base 10.

El sistema de notación arábiga tiene dos componentes básicos: el primero consta de un grupo de 9 grafías que representan las cantidades básicas; uno (1); dos (2); tres (3); cuatro (4); cinco (5); seis (6); siete (7); ocho (8) y nueve (9), y el cero (0) que representa *ausencia de cantidad*. Estos signos poseen un nombre *propio* y se combinan entre sí para formar una gama de numerales posibles; el segundo componente es el valor de posición de una grafía, determinado por su posición al interior de la cadena de dígitos; y es producto de la potenciación. De esta manera, la lógica de un sistema posicional de base diez implica que cada posición corresponde a un orden definido por la multiplicación de sus unidades por una potencia de 10, la cual se incrementa a partir de cero, cada vez que el digito es movido a la izquierda, (Bedoya y Orozco,1991; Orozco, 2000).

El sistema de numeración de base diez consiste en la escritura de unos signos (números naturales) para realizar operaciones con algoritmos. De este hecho se desprende su pertinencia como objeto de estudio y aprendizaje en la educación primaria. Muchos errores de los niños en la escritura de numerales y en el manejo de los algoritmos obedecen a que ellos/ellas no comprenden la lógica de la escritura, fundamentada en la lógica del sistema de numeración de base diez.

1.2 La adquisición de los números vista desde la psicología

En los primeros años de formación matemática escolar, cuando niños y niñas se incorporan a la educación básica, el sistema de numeración de base diez es el contenido clave de la enseñanza. Según Nunes Carraher y Bryant (citado por Terigi y Wolman, 2007), los niños deben aprender a dominar tres aspectos fundamentalmente: aprender invariantes lógicas, aprender a dominar y utilizar los sistemas matemáticos convencionales y aprender a ver los requerimientos matemáticos de diferentes situaciones. El sistema de numeración decimal indo-arábigo es el primer sistema matemático convencional que enfrentan los niños en la escuela y constituye un instrumento de mediación para otros aprendizajes matemáticos; por ejemplo, el aprendizaje del algoritmo de la suma, la resta, la multiplicación y división. Es deseable, por tanto, que la calidad de los aprendizajes de los niños sobre este sistema incida en su posterior trayectoria escolar.

Sin embargo, es pertinente subrayar que la enseñanza de la numeración escrita requiere comprender la diferencia entre la forma como el adulto percibe esas nociones y la forma como las comprende el alumno: los adultos, usuarios del sistema de numeración, tendemos a pensarlo como una técnica de traducción de cantidades a una forma gráfica, y solemos creer que para su conocimiento basta con conocer la reglas que lo rigen; pero, entender el sistema de numeración decimal de esta forma, oscurece la comprensión de los problemas involucrados en el aprendizaje y desde luego su enseñanza, Terigi y Wolman (2007).

Dado que la numeración decimal es un sistema de representación de cantidades, la construcción de cualquier sistema de representación involucra principios comunes; así, para representar las cantidades, el sistema de numeración posee reglas que permiten organizar la cuantificación, y estas reglas son producto de la evolución histórica de la humanidad.

En el aprendizaje de la numeración está implícito que los alumnos entiendan el significado del número; al respecto, Kamii (1994) sostiene que escribir y leer el número puede ser una tarea simple, pero comprender su significado implica otra lógica; esto explica las dificultades de los alumnos en la educación primaria. Kamii menciona que el niño tiene que construir su conocimiento mediante la abstracción reflexionante, es decir, a partir de la propia acción mental estableciendo relaciones entre objetos.

Para la enseñanza de la numeración, es necesario buscar otras condiciones que transformen en los estudiantes el aprendizaje de los números. La búsqueda de otras formas de introducir este tema permitirían avanzar en su aprendizaje. A continuación se muestran algunas consideraciones al respecto:

- Introducir y construir los primeros números, basándose en un reconocimiento global.
- Encontrar un medio para reconocer que dos conjuntos son equivalentes.
- Encontrar otros números gracias al orden y la adición.
- Extender el conjunto de números conocidos y designarlos sirviéndose de la numeración de posición.

1.4 Enfoque para la enseñanza del sistema de numeración decimal

Sin duda, en la escuela es fundamental enseñar matemáticas para que el niño ejercite su pensamiento. Se sabe que el alumno construye su saber por medio de la resolución de problemas (SEP, 2003), tanto dentro como fuera del aula, y en interacción con otros alumnos. La resolución de problemas permite ver las estrategias que desarrollan los alumnos y evidencia cómo razonan al afrontar dichos problemas, (García y Santarelli, 2004).

Ahora se busca, dentro del salón de clases, que el enfoque de resolución de problemas sea el medio para desarrollar el conocimiento matemático y, además, sea una herramienta flexible y adaptable a las situaciones problemáticas de los alumnos en su vida diaria (libro del maestro segundo año, SEP, 2003). Este enfoque busca "replantear" la visión de que las situaciones problema puedan ser de cualquier índole.

Fuenlabrada y Ávalos (1996), sostienen que los niños aprenden cuando interactúan con situaciones problemáticas; éstas dan más sentido al desarrollo intelectual hacia las matemáticas.

1.5 Proceso de adquisición del sistema de numeración decimal

El aprendizaje del sistema de numeración decimal resulta difícil para los alumnos de grados iníciales; sobre todo, la noción de la posición de los números, junto a la escritura numérica, sigue siendo un enigma para los niños. En los siguientes párrafos, se señalan investigaciones que se han realizado con respecto a la adquisición del sistema de numeración decimal.

Lerner y Sadovsky (1994), en un estudio desarrollado sobre la escritura numérica, les preguntaron a niños de primeros grados de educación primaria y observaron que cuando ellos realizan cuentas y usan por ejemplo palabras "me llevo uno" o "le pido uno al compañero" no establecen ningún vínculo con las unidades, decenas y centenas. Estos alumnos parecían no entender cómo los algoritmos convencionales poseen características de nuestro sistema de numeración.

En este sentido, Kamii (1994), sugiere postergar la enseñanza del sistema de numeración, y de sus reglas, en tanto que Bednarz y Janvier intentan perfeccionar el trabajo con agrupamientos explicitándolo por medio de distintas materializaciones y planteando situaciones en las que agrupar resulte significativo (citados por Terigi y Wolman 2007).

Por su parte, Lerner y Sadovsky (1994), plantearon en su investigación observar cómo se aproximan los niños al conocimiento del sistema de numeración. Las autoras querían indagar el proceso de aprendizaje del sistema, y muestran, mediante entrevistas, cómo los niños usan procedimientos y explicitan argumentos para mostrar algunas ideas propias hacia la comprensión de la escritura convencional del número.

También, se plantearon que era necesario conocer los aspectos del sistema de numeración decimal relevantes para los alumnos; las ideas que tienen acerca del sistema, los problemas que han enfrentado y las soluciones que han ido construyendo, los posibles conflictos entre sus propias conceptualizaciones y ciertas características del sistema que están intentando comprender. Para ello indagaron, en entrevistas clínicas, el proceso de apropiación de la numeración escrita; diseñaron una situación experimental de comparación de números y otra en la escritura, por ejemplo: “piensen un número muy alto y escríbanlo”.

Estas autoras concluyeron que los niños realizan producciones no convencionales: 1) *los niños elaboran criterios propios para producir representaciones numéricas*, y 2) *la construcción de la notación convencional no sigue un orden de la serie, aunque ésta desempeñe un papel importante en esa construcción*. Las producciones que encontraron son:

_1_. Cantidad de cifras y magnitud del número ¿no ves que tiene más números?

En la comparación de números Lerner y Sadovsky (1994) observaron que los niños elaboraron una hipótesis que podría explicitarse así: “Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número”. A continuación, se transcribe dos diálogos de entrevistas realizadas a Alina y Loli:

> *“- Alina (6 años, primer grado), al justificar sus decisiones en el juego de la guerra, afirma que 23 es mayor que 5 “porque éste (23, pero ella no lo nombra porque desconoce su denominación oral) tiene dos números y tiene más, y éste (5) tiene un solo numero”.*

Así, también,

> *“- Loli (6 años, primer grado) al justificar sus decisiones afirma que 12 es mayor que 6 “porque tiene mas números”.*

Esta primera hipótesis en donde se vincula la cantidad de cifras a la magnitud del número no se refiere sólo a los números de una o dos cifras, sino que se extiende esta comparación a números más grandes.

El criterio de comparación que los alumnos han construido funciona aún cuando no conocen la denominación oral de los números que están comparando. Se trata entonces de un criterio elaborado fundamentalmente a partir de la interacción con la numeración escrita y relativamente independiente de los nombres de los números. La notación numérica es una herramienta útil, pues, permite comparar cualquier par de números cuya cantidad de cifras es diferente. Este proceso por el cual se construye el criterio de comparación constituye un paso importante hacia la comprensión de la numeración escrita.

_2_. La posición de las cifras como criterio de comparación o el primero es el que manda

La segunda hipótesis sostiene que al comparar numerales de igual cantidad de cifras, los niños recurren a argumentos a través de los cuales se evidencia que han descubierto que la posición de las cifras tiene una función relevante en el sistema de numeración decimal, por ejemplo Lucila expresa:

> *"- Lucila (5 años, preescolar), después de afirmar que 21 es mayor que 12, lo justifica así: "Porque el uno (en 12) es primero y el dos es después; porque (en 21) el dos es primero y el uno es después".*

También,

> *"- Nadia (6 años, primer grado), explica como es que 31 es mayor que 13, y ella dice: "Que se fije dónde está el 3 y dónde esta el 1, o dónde está el 1 y dónde está el 3".*

Finalmente,

> *"Ariel dice: "Éste (el 2 de 21) es mas alto que éste (el 1 de 12) y se diferencia por el primero".*

Otros alumnos que entrevistaron Lerner y Sadovsky explicitan con mayor claridad cómo deben aplicar el criterio de comparación basado en la posición de las cifras. Por ejemplo, Guillermo expresa: "el que más valor tiene es el de adelante (el 2 de 21)" en comparación con el número 12.

Los niños han encontrado además de la vinculación entre la cantidad de cifras y la magnitud del número otra característica especifica de los sistemas posicionales: el valor que un número representa no es siempre el mismo, depende del lugar en el que esté ubicado. Saben que, si comparan dos números de igual cantidad de cifras, será necesariamente mayor aquel cuya primera cifra sea mayor y pueden afirmar "*el primero es el que manda*". Además, cuando la primera cifra de las dos cantidades es la misma, hay que recurrir a la segunda para decidir cual es mayor.

Por otro lado, algunos niños aún no descubren que "*el primero es el que manda*" porque representa grupos de 10 si el número tiene dos cifras, de 10^2 si tiene tres. No han descubierto la regla del sistema de numeración decimal, la cual manifiesta agrupaciones recursivas en base 10, pero esto no les impide en absoluto elaborar hipótesis referida a esta regla, la vinculación entre la cantidad de cifras o su posición y el valor del número, y utilizarlas como criterio de comparación de números.

3. Algunos números privilegiados: el rol de los nudos

La apropiación de la escritura convencional de los números no sigue el orden de la serie numérica: los niños manejan en primer lugar la escritura de los nudos. Es decir, el de las decenas [10], centenas [100], unidades de mil [1000], exactas y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos; por ejemplo: se le solicitó al alumno que escribiera el número más alto que conociera y pasó lo que a continuación se muestra:

“Experimentador	*Gisela*
Escribe un número bastante grande	*Escribe 1000.*
¿Cuál es ese?	*El mil*
¿ y el dos mil cómo se escribe?	*Escribe 200*
Ese es el dos mil	*Agrega un cero a su escritura*
¿Y éste (200) cuál es?	*Doscientos*
¿Y éste? (tapando un cero del 1000)	*El cien”*

Los datos que encontraron Lerner y Sadovsky (1994), muestra que los niños se apropian en primer término de la escritura convencional de la potencia de la base (100, es decir 10^2).

4. El papel de la numeración hablada

Los niños elaboran conceptualizaciones acerca de la escritura de los números, basándose en las informaciones que extraen de la numeración hablada y en su conocimiento de la escritura convencional de los nudos.

Para producir los números de cuya escritura convencional no se han apropiado aún, los niños yuxtaponen los símbolos que conocen de modo que correspondan con el orden de los términos en la numeración hablada.

Por ejemplo:

- “Lucila y Santiago (5 años) escriben:

108 [10 **y** 8]; *109* [10 y 9].

Los dos interpretan sus escrituras como “dieciocho” y “diecinueve” respectivamente”.

Otro alumno que desarrolla esta hipótesis es:

- “Martín (6 años) escribe:

70025 [setecientos veinticinco] para 725.

100080032 [mil ochocientos treinta y dos] para 1832”.

Finalmente,

- “Daniela (5 años) escribe de dos formas:

1000 500 36 (mil quinientos treinta y seis) para 1536.

Y también, lo escribe 1000536 (mil quinientos treinta y seis)”.

Lerner y Sadovsky (1994), sostienen que “la escritura de los números es resultado de la correspondencia con la numeración hablada que conduce a los niños a producir sus propias notaciones (no convencionales). ¿Por qué ocurre esto?, porque a diferencia de la numeración escrita, la numeración hablada no es posicional”.

Por ejemplo, si la organización de la numeración hablada fuera posicional, la denominación oral correspondiente a 3407, por ejemplo, seria “tres, cuatro, cero, siete”; sin embargo, la denominación utilizada de potencias de diez corresponde a “tres mil cuatrocientos siete”.

En la numeración hablada, la yuxtaposición de palabras supone siempre una operación, una operación aritmética. En una suma, por ejemplo el “mil cuatro” significa (1000 + 4) y en otros, una multiplicación, por ejemplo “ochocientos” significa (8 x 100). También, aparecen combinadas, por ejemplo, “cinco mil cuatrocientos” significa (5 . 1000 + 4 . 100). La conjunción “y” representa lingüísticamente adición, sólo aparece cuando se trata de reunir decenas y unidades.

Concluyen que las escrituras no convencionales producidas por los niños están hechas a imagen y semejanza de la numeración hablada.

Otras investigadoras que han indagado sobre la escritura de los números, Brizuela y Cayton (2010), plantean que la escritura de los números no es simplemente una reproducción gráfica por parte de los niños sino que involucra aspectos constructivos y operativos muy importantes para su adquisición, por ejemplo: la conceptualización y sistematización permite entender qué cantidad representa un número con respecto a la posición que ocupa en la cifra.

Estas investigadoras observaron dos tipos de representaciones de los numerales; las *convencionales y no convencionales*. Utilizaron en su investigación dos tipos de presentaciones para trabajar los números: la primera consiste en presentar los números a los niños de manera oral y la segunda consiste en presentar con fichas los valores de las cantidades. Con ello, observaron el tipo de producciones que los niños logran realizar. Ellas refieren que éstas son entidades conceptuales que pueden ser representadas de diferentes maneras, por ejemplo, por medio de *numerales* (se refieren a los números anotados).

Sistemas externos de representación y *representaciones externas:* La característica fundamental de las representaciones externas es que son notaciones *tienen una existencia física externa*. Éstas pueden ser escritas, representadas en papel y a través de fichas de valores, Goldin (1998, citado en Brizuela y Cayton, 2010). Estas dos autoras no hacen diferencia entre notaciones y representaciones. En lugar de distinguirlas, ellas consideran a *las notaciones un tipo especial de representación externa*. Contrario a lo que Freeman (1993, citado por Brizuela y Cayton, 2010) entiende por representaciones como aquellas que son internas o mentales. Aquí, se usa el término representación externa, como lo hace Goldin, para incluir representaciones que no son necesariamente producidas con lápiz y papel (notaciones), sino, también las representaciones construidas con objetos concretos como las fichas de valores que usaron en su estudio.

La forma escrita de las notaciones expresa qué sabemos y entendemos de lo que se está representando. Hay una interacción constante entre la representación y lo representado. Hay una tendencia en adoptar la perspectiva de sistemas externos de representación, ya que transforma los procesos cognitivos. No son sólo herramientas o apoyos externos, sino que pueden ampliar y reorganizar dicho proceso.

Autores como Zhang y Norman (1995), sostienen que hay un ***efecto representacional*** en la que cada representación tiene un impacto diferencial en los usuarios. Estos autores sostienen que "*diferentes representaciones de una estructura abstracta pueden causar conductas a nivel cognitivo dramáticamente diferentes*"; es decir, lo que percibe el sujeto se puede representar y entender de varias maneras.

En lo que se refiere a la escritura del número, las notaciones *no convencionales* que realizan los niños tienen una lógica propia. La mayoría de las características no convencionales de los numerales que anotan parecen indicar en cierta medida que hay un desarrollo en la apropiación de las características del sistema de numeración.

Algunos estudios han indagado la relación entre diferentes representaciones y diferentes tipos de respuestas que dan los alumnos tanto convencionales y no convencionales; Scheuer, Sinclair y otros autores (citados en Brizuela y Cayton, 2010), encontraron, dos tipos de respuestas notacionales: la primera es nombrada **notaciones logográmicas**. En esta se anota el número entero literalmente, por ejemplo *100701* para "ciento setenta y uno") y la segunda es la notación **compactada** en donde se suprime algunos de los ceros de la notación logográmica, pero sin alcanzar la compactación completa propia del principio posicional; por ejemplo anotar *1071* para "ciento setenta y uno" (171).

Con este tipo de notaciones, se observa que existe una variedad de respuestas no convencionales entre los niños a la hora de producir numerales. Pero, ¿Estas respuestas varían dependiendo de cómo se presentan los números a los niños? ¿Qué ocurre si las presentaciones varían? ¿Variarán los tipos de respuesta?. Los estudios antes descritos indican que sí. Pero, ¿Cuál será la naturaleza de estas diferencias?. Ante estas interrogantes Brizuela y Cayton (2010), plantean otras preguntas similares que pretenden responder en sus investigaciones.

• *¿De qué modo se distinguen las respuestas no convencionales de los niños, a la hora de producir numerales, si los números les son presentados de modo oral o a través de fichas de valores?*

• *¿Existen variaciones en estas diferencias de acuerdo al grado de escolaridad de los niños?*

Las respuestas que los niños dieron en la entrevista individual fueron codificadas de acuerdo a nueve categorías, Brizuela y Cayton (2010), éstas son:

1) **Otros tipos de notación** – en esta categoría las investigadoras indican que es imposible encontrar la estrategia utilizada por el niño, o bien el tipo de producción es único. Por ejemplo, ellas clasificaron dentro de esta categoría la notación *"5*" cuando se presentó el número "treinta" con fichas de valores.

2) **Idiosincrática** – se refiere a la cualidad de respuesta característicos y distintivos de un individuo. De un mismo alumno se pueden identificar ciertos patrones de respuesta comunes. Por ejemplo, se clasificaron como idiosincráticas las respuestas de un niño quien a partir de los números en las unidades de mil anotaba números con combinaciones de unos y ceros, como anotar 11010 cuando se le presentó "mil ciento veintisiete" con fichas de valores.

3) **Respeta la cantidad de dígitos** – en esta categoría, el niño escribe el numeral con la misma cantidad de dígitos que tiene la notación convencional y eventualmente respeta alguno de los dígitos que se encontrarían en la notación convencional. Por ejemplo, anota 1270 cuando se le presenta "mil ciento veintisiete" oralmente.

4) **Omisión de dígitos** – Aquí, el alumno anota el número con alguno de los dígitos del número presentado, pero faltan otros. También se utilizó para los casos en los cuales se cambió un dígito por un cero. Por ejemplo, cuando el niño anotaba 1003 ó 43 para “ciento cuarenta y tres”.

5) **Transposición de dígitos** – El número incluye todos los dígitos que deberían ser incluidos, pero al menos dos de ellos están ubicados en un orden incorrecto. Por ejemplo, se clasificó dentro de esta categoría la producción cuando el niño anotaba 134 para “ciento cuarenta y tres”.

6) **Transcodificación literal completa** – Se anota prácticamente el numeral completo y eventualmente con algún dígito cambiado. En esta categoría también se incluyó aquellas respuestas que tienen alguna desviación de la literalidad, ya sea porque sobran ceros o falta algún dígito. Esta categoría coincide con la de Seron y Fayol (1994); Scheuer y otros autores, (2000; citados por Brizuela y Cayton, 2010), donde incluyen dos tipos de producciones, tanto 100701 como 10071, ya que para niños que ya anotan convencionalmente los números en las decenas, la anotación 71 se ha convertido en la notación literal de “setenta y uno”.

7) **Notación compactada** – El numeral incluye ceros extra, aunque siempre menos de los que se incluyen en la categoría transcodificación literal completa. Por ejemplo, se anota 1071 para “ciento setenta y uno”. Esta categoría fue adaptada de Scheuer et al, op. cit.

8) **Notación convencional** – El número se anota convencionalmente. Esta categoría incluyó respuestas en las cuales algunos dígitos podrían verse invertidos. El requisito para ser codificado dentro de esta categoría era que todos los dígitos estuvieran en las posiciones convencionales.

El trabajo de Brizuela y Cayton (2010), muestra una gran la cantidad de producciones realizadas por los niños. Ellas encontraron que hay una marcada diferencia en el tipo de representación que hace el niño del número.

Mientras que los niños en pre-escolar tienen un mayor número de respuestas no convencionales (otros tipos de notación, contar las fichas y omitir dígitos), los niños de primer grado presentan respuestas de tipo idiosincrático (respetar la cantidad de dígitos, contar las fichas, omitir dígitos, transcodificación literal completa), y los que están en segundo grado anotan respuestas convencionales y de transcodificación literal completa.

Las respuestas no convencionales de tipo transcodificación literal completa y notación compactada son respuestas relativamente sofisticadas que se dan más frecuentemente en los niños mayores. Son respuestas “erróneas” por ser no convencionales, pero reflejan una conceptualización compleja sobre la estructura *del valor posicional*, *el cero y la base decimal* del sistema de numeración. Estos hallazgos ponen en perspectiva los tipos de respuesta que dan los niños así como las posibles maneras en que se podría reaccionar a respuestas no convencionales. Se observa que los niños poseen un gran y complejo trabajo intelectual al producir estas notaciones.

Por otra parte, el impacto de la presentación de ciertos materiales concretos para representar los números del sistema de numeración pueden dar como resultado una variedad de respuestas no convencionales, sobre todo en los niños de pre-escolar cuando trabajan con fichas de valores. En la escuela, a menudo se introducen sistemas de representación a través del *uso de materiales concretos* con la intención de facilitar la comprensión del sistema de numeración. Sin embargo, estos supuestos apoyos presentan dificultades, ya que los niños deben apropiarse de las reglas subyacentes de su funcionamiento para realmente comprenderlos.

Se observa que presentar los números de manera oral y con fichas puede provocar conductas a nivel cognitivo dramáticamente diferentes (Zhang y Norman, 1995). El uso de materiales concretos que traten de reflejar la estructura del sistema de numeración es imprescindible, sin embargo, habría que ser prudentes dadas las dificultades inherentes al aprendizaje del sistema de numeración decimal. A continuación, se desarrolla el sistema de numeración vigesimal.

1.6 Estructura y características del sistema de numeración vigesimal mixteco

En México los diferentes pueblos originarios que conforman el país poseen formas particulares de contar [sistema de numeración]. La población mixteca, ubicada al sur de México en los estados de Oaxaca, Guerrero y Puebla, se caracteriza por tener un sistema de numeración oral de origen prehispánico, desarrollado antes de la llegada de los españoles a México. Éste es de base vigesimal porque originalmente se desarrolló con la ayuda de los dedos de manos y pies, que son el número completo de dedos de una persona (Hollenbach y Erickson, 2000). La cultura mixteca posee este sistema de numeración vigesimal verbal que tanto en tiempos pasados como en la actualidad le permite contar las diferentes cosas de su entorno.

Actualmente, en San Juan Mixtepec, Juxtlahuaca, Oaxaca los números del sistema de numeración mixteco se utilizan principalmente en dos situaciones de la vida diaria, para contar y para nombrar. Se cuentan personas, productos, animales, plantas, entre otras cosas y se nombran las fechas utilizando los números del mixteco.

A continuación se presentan los números del mixteco de la variante dialectal de San Juan Mixtepec. Ésta es una de las diferentes formas en las que se habla la lengua mixteca. Los numerales del uno al diez tienen un nombre propio. Ver tabla 1.

Tabla No. 1. **Numerales del mixteco del uno al diez**

Vocablo del mixteco	Traducción en español	Numeral
In	Uno	1
Uvi	Dos	2
Uni	Tres	3
Kumi	Cuatro	4
U'un	Cinco	5
Iñu	Seis	6
Utsa	Siete	7
Una	Ocho	8
Iin	Nueve	9
Utsi	Diez	10

Estos primeros números son utilizados para continuar la cadena numérica. De acuerdo a Barriga (2005), algunas lenguas poseen bases aditivas antes de llegar a la base multiplicativa. En mixteco el número diez es la primera base aditiva, ver tabla 2.

Tabla No. 2. **Numerales del mixteco del once al catorce**

Vocablo del Mixteco	Traducción en español	Numeral	Desarrollo
Utsi in	Diez uno	11	10 + 1
Utsi uvi	Diez dos	12	10 + 2
Utsi uni	Diez tres	13	10 + 3
Utsi kumi	Diez cuatro	14	10 + 4

Los números 11, 12,13 y 14 se construyen con el diez seguido de uno, dos, tres y cuatro respectivamente. Aquí se puede observar el principio aditivo.

El siguiente número en la cadena numérica es el 15 y también funciona como base aditiva [ver la tabla 3]. Éste toma un nombre propio, *tsa'un. xa'un* y *sa'un* [15] son dos ejemplos de variante dialectales.

***Tabla No. 3.* Numerales del mixteco del quince al diecinueve**

Vocablo del Mixteco	Traducción en español	Numeral	Desarrollo
Tsa´un	Quince	15	15
Tsa´un in	Quince uno	16	15 + 1
Tsa´un uvi	Quince dos	17	15 + 2
Tsa´un uni	Quince tres	18	15 + 3
Tsa´un kumi	Quince cuatro	19	15 + 4

Los números 16, 17,18, 19 se construyen a partir de la base aditiva 15. El número 20 tiene un nombre propio, *oko* el cual quiere decir veinte o veintena. También se le denomina *iko* cuando se usa para formar 40, 60 y 80. Por ejemplo en el número 40, *uvi x**iko*** significa "dos veinte", es decir, 2 x 20; en el número 60, *uni x**iko*** significa "tres veinte", 3 x 20; y en el número 80, *kumi x**iko*** significa "cuatro veinte" 4 x 20, (Caballero, 2005; Caballero, 2008).

A partir del número 20, inicia la multiplicación de la base. Éste le permite al sistema avanzar hacia la construcción del siguiente nivel [el 400]; pero, para poder alcanzar ese número se recurre a las bases de sumas diferentes.

Los números del 21 al 30 se construyen sumándole a la base multiplicativa [20] los numerales del uno al diez. Ver tabla 4.

Tabla No. 4. Numerales del mixteco del veinte al treinta

Vocablo del Mixteco	Traducción en español	Numeral	Desarrollo
oko	Veinte	20	1(20)
oko in	Veinte uno	21	1(20)+1
oko uvi	Veinte dos	22	1(20)+2
oko uni	Veinte tres	23	1(20)+3
oko kumi	Veinte cuatro	24	1(20)+4
oko u´un	Veinte cinco	25	1(20)+5
oko iñu	Veinte seis	26	1(20)+6
oko utsa	Veinte siete	27	1(20)+7
oko una	Veinte ocho	28	1(20)+8
oko iin	Veinte nueve	29	1(20)+9
oko utsi	Veinte diez	30	1(20)+10

Para formar los números del 31 al 34 se utiliza la base multiplicativa 20, la base aditiva 10 y los numerales del uno al cuatro. [Ver tabla 5].

Tabla No. 5. Numerales del mixteco del treinta y uno al treinta y cuatro

Vocablo del Mixteco	Traducción en español	Numeral	Desarrollo
oko utsi in	Veinte diez uno	31	1(20)+10+1
oko utsi uvi	Veinte diez dos	32	1(20)+10+2
oko utsi uni	Veinte diez tres	33	1(20)+10+3
oko utsi kumi	Veinte diez cuatro	34	1(20)+10+4

Los números del 35 al 39 se forman con la base aditiva 15 como se puede apreciar en la tabla 6.

Tabla No. 6. **Numerales del mixteco del treinta y cinco al treinta y nueve**

Vocablo del Mixteco	Traducción en español	Numeral	Desarrollo
oko tsa´un	Veinte quince	35	1(20)+15
oko tsa´un in	Veinte quince uno	36	1(20)+15+1
oko tsa´un uvi	Veinte quince dos	37	1(20)+15+2
oko tsa´un uni	Veinte quince tres	38	1(20)+15+3
oko tsa´un kumi	Veinte quince cuatro	39	1(20)+15+4

Para construir del 35 al 39 se utiliza la base multiplicativa 20, la base aditiva 15 y los numerales del uno al cuatro respectivamente.

El número 40 se forma multiplicando la base multiplicativa [20] por dos. Posteriormente, para formar del 41 al 49 se le suma al 40 los numerales del uno al nueve. [Ver tabla 7].

Tabla No. 7. **Numerales del mixteco del cuarenta al cuarenta y nueve**

Vocablo del Mixteco	Traducción en español	Numeral	Desarrollo
uvi xiko	Dos veinte	40	2(20)
uvi xico in	Dos veinte uno	41	2(20)+1
uvi xico uvi	Dos veinte dos	42	2(20)+2
uvi xico uni	Dos veinte tres	43	2(20)+3
uvi xico kumi	Dos veinte cuatro	44	2(20)+4
uvi xico u´un	Dos veinte cinco	45	2(20)+5
uvi xico iñu	Dos veinte seis	46	2(20)+6
uvi xico utsa	Dos veinte siete	47	2(20)+7
uvi xico una	Dos veinte ocho	48	2(20)+8
uvi xico iin	Dos veinte nueve	49	2(20)+9

De las características descritas del mixteco, se puede observar que este sistema posee dos bases de sumas diferentes 10 y 15 antes de que aparezca la base multiplicativa 20; esto tiene el objetivo de alcanzar números más grandes.

A continuación se desarrollan los números del mixteco del 50 al 100. Aquí, se podrá observar como se va construyendo esta numeración oral. Para construir del 50 al 100 se usa la base multiplicativa, las bases aditivas y los primeros números de la serie. En la siguiente tabla se puede ver la regularidad sistemática de su construcción.

***Tabla No. 8. Numerales del mixteco del* cincuenta al cien**

Vocablo del Mixteco	Numeral	Desarrollo	Vocablo del Mixteco	Numeral	Desarrollo
uvi xiko utsi	50	2(20)+10	*uni xiko* tsa´un in	76	3(20)+15+1
uvi xiko utsi in	51	2(20)+10+1	*uni xiko* tsa´un uvi	77	3(20)+15+2
uvi xiko utsi uvi	52	2(20)+10+2	*uni xiko* tsa´un uni	78	3(20)+15+3
uvi xiko utsi uni	53	2(20)+10+3	*uni xiko* tsa´un kumi	79	3(20)+15+4
uvi xiko utsi kumi	54	2(20)+10+4	***Kumi xiko***	80	4(20)
Uvi xiko tsa´un	55	2(20)+15	*kumi xiko* in	81	4(20)+1
uvi xiko tsa´un in	56	2(20)+15+1	*kumi xiko uvi*	82	4(20)+2
uvi xiko *tsa´un uvi*	57	2(20)+15+2	*kumi xiko* uni	83	4(20)+3
uvi xiko tsa´un uni	58	2(20)+15+3	*kumi xiko* kumi	84	4(20)+4
uvi xiko tsa´un kumi	59	2(20)+15+4	***Kumi xiko* U´un**	85	4(20)+5
Uni xiko	60	3(20)	*kumi xiko iñu*	86	4(20)+6
uni xiko in	61	3(20)+1	*kumi xiko utsa*	87	4(20)+7
uni xiko uvi	62	3(20)+2	*kumi xiko una*	88	4(20)+8
uni xiko uni	63	3(20)+3	*kumi xiko iin*	89	4(20)+9
uni xiko kumi	64	3(20)+4	***Kumi xiko utsi***	90	4(20)+10
Uni xiko u´un	65	3(20)+5	*kumi xiko utsi in*	91	4(20)+10+1
uni xiko iñu	66	3(20)+6	*kumi xiko utsi uvi*	92	4(20)+10+2
uni xiko utsa	67	3(20)+7	*kumi xiko utsi uni*	93	4(20)+10+3
uni xiko una	68	3(20)+8	*kumi xiko utsi kumi*	94	4(20)+10+4
uni xiko i̱in	69	3(20)+9	***Kumi xiko* tsa´un**	95	4(20)+15
Uni xikoutsi	70	3(20)+10	*kumi xiko* tsa´un in	96	4(20)+15+1
uni xiko utsi in	71	3(20)+10+1	*kumi xiko* tsa´un uvi	97	4(20)+15+2
uni xiko utsi uvi	72	3(20)+10+2	*kumi xiko* tsa´un uni	98	4(20)+15+3
uni xiko utsi uni	73	3(20)+10+3	*kumi xiko* tsa´un kumi	99	4(20)+15+4
uni xiko utsi kumi	74	3(20)+10+4	**In ciento [u´un oko, u´un xiko]**	100	5(20)
***Uni xiko* tsa´un**	75	3(20)+15			

Caballero (2005), sostiene que en el uso oral del sistema mixteco se va lexicalizando conforme al español, es decir el mixteco va retomando palabras del español para nombrar algunos números del sistema decimal, por ejemplo cien, mil, millón. Entonces en mixteco se dice “in ciento”, “in mil” e “in millón” [un ciento, un mil, un millón]. En opinión de este autor se necesita revalorar y revitalizar este sistema mediante el uso oral cotidiano para evitar que sea desplazado por el español. Lo que se plantea es que la población hablante recupere y siga usando todos los vocablos del mixteco en sus actividades diarias, y que la escuela enseñé este sistema vigesimal.

Hasta aquí, se ha descrito el desarrollo del sistema de numeración decimal y las características del sistema de numeración vigesimal mixteco que es de tradición oral. La historia del sistema decimal muestra que éste se usó inicialmente para representar cantidades simples, y posteriormente fue desarrollando una forma más práctica para representar números más grandes, lo cual simplificó la forma de efectuar las operaciones, a partir de la elección de un número limitado de signos. Por otro lado, el sistema oral vigesimal del mixteco que surgió hace muchos años, se sigue utilizando en varios pueblos de habla mixteca y muestra una notable sistematicidad para construir los números.

El conocimiento del sistema de numeración decimal implica para el alumno aprender el valor relativo y absoluto del número, cuya significación le permitirá escribirlos de manera adecuada.

En este apartado, también se revisó el sistema de numeración decimal que tiene relación estrecha con el algoritmo, como base para acceder a las cuatro operaciones básicas. La forma como se aborda en la escuela repercute de manera significativa en la vida escolar del alumno.

Capítulo II. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO: PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

En este capítulo se presentan investigaciones relacionadas con las dificultades de los estudiantes cuando resuelven problemas de estructura aditiva. Posteriormente, se dará a conocer sus habilidades al resolver problemas de estructura aditiva, y también se plantea la pertinencia de desarrollar procedimientos convencionales para la resolución de este tipo de problemas.

2.1. La resolución de problemas de estructura aditiva

¿Qué significan los problemas de estructura aditiva? Según Vergnaud y Durand (1983), los problemas de tipo aditivo son aquellos cuya solución exige adiciones y/o sustracciones. Las estructuras aditivas son las relaciones que están en juego dentro del problema matemático. Vergnaud encontró varios tipos de relaciones aditivas, y en consecuencia, varios tipos para las adiciones y las sustracciones.

En los ochenta, la *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) afirmaba "que la resolución de problemas debería ser un eje para las matemáticas escolares" (citado por Rivera y Codina, 2001). En consideración a lo anterior, en distintos países, entre ellos México, incorporó la resolución de problemas a la enseñanza de las matemáticas,. De igual manera, en 2000 la NCTM consideró la resolución de problemas como el eje fundamental de todo el aprendizaje de las matemáticas, dado que dicha práctica permite a los sujetos desarrollar su pensamiento matemático.

Así, el Plan y Programa de Estudios de Educación Primaria de 1993, en México, se fundamentaron en el enfoque de resolución de problemas y el Plan y Programa de Estudios de 2009 continúa con este enfoque (SEP, 2009), ahora con el nombre de *Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas*. Se aspira a que las escuelas desarrollen los contenidos matemáticos con esta perspectiva. Sin embargo, plantear y resolver problemas es uno de los objetivos poco logrados en la escuela.

El significado de la resolución de problemas

De acuerdo con Rivera y Codina (2001), el término *problema* refiere al obstáculo en el camino del sujeto, quien desconoce un medio de acción y experimenta confusión sobre lo que debe hacer ante tal situación. Por otra parte, *resolución del problema* es el proceso por el cual un sujeto pone un plan de acción para llegar al resultado de ese problema. Los autores citados señalan que, para el matemático, los problemas son aquellas cuestiones o interrogantes no totalmente resueltas, y su resolución es el campo de acción y de estudio.

Según Kilpatrick, *un problema* es una situación donde hay una meta a lograr, de modo que ya no se puede ver el problema aislado del sujeto; entonces la resolución de problemas se convierte en el objeto de estudio. Para Mayer, la resolución de problemas se refiere al proceso de transformar el estado inicial y el estado final del problema; dichas transformaciones se realizan mediante el pensamiento. De este modo, se entiende que la resolución de problemas contiene procesos de transformaciones de estados [inicial y final]. Hay una clara diferencia entre resolución [las distintas transformaciones de los estados] y la solución del problema [el estado final], (autores citados por Rivera y Codina, 2010).

Dentro del proceso de resolución de problemas se usa el término *resolutor* para designar al sujeto que está resolviendo el problema; y por *resolución* se entiende la acción o proceso de resolver el problema que tiene como fin una meta que llamaremos *solución*. *La solución designará el resultado o lo que se obtiene* de la acción de resolver.

Rivera y Codina (2001), consideran que parte de la resolución son aquellos procesos mentales y pensamientos lógicos que el resolutor emplea en la búsqueda de solución [resolver]. La solución es el resultado. En ocasiones, se puede confundir resolución y solución considerándolas coincidentes; sin embargo no significan lo mismo.

Durante el proceso de resolución, el resolutor puede realizar pruebas erróneas o acudir a pruebas visuales, acercarse a la solución mediante aproximaciones sucesivas por ensayo y error. Estos recursos, válidos todos, son conocimientos y técnicas que el resolutor utiliza en su intento para resolver el problema. La resolución conduce a la meta buscada o resultado, que denominamos solución. A un proceso que no conduce a la solución lo llamamos *resolución sin éxito*.

Castro (1991), estableció desde el punto de vista matemático, que el problema involucra:

a. Una proposición o enunciado.

b. Unos datos conocidos que hay que estudiar.

c. Una acción que alguien o algunos sujetos deben averiguar.

d. Una meta u objetivo para llegar al resultado.

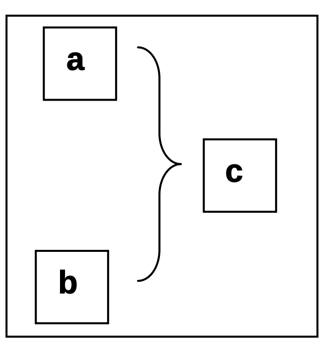
e. Un proceso u modo de actuación para alcanzar el resultado, y

f. Unas reglas que se deben seguir para alcanzar la meta.

Dentro de la investigación es importante distinguir los conceptos de resolución y solución para entender el proceso que desarrollan los niños cuando resuelven problemas de estructura aditiva, porque estos son contenidos muy importantes en la enseñanza de las matemáticas.

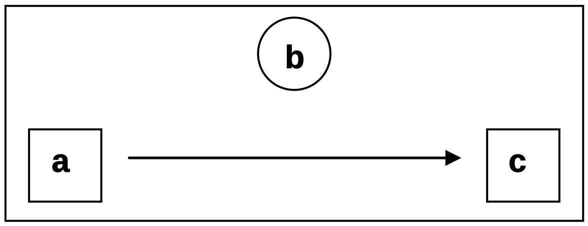
Vergnaud (1997; Vergnaud y Duran, 1983), desarrollaron seis categorías para problemas de estructura aditiva, que a continuación se describen:

1. *Dos medidas que componen una tercera*:



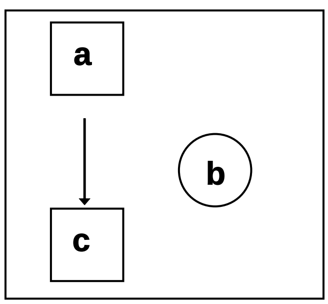
Ejemplo: Tengo 25 canicas de cristal y 23 de acero, en total tengo 48 canicas. 25, 23 y 48 son números naturales.

2. *Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a otra medida*:



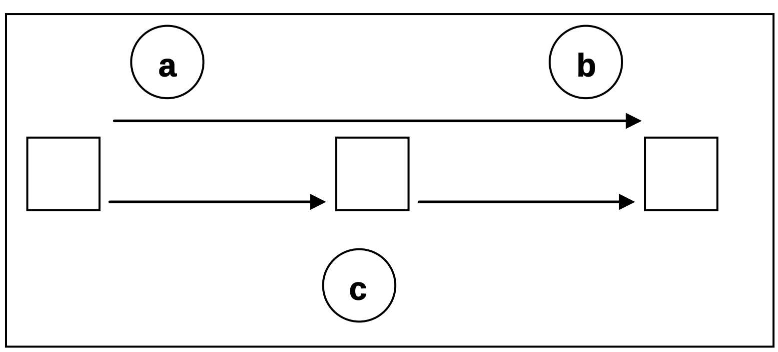
Ejemplo: Tenía 17 canicas. He jugado una partida y he perdido 13. Ahora tengo 4. 17 y 4 son números naturales. – 13 es un número relativo.

3. *Una relación une dos medidas*:



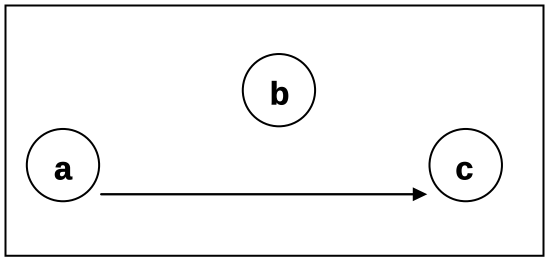
Ejemplo: Pablo tiene 28 canicas. Jaime tiene 5 menos; entonces tiene 23.

4. *Dos transformaciones se componen para dar lugar a otra transformación*:



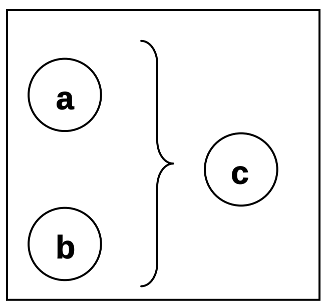
Ejemplo: Juego una partida y gano 13 canicas. Juego otra vez y pierdo 15. En total he perdido 2 canicas. + 13, - 15 y - 2 son números relativos.

5. *Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a otro estado relativo*:



Ejemplo: Debo 27 canicas a Pablo. Le devuelvo 24. No le debo más que 3. - 27, + 24 y - 3 son números relativos.

6. *Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a otro estado relativo*:



Ejemplo: Debo 37 canicas a Pablo y él me debe 34; por lo tanto sólo le debo 3. -37, + 34 y – 3 son números relativos.

Aquí se observa que identificar las relaciones que subyacen en cada tipo de problemas permite notar las posibles causas de las diferentes dificultades que enfrentan los niños al resolverlos.

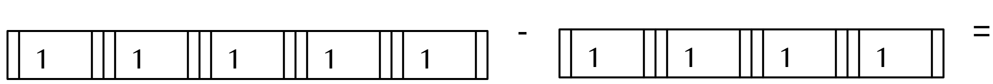
2.2. Modelos matemáticos utilizados para abordar los problemas de estructura aditiva

De acuerdo con Castro, Rico y Castro (1995), hay cinco *modelos matemáticos* para la adición y la sustracción: modelo lineal, modelo cardinal, modelo con medidas, modelo numérico y modelo funcional. A continuación se describen brevemente.

Modelo lineal. Este modelo usa la línea numérica como un esquema para integrar la sucesión de términos que sirven para contar y que, a su vez expresan el cardinal. Un ejemplo: De la escuela de Ramón a su casa hay 15 calles. Si ya caminó 8,¿cuántas calles le faltan para llegar a su casa?

Modelo cardinal. En este modelo suelen aparecer los diagramas de la *teoría de conjuntos*, que se pueden emplear de forma estática (no hay acción) o con carácter dinámico (la operación es el resultado de una acción). En el primer caso se trata de esquemas en los cuales se expresa la relación parte/todo, descrita bien por un conjunto dividido en dos partes disjuntas, o bien por un conjunto en el cual hay señalado un subconjunto y, por complementación se considera el otro. Este esquema es muy abstracto y su dominio supone una fase importante en la consolidación de la adición y la sustracción. En el segundo caso, básicamente consta de una entrada numérica, un cambio (u operador) posterior y una salida numérica (Maza, 1989).

Modelo con medidas. Se basa en el modelo longitudinal, por ejemplo las regletas de Cuisenare, o bien en magnitudes como la balanza para comparación de pesos. Por ejemplo, si Juan tiene 5 cubitos y retira 4, ¿cuántos le quedan?



Modelo numérico. Se considera en contexto estrictamente simbólico, y los números aparecen únicamente simbolizados. Por ejemplo,

1 2	1 7
- 4	+ 8
-------------	-------------

Modelo funcional. Actualmente se usa este modelo para introducir los problemas aditivos en el salón de clases, esquematizando situaciones cuya finalidad es desarrollar habilidades de suma y resta. Aguilar y Navarro (2000), han desarrollado una clasificación de este modelo; ellos plantean que los problemas deben describir cuatro situaciones: de cambio, combinación, comparación e igualación. Y esta clasificación desglosa varios tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva, que son básicamente acciones a realizar dentro del problema a partir de la ubicación de la incógnita en dicho problema. Veamos los tipos y subtipos de problemas aditivos:

Problemas de cambio: describen situaciones en las cuales un conjunto se incrementa o disminuye. Por ejemplo, Ana tiene 2 canicas y José le regala 6 canicas más; ¿cuántas canicas tiene Ana ahora?

Problemas de combinación: son situaciones derivadas de dos cantidades que se pueden considerar aisladas o como parte de un todo. Por ejemplo, Ana tiene 6 canicas y José tiene 2; ¿cuántas canicas tienen entre los dos?

Problemas de comparación: no existe una transformación de los conjuntos, sólo una relación comparativa. Aquí se pretende determinar la diferencia entre los conjuntos o averiguar uno de ellos conociendo el otro, y la diferencia entre ellos. Por ejemplo, Ana tiene 2 canicas y José tiene 3 más que Ana; ¿cuántas canicas tiene José?

Problemas de igualación: se incrementa o se disminuye una cantidad para hacerla igual a otra. Por ejemplo, Ana tiene 5 canicas y José tiene 3. ¿Cuántas canicas necesita José para tener las mismas que Ana?

Por otra parte se ha visto que, en la resolución de problemas de estructura aditiva, los alumnos despliegan varias estrategias cuando resuelven problemas de suma y resta (Luceño,1999).

Elaboración de un modelo con dedos u objetos. Dentro de éste se desarrollan tres procedimientos:

Si se les dice a los niños “suma 5+2”, ellos:

1) Forman un grupo de dedos para representar el primer sumando:

   “cinco” (extienden cinco dedos)

2) Forman un grupo de dedos para representar el segundo sumando.

   “dos” (extienden dos dedos)

3) Cuentan todos los dedos para hallar la suma. “uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis , siete”

Elaboración / utilización de procedimientos mentales. Esta estrategia consiste en contar todo, comenzando por el primer sumando. Ejemplo: para sumar 2 + 4, primero cuenta 1,2 y luego añade cada unidad del segundo sumando a esta cuenta; al 2 le añade uno y le da 3, luego al 3 le añade uno y le da cuatro; así sucesivamente, hasta llegar al seis que es la respuesta correcta.

En cambio, Broitman (1999), señala otros procedimientos que los alumnos usan para las *sumas*:

a) Reunir físicamente las colecciones y contar los elementos a partir de uno.

b) Representar las colecciones con la ayuda de los dedos, gráficamente o con símbolos (palitos) y luego contar el total. Hay una imitación o simulación de la situación descrita.

Y para las restas se emplean los siguientes:

a) Separar físicamente: a partir del conjunto mayor, contar y separar los elementos de la colección menor.

b) Descontar de 1 en 1 a partir del número mayor.

2.3. Enseñanza de las matemáticas por medio de resolución de problemas

Para la SEP, el objetivo en educación matemática es que los alumnos aprendan esta ciencia a partir del enfoque de resolución de problemas. El sustento es que la resolución de problemas promueve el aprendizaje matemático y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los alumnos.

En este orden de ideas, y de acuerdo con Cantero y otros autores (2003), la resolución de problemas aritméticos tiene que desarrollar y contemplar los siguientes procesos:

- Desarrollar un procedimiento para cuantificar situaciones de la vida diaria y para aplicar modelos matemáticos a situaciones concretas.
- Practicar, ensayar y aplicar el lenguaje matemático como parte de un código lingüístico, pues la clasificación de los problemas desde el punto de vista de su estructura semántica requiere hacer un análisis de la información verbal que contienen.
- Ser una vía para trascender la realidad, aplicando una forma específica de tratamiento de los datos que haga posible integrar y explicar de forma satisfactoria la realidad que se vive.
- Fungir como medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos matemáticos.
- Ser el método más adecuado de aprender las matemáticas.
- Integrar el razonamiento cognitivo y de conteo de los alumnos.
- Contemplar todo tipo de problemas en el aula.

Para Puig y Cerdán (1989), la resolución de problemas aritméticos debe contemplar situaciones que favorezcan construir conocimientos, y centrar el interés de los alumnos en la búsqueda de su solución. Los problemas deben cumplir dos condiciones: plantear un reto, es decir, situaciones donde los alumnos no conozcan el procedimiento para resolverlos, y situaciones donde los alumnos apliquen los conocimientos que poseen.

2.4 Los conceptos de suma y resta para la resolución de problemas

Sumar es la acción donde dos cantidades simultáneas forman una cantidad mayor que las de inicio, Maza (1989). Si disponemos, por ejemplo, de dos cantidades: 4 (canicas) y 7 (canicas), la acción a realizar es *reunir* los dos conjuntos para obtener uno mayor. Es usual que esta acción se conciba bajo la forma del verbo reunir. Otra interpretación de sumar es por medio del verbo *añadir*; la acción consiste en que a partir de una cantidad inicial posteriormente, añadir otra para obtener una cantidad final.

De acuerdo con Parra y Saiz (1994), la suma está vinculada a un aumento de cantidades y la resta a una disminución; por ejemplo, para conocer lo que se tenía antes de ganar o perder, se debe reconocer el sentido de la acción. Según Kamii (1994), la adición es una acción mental que el niño debe realizar operando con números.

Para Gómez (1988), la suma implica parejas de números distintos de aquellas cuyo resultado ha sido retenido por nuestra memoria y cuyo considerable tamaño obliga a organizar su procedimiento de tal manera que no se vuelva interminable.

Según Castro, Rico y Castro (1996), las acciones reales que sirven de fundamento para la adición y la sustracción comienzan por la unión o combinación de colecciones, en el caso de la suma, y por la separación de algunos objetos de un conjunto, en el caso de la sustracción. Para estos autores los niños tienen sus primeros encuentros con la adición en situaciones del tipo $n + 1$ y $n – 1$ con n mayor o igual a 5; más adelante resuelven situaciones del tipo $n + m$ por conteo ascendente. Ya en la escuela comienzan a manipular cantidades de tamaños mayores.

La suma y la resta son operaciones, es decir, acciones por las cuales se transforman numéricamente unas cantidades para hallar otras, Maza (1989). Por lo tanto, sumar y restar significa:

a) Integrar dentro de una misma estructura conceptual acciones de la vida cotidiana expresables de la forma: reunir, agregar, añadir, o bien quitar, retirar, desagregar.
b) Aplicar las propiedades características de estas estructuras conceptuales a situaciones problemáticas, tanto mediante sumas y restas como por el uso de algoritmos.

Las operaciones, también, son entendidas como objetos de conocimiento y permiten transformar la realidad por medio de la resolución de situaciones problemáticas.

Para Parra y Saiz (1994), las operaciones deben desarrollarse en la interpretación de las situaciones, de los procedimientos que utilizan los niños, así como de las formulaciones y escrituras que son capaces de producir e interpretar, de las propiedades que ponen en juego y de las relaciones que se pueden establecer entre los distintos conocimientos producidos. Estos aspectos dan sentido a las acciones de sumar y restar, y requieren ser tomados en cuenta como objeto de trabajo.

La adición es un contenido de enseñanza incorporado desde siempre en los primeros grados de la educación primaria. Se ha buscado que los niños aprendan a usarla como algoritmo y resuelvan cálculos con dicha operación. También, se ha previsto que los niños la utilicen para resolver problemas, (Ávila, 2005).

En el Plan y Programa de Estudios de la SEP de segundo grado (2009) se menciona que, la resta y la suma como objetos de enseñanza son el principal contenido a trabajar dentro del salón de clase. Conforme al nuevo enfoque introducido, resolver problemas corresponde a distintos significados; a la sustracción se le dan las connotaciones de *quitar o retroceder* y la adición se puede entender como *agregar, avanzar o juntar*. Sin embargo, resolver problemas de sustracción puede corresponder a distintos significados: “complemento o diferencia”. Como ejemplo de lo anterior se toma un extracto del Plan y Programa mencionado:

> *…a 5 niñas que están en la fiesta ya les dieron sus regalitos; si en total hay 14 niñas, ¿a cuántas falta darles sus regalitos? Pueden aparecer escrituras diferentes como: 5 + 9 = 14 y 14 – 5 = 9. Algunos alumnos pueden dar los siguientes argumentos: Puse 5 + 9 = 14 porque conté desde 5 hasta 14 y es 9, en cambio otros alumnos pueden haber partido de 14 y restarle 9. Estas dos escrituras pueden coexistir, ya que corresponden a los procedimientos que utilizaron; sin embargo, en uno de los casos, el resultado no aparece al final de la expresión, es decir, a la derecha del signo igual, lo cual no es habitual con las escrituras matemáticas. La escritura de resta adquirirá verdadero sentido cuando sea justamente esa, la operación que permite obtener el resultado.*

Este Plan y Programa de estudios de la SEP incorpora problemas de adición y sustracción en situaciones que implican calcular el estado inicial y el operador, que aparecen en el eje *sentido numérico y pensamiento algebraico* del bloque III.

Antes de la suma y la resta, en la enseñanza se deben tomar en cuenta algunos principios con respecto al número. Kamii (1994), considera seis principios al respecto:

1) Estimular y orientar la atención del niño a establecer relaciones entre los objetos.
2) Animar al niño a pensar sobre el número y la cantidad de modo significativo.
3) Alentar al niño en la cuantificación lógica de los objetos y a la comparación de conjuntos.
4) Fortalecer la construcción de conjuntos con objetos móviles.
5) Favorecer el intercambio de ideas entre los niños.
6) Intervenir en el quehacer infantil, de conformidad con su desarrollo.

Desde el punto de vista de Vergnaud (citado por Bermejo y Rodríguez 1990), la operación de adición implica una secuencia evolutiva del concepto de sumar a partir de los procesos de solución de problemas verbales.

La operación de la suma y la resta permite cuantificar el mundo de manera más precisa y formal. Según Maza, (1991), no sólo describe la realidad sino que se actúa sobre ella, transformándola.

Por otra parte, Parra y Saiz (1994), mencionan que los tipos de problemas pueden clasificarse de diversos modos y su complejidad varía según: los números en juego; los tipos de magnitudes; el orden de presentación de la información, y las formas de representación. A continuación, se aportan elementos para el desarrollo del algoritmo vista desde distintos autores.

2.5 Definición y uso del algoritmo

El algoritmo es una herramienta que fue pensada para realizar cálculos en matemática. La versión moderna de los algoritmos para la suma, la resta, la multiplicación y división tuvo sus orígenes en el trabajo del árabe Mohamed Ibn Musa Al'khwarizmi (780 a 850 d. C), quien integró tres conocimientos básicos: la numeración hindú, el valor posicional y el cero.

El algoritmo es definido como "proceso de cálculo". Es un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema; también es un método y notación en las distintas formas del cálculo.

En las escuelas los alumnos aprenden los algoritmos haciendo ejercicios, pero no aprenden dónde emplearlos: la gran mayoría aprenden a sumar, restar, multiplicar y dividir (operaciones básicas), pero muestran un conocimiento limitado de su aplicación.

De acuerdo con Flores (2005), este contenido escolar es visto generalmente como ejercicio aislado que no permite al alumno aprender a utilizarlo. El problema de aprender dónde emplear esta herramienta no se ha resuelto, pues como mencionan Ávila, Block y Carvajal (2003), la enseñanza de los algoritmos en el contexto de la solución de problemas se empieza a adoptar en las aulas, pero con ciertas limitaciones: 1) mayor énfasis en el aprendizaje del procedimiento que en el significado del algoritmo; 2) se concede un lugar privilegiado al algoritmo y poco reconocimiento a los procedimientos no algorítmicos; 3) se enseña la definición de la suma o resta, después se resuelven ejercicios, y por último se emplean para solucionar problemas.

Flores (2005) sostiene que los maestros guían la actuación de los alumnos, es decir, lo que éstos deben realizar. Pocos maestros reconocen, por ejemplo, *el error como una oportunidad de aprendizaje*. Entre las varias razones que llevan a que el alumno no reconozca dónde emplear el algoritmo, se pueden mencionar:

1. No hay quien guie a los alumnos.
2. La relación entre el saber y conocimiento. Los alumnos no reconocen cuál algoritmo emplear, especialmente si los problemas plantean situaciones conceptualmente diferentes de los que antes han practicado.
3. Se trabaja en clase con problemas simples y de baja complejidad.
4. En la escuela, el alumno tiene poca oportunidad de desarrollar y probar sus procedimientos.
5. Existe poca relación de los aspectos conceptuales del problema, la solución no algorítmica y la solución algorítmica.
6. No hay oportunidad de un procedimiento propio.
7. Hay un entendimiento superficial de la utilidad del algoritmo en la vida diaria.

Capítulo III. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describe la teoría que sustenta esta tesis; se desarrolla el planteamiento de Zhang y Norman (1994) sobre las *tareas cognitivas distribuidas*, y después el concepto de esquema de la *teoría de los campos conceptuales* realizado por Vergnaud (1990; 2007).

3.1 *Las representaciones en tareas distribuidas*

El enfoque tradicional de la cognición asume que todo individuo elabora representaciones que suelen estar exclusivamente en la mente; por ejemplo: las proposiciones, esquemas y la producción de imágenes mentales. Sin embargo, los *objetos externos ayudan a desarrollar la cognición* y muchos fungen de ayudas inmediatas; por ejemplo, la escritura de dígitos a menudo es considerada como una ayuda para la memoria en el cálculo, Zhang y Norman (1994).

Todo individuo interactúa en un entorno lleno de información. En ésta hay una variedad de “tareas” cognitivas que requieren ser pensadas, ya sea de manera individual por medio de la mente (interna) o con la ayuda del entorno (externo). Estas dos formas se conocen como la capacidad de procesar la información de la interrelación entre la mente interna del individuo como y la influencia de lo externo.

Desde el enfoque de las *representaciones en tareas distribuidas* se considera que todo individuo procesa toda información por medio de la mente interna y del entorno. En este tipo de representación se consideran tres características principales: a) la representación distribuida de la información; b) la interacción entre representaciones internas y externas; y c) la naturaleza de las representaciones externas.

3.2 *El efecto representacional*

El efecto representacional describe el fenómeno donde representaciones de una estructura común pueden provocar diferentes conductas cognitivas. Por ejemplo: la representación de los números (Cayton y Brizuela 2010).

En estudios psicológicos se ha encontrado que el efecto representacional para la resolución de problemas y del razonamiento: diferentes representaciones pueden tener un efecto “dramático” en la dificultad del problema, incluso si se trata de un mismo problema. Una característica de los problemas es que requieren procesar la información interna y externa. Sin embargo, muchos estudios sólo se han enfocado en las representaciones internas; cuando hablan de representación externa la separan de las primeras.

En este trabajo se considera que tanto las representaciones internas como las externas son partes fundamentales del sistema representacional. Para estudiar las tareas cognitivas es esencial descomponer la representación de las tareas en componentes internos y externos, es decir, identificar diferentes funciones en ambas representaciones. A continuación se describe esta teoría.

3.3 *La teoría de las representaciones distribuidas*

El principio básico que sustenta las representaciones distribuidas consiste en un sistema de representaciones internas y externas (Zhang y Norman, 1994). Las representaciones *internas* están en la mente; por ejemplo, en proposiciones, producciones, esquemas e imágenes mentales. Las *externas* están en el mundo de los símbolos físicos (escritura de símbolos), o en relaciones incrustadas en configuraciones físicas: relaciones espaciales de dígitos escritos, presentaciones visuales y espaciales de diagramas, o ábacos. En general, una o más representaciones internas y externas participan en cualquier tarea cognitiva distribuida. Una tarea no depende exclusivamente de las representaciones internas ni de la información procesada externamente, sino de la interacción de las dos en espacios de información formados por ambas representaciones.

En la figura número 1 se muestra el sistema representacional de una tarea con dos representaciones: interna y externa: la interna reside en la mente de las personas, en tanto que cada representación externa reside en un medio externo. Las representaciones internas forman un *espacio de representación interna* y las representaciones externas forma un *espacio de representación en el exterior*. Estos dos espacios forman otro espacio de trabajo "abstracto", conocido como *representación distribuida*, donde se describen las estructuras abstractas y las propiedades de la tarea.

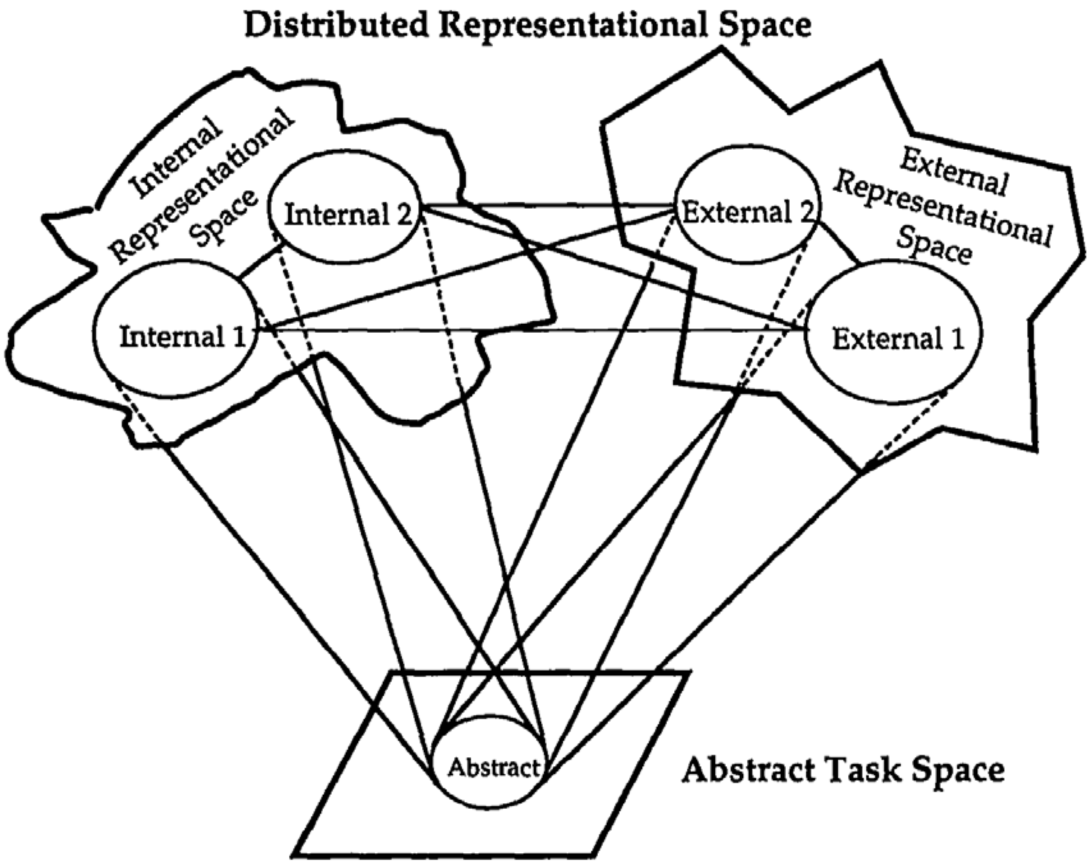


Figura No. 1. Sistema de representación distribuida. Zhang y Norman (1994), p. 90.

El uso del término *representación* en este estudio se refiere al mundo representado que es la parte tangible. Una representación externa se puede percibir cuando una persona ejecuta una tarea; por ejemplo, cuando se realiza una tarea (resolución de problemas de estructura aditiva) y la persona sabe que por medio de los números escritos (árabes o romanos) puede comenzar un procedimiento de resolución.

En esta teoría, las tareas cognitivas distribuidas se emplean como marco de análisis: a) consideración de las representaciones internas y externas de una tarea cognitiva distribuida dentro de un sistema representacional; b) descomposición explícita del sistema de representación en componentes internos y externos, y c) identificación de las diferentes funciones de las representaciones internas y externas en la cognición.

El enfoque de la cognición tradicional es inapropiado para el estudio de tareas cognitivas distribuidas, porque considera las representaciones externas como meras ayudas periféricas de la cognición, y a menudo se mezclan representaciones externas e internas.

Análisis de la representación: es una metodología para el estudio del efecto representacional en tareas cognitivas distribuidas, a partir de representaciones jerárquicas, representaciones de isomorfismos y representaciones distribuidas.

Muchas tareas cognitivas distribuidas tienen representaciones jerárquicas de varios niveles (para algunos ejemplos, véase Zhang 1992). Cada nivel de representación de la tarea presenta una estructura abstracta que puede contener diferentes representaciones isomorfas. Para algunos niveles, las representaciones isomorfas pueden ser representaciones distribuidas. Al descomponer la representación de una tarea en niveles, podemos identificar las propiedades de representación en cada nivel, que son responsables de los diferentes aspectos del efecto de representación.

Cabe señalar que las diferentes tareas tienen estructuras jerárquicas y diferentes propiedades de representación en sus niveles. La metodología de análisis del sistema representacional, como estrategia, se puede descomponer en componentes y niveles con la finalidad de estudiar las propiedades de la representación en cada nivel.

3.4 Estructura, representación y procesos

Para comprender los procesos que envuelven a las tareas cognitivas distribuidas es necesario entender qué información se procesa y cómo esa información es representada. Diferentes representaciones activan diferentes procesos; por ejemplo, los procesos perceptuales son activados por representaciones externas, mientras que los procesos cognitivos son activados por representaciones internas. Desde la perspectiva representacional, las tareas que parecen ser diferentes podrían tener una estructura común. La información necesaria para el desempeño de cualquier tarea cotidiana se distribuye mediante la información que se percibe desde el mundo exterior y la información que se procesa en la mente interna (Zhang y Norman, 1994). Las representaciones externas son construidas a partir de la información extraída de los objetos externos (como símbolos escritos) y las representaciones internas en la mente (por ejemplo, esquemas); juntas, forman una interrelación dinámica que da lugar al comportamiento cognitivo.

3.5 Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud

Para Vergnaud (1990), la teoría de los campos conceptuales es el desarrollo del conocimiento matemático a partir de un conjunto de conceptos interconectados. Él plantea que el conocimiento "matemático" se va a adquirir a lo largo del desarrollo del sujeto y en los diferentes contextos donde interactúa. Considera que el proceso de conceptualización matemática es la principal y la más importante en el proceso para la apropiación del conocimiento matemático. Además, resalta que a partir de la mediación de la enseñanza, de la elección de la situación que se le planteará a los alumnos, del proceso de conceptualización y de la acción del individuo se promueve el conocimiento.

Para analizar el proceso de conceptualización, Vergnaud describe tres componentes de la teoría de campos conceptuales: campo conceptual; esquema y representación.

3.6 Campo conceptual

Vergnaud (1990), parte de la premisa de que el conocimiento está organizado en campos conceptuales, esto es, “un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros durante el proceso de adquisición del conocimiento”; por ejemplo: el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones y, a la vez, es el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar éstas situaciones como tareas matemáticas. Los elementos constitutivos de los problemas de estructura aditiva son los conceptos de cardinalidad y medida, la transformación temporal como aumento o disminución, la relación de comparación cuantificada, la composición binaria, la operación unitaria, la inversión, el número natural y el número relativo.

Según Vergnaud (1990), el dominio de este campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en pocos años sino que ocurre durante varios años. La teoría de los campos conceptuales es una teoría psicológica del proceso de conceptualización, que estudia continuidades y rupturas del conocimiento desde el punto de vista conceptual (Vergnaud, 1990). Estudia el desarrollo del aprendizaje de competencias complejas, en este caso, el de los problemas de estructura aditiva. Según Flores (2002), la teoría se enfoca en el entendimiento de desarrollo de conceptos matemáticos; estos conceptos surgen de un proceso de reflexión y también de la participación activa del sujeto. Este proceso es constructivo, pues el alumno debe conectar el conocimiento que surge de situaciones novedosas con los ya existentes.

En esta teoría (Rodríguez Palmero y Moreira, 2002; Moreira, 2002), es fundamental la relación que se establece entre los conceptos y las situaciones, pues a partir de esta relación el alumno conceptualiza y significa el conocimiento. Los conceptos pasan a ser ejes de acción cuando el sujeto requiere desarrollar un conocimiento. Estos autores añaden que la resolución de problemas se debe centrar en el individuo en situación, en su forma de organizar la conducta, así como en su modo de conceptuarla.

Vergnaud (1990) distingue entre la *forma operatoria del conocimiento* y *la forma predicativa del conocimiento:* la operatoria permite actuar en situación y tener éxito eventualmente, con niveles de desarrollo muy diferentes, esto en función de los conocimientos necesarios para la acción y la utilización de instrumentos; y la forma predicativa del conocimiento enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. Dentro del campo conceptual, el concepto de situación empleado por Vergnaud no es el de la situación didáctica, pero sí el de la tarea.

3.7 Esquema

El término esquema se refiere a la totalidad dinámica organizadora de la acción del sujeto para una clase de situaciones específicas. La integran reglas de acción y de anticipaciones que generan una serie de acciones con el fin de lograr un cierto objetivo; igualmente está compuesto de invariantes operatorias (conceptos en acto y conocimientos en acto) y de inferencias.

Los esquemas se relacionan con todos los registros de la actividad: gestos, juicios y razonamientos. Estos registros enriquecen a los esquemas en el curso de la experiencia, por su descubrimiento, combinación y reestructuración, y permiten que las nuevas formas de organización de la actividad sean resultado de formas anteriores y situaciones novedosas. Ante situaciones nuevas, los esquemas ya formados de situaciones conocidas son evocados y puestos en acción.

Los esquemas evocados permiten que ocurra una asimilación de la nueva situación, pero cuando ésta no se ajusta a esos esquemas es necesario cambiar, “recombinar” los componentes del esquema existentes y descubrir nuevos esquemas. Así se establece un repertorio de esquemas, que gradualmente aumenta las oportunidades de tratar con situaciones más complejas.

La noción de esquema de Vergnaud es considerada para describir el comportamiento de un individuo ante una situación, así como punto de referencia para explicar los cambios en el desarrollo de la comprensión de un contenido específico, en este caso el de problemas de estructura aditiva. Al comprender un problema, el alumno organiza su actividad conforme a determinado esquema, pero en el curso de esta actividad puede sustituir, reconfigurar en función de los esquemas que dieron lugar al entendimiento original del problema (Vergnaud, 2000).

Un esquema permite generar series de diferentes acciones y de recolección de información, en función de las “variables” de la situación. Un paso esencial dentro del campo conceptual es la representación.

3.8 Representación

Vergnaud (1990) usó el término representación para gestos y acciones sobre el mundo físico. Así, la construcción del conocimiento consiste en la progresiva construcción de representaciones mentales sobre el objeto. La idea de representación permite simular la realidad y por tanto anticipar qué acción se va a realizar sobre ésta.

La construcción del conocimiento es la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explicitas. Por tanto, la representación permite organizar y a la vez dirige la acción. En la representación están implícitos los procesos de abstracción, internalización y generalización de esquemas que se desarrollan en la acción. Se puede decir que es mediadora entre la actividad externa y la actividad interna del sujeto; y también entre la acción y la situación.

Al resolver un problema el alumno construye una representación: toma rasgos relevantes del problema, los conceptos que están en el problema, signos o símbolos que le permitan lograr resolver dicho problema. En la representación están los esquemas que son parte de la comprensión y de la solución.

Los trabajos de Zhang y Norman (1994) y de Vergnaud (1990), permiten analizar los datos de esta investigación. Se usará la teoría de las representaciones distribuidas para ver el pensamiento de los alumnos en el proceso de solución del problema y se tomará ideas de la teoría de Vergnaud, el de esquema para comprender las acciones que realiza el sujeto al resolver un problema.

Capítulo IV. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología utilizada en el estudio. Se inicia con la descripción del tipo y corte del estudio; enseguida, se describe la población que participó en el estudio; posteriormente, se describen las etapas del estudio, su aplicación y la propuesta de análisis de los datos.

4.1.1 Tipo de estudio

Para esta investigación se eligió realizar un estudio de tipo descriptivo-explicativo: consiste en describir y explicar características, propiedades y rasgos importantes de un determinado fenómeno. Se describe y explica cómo los alumnos de 2do y 3er grados de primaria van desarrollando nociones del sistema de numeración decimal, nociones del sistema de numeración vigesimal y cómo desarrollan estrategias en la resolución de problemas de estructura aditiva.

4.1.2 Corte del estudio

La metodología del estudio es cualitativa: sirve para explorar e identificar ideas, hipótesis y variables de interés para el investigador, quien busca identificar y explicar las características de una población especifica; participa interpretando situaciones y hechos, es decir, cómo son y cómo se manifiestan dicho acontecimientos o situaciones. La característica principal de la investigación cualitativa es indagar y comprender a profundidad los datos, por medio de las acciones de los sujetos, de la contextualización del entorno, de los detalles y experiencias de la población específica. También aporta una visión más natural y holística de los fenómenos, así como flexibilidad para el análisis de los datos, (Sampieri y otros autores, 2006).

En este estudio se buscó explorar, interpretar y evaluar diversos aspectos y componentes del fenómeno a investigar; por ejemplo, el desarrollo de estrategias y dificultades que tienen los alumnos al resolver problemas. Con lo anterior, se propone describir los procesos y significados que los alumnos de 2do y 3er grados elaboran del sistema de numeración decimal, vigesimal y problemas de estructura aditiva.

4.1.3 Participantes

Se trabajó con tres niños y cuatro niñas de entre 7 a 10 años de edad, de segundo y tercer grados de primaria, en una escuela pública del Estado de Oaxaca; cuatro eran alumnos regulares de 2do grado, y tres de 3er grado, que asisten a una escuela pública rural bilingüe del sistema educativo nacional. La escuela es del tipo *multigrado*, que son aquellas donde los docentes atienden a alumnos de diversos grados en un solo salón; por ejemplo, un profesor enseña primero y segundo, otro tercero y cuarto. Los estudiantes de esta escuela son, pues, alumnos de los seis grados; por eso, los de segundo y tercer grados conviven en el mismo salón con los de primero, cuarto, quinto y sexto grados.

4.2.1 Etapas del estudio

Este trabajo de investigación comprende tres etapas: *1ª etapa*: consta de cuestionarios iniciales sobre escritura numérica decimal indo-arábiga y vigesimal, así como de un cuestionario de problemas de estructura aditiva, seguidos de una entrevista clínica individual. *2ª etapa*: secuencia didáctica. *3ª etapa*: cuestionarios finales sobre escritura numérica y problemas de estructura aditiva.

4.2.2 Primera etapa: diseño y aplicación de los cuestionario iniciales

Esta etapa comprende el diseño de tres cuestionarios iniciales: 1) cuestionario de escritura numérica decimal, 2) cuestionario de escritura numérica vigesimal oral mixteco, 3) cuestionario de problemas de estructura aditiva, seguido de una entrevista clínica individual.

Los cuestionarios iniciales se aplicaron a cada alumno de manera individual en el salón a donde asistían, con la consigna de responder todas las preguntas de cada cuestionario. Para su aplicación se solicitó un salón sólo para los alumnos que participaron en la investigación; se aplicó cada cuestionario a los sujetos participantes; y se realizó una entrevista clínica sobre el proceso de resolución llevado a cabo con cada uno de los alumnos.

4.2.3 Aplicación de la primera etapa del estudio

El instrumento (cuestionarios iniciales) se aplicó a cada alumno de manera individual en el salón donde asistían, la consigna fue responder todas las preguntas de cada cuestionario. La aplicación se llevó de la siguiente manera:

1. Se solicita un salón solo para los alumnos que participan en la investigación.
2. Se aplica cada cuestionario a los sujetos participantes.
3. Se realiza una entrevista clínica sobre el proceso de resolución llevado a cabo por cada uno de los alumnos.

4.2.4 Segunda etapa del estudio: diseño y aplicación de una secuencia didáctica

En esta etapa se diseñó y posteriormente se aplicó una secuencia didáctica, que constó de dos partes: sistema de numeración decimal indo-arábigo y problemas de estructura aditiva.

La secuencia didáctica comprendió nueve sesiones de trabajo con alumnos de 2do y 3er grados de educación básica. Su aplicación consistió en trabajar grupalmente con todos los alumnos, es decir, con los siete estudiantes de segundo y tercer grados convocados para esta investigación. Durante la primera parte se trabajaron contenidos sobre el sistema de numeración decimal (SDN): agrupamiento de decenas, centenas; y durante la segunda con problemas de estructura aditiva.

4.2.5 Aplicación de una secuencia didáctica

Las actividades de distribuyeron en ocho sesiones, durante las cuales se desarrollaron las reglas del SND y se resolvieron problemas de estructura aditiva. La aplicación de esta secuencia comprendió dos partes:

Primera parte: La aplicación de la secuencia didáctica (actividades) se llevó a cabo con un grupo de trabajo de 7 alumnos: cuatro de segundo y tres de tercer grados de educación primaria. Esta primera parte consistió en actividades relacionadas con el sistema de numeración decimal. La sesión de trabajo con los alumnos duró 60 minutos aproximadamente.

Con la aplicación de la secuencia de actividades se pretendió promover la reflexión de las reglas intuitivas hacia las reglas formales del sistema de numeración decimal que los niños elaboran; por ejemplo: la idea de base 10 (agrupar y desagrupar en unidades, decenas, centenas y unidades de millar) con el fin de entender las reglas del sistema.

Segunda parte: En esta segunda parte se continúo con la enseñanza de resolución de problemas de estructura aditiva; se inició con la enseñanza del algoritmo que Gómez (1988) describe: se enseña el método expandido, después el extendido, seguido del abreviado y finalmente el método estándar.

La finalidad de trabajar el sistema de numeración de base 10 es que los alumnos aprendan el significado y uso de los números; y la finalidad de trabajar con el algoritmo es promover su uso en la adición y sustracción, es decir, promover su uso en la resolución de problemas de estructura aditiva.

4.2.6 Tercera etapa del estudio: cuestionario final

La tercera etapa consistió en la aplicación de un cuestionario final con el objetivo de dar cuenta de la evolución de los conocimientos de los alumnos sobre el sistema de numeración decimal y los problemas de estructura aditiva.

4.2.7 Aplicación de la tercera etapa

Consistió en el diseño y aplicación de un cuestionario final a los alumnos que participaron en la investigación; se evaluaron los conocimientos aprendidos de la aplicación de la segunda etapa (secuencia didáctica). Enseguida se realizó una entrevista individual a cada uno de los alumnos para conocer el proceso de solución de sus respuestas a los problemas planteados.

4.3.1 Entrevista clínica individual[2]

La entrevista clínica individual se utilizó para indagar cómo los alumnos podían argumentar las respuestas a las preguntas solicitadas en los cuestionarios iníciales: a partir de los argumentos que los niños otorgan al entrevistador, se puede saber cómo son estos procesos cognoscitivos asociados a los contenidos matemáticos específicos.

[2]**De acuerdo con Delval (2001),** la entrevista clínica se fundamenta en el método clínico de Piaget, que se suele identificar con un método de entrevista verbal: se realiza una conversación libre con el niño siguiendo el curso de sus ideas sobre la explicación de un problema presentado. En este estudio se buscó indagar sobre los contenidos matemáticos tratados en la investigación.

4.4.1 Desarrollo de la primera etapa del estudio

Para esta primera etapa del estudio, se revisó la literatura sobre los antecedentes del sistema de numeración decimal indo-arábigo y mixteco y de la resolución de problemas de estructura aditiva. Después, se revisaron los libros de texto gratuito sobre la resolución de problemas de suma (agregar) y resta (quitar), y libros de texto del maestro de 2do y 3er grados de educación primaria con la intención de ver los tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva que plantean. Con base a esta revisión se procedió a diseñar los instrumentos de la primera etapa, se planeó inicialmente un diseño que constó de: cuestionario de escritura numérica y de problemas de estructura aditiva. Posteriormente, se diseñó y aplicó un cuestionario de escritura mixteca.

4.4.2 Descripción de cuestionarios iniciales: primera etapa

En este documento se diseñaron cuestionarios iníciales que versaron sobre: escritura numérica del sistema indo-arábigo, escritura numérica oral mixteco y problemas de estructura aditiva aplicados a los alumnos de 2do y 3er grados de educación primaria con diferentes tipos y subtipos de problemas que reconocen Castro, Rico y Castro (1995) del modelo funcional.

A continuación se describen, en las tablas 9, 10, y 11, los contenidos matemáticos abordados en los cuestionarios iniciales.

Tabla No. 9 Descripción del cuestionario de escritura numérica decimal indo-arábiga

Pregunta	**Idea matemática**	**Solicitud de la pregunta**
1	Numeral del 1 al 100	Se solicita al niño contar oralmente del 1 al 100, observando el cuadro numeral del 1 al 100
2	Escritura de números	Se solicita al niño anotar los números que se le dictan.
3	Nombres de números	Se le solicita al niño escribir los nombres de los números de la lista.
4	Identificar antecesor y sucesor	Se solicita al niño colocar el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.
5	Secuencias de números en orden ascendente y descendente	Se solicita al niño ordenar los numérales de menor a mayor, o de mayor a menor.

Tabla No. 10 Descripción del cuestionario de escritura numérica oral mixteco

Pregunta	**Idea matemática**	**Solicitud de la pregunta**
1	Numeral del 1 al 100	Se le solicita al niño contar oralmente los números que conoce del Mixteco.
2	Escritura de números	Se solicita al niño que escriba los nombres de los números del Mixteco.

Tabla No. 11 Descripción del cuestionario de problemas de estructura aditiva: modelo funcional

No.	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Modelo funcional, tipo cambio	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: Juan tiene 15 canicas y le dan 13 más. ¿Cuántas canicas tendrá Juan en total?
2	Modelo funcional, tipo combinación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: en el río Papagayo Luis pesca 31 pescados; de ellos 18 son Mojarras y el resto son Truchas. ¿Cuántas truchas pescó Luis?
3	Modelo funcional, tipo comparación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: Beto tiene 200 pesos y María 70 ¿Cuántos pesos tiene Beto más que María?
4	Modelo funcional, tipo Igualación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: María compró una piñata que le costó 35 pesos; Rosa tiene 25 pesos ¿Cuántos pesos tendrá que pedir Rosa para tener lo mismo que María?

4.4.3 Aplicación de la primera etapa del estudio

Se trabajó individualmente con cada uno de los estudiantes de 2do y 3er grados de educación primaria. Resolvieron 20 problemas de estructura aditiva de tipo y subtipo del modelo funcional (cambio, combinación, comparación e igualación), y 13 problemas de suma y resta de otros modelos [Lineal, Cardinal, Medida y Numérico que aquí no se reporta]. Esta aplicación se desarrolló en diferentes sesiones y en diferentes días. En caso de que tuvieran dudas o no supieran leer el problema se les leyó en voz alta para que pudieran resolverlo. Posteriormente, se otorgó tiempo para que resolvieran dichos problemas.

4.4.4 Propuesta de análisis de los datos de la primera etapa del estudio

El análisis de los datos se realizó en dos partes: en la primera se analiza la producción escrita de los niños en los cuestionarios de escritura numérica decimal indo-arábigo y de escritura numérica oral mixteco. Ese análisis consistió en identificar las reglas intuitivas que los niños elaboraron sobre los dos sistemas y las posibles relaciones que ambos sistemas guardan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Enseguida, se ofrece un análisis crítico de las respuestas dadas al cuestionario.

4.5.1 Resultados del estudio piloto

En un primer momento, se aplicaron cuestionarios iniciales a un grupo de seis alumnos de segundo grado de una escuela publica del Distrito Federal, capital del país, con la intención de ver las estrategias utilizadas en la resolución de problemas de estructura aditiva.

Los resultados de este estudio piloto (cuestionario de escritura numérica decimal indo-arábiga y problemas de estructura aditiva) mostraron que los alumnos desarrollaron hipótesis relacionadas con la escritura de las reglas del sistema de numeración decimal y el uso del conteo cuando resuelven problemas de estructura aditiva.

Es importante hacer notar que el piloteo reforzó el estudio en la aplicación con los alumnos de esta investigación.

CAPÍTULO V. RESULTADOS DE LA PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIOS INICIALES SEGUIDOS DE ENTREVISTAS CLÍNICAS INDIVIDUALES

5.1 Descripción de los cuestionarios iniciales

Los cuestionarios iniciales fueron tres: el de escritura numérica del sistema de numeración indo-arábigo; el de escritura de los vocablos orales del mixteco, y el de problemas de estructura aditiva. Cada uno de ellos fue seguido de una entrevista clínica. Se les aplicó a los alumnos de 2do y 3er grados de educación primaria con diferentes tipos y subtipos de problemas de acuerdo con las relaciones semánticas que reconocen Castro, Rico y Castro (1995) del modelo funcional. A continuación, se describe los contenidos matemáticos abordados en los cuestionarios iniciales:

Tabla No.12 Preguntas del cuestionario de sistema de numeración indo-arábigo

Pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Numeral del 1 al 100	Se le pide al niño contar oralmente del 1 al 100, observando el cuadro de los numerales del 1 al 100.
2	Escritura de números	Se solicita al niño anotar los números que se le dictan.
3	Nombres de números	Se le solicita al niño escribir los nombres de los números de la lista.
4	Identificar antecesor y sucesor	Se solicita al niño colocar el antecesor y sucesor de los números que se le muestran.
5	Secuencias de números en orden ascendente y descendente	Se solicita al niño ordenar los numerales de menor a mayor y de mayor a menor.

Tabla No. 13 Preguntas del cuestionario de escritura oral del mixteco

Pregunta	Idea matemática	Solicitud de la pregunta
1	Numeral del 1 al 100	Se le solicita al niño contar oralmente los números que conoce del mixteco.
2	Escritura de números	Se solicita al niño que escriba los nombres de los números del mixteco.

Tabla No. 14 Preguntas del cuestionario de problemas aditivos: modelo funcional

No.	Contenido matemático	Solicitud de la pregunta
1	Problema: tipo cambio	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: Juan tiene 15 canicas y le dan 13 más; ¿cuántas canicas tendrá Juan en total?
2	Problema: tipo combinación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: en el río Papagayo, Luis pesca 31 pescados; de ellos, 18 son mojarras y el resto son truchas; ¿cuántas truchas pescó Luis?
3	Problema: tipo comparación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: Beto tiene 200 pesos y María 70; ¿cuántos pesos tiene Beto más que María?
4	Problema: tipo igualación	Se solicita al alumno resolver el siguiente problema: María compró una piñata que le costó 35 pesos; Rosa tiene 25 pesos; ¿cuántos pesos tendrá que pedir Rosa para tener lo mismo que María?

5.2 Análisis de los datos de los dos cuestionarios de escritura numérica decimal y vigesimal

El análisis de los datos se realizó por medio de la producción escrita de los niños a partir del cuestionario de escritura numérica decimal indo-arábigo y de la escritura de los vocablos orales del sistema vigesimal mixteco. Se investigó cómo se dicen y se escriben en este sistema vigesimal. El análisis consistió en identificar qué reglas intuitivas elaboraron los niños del sistema de numeración decimal indo-arábigo y vigesimal oral mixteco, así como las posibles relaciones que ambos sistemas guardan entre sí dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

5.3 Análisis de los datos de problemas de estructura aditiva

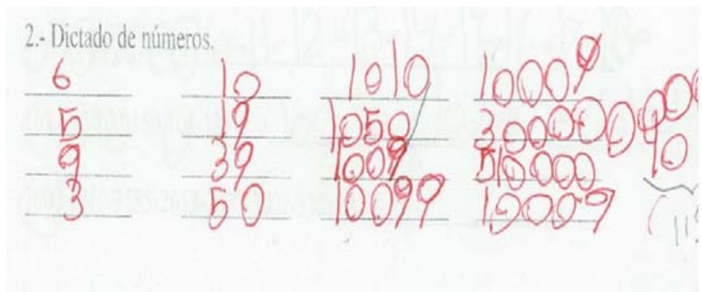
En los problemas de estructura aditiva se analizan las explicaciones dadas por los niños en las entrevistas clínicas. Aquí, se estudió los procedimientos llevados a cabo para resolver los problemas planteados en el cuestionario de problemas de estructura aditiva y si eran congruentes con las explicaciones dadas por los niños.

5.4 Resultados del cuestionario y la entrevista clínica sobre la escritura numérica decimal indo-arábiga

Los resultados de esta etapa revelan que los estudiantes desarrollan cuatro ideas intuitivas sobre el sistema indo-arábigo: 1) la numeración escrita corresponde con la numeración hablada; los niños escriben el número como lo escuchan; 2) el rol de los números nudos [decenas, centenas y unidades de millar] del sistema decimal les permite producir sus propios números en la escritura 3) la cantidad de cifras define si un número es mayor o menor (Lerner y Sadovsky, 1994); y 4) el valor del cero dentro del sistema de valor posicional Lerner (1992). Lo anterior se puede observar en lo que escribió el alumno

Lázaro a la solicitud de la pregunta número dos, *dictado de números* del cuestionario de numeración decimal:

Tabla No. 15 Cantidad de cifras y el valor del cero

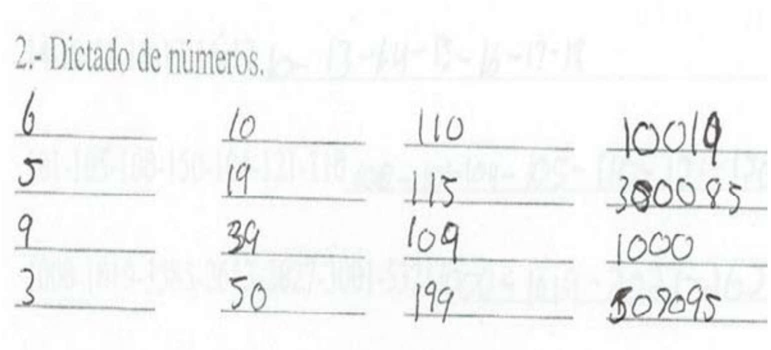
Números dictados	**Números escritos**
En la tercera columna se le dictaron los números: 110, 150, 109 y 199. Lázaro escribió: 1010 para 110 1050 para 150 1009 para 109 10099 para 199	

En la escritura numérica para 3,585 donde Lázaro escribió 3000000050000, se observa que algunos niños poseen conocimientos de la escritura numérica relacionados con la cantidad de cifras que componen un número; piensan que escribiendo mayor cantidad de cifras, mayor es el número representado; aplican sus propias hipótesis de escritura numérica de los números que ya saben escribir a los números cuya escritura numérica convencional desconocen.

En este ejemplo, también se puede ver qué conocimiento ha sido construido respecto al valor del cero en la escritura numérica; para escribir un número que representa una cantidad mayor, Lázaro ha agregado “ceros”. Esto muestra el valor que le ha adjudicado al cero, aunque no sabe escribir el número solicitado; al agregar “ceros” buscó representar o escribir un número mayor. Le da valor al cero colocándolo en cierta posición respecto a los otros números. Esta aproximación de Lázaro lo acerca a una de las reglas del sistema de valor posicional: el valor relativo.

A continuación, en la Tabla 16, se presenta la relación entre la numeración hablada y la escritura numérica del sistema de numeración decimal.

Tabla No. 16 Relación entre numeración hablada y numeración escrita

Números dictados	**Números escritos**
En la cuarta columna se le dictaron los números: 1019, 3585, 1000 y 5895. César escribió: 10019 para 1019 350085 para 3585 1000 para 1000 508095 para 5895	

En el dictado de números César escribió 10019 cuando se le dictó 1019, 350085 para 3585, 508095 para 5895; de esta manera se confirma que algunos niños escriben los números tal como los escuchan. Establecen una relación entre la numeración hablada y el conocimiento que tienen de la escritura convencional de los números del sistema decimal indo-arábigo, llamados “nudos” (decenas, centenas y unidades de millar). César construyó el 10019 y el 350085 de acuerdo con la numeración hablada y con su conocimiento de cómo se representa el número 1000 y el número 500 en el sistema indo-arábigo. Estas construcciones son un acercamiento importante a las reglas de escritura del sistema de numeración indo-arábigo.

En este ejemplo se puede decir que los estudiantes tienen nociones intuitivas sobre el sistema de numeración decimal; aún no han desarrollado la noción de posición, es decir, el valor del número según su forma y el lugar que ocupa; sin embargo, de manera gradual irán apropiándose de las reglas formales del sistema. Los resultados de este cuestionario muestran que los niños están en la construcción de la escritura de la numeración indo-arábigo.

El desarrollo matemático, según Moreno y Waldegg (2004), se construye por la mediación material o simbólica de objetos; estas herramientas permiten desplegar la actividad intelectual del sujeto. Así, es necesario crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar las ideas sobre el conocimiento matemático.

De acuerdo con Brizuela (2004), las notaciones [numéricas] son un objeto de representación que permite por sí mismo entender el desarrollo del aprendizaje matemático. Por ejemplo, las notaciones del sistema de numeración decimal son un *objeto conceptual* que permite a los niños pensar y crear hipótesis de este sistema.

5.5 Cuestionario inicial sobre el sistema oral vigesimal: el conteo oral y la escritura de los vocablos orales del mixteco

Tomando en cuenta que la mayoría de los niños entrevistados hablan la lengua mixteca, en esta parte del estudio se indagó su conocimiento sobre el sistema de numeración mixteco: el conteo y la escritura de los vocablos de los números en mixteco.

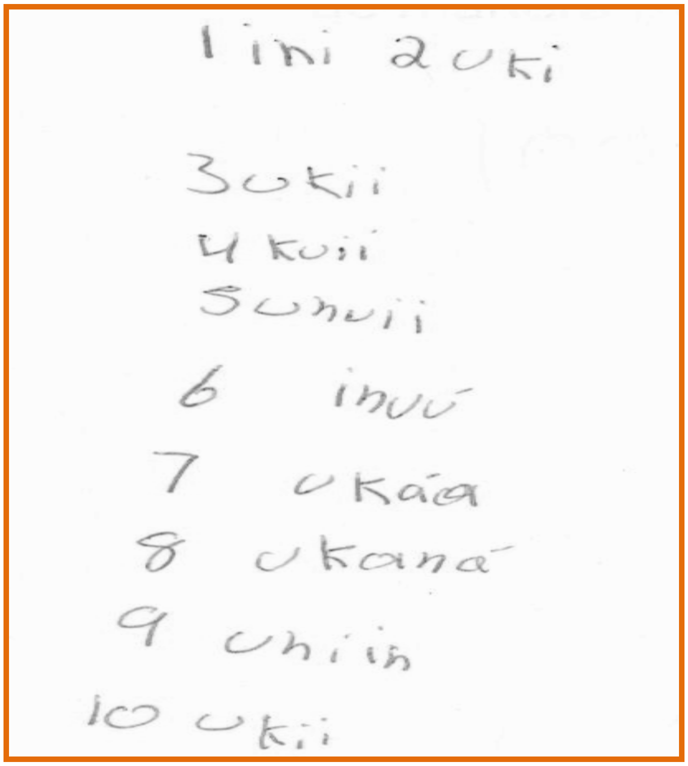
Indagar el conocimiento del sistema de numeración vigesimal permitiría comprender si existe una relación directa con la matemática, y si esta manera de contar permite al alumno construir y realizar abstracciones matemáticas.

Se solicitó a los niños contaran oralmente en mixteco los números que conocían del uno al cien. De los siete niños del estudio, dos no pudieron contar secuencialmente en mixteco; sin embargo, sí reconocieron algunos números, uno de ellos supo contar hasta el cinco, uno hasta el veinte, uno hasta el treinta y cinco, y dos hasta el cincuenta y cinco.

Posteriormente, se pidió a los niños escribieran en mixteco los números que conocían. Cabe mencionar que en la escuela no se les enseña a contar en mixteco ni tampoco la escritura de los números del mixteco; sin embargo, ellos tienen contacto con los vocablos de estos números porque viven en una población de habla mixteca, y pertenecen a una comunidad bilingüe: mixteco-español.

A la solicitud de la pregunta, algunos niños escribieron el nombre de los primeros números de la cadena numérica del mixteco, del uno al diez, como los reconocen en la numeración hablada, tal como se puede observar en la Tabla 17.

Tabla No. 17 Construcción del uno al diez en mixteco

Escribe los números en Mixteco	**Vocablo en Mixteco**
César escribió del número uno al diez.	

De acuerdo con Lerner y Sadovsky (1994), los niños conceptualizan la escritura de los números basándose en la información que ya poseen. En este caso, César se basó en su conocimiento de la numeración hablada y en su competencia lecto-escritora en español para hacer sus propias hipótesis de cómo se escriben los vocablos del uno al diez en mixteco. Se puede decir que planteó dos relaciones: por un lado de la numeración hablada a la escritura de los vocablos de esos números en mixteco, y por otro de la escritura en español a la escritura en mixteco; aunque no sabía escribir el mixteco, usó su alfabetización en español para hacer sus propias hipótesis de cómo se escribe en mixteco.

Para escribir los números del once al catorce algunos niños establecieron una relación entre los nombres de los primeros números y la base aditiva o base auxiliar 10. Ver Tabla 18.

Tabla No. 18 Bases aditivas 10 y 15 del sistema de numeración mixteco

Escribe los números en Mixteco	**Vocablo en Mixteco**
Estela escribió los números del uno al 15.	in uvi uni kumi uun iñu usta una iin usti usti in usti uvi u°ti uni usti kumi stau

Estela tuvo un acercamiento importante a la forma de escribir en número diez en mixteco; ella escribió *usti* cuando se escribe *utsi*. Así sucesivamente escribió *usti in* para once que quiere decir “diez uno”, *usti uvi “*diez dos” para el doce, *usti uni* “diez tres” para el trece y *utsi kumi* “diez cuatro” para catorce y *stau* para el quince, éste último se escribe *tsa’un.* Esta construcción con los números del once al catorce también es un acercamiento importante a comprender que estos números se forman con la base aditiva 10 seguida de los números del uno al cuatro. Nótese la regularidad o el orden de la lengua mixteca para formar los números del 10 al 14: diez uno, diez dos, diez tres y diez cuatro.

Estela reconoció el número 15 tiene un nombre propio, *tsa'un*. Este número ya no se forma "diez cinco" y es también, al igual que el diez, una base aditiva; es decir al *tsa´un* [15] se le van sumando el *in* [1], *uvi* [2], *uni* [3], *kumi* [4] respectivamente para formar del 16 al 19, entonces, el 16 se forma *tsa'un in* "quince uno", el 17 *tsa'un uvi* "quince dos", el 18 *tsa'un uni* "quince tres" y el 19 *tsa'un kumi* "quince cuatro".

Los números del 20 al 30 se forman con la base multiplicativa 20, *oko,* seguido de los primeros números, del uno al diez, como escribió Yaritza. Ver Tabla 19.

Tabla No. 19 La base multiplicativa 20 en el sistema de numeración mixteco

Escribe los números en Mixteco	**Vocablo en Mixteco**
Yaritza escribió algunos números del 20 al 30.	

Como se puede observar claramente, Yaritza sabe los primeros números del mixteco, del uno al cuatro y el seis, y también conoce el número 20, el cual se podría decir que es uno de los "números nudos", de acuerdo con Lerner y Sadovsky (1994). El 20 es la base multiplicativa del sistema de numeración del mixteco, que es un sistema de numeración vigesimal (Caballero, 2005; 2008). Yaritza establece una relación entre esta base multiplicativa [20] *oko,* seguida de los números *in* [uno], *uvi* [dos], *uni* [tres], *kumi* [cuatro], u'un [cinco] e *iñu* [seis] para formar el 21, 22, 23, 24, 25 y 26 respectivamente. Aunque en la evidencia no aparecen en ese orden, el 25 lo escribió después del 50. Asimismo, el 30 lo forma con el veinte y el diez, *oko uxi*, que escrito correctamente en la variante del mixteco de San Juan Mixtepec se escribe y se pronuncia *oko utsi.*

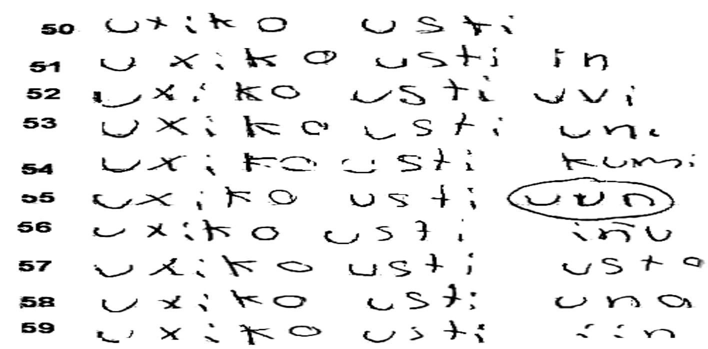
Cabe mencionar que del 30 al 34 se construyen con la base multiplicativa *oko* [20], la base aditiva *utsi* [10] seguida de los primeros números del 1 al 4 respectivamente; pero el número treinta y cinco se construye con la base multiplicativa *oko* [20] y la base aditiva *tsa'un* [15]. Algunos niños lo formaron usando algunas nociones del sistema decimal. Así, Estela escribió el 35 formándolo como: 20 + 10 + 5. Ver Tabla 20.

Tabla No. 20 Escritura de los números en mixteco del 35 al 39

Escribe los números en Mixteco	**Vocablo en Mixteco**
Los niños escribieron todos los números que conocían. Cuando Estela escribió el número 35, lo formó *Oko utsi u´un* que significa 1(20) + 10 + 5.	35 oko utsi un'un 36 oko utsi iyu 37 oko utsi utsa 38 oko utsi una 39 oko utsi iin 40 uyicm

Por un lado, se puede deducir que Estela elaboró hipótesis de acuerdo con algunas nociones del sistema *decimal* para formar el 35 porque, aunque ella reconoce que el número quince tiene un nombre propio en mixteco, como se demostró en la Tabla 18, no lo reconoce como un agrupamiento importante para formar el 35 dentro del sistema de numeración del mixteco el cual se forma 1(20) + 15. Entonces, ella, recurrió a formar el 35 de acuerdo con las nociones que tiene del sistema decimal: 20+10+5. También se puede deducir que se dejó influenciar por la regularidad que muestra la escritura de los vocablos del 30 al 34; *oko utsi in, oko utsi uvi, oko utsi uni, oko utsi kumi*, y siguió formando de esa manera del 35 al 39 *oko utsi u'un* [20+10+5] , *oko utsi iñu* [20+10+6], *oko utsi utsa* [20+10+7], *oko utsi una* [20+10+8], *oko utsi iin* [20+10+9]. Ocurrió lo mismo cuando formó los números en mixteco del 55 al 59 como se puede apreciar en la Tabla 21.

Tabla No. 21 La escritura de los números en mixteco del 50 al 59

Escribe los números en Mixteco	**Vocablo en Mixteco**
Estela escribió en la pregunta No. 2 lo siguiente: *uxiko usti uun* para formar el numero 55. Esto es 2(20) + 10 + 5.	

En este ejemplo se puede ver que Estela construyó el número 55 de la siguiente manera: 2(20) + 10 + 5, pero cabe recordar que en el sistema de numeración del mixteco 55 se construye 2(20) + 15, de esta misma manera los números del 56 al 59 son números desarrollados 2(20)+15+1, 2(20)+15+2, 2(20)+15+3 y 2(20)+15+4 respectivamente.

Los niños desarrollan hipótesis, conocen y usan el conteo oral mixteco, pero la escritura de números más grandes parece estar fuertemente influenciada por el sistema de numeración decimal indo-arábigo.

De acuerdo con los resultados, se puede observar que los niños desarrollan ideas intuitivas de los dos sistemas de numeración: decimal y vigesimal. Parece existir un predominio de las nociones de la escritura del sistema decimal indo-arábigo sobre el sistema vigesimal. Una de las posibles explicaciones es que en la escuela los alumnos son instruidos solamente en el sistema decimal indo-arábigo; entonces utilizan esta información para desarrollar la escritura de los vocablos del sistema de numeración del mixteco, que es un sistema de numeración vigesimal y por lo tanto tiene otra lógica, como ya fue explicado.

Existe un conocimiento oral del sistema vigesimal que no se ha desarrollado en la escritura. Los niños desarrollan la escritura de los números de 1 al 34 de acuerdo con el sistema de numeración vigesimal del mixteco, pero a partir del 35 mezclan su conocimiento del sistema decimal con el vigesimal para escribir los números.

A partir de los resultados arrojados en el estudio de esta parte, se reflexionó sobre la pertinencia de indagar, identificar e investigar la relación entre el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento de los alumnos de segundo y tercer grados asociado a contenidos específicos del currículo de matemáticas de educación primaria, esto con la intención de entender el proceso cognitivo de los niños en su aprendizaje; en este caso, se indagó e identificó la adquisición de las reglas formales del sistema de numeración decimal, que es una herramienta básica para el manejo de los algoritmos. Esto es fundamental para que un profesional de la educación conozca las concepciones infantiles asociadas a un determinado contenido matemático; así podrá diferenciar cuándo los niños presentan dificultades "reales" en el aprendizaje, o cuándo éstas corresponden más bien a un proceso evolutivo de dicho conocimiento matemático.

Se revisó también si en el sistema bilingüe mexicano, sobre todo en escuelas bilingües indígenas, existe la educación "bilingüe"; vale decir que es necesario indagar qué se enseña a los alumnos de su propia lengua para que el conocimiento previo de los niños sea aprovechado en el proceso de enseñanza. El sistema vigesimal oral mixteco y el sistema de numeración decimal tienen diferentes formas de agrupar las cantidades. Brindar en las escuelas bilingües indígenas del país un espacio para reflexionar en dos sistemas de numeración sería una oportunidad importante para ir desarrollando el pensamiento matemático; es decir, mientras mayores espacios de reflexión se tengan para ver las diferencias y las características en común de los dos sistemas, por ejemplo sus propiedades aditiva y multiplicativas, se tendrían mayores oportunidades para desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos indígenas.

5.6 Resultados de la primera etapa del cuestionario inicial: problemas de estructura aditiva

En esta parte se describen los resultados del cuestionario de problemas de estructura aditiva. El análisis de los datos consiste en: 1) elaboración de estrategias de resolución de problemas; 2) entrevistas clínicas para ver qué argumentos dan los alumnos en la resolución de problemas de estructura aditiva y 3) sistema de representación interna y externa.

5.7 Estrategias en la resolución de problemas de estructura aditiva

Las estrategia que emplean los alumnos al resolver un problema, no es siempre un camino fácil de ubicar. En este trabajo se identificaron las siguientes estrategias en el proceso de resolución de problemas aritméticos con el modelo matemático funcional:

1. **Representación errónea con el algoritmo**: En esta categoría se colocó al alumno que erró en la [re]solución o bien usa la estrategia de adición cuando en realidad tiene que usar la sustracción. Por ejemplo (ver figura 2):

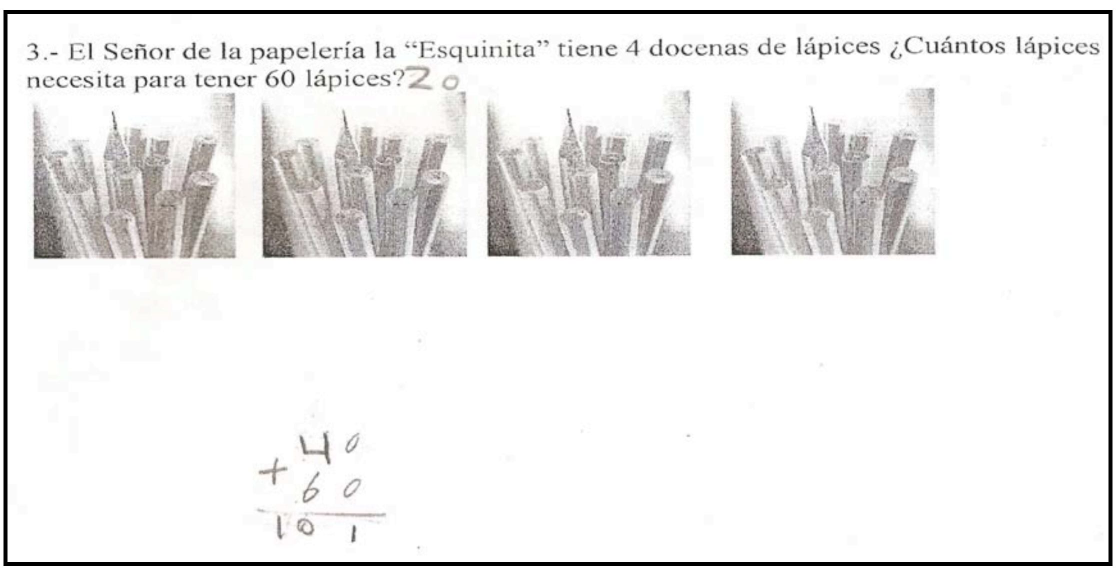


Figura 2. Representación errónea con el algoritmo

Comentario: El alumno no entiende el problema: realiza una suma en lugar de una sustracción. Identifica como 40 a 4 “docenas” y lo suma con 60 lápices. Hay un procedimiento canónico en el uso del algoritmo pero éste se emplea de manera equivocada.

2. **Modelado directo**: Esta categoría describe al alumno que usa o dibuja objetos como una estrategia para lograr el resultado.

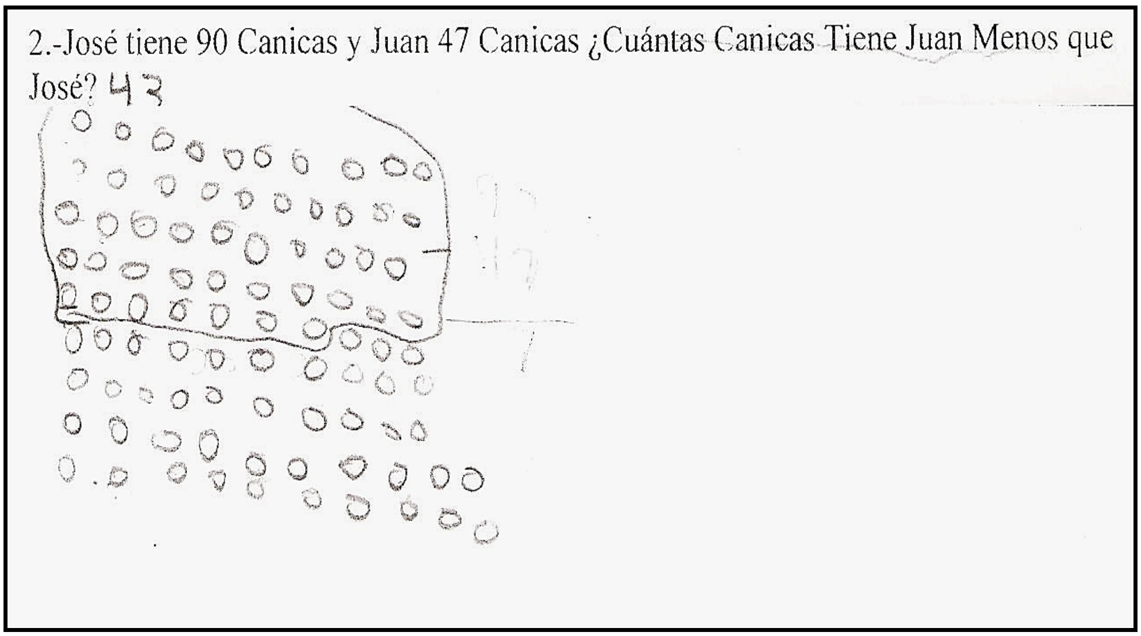


Figura 3. Modelo con figura (modelado directo)

Comentario: El alumno se apoya en dibujos: representa los objetos dibujándolos para resolver el problema planteado.

3. **Algoritmo**: El alumno usa el procedimiento canónico del algoritmo, ya sea de la suma o de la resta. Ellos reconocen cuál algoritmo emplear, especialmente si los problemas plantean situaciones ya conocidas. Por ejemplo:

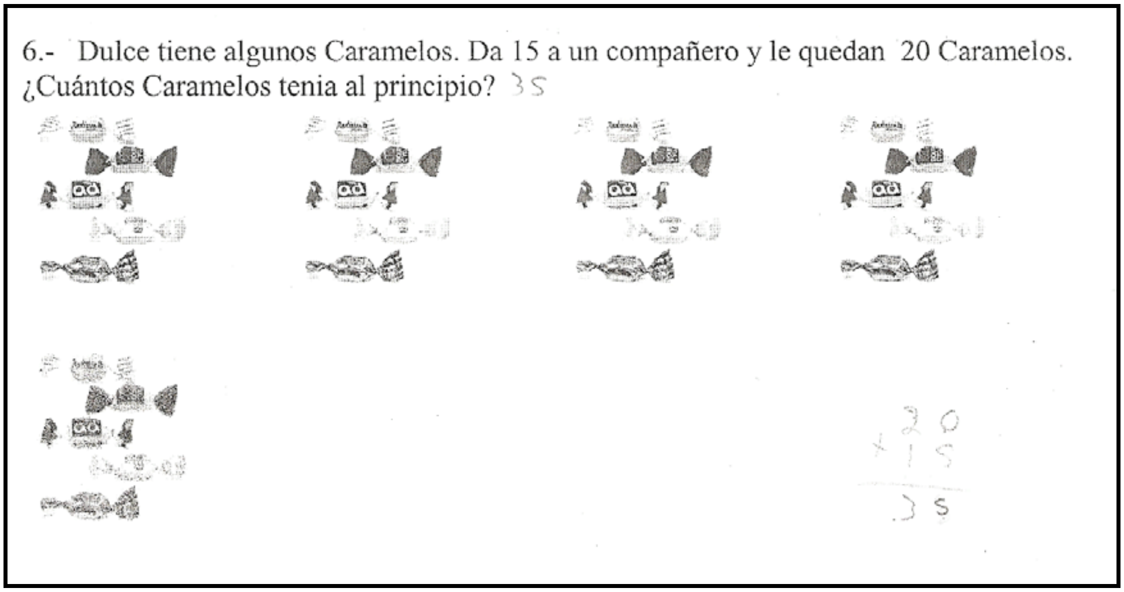


Figura 4. Procedimiento con el algoritmo

Comentario: El uso del algoritmo tiene un valor funcional que permite al alumno resolver el problema: al comprenderlo, construye por medio de signos (algoritmo) el procedimiento de resolución.

4. **Cálculo mental**: Aquí el estudiante no considera una estrategia gráfica, recurre directamente a la representación interna; busca un hecho conocido (mentalmente) para llegar a la solución; a veces, con esta estrategia no necesariamente se logra llegar a la respuesta correcta.

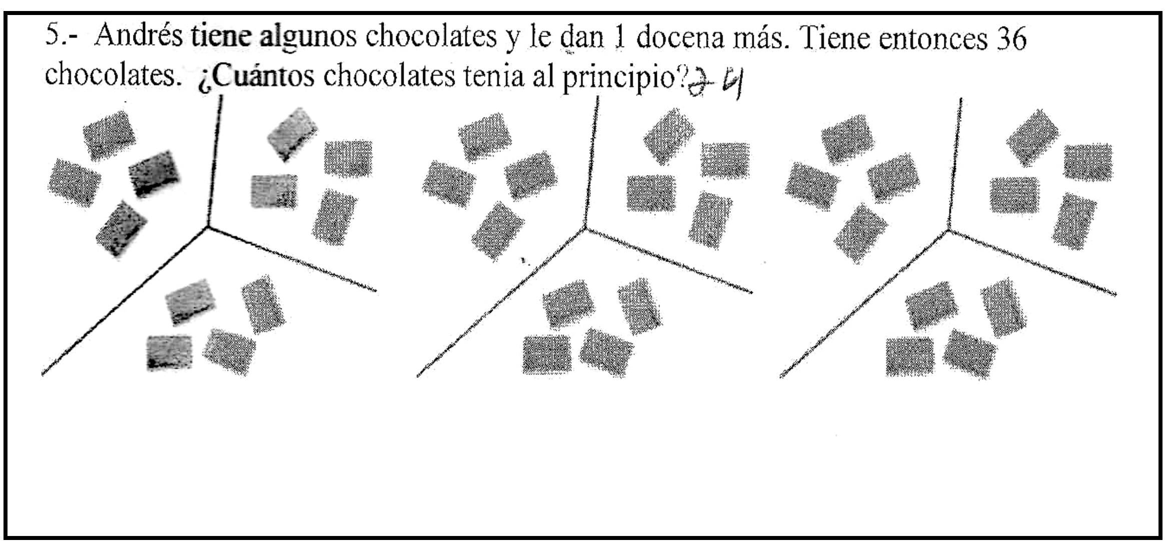


Figura 5. Estrategia: cálculo mental

Comentario: La acción de buscar un número conocido (docenas) permite en determinado momento ser eficaz en la resolución de problemas; hay un antecedente de este hecho que le permite al alumno aplicar esta estrategia: con una acción mental se infiere qué son las docenas en la solicitud del problema. Sin embargo, en ocasiones el alumno no identifica la expresión “docenas”.

5. **Conteo**: El estudiante se apoya de objetos ya sea señalándolos uno a uno o en otros casos, usa marcas o tacha los elementos u objetos. Ejemplo:

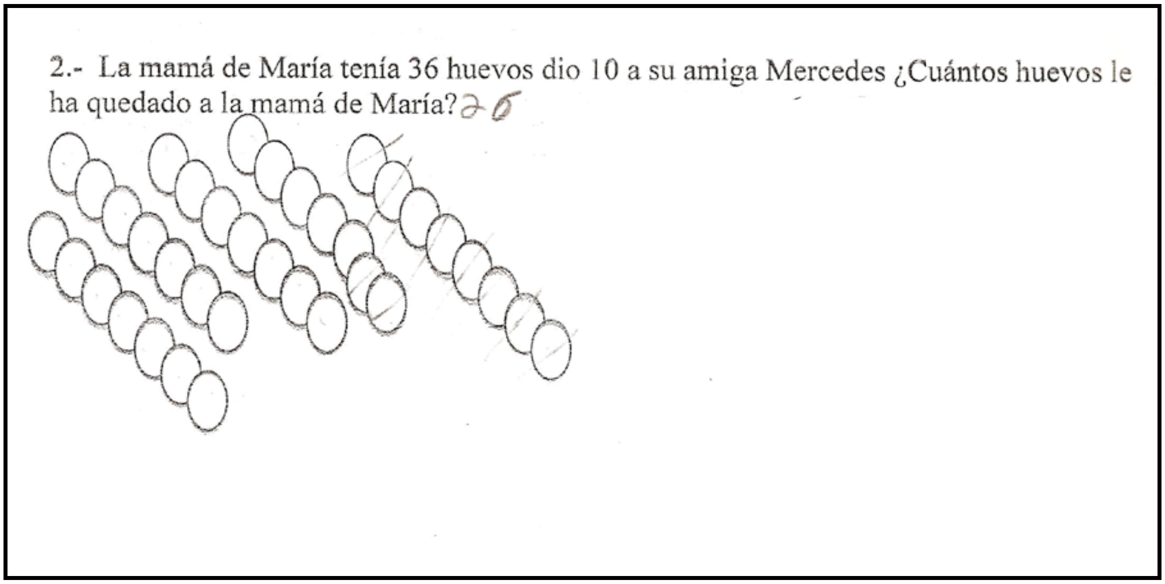


Figura 6. Estrategia de conteo

Comentario: Cuando se trata de una adición, el alumno se apoya en esta estrategia de solución señalando los objetos. Y cuando es una sustracción, su estrategia es marcar o tachar los objetos. Pero sigue siendo una estrategia de conteo. El alumno cuenta cada objeto de la cadena numérica para llegar al resultado. Es a partir del apoyo externo que inicia esta estrategia.

5.8 Análisis de entrevistas clínicas de problemas de estructura aditiva

A continuación, se muestran los argumentos para resolver problemas de estructura aditiva a partir de las entrevistas realizadas con 2 alumnos. Se describe qué estrategias utilizaron en el proceso de resolución de problemas de suma y resta.

Estrategia de conteo: El empleo del conteo a menudo se utiliza en la iteración de los objetos descritos en el problema. En general, los alumnos lo usan para señalar y contar.

Problema tipo: *Cambio disminuido [transformación negativa]*

Isaías. 2do grado, 9 años:

Para resolver el siguiente problema, el alumno emplea la estrategia de conteo.

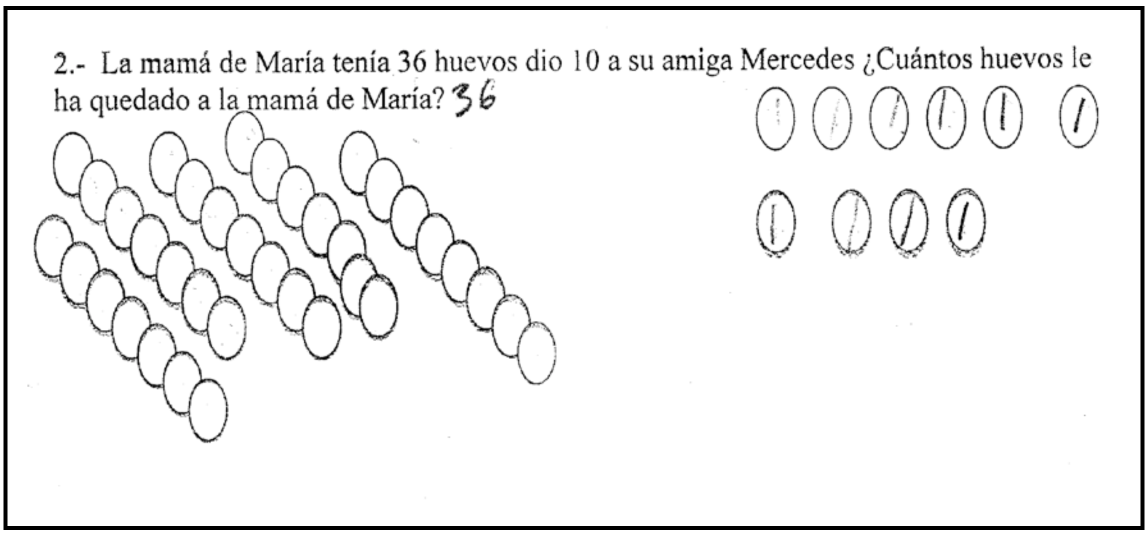


Figura 7. Iteración de objetos en el conteo

Al abordar este problema el alumno primero lo lee en voz alta; recurre al conteo total del producto para después, tachar con lápiz los huevos que María da a su amiga Mercedes. Esta estrategia puede ser eficaz, más no suficiente, para el alumno cuando resuelve este tipo de problemas. Este procedimiento le permite al alumno a construir la representación del problema. Sin embargo, aunque se apoya marcando los objetos (10 huevos), el niño duda de lo que hizo. A continuación reproducimos la entrevista con el alumno Isaías en relación al problema número 2:

Dialogo de Isaías –entrevistador: problema de cambio disminuido:

Isaías. Me queda diez

Entrevistador. ¿Por qué crees que diez?

Isaías. Porque lo conté y luego lo taché

Cuenta todos los elementos (36 huevos)

Entrevistador. A ver, ¿cuáles tachaste?

Cuenta todos los huevos (46) y tacha diez huevos.

Isaías. ¡oh!…

Después cuenta treinta y seis huevos y dice “fallé hay treinta y seis”

Entrevistador. ¿Por qué?

Isaías. Porque no lo conté bien, lo sumé.

Entrevistador. ¿Qué pasó con los huevos que le dio a su amiga Mercedes?

Isaías. Se fueron

Entrevistador. ¿Y que pasó allí?

Isaías. No los conté

Observación: Cuenta un grupo de 36 huevos y otro de diez y lo tacha. Adopta, conforme a su criterio, tachar con una marca **[/]** la cantidad de “huevos” que da.

La presencia de objetos dibujados permite al alumno la interacción con el problema; éste es un paso importante de representación que le permite interactuar con el problema y así acercarse al resultado. La iteración de los objetos le permite al alumno lograr la solución.

Estrategia de algoritmo: En esta categoría el alumno usa como procedimiento el algoritmo de la suma o la resta para lograr el resultado de la pregunta planteada.

Problemas tipo: *cambio disminuido*

***Esther*.,** 2do grado

La alumna utilizó en este problema aditivo de cambio el algoritmo de la suma, primero usó la iteración de cuatro docenas de lápices, después, buscó un numero conocido [10] que le permitiera tener sesenta lápices, encontró y sumó 12 + 48.

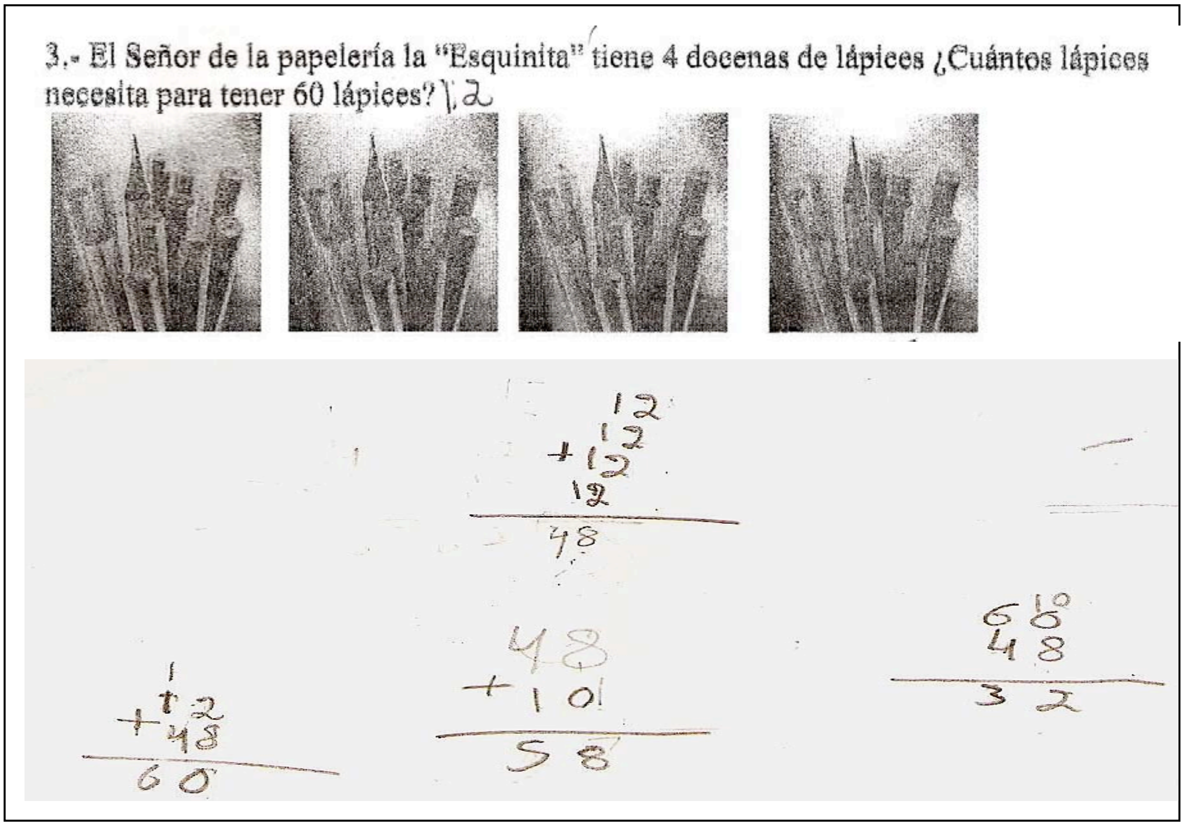


Figura 8. Empleo del algoritmo en la solucion

Dialogo de *Esther–Entrevistador*: problema de cambio disminuido:

Esther lee "El señor de la papelería *La Esquinita* tiene 4 docenas de lápices. ¿Cuántos lápices necesita para tener 60?".

> *Esther*. Aquí puse cuatro de a doce porque una docena es una de a doce y después puse cuatro de a doce y lo sumé y me salió cuarenta y ocho.
>
> *Entrevistador*. Después, ¿qué hiciste?

Esther. Puse sesenta menos cuarenta y ocho, después este cuatro le presta una decena al cero.

Entrevistador. ¿El cuatro o el seis?

Esther. El cuatro. Después este cero se convierte en diez y después se resta y diez le quitamos ocho queda dos.

"En la otra columna. Aquí como éste le prestó una decena a éste y después éste ya se quedó con cinco y después éste se suma con éste le queda nueve. No, éste se resta con éste y le queda uno".

Entrevistador. ¿Por qué uno?

Esther. Porque este seis le prestó una "docena" y le quedan tres.

Entrevistador. ¿Por qué tres?

Esther. Seis menos tres, tres.

Inicialmente la alumna realiza la operación con los denominadores. No sabe bien cómo se pide prestada una decena.

Esther. Ah. Este seis le presta una docena a este y se convierte en cinco. Y cinco menos cuatro queda uno. Le quito uno de a doce. (A 60)

Entrevistador. ¿Por qué?

Esther. Una docena es doce. Doce lápices.

Entrevistador. ¿De dos docenas cuántos lápices son?

Esther. Veinti…, veinticuatro.

Entrevistador. ¿De cuatro docenas cuántos lápices son?

Esther. Cuarenta y ocho.

Entrevistador. Ahora, dime ¿cuántos lápices necesita para tener sesenta?

Se queda pensando. Realiza un conteo mental. Dice "veinte". Le agrega un número conocido, pero este rebasa la cantidad de lápices que se le pide.

Entrevistador. ¿Cómo le hiciste?

Esther. Aquí es cuarenta y ocho más veinte.

Entrevistador. ¿Cuánto te da?

Le da sesenta y ocho y se queda asombrada.

Entrevistador. ¿Te pasaste?

Esther. Si,

Entrevistador. ¿Cuantos lápices?

Esther. Ocho.

Se queda haciendo un conteo mental y conteo de unos dedos y dice “once” (lápices que falta para llegar a tener sesenta).

Entrevistador. ¿Cuánto te da?

Esther. No me sale.

Entrevistador. ¿Qué no te sale?, ¿Si tienes cuarenta y ocho lápices cuántos te faltarían para llegar a tener sesenta?

Esther. Diez.

Entrevistador. ¿Para comprobarlo cómo le harías?

Suma 48+10. Dice cincuenta y ocho. ¿Y para sesenta no es diez?

Esther. No, once.

Suma 48+11. Dice cincuenta y nueve.

Esther. Ya casi me está saliendo.

Ahora anota 48+12. Aquí hice la suma, dos más ocho me sale diez y puse cero aquí y uno aquí. Dos más cuatro son seis.

Entrevistador. ¿Cuantos lápices le falta?

Esther. Doce.

Comentario: La estudiante realizó primero una suma de cuatro docenas, después buscó un número “complemento”, puso el número 10, después el 11 [en el proceso a alumna lo borra] para finalmente anotar [48+12]. Este tipo de estrategia permite al alumno llegar al resultado después de varios intentos.

Estrategia de cálculo mental: En esta categoría el estudiante considera la estrategia de cálculo mental, busca un hecho conocido (mentalmente) para llegar a la solución.

Problema tipo: *Comparación*

I., 2^{do} grado

Para alumnos de educación primaria el término “más que” representa un concepto que tiene que ver la adición; pero puede desempeñar otra en función de la solicitud del problema: entender el tipo de solicitud que viene en la oración implica para el alumno conceptos bastante complejos.

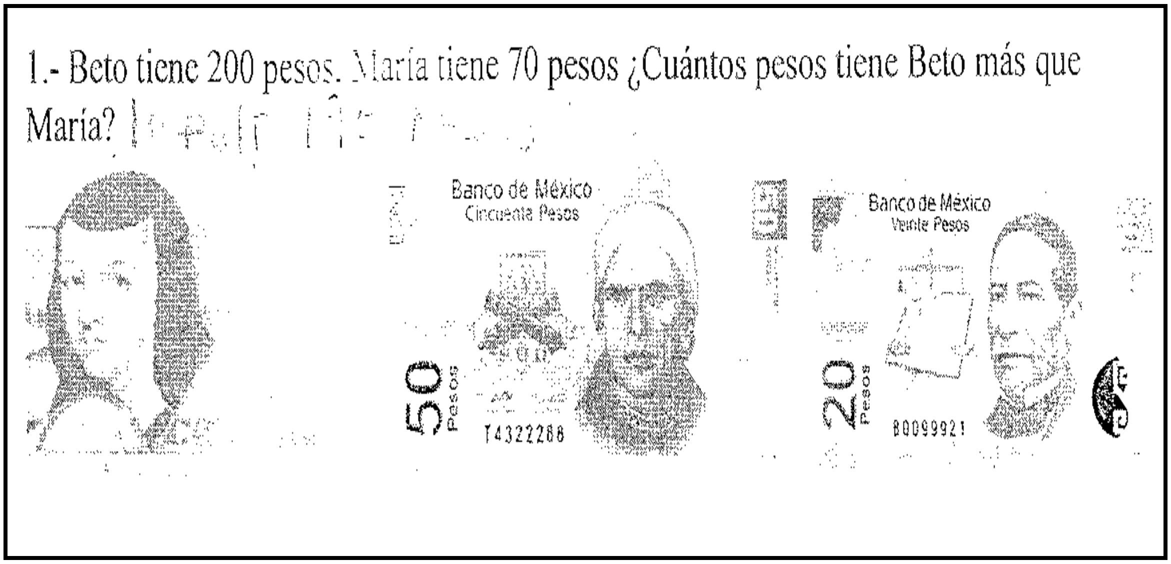


Figura 9. Estrategia de cálculo mental

En la parte que sigue, se describe el dialogo del alumno con el entrevistador:

Dialogo de *Ismael–Entrevistador*: problema de comparación:

> *Entrevistador*. Se le pide a Ismael leer el problema.
> *Ismael*. Beto tiene 200 pesos, María tiene 70 pesos ¿Cuántos pesos tiene Beto más que María?
> Tiene 190 pesos.
> *Entrevistador*. ¿Por qué?
> *Ismael*. Porque tiene 200 (Beto) y María (70)
> El 200 tiene más valor
> *Entrevistador*. ¿Por qué pusiste 190?
> *Ismael*. Porque le faltó ciento noventa para que sea doscientos
> *Entrevistador*. ¿A quién le faltó?
> *Ismael.* a María

El alumno entiende que el término “más que” es algo que equivale a tener una cantidad mayor. Sin embargo, en los problemas de comparación el alumno tiene que encontrar generalmente el valor de la diferencia. Ismael no identifica ni se plantea la correspondencia de comparar dos conjuntos [incógnita en la diferencia], pues para ello requiere desarrollar una relación de equivalencia, de orden y de diferencia (Flores 2002).

Uso del algoritmo: El alumno emplea como estrategia el algoritmo de la suma o la resta.

Problema tipo: *Igualación*

E.P., 2do grado

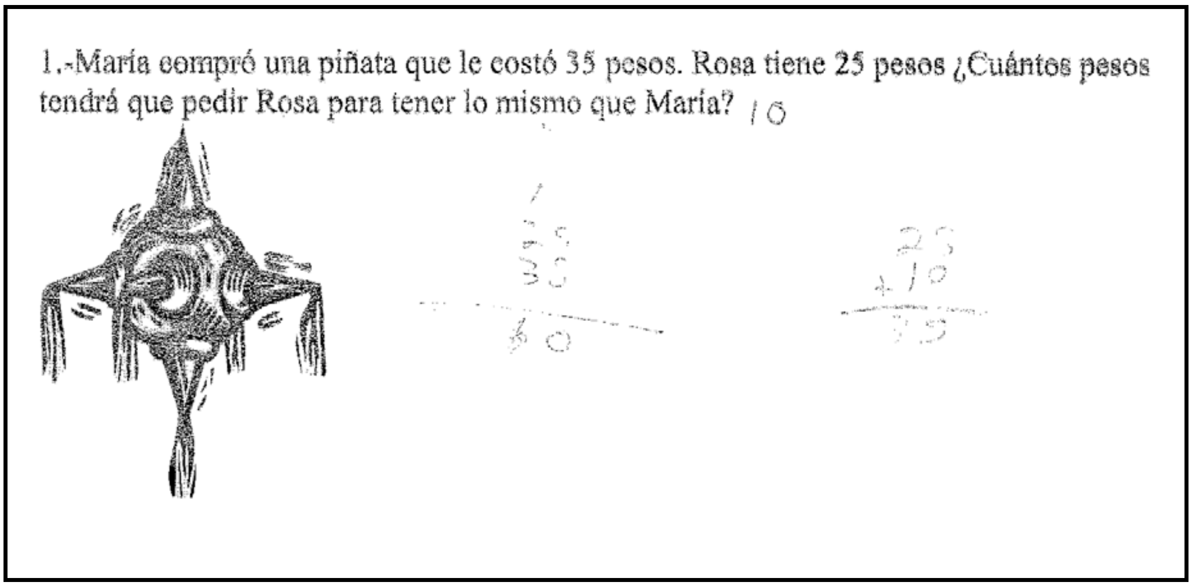


Figura 10. Uso del algoritmo

Dialogo de *Esther–Entrevistador*: problema de igualación:

Entrevistador: la alumna lee el problema.

*Esther***.** "María compró una piñata que le costó 35 pesos. Rosa tiene 25 pesos, ¿Cuántos pesos tendrá que pedir Rosa para tener lo mismo que María y poder comprar una piñata?"

Anota los números 25+35. Dice que le da sesenta y seis

Entrevistador. ¿Dónde está el seis?

(señalando la suma de 25+35)

Esther . y dice, sesenta.

Después, dice:

Esther. No, aquí hice la cuenta. Hace otra operación: 25 + 10, y dice son treinta y cinco.

Entrevistador. ¿Por qué te resultó el diez?

Esther. Porque este diez falta.

Entrevistador. ¿Cómo supiste?

Esther . Es fácil porque treinta y cinco más diez ya son treinta y cinco.

No, veinticinco más diez ya son treinta y cinco.

Comentario: La estudiante realizó el procedimiento de "complemento", buscó el número 10, para después añadir, sin hacer la sustracción. Este tipo de estrategia permite llegar al resultado sin que necesariamente vea la transformación implícita.

Aquí se puede observar que los problemas aritméticos de mayor dificultad para los alumnos son los problemas de combinación y comparación, y después los de igualación.

Los procedimientos utilizados para la resolución de problemas pueden ser mediados por la representación distribuída, pues se puede emplear para ver cómo es la interrelación de las representaciones interna y externa en la solución.

Los problemas de estructura aditiva representan dificultades cognoscitivas; ello depende del tipo de problema, de la información numérica que entra en juego, y de las interrelaciones que están en el enunciado del problema.

5.9 Sistema de representación en la resolución de problemas de estructura aditiva

El proceso de resolución de problemas de estructura aditiva comprende varios componentes, que van desde cómo el alumno comprende el problema hasta cuál es la estrategia utilizada para lograr la solución. Aquí se analiza cómo, por medio de la teoría de las representaciones distribuidas, el alumno resuelve problemas de estructura aditiva.

El término *representación* se refiere al mundo representado, es decir, a la parte tangible. En la teoría de representación, y por tanto como sistema, considera dos representaciones: 1) *Externa*, que es aquello que se puede percibir cuando una persona ejecuta una tarea; por ejemplo, cuando se realiza una tarea (resolución de problemas de estructura aditiva) el sujeto por medio de dibujos, figuras o signos escritos pone un procedimiento de resolución; esta representación considerada externa es un medio de visualización espacial. 2) La representación *interna* se realiza en la parte interna y comienza en la mente del sujeto. Esta representación empieza con procesos mentales donde el sujeto elabora pensamientos lógicos que le permitirán resolver cualquier situación problema. Estos dos componentes forman lo que Zhang y Norman (1994) denominan *sistema de representaciones*.

A continuación, se analiza la producción de los alumnos en la resolución de problemas de estructura aditiva. Por ejemplo, para resolver el siguiente problema el alumno I, realiza.

Ejemplo: *Problema de igualación*: "*dos hermanos venden calcetines. Tomás lleva 15 pares de calcetines para vender, si su hermano Juan deja 10 pares de calcetines tendrán ambos igual número de pares de calcetines. ¿Cuántos pares de calcetines tiene Juan?".*

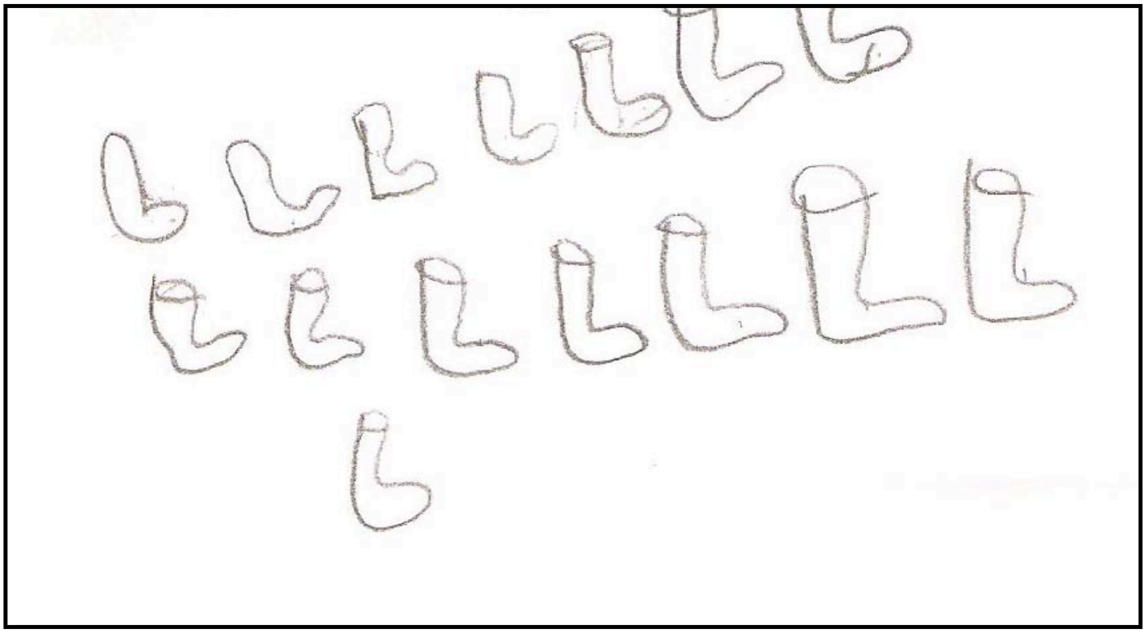


Figura 11. Representación gráfica externa del problema

Dentro del sistema de representaciones distribuídas se considera la representación como una herramienta útil para ver el proceso de pensamiento de los sujetos. A continuación se muestra como el alumno C representa un problema de combinación.

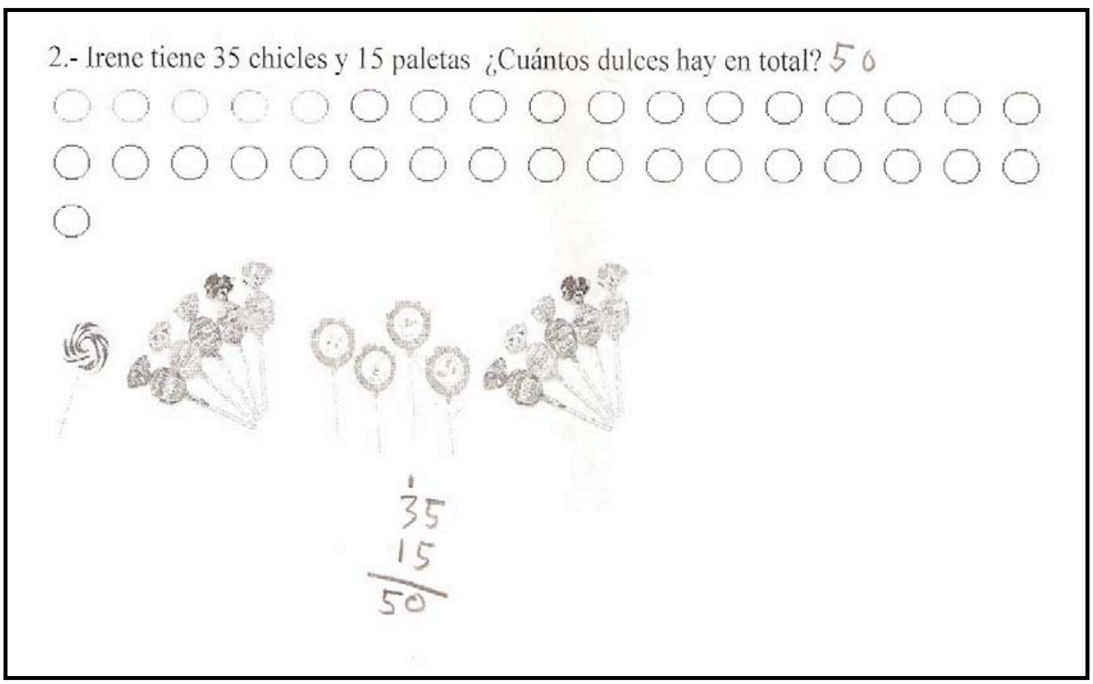


Figura 12. Representación algorítmica canónica de la suma

El proceso de representación permite al alumno buscar una forma adecuada de registro de las cantidades contenidas dentro del problema. Una vez representado el problema, el alumno inicia el proceso de resolución. Como sostiene Vergnaud (1990), la representación simula y anticipa la realidad [del alumno] para después organizar y dirigir su acción. Sostiene que en este proceso el sujeto construye su conocimiento (matemático).

La actividad cognitiva, según Zhang y Norman (1994), remite a cómo se procesa la información dentro de pensamiento del sujeto junto con una herramienta cognitiva externa (representación externa) dentro de un determinado tiempo y espacio.

Según estos autores, la actividad o problema es guiada por la interrelación de representaciones tanto internas como externas; y de la forma como se personifica la externa, esta interrelación se denomina *sistema de representación distribuída*.

Capítulo VI. RESULTADOS DE LA SEGUNDA ETAPA: SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se describen los resultados de la segunda etapa del estudio, que corresponde a la secuencia didáctica. Se analizaron las actividades implementadas a trabajar el sistema de numeración decimal indo-arábigo y la resolución de problemas de estructura aditiva, a partir de los datos obtenidos en la primera etapa del estudio piloto [cuestionarios iniciales]. La secuencia se diseñó y aplicó en dos fases o momentos: 1) secuencia de actividades con el sistema de numeración decimal indo-arábigo y 2) resolución de problemas de estructura aditiva. Para ello, se consideraron cuatro principios básicos que describen Bermejo y otros autores, (2003):

1. Apoyar el proceso de adquisición (sistema de numeración decimal, del

algoritmo y de resolución de problemas de estructura aditiva).

2. Desarrollar una instrucción sistemática, guiada y por descubrimiento.

3. Fomentar la autorregulación de los procesos de aprendizaje.

4. Permitir el autodescubrimiento, con el objetivo de facilitar la adquisición de habilidades del pensamiento matemático (sistema de numeración y problemas de estructura aditiva).

6.1 Descripción de la segunda etapa: secuencia didáctica

A partir de los datos obtenidos del estudio piloto, se diseñaron actividades enfocadas a consolidar las reglas del sistema de numeración indo-arábigo. Se trabajó conteo de unidades, agrupamiento de decenas, centenas y actividades con problemas de estructura aditiva.

El objetivo al desarrollar las actividades específicas de enseñanza fue atestiguar y al mismo tiempo apoyar a los alumnos a desarrollar su propio conocimiento. También, se tuvo el interés de investigar la evolución de las ideas matemáticas que los niños desarrollaron durante esta etapa del estudio. Este diseño consistió en ocho sesiones y las actividades se estructuraron de la siguiente manera:

Tabla No. 22 Estructura de las sesiones de trabajo

SESIÓN	TEMA	OBJETIVO	MATERIAL
1	Se venden paletas	1) Adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal. 2) Conteo de unidades. 3) Conteo de 10 en 10.	Hojas, lápiz, colores, bolsas
2		Formar unidades, decenas, centenas y escritura de decenas, centenas y unidades	
3	Sistema de numeración decimal asociado al algoritmo	Trabajo con un problema de cambio, [suma]. Tengo 65 dulces. Después me dan 38 dulces ¿Cuántos dulces tengo ahora?	Lápiz, papel y colores
4	Sistema de numeración decimal asociado al algoritmo	Trabajo con un problema de cambio, [resta]. Tengo 67 paletas. La maestra me quitó 16 para darles a mis compañeros. ¿Cuántas paletas me quedan?	Lápiz, papel y colores
5	Sistema de numeración decimal asociado al algoritmo	Trabajar un problema de tipo: estado–transformación–estado, transformación negativa. La mamá de Dayra tiene 150 pesos y se gastó 90 pesos al comprar una muñeca. ¿Cuánto dinero tiene ahora?	Lápiz, papel y colores
6	Sistema de numeración decimal asociado	Trabajo con un problema de tipo: estado–transformación–estado, transformación negativa.	Lápiz, papel y colores

Tabla No 22. [Continúa]

	al algoritmo	La mamá de Juan gastó en la compra de útiles escolares 245 pesos. Ella tenía 300 pesos, ¿Cuánto tiene ahora?	
7	Algoritmo: Comparación entre dos conjuntos, y estado-transformación-estado [transformación negativa]	Trabajar problemas de tipo: comparación Ana María tiene 130 pesos y Carlos tiene 165 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que Ana María? Cesar fue a la tienda el “Centro”. Compró huevo, pan y leche y gastó 65 pesos, le quedaron 45 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Cesar al llegar a la tienda?	Lápiz, papel y colores
8	Algoritmo: Combinación de transformaciones, primera y segunda mayor que la tercera, y primera menor que la segunda.	Trabajo problemas de tipo: combinación En un juego Ismael tenía 48 canicas y ganó otros 26, pero luego perdió 18. ¿Cuántas canicas tiene al final? En un juego gané 62 puntos y luego perdí 71 puntos, ¿Cómo quedé al final?	Lápiz, papel y colores

6.2 Aplicación de la secuencia didáctica

Las actividades se aplicaron a un grupo de trabajo integrado por siete alumnos de 2^{do} y 3^{er} grados de educación primaria en sesiones de 60 minutos aproximadamente. Estas sesiones consistieron en trabajo grupal con cada una de las actividades de la secuencia didáctica. Quien estuvo a cargo de dirigir todas las sesiones de este estudio fue el tesista, autor de este trabajo.

6.3 Ambiente en el salón de clase

Se solicitó a todos los estudiantes poner toda su atención en las actividades a realizar, con el fin de llevar a buen término cada actividad en la materia de matemáticas.

6.4 Propuesta de análisis de datos de la secuencia didáctica

Los datos de esta etapa se analizaron tomando en cuenta el proceso de resolución de problemas que realizaron los alumnos de 2do y 3er grados durante las sesiones de trabajo. Se tomaron tres sesiones de ocho para mostrar el proceso de resolución. Posteriormente, se analizó el tipo de representación que elaboraron los alumnos.

6.5 Resultados de la secuencia didáctica

Como se indicó, los resultados de esta segunda etapa se tomaron del análisis de solamente tres sesiones, las cuales se identificarán, de aquí en adelante, como: *sesión de trabajo inicial, sesión de trabajo intermedio y sesión de trabajo final* respectivamente.

6.6 Sesión de trabajo inicial: Sistema de numeración decimal

Se repartió a cada alumno hojas de trabajo con la premisa de trabajar y resolver la actividad en relación al sistema de numeración decimal indo-arábigo. Se solicitó a los alumnos formar decenas y centenas y posteriormente contar las unidades sobrantes. Esta sesión se llevó a cabo en un ambiente de trabajo con los siete alumnos de 2do y 3er grados.

Actividad de aprendizaje:
El objetivo de esta sesión consistió en desarrollar y conectar las ideas que mostraron en la primera etapa del estudio con respecto al proceso de desarrollo de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo. Por ejemplo, en la primera etapa del estudio, los alumnos desarrollaron ideas tales como "*la escritura de los números de acuerdo con la numeración hablada".* En esta sesión inicial, se pretendió ayudar al alumno a desarrollar las diferentes ideas intuitivas encontradas en relación al sistema de numeración. Una de estas ideas se refiere

a: 1) el rol de los números nudos (unidades de decenas, unidades de centenas y unidades de millar) del sistema decimal indo-arábigo.

Ejemplo de una sesión inicial con el alumno ***C***

Actividad 1:

Se solicitó al alumno formar bolsas con 10 paletas, cajas con 10 bolsas de 10 paletas y después ver cuántas unidades le quedan.

Actividad 1: Se venden paletas

OBJETIVO:

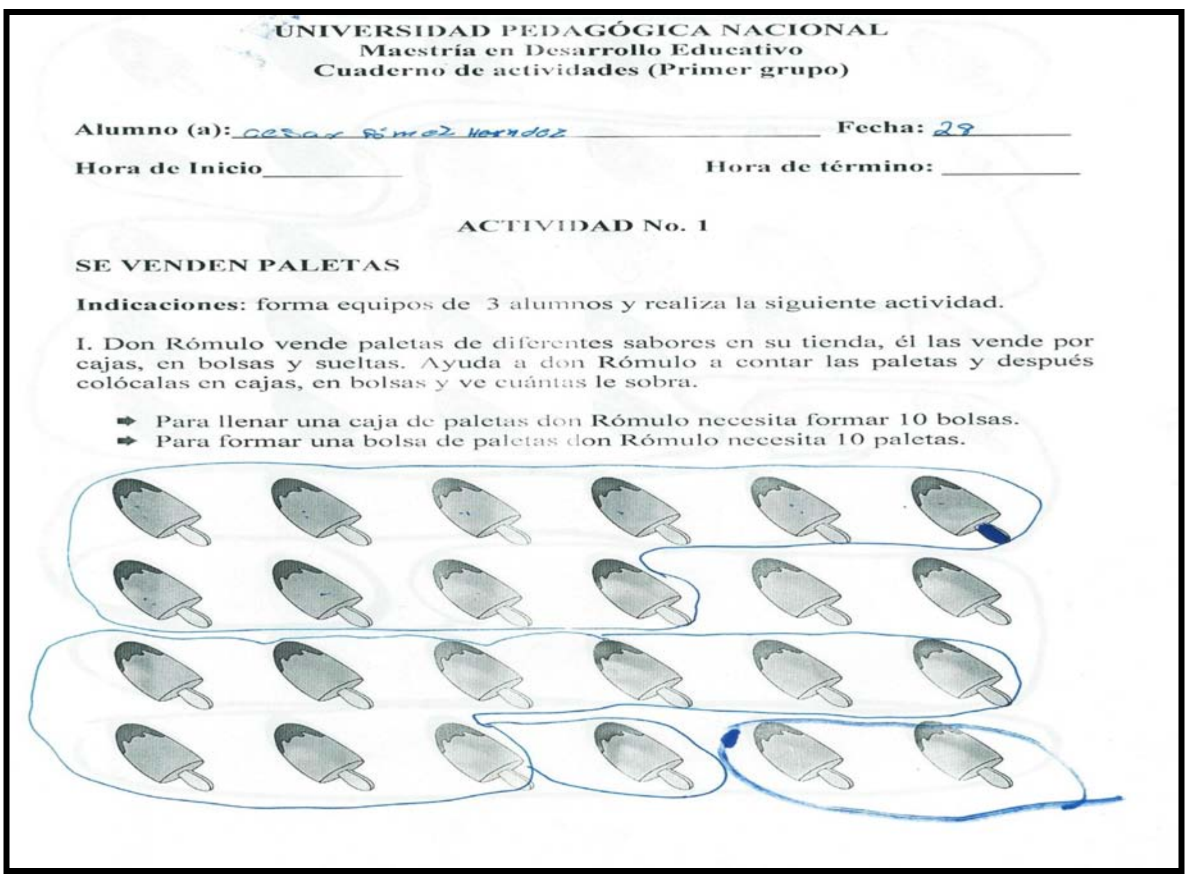
Adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal:

1) Contar unidades.

2) Agrupar de 10 en 10.

3) Identificar la unidad de centena.

Figura 13. Hoja de trabajo de la primera actividad sobre el SND



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Maestría en Desarrollo Educativo
Cuaderno de actividades (Primer grupo)

Alumno (a): cesar gómez herndez Fecha: 29

Hora de Inicio ______ Hora de término: ______

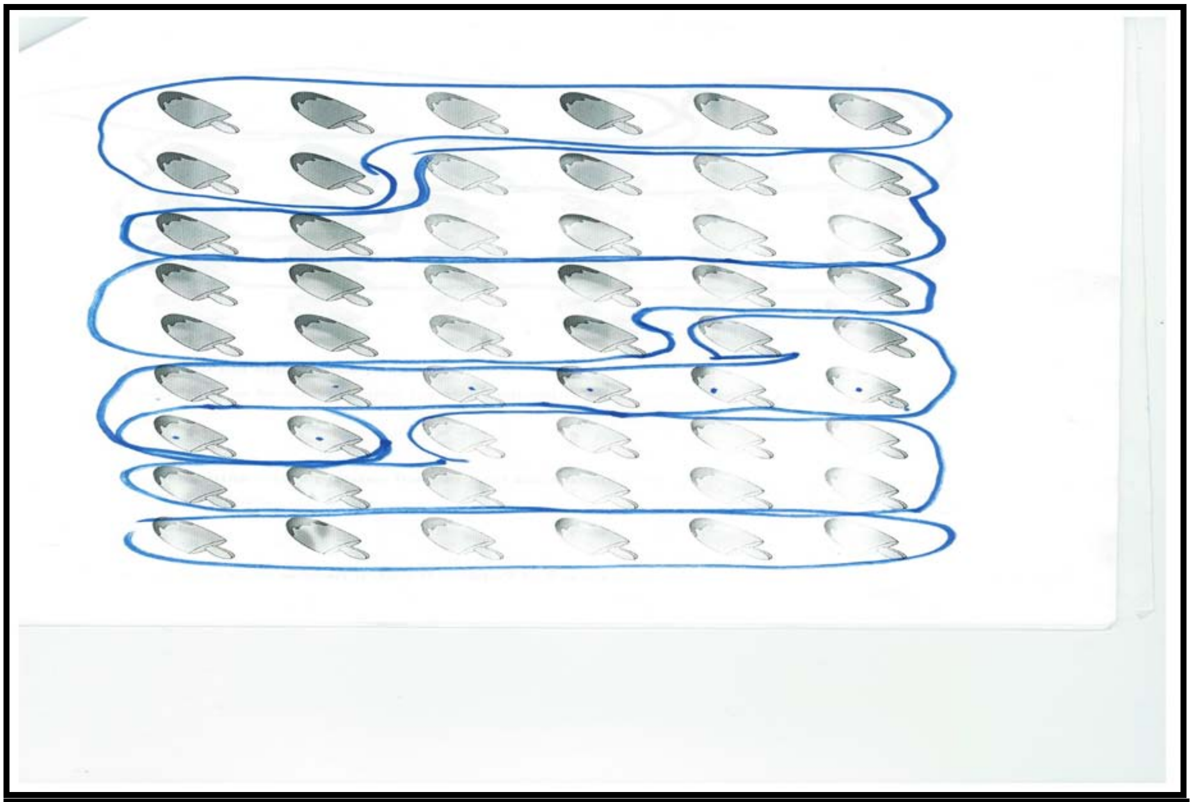
ACTIVIDAD No. 1

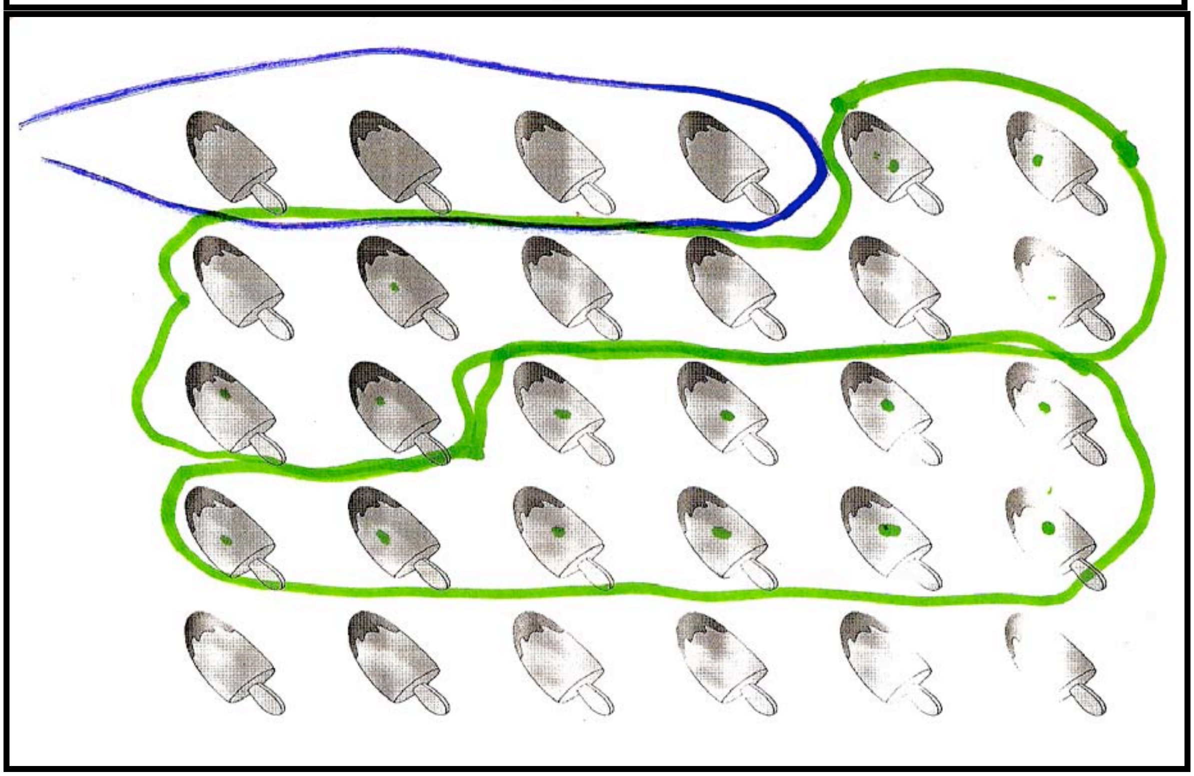
SE VENDEN PALETAS

Indicaciones: forma equipos de 3 alumnos y realiza la siguiente actividad.

I. Don Rómulo vende paletas de diferentes sabores en su tienda, él las vende por cajas, en bolsas y sueltas. Ayuda a don Rómulo a contar las paletas y después colócalas en cajas, en bolsas y ve cuántas le sobra.

- Para llenar una caja de paletas don Rómulo necesita formar 10 bolsas.
- Para formar una bolsa de paletas don Rómulo necesita 10 paletas.





Todos los alumnos consiguieron realizar esta actividad; formaron decenas (bolsas) y centenas (cajas). Dos estudiantes encontraron 6 unidades, esto se debió a que no contaron dos unidades (paletas) sobrantes.

Actividad 2

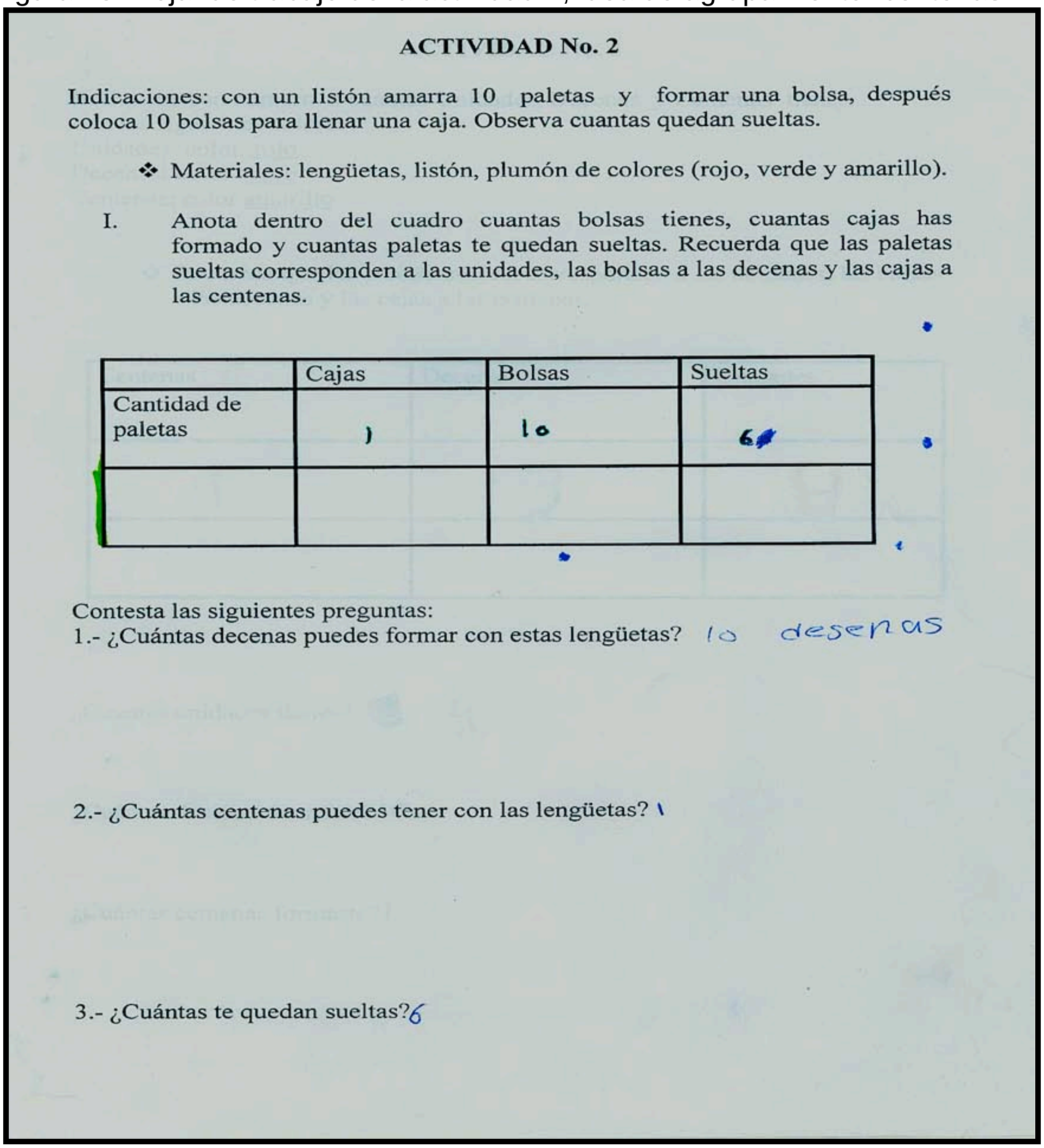
Objetivo: Escritura de decenas, centenas y unidades.

Se solicitó a los alumnos después de realizar la actividad uno [1], escribir unidades, decenas, y centenas con el apoyo de material concreto (lengüetas).

Figura 14. Actividad 2. Escritura del SND: idea de agrupamiento de decenas

Los alumnos en esta actividad dos, emplearon lengüetas para formar decenas y centenas. Este recurso permitió la construcción de niveles de agrupamientos (decenas y centenas). En esta actividad dos se trabajó con material concreto con la finalidad de presentar otra situación de agrupamiento de decenas, Bernarz y Janvier (Citados por Tierigi y Walman, 2007).

Figura 15. Hoja de trabajo de la actividad 2; idea de agrupamiento: centenas



ACTIVIDAD No. 2

Indicaciones: con un listón amarra 10 paletas y formar una bolsa, después coloca 10 bolsas para llenar una caja. Observa cuantas quedan sueltas.

❖ Materiales: lengüetas, listón, plumón de colores (rojo, verde y amarillo).

I. Anota dentro del cuadro cuantas bolsas tienes, cuantas cajas has formado y cuantas paletas te quedan sueltas. Recuerda que las paletas sueltas corresponden a las unidades, las bolsas a las decenas y las cajas a las centenas.

	Cajas	Bolsas	Sueltas
Cantidad de paletas	1	10	6

Contesta las siguientes preguntas:

1.- ¿Cuántas decenas puedes formar con estas lengüetas? 10 desenas

2.- ¿Cuántas centenas puedes tener con las lengüetas? 1

3.- ¿Cuántas te quedan sueltas? 6

Esta actividad permitió desarrollar las nociones de decenas y centenas, así como la posibilidad de ver las unidades como parte de ambas agrupaciones. El trabajo con objetos concretos permitió a los alumnos consolidar estas nociones y la escritura de los números también permitió poco a poco construir sus conocimientos sobre el sistema de numeración decimal.

6.7 Descripción de la sesión de trabajo intermedio: Trabajo con el algoritmo

Con el objetivo de que los alumnos utilizaran los algoritmos, a cada alumno se le entregó su hoja de actividad, con problemas de suma y resta; cada alumno usó la representación de los signos [+] [-] para realizar y resolver ambas operaciones.

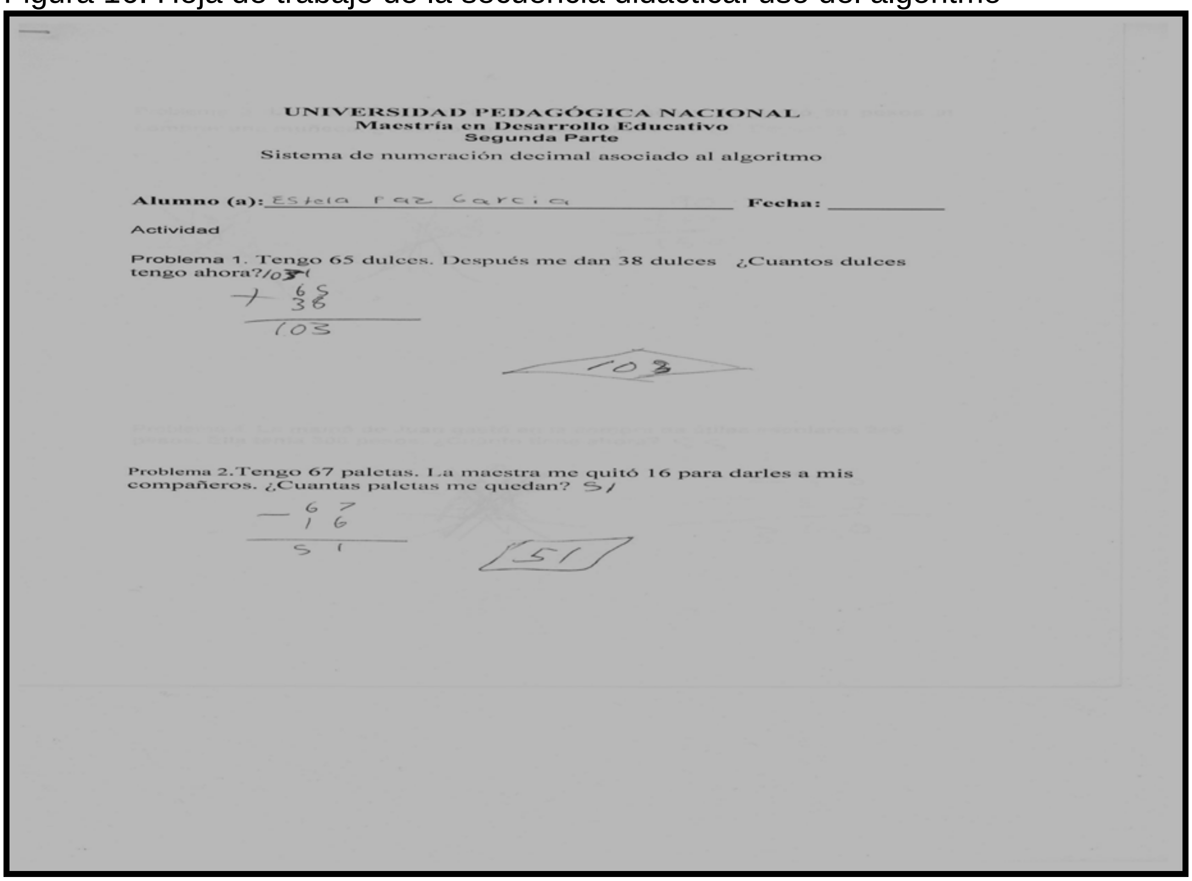
Actividad de aprendizaje:

El objetivo de esta sesión fue que los alumnos utilizaran los algoritmos de suma y resta, usando el signo correspondiente en cada operación.

A continuación, se da un ejemplo de una sesión intermedia con la alumna E.

Se solicitó a la alumna resolver un problema de cambio. La finalidad de esta actividad fue comenzar a usar el algoritmo y el signo (÷) de la suma.

Figura 16. Hoja de trabajo de la secuencia didáctica: uso del algoritmo



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Maestría en Desarrollo Educativo
Segunda Parte
Sistema de numeración decimal asociado al algoritmo

Alumno (a): Estela Paz Garcia Fecha: __________

Actividad

Problema 1. Tengo 65 dulces. Después me dan 38 dulces ¿Cuantos dulces tengo ahora? 103

$$\begin{array}{r} 65 \\ +\ 38 \\ \hline 103 \end{array}$$

103

Problema 2. Tengo 67 paletas. La maestra me quitó 16 para darles a mis compañeros. ¿Cuantas paletas me quedan? 51

$$\begin{array}{r} 67 \\ -\ 16 \\ \hline 51 \end{array}$$

51

Con esta actividad, se observó que los alumnos comprendieron el problema y utilizaron correctamente el algoritmo para resolver los problemas de estructura aditiva.

6.8 Descripción de la sesión de trabajo final: Trabajo con problemas de estructura aditiva

A cada alumno se le proporcionó una hoja de actividades con problemas de estructura aditiva. Cabe señalar que, de acuerdo con Vergnaud (1997), éstos se refieren a sumas o restas.

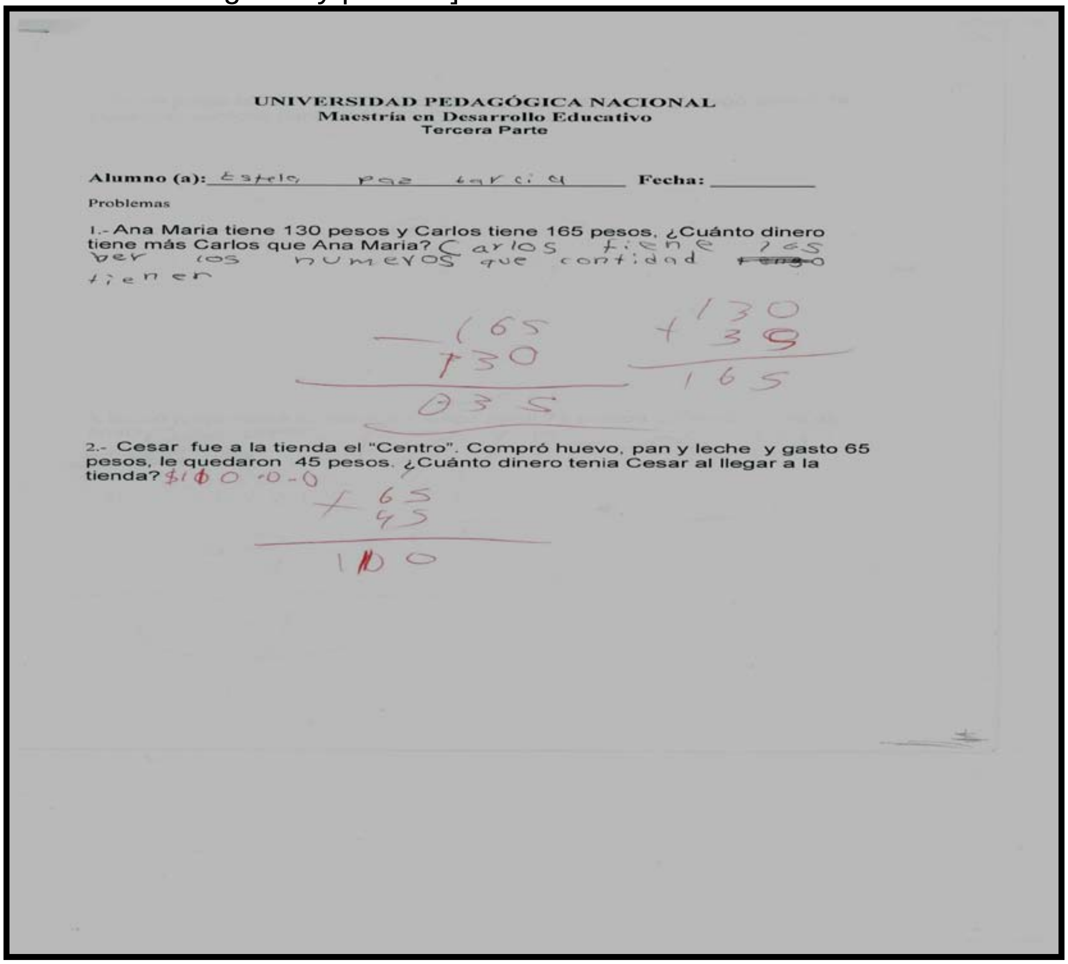
Actividad de aprendizaje:
Al resolver problemas de estructura aditiva, en esta etapa de la secuencia didáctica se pretendió que el alumno realizara la transición de procedimientos no formales a procedimientos algorítmicos, mediados por instrumentos simbólicos (algorítmicos). El objetivo fue desarrollar un pensamiento de entendimiento de las relaciones de los problemas de estructura aditiva.

Apoyado en los tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva se trabajó distintos conceptos matemáticos con los alumnos.

Ejemplo de una sesión final con la alumna E:

Se solicitó al alumno trabajar con problemas de estructura aditiva de tipo: cambio disminuido y aumentado [transformación negativa y transformación positiva]. A continuación se muestra la hoja de trabajo de la secuencia didáctica:

Figura 17. Hoja de trabajo de la secuencia didáctica: problemas de cambio [transformación negativa y positiva]



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Maestría en Desarrollo Educativo
Tercera Parte

Alumno (a): Estela paz Garcia **Fecha:** __________

Problemas

1.- Ana Maria tiene 130 pesos y Carlos tiene 165 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que Ana Maria? Carlos tiene 165 ver los numeros que contidad ~~tengo~~ tienen

$$\begin{array}{r} 165 \\ -\ 130 \\ \hline 035 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 130 \\ +\ 35 \\ \hline 165 \end{array}$$

2.- Cesar fue a la tienda el "Centro". Compró huevo, pan y leche y gasto 65 pesos, le quedaron 45 pesos. ¿Cuánto dinero tenia Cesar al llegar a la tienda? $100

$$\begin{array}{r} 65 \\ +\ 45 \\ \hline 110 \end{array}$$

Comentario: Como se puede observar, la alumna **E** pudo utilizar correctamente los algoritmos de la resta y suma para resolver el primer problema que era de tipo "cambio". De la misma manera, pudo emplear el algoritmo adecuado para resolver el segundo problema de cambio [transformación positiva].

En las actividades propuestas durante la secuencia didáctica se planteó que los alumnos desarrollaran un conocimiento basado en actividades especificas (idea de agrupamiento, valor relativo y valor absoluto) para ver cómo iban evolucionando en el proceso de comprensión del las reglas del sistema de numeración decimal.

6.9 Análisis de la representación externa

De acuerdo con Martí (2003), las matemáticas constituyen uno de los ejemplos más claros de saberes cuyo conocimiento viene mediado por el lenguaje matemático. Este es un sistema semiótico de gran complejidad y riqueza para el alumno.

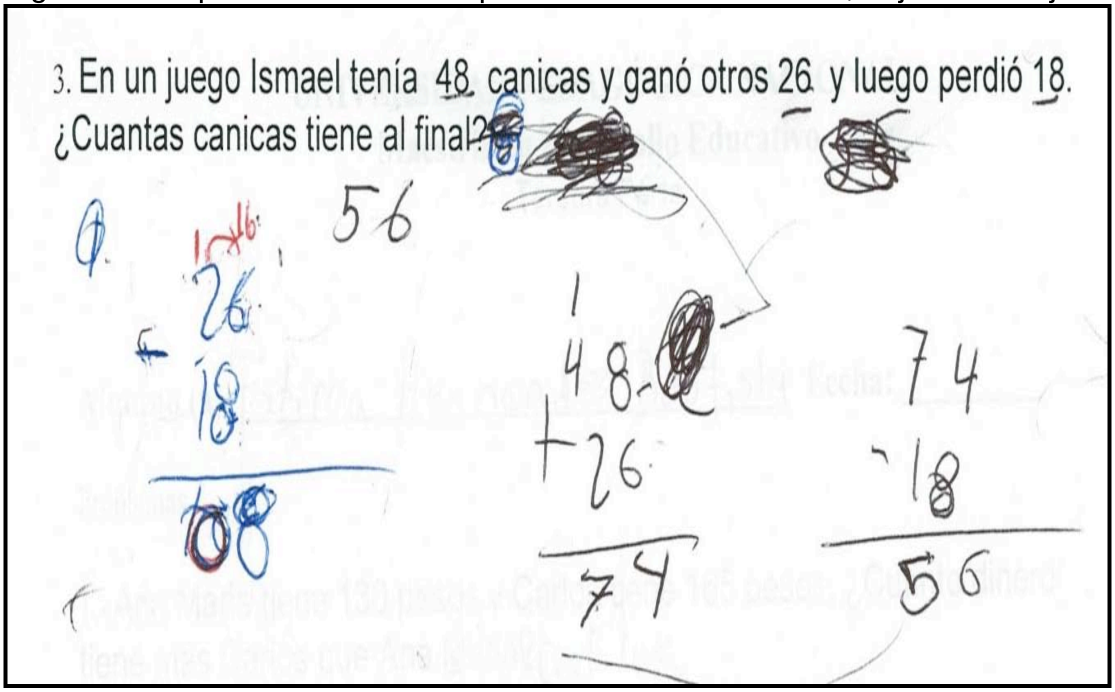
El desarrollo del lenguaje matemático se vincula con la construcción de un sistema externo de representación, con reglas bien establecidas que potencian, por ejemplo, el razonamiento deductivo o cálculos matemáticos. Los sistemas externos de representación no sólo sirven de soporte para realizar operaciones (p. e. suma, resta, multiplicación o división), sino que crean nuevas maneras de pensar y actuar.

Zhang y Norman (1994) sostienen que cuando un sujeto afronta un problema matemático realiza dos procesos que le permiten llegar a la solución: usa la representación interna y externa, que juntas forman lo que denominan *sistema representacional*.

El sistema representacional predice, según estos autores, la información contenida en el problema el cual facilita el proceso perceptual. Con este sistema, la representación externa se expresa en la escritura de los dígitos que determina cómo el alumno va a actuar en el proceso de resolver el problema.

Cabe mencionar que una relación estrecha entre ambas representaciones re-alimenta todo el proceso representacional. Veamos a continuación un ejemplo donde se muestra un problema de combinación de transformaciones.

Figura 18. Representación de un problema de combinación, hoja de trabajo



Desde el sistema representacional el alumno se apoyó en las notaciones (algorítmicas) para actuar y resolver el problema. El eje sobre el cual gira el sistema de representación es la producción, funcionamiento y empleo de esta representación, mediante la cual se expresa lo que está pensando el sujeto.

6.10 Resultados de la secuencia didáctica

Esta secuencia consistió en desarrollar el sistema de numeración decimal hacia la resolución de problemas de estructura aditiva. Todos los alumnos tuvieron una evolución notable en el trabajo con las actividades planteadas, ellos avanzaron en la escritura “formal” del sistema de numeración decimal. Dentro de estas actividades usaron el algoritmo de la suma y de la resta, progresaron en discernir y entender las relaciones contenidas en los problemas de estructura aditiva. A un alumno se le dificultó resolver el problema de tipo estado–transformación–estado, transformación negativa en la sesión 5, 6 y 7. A dos alumnos se les complicó resolver los problemas de combinación de la sesión 8.

Se promovió en esta fase de aprendizaje que los alumnos lograran avanzar en el desarrollo de su propio conocimiento.

Conclusiones

La actividad matemática depende, ante todo, del raciocinio del hombre para producir conocimientos. En este sentido, esta secuencia pretendió desarrollar esta producción de conocimientos hacia la matemática; en una ordenada progresión de contenidos se reflexiona sobre las acciones y relaciones de los números.

En el desarrollo de la secuencia didáctica se privilegió el aprendizaje de conceptos del sistema de numeración decimal y la resolución de problemas de estructura aditiva. Para ello, fue importante permitir a los alumnos estar en contacto con diferentes situaciones de conteo y propiciando la idea de agrupamiento de decenas y centenas. En las actividades planteadas se afianzaron conocimientos que ya poseían los alumnos y también desarrollaron otros. Por ejemplo los alumnos ya conocían cantidades de dos cifras [unidades y decenas] y afianzaron las cantidades de las unidades de centenas. Consolidaron también el uso del algoritmo de la suma y resta en la resolución de problemas.

A partir de las actividades desarrolladas con los estudiantes se pudo verificar el uso de las notaciones de los números del SND. Éstas presentaron mucha similitud con lo que los alumnos escribieron en la primera etapa del estudio. De acuerdo a Lerner y Sadovsky (1994), éstas notaciones son producidas por los alumnos de acuerdo a la manera en que lo perciben en la oralidad de su cotidianidad; es decir, ellos escriben la notación conforme a lo que escuchan.

Capítulo VII. TERCERA ETAPA DEL ESTUDIO: CUESTIONARIO FINAL

En este capítulo se reporta la tercera etapa [cuestionario final]. Ésta consistió en ver la evolución sobre los contenidos trabajados de la secuencia didáctica, seguida de una entrevista clínica.

7.1 Descripción del cuestionario final

Se diseñó un cuestionario final que tuvo como propósito verificar el desarrollo de la etapa anterior sobre el sistema de numeración decimal, el uso del algoritmo y la resolución de problemas de estructura aditiva.

7.2 Aplicación del cuestionario final

El cuestionario final se aplicó de manera individual a siete alumnos de 2do y 3er grados de educación primaria. Después se les realizó una entrevista clínica individual con la finalidad de corroborar la evolución de las ideas matemáticas desarrolladas en la secuencia didáctica.

7.3 Propuesta de análisis de datos de la tercera etapa

Los datos obtenidos en esta etapa se analizaron en dos partes: la primera consistió en encontrar y verificar los hallazgos que reportan Lerner y Sadovsky (1994), sobre las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo. La segunda parte consistió en identificar las representaciones que desarrollaron los alumnos cuando resolvieron problemas de estructura aditiva tomando la propuesta de Zhang y Norman (1994) sobre el sistema de representación distribuida. Se pretendió identificar cómo es la interrelación de la representación externa e interna. Los autores antes citados sostienen que la información contenida en un problema requiere ser procesada desde la teoría de las representaciones distribuidas; es decir, la información se procesa a través de la interrelación de la representación externa e interna y de la naturaleza de la representación externa. Después de la resolución de problemas se realizaron entrevistas clínicas.

7.4 Análisis de los datos de la tercera etapa

A partir del análisis de los datos se observó que los alumnos de 2do y 3er grados desarrollaron ideas básicas sobre el sistema decimal como contar, reconocer el valor relativo y el valor absoluto. A continuación, se muestran los resultados sobre el sistema de numeración decimal indo-arábigo.

7.5 Resultados de la tercera etapa: Cuestionario final: sistema de numeración decimal indo-arábigo

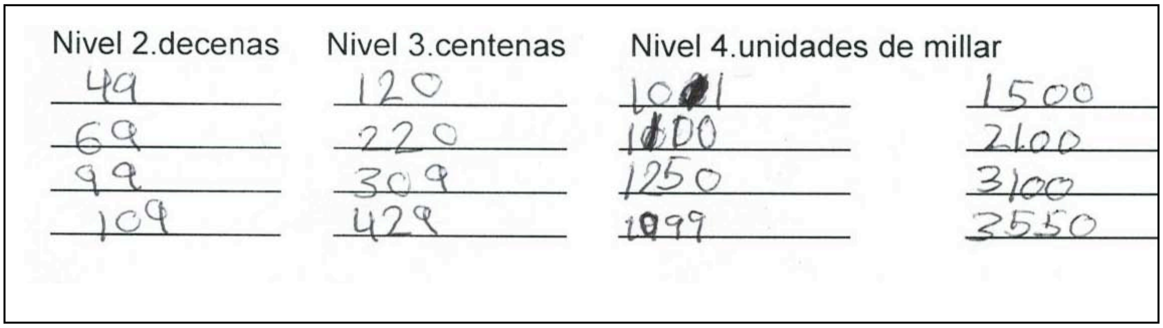
Aquí se retoman las ideas [intuitivas] que los alumnos desarrollaron a partir de los hallazgos de Lerner y Sadovsky, éstas son:
1) la numeración escrita corresponde con la numeración hablada; los niños escriben el número como lo escuchan; 2) el rol de los números nudos (decenas, centenas y unidades de millar) del sistema decimal les permite producir sus propios números en la escritura 3) la cantidad de cifras define si un número es mayor o menor (Lerner y Sadovsky, 1994); y 4) el valor del cero dentro del sistema de valor posicional (Lerner, 1992).

Dictados de números

Se dictó a los alumnos cantidades en unidades de decenas, centenas y unidades de millar. Aquí, el propósito fue verificar cómo evolucionaron en la construcción de las reglas del sistema de numeración decimal.

Idea matemática solicitada: escritura de decenas, centenas y unidades de millar.

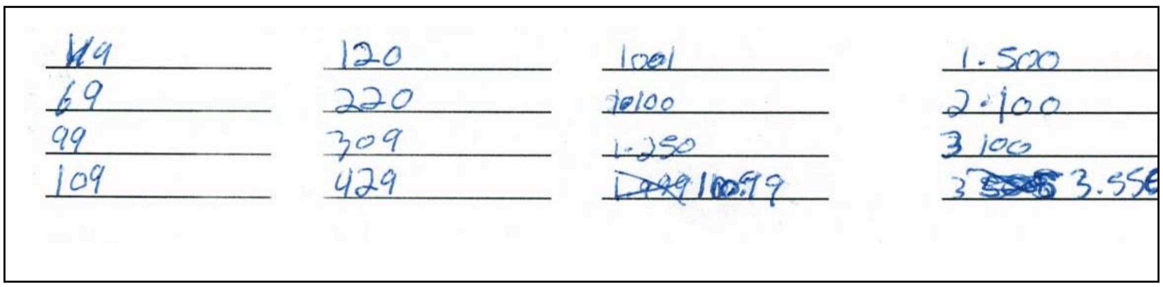
Figura 19. Hoja de actividad del cuestionario de SND



[a]

Idea matemática solicitada: escritura de decenas, centenas y unidades de millar

Figura 20. Hoja de actividad del cuestionario de SND



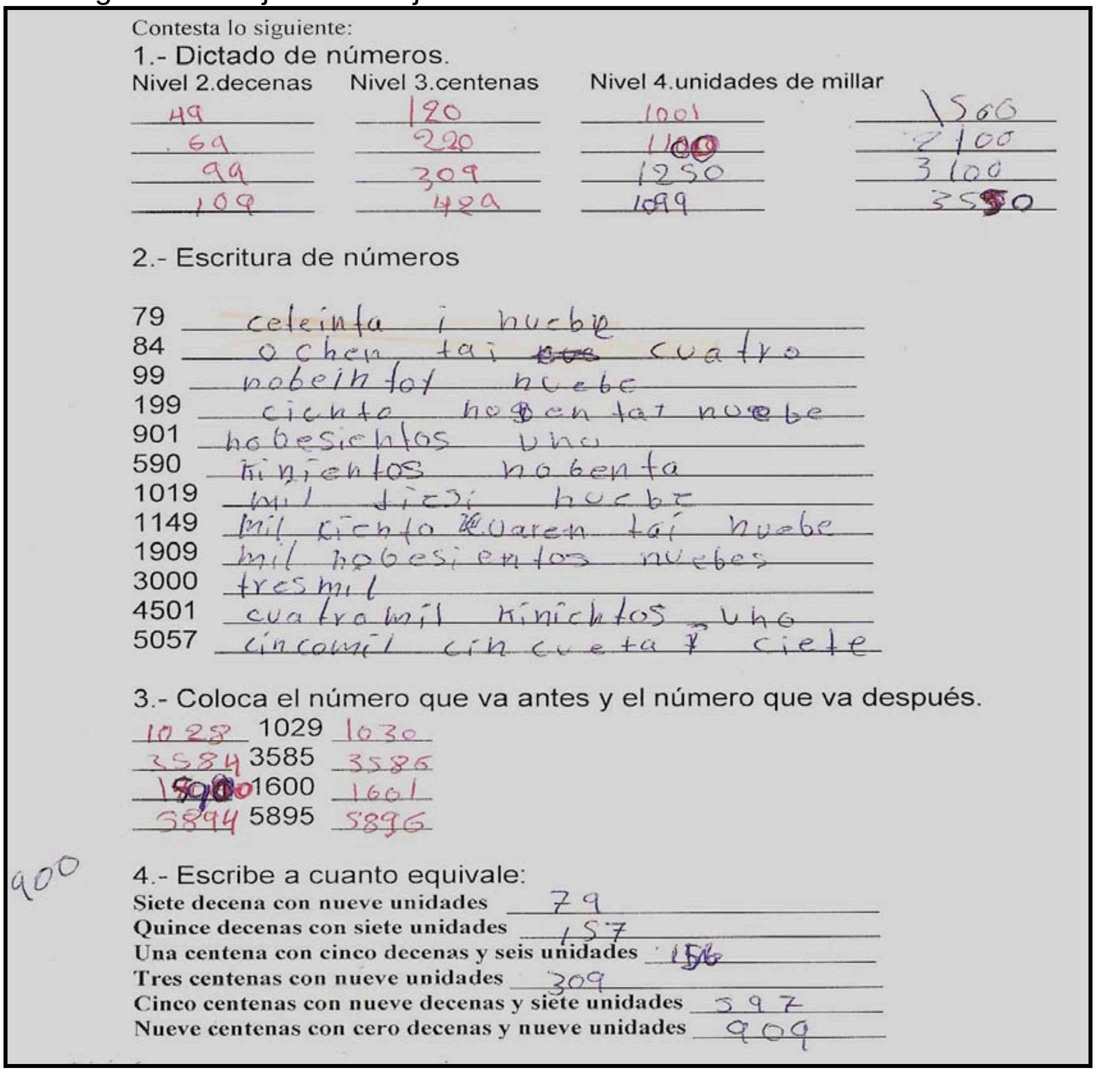
[b]

En la escritura del número mil cien [1100] el alumno “C” lo escribe [10100] y, de acuerdo con Brizuela y Cayton (2010), esta es una manera compactada de escribir los números. Este alumno, además, se ayuda del punto (.) para separar las cifras [1.250,1.500, 2.100 y 3.550]; esto le permite comprender mejor la escritura de los números y agrega que las unidades de mil deben “tener tres ceros para que digan mil”.

7.6 Sistema representacional en la adquisición del sistema de numeración decimal indo-arábigo

A continuación se describe la adquisición del sistema de numeración basado en el sistema representación de Zhang y Norman.

Figura 21. Hoja de trabajo del cuestionario de SND



Contesta lo siguiente:

1.- Dictado de números.

Nivel 2.decenas	Nivel 3.centenas	Nivel 4.unidades de millar	
49	120	1001	1500
69	220	1100	2100
99	309	1250	3100
109	429	1099	3550

2.- Escritura de números

79 celeinta i huebe
84 ochen tai ~~cos~~ cuatro
99 nobeih toy huebe
199 ciehto hoben tai nuebe
901 hobesiehtos uho
590 kinientos hobenta
1019 mil dicsi huebe
1149 mil ciehto cuaren tai huebe
1909 mil hobesientos huebes
3000 tresmil
4501 cuatromil kinichtos uho
5057 cincomil cihcueta i ciete

3.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

1028 1029 1030
3584 3585 3586
1590 1600 1601
5894 5895 5896

900

4.- Escribe a cuanto equivale:

Siete decena con nueve unidades 79
Quince decenas con siete unidades 157
Una centena con cinco decenas y seis unidades 156
Tres centenas con nueve unidades 309
Cinco centenas con nueve decenas y siete unidades 597
Nueve centenas con cero decenas y nueve unidades 909

En esta pregunta del cuestionario se puede observar como el alumno fue contestando a todas las preguntas del cuestionario final del sistema de numeración decimal.

La información necesaria para el desempeño de cualquier tarea se distribuye a partir de la información que se percibe desde el mundo exterior y de la información que se procesa en la mente (Zhang y Norman, 1994). Las representaciones externas son construidas mediante la información extraída de los objetos externos [símbolos escritos] y las representaciones internas son construidas a partir de la mente (por ejemplo, los esquemas); juntas forman una interrelación dinámica que da lugar a un sistema representacional.

El análisis del sistema representacional permite ver cómo el alumno va construyendo representaciones externas para responder a las preguntas planteadas. De acuerdo con Martí (2003), el desarrollo de esta representación remite a una realidad que se puede desplegar en un espacio, y es perceptible directamente.

Para el resolutor de una tarea, la teoría de representación es un medio que le ayuda a actuar para resolver dicha tarea.

7.7 Cuestionario sobre problemas de estructura aditiva

En el cuestionario de problemas de estructura aditiva se abordaron los siguientes tipos de problemas del modelo funcional.

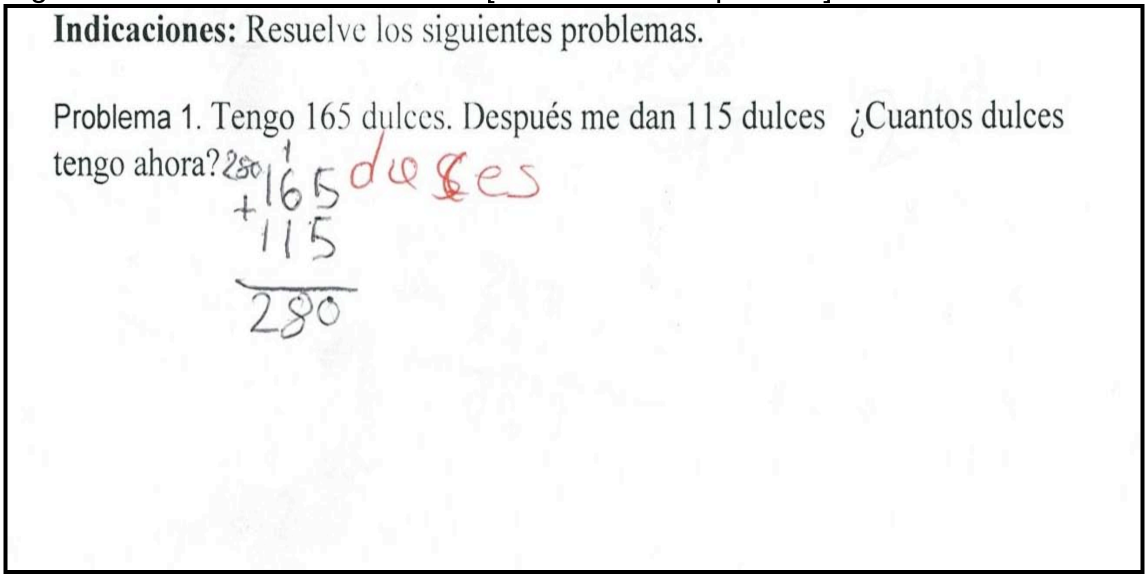
Problema tipo: cambio [transformación positiva]

Problema número 1: En esta etapa final se diseñó y aplicó el siguiente problema tipo cambio [transformación positiva]:

> "Tengo 165 dulces. Después me dan 115 dulces ¿Cuántos dulces tengo ahora?"

Cuando se trata de resolver problemas donde hay que encontrar la diferencia realizando la operación suma, el alumno "**I**" representa el problema con la adición. Esto le permite anotar el algoritmo canónico correctamente y obtener el resultado. A continuación se describe el proceso de resolución del problema 1 del alumno "**I**".

Figura 22. Problema de cambio 1 [transformación positiva]


Indicaciones: Resuelve los siguientes problemas.

Problema 1. Tengo 165 dulces. Después me dan 115 dulces ¿Cuantos dulces tengo ahora? 280

$$\begin{array}{r} 165 \\ +\ 115 \\ \hline 280 \end{array}$$

dulces

Extracto del dialogo entre el estudiante *"I" y el entrevistador*: El estudiante "**I**" dice: "lo sumé, cinco más cinco, diez; seis, siete, y uno ocho, y dos me da doscientos ochenta". La notación de los símbolos del algoritmo le permite al estudiante desarrollar de manera eficiente la operación, sin recurrir por ejemplo, a la estrategia de contar uno a uno.

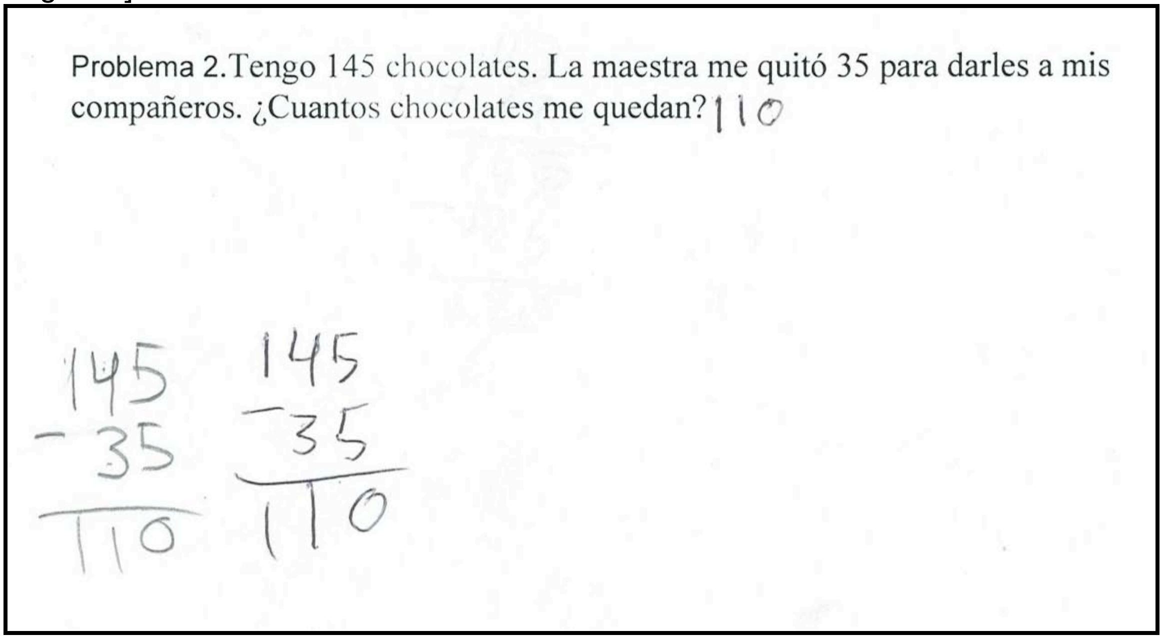
Problema tipo cambio: transformación negativa

El problema número 2 corresponde al tipo cambio [transformación negativa]: En este tipo de problemas el alumno tiene que usar la operación inversa de la suma [resta].

> "Tengo 145 chocolates. La maestra me quitó 35 para darles a mis compañeros. ¿Cuántos chocolates me quedan?".

El alumno **I** dice que el problema número 2, es un problema de "menos" y escribe la operación como se ve en la siguiente hoja de actividad.

Figura 23. Hoja de actividad del problema 2: tipo cambio [transformación negativa]



Problema 2. Tengo 145 chocolates. La maestra me quitó 35 para darles a mis compañeros. ¿Cuantos chocolates me quedan? 110

$$\begin{array}{r} 145 \\ -\ 35 \\ \hline 110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 145 \\ -\ 35 \\ \hline 110 \end{array}$$

Extracto del dialogo entre el estudiante “***I***” *y el entrevistador:* El estudiante “I” realizó la operación resta y explicó, “cinco menos cinco, cero; cuatro menos tres, uno; y este uno [1] se baja, ciento diez”. Me sale ciento diez [110].

Comentario: Aquí, el estudiante representa el problema con el algoritmo de la resta [como se ve en la figura 23]; puede identificar esta operación porque en el enunciado está escrito “me quitó”. En su hoja de actividad escribió dos veces la misma operación como se observa en la figura 23; no está seguro de aplicar la operación “restar”. Sin embargo, nota que está escrito en el enunciado del problema que la maestra “quitó 35 chocolates”, y esto le permite inferir que debe realizar una resta. “Es de menos” concluye.

Problema tipo: comparación

Problema 3. Este problema corresponde al tipo comparación de dos conjuntos en donde la incógnita está en la diferencia [conjunto referente menor que el comparado].

“María tiene 200 pesos y Carlos tiene 247 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que lo que tiene Ana María?”.

Extracto del dialogo entre el estudiante “***I***” *y el entrevistador*: El alumno **I** realiza una resta en la hoja del cuestionario. En la entrevista dice “Carlos tiene más, porque 247 menos 200 me da 47. Es de menos y anota 47. Al preguntarle qué se le pidió realizar, menciona que “menos”.

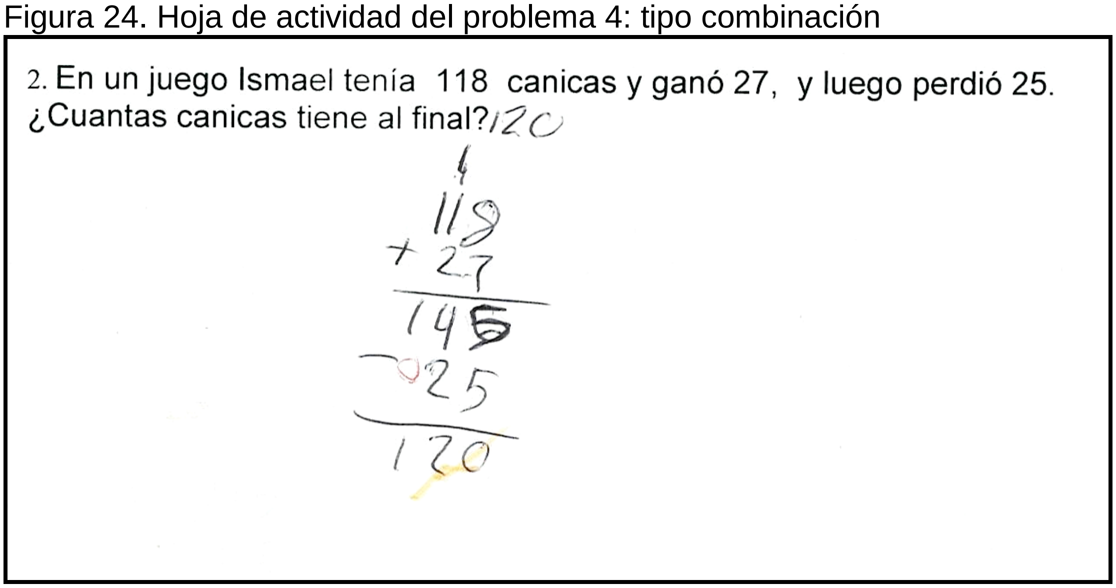
Problema tipo: combinación

Problema 4. Corresponde a un problema de combinación de transformaciones en donde la transformación de la primera y segunda cantidad es mayor que la tercera.

“En un juego Ismael tenía 118 canicas y ganó 27, y luego perdió 25. ¿Cuántas canicas tiene al final?”.

Extracto del dialogo entre el estudiante “***I***” *y el entrevistador:* En la entrevista clínica el alumno I dice “hice un más [de 118 + 27 = 145], después anota [145 – 25], puse que perdió “25”. Me dio “120”.

Figura 24. Hoja de actividad del problema 4: tipo combinación

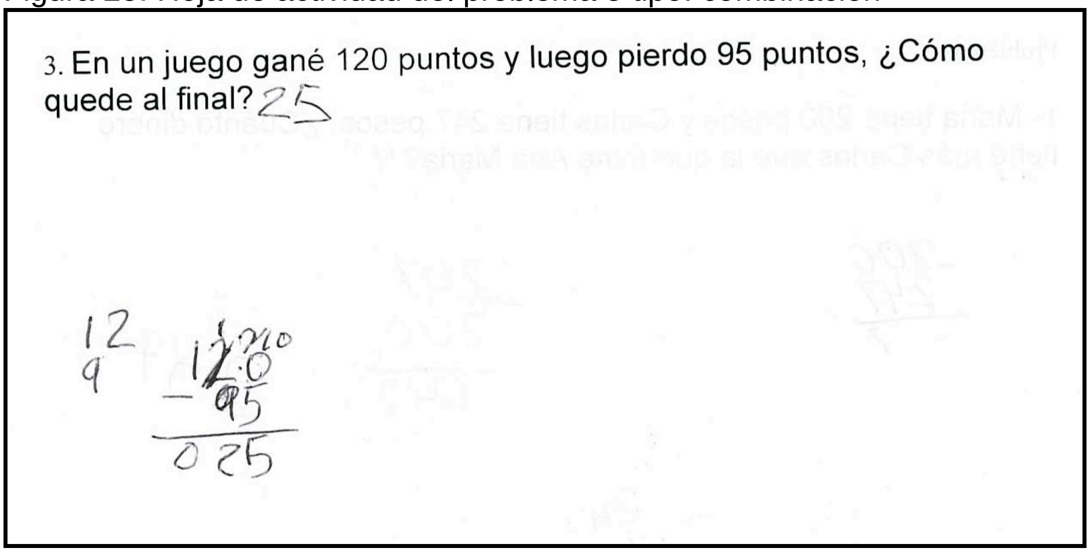


Problema tipo: combinación

Problema 5. Corresponde a un problema de combinación de transformaciones en donde la primera transformación es mayor que la segunda.

> “En un juego gané 120 puntos y luego pierdo 95 puntos, ¿Cómo quedé al final?”.

Figura 25. Hoja de actividad del problema 5 tipo: combinación



Extracto del dialogo entre el estudiante “***I***” *y el entrevistador*: El estudiante **I** argumenta: **“**hice menos, lo resté, mire 120 – 95. Como éste le presta uno a éste [el número 2 de las unidades de decena], se convierte en una decena. El número 12 se convierte en [11] y once menos nueve quedan dos”; anota 025 en la respuesta.

Comentario: En el proceso de resolución de problemas de estructura aditiva del alumno I, se observa que lo resuelve por medio del algoritmo. El estudiante va utilizando esta estrategia en cada problema. A veces, en el proceso de resolución identifica las palabras “quitar” o “perder” que le permiten realizar la representación distribuida del problema y así llegar a la solución. La interrelación de la representación externa e interna permite al estudiante abordar el problema, sobre todo en cómo usa y encarna esta representación externa.

Discusión

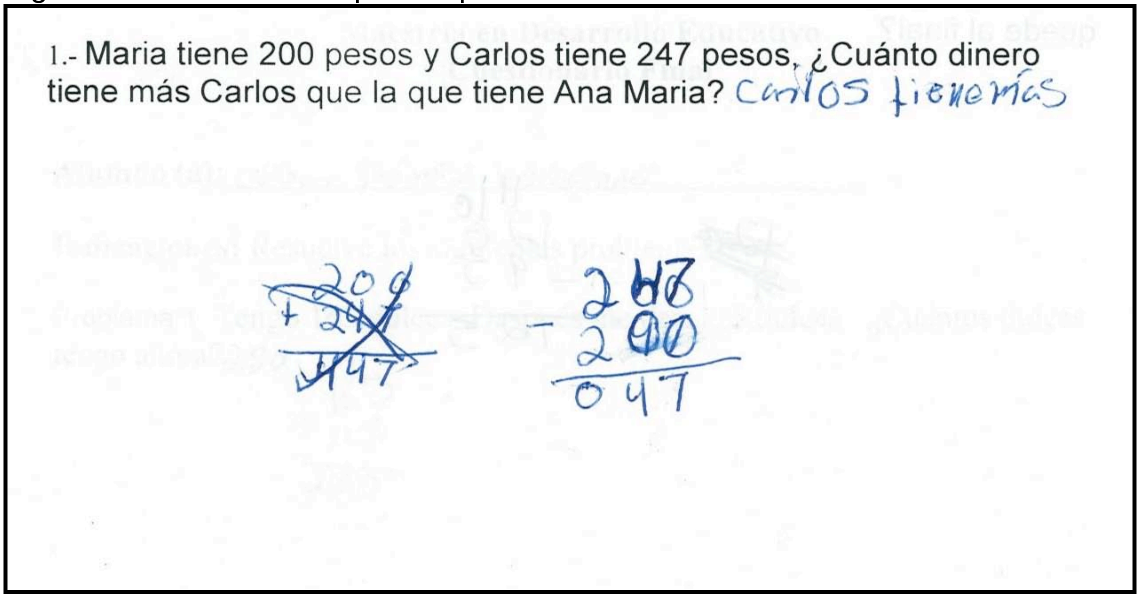
A partir de la teoría de representación en tareas distribuidas (Zhang y Norman, 1994), un concepto matemático se construye mediante la coordinación de dos representaciones, interna y externa. Para que esta construcción se logre, es importante que el alumno desarrolle la habilidad de representar, reflexionar y transformar el proceso de resolución de problemas. Este aprendizaje es clave para los alumnos de educación básica ya que le permitirá más adelante, en grados posteriores seguir utilizándolos.

La representación utilizada en tareas distribuidas puede ayudar a que el alumno caracterice cómo iniciar la solución del problema. Esto supone un proceso de representación interna donde el alumno planea una estrategia de solución que, junto a una representación externa le ayudarán a crear un espacio de representación al resolver el problema. Veamos a continuación cómo se da este proceso:

En el **problema 3.** [Comparación de dos conjuntos, donde la incógnita está en la diferencia, conjunto referente menor que el comparado]: “María tiene 200 pesos y Carlos tiene 247 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que lo que tiene María?”.

En el problema de comparación, el alumno **C** comienza el proceso de resolución identificando la palabra “más” e infiere que hay que realizar una suma. La palabra “más” implica para el alumno realizar una adición; enseguida anota los algoritmos de esta operación como se observa en la siguiente figura.

Figura 26. Problema 3: tipo comparación


1.- Maria tiene 200 pesos y Carlos tiene 247 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que la que tiene Ana Maria? Carlos tiene más

~~200 + 247 = 447~~

247 − 200 = 047

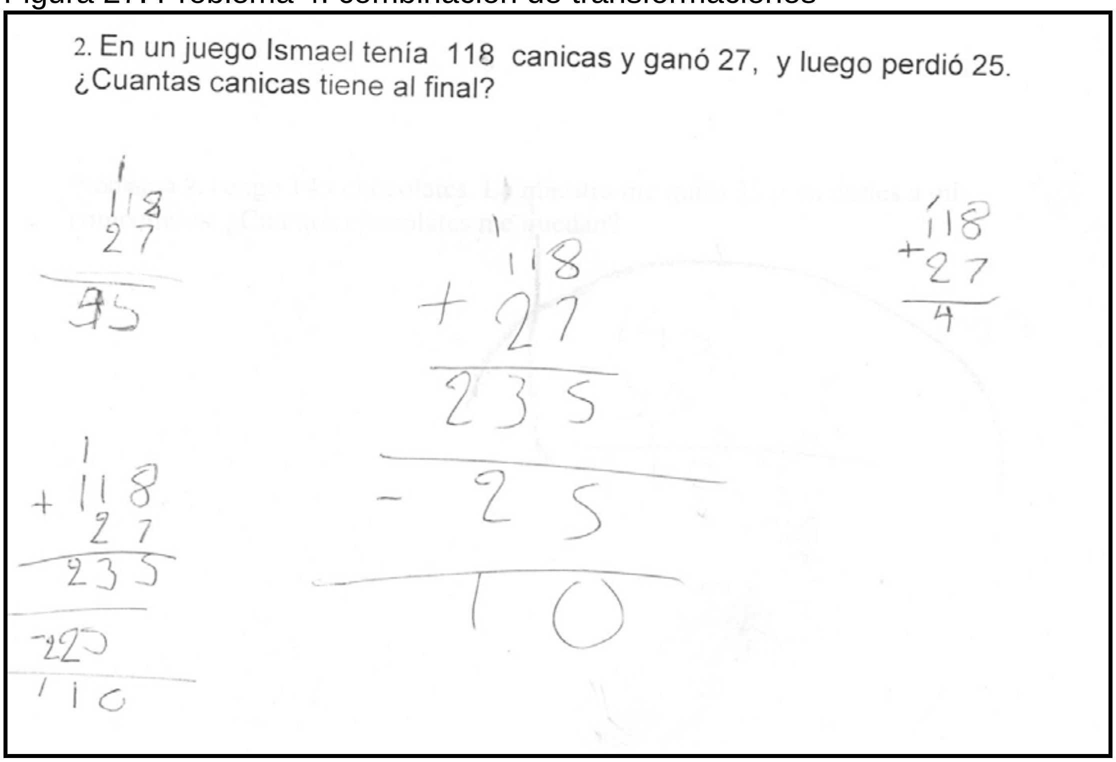
En la entrevista el alumno C menciona “me falta (terminar de resolver el problema), no me dio el resultado que esperaba”; y agrega “me equivoqué, le vamos a restar”. Primero anota el algoritmo de la suma [200+247], después coloca la cifra mayor [247-200], y escribe el número 047 como resultado. En este proceso el alumno idea dos vías de resolución: inicialmente anota el algoritmo de la suma guiado por la palabra “más”; después se da cuenta de que se equivocó y anota otra operación, el de la resta.

Todo el proceso de representación implica para el alumno representar el problema internamente a partir de los datos y números contenidos en el mismo; después, busca representarlos externamente en una operación [sumar y/o restar]. En este proceso hay una interrelación de representaciones, lo que Zhang y Norman (1994) denominan *efecto representacional;* la acción del alumno se fija hacia un determinado objetivo. La representación no sólo sirve para captar una idea, sino para realizar un proceso de elaboración de objetos [matemáticos] directamente perceptibles de cierta realidad (Martí, 2003: p.23).

Problema 4. Corresponde a un problema de combinación de transformaciones [primera y segunda cantidad mayor que la tercera]. “En un juego Ismael tenía 118 canicas y ganó 27, y luego perdió 25. ¿Cuántas canicas tiene al final?”.

La alumna **Y** registra cuatro veces el algoritmo con diferentes acercamientos; no puede operar adecuadamente todas las operaciones. Anota diferentes resultados [55; 4; 110; 10]; vuelve a escribir las cantidades [118 + 27] de la primera transformación; después anota [235 – 25] en la segunda transformación, pero tampoco logra operar correctamente. Hay una confusión en dónde colocar las unidades de decena, no coloca debidamente “se lleva uno” en el segundo orden; por esta razón obtiene 235 como resultado de esta primera transformación. A este resultado anota [– 25], pero, tampoco logra operar.

Figura 27. Problema 4: combinación de transformaciones

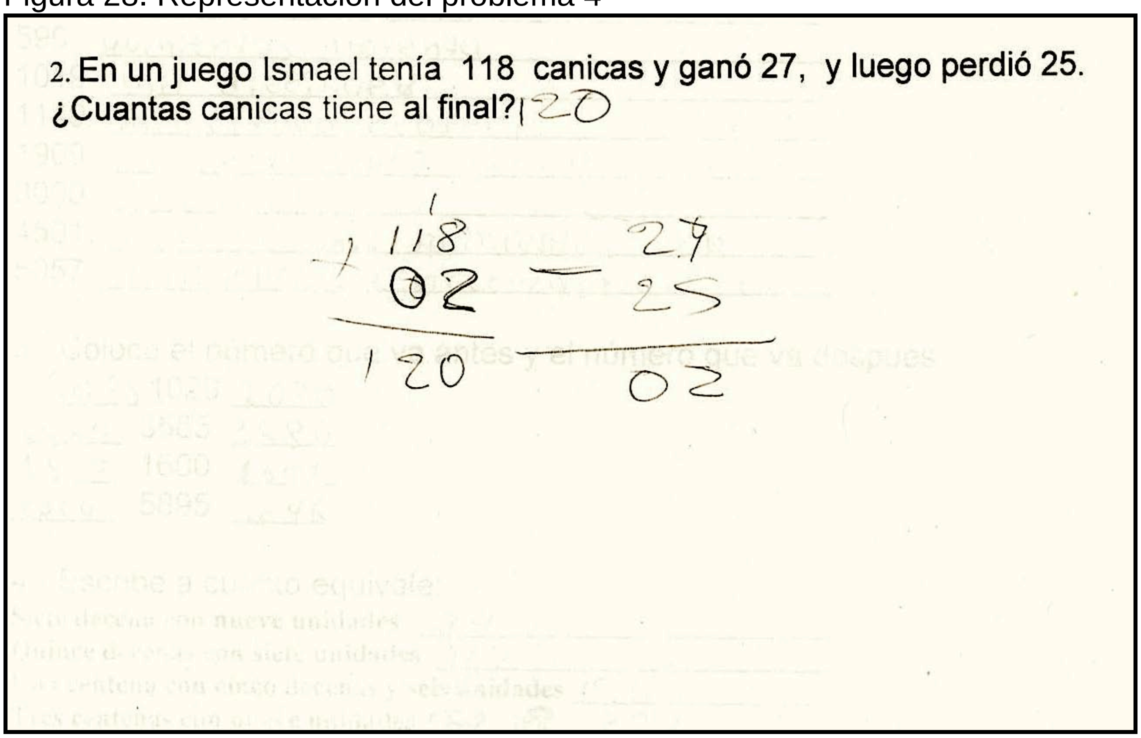


La manera en cómo organiza el algoritmo para empezar a operar el problema no le permite en un primer momento lograr la solución. La primera representación [118, 27 del lado izquierdo] que realiza le permite más adelante modificarlo. Es durante esta experiencia y en términos de Vergnaud (2000) que el sujeto re-organiza su acción. El alumno emplea esquemas de acción que funge como un registro que le permite estructurar sus razonamientos. Sin embargo, en este proceso no hay un descubrimiento, combinación ni reestructuración, que le permita al alumno reorganizar la actividad.

Extracto del dialogo entre el estudiante “***Y***” *y el entrevistador:* La alumna sostiene que le dio como resultado “diez” [10]; después dice “cuatro”. “Es de sumar” dice refiriéndose a la primera operación que hizo; siete más ocho, quince; escribe el número 5 y anota el número 1 en las unidades de millar. Por esta razón obtiene 235, a éste le resta 25 y le da como resultado 10.

Representación distribuida del problema 4

Figura 28. Representación del problema 4



Comentario: Se observa que la estudiante E representa el problema a partir de las canicas que Ismael ganó [27] con las que perdió [25]. Ésta es otra vía de solución. Ella infiere que tiene que realizar una sustracción con estas dos cantidades; coloca los números de la cifra adecuadamente para empezar a operar. Se observa que ella pasa por una organización [interna y externa] de representación que le permite representar y escribir la operación de la resta de manera correcta. En términos de Zhang y Norman, (1994), hay una interrelación de la representación interna con la externa, los autores sostienen que estas dos representaciones son partes indispensables al resolver un problema de matemática.

La aplicación del cuestionario final consistió en ver la evolución de los conocimientos de los alumnos frente al sistema de numeración decimal y de resolución de problemas. La idea central fue que los estudiantes pensaran cómo los números comienzan a representarse y a ser conceptos abstractos.

La resolución de problemas de estructura aditiva permitió a los niños edificar su pensamiento. Por medio de variadas situaciones pudieron desarrollar esta actividad fundamental. Estas nociones son la base fundamental en la educación primaria y constituyen el inicio del conocimiento de otros contenidos matemáticos.

Los problemas de estructura aditiva envuelven esquemas conceptuales muy complejos; por ello, los alumnos tuvieron que apoyarse y desarrollar diferentes estrategias para llegar con éxito al resultado. Apoyarse en experiencias pasadas les permitió resolverlos.

Para los alumnos las palabra “más que” y “menos que” son términos que en primera instancia no se descifran; éstas son descifrados por ellos gradualmente, y los implica a usar la suma o la resta para resolver los problemas; pero, no necesariamente es lo que se les solicita en la oración del problema. Por ello, tienen que identificar la interrogante para reflexionar sobre lo que se les está pidiendo.

La resolución de problemas se considera por muchos investigadores una vía de aprendizaje; en este proceso hay una estrecha relación con las representaciones. Al respecto, Janvier (1987) (citado por Benitez y Garcia, 2011) considera que las representaciones son herramientas fundamentales para establecer comunicación con el entorno, además, permite explorar diferentes formas de significado, lo cual es básico en la adquisición de un objeto, sobre todo en la materia de matemáticas.

Conclusión

En el trabajo de investigación se indagó e identificó: el sistema de numeración decimal, el sistema de numeración vigesimal, y la resolución de problemas de estructura aditiva con alumnos de 2^{do} y 3^{er} grados de educación básica del sistema educativo nacional.

El análisis de los datos obtenidos en la presente investigación nos permite extraer las siguientes conclusiones generales:

Resultados de la primera etapa del estudio: cuestionario inicial

En esta etapa, se observa que los niños de segundo y tercer grados de educación primaria desarrollan ideas intuitivas de dos sistemas de numeración: decimal y vigesimal. Se conjetura que parece existir un predominio de las nociones del sistema decimal indo-arábigo sobre el sistema vigesimal. Una posible explicación es que en la escuela los alumnos de esta localidad sólamente son instruidos en el sistema decimal indo-arábigo; entonces ellos utilizan esta información para desarrollar la escritura de los vocablos del sistema de numeración del mixteco, que es un sistema de numeración vigesimal y por lo tanto tiene otra lógica.

Los alumnos poseen conocimiento oral del sistema vigesimal que aún no han desarrollado su escritura en la escuela. Sin embargo, los niños desarrollan la escritura de los números de 1 al 34 de acuerdo con el sistema de numeración vigesimal del mixteco, pero a partir del 35 mezclan su conocimiento del sistema decimal con el vigesimal para escribir los números.

Por otra parte, se encontró que existe una relación entre la forma que los niños escriben los números del sistema de numeración decimal y el desarrollo del pensamiento matemático a temprana edad.

Este estudio-intervención consideró la relación entre el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento infantil de los alumnos de 2do y 3er grados, con el propósito de entender el proceso cognitivo de sus aprendizajes. En esta primera parte, se indagó e identificó las nociones de los alumnos sobre la adquisición de las reglas formales del sistema de numeración decimal y vigesimal; el sistema decimal indo-arábigo funge como una herramienta básica para acceder al manejo de los algoritmos. Sin embargo, habría que preguntar qué implicaciones tiene cuando hay otro sistema de numeración en escuelas bilingües del sub-sistema de educación indígena.

Considero que es necesario identificar y conocer las concepciones infantiles para una enseñanza más completa de los contenidos matemáticos que se abordan en los primeros grados de educación primaria. El conocer estas concepciones le permitiría al profesor abordarlos con conocimiento de causa, con otras actividades, estrategias, y acercamientos. De igual modo, le permitiría identificar los tipos y subtipos de problemas lo cual le apoyaría a plantearlos de otra forma.

Es pertinente reflexionar si en el sub-sistema bilingüe mexicano, sobre todo en escuelas indígenas, existe la educación “bilingüe”; vale decir, es necesario indagar qué se enseña a los alumnos de su propia lengua para que sus conocimientos previos sean aprovechados en el proceso de enseñanza. El sistema vigesimal oral mixteco podría ser un puente hacia el acceso del sistema de numeración decimal indo-arábigo. Valdría la pena considerar este punto para beneficio de los niños indígenas del país, pues los dos sistemas ofrecen características comunes; por ejemplo, propiedades aditivas y multiplicativas, que bien podrían ser parte del desarrollo del pensamiento matemático del alumno.

Resultados de la segunda etapa del estudio: secuencia didáctica

En la sesión inicial de la secuencia didáctica, las actividades permitieron desarrollar las nociones como decenas, centenas y la posibilidad de ver las unidades como parte de ambas agrupaciones. Además, el trabajo con objetos es un soporte de representación externa que permitió a los alumnos consolidar estas nociones. La escritura de los números permitió poco a poco construir sus conocimientos sobre el sistema de numeración decimal. Asimismo, se observó en la sesión intermedia que los alumnos comprendieron los problemas planteados y utilizaron correctamente el algoritmo para resolver dichos problemas. Por ejemplo, se pudo observar como la alumna E pudo emplear correctamente los algoritmos de la resta y suma para resolver el primer problema que era de tipo “cambio”.

Esta secuencia desarrolló la producción de conocimientos sobre las reglas del sistema decimal, sobre el aprendizaje del algoritmo y resolución de problemas de estructura aditiva. Además, se desarrolló las producción de ideas intuitivas de los alumnos junto con las relaciones contenidas con el número.

En general, cabe afirmar que el desarrollo de la secuencia didáctica fue favorable, y permitió a los alumnos estar en contacto con diferentes situaciones matemáticas.

Resultados de la tercera etapa del estudio: cuestionario final

El cuestionario final sobre escritura numérica decimal indo-arábigo de decenas, centenas y unidades de millar mostró que los alumnos pueden escribirlas de manera apropiada, salvo el alumno **C** que escribe el 1100 como 10100. Pero esta escritura forma parte de las ideas que se van desarrollando en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Con respecto a la resolución de problemas de estructura aditiva, los estudiantes tuvieron que apoyarse en representaciones tanto externa como interna para desarrollar diferentes estrategias y llegar con éxito al resultado. Además se apoyaron de sus experiencias pasadas para resolver los problemas; con esta representación crearon un espacio de representación del problema a resolver.

Los aprendizajes obtenidos dejan ver que los alumnos pueden desarrollar conocimientos muy favorables con respecto a la adquisición del sistema de numeración decimal indo-arábigo y en la resolución de problemas de estructura aditiva.

Conclusiones de la primera etapa, diseño y cuestionario final

Es evidente que la escuela desempeña una función primordial en la comprensión de la materia de matemáticas. Sin esta, muchos de los conocimientos de esta disciplina serían poco factibles que se llevaran a cabo. Ahora bien, es importante el trabajo especifico de temas tan importantes como el aprendizaje del sistema de numeración decimal, en tanto desempeña el principio de vínculo de muchos conocimientos posteriores como por ejemplo, el uso del algoritmo en la resolución de problemas aditivos.

En este trabajo se asume que para poder hacer mejoras a la enseñanza de las matemáticas, es necesario conocer y entender mejor los procesos de adquisición de los alumnos que están en escuelas de educación formal. Sobre todo aquellos que están en contextos poco favorecidos por el sistema educativo nacional. Es imprescindible analizarlos desde aspectos cognitivos, didácticos, socioculturales, entre otros, para que estos estudios incidan de manera importante en la mejora de los aprendizajes de contenidos matemáticos que se enseñan a los alumnos.

El uso de la representación en la resolución de problemas aditivos permite al alumno ser reflexivo, realizar conjeturas y eventualmente dar argumentos del aprendizaje del objeto matemático. Ésta permite reorganizar y transformar los procesos cognitivos como lo señalan Brizuela y Cayton.

La representación que emplearon los alumnos fueron: la gráfica y la numérica. Asimismo, para exponer y ordenar sus conocimientos usaron objetos modelados ya sea dibujándolos, en otros casos usando la escritura canónica del algoritmo con la intención de asignarle un significado al objeto matemático que estaban intentando resolver.

Consideraciones finales

Los alcances de esta investigación dejan ver que se puede trabajar la resolución de problemas de estructura aditiva, por ejemplo, desde las nociones sobre el sistema de numeración decimal hasta el uso del algoritmo, también, en este proceso es muy importante hacer notar el trabajo con distintos materiales y situaciones.

Otra consideración que queda inconclusa en el proceso de enseñanza-aprendizaje es el sistema de numeración vigesimal, un tema importante en el medio indígena si se considera que el Estado mexicano debe promover la educación bilingüe para esta población.

El sistema de base 10 puede servir de enlace para el aprendizaje del sistema vigesimal y viceversa. Por otro lado, reconocer el vocablo lingüístico del sistema oral vigesimal permitiría desarrollar un aprendizaje más solido del conocimiento matemático de estos dos sistemas hacia la resolución de problemas de estructura aditiva.

En la escuela se debe de incluir una formación solida, en donde se considere una formación didáctica, psicológica, lingüística y sociocultural, entre otras. El proceso de revalorización de las nociones de los grupos originarios permitiría afianzar su identidad y educación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar V, M. y J. I. Navarro, (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de psicología general y aplicada*. 53 (11), pp. 63-83.

- Ávila, A. (2005). ¿Resolver problemas o responder al profesor? Sobre la componente cognitiva y mediativa de las practicas de enseñanza. Revista *Entre maestros*. Vol. 5. No. 14. pp. 67–77.

- Ávila, A., D. Block, y A. Carbajal, (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En: A. D. López y Mota (coord.) *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje*. Tomo I. pp. 49–170. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

- Backhoff E, E., E. Andrade, A. Sánchez, y M. Peon, (2007). *El aprendizaje en tercero de primaria en México: español, matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales*. México, D.F: INEE.

- Barocio, R. (1996). La enseñanza de las matemáticas en el nivel preescolar: la visión psicogenética. *Educación Matemática*. 8, (3), pp. 50-62.

- Barriga, F. (2005). Historia Natural de los sistemas de numeración. En: M. Alvarado y B. M. Brizuela (Comps.). *Haciendo números: las notaciones numéricas vistas desde la psicología la didáctica y la historia*. México: Paidós.

- Bedoya, E. y M. Orozco, (1991). El niño y el sistema de numeración decimal. *Comunicación, lenguaje y educación*. 11, (12). pp. 55-62.

- Benítez P, A., y M. García R, (2011). La importancia de múltiples representaciones en la formulación de conjeturas. COMIE. México D. F.

- Bermejo, V., Ma. O. Lago, P. Rodríguez, C. Dopico, y Ma. J. Lozano, (2003). *Un programa de intervención para la mejora del rendimiendo matemático*. España. Universidad Complutense de Madrid.

- Brizuela, B. (2004). *Mathematical Development in young children: exploring notations*. NY: Teachers College Press.

- Brizuela, B. (2006). *Desenvolvimento Matemático na crianca: explorando notações*. Brasil: Artmed.

- Brizuela, B. y G. Cayton, (2010). Anotar números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación. *Cultura y Educación*, Vol. 22, No 2. pp.149-167.

- Broitman, C. (1999). *Las Operaciones en el Primer Ciclo. Aportes para el Trabajo en el Aula*. Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

- Caballero, G. (2005). La numeración de *Tu´un Savi*". Revista *Tu´un Savi*. Números 7, 8 y 9. Huajuapan de León, Oaxaca.

- Caballero, G. (2008). Diccionario del idioma Mixteco "*Tutu Tu´un Ñuu Savi*". México. Universidad Tecnológica de la Mixteca.

- Cantero, A., A. Hidalgo, B. Merayo, F. Primo, A. Sanz, y A. Vega, (2003). *Resolución de problemas aritméticos en educación primaria*. Recuperado de: http://www.omerique.net/twiki/pub/Recursos/DocumentoModularArticuladoDeMametaticasEnEducPrimaria/Resolucin_problemas_Ponferrada.pdf

- Castro, E. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. *Memoria de Tercer Ciclo.* Universidad de Granada, Facultad de Ciencias.

- Castro, E., L. Rico, y E. Castro, (1995). Adquisición del concepto de número. En: *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. pp. 1–25. Bogotá: Editorial Iberoamericana,

- Castro, E., L. Rico, y E. Castro, (1996). *Los números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

- De Bengoechea, N. (1997). Las numeraciones indígenas de México. *Correo del Maestro*. Vol. 1. No. 12. pp. 21-36.

- De Bengoechea, N. (2008). Intercultural education and indigenous education in Mexico, an experience in Oaxaca. ICME 11, 2008, Monterrey, México. Recuperado de: tgs.icme11.org/document/get/805

- Delval, J. (1991). *Descubrir el pensamiento de los niños. Introducción a la práctica del método clínico*. Barcelona. Paidós.

- Flores, R. C., A. Farfán, y C. Ramírez, (2004). Enseñanza de una estrategia para la solución de problemas de adición y sustracción en alumnos con problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Psicología*. Vol. 21. No. 2. pp. 179-189.

- Flores, R. C. (2005). El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Revista Educación Matemática*. 17 (2). pp. 7-33.

- Flores, R. C. (2002). *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos,* *esquemas y representación*. [Tesis doctoral inédita]. UAA. Aguascalientes.

- Fuenlabrada, I. y A. Ávalos, (1996). Cómo se resuelven los problemas de matemáticas, *Educación 2001*, 19, pp. 32-35.

- Gallego C., M. Pons, C. Alemany, M. Barceló, M. Guerra, M. Orfila, C. Pons y N. Triay, (2005). *Repensar el aprendizaje de las matemáticas: matemáticas para convivir comprendiendo el mundo*. España. Grao.

- García, G. y N. Santarelli, (2004). Los procesos metacognitivos en la resolución de problemas y su implementación en la práctica docente. *Educación Matemática*. Vol. 2. Núm. 16. pp. 127-141.

- Gómez, B. (1988). La numeración: evolución y comparación de sistemas. En: *Numeración y cálculo*. pp.31-59. Madrid. Ed. Síntesis.

- Gómez, B. (2006). Representación y comunicación de los números: los sistemas de numeración. Recuperado de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig2/lanumeracion.pdf

- Hollenbach, F. Y E. Erickson, (2000). *Los números del mixteco antiguo: Mixteco de Magdalena Peñasco*, México, ILV.

- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE]. (2007). *PISA 2006 en México*. México, INEE.

- Kamii, C. (1994). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid, Visor.

- Lerner, D. y P, Sadovsky, (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En: Cecilia Parra e Irma Saiz (Comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Paidós.
- *Ley General de Derechos Lingüísticos de los Pueblos Indígenas*, (2003). México, INALI.

- Luceño, J. L. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula*. España, Aljibe.

- Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación*. Madrid, España. Machado Libros.

- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y la Resta*. España, Síntesis.

- Maza, C. (1989). *Sumar y Restar: El modelo de la enseñanza y aprendizaje de la suma y de la resta*. Madrid. Visor.

- Micalco, M. (2009). *Los usos del sistema numérico vigesimal y su interrelación con el sistema numérico decimal en las prácticas comunitaria de los jóvenes mayas: un estudio etnográfico ubicado en la región Tseltal de los altos de Chiapas*. Trabajo presentado en la *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*. Veracruz. México.

- Moreira, M. A. (2002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigações em Ensino de Ciências*. Vol. 7. No. 1. pp. 7-27.

- Moreno, L., y G. Waldegg, (2004). *Aprendizaje, matemáticas y tecnología: una visión integral para el maestro*. México: Santillana.

- Nunes Carraher, T. y P. Bryant, (1998). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI.

- Orozco, M. (2000). Los niños y sus dificultades con el sistema rotacional de base diez. *Revista de Educacao*. 3. pp. 20-31.

- Parra, C. y S. Irma, (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, España: Piados.

- Pontecorvo, C. (1996). La notación y el razonamiento con números y nombres en el periodo preescolar y en la escuela primaria. *Infancia y Aprendizaje*. No. 74, pp. 3-24.

- Puig, L. y F. Cerdán, (1989). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: síntesis.

- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Gómez, P., Rico, L. *Educación Matemática*. Bogotá: Iberoamerica.

- Rivera, A. y A. Codina, (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. En Pedro Gómez y Luis Rico (eds.). *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al Profesor Mauricio Castro*. pp. 125-135. Granada, España.

- Rodríguez Palmero, M. L y M. A. Moreira, (2002). Modelos mentales y esquemas de célula. *Investigações em Ensino de Ciências*. Vol. 7. No. 1. pp. 77-103.

- Sampieri, R., C. Fernández-Collado, y P. Baptista, (2006). *Metodología de la Investigación*. 4ª edición. México: Mc Graw Hill.

- Secretaria de Educación Pública, (1993). *Plan y Programa de Estudio de Educación Primaria*. México, SEP.

- Secretaria de Educación Pública, (1996). *Libro para el maestro. Matemáticas tercer grado*. México, SEP.

- Secretaria de Educación Pública, (2003). *Libro para el maestro. Matemáticas segundo grado*. México, SEP.

- Secretaria de Educación Pública, (2009). *Plan y Programa de Estudio de Educación Primaria*. México, SEP.

- Terigi, F. y S. Wolman, (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza”. *Revista iberoamericana de educación*. No. 43. pp. 59-83.

- Vergnaud, G. y C. Durand, (1983). Estructuras aditivas y complejidad psicogenética. En: C. Coll (comp.) Psicología *genética y aprendizajes escolares*. Madrid. Siglo XXI.

- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique de Mathématiques*, Vol 10, No 2,3, pp. 133-170.

- Vergnaud, G. (1997). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México. Trillas.

- Vergnaud, G. (2000). *Constructivism et apprentissage des mathematiques*. Trabajo presentado en el congreso sobre constructivismo en Ginebra Suiza.

- Vergnaud, G. (2007). ¿En que sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em Ensino de Ciências.* Vol. 12. No 2. pp. 285-302.

- Zhang, J. (1992). *Distribuited representation: the interaction between internal and external information*. Unpublished Ph. D dissertation. San Diego. University of California.

- Zhang, J., & D. Normand, (1994). Representations in distributed cognitive tasks. *Cognitive Science, 18* (1), pp. 87-122.

ANEXOS

ANEXO 1. Cuestionario de escritura numérica: sistema de numeración decimal[3]

CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

Nombre:_________________________________ Edad:_____________

Escuela:____________________________ Grado:_____________________

Fecha____________________________

1.-Cuenta del 1 al 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	68	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.- Dictado de números.

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________ ____________

____________ ____________ ____________ ____________

3.- Escritura de números

6 ______________ 19 ______________ 109_________________

5 ______________ 39 ______________ 199_________________

9 ______________ 50 ______________ 1019_______________

3 ______________ 110 ______________ 3585_______________

10 ______________ 115 ______________ 1000_______________

5895______________

[3] El cuestionario pretende indagar las nociones sobre la escritura numérica del sistema decimal. Desde el manejo de la secuencia numérica, la lectura y escritura de los números.

4.- Coloca el número que va antes y el número que va después.

_______1_______
______ 5 _______
______ 7 _______
______ 9 _______
______ 11 ______
______ 15 ______
______ 32 ______
______47 _______
______101 ______
______110 ______
______149______
______ 199______
______1019______
______3585______
______1000______
______5895______

5.- Ordena de menor a mayor los siguientes números

2-4-6-3-5-7-9 ____

14-18-15-10-13-16-17 ____

101-105-100-150-104-121-110__________________________________

1000-1019-3585-2653-2027-3001-5321___________________________

5.-Ordena de mayor a menor los siguientes números

2-4-6-3-5-7-9 ____

14-18-15-10-13-16-17 ____

101-105-100-150-104-121-110__________________________________

1000-1019-3585-2653-2027-3001-5321___________________________

ANEXO 2. Cuestionario del sistema de numeración oral mixteco

Alumno (a):_________________________________ Fecha: _________

Hora de Inicio________________ Hora de término: _________

Instrucción:

1. Cuenta de manera oral los números en mixteco

2.- Escribe los números en mixteco.

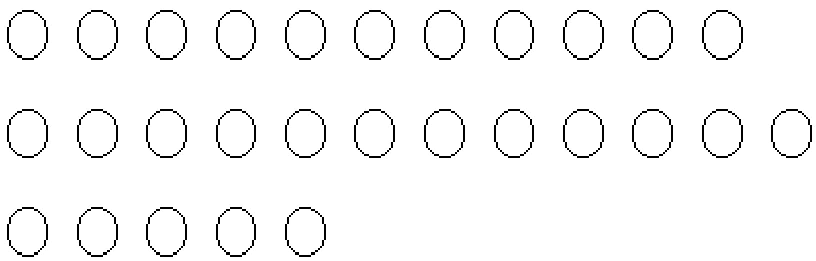
ANEXO 3. Cuestionario diagnóstico: problemas de estructura aditiva

NOMBRE: ____________________ **EDAD:** __________

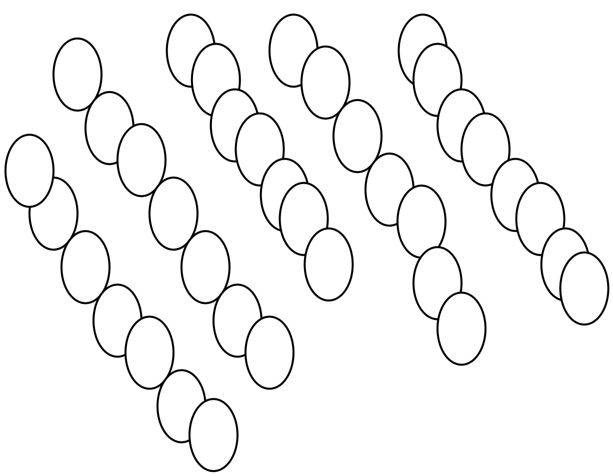
ESCUELA: ______________________________

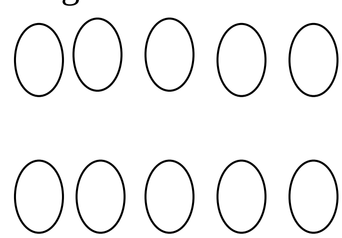
GRADO: __________ **FECHA:** ____________________

1CA[4].- Juan tiene 15 canicas y le dan 13 canicas más ¿Cuántas canicas tendrá Juan en total?



2CA.- La mamá de María tenía 36 huevos, dio 10 a su amiga Mercedes. ¿Cuántos huevos le ha quedado a la mamá de María?

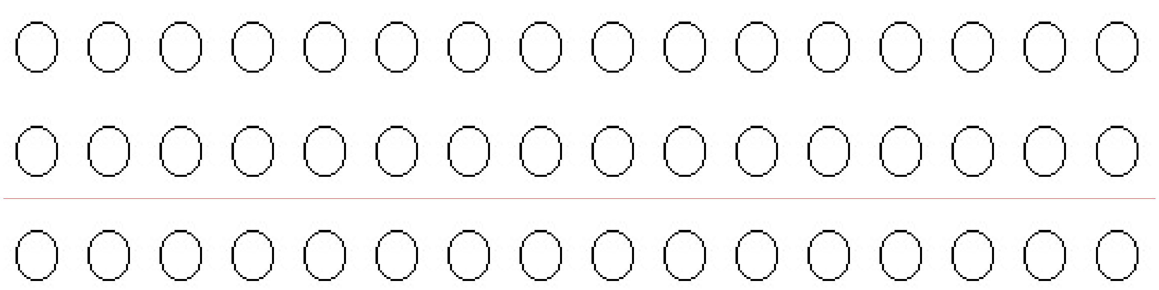




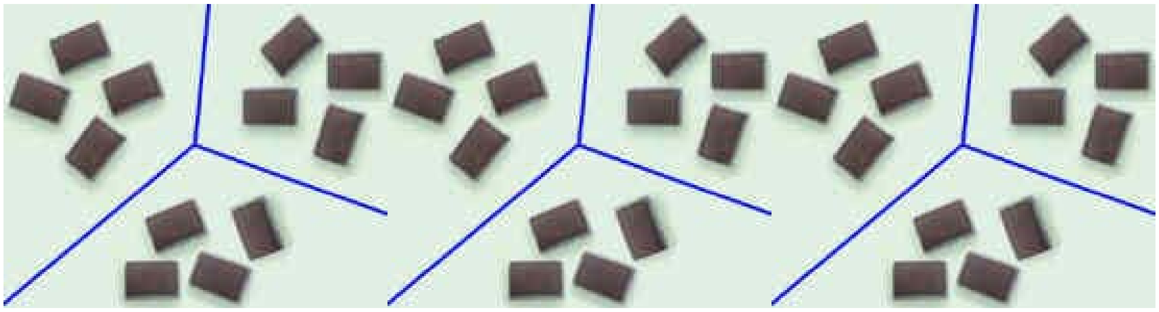
[4] CA=CAMBIO; CO=COMBINACIÓN; CP=COMPARACIÓN; IG=IGUALACIÓN.

3CA.- El señor de la papelería la “Esquinita” tiene 4 docenas de lápices ¿Cuántos lápices necesita para tener 60 lápices?

4CA.- Carlos tiene 48 canicas. Da algunos a su amigo José y ahora tiene 36 canicas ¿Cuántas canicas dio a su amigo José?

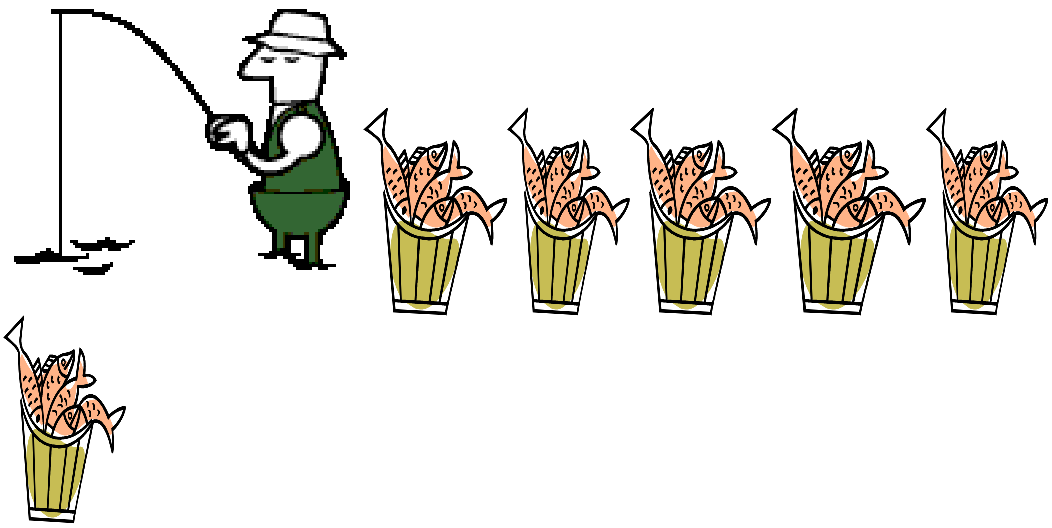


5CA.- Andrés tiene algunos chocolates y le dan 1 docena más. Tiene entonces 36 chocolates. ¿Cuántos chocolates tenía al principio?

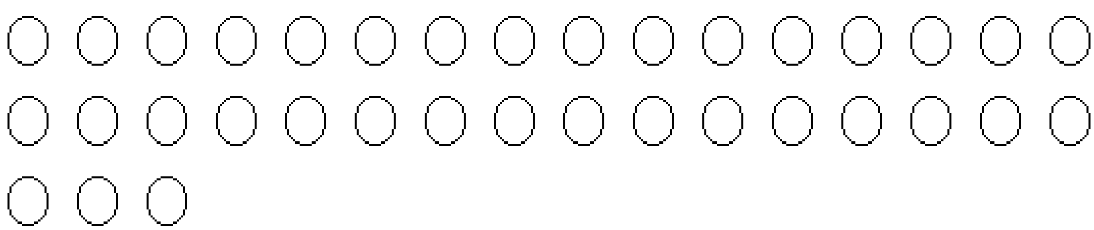


6CA.- Dulce tiene algunos caramelos. Da 15 a un compañero y le quedan 20 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía al principio?

1CO.- En el río Papagayo Luis pesca 31 pescados. De ellos 18 son mojarras y el resto son truchas ¿Cuántas truchas pescó Luis?

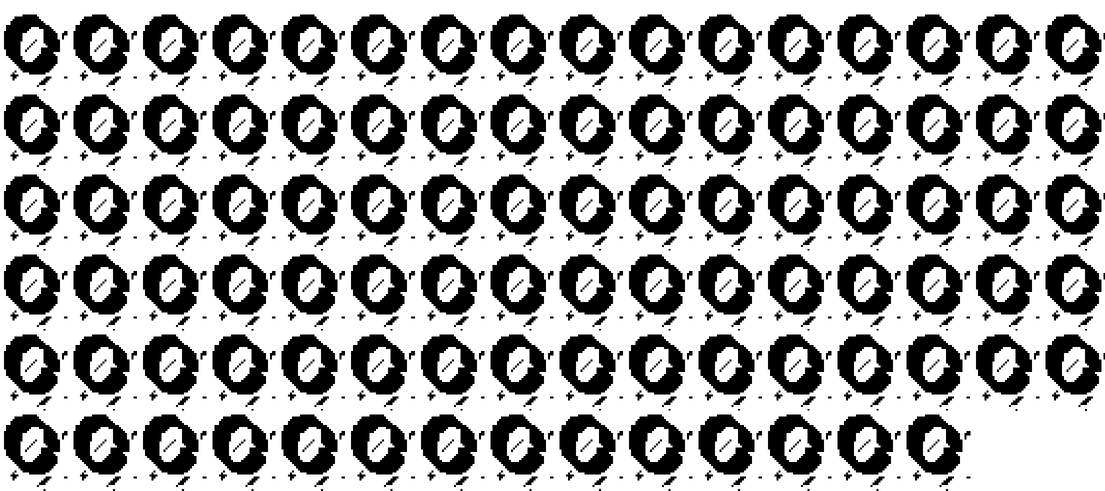


2CO.- Irene tiene 35 chicles y 15 paletas ¿Cuántos dulces hay en total?



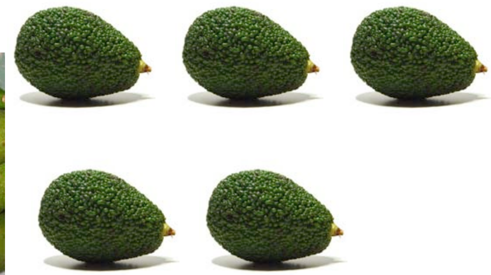
1CP.- Beto tiene 200 pesos, María tiene 70 pesos ¿Cuántos pesos tiene Beto más que María?

2CP.- José tiene 90 canicas y Juan 47 canicas ¿Cuántas canicas tiene Juan menos que José?



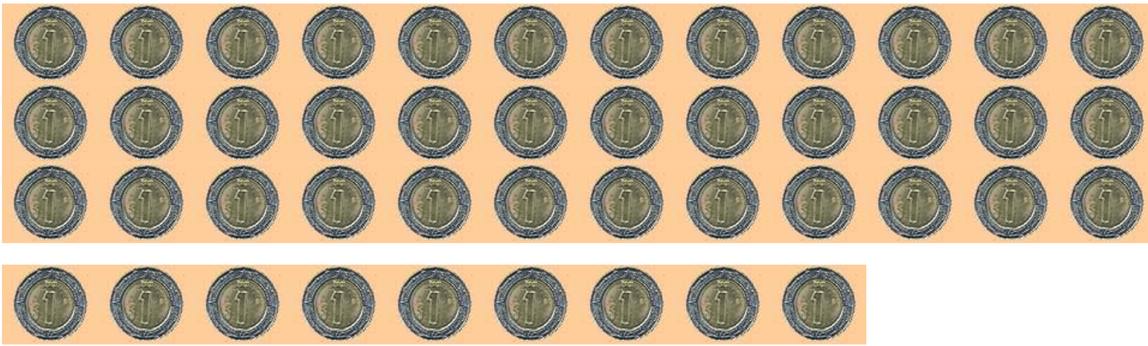
3CP.- Rosa tiene 80 aguacates, Juan tiene 25 más que Rosa ¿Cuántos aguacates tiene Juan?





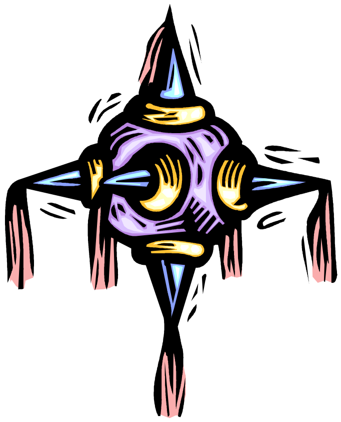
4CP.- Benjamín tiene 24 colores. Marcos tiene 4 colores menos que Benjamín. ¿Cuantos colores tiene Marcos?


5CP.- Pedro tiene 46 pesos. Tiene 20 pesos más que Chucho. ¿Cuántos pesos tiene Chucho?



6CP.- Elena tiene 34 paletas. María tiene 9 menos que Elena. ¿Cuántas paletas tiene Elena?

1IG.- María compró una piñata que le costó 35 pesos. Rosa tiene 25 pesos, ¿Cuántos pesos tendrá que pedir Rosa para tener lo mismo que María?

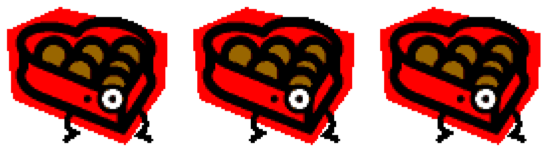


2IG.- Carmen tiene 85 globos y Cesar 74 globos ¿Cuántos globos tendrá que romper Carmen para tener igual número que Cesar?

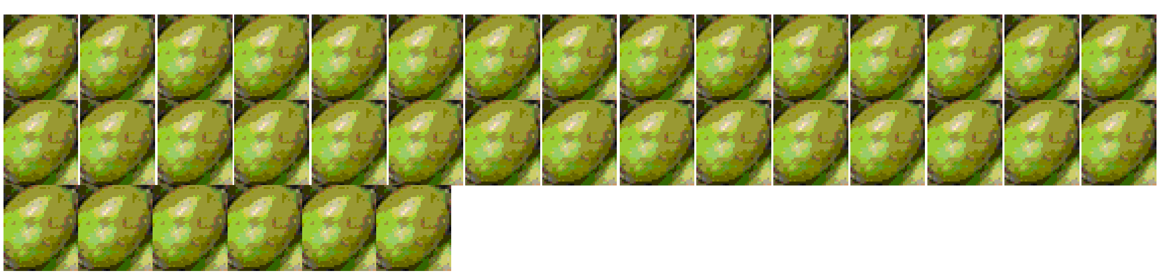
3IG.- Andrés está leyendo un libro y va en la página 36. Juan lleva 6 páginas más que Andrés. ¿Qué pagina va Juan?

4IG.- Dos hermanos venden calcetines. Tomás lleva 15 pares de calcetines para vender, si su hermano Juan deja 10 pares de calcetines tendrán ambos igual número de pares de calcetines. ¿Cuántos pares de calcetines tiene Juan?


5IG.-Lucía tiene 28 chocolates. Si María compra 6 más tendrá igual número que Lucía. ¿Cuántos chocolates tiene María?

6IG.- Miguel compró 36 tunas. Si deja 6 tunas tendrá igual número que Pablo. ¿Cuántas tunas tiene Pablo?



ANEXO 4. SECUENCIA DIDÁCTICA

Alumno (a):____________________________________ Fecha: __________

Hora de inicio __________ Hora de término: __________

Primera parte

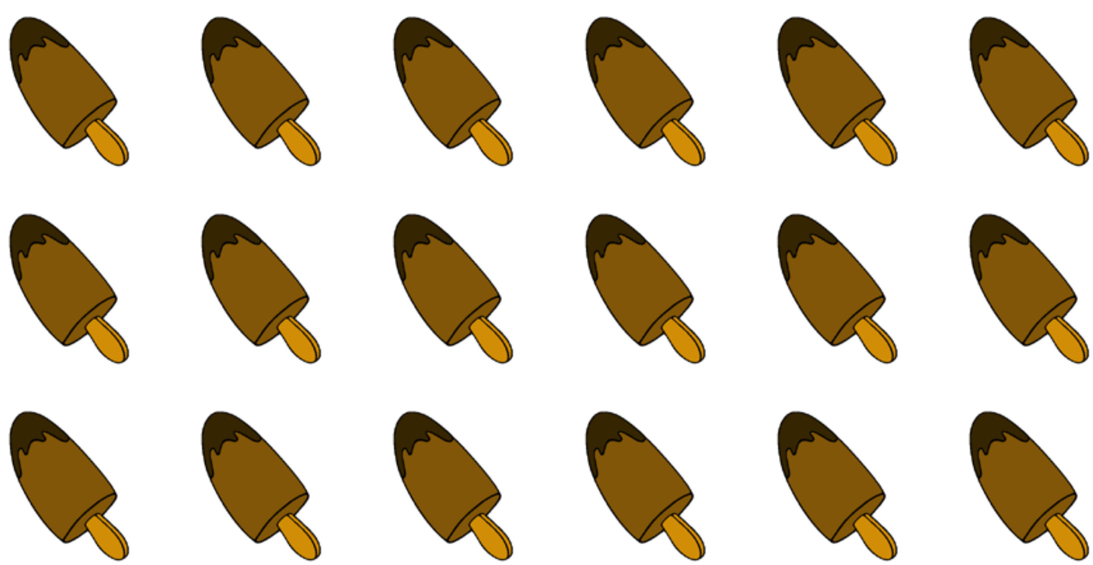
Actividad No. 1

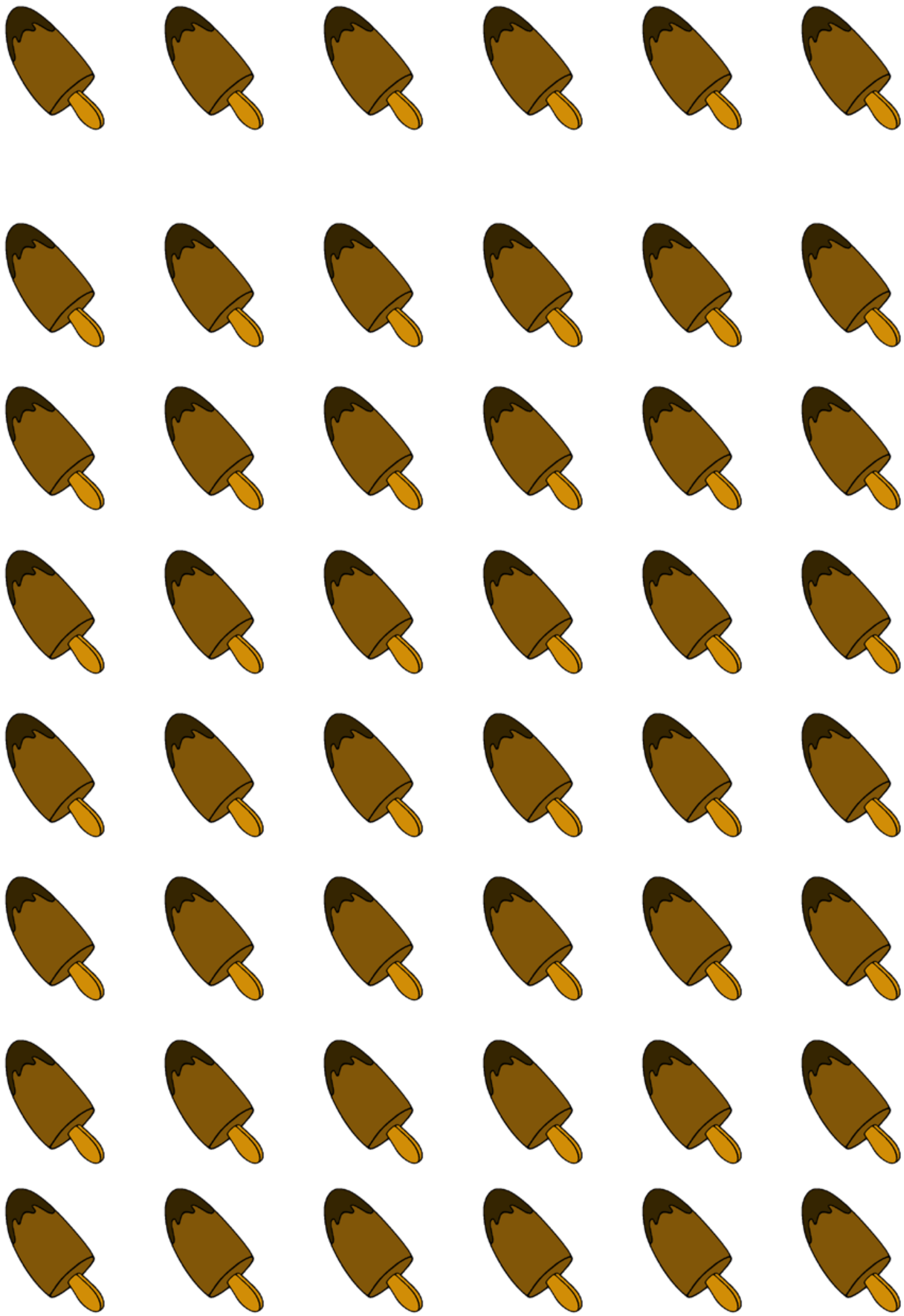
SE VENDEN PALETAS

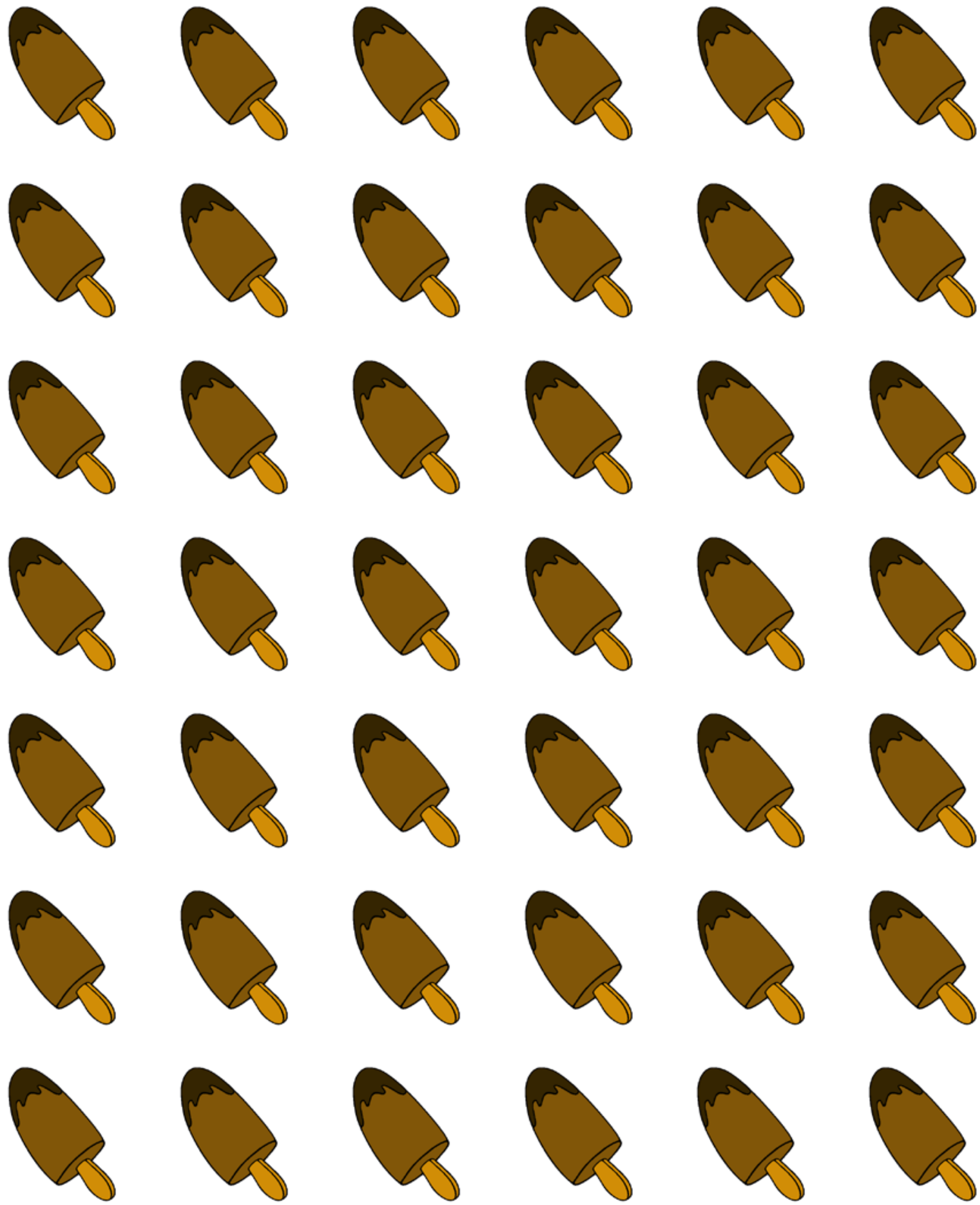
Indicaciones: Realiza la siguiente actividad.

Don Rómulo vende paletas de diferentes sabores en su tienda, él las vende por cajas, en bolsas y sueltas. Ayuda a don Rómulo a contar las paletas y después colócalas en cajas, en bolsas y ve cuántas le sobra.

- Para llenar una caja de paletas don Rómulo necesita formar 10 bolsas.
- Para formar una bolsa de paletas don Rómulo necesita 10 paletas.







Contesta las siguientes preguntas:

1.- ¿Cuántas bolsas puedes formar con estas paletas?

2.- ¿Cuántas cajas puedes formar con las mismas?

3.- ¿Cuántas le sobran a don Rómulo?

Actividad No. 2

Indicaciones: con un listón amarra 10 paletas y forma una bolsa, después coloca 10 bolsas para formar una caja. Observa cuántas quedan sueltas.

- Materiales: lengüetas, listón, plumón de colores (rojo, verde y amarillo).

Anota dentro del cuadro cuántas bolsas tienes, cuántas cajas has formado y cuántas paletas te quedan sueltas. Recuerda que las paletas sueltas corresponden a las unidades, las bolsas a las decenas y las cajas a las centenas.

	Cajas	Bolsas	Sueltas
Cantidad de paletas			

Contesta las siguientes preguntas:

1.- ¿Cuántas decenas puedes formar con estas lengüetas?

2.- ¿Cuántas centenas puedes tener con las lengüetas?

3.- ¿Cuántas te quedan sueltas?

Actividad No. 3

Escribe con número a cuántas unidades, decenas y centenas tienes.

Usa los siguientes colores:

Unidades: color rojo

Decenas: color verde

Centenas: color amarillo

- ❖ Recuerda que las paletas sueltas corresponden a las unidades, las bolsas a las decenas y las cajas a las centenas.

Centenas	Decenas	Unidades

¿Cuántas unidades tienes?

¿Cuántas decenas formaste?

¿Cuántas centenas formaste?

Alumno (a):________________________________ Fecha: _________

Hora de inicio _________ Hora de término: _________

Segunda Parte

Sistema de numeración decimal asociado al algoritmo

Instrucciones: resuelve los siguientes problemas.

Problema 1. Tengo 65 dulces. Después me dan 38 dulces, ¿Cuántos dulces tengo ahora?

Problema 2. Tengo 67 paletas. La maestra me quitó 16 para darles a mis compañeros. ¿Cuántas paletas me quedan?

Problema 3. La mamá de Dayra tiene 150 pesos y se gastó 90 pesos al comprar una muñeca. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

Problema 4. La mamá de Juan gastó en la compra de útiles escolares 245 pesos. Ella tenía 300 pesos, ¿Cuánto tiene ahora?

Alumno (a):___________________________________ Fecha: _________

Tercera Parte

Problemas de estructura aditiva

Instrucciones: resuelve los siguientes problemas

1.- Ana María tiene 130 pesos y Carlos tiene 165 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que Ana María?

2.- Cesar fue a la tienda el “Centro”. Compró huevo, pan y leche y gasto 65 pesos, le quedaron 45 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Cesar al llegar a la tienda?

3. En un juego Ismael tenía 48 canicas y ganó otros 26 y luego perdió 18. ¿Cuántas canicas tiene al final?

4. En un juego gané 62 puntos y luego perdí 71 puntos, ¿Cómo quedé al final?

ANEXO 5. CUESTIONARIO FINAL

Alumno (a):________________________________ Fecha: _________

Hora de inicio _________ Hora de término: _________

Contesta lo siguiente:

1.- Dictado de números

Nivel 2.decenas	Nivel 3.centenas	Nivel 4.unidades de millar	
______________	______________	______________	______________
______________	______________	______________	______________
______________	______________	______________	______________
______________	______________	______________	______________

2.- Escritura de números

79 ____

84 ____

99 ____

199 ____

901 ____

590 ____

1019 ____

1149 ____

1909 ____

3000 ____

4501 ____

5057 ____

3.- Coloca el número que va antes y el número que va después

__________ 029 _________

_________ 3585 _________

_________ 1600 _________

_________ 5895 _________

4.- Escribe a cuánto equivale:

Siete decena con nueve unidades ______________________________

Quince decenas con siete unidades _____________________________

Una centena con cinco decenas y seis unidades ___________________

Tres centenas con nueve unidades ______________________________

Cinco centenas con nueve decenas y siete unidades _________________

Nueve centenas con cero decenas y nueve unidades _________________

Cuestionario final

Alumno (a):________________________________ Fecha: ________

Indicaciones: Resuelve los siguientes problemas.

Problema 1. Tengo 165 dulces. Después me dan 115 dulces ¿Cuántos dulces tengo ahora?

Problema 2.Tengo 145 chocolates. La maestra me quitó 35 para darles a mis compañeros. ¿Cuántos chocolates me quedan?

Problemas

1.- María tiene 200 pesos y Carlos 247 pesos, ¿Cuánto dinero tiene más Carlos que María?

2.- En un juego Ismael tenía 118 canicas y ganó 27, y luego perdió 25. ¿Cuántas canicas tiene al final?

3. En un juego gané120 puntos y luego pierdo 95 puntos, ¿Cómo quedé al final?